Master teza

Matematički modeli optimizacije portfelja finansijskih instrumenata

Mentor:
prof. Slobodanka Janković

Student:
Katarina Milošević

Sadržaj

1. Uvod

Ovaj rad napisan je u svrhu sticanja master diplome na Matematičkom fakultetu Univerziteta u Beogradu. Rad je napisan pod mentorstvom profesorke Slobodanke Janković.

Investitori žele da, uzimajući u obzir njihove ciljeve, poseduju optimalan portfelj. Nekima je cilj da rizik koji preuzimaju posedovanjem portfelja bude što manji, dok je nekima cilj da dobitak koji ostvare bude što veći. U svakom od ovih slučajeva, potrebno je naći portfelj koji zadovoljava želje investitora. U te svrhe koriste se matematički modeli koji pronalaze optimalne udele raspoloživih vrednosnih papira. Ovaj rad objasniće osnovne karakteristike portfelja (glava 2). U glavi 2.1. objašnjeni su pojam očekivanja i varijanse portfelja, kao osnovne karakteristike koje opisuju portfelj. Razmatrani su slučajevi kada portfelj sadrži vrednosne papire koji nose određeni rizik da će investitori izgubiti izvesne količine novca, kao i slučaj kada portfelj sadrži i vrednosne papire koji ne nose rizik (glava 2.2). O sistemskom i nesistemskom riziku i jednoj od najpoznatijih karakteristika potrfelja Šarpovom količniku govori se u glavama 2.3. i 2.4.

U trećoj glavi najpre su objašnjeni modeli optimizacije, a zatim je samostalno u programu Microsoft Office Excel modelovan portfelj koji sadrži akcije pet velikih američkih kompanija (Yahoo, Apple, Amazon, Bank of America, Facebook). Analizirane su istorijske cene akcija ovih kompanija i na osnovu toga napravljen je portfelj koji će doneti najveći mogući prinos investitorima. Cilj je bio naći udele vrednosnih papira ovih kompanija koji će odgovoriti na potrebe investitora za prinosima, kao i na želje za preuzimanjem samo određene količine rizika. Za dati portfelj napravljena je granica efikasnosti koja prikazuje najveće moguće prinose za zadati rizik koji je investitor spreman da preuzme. Upoređeni su fiktivni portfelji sa modeliranim udelima i sa jednakim udelima kompanija korišćenjem realnih cena akcija sa njujorške berze iz dana koji su sledili dane sa istorijskim podacima.

U šestoj glavi opisani su načini ocenjivanja performansi portfelja (glava 4.1), kao i vrednost portfelja pri riziku (glava 4.2), koja predstavlja jednu od najviše upotrebljavanih mera pri odlučivanju investitora u koje kompanije vredi uložiti novac. Vrednost pri riziku izračunata je za kompanije Microsoft i AT&T, pri čemu su korišćeni podaci o cenama akcija ovih kompanija preuzeti sa sajta *finance.yahoo.com*. Uz pomoć istorijskih cena preduzeća Coca Cola Company modelovan je budući prinos portfelja koji sadrži akcije te kompanije i izračunata je vrednost od koje sa 99%-nom sigurnošću možemo tvrditi da gubitak portfelja neće biti veći.

Literatura nije posebno navođena u tekstu, već se na kraju rada nalazi spisak knjiga korišćenih pri pisanju rada.

2. Portfelj i njegove karakteristike

Cene vrednosnih papira se menjaju vremenom, neke manje a neke više. Takođe, postoje cene koje se menjaju u suprotnim smerovima: kada jedna raste, druga pada, i obrnuto. Zato ima smisla investirati u različite vrednosne papire i time se zaštititi od mogućih gubitaka. Najpre ćemo uvesti pojmove prinosa, log-prinosa, i definisati očekivani prinos i standardnu devijaciju portfelja finansijskih instrumenata.

2.1. Očekivanje i varijansa portfelja

Neka je dat vrednosni papir B. Cenu ovog vrednosnog papira na u trenutku t ozačimo sa B_t. Prinos vrednosnog papira od vremena $t-1$ do vremena t definišemo kao:

$$R_t = \frac{B_t - B_{t-1}}{B_{t-1}}.$$

Kada cena vrednosnog papira veoma malo varira ($B_t - B_{t-1} \approx 0$), korisno je definisati log-prinos. Prinos vrednosnog papira približno je jednak nuli:

$$R_t = \frac{B_t - B_{t-1}}{B_{t-1}} = \frac{B_t}{B_{t-1}} - 1 \approx 0.$$

Za malo x važi aproksimacija:

$$\log(1+x) \approx x,$$

pa takođe važi i:

$$\log\left(\frac{B_t}{B_{t-1}}\right) = \log\left(1 + \frac{B_t}{B_{t-1}} - 1\right) \approx \frac{B_t}{B_{t-1}} - 1 = R_t.$$

Kada su varijacije cene male, log-prinos približno je jednak prinosu.

Na dalje u ovom radu pretpostavka je da su prinosi vrednosnih papira slučajne promenljive.

Neka je dato n vrednosnih papira sa prinosima $R_1, R_2, \ldots, R_n$. Portfelj P formira se kao kombinacija ovih n vrednosnih papira. Udeo svakog vrednosnog papira obeležavamo sa ω_i i portfelj P ima oblik:

$$\omega_1 + \cdots + \omega_n.$$

U slučaju da su svi udeli veći ili jednaki nuli, onda je:

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1.$$

Ako je $\omega_i > 0$, onda je ω_i-ti deo kapitala uložen u i-ti vrednosni papir. Ako je $\omega_i = 0$, onda i-ti vrednosni papir ne pripada portfelju. Ako je $\omega_i < 0$, onda je taj deo portfelja pozajmljen i investitor ga ne poseduje i u nekom trenutku ga vraća.

Očekivani prinos vrednosnih papira je μ_i, a standardno odstupanje $\sigma_i, i = 1,2, \ldots, n$. Prinos portfelja P je:

$$R_P = \omega_1 R_1 + \cdots + \omega_n R_n.$$

a očekivani prinos portfelja P je:

$$\mu_P = \omega_1 E(R_1) + \cdots + \omega_n E(R_n)$$

$$\mu_P = \omega_1 \mu_1 + \cdots + \omega_n \mu_n.$$

Kovarijansu vrednosnih papira A_i i A_j definišemo na sledeći način:

$$\sigma_{ij} = E\big(R_i - E(R_i)\big)\Big(R_j - E\big(R_j\big)\Big).$$

Korelacija vrednosnih papira A_i i A_j je:

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}.$$

Neka je σ_{ij} kovarijansa vrednosnih papira A_i i A_j. Tada je standardno odstupanje portfelja:

$$\sigma_P^2 = E(R_P - \mu_P)^2$$

$$\sigma_P^2 = E(\sum_{i=1}^{n} \omega_i\, R_i - \sum_{i=1}^{n} \omega_i\, \mu_i)^2$$

$$\sigma_P^2 = E(\sum_{i=1}^{n} \omega_i\, (R_i - \mu_i))(\sum_{i=1}^{n} \omega_i\, (R_i - \mu_i))$$

$$\sigma_P^2 = E\left(\sum_{i,j=1}^{n} \omega_i \omega_j\, (R_i - \mu_i)(R_j - \mu_j)\right)$$

$$\sigma_P^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \omega_i \omega_j \sigma_{i,j}.$$

Neka je dato n međusobno nekorelisanih vrednosnih papira sa istim očekivanim prinosom μ i standardnim odstupanjem σ, i neka svaka investicija ima isti udeo u portfelju. Tada je:

$$\omega_i = \frac{1}{n},$$

a prinos portfelja:

$$R_P = \frac{1}{n} \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} R_i.$$

Očekivani prinos je:

$$\mu_P = \omega_1 \mu + \cdots + \omega_n \mu$$

$$\mu_P = \frac{1}{n}\mu + \cdots + \frac{1}{n}\mu$$

$$\mu_P = \mu.$$

Pokazali smo da očekivana vrednost prinosa ne zavisi od broja investicija, već samo od očekivanog prinosa pojedinačnog vrednosnog papira.

Varijansa ovog portfelja je:

$$\sigma_P^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \omega_i \omega_j \sigma_{i,j} = \frac{1}{n}\sigma^2.$$

Vidimo da se varijansa portfelja smanjuje kada se broj vrednosnih papira sa istim očekivanim prinosom i standardnim odstupanjem povećava. Ako važe sve prethodne pretpostavke osim da su vrednosni papiri nekorelisani, i ako je kovarijansa $\sigma_{i,j} = k\sigma^2$, onda je varijansa portfelja:

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} \sigma^2 + \sum_{i \neq j} k\, \sigma^2\right)$$

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{n^2}(n\sigma^2 + (n^2 - n)k\sigma^2)$$

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{n}\sigma^2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)k\sigma^2.$$

Primećujemo da uvek važi: $\sigma_p^2 > k\sigma^2$, što znači da varijansa ovog portfelja ne može biti manja od $k\sigma^2$.

Posmatramo portfelj koji sadrži dva vrednosna papira, A_1 i A_2. Vrednosni papir A_1 ima očekivani prinos μ_1 i standardnu devijaciju σ_1, a vrednosni papir A_2 μ_2 i σ_2. Težinski koefcijienti biće $\omega_1 = \alpha > 0$ i $\omega_2 = 1 - \alpha$. Očekivani prinos i varijansa ovog portfelja su:

$$\mu_P = \omega_1\mu_1 + \omega_2\mu_2$$

$$\sigma_P^2 = (\sigma_1\omega_1)^2 + (\sigma_2\omega_2)^2 + 2\omega_1\omega_2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2.$$

Kada zamenimo $\omega_1 = \alpha$ i $\omega_2 = 1 - \alpha$ u prethodnom izrazu za varijansu portfelja, dobijamo jednačinu:

$$\sigma_P^2 = (\sigma_1\alpha)^2 + (\sigma_2(1-\alpha))^2 + 2\alpha(1-\alpha)\rho_{12}\sigma_1\sigma_2.$$

Za različite vrednosti korelacije vrednosnih papira A_1 i A_2 dobićemo različite granice efikasnog portfelja, o čemu će biti reči u daljem tekstu.

Savršena korelacija među vrednosnim papirima je kada je ρ_{12}=1. Tada je varijansa:

$$\sigma_P^2 = (\sigma_1\alpha)^2 + (\sigma_2(1-\alpha))^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_1\sigma_2,$$

što se može napisati u obliku:

$$\sigma_P^2 = (\sigma_1\alpha + \sigma_2(1-\alpha))^2.$$

Očekivani prinos u ovom slučaju je:

$$\mu_P = \mu_1 + \frac{\mu_2 - \mu_1}{\sigma_2 - \sigma_1}(\sigma_p - \sigma_1).$$

U ravni (σ_p, μ_P) portfelje za koje važi $\rho_{12} = 1$ opisuje prava koja se menja između 100% ulaganja u vrednosni papir A_1 i 100% ulaganja u vrednosni papir A_2.

Ako je $\rho_{12} = 0$, među vrednosnim papirima nema korelacije. Tada je varijansa portfelja:

$$\sigma_P^2 = (\sigma_1\omega_1)^2 + (\sigma_2\omega_2)^2.$$

Da bismo našli portfelj sa minimalnom varijansom, rešavamo jednačinu:

$$\frac{\partial\sigma_P}{\partial\alpha} = 0.$$

Nalazimo α:

$$\alpha^* = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}.$$

Očekivani prinos ovog portfelja je:

$$\mu^* = \frac{\sigma_2^2\mu_1 + \sigma_2^2\mu_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}.$$

Savršena antikorelacija među vrednosnim papirima A_1 i A_2 je slučaj kada je $\rho_{12} = -1$. Tada je varijansa portfelja:

$$\sigma_P^2 = (\sigma_1\alpha)^2 + (\sigma_2(1-\alpha))^2 - 2\alpha(1-\alpha)\sigma_1\sigma_2,$$

što se može napisati kao:

$$\sigma_P^2 = (\sigma_1\alpha - \sigma_2(1-\alpha))^2.$$

Ova jednačina ima dva rešenja za σ_P:

$$\sigma_P = \sigma_1\,\alpha - \sigma_2(1-\alpha) \text{ i } \sigma_P = \sigma_2(1-\alpha) - \sigma_1\,\alpha.$$

Nalazimo α za koje je $\sigma_P = 0$:

$$\alpha^* = \frac{\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}.$$

Za izračunato α prinos portfelja je:

$$\mu_P^* = \frac{\sigma_2\mu_1+\mu_2\sigma_1}{s_1+s_2}.$$

Primer 1

Sa sajta *finance.yahoo.com* preuzeli smo cene akcija preduzeća Google Inc. i Facebook Inc. u periodu od 15. do 23. jula 2013. godine. Najpre računamo prinos na akcije formulom:

$$R_t = \frac{B_t - B_{t-1}}{B_{t-1}} = \frac{B_t}{B_{t-1}} - 1,$$

gde je B_t cena akcije korigovana za isplatu dividendi. Računamo prinose:

Datum	Cena na zatvaranju dana - Google	Cena na zatvaranju dana - Facebook	Google - prinos	Facebook - prinos
15-Jul-13	924.69	26.28	-	-
16-Jul-13	919.61	26.32	-0.55%	0.15%
17-Jul-13	918.55	26.65	-0.12%	1.25%
18-Jul-13	910.68	26.18	-0.86%	-1.76%
19-Jul-13	896.60	25.88	-1.55%	-1.15%
22-Jul-13	902.00	26.05	0.60%	0.66%

Primetimo da prinos ne možemo da izračunamo za prvi dan za koji posedujemo podatke. Zatim računamo srednji prinos za ovih pet dana za oba preduzeća.

$$\overline{R_{t,1}} = \frac{\sum R_i}{5} = -0.0049$$

$$\overline{R_{t,2}} = \frac{\sum R_i}{5} = -0.0017.$$

Uzoračku kovarijansu računamo formulom:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sum(R_{t,1} - \overline{R_1})(R_{t,2} - \overline{R_2})}{n-1},$$

i dobijamo:

$$\sigma_{1,2} = 0.0000758.$$

Da bismo izračunali korelaciju, najpre računamo uzoračke varijanse prinosa ovih dveju kompanija:

$${\sigma_1}^2 = \frac{(R_{1,1})^2 + \cdots + (R_{5,1})^2}{5-1} = 0.000095$$

$$\sigma_2{}^2 = \frac{(R_{1,2})^2 + \cdots + (R_{5,2})^2}{5-1} = 0.000161,$$

a zatim računamo korelaciju:

$$\rho_{1,2} = \frac{\sigma_{1,2}}{\sigma_1 \sigma_2} = 61\%.$$

Primer 2

Dat je portfelj koji sadrži dva vrednosna papira čiji su očekivani prinosi 0.0625 i 0.0324, a standardne devijacije prinosa 25% i 18%. Izračunati očevani prinos i standardnu devijaciju portfelja sa jednakim udelom vrednosnih papira za različite korelacije vrednosnih papira: 1, 0.5, 0, i -0.5.

Varijansu portfelja računamo formulom:

$$\sigma_P^2 = (\sigma_1 \omega_1)^2 + (\sigma_2 \omega_2)^2 + 2\omega_1 \omega_2 \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2.$$

Za korelaciju ρ_{12}=1 standardna devijacija portfelja je:

$$\sigma = 0.5(25\%) + 0.5(18\%) = 21.5\%,$$

a varijansa:

$$\sigma^2 = (21.5\%)^2 = 0.046225.$$

Za korelaciju ρ_{12}=0.5 varijansa portfelja je:

$$\sigma^2 = (0.5^2)0.0625 + (0.5^2)0.0324 + 2(0.5)(0.5)(0.5)(0.25)(0.18) = 0.034975,$$

a standardna devijacija σ =18.70%.

Kada je korelacija ρ_{12}=0, varijansa portfelja je:

$$\sigma^2 = (0.5^2)0.0625 + (0.5^2)0.0324 = 0.023725,$$

a standardna devijacija σ =15.40%.

Za korelaciju ρ_{12}=-0.5 varijansa portfelja je:

$$\sigma^2 = (0.5^2)0.0625 + (0.5^2)0.0324 + 2(0.5)(0.5)(-0.5)(0.25)(0.18) = 0.012475,$$

a standardna devijacija σ =11.17%.

Iz ovog primera vidimo da rizik koji meri standardna devijacija pada kako se korelacija među vrednosnim papirima smanjuje. To znači da što je niža korelacija među vrednosnim papirima, rizik se više može smanjiti kombinovanjem vrednosnih papira u portfelju. Da su vrednosni papiri savršeno negativno korelisana, rizik portfelja mogao bi biti potpuno eliminisan za određenu kombinaciju udela vrednosnih papira.

2.2. Kombinacija bezrizičnog vrednosnog papira i portfelja rizičnih vrednosnih papira

U prethodnom delu posmatrali smo slučaj kada portfelj sadrži dva rizična vrednosna papira. Sada ćemo izračunati očekivani prinos i rizik portfelja koji sadrži jedan rizični vrednosni papir i bezrizični vrednosni papir. Neka je udeo rizičnog vrednosnog papira ω_1. Tada je udeo bezrizičnog vrednosnog papira 1-ω_1. Očekivani prinos tog portfelja je:

$$\mu_P = \omega_1\mu_1 + (1 - \omega_1)\mu_2,$$

gde su μ_1 i μ_2 očekivani prinosi rizičnog i bezrizičnog vrednosnog papira. Varijansa portfelja je:

$$\sigma_P^2 = (\sigma_1\omega_1)^2 + (\sigma_2\omega_2)^2 + 2\omega_1\omega_2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2.$$

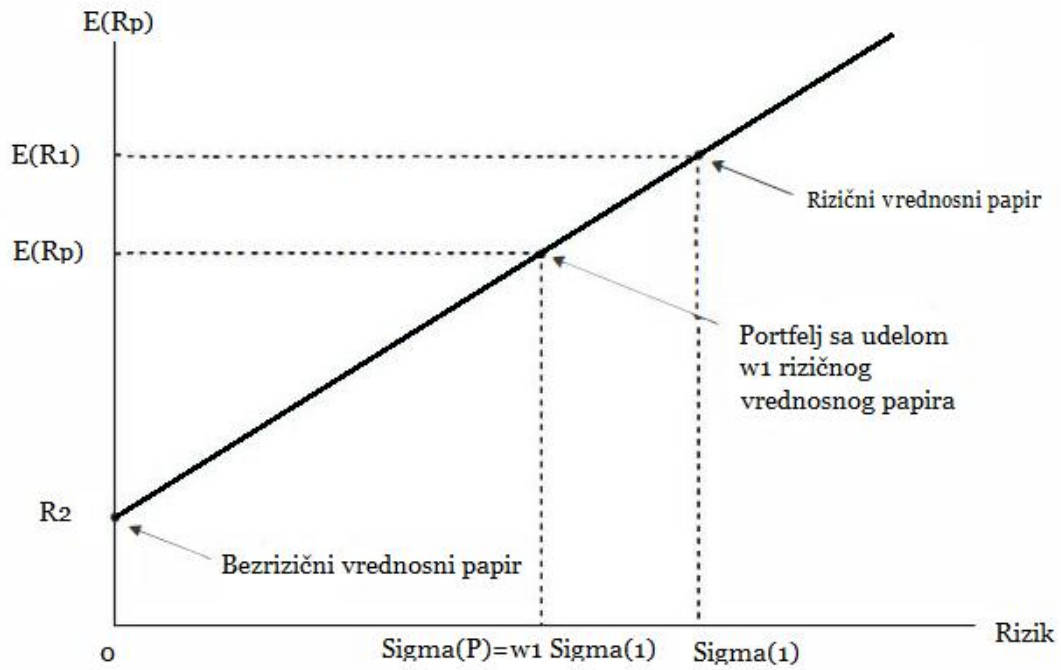
Kako je standardna devijacija bezrizičnog vrednosnog papira nula, i korelacija prinosa rizičnog i bezrizičnog vrednosnog papira nula, varijansa portfelja je:

$$\sigma_P^2 = (\sigma_1\omega_1)^2,$$

a standardna devijacija:

$$\sigma_P = \sigma_1\omega_1.$$

Rezultat posmatranja ovog portfelja je da se rizik koji merimo standardnom devijacijom i očekivani prinos portfelja sa različitim udelima bezrizičnog vrednosnog papira mogu predstaviti pravom koja seče y-osu u tački koja predstavlja prinos bezrizičnog vrednosnog papira. Ovo će biti dokazano u poglavlju Prava kapitala tržišta. Prava je prikazana na Slici 1.



Slika 1 - Portfelj sa rizičnim i bezrizičnim sredstvom

Primer 3

Neka je bezrizična kamatna stopa 5%, očekivana stopa tržišnog prinosa 11%, a standardna devijacija tržišnog prinosa 11%. Izračunati očekivani prinos i standardnu devijaciju prinosa za portfelje koji su 25%, 75% i 125% investirani u tržišni portfelj.

Računamo očekivane prinose portfelja formulom:

$$E(R_P) = (1 - \omega_M)r_f + \omega_M E(R_\mathrm{M}),$$

gde je r_f bezrizična kamatna stopa, $E(R_P)$ očekivani prinos portfelja, $E(R_\mathrm{M})$ očekivani prinos tržišta, a ω_M udeo portfelja investiran u tržišni portfelj, i dobijamo rezultate:

$$\omega_{M1} = 25\% \; E(R_{P1}) = 6.5\%$$

$$\omega_{M2} = 75\% \; E(R_{P2}) = 9.5\%$$

$$\omega_{M3} = 125\% \; E(R_{P3}) = 12.5\%,$$

gde su ω_{M1}, ω_{M2} i ω_{M3} očekivani prinosi portfelja koji su 25%, 75% i 125% investirani u tržišni portfelj.

Standardnu devijaciju prinosa računamo formulom:

$$\sigma_P = \sigma_M \omega_M.$$

Standardne devijacije prinosa portfelja koji su 25%, 75% i 125% investirani u tržišni portfelj su:

$$\sigma_{M1} = 25\% \; \sigma_{P1} = 5\%$$

$$\sigma_{M2} = 75\% \; \sigma_{P2} = 15\%$$

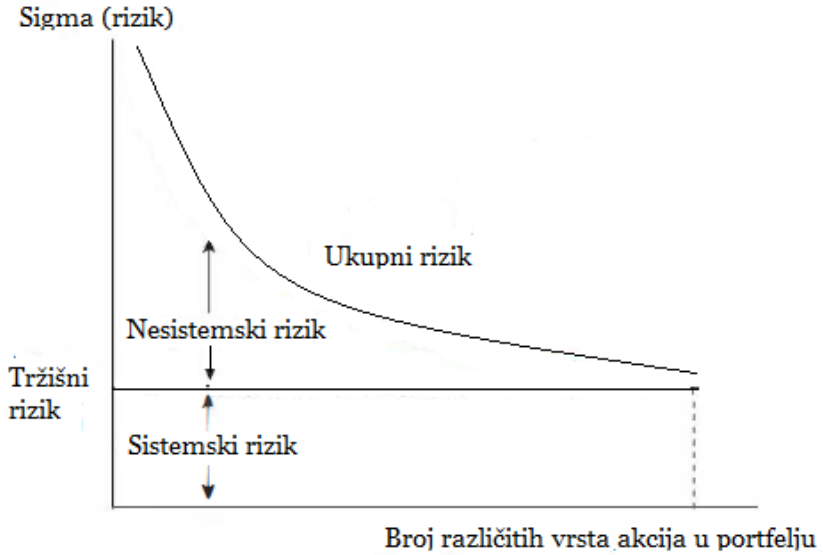
$$\sigma_{M3} = 125\% \; \sigma_{P3} = 25\%.$$

Investitor koji 125% investira u tržište mora da pozajmi 25% novca koji poseduje. To znači da će, ako ima 100 000 jedinica novca, pozajmiti još 25 000 jedinica i investirati 125 000 jedinica novca, pri čemu će standardna devijacija tog portfelja biti 25%.

2.3. Sistematski i nesistematski rizik. Capital Asset Pricing Model

Kada investitor izabere vrednosne papire koji nisu međusobno savršeno korelisani, standardna devijacija portfelja (koju ćemo zvati rizik) manja je nego ponderisani prosek standardnih devijacija pojedinačnih vrednosnih papira u portfelju. Diversifikacija portfelja predstavlja ulaganje u različite vrednosne papire sa ciljem smanjenja rizika. Rizik koji se eliminiše diversifikacijom zove se nesistematski rizik. Kada se uradi diversifikacija, rizik koji preostaje i koji ne može dalje biti diversifikovan, zove se sistematski rizik portfelja. Ukupan rizik tržišta jednak je zbiru sistematskog i nesistematskog rizika. Poznato je da akcije preduzeća koja proizvode luksuznu robu imaju visok sistemski rizik, dok ostala preduzeća reaguju vrlo malo na promene sistematskog rizika.

Međutim, da bi se portfelj diversifikovao, nije uvek potrebno posedovati sve vrste dostupnih akcija. U nekim studijama pokazano je da je u većini slučajeva dovoljno posedovati 60% dostupnih vrsta akcija i time postići 90% moguće diversifikacije. Na slici 3 prikazan je odnos broja akcija i rizika.



Slika 2 - Sistematski i nesistematski rizik tržišta

Nesistematski rizik neće uvek doneti veći prinos jer može biti eliminisan bez troškova diversifikacijom portfelja. Sistematski rizik meri se doprinosom akcije riziku dobro diversifikovanog portfelja.

Postoji više vrsta modela za ocenjivanje prinosa. Modeli za generisanje prinosa koriste se da bi se izračunao očekivani prinos rizičnih vrednosnih papira na osnovu određenih faktora. Za svaki vrednosni papir određuje se osetljivost prinosa na svaki faktor. Ti faktori mogu biti statistički i makroekonomski. Opšta forma višefaktorskog modela sa k faktora je:

$$E(R_i) - r_f = \beta_{i1}E(Faktor\ 1) + \cdots + \beta_{ik}E(Faktor\ k),$$

gde je r_f bezrizična kamatna stopa, $E(R_i)$ očekivani prinos i-tog vrednosnog papira, $E(Faktor\ j)$ očekivani prinos j-tog faktora, a β_{ij} osetljivost i-tog vrednosnog papira na j-ti faktor.

Ovaj model pretpostavlja da je očekivani prinos iznad bezrizične kamatne stope za i-ti vrednosni papir jednak sumi proizvoda osetljivosti vrednosnog papira na faktore β_{ij} i očekivane vrednosti tog

faktora za određeni vremenski period. Obično je prvi faktor ovakvih modela očekivani prinos celog tržišta iznad bezrizične kamatne stope $(R_m - r_f)$, gde je r_f bezrizična kamatna stopa na tržištu, a R_m prinos tržišta.

Prinos i-tog vrednosnog papira na tržištu se po Capital Asset Pricing modelu (CAPM) računa formulom:

$$R_i = r_f + \beta_i(R_m - r_f) + e_i,$$

gde je e_i slučajna promenljiva sa normalnom raspodelom $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ nezavisna od R_m. Tada je očekivani prinos:

$$E(R_i) = r_f + \beta_i(E(R_m) - r_f)$$

$$E(R_i) - r_f = \beta_i(E(R_m) - r_f).$$

Primetimo da je očekivani prinos iznad bezrizične kamatne stope jednak proizvodu faktora osetljivosti β_i i razlike očekivanog prinosa tržišta i bezrizične kamatne stope.

Kovarijansa prinosa i-tog vrednosnog papira i celog tržišta je:

$$cov(R_i, R_m) = cov(r_f + \beta_i(R_m - r_f) + e_i, R_m)$$

$$cov(R_i, R_m) = \beta_i cov(R_m, R_m) + cov(e_i, R_m)$$

$$cov(R_i, R_m) = \beta_i D(R_m)$$

Koeficijent β_i možemo izraziti preko kovarijanse vrednosnog papira B_i i celog tržišta i disperzije tržišta:

$$\beta_i = \frac{cov(R_i, R_m)}{D(R_m)}.$$

Koeficijent nagiba β_i u praksi se računa iz istorijskih podataka.

Primer 4

Ako je standardna devijacija vrednosnog papira B 30% i korelacija prinosa tog vrednosnog papira i prinosa tržišta 0.8, koliki je koeficijent β_i nagiba u CAPM modelu?

$$\beta_i = \frac{cov(R_i, R_m)}{D(R_m)} = \frac{\rho_{i,m}\sigma_i\sigma_m}{{\sigma_m}^2} = \frac{\rho_{i,m}\sigma_i}{\sigma_m}$$

$$\beta_i = \frac{0.8(0.3)}{0.2} = 1.2.$$

Koeficijent β_i može se oceniti regresijom prinosa vrednosnog papira i prinosa tržišta. Uglavnom se koristi metod najmanjih kvadrata, gde β_i predstavlja nagib dobijene prave. Kada je prava strmija od 45 stepeni, tj. β_i je veće od jedan, tada zaključujemo da prinos datog vrednosnog papira više varira u odnosu na sistematski rizik nego prinos celog tržišta.

Primer 5

Želimo da identifikujemo precenjene i potcenjene akcije. Bezrizična kamatna stopa je 7%, a očekivani prinos tržišta 15%. Prognozirani su podaci o očekivanoj ceni posle jedne godine, isplati dividendi i koeficijentu beta:

Akcija	Cena	Očekivana cena za godinu dana	Očekivana isplata dividendi za godinu dana	Beta
A	25	27	1	1
B	40	45	2	0.8
C	15	17	0.5	1.2

Računamo prinos po CAPM modelu formulom:

$$E(R_i) = r_f + \beta_i\big(E(R_m) - r_f\big),$$

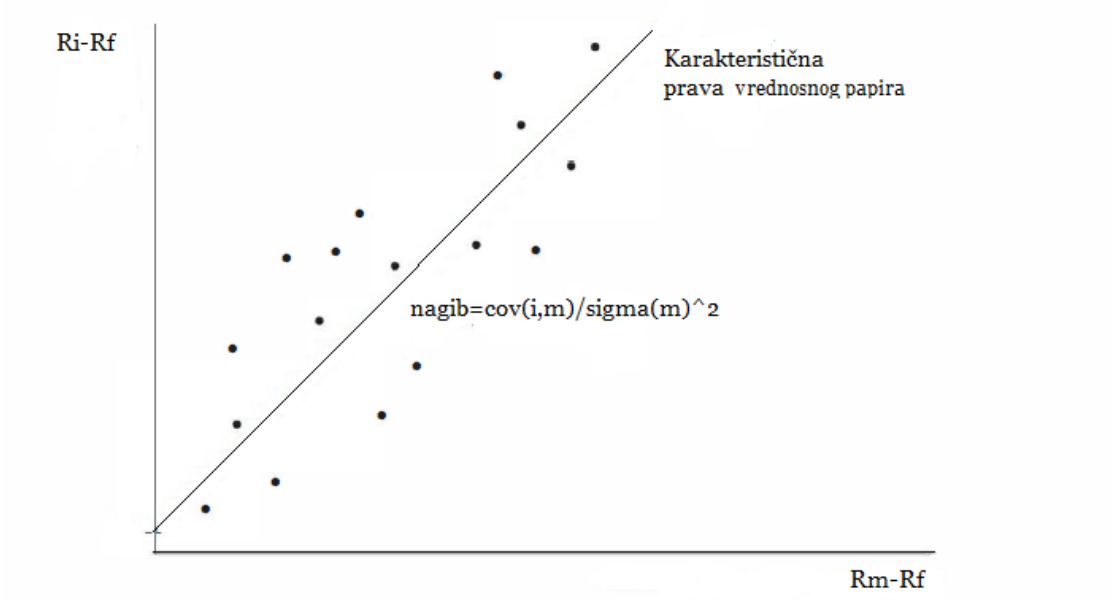
a prognozirani prinos dobijamo kada od očekivane cene za godinu dana oduzmemo trenutnu cenu, dodamo dividende i podelimo sa sadašnjom vrednošću akcije. Dobijamo:

Akcija	Prinos po modelu	Prognozirani prinos
A	15.00%	12.00%
B	13.40%	17.50%
C	16.60%	16.67%

Vidimo da je akcija A precenjena, jer njen prinos po modelu treba da bude 15%, a prognoza je da će biti 12%. Akcija B je potcenjena jer je prognozirani prinos veći od prinosa po modelu. Akcija C je dobro vrednovana.

Pri ocenjivanju parametra β regresijom prinosa vrednosnog papira iznad bezrizične kamatne stope i prinosa tržišta iznad bezrizične kamatne stope, zavisna promenljiva je prinos vrednosnog papira iznad bezrizične kamatne stope. Metod najmanjih kvadrata minimizira sumu kvadrata rastojanja tačaka od prave koja najbolje odgovara datim tačkama. Nagib ove prave je traženo β. Prava se naziva karakteristična prava vrednosnog papira. Nagib se izračunava kao:

$$\frac{cov(R_i,R_m)}{{\sigma_m}^2}.$$



Slika 3 - Karakteristična prava vrednosnog papira

2.4. Šarpov količnik

Postoji više načina da se oceni portfelj. Jedan od najpoznatijih pokazatelja jeste Šarpov količnik. Ako je r_f bezrizična kamatna stopa, R_P prinos portfelja, a σ_P standardna devijacija prinosa portfelja, onda je Šarpov količnik dat formulom:

$$\frac{R_P - r_f}{\sigma_P}.$$

Šarpov količnik predstavlja prinos iznad bezrizične stope po jedinici ukupnog rizika portfelja. Veći Šarpov količnik ukazuje na to da je portfelj bolje prilagođen postojećem riziku. Šarpov količnik u obzir uzima i svaki preuzeti nesistemski rizik, jer u formuli učestvuje ukupni rizik, a ne samo sistemski. Vrednosti Šarpovog količnika različitih portfelja mogu se porediti.

Šarpov količnik je korisna mera jer pokazuje da, iako portfelj može imati veći prinos od ostalih portfelja, to je dobra investicija samo ukoliko viši prinosi ne dolaze sa previše dodatnog rizika. Ako je Šarpov količnik negativan, to nam govori da je $R_P < r_f$, što znači da bi bezrizični vrednosni papir doneo veći prinos od vrednosnog papira koji posedujemo.

Primer 6

Dat je portfelj koji sadrži 1000 akcija kompanije Apple i istorijske vrednosti portfelja za 30 dana od 17. juna do 30. jula 2013. Želimo da izračunamo Šarpov koeficijent tog portfelja.

Neka je B_t vrednost portfelja u trenutku t. Prinose računamo formulom:

$$R_t = \frac{B_t}{B_{t-1}} - 1.$$

U tabeli su izračunati prinosi:

Dan	Vrednost portfelja	Prinos
1	432.00	
2	431.77	-0.05%
3	423.00	-2.03%
4	416.84	-1.46%
5	413.50	-0.80%
6	402.54	-2.65%
7	402.63	0.02%
8	398.07	-1.13%
9	393.78	-1.08%
10	396.53	0.70%
11	409.22	3.20%
12	418.49	2.27%
13	420.80	0.55%
14	417.42	-0.80%
15	415.05	-0.57%
16	422.35	1.76%
17	420.73	-0.38%
18	427.29	1.56%
19	426.51	-0.18%
20	427.44	0.22%
21	430.20	0.65%
22	430.31	0.03%
23	431.76	0.34%

24	424.95	-1.58%
25	426.31	0.32%
26	418.99	-1.72%
27	440.51	5.14%
28	438.50	-0.46%
29	440.99	0.57%
30	447.79	1.54%
31	453.32	1.23%

Sada računamo prosečni prinos $\bar{R}$ kao sumu svih prinosa R_t podeljenu brojem dana (30):

$$\bar{R} = \frac{\sum R_t}{30} = 0.17\%.$$

Srednji godišnji prinos $\overline{R_{god}}$ dobijamo kada srednji dnevni prinos pomnožimo sa 365 dana:

$$\overline{R_{god}} = 0.17\% * 365 = 63\%.$$

Da bismo dobili brojilac Šarpovog količnika, od srednjeg godišnjeg prinosa oduzimamo godišnju bezrizičnu kamatnu stopu:

$$\overline{R_{god}} - r_f = 63\% - 3\% = 60\%.$$

Računamo standardnu devijaciju za 30 dana:

$$\sigma_P = 0.01611,$$

i množimo je sa korenom iz 365 da bismo dobili godišnju:

$$\sigma_{P-god} = 0.30771.$$

Konačno, računamo Šarpov količnik:

$$\frac{\overline{R_{god}} - r_f}{\sigma_{P-god}} = 1.9558.$$

3. Modelovanje optimalnog portfelja

3.1. Model Harija Markovica

Model Harija Markovica, koji je 1952. razvio teoriju modenog portfelja, služi da se napravi optimalni portfelj sa različitim kombinacijama vrednosnih papira. Razmatraćemo model u kome su moguće takozvane „kratkotrajne prodaje" (prodaje vrednosnog papira koji ne posedujemo i koji u nekom trenutku moramo vratiti) i bezrizično pozajmljivanje vrednosnih papira. Cilj je da se istovremeno maksimizuje profit i minimizuje rizik.

Među svim portfeljima sastavljenih od rizičnih vrednosnih papira koji imaju isti prinos treba naći onaj koji ima najmanji rizik, tj. onaj čije je standardno odstupanje najmanje. Posmatramo ravan čija x-osa predstavlja standardno odstupanje σ_P, a y-osa očekivani prinos. Neke investicije su rizične, a neke bezrizične. Optimalni portfelj biće na pravoj koja povezuje bezrizične investicije sa rizičnim portfeljima i gde ta prava postaje tangenta skupa rizičnih portfelja. Tražena prava imaće najveći nagib. U datoj ravni (σ_p, μ_P) nagib definišemo kao Šarpov količnik:

$$\theta = \frac{\overline{R_P} - r_f}{\sigma_p},$$

gde je r_f bezrizična kamatna stopa, $\overline{R_P}$ srednji prinos portfelja, a σ_p standardno odstupanje portfelja. Označimo težinske koeficijente koji predstavljaju udeo svakog vrednosnog papira sa $\omega_1, \dots, \omega_n$. Uslov za rešavanje ovog problema je:

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1.$$

Ovaj problem rešićemo uz pomoć Lagranžovih multiplikatora. Uslov ćemo zameniti u jednačinu:

$$r_f = r_f \cdot 1 = \left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i\right) \cdot r_f = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \omega_i \, r_f.$$

Kada zamenimo ovaj zapis za bezrizičnu kamatnu stopu, očekivani prinos i standardnu devijaciju u jednačinu za nagib, dobijamo:

$$\theta = \frac{\sum_{i=1}^{n} \omega_i \, (\overline{R_i} - r_f)}{\left(\sum_{i=1}^{n} {\omega_i}^2 {\sigma_i}^2 + \sum_{i,j=1}^{n} \omega_i \omega_j \sigma_{i,j}\right)^{1/2}}.$$

Da bismo našli maksimalno θ, treba izvode po promenljivima ω_i da izjednačimo sa nulom. Dobijamo sistem jednačina:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \omega_1} = 0,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \omega_2} = 0,$$

$$\dots,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \omega_n} = 0.$$

Koristićemo Lagranžovu teoremu (dokazanu u knjizi navedenoj u literaturi pod stavkom 1).

Teorema. *Neka je X otvoren u R^n i f, g: X -> R funkcije koje pripadaju klasi neprekidno diferencijabilnih funkcija C^1, a S skup definisan na sledeći način: S={$x \in X, g(x) = c$}. Tada, ako restrikcija funkcije f na S ima ekstremnu vrednost u tački x_o, takvu da je $g'(x_0) \neq 0$, onda postoji skalar λ takav da važi $f'(x_0) = \lambda g'(x_0)$.*

Skalar λ zovemo Lagranžov multiplikator. Najpre ćemo formirati vektorsku jednačinu:

$$f'(x) = \lambda g'(x).$$

Zatim rešavamo sistem:

$$f'(x) = \lambda g'(x)$$

$$g(x) = c.$$

Dobijamo *n+1* jednačinu sa *n+1* promenljivih $x_1, \dots, x_n, \lambda$:

$$f_{x_1}(x_1, \dots, x_n) = \lambda g_{x_1}(x_1, \dots, x_n)$$

$$f_{x_2}(x_1, \dots, x_n) = \lambda g_{x_2}(x_1, \dots, x_n)$$

$$\dots$$

$$f_{x_n}(x_1, \dots, x_n) = \lambda g_{x_n}(x_1, \dots, x_n)$$

$$g(x_1, \dots, x_n) = c.$$

Rešenje $(x_1, \dots, x_n)$, kao i ostale tačke koje zadovoljavaju *g(x)=c* i *g'(x)*=0, kandidati su za ekstremum ovog problema. Nakon rešavanja sistema, utvrđuje se priroda funkcije *f* u kritičnim tačkama (minimum, maksimum, ili nijedno od ta dva).

Vratimo se na nalaženje Šarpovog koeficijenta θ. Napisaćemo θ u sledećem obliku:

$$\theta = \left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i \left(\overline{R}_i - r_f\right)\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i{}^2 \sigma_i{}^2 + \sum_{i,j=1}^{n} \omega_i \omega_j \sigma_{i,j}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Nalazimo izvod θ po ω_i:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \omega_k} = \left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i \left(\overline{R}_i - r_f\right)\right)\left[\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i{}^2 \sigma_i{}^2 + \sum_{i,j=1}^{n} \omega_i \omega_j \sigma_{i,j}\right)^{-\frac{3}{2}} \left(2\omega_k \sigma_k{}^2 + 2\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \omega_j \sigma_{kj}\right)\right] + \left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i{}^2 \sigma_i{}^2 + \sum_{i,j=1}^{n} \omega_i \omega_j \sigma_{i,j}\right)^{-1/2} \left(\overline{R_k} - r_f\right) = 0.$$

Kada ovaj izvod pomnožimo sa:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i{}^2 \sigma_i{}^2 + \sum_{i,j=1}^{n} \omega_i \omega_j \sigma_{i,j}\right)^{1/2},$$

dobijamo:

$$-\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} \omega_i \left(\overline{R_i} - r_f\right)}{\sum_{i=1}^{n} \omega_i{}^2 \sigma_i{}^2 + \sum_{i,j=1}^{n} \omega_i \omega_j \sigma_{i,j})}\right]\left(\omega_k \sigma_k{}^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \omega_j \sigma_{kj}\right) + \left(\overline{R_k} - r_f\right) = 0.$$

Definišemo Lagranžov multiplikator:

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^{n} \omega_i \left(\overline{R_i} - r_f\right)}{\sum_{i=1}^{n} \omega_i{}^2 \sigma_i{}^2 + \sum_{i,j=1}^{n} \omega_i \omega_j \sigma_{i,j})}.$$

Sledi da je:

$$-\lambda\left(\omega_k{\sigma_k}^2+\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}\omega_j\sigma_{kj}\right)+\left(\overline{R_k}-r_f\right)=0.$$

Množenjem dobijamo:

$$\left(\lambda\omega_k{\sigma_k}^2+\lambda\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}\omega_j\sigma_{kj}\right)+\left(\overline{R_k}-r_f\right)=0,$$

što možemo da zapišemo kao:

$$\frac{\partial\theta}{\partial\omega_i}=-(\lambda\omega_1\sigma_{1i}+\lambda\omega_2\sigma_{2i}+\cdots+\lambda\omega_i{\sigma_i}^2+\cdots+\lambda\omega_n\sigma_{ni})+\overline{R_\iota}-r_f=0.$$

Sada definišemo novu promenljivu $Z_k=\lambda\omega_k$. To znači da su veličine Z_k proporcionalne udelima svake investicije ω_k. Dobijamo jednačinu:

$$\overline{R_\iota}-r_f=Z_1\sigma_{1i}+Z_2\sigma_{2i}+\cdots+Z_i{\sigma_i}^2+\cdots+Z_n\sigma_{ni}.$$

Treba rešiti sistem jednačina:

$$\overline{R_1}-r_f=Z_1{\sigma_1}^2+Z_2\sigma_{12}+\cdots+Z_n\sigma_{1n}$$

$$\overline{R_2}-r_f=Z_1\sigma_{12}+Z_2{\sigma_2}^2+\cdots+Z_n\sigma_{1n}$$

$$\cdots$$

$$\overline{R_n}-r_f=Z_1\sigma_{12}+Z_2\sigma_{12}+\cdots+Z_n{\sigma_n}^2.$$

Ovaj sistem n jednačina ima n nepoznatih i rešavanjem tog sistema dobijaju se udeli vrednosnih papira koje želimo da investiramo:

$$\omega_k=\frac{Z_k}{\sum_{i=1}^{n}Z_i}.$$

3.2. Granica efikasnosti

Granicom efikasnosti nazivamo krivu koja prikazuje sve efikasne portfelje u ravni rizik-prinos. Pod efikasnim portfeljom podrazumevamo portfelj koji, za očekivani rizik, ima najveći mogući očekivani prinos, ili portfelj koji minimizuje rizik (standardno odstupanje) za dati očekivani prinos. Ovakve portfejle posmatramo zato što će investitor uvek ulagati u ovakve, efikasne, portfelje.

Pošto je standardno odstupanje uvek pozitivno, funkcija koju ćemo minimizovati je varijansa (kvadrat standardnog odstupanja). Ako sa C_o označimo početni kapital, C_t kapital u trenutku t, sa θ matricu količina novca investiranih redom u vrednosne papire $B_1, \ldots, B_n$:

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \ldots \\ \theta_n \end{pmatrix},$$

sa R_i stopu prinosa i-tog vrednosnog papira, sa R matricu:

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \ldots \\ R_n \end{pmatrix},$$

sa $\sum$ matricu kovarijansi stopa prinosa R_i:

$$\sum = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}$$

i sa R_P ukupni prinos portfelja, tada je varijansa krajnjeg kapitala:

$$var(C_t) = var(C_o+R_P) = var(R_P) = \theta^T \sum \theta.$$

Moramo poštovati dva uslova kada minimizujemo ovu funkciju. Prvi je da očekivani prinos mora biti fiksiran da bismo minimizovali rizik za zadati prinos. Ovaj očekivani prinos obeležićemo sa μ_P. Drugi uslov je da možemo investirati samo sumu koju posedujemo u početnom trenutku, tako da zbir uloženih količina novca mora biti manji ili jednak C_o. Ako sa m_i obeležimo očekivani prinos i-tog vrednosnog papira, onda će m biti kolona očekivanih prinosa:

$$m = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \ldots \\ m_n \end{pmatrix}.$$

Zapisujemo ova dva uslova:

$$\mu_P = m^T \theta$$

$$(1, \ldots, 1)\theta = C_0.$$

Ako je:

$$A = (m\ 1)$$

$$B = \begin{pmatrix} \mu_P \\ C_0 \end{pmatrix},$$

onda problem možemo formulisati kao traženje minimuma:

$$min\{\theta^{\mathrm{T}} \sum \theta \mid \mathrm{A}^{\mathrm{T}} \theta = \mathrm{B}\}.$$

Za rešavanje sistema koristimo Lagranžov metod:

$$\lambda_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2\sum\theta + A\lambda_0 = 0 \\ A^T\theta = B. \end{cases}$$

Rešavanje prve jednačine daje nam θ:

$$\theta = \sum^{-1} A\lambda,$$

gde *je* $\lambda = -\frac{1}{2}\lambda_0$. Druga jednačina tada postaje:

$$A^T\sum^{-1} A\lambda = B,$$

odakle sledi da je:

$$\lambda = (A^T\sum^{-1} A)^{-1} B = H^{-1}B,$$

gde je $H = A^T\sum^{-1} A$. Tada je:

$$H^T = (A^T\sum^{-1} A)^T = A^T\sum^{-1} A = H,$$

što znači da je H simetrična matrica. Formula za varijansu sada ima oblik:

$$var(R_P) = \theta^T\sum\theta = \theta^T\sum\sum^{-1} A\lambda = \theta^T A\lambda = (A^T\theta)^T H^{-1}B = B^T H^{-1}B.$$

Kako je H simetrična matrica dimenzija 2x2 možemo pretpostaviti da ima oblik:

$$H = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Tada je inverz matrice H:

$$H^{-1} = \frac{1}{ac-b^2}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Kako je $H = A^T\sum^{-1} A$, možemo izračunati koeficijente a, b, c i determinantu $d = ac - b^2$:

$$a = \mu^T\sum^{-1}\mu$$

$$b = \mu^T\sum^{-1}\mathbf{1}$$

$$c = \mathbf{1}^T\sum^{-1}\mathbf{1}.$$

Pokazaćemo da su parametri *a, b i c* pozitivni. Pretpostavimo da je matrica kovarijacija pozitivno definitna. Tada je i inverzna matrica $\sum^{-1}$ pozitivno definitna. Ovo znači da su:

$$a = \mu^T\sum^{-1}\mu > 0$$

$$c = \mathbf{1}^T\sum^{-1}\mathbf{1} > 0.$$

Takođe je i:

$$(b\mu - a\mathbf{1})^T\sum^{-1}(b\mu - a\mathbf{1})$$

$$= bba - abb - abb + aac$$

$$= a(ac - b^2) = ad > 0,$$

a kako je $a > 0$, onda je i $d > 0$.

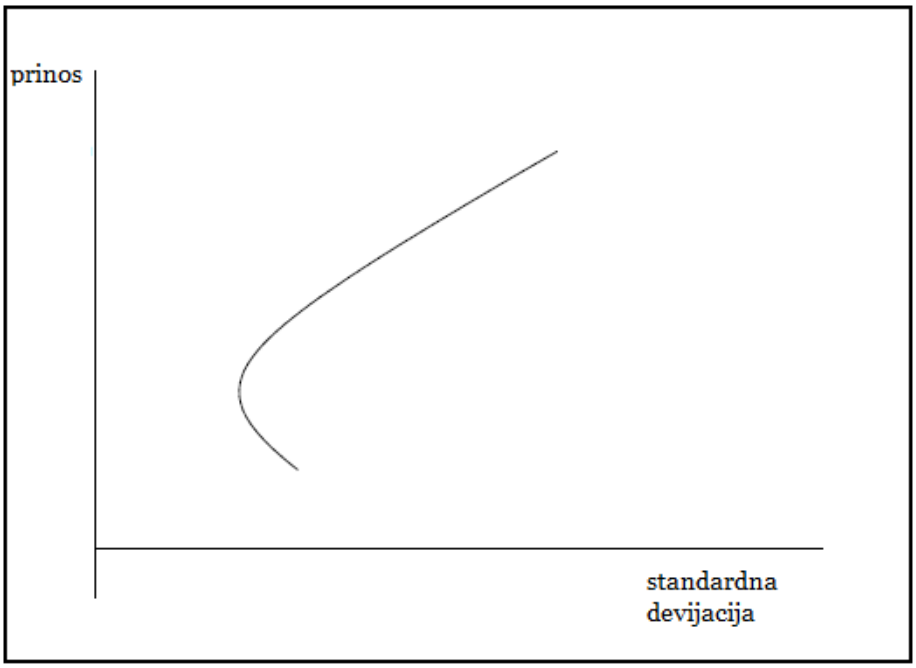
Ako u izraz za varijansu zamenimo matricu H, dobijamo:

$$var(R_P) = \frac{1}{d}(\mu_P\ C_0)\begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu_P \\ C_0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{d}(c{\mu_P}^2 - 2bC_0\mu_P + a{C_0}^2).$$

Ovime je definisana granica efikasnosti u ravni rizik - prinos. Možemo primetiti da je samo gornji deo zaista efikasan, pošto portfelji iz donjeg dela mogu biti izabrani tako da se sa istim nivoom rizika dobije portfelj sa većim prinosom.

Formula za standardnu devijaciju dobija se korenovanjem prethodne jednačine za varijansu. Granica efikasnosti prikazana je na Slici 4:



Slika 4 - Granica efikasnosti

U ravni $({\sigma_P}^2, \mu_P)$ granica efikasnosti je parabola, ali u ravni (σ_P, μ_P) koju mi posmatramo, ovo je desna strana hiperbole. Ovo se vidi iz:

$${\sigma_P}^2 = \frac{c{\mu_P}^2 - 2bC_0\mu_P + a{C_0}^2}{d}$$

$$= \frac{c{\mu_P}^2 - 2bC_0\mu_P + \frac{d{C_0}^2}{c} + \frac{b^2{C_0}^2}{c}}{d}.$$

$$\frac{{\sigma_P}^2}{\frac{1}{c}} = \frac{{\mu_P}^2 - \frac{2bC_0\mu_P}{c} + \frac{d{C_0}^2}{c^2} + \frac{b^2{C_0}^2}{c^2}}{\frac{d}{c^2}}$$

$$\frac{{\sigma_P}^2}{\frac{1}{c}} = \frac{(\mu_P - \frac{bC_0}{c})^2}{\frac{d}{c^2}} + {C_0}^2,$$

što je formula hiperbole:

$$\frac{\sigma_P{}^2}{\frac{C_0{}^2}{c}} - \frac{(\mu_P - \frac{bC_0}{c})^2}{\frac{dC_0{}^2}{c^2}} = 1.$$

Nagibi asimptota su $\sqrt{\frac{\frac{dC_0{}^2}{c^2}}{\frac{C_0{}^2}{c}}} = \pm\sqrt{\frac{d}{c}}$, a centar hiperbole je $(0, \frac{b}{c}C_0)$, tako da su jednačine asimptota:

$$\mu_{P1} = \frac{b}{c}C_0 + \sqrt{\frac{d}{c}}\sigma_P$$

$$\mu_{P2} = \frac{b}{c}C_0 - \sqrt{\frac{d}{c}}\sigma_P.$$

Nas zanimaju portfelji koji imaju količine novca uložene u određene vrednosne papire tako da pripadaju granici efikasnosti. Tako dobijamo udele vrednosnih papira u efikasnim portfeljima:

$$\theta_{efikasno} = \sum^{-1} A\lambda = \sum^{-1} AH^{-1}B$$

$$= \frac{c\mu_P - bC_0}{d}\sum^{-1}\mu + \frac{aC_0 - b\mu_P}{d}\sum^{-1}\mathbf{1}$$

$$= \frac{1}{d}\sum^{-1}((a\mathbf{1} - b\mu) + (c\mu - b\mathbf{1})\mu_P).$$

Pomoću ovoga za svaki željeni očekivani prinos može se izračunati minimalna standardna devijacija.

3.3. Portfelj sa najmanjom varijansom

Pretpostavimo da investitor želi da investira u portfelj sa najmanjim rizikom, bez obzira na to koliko je očekivani prinos tog portfelja. Pošto želi da investira u efikasni portfelj, taj portfelj će uvek biti na granici efikasnosti i imaće najmanju standardnu devijaciju. To znači da je i varijansa tog portfelja minimalna. Zato se takav portfelj zove portfelj sa najmanjom varijansom. Ovaj portfelj računa se tako što se varijansa minimizuje pri neophodnim uslovima. Ti uslovi između ostalog podrazumevaju to da investitor može da uloži samo kapital koji poseduje. Ovaj problem može se napisati kao nalaženje minimuma:

$$Min\{\theta^T\sum\theta \mid \mathbf{1}^T\theta = C_0\}.$$

Koristimo Lagranžove multiplikatore da rešimo ovaj problem:

$$\begin{cases} 2\sum\theta + \mathbf{1}\lambda_0 = 0 \\ \mathbf{1}^T\theta = B \end{cases}$$

sa konstantom:

$$\lambda_0 = \begin{pmatrix}\lambda_1 \\ \lambda_2\end{pmatrix}.$$

Rešavamo prvu jednačinu po θ i sa novom konstantom $\lambda = -\frac{1}{2}\lambda_0$ dobijamo:

$$\theta = \sum^{-1}\mathbf{1}\lambda.$$

Rešavamo drugu jednačinu:

$$\mathbf{1}^{\boldsymbol{T}}\sum^{-1}\mathbf{1}\lambda = \mathrm{C}_0,$$

odakle sledi da je:

$$\lambda = \frac{C_0}{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}} = \frac{C_0}{c},$$

gde je c element matrice H iz drugog reda i druge kolone (definisan u prethodnom odeljku). Zamenom λ u formulu za θ dobijamo:

$$\theta_{min-v} = \Sigma^{-1} \mathbf{1} \frac{C_0}{c},$$

što predstavlja alokaciju vrednosnih papira u portfelju sa najmanjom varijansom. Ta minimalna varijansa može se izračunati:

$$\sigma_{min-v}{}^2 = \theta^T \Sigma \theta = \frac{C_0}{c} (\Sigma^{-1} \mathbf{1})^T \Sigma \frac{C_0}{c} \Sigma^{-1} \mathbf{1}$$

$$= (\frac{C_0}{c})^2 \mathbf{1}^T (\Sigma^{-1})^T \Sigma \Sigma^{-1} \mathbf{1}$$

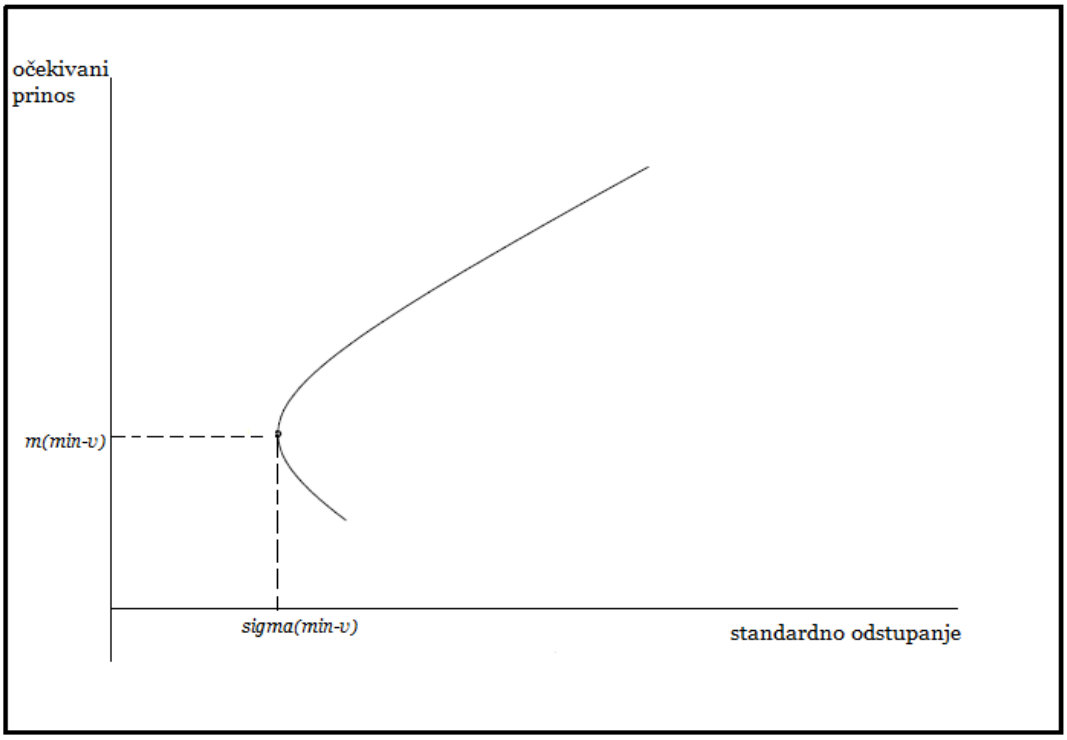
$$= (\frac{C_0}{c})^2 \mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}$$

$$= (\frac{C_0}{c})^2 c = \frac{C_0}{c}{}^2.$$

Očekivani prinos tada iznosi:

$$\mu_{min-v} = \mu^T \theta = \mu^T \Sigma^{-1} \mathbf{1} \frac{C_0}{c} = b \frac{C_0}{c} = \frac{b}{c} C_0.$$

Ovaj portfelj predstavljen je na slici 5:

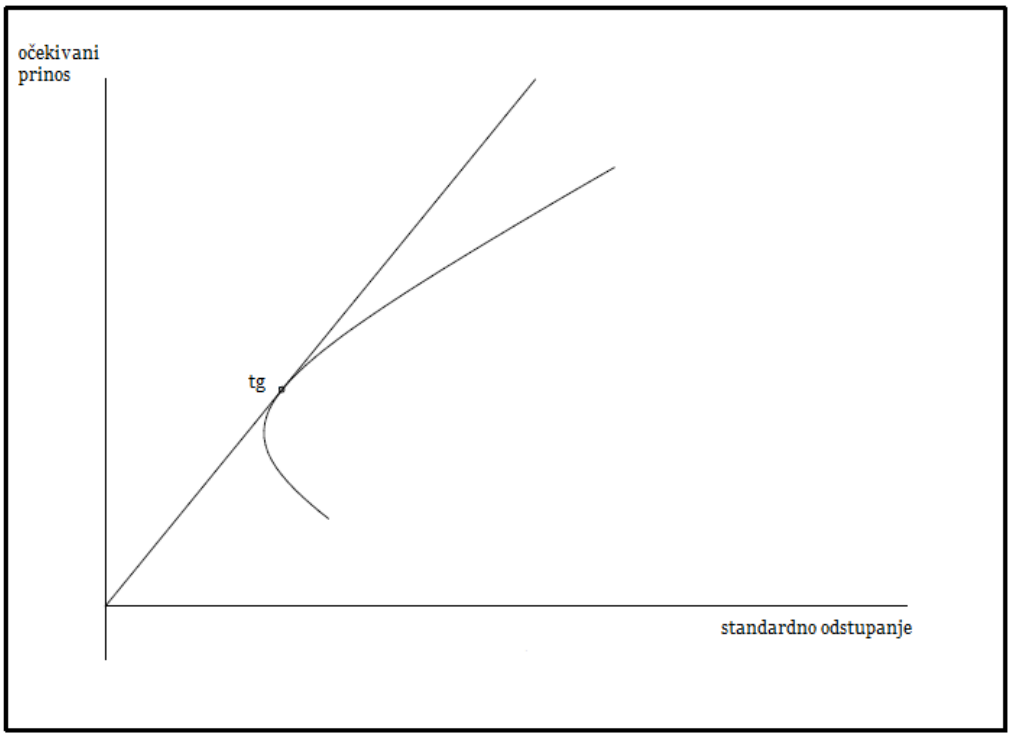


Slika 5 - Portfelj sa najmanjom varijansom

3.4. Tangentni portfelj

Pretpostavimo da investitor ne želi da ima najmanji mogući rizik za bilo koji prinos, već da želi da investira u portfelj sa najvećim Šarpovim količnikom.

Grafički, portfelj sa najvećim Šarpovim količnikom biće tačka na granici efikasnosti u kojoj tangenta na granicu efikasnosti dodiruje granicu. Zato se ovaj portfelj zove tangentni. Tangentni portfelj prikazan je na slici 6:



Slika 6 - Tangentni portfelj

Formula za granicu efikasnosti je:

$$\sigma_P = \sqrt{\frac{1}{d}(c{\mu_P}^2 - 2bC_0\mu_P + a{C_0}^2)}.$$

Pretpostavimo da tangentni portfelj ima koordinate (σ_{tg}, μ_{tg}). Tada je nagib tangentne linije:

$$\frac{\Delta\sigma_P}{\Delta\mu_P} = \frac{\sqrt{\frac{1}{d}(c{\mu_P}^2 - 2bC_0\mu_P + a{C_0}^2)} - 0}{\mu_{tg} - 0}.$$

Nagib granice efikasnosti u tangentnoj tački je izvod granice efikasnosti u toj tački:

$$\frac{\partial\sigma_P}{\partial\mu_P} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{d}\left(c{\mu_P}^2 - 2bC_0\mu_P + a{C_0}^2\right)}\frac{1}{d}(2d\mu_P - 2bC_0)|\mu_P = \mu_{tg}$$

$$= \frac{c\mu_{tg} - bC_0}{d\sqrt{\frac{1}{d}\left(c{\mu_P}^2 - 2bC_0\mu_P + a{C_0}^2\right)}}.$$

U tangentnoj tački dva nagiba moraju biti ista:

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{d}(c{\mu_P}^2 - 2bC_0\mu_P + a{C_0}^2)}}{\mu_{tg}} = \frac{c\mu_{tg} - bC_0}{d\sqrt{\frac{1}{d}\left(c{\mu_P}^2 - 2bC_0\mu_P + a{C_0}^2\right)}}.$$

Sledi da je:

$$\mu_{tg} = \frac{a}{b}C_0$$

Kada u formulu za granicu efikasnosti stavimo dobijeno μ_{tg}, dolazimo do rešenja za σ_{tg}:

$$\sigma_{tg} = \sqrt{\frac{1}{d}(c(\frac{a}{b}C_0)^2 - 2\frac{ab}{b}{C_0}^2 + a{C_0}^2)}$$

$$\sigma_{tg} = \frac{\sqrt{a}}{b}C_0.$$

Alokacija vrednosnih papira u tangentnoj tački dobija se korišćenjem formule:

$$\theta_{tg} = \frac{1}{d}\Sigma^{-1}((a\mathbf{1} - b\mu) + (\mathrm{c}\mu - \mathrm{b}\mathbf{1})\mu_P)$$

$$= \frac{c\frac{a}{b}C_0 - bC_0}{d}\Sigma^{-1}\mu + \frac{aC_0 - b\frac{a}{b}C_0}{\mathrm{d}}\Sigma^{-1}\mathbf{1}$$

$$= \Sigma^{-1}\mu\frac{C_0}{b}.$$

Dakle, kada investitor želi da maksimizuje Šarpov količnik svog portfelja, ovo je raspodela udela vrednosnih papira koju će koristiti.

3.5. Optimalni portfelj

Teorija Harija Markovica kaže da je za investitora najbolji portfelj koji maksimizuje funkciju korisnosti u datu formulom:

$$u = E(C_t) - \frac{1}{2}\gamma var(C_t).$$

Funkicja korisnosti je funkcija kapitala u trenutku t C_t, njegove varijanse i parametra γ. Parametar γ naziva se parametar apsolutne averzije prema riziku i predstavlja meru za rizik koji je investitor spreman da preuzme. Može biti različit za različite investitore, a i isti investitor može da ga menja tokom vremena. Što je parametar γ veći, to je investitor spreman manje rizika da preuzme, što sledi iz toga da drugi član

izraza postaje sve bitniji što je varijansa veća, što uzrokuje manju korisnost. Parametar γ uvek je pozitivan, a za negativno γ smatralo bi se da je rizik poželjan za investitora.

Optimalni portfelj za investitora je onaj sa maksimalnom funkcijom korisnosti, koja može biti napisana kao:

$$E(C_t) - \frac{1}{2}\gamma var(C_t) = E(C_0 + R_P) - \frac{1}{2}\gamma var(C_0 + R_P)$$

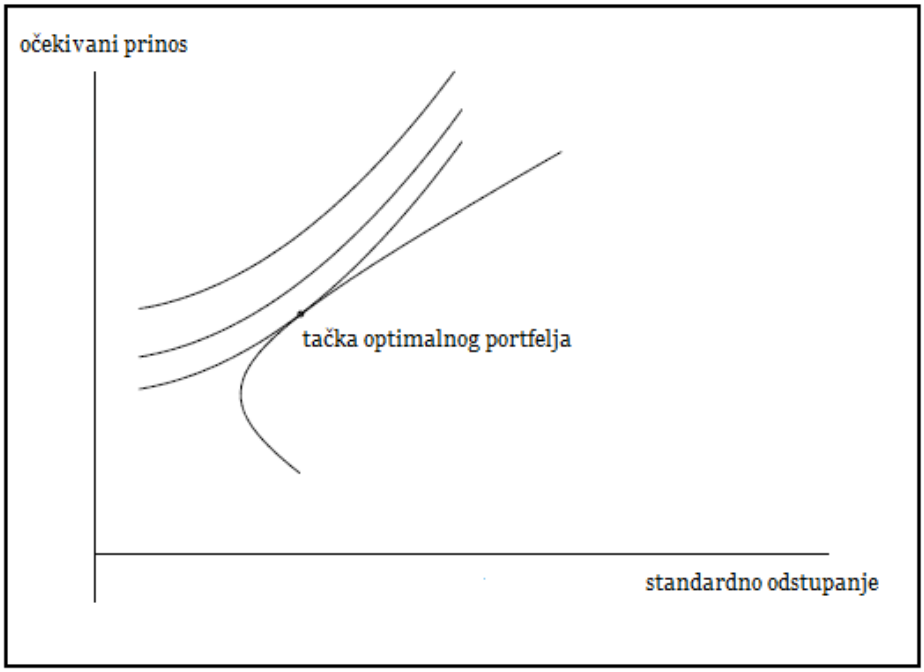
$$= C_0 + \mu_P - \frac{1}{2}\gamma var(R_P) = C_0 + \mu^T\theta(-\frac{1}{2})\gamma {\sigma_P}^2$$

$$= C_0 + \mu^T\theta(-\frac{1}{2})\gamma\theta^T\sum\theta.$$

Kriva korisnosti je kriva koja prikazuje moguće kombinacije prinosa i standardne devijacije za koje se postiže ista korisnost. Grafički se korisni portfelj dobija pomeranjem krive korisnosti što je više moguće u visinu. Kriva korisnosti data je jednačinom:

$$\mu_P = u - C_0 + \frac{1}{2}\gamma {\sigma_P}^2,$$

gde je C_0 kapital u početnom trenutku, što u ravni standardna devijacija - prinos predstavlja parabolu. Na slici 7 prikazano je više krivih korisnosti, kao i kriva korisnosti za koju se dostiže optimalni portfelj:



Slika 6 - Tangentni portfelj

Da bismo izračunali koji portfelj je optimalan, moramo maksimizovati funkciju korisnosti pod sledećim uslovom:

$$max\left\{C_0 + \mu^T\theta - \frac{1}{2}\gamma\theta^T\sum\theta | \mathbf{1}^{\boldsymbol{T}}\theta = C_0\right\}$$

Ponovo upotrebljavamo Lagranžov metod za rešavanje sistema jednačina:

$$\begin{cases} \mu - \frac{1}{2}\gamma 2\sum\theta + \mathbf{1}\lambda = 0 \\ \mathbf{1}^{\boldsymbol{T}}\theta = C_0 \end{cases}$$

za konstantu λ. Rešavamo prvu jednačinu po θ i dobijamo:

$$\mu + \mathbf{1}\lambda = \gamma\sum\theta$$

$$\theta = \frac{\sum^{-1}\mu}{\gamma} + \frac{\lambda\sum^{-1}\mathbf{1}}{\gamma}.$$

Sada dobijeni izraz za θ zamenjujemo u drugu jednačinu:

$$\mathbf{1}^{\boldsymbol{T}}(\frac{\sum^{-1}\mu}{\gamma} + \frac{\lambda\sum^{-1}\mathbf{1}}{\gamma}) = C_0$$

$$\frac{\mathbf{1}^{\boldsymbol{T}}\sum^{-1}\mu}{\gamma} + \frac{\mathbf{1}^{\boldsymbol{T}}\sum^{-1}\mathbf{1}\lambda}{\gamma} = C_0.$$

Koristimo prethodno definisane elemente matrice H:

$$\frac{b}{\gamma} + \frac{\boldsymbol{c}\lambda}{\gamma} = C_0$$

i dobijamo λ:

$$\lambda = \frac{\gamma C_0 - b}{c}.$$

Sada dobijamo optimalnu raspodelu vrednosnih papira u portfelju:

$$\theta_{opt} = \frac{\sum^{-1}\mu}{\gamma} + \frac{\sum^{-1}\mathbf{1}}{\gamma}\frac{\gamma C_0 - b}{c}$$

$$= \frac{1}{\gamma}\sum^{-1}(\mu + \mathbf{1}(\frac{\gamma C_0 - b}{c})).$$

Ovaj izraz možemo pojednostaviti korišćenjem izraza za θ_{min-v} i θ_{tg}:

$$\theta_{tg} = \sum^{-1}\mu\frac{C_0}{b}$$

$$\theta_{min-v} = \sum^{-1}\mathbf{1}\frac{C_0}{c}.$$

Koristimo ove izraze u računanju θ_{opt}:

$$\theta_{opt} = \frac{b}{C_0\gamma}\theta_{tg} + \frac{c}{C_0}\frac{C_0 - b/\gamma}{c}\theta_{min-v}$$

$$= \frac{b}{C_0\gamma}\theta_{tg} + (1 - \frac{b}{C_0\gamma})\theta_{min-v}.$$

Vidimo da je optimalni portfelj kombinacija portfelja sa minimalnom varijansom i tangentnog portfelja, gde je $\alpha = \frac{b}{C_0\gamma}$ investirano u tangentni portfelj, a 1- α u portfelj sa minimalnom varijansom.

Vrednost očekivanog prinosa koja odgovaraju optimalnoj raspodeli udela vrednosnih papira je:

$$\mu_{opt} = \mu^T\theta = \frac{\mu^T\Sigma^{-1}\mu}{\gamma} + \mu^T\Sigma^{-1}\mathbf{1}(\frac{C_0 - b/\gamma}{c})$$

$$= \frac{a}{\gamma} + \frac{b}{c}\left(C_0 - \frac{b}{\gamma}\right) = \frac{ac - b^2}{c\gamma} + \frac{b}{c}C_0 = \frac{d}{c\gamma} + \mu_{\min -v}.$$

a vrednost varijanse koja odgovara optimalnoj raspodeli udela vrednosnih papira je:

$$\sigma_{opt}{}^2 = \theta^T\Sigma\theta = \frac{ac - b^2 + \gamma^2 C_0{}^2}{c\gamma^2}$$

$$= \frac{d}{c\gamma^2} + \sigma_{min-v}{}^2.$$

Vidimo da očekivani prinos i varijansa optimalnog portfelja zavise od očekivanog prinosa i varijanse portfelja sa minimalnom varijansom i od iznosa koji zavisi od koeficijenta apsolutne averzije prema riziku γ.

Kada investitor ima apsolutnu averziju prema riziku, i ne želi da preuzme rizik, koeficijent γ će težiti beskonačnosti i optimalni portfelj biće portfelj sa minimalnom varijansom. Ako je $\gamma = \frac{b}{C_0}$ vidimo da je optimalni portfelj jednak tangentnom portfelju, tj. portfelju sa maksimalnim Šarpovim količnikom. To znači da su i portfelj sa minimalnom varijansom i tangentni portfelj slecijalni slučajevi optimalnog portfelja dobijenog strategijom Harija Markovica.

3.6. Dodavanje bezrizičnog vrednosnog papira. Prava kapitala tržišta

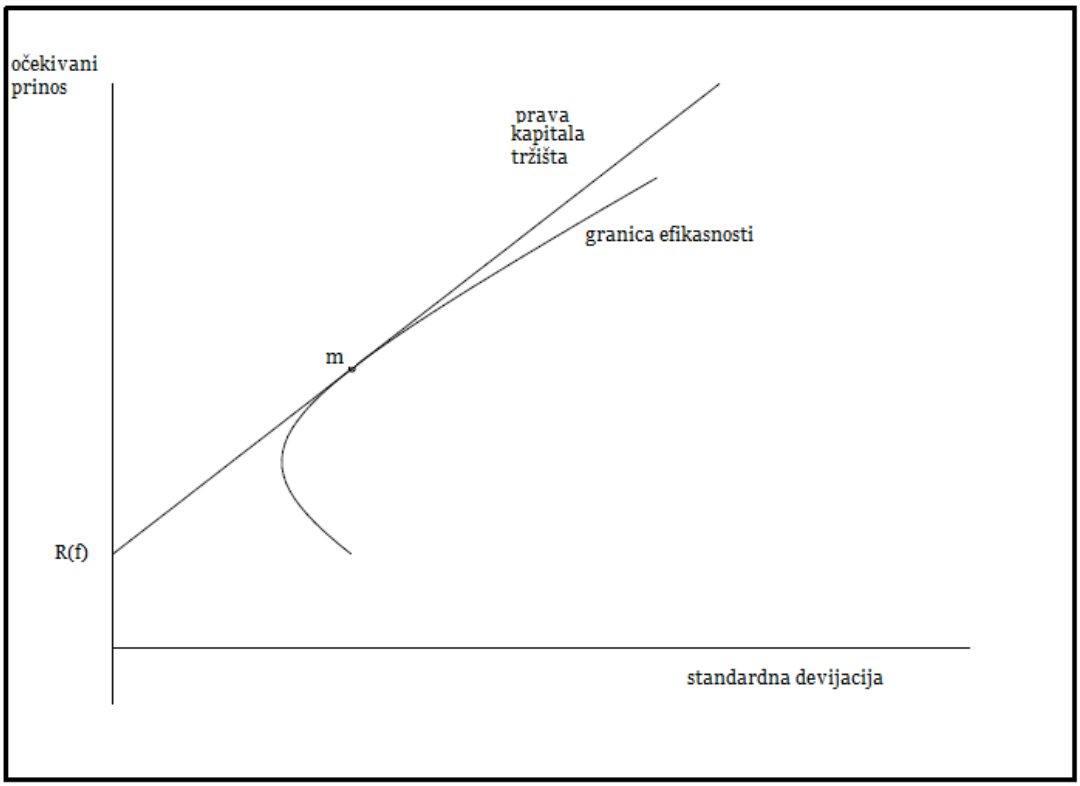
Pretpostavimo da investitor može da izabere da u svoj portfelj uvrsti bezrizični vrednosni papir x_f, koji obično ima mali prinos. Očekivani prinos tog vrednosnog papira biće uvek i realizovani prinos. Takođe, ovaj vrednosni papir nije korelisan sa drugim vrednosnim papirima, pa je :

$$\rho_{i,f} = cov(x_f, x_i) = 0.$$

Investitor može da uloži u bezrizični vrednosni papir (tada je udeo tog vrednosnog papira u portfelju $\theta_f > 0$) ili da pozajmi novac po bezrizičnoj stopi ($\theta_f < 0$). Ako je $\theta_f = 0$, onda je to slučaj kada bezrizični vrednosni papir nije u portfelju. Najčešći primer skoro bezrizičnog vrednosnog papira u praksi su državne obveznice. Kažemo da je skoro bezrizična, jer u praksi ne postoji sasvim bezrizični vrednosni papir, ali državne obveznice imaju prinos koji skoro da ne varira i rizik koji teži nuli.

Prava kapitala tržišta

Kada je bezrizični vrednosni papir uključen u portfelj, granica efikasnosti se menja. Teorija Harija Markovica kaže da je granica efikasnosti tada prava koja seče y-osu u bezrizičnoj tački i tangenta je staroj granici efikasnosti. Nova granica efikasnosti zove se kriva kapitala tržišta. Tačka u kojoj kriva kapitala tržišta dodiruje staru granicu efikasnosti zove se tržišni portfelj. Predstavljena je na slici 7:



Slika 7 - Prava kapitala tržišta

Pokazaćemo da je nova granica efikasnosti zaista prava. Pretpostavimo da je količina novca θ_f investirana u bezrizični vrednosni papir i da je prinos tog vrednosnog papira μ_f. Pošto bezrizični vrednosni papir nije u korelaciji sa ostalim vrednosnim papirima, važi:

$$\sigma_P{}^2 = \theta^T \sum \theta$$

$$\mu_P = \mu^T \theta + \mu_f \theta_f.$$

Uslov je tada:

$$\mathbf{1}^T \theta + \theta_f = C_0.$$

Za datu varijansu maksimizovaćemo očekivani prinos:

$$max \left\{ \mu^T \theta + \mu_f \theta_f \ \middle| \begin{matrix} \mathbf{1}^T \theta + \theta_f = C_0 \\ \sigma_P{}^2 = \theta^T \sum \theta \end{matrix} \right\}.$$

Primetimo da je rešavanje ovog problema ekvivalentno nalaženju minimuma izraza $-\mu^T \theta - \mu_f \theta_f$, što rešavamo Lagranžovim metodom:

$$\begin{cases} -\mu + \lambda_1 \mathbf{1} + 2\lambda_2 \sum \theta = 0 \\ -\mu_f + \lambda_1 = 0 \\ \mathbf{1}^T \theta + \theta_f = C_0 \\ \sigma_P{}^2 = \theta^T \sum \theta \end{cases}$$

Druga jednačina daje:

$$\lambda_1 = \mu_f,$$

što zamenjujemo u prvu jednačinu i dobijamo:

$$-\mu + \mu_f \mathbf{1} + 2\lambda_2 \sum \theta = 0$$

$$\theta = \frac{1}{2\lambda_2} \sum^{-1} (\mu - \mu_f \mathbf{1}).$$

Ako ovo upotrebimo u četvrtoj jednačini, dobijamo:

$$\sigma_P{}^2 = \theta^T \sum \theta = \frac{1}{4\lambda_2{}^2} (\mu - \mu_f \mathbf{1})^T \sum^{-1} (\mu - \mu_f \mathbf{1})$$

$$= \frac{1}{4\lambda_2{}^2} \left(c\mu_f{}^2 - 2b\mu_f + a \right).$$

Tada je:

$$\lambda_2 = \sqrt{\frac{c\mu_f{}^2 - 2b\mu_f + a}{4\sigma_P{}^2}}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2\sigma_P} \sqrt{c\mu_f{}^2 - 2b\mu_f + a}.$$

Treća jednačina daje nam udeo bezrizičnog vrednosnog papira u portfelju:

$$\theta_f = C_0 - \mathbf{1}^{\boldsymbol{T}} \theta = C_0 - \frac{1}{2\lambda_2} \mathbf{1}^{\boldsymbol{T}} \sum^{-1} (\mu - \mu_f \mathbf{1})$$

$$\theta_f = C_0 - \frac{1}{2\lambda_2} (b - c\mu_f).$$

Očekivani prinos portfelja je tada:

$$\mu_P = \mu^T \theta + \mu_f \theta_f = \frac{1}{2\lambda_2} \mu^{\boldsymbol{T}} \sum^{-1} (\mu - \mu_f \mathbf{1}) + \mu_f C_0 - \frac{1}{2\lambda_2} (b - c\mu_f) \mu_f$$

$$= \frac{1}{2\lambda_2} (c\mu_f{}^2 - 2b\mu_f + a) + \mu_f C_0$$

$$= (\sqrt{c\mu_f{}^2 - 2b\mu_f + a}) \sigma_P + \mu_f C_0$$

$$\mu_P = s\sigma_P + \mu_f C_0.$$

Ovo predstavlja krivu kapitala tržišta kada je portfelju dodat bezrizični vrednosni papir, gde je $s = \sqrt{c\mu_f{}^2 - 2b\mu_f + a}$. U ravni (σ_P, μ_P) to je prava sa nagibom $s = \sqrt{c\mu_f{}^2 - 2b\mu_f + a}$ i seče y-osu na visini $\mu_f C_0$., što predstavlja prinos kada je ceo kapital investiran u bezrizični vrednosni papir.

Optimalna alokacija na krivoj kapitala tržišta je:

$$\theta_{KT} = \frac{\mu_P - \mu_f C_0}{s^2} \sum^{-1} (\mu - \mu_f \mathbf{1}),$$

a "neiskorišćena" količina uložena u bezrizični vrednosni papir je:

$$\theta_{f,KT} = C_0 - \mathbf{1}^T \theta_{KT} = C_0 - \frac{\mu_P - \mu_f C_0}{s^2} (b - c\mu_f).$$

Tržišni portfelj treba da bude tačka u kojoj prava kapitala tržišta dodiruje granicu efikasnosti. Ovo je portfelj u kom ništa nije uloženo u bezrizični vrednosni papir. Ako se krećemo levo od tržišnog portfelja, investira se deo u bezrizični vrednosni papir. Ako se krećemo desno od tržišnog portfelja, pozajmljuje se po bezrizičnoj stopi.

Tržišni portfelj računamo tako što izjednačavamo granicu efikasnosti i pravu kapitala tržišta. Najpre izrazimo devijaciju:

$$\sigma_P = \frac{\mu_P - \mu_f C_0}{s},$$

a zatim izjednačimo sa granicom efikasnosti:

$$\sigma_P = \sqrt{\frac{1}{d}(c{\mu_f}^2 - 2b\mu_f + a)}\,\frac{\mu_P - \mu_f C_0}{s}.$$

Rešenje ove jednačine je:

$$\mu_m = \frac{a - b\mu_f}{b - c\mu_f} C_0$$

$$\sigma_m = \frac{s}{b - c\mu_f} C_0.$$

Udeo vrednosnih papira je tada:

$$\theta_{KT} = \frac{c\frac{a - b\mu_f}{b - c\mu_f} C_0 - bC_0}{d} \Sigma^{-1}\mu + \frac{aC_0 - b\frac{a - b\mu_f}{b - c\mu_f} C_0}{d} \Sigma^{-1}\mathbf{1}$$

$$\theta_{KT} = \Sigma^{-1}(\mu - \mu_f \mathbf{1})\frac{C_0}{b - c\mu_f}.$$

Kada bi investitor sa parametrom apsolutne averzije prema riziku $\gamma = \frac{b - c\mu_f}{C_0}$ želeo da investira u optimalni portfelj sa maksimalnom korisnošću, investirao bi u tržišni portfelj.

Kada uporedimo θ_m i θ_{KT} vidimo da će svaki portfelj sa prave kapitala tržišta biti linearna kombinacija tržišnog portfelja i bezrizičnog vrednosnog papira.

3.7. Optimalni portfelj

Naći optimalni portfelj (portfelj sa najvećom koristi) znači naći najbolju kombinaciju bezrizičnog vrednosnog papira i tržišnog portfelja. Pretpostavimo da će udeo θ_f biti investiran u bezrizični vrednosni papir i udeo θ_m biti investiran u tržišni portfelj. Pošto su ovo udeli, važi:

$$\theta_m + \theta_f = 1.$$

Tada su prinos portfelja i varijansa:

$$R_P = \theta_f\, R_f + \theta_m\, R_m$$

$${\sigma_P}^2 = {\theta_f}^2{\sigma_f}^2 + {\theta_m}^2{\sigma_m}^2 + 2\theta_f\theta_m cov(R_f, R_m)$$

$${\sigma_P}^2 = {\theta_m}^2{\sigma_m}^2,$$

jer je varijansa prinosa na bezrizični vrednosni papir nula, kao i korelacija rizičnog vrednosnog papira i rizičnog portfelja. Funkcija korisnosti je tada:

$$E(C_0 + R_P) - \frac{1}{2}\gamma var(C_0 + R_P) = C_0 + \theta_f\, R_f + \theta_m\, R_m - \frac{1}{2}\gamma{\theta_m}^2{\sigma_m}^2,$$

Pošto želimo da maksimizujemo funkciju korisnosti, treba optimizovati izraz:

$$max\left\{C_0 + \theta_f\, R_f + \theta_m\, R_m - \tfrac{1}{2}\gamma {\theta_m}^2 {\sigma_m}^2 \middle| \theta_m + \theta_f = 1\right\}.$$

Lagranžov metod daje nam sistem jednačina:

$$\begin{cases} \mu_m - \gamma\theta_m {\sigma_m}^2 + \lambda = 0 \\ R_f + \lambda = 0 \\ \theta_m + \theta_f = 1 \end{cases}$$

Najpre rešavamo drugu jednačinu:

$$\lambda = -R_f,$$

a zatim nalazimo θ_m i θ_f:

$$\theta_m = \frac{\mu_m - R_f}{\gamma {\sigma_m}^2}$$

$$\theta_f = 1 - \frac{\mu_m - R_f}{\gamma {\sigma_m}^2}.$$

Kada zamenimo prinos i varijansu tržišnog portfelja, dobijamo:

$$\theta_m = \frac{b - c\mu_f}{\gamma C_0},$$

$$\theta_f = 1 - \frac{b - c\mu_f}{\gamma C_0}.$$

Ovi rezultati predstavljaju proporcionalne udele bezrizičnog vrednosnog papira i tržišnog portfelja koji treba da budu investirani da bi portfelj bio maksimalno koristan. Ukupne količine novca investirane u rizične vrednosne papire su:

$$\boldsymbol{\theta_m} = \frac{b - c\mu_f}{\gamma C_0}\frac{C_0}{b - c\mu_f}(\Sigma^{-1}\mu - \mu_f \Sigma^{-1}\mathbf{1})$$

$$= \frac{1}{\gamma}\Sigma^{-1}(\mu - \mu_f \mathbf{1}).$$

a ukupna količina novca investirana u bezrizični vrednosni papir je:

$$\theta_f C_0 = \left(1 - \frac{b - c\mu_f}{\gamma C_0}\right) C_0 = C_0 - \frac{b - c\mu_f}{\gamma C_0},$$

pa je vektor količina koje treba da budu investirane:

$$\theta_{opt} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_N/\theta_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma}\Sigma^{-1}(\mu - \mu_f \mathbf{1}) \\ \hline C_0 - \frac{b - c\mu_f}{\gamma C_0} \end{pmatrix}$$

Odgovarajući prinos i standardna devijacija su tada:

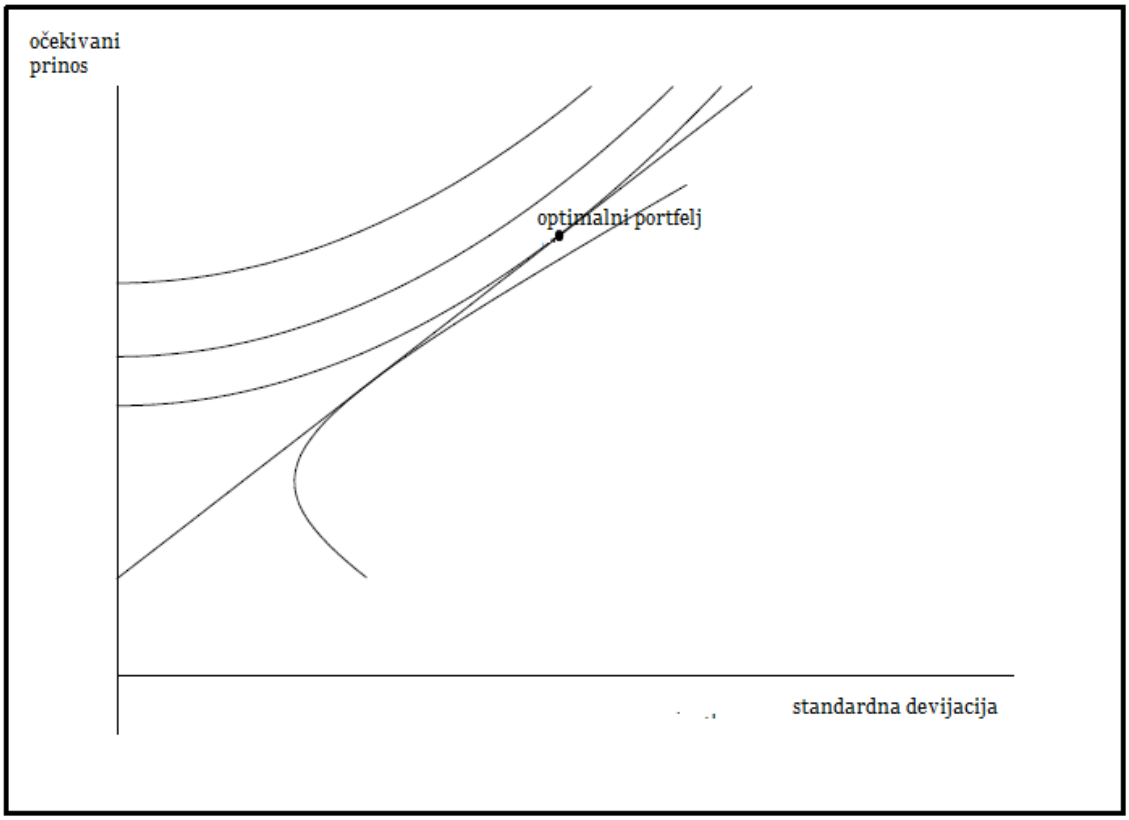
$$\mu_{opt} = \mu^T \theta_{opt} = \mu^T \frac{1}{\gamma}\Sigma^{-1}(\mu - \mu_f \mathbf{1}) + \mu_f (C_0 - \frac{b - c\mu_f}{\gamma C_0})$$

$$= \tfrac{1}{\gamma}\left(c{\mu_f}^2 - 2b\mu_f + a\right) + \mu_f C_0 = \tfrac{1}{\gamma}s^2 + \mu_f C_0.$$

$$\sigma_{opt} = \sqrt{(\frac{1}{\gamma}\Sigma^{-1}(\mu - \mu_f \mathbf{1}))^T \Sigma \frac{1}{\gamma}\Sigma^{-1}(\mu - \mu_f \mathbf{1})}$$

$$\sigma_{opt} = \frac{1}{\gamma}\sqrt{c\mu_f{}^2 - 2b\mu_f + a} = \frac{1}{\gamma}s.$$

Nalaženje optimalnog portfelja sa bezrizičnim vrednosni papirima prikazano je na slici 8:



Slika 8 - Nalaženje optimalnog portfelja sa bezrizičnim vrednosnim papirima

3.8. Optimizacija varijanse portfelja

Kako je u praksi nemoguće ručno optimizovati varijansu portfelja, zbog velikog broja istorijskih cena akcija i svakodnevnih promena cena, vremenom su se razvili softveri koji prate numeričke algoritme za računanje optimalnog rešenja. Jedan od najrasprostranjenijih alata je Solver koji radi u programu Excel. Za nelinearne probleme kao što je nalaženje optimalnih udela vrednosnih papira u portfelju Solver koristi numerički algoritam smanjenih gradijenata.

Cilj metoda smanjenja gradijenata jeste minimiziranje funkcije *f(x)* za neko *x* iz skupa *D*, gde je funkcija *f* konveksna i diferencijabilna na skupu *D* koji je konveksan i ograničen. Algoritam ovog metoda je:

- Odrediti inicijalnu vrednost x_o , $k = 0$
- $\nabla f(x_k) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \cdot\cdot \\ \frac{\partial f}{\partial x_k} \end{pmatrix}$
- Minimizirati funkciju $s^T \nabla f(x_k)$, za neko $s \in D$
  Ovo je zapravo problem minimizovanja linearne aproksimacije problema Tejlorovom aproksimacijom prvog reda funkcije *f* u okolini x_k
- Naći $\gamma \in [0,1]$ koje minimizuje funkciju $f(x_k + \gamma(s - x_k))$ ili postaviti vrednost γ na $\gamma = \frac{2}{k+2}$
- Postaviti $x_{k+1} = x_k + \gamma(s - x_k)$, $k = k + 1$ i vratiti se na treći korak.

Ovaj algoritam u svakom koraku traži rešenje linearnog problema u istom skupu *D*. Greška ovog algoritma je $O(\frac{1}{k})$.

Solver javlja da li je došao do rešenja uzimajući u obzir kriterijum konvergencije. U trenutku kada trenutno rešenje ne može biti poboljšano za više od 0.0001 (što je podrazumevana vrednost koja može da se menja), prijavljuje da je rešenje nađeno i ispisuje rešenje sa 14 decimala.

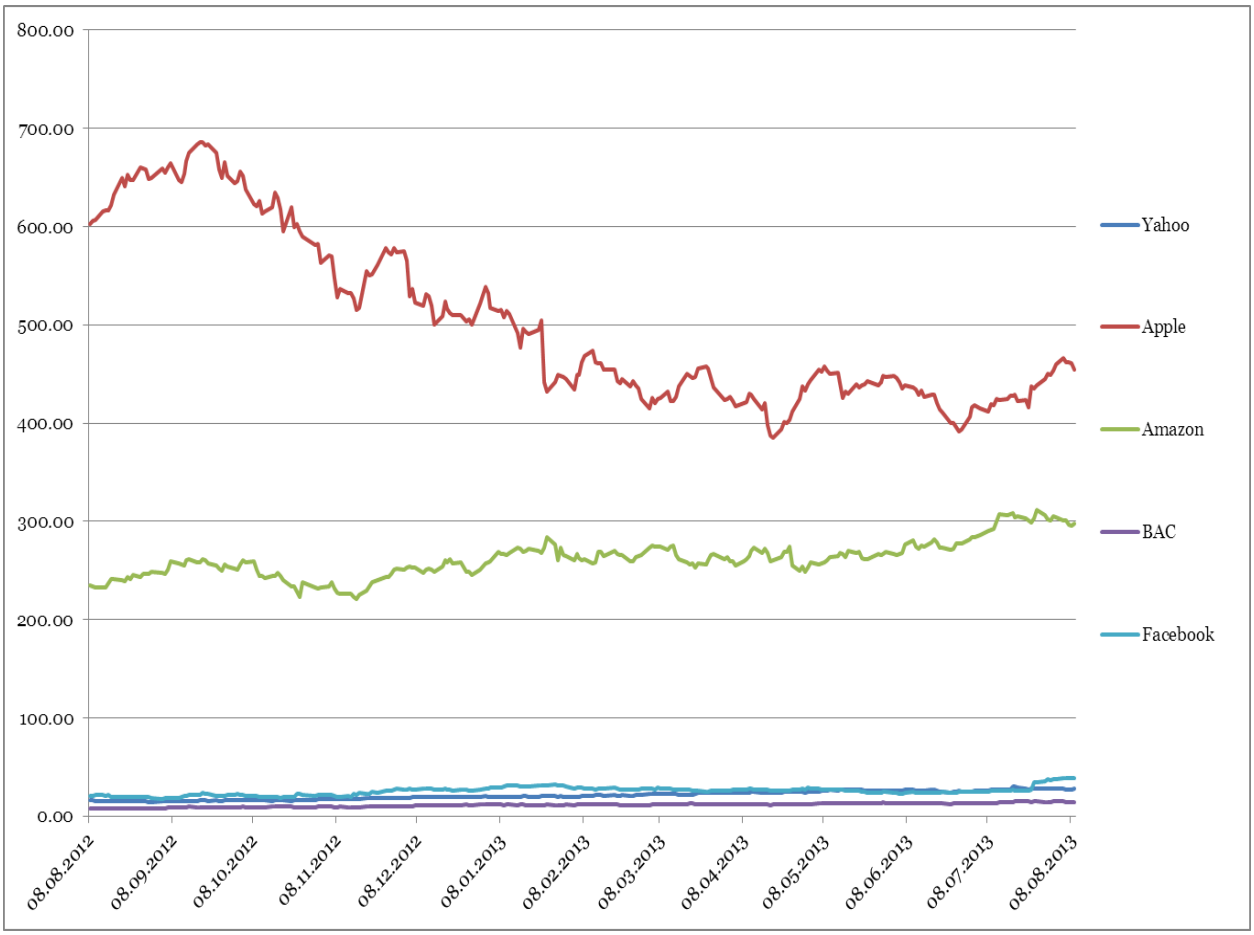
Bitna posledica kriterijuma konvergencije jeste da Solver često neće naći potpuno tačno rešenje, jer kada je dovoljno blizu kriterijumu konvergencije, prestaje sa poboljšavanjem preciznosti.

Može se desiti da Solver ili bilo koji numerički algoritam ne dođe do rešenja. Jedan od razloga za to su loše inicijalne vrednosti, kao što su nule, ili ekstremno male i velike vrednosti. To se može prevazići menjanjem početnih vrednosti i dodavanjem uslova koji bi suzili prostor mogućih ishoda.

Primer 7

Dat je portfelj koji sadrži pet različitih akcija: Yahoo Incorporated, Apple, Amazon, Bank of America Corporation i Facebook. Želimo da odredimo udele ovh vrednosnih papira u portfelju tako da rizik portfelja bude najmanji mogući.

Dostupni su nam istorijski podaci o cenama ovih akcija od 8. avgusta 2012. do 9. avgusta 2013. godine. Grafik cena u ovom vremenskom periodu izgleda ovako:



Ranije smo zaključili da za diversifikaciju portfelja nije dobro da vrednosni papiri imaju veliku korelaciju. Da bismo našli optimalni portfelj, najpre ćemo izračunati istorijske prinose ovih vrednosnih papira formulom:

$$R_t = \frac{B_t}{B_{t-1}} - 1.$$

Zatim računamo aritmetičku sredinu, geometrijsku sredinu, varijansu i standardnu devijaciju prinosa za svaku od pet kompanija čije akcije portfelj sadrži. Rezultati su prikazani u tabeli:

	Yahoo	Apple	Amazon	BAC	Facebook
Aritmeticka sredina prinosa	0.23%	-0.09%	0.11%	0.27%	0.30%
Geometrijska sredina prinosa	-5.37%	0.16%	-0.56%	0.26%	3.81%
Varijansa	0.000263	0.000377	0.000268	0.000331	0.001223
Standardna devijacija	0.016205	0.019406	0.016373	0.018192	0.034964

Kovarijacije računamo formulom:

$$\sigma_{i,j} = \frac{\sum(R_{t,i} - \overline{R_i})(R_{t,j} - \overline{R_j})}{n-1}$$

i dobijamo matricu kovarijacija:

Matrica kovarijacija	Yahoo	Apple	Amazon	BAC	Facebook
Yahoo	0.000262	0.000043	0.000096	0.000080	0.000053
Apple	0.000043	0.000375	0.000025	0.000086	0.000080
Amazon	0.000096	0.000025	0.000267	0.000088	0.000076
BAC	0.000080	0.000086	0.000088	0.000330	0.000037
Facebook	0.000053	0.000080	0.000076	0.000037	0.001218

Uz pomoć matrice kovarijacija formulom:

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$$

dobijamo matricu korelacija:

Matrica korelacija	Yahoo	Apple	Amazon	BAC	Facebook
Yahoo	1				
Apple	14%	1			
Amazon	36%	8%	1		
BAC	27%	24%	30%	1	
Facebook	9%	12%	13%	6%	1

Zaključujemo da su akcije pozitivno korelisane, tj. sa rastom jedne raste i druga akcija, ali ne istom dinamikom jer korelacija nijedne dve akcije nije veća od 36%.

Optimalne udele vrednosnih papira izračunaćemo uz pomoć alata Solver koji koristi opisani metod smanjenja gradijenata za optimizaciju zadatog problema. Treba naći udele za koje je varijansa portfelja najmanja, uz ograničenje:

$$\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_5 = 1,$$

tj. naš portfelj sadrži samo ove vrednosne papire, te zbir njihovih udela mora biti 1. Obeležimo sa W vektor udela svakog vrednosnog papira i sa R matricu kovarijacija:

$$W = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_5)$$

$$R = \begin{pmatrix} cov_{1,1} & \cdots & cov_{1,5} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ cov_{5,1} & \cdots & cov_{5,5} \end{pmatrix}.$$

Varijansa portfelja računa se formulom:

$$\sigma^2 = WRW^T.$$

Koristimo Solver i za početnu iteraciju postavljamo jednake udele:

$$W = (0.2, 0.2, \dots, 0.2).$$

Dnevna standardna varijansa portfelja sa jednakim udelom ovih pet vrednosnih papira je $\sigma^2 = 0.0001512$, a godišnja 0.038102. Standardna devijacija na dnevnom nivou je $\sigma = 0.012296$, a na godišnjem 0.195197. Ako sa ER označimo vektor srednjeg prinosa iz istorijskih podataka:

$$ER = (\bar{R}_{Yahoo}, \bar{R}_{Apple}, \bar{R}_{Amazon}, \bar{R}_{BAC}, \bar{R}_{FB})$$

očekivani prinos tada računamo formulom:

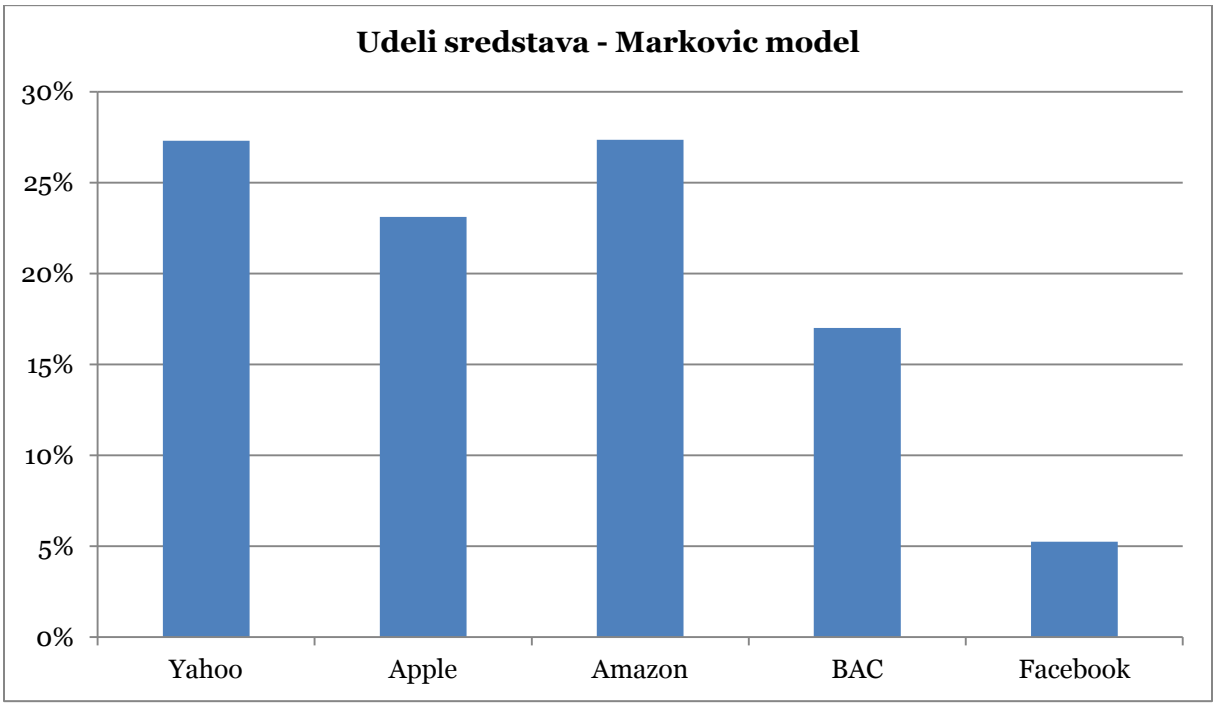
$$ER_P = W(ER)^T.$$

Kada su udeli vrednosnih papira jednaki, izračunat očekivani dnevni prinos je 0.1633%, a godišnji 41.16%.

Alatom solver dobijamo tražene optimalne udele vrednosnih papira:

$$W = (0.27295, 0.23106, 0.27356, 0.16998, 0.05245),$$

ili grafički prikazano:



Standardna varijansa ovako napravljenog portfelja na dnevnom nivou je $\sigma^2 = 0.000124$, a na godišnjem je ${\sigma^2}_{god} = \sigma^2 * 252 = 0.03124$. Standardna devijacija na dnevnom nivou je $\sigma = 0.011134$, a na godišnjem je $\sigma = \sqrt{252} * 0.011134 = 0.17675$. Izračunat očekivani dnevni prinos je 0.132%, a godišnji 33.26%.

Vidimo da optimalni portfelj ima rizik, tj. standardnu devijaciju 10% manju od standardne devijacije portfelja kod kog su udeli vrednosnih papira međusobno jednaki.

Pretpostavimo da smo uložili 10 000 evra. Očekivana vrednost portfelja 12. avgusta je:

$$E(R) = 10\,000 * (1 + 0.00132) = 10013.2,$$

što znači da očekujemo da zaradimo 13.2 evra. Kada pogledamo realne cene na dan 12. avgust 2013. godine, vidimo da su prinosi bili:

Cene akcija	Yahoo	Apple	Amazon	BAC	Facebook
9/8/2013	24.25	454.45	297.26	14.45	38.50
12/8/2013	24.27	467.36	296.69	14.41	38.22

Prinosi	Yahoo	Apple	Amazon	BAC	Facebook
12/8/2013	0.0825%	2.8408%	-0.1918%	-0.2768%	-0.7273%

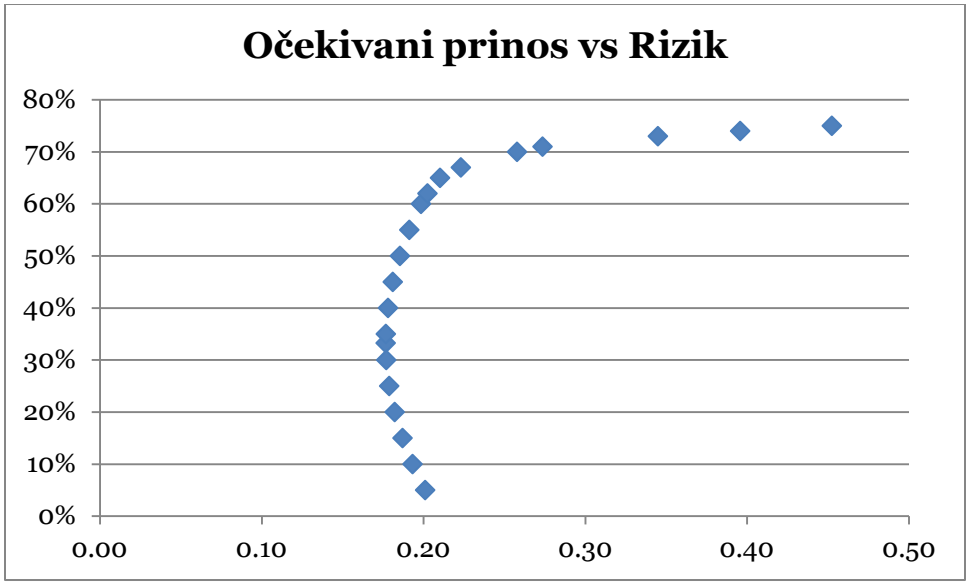
Izračunaćemo stvarni prinos u slučaju kada je portfelj imao jednake udele svakog vrednosnog papira, kao i u slučaju kada smo odabrali portfelj sa izračunatim optimalnim udelima. Stvarni prinos sa izračunatim optimalnim udelima je 54.12 dolara, a u slučaju da portfelj ima jednake udele sredstava 34.55 dolara. Očigledno je da je 12. avgust bio dan kada su cene rasle i samim tim prinos je pozitivan, a uočavamo i koliko je bolje bilo uložiti u optimalni portfelj.

Da bismo postavili granicu efikasnosti, moramo za zadate očekivane prinose izračunati standardne devijacije. Radićemo na godišnjem nivou, kako bismo imali preglednije podatke. Optimizacija se radi istim metodom pomoću alata Solver i jedina razlika je što sada imamo jedan uslov više: da očekivani prinos bude jednak zadatom. Računamo u Excel-u za očekivanja od 5% do 75% devijacije i dobijamo rezultate između 17.66% i 45.25%:

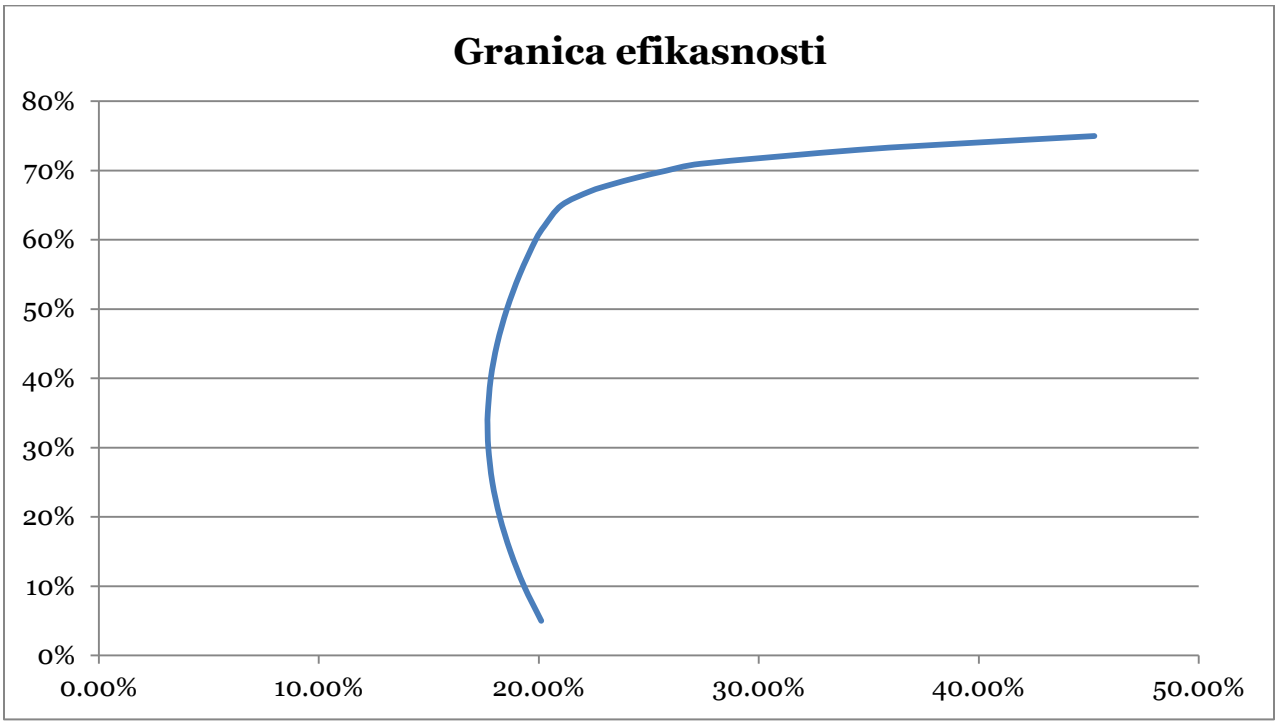
Godisnja standardna devijacija	**Očekivani godišnji prinos vs Standardna devijacija**
0.20115	5%
0.19337	10%
0.18717	15%
0.18232	20%
0.17893	25%
0.17709	30%
0.17675	33%
0.17685	35%
0.17821	40%
0.18113	45%
0.18554	50%
0.19135	55%
0.19859	60%
0.20257	62%
0.21034	65%
0.22321	67%
0.23298	68%

0.24464	69%
0.25794	70%
0.27370	71%
0.34500	73%
0.39584	74%
0.45252	75%

Na grafiku standardna devijacija - očekivani godišnji prinos tačke izgledaju ovako:



Kroz ove tačke provlačimo krivu i dobijamo granicu efikasnosti portfelja prikazanu na slici 4.



Slika 9 - Granica efikasnosti

Primer 8

Data je portfelj koji sadrži dva rizična i jedan bezrizični vrednosni papir.Za rizične vrednosne papire A_1 i A_2 dati su istorijski podaci o prinosu u trenucima $t_0, \ldots, t_4$:

Vreme	Prinos vrednosnog papira A1	Prinos vrednosnog papira A2
t_0	5%	2%
t_1	2%	-2%
t_2	-3%	4%
t_3	7%	6%
t_4	1%	1%

Bezrizični vrednosni papir ima prinos 2%. Izračunati optimalnu kombinaciju vrednosnih papira u portfelju.

Najpre računamo $\overline{R_1}$, $\overline{R_2}$, $\sigma_{1,2}$, ${\sigma_1}^2$, ${\sigma_2}^2$, $\rho_{1,2}$:

$$\overline{R_1} = \frac{\sum R_{1i}}{5} = 2.40\%$$

$$\overline{R_2} = \frac{\sum R_{2i}}{5} = 2.20\%$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sum(R_{t,1} - \overline{R_1})(R_{t,2} - \overline{R_2})}{n-1} = 0.0265\%$$

$${\sigma_1}^2 = \frac{(R_{1,1})^2 + \cdots + (R_{1,5})^2}{5-1} = 4.69\%$$

$${\sigma_2}^2 = \frac{(R_{1,2})^2 + \cdots + (R_{5,2})^2}{5-1} = 3.91\%$$

$$\rho_{1,2} = \frac{\sigma_{1,2}}{\sigma_1\sigma_2} = 14\%.$$

Vidimo da je korelacija među rizičnim vrednosnim papirima mala, što je dobro za diversifikaciju portfelja. To objašnjavamo činjenicom da će se cene ovih vrednosnih papira različito kretati, pa će rizik od gubitka novca biti smanjen.

Primenom opcije Solver u programu Excel nalazimo udeo prvog vrednosnog papira ω_1 i ω_2:

$$\omega_1 = 62.42\%$$

$$\omega_2 = 37.58\%.$$

Optimalna standardna devijacija portfelja je 0.0345, a optimalni nivo prinosa je 0.0232.

4. Ocenjivanje portfelja

Pri odabiru portfelja nekada nam nisu dostupni svi potrebni podaci za optimizaciju metodom Harija Markovica. Tada se koriste drugi načini da se do ocena i upoređivanja dva i više portfelja dođe. Neki od njih su računanje koeficijenata kao što su Jensenovo alfa, Trejnorov količnik i Modiljanijev učinak prilagođen riziku. U nastavku su objašnjene upotrebe ovih količnika.

4.1. Mere performansi portfelja

Jensenovo alfa

Jensenovo alfa je jedna od mera performansi portfelja koja računa prinos portfelja iznad teoretskog očekivanog prinosa. Teorijski prinos procenjuje se na osnovu modela tržišta, najčešće CAPM modela. Jensenovo alfa izračunava se formulom:

$$\alpha_J = R_i - (r_f + \beta_i(R_M - r_f)),$$

gde je R_i i-ti prinos portfelja, r_f bezrizična kamatna stopa, a β_i koeficijent CAPM modela. Cilj investitora je da nađu vrednosne papire sa pozitivnim α_J jer to znači da taj vrednosni papir ima veći prinos od očekivanog teorijskog prinosa. Veruje se da su finansijska tržišta suviše efikasna da dozvole konstantno pozitivno alfa, osim ako se to ne desi slučajno. Empirijske studije, pak, pokazuju da je moguće da investitori nađu pozitivno alfa.

Trejnorov količnik

Trejnorov količnik predstavlja meru zarađenih prinosa iznad prinosa koji bi se ostvarili da portfelj nema diversifikovani rizik po svakoj jedinici tržišnog rizika. Računa se formulom:

$$T = \frac{R_i - r_f}{\beta_i},$$

gde je R_i i-ti prinos portfelja, r_f bezrizična kamatna stopa, a β_i koeficijent CAPM modela. Što je Trejnorov količnik veći, bolji je performans portfelja. Trejnorov količnik ne meri dodatnu vrednost portfelja, već služi za upoređivanje različitih portfelja. Ova mera služi za upoređivanje portfelja koji su u sklopu šireg portfelja. Ukoliko bismo Trejnorovim količnikom upoređivali različite portfelje koji nisu delovi istog, šireg portfelja, onda bi portfelji sa istim sistemskim rizikom, ali različitim ukupnim rizikom imali isti količnik.

Modiljanijev učinak prilagođen riziku

Modiljanijev učinak prilagođen riziku predstavlja meru prinosa prilagođenih riziku nekog portfelja. Izveden je od Šarpovog količnika, ali ima značajnu prednost što se prikazuje u jedinicama procentualnog prinosa.

Neka je r_f bezrizična stopa za period t. Šarpov količnik je:

$$S = \frac{\overline{R_t} - r_f}{\sigma_D},$$

gde je σ_D standardna devijacija razlika $\overline{R_t} - r_f$. Modiljanijev učinak prilagođen riziku je tada:

$$M = S\sigma_M + r_f,$$

gde je σ_M standardna devijacija tržišta. Ako zamenimo S, formula ima oblik:

$$M = (\overline{R_t} - r_f)\frac{\sigma_M}{\sigma_D} + r_f.$$

Vidimo da je prinos portfelja iznad bezrizične stope korigovan na osnovu relativne rizičnosti portfelja u odnosu na rizik tržišta. To znači da, ako je portfelj duplo rizičniji od tržišta, mora da ima duplo veći prinos iznad bezrizične kamatne stope da bi imao isti nivo Modiljanijevog učinka.

U slučajevima kada je teže izračunati standardne devijacije tržišta i portfelja, ali su poznati koeficijenti CAPM modela β_M i β_D, korigovana formula Modiljanijevog učinka je:

$$M = (\overline{R_t} - r_f)\frac{\beta_M}{\beta_D} + r_f.$$

Zaključujemo da Modljanijev učinak meri koliko je portfelj nagradio investitora za preuzimanje više rizika. Može se ispostaviti da je neki portfelj koji je mnogo rizičniji imao samo malo manju prednost, i da ima manji Modiljanijev učinak od portfelja koji ima mnogo manji rizik, ali slične prinose.

4.2. Vrednost pri riziku (Value at Risk)

Da bi investitor učestvovao na tržištu mora znati koliki su mogući gubici njegovog portfelja na tom tržištu. Value at Risk (VaR) predstavlja način da se izmeri tržišni rizik. Ovaj metod koriste mnoge kompanije i finansijske institucije, a u Americi je i sastavni deo napomena uz finansijske izveštaje mnogih korporacija koje učestvuju u trgovini finansijskim derivatima. Value at Risk (VaR) je mera najgoreg gubitka koji firma može da pretrpi u određenom vremenskom periodu, pri naznačenom nivou poverenja i pod normalnim tržišnim uslovima. Postoji više načina da se VaR izračuna. Neki od njih su statistički, dok neki koriste kompjuterske simulacije.

Na primer, ako kažemo da je dnevni VaR za 95%-ni nivo poverenja 100 000, to znači da je tokkom narednog dana verovatnoća da firma pretrpi gubitak veći od 100 000 manja od 5%. VaR meri potencijalni gubitak tržišne vrednosti portfelja koristeći nestalnost i korelaciju tržišnih cena različitih instrumenata koje portfelj sadrži. Kako VaR meri rizik pod normalnim okolnostima, bitno je definisati šta su normalne okolnosti. Ova definicija razlikuje se među različitim sistemima upravljanja rizikom. Uobičajena pretpostavka je da cene vrednosnih papira imaju normalnu raspodelu.

Pretpostavka za računanje VaR-a je da se komponente portfelja ne menjaju tokom posmatranog vremena. Kako je ova pretpostavka najčešće tačna samo za kratke vremenske periode, VaR se najčešće računa za jedan dan.

Mana ovih metoda za račnanje VaR-a jeste činjenica da empirijski rezultati ne potrvđuju uvek normalnu raspodelu dnevnih promena cena vrednosnih papira.

VaR se može prikazati matematičkim izrazom:

$$VaR_{\alpha} = inf\{L: P(Gubitak>L)\leq 1-\alpha\}.$$

Ako želimo da odredimo α simulacijom, gde je N broj simulacija, a P početna investicija, onda je verovatnoća gubitka većeg od L:

$$P(Gubitak > L) = \frac{n}{N},$$

gde je *n* broj simulacija u kojima je vrednost portfelja bila manja od P.

Postoji više metoda za računanje VaR-a. Najpoznatiji su:

- istorijski VaR
- parametarski VaR
- Monte Karlo simulacija.

Kada su volatilnost i korelacija konstantne, upotrebljava se istorisjki metod, a kada volatilnost zavisi od vremena koristi se filtrirani istorijski metod. Da bi se odredio model za portfelj najlakše je pretpostaviti da prinosi imaju standardnu normalnu raspodelu jer tada nije potrebno oceniti parametre. Problem je što ova pretpostavka nije tačna za većinu portfelja i onda treba izabrati najbolju raspodelu koja će je zameniti. Umesto da se ta raspodela traži, upravljači rizikom uglavnom biraju strategiju računanja VaR-a uz pomoć istorijskih podataka.

Istorijski metod

Glavna pretpostavke istorijskog metoda jesu da izabrani uzorak dobro opisuje karakteristike vrednosnih papira i da je moguće da se prošlost ponovi u budućnosti, tj. da se volatilnost i korelacija prinosa u istorijskom uzorku ponove u budućnosti. Ovim metodom daje se isti značaj prinosima iz dalje prošlosti kao i skorijim prinosima, što znači da se zanemaruje veći uticaj koji skorija prošlost nekada ima.

Ako se iz drugih analiza dođe do zaključka da prinosi iz bliže prošlosti više utiču na budući prinos, može se upotrebiti izmenjeni istorijski metod koji koristi eksponencijalno ponderisane proseke.

Istorijski VaR računa se uz pomoć uzorka iz prošlosti. Nalazi se iznos gubitka takav da je u prošlosti bilo samo x% dana sa većim gubitkom (x je željeni nivo poverenja) i taj iznos je procena za VaR. Najveća dilema ovog metoda je treba li uključiti dane kada su se desili katastrofalni događaji koji su uzrokovali velike gubitke.

Izmenjeni istorijski VaR podrazumeva da se standardna devijacija portfelja računa uz pomoć eksponencijalno ponderisanih pokretnih proseka, i to formulom:

$$\sigma_i = \sqrt{(1-\lambda)\sum_{s=t-k}^{t-1} \lambda^{t-s-1}(x_s-\mu)^2}.$$

Parametar λ nazivamo parametar opadanja jer odlučuje o tome kojom brzinom opadaju ponderi, tj. koliko vremenski bliži događaji više utiču na prinose od ranijih. Pretpostavka je da je parametar μ nula.

Primer 9

Dati su istorijski podaci vrednosti portfelja za 31 dan unazad od dana posmatranja. Želimo da nađemo 5%-ni dnevni VaR. Tabela prikazuje vrednosti portfelja u datim danima i izračunat prinos za 30 dana.

Dan	Cena	Prinos
18-Jun-2013	28176	
č19-Jun-2013	27816	-1.28%
20-Jun-2013	27344	-1.70%
21-Jun-2013	27336	-0.03%
24-Jun-2013	27061	-1.01%
25-Jun-2013	27209	0.55%
26-Jun-2013	27757	2.01%
27-Jun-2013	27755	-0.01%
28-Jun-2013	27769	0.05%
1-Jul-2013	28210	1.59%
2-Jul-2013	28373	0.58%
3-Jul-2013	28403	0.11%
5-Jul-2013	28588	0.65%
8-Jul-2013	29059	1.65%
9-Jul-2013	29153	0.32%
10-Jul-2013	29233	0.27%
11-Jul-2013	29966	2.51%
12-Jul-2013	30755	2.63%
15-Jul-2013	30657	-0.32%
16-Jul-2013	30687	0.10%
17-Jul-2013	30869	0.59%
18-Jul-2013	30411	-1.48%
19-Jul-2013	30523	0.37%
22-Jul-2013	30348	-0.57%
23-Jul-2013	30106	-0.80%
24-Jul-2013	29894	-0.70%
25-Jul-2013	30340	1.49%
26-Jul-2013	31201	2.84%
29-Jul-2013	30610	-1.89%
30-Jul-2013	30241	-1.21%
31-Jul-2013	30122	-0.39%

Kako je tražen 5%-ni VaR, a 5% od 30 dana za koje smo izračunali prinos je 1.5, naći ćemo dan u kom je prinos bio veći samo od jednog dana iz ovog uzorka. To je 20.jun i tada je gubitak iznosio 472 novčane jedinice, što znači da je verovatnoća da narednog dana (od dana analiziranja, dakle 1. avgusta) gubitak bude veći od 472 novčane jedinice manja od 5%.

Metod varijanse i kovarijanse

Pretpostavka ovog metoda je da su prinosi normalno raspodeljeni, da su korelacije konstantne i da je osetljivost cene na promene rizika konstantna. Volatilnost svakog faktora rizika računa se uz pomoć istorijskih podataka. Potencijalni efekat svake komponente portfelja na vrednost portfelja računa se uz pomoć delte (osetljivosti na promenu cene određenog vrednosnog papira) te komponente i volatilnosti tog faktora rizika. Postoje različiti metodi za računanje volatilnosti i korelacija. Neki od njih su:

- Prosta istorijska volatilnost. Najlakša je za računanje, ali ekstremne promene na tržištu koje su se desile u prošlosti mogu značajno uticati na izračunatu prognoziranu volatilnost u budućnosti.
- Ponderisana istorijska volatilnost: dobija se kada se skorijim događajima da veća težina. Jedan od načina da se to uradi su eksponencijalno ponderisani pokretni proseci.

Primer 10

Želimo da izračunamo VaR portfelja koji ima akcije kompanije Microsoft u vrednosti od 10 miliona dolara. Volatilnost je 2% dnevno. Želimo da izračunamo desetodnevni VaR na 99%-nom nivou poverenja.

Standardna devijacija prinosa portfelja za jedan dan je:

$$2\% \cdot 10\,000\,000 = 200\,000 \text{ dolara.}$$

Desetodnevna standardna devijacija je:

$$200\,000 \cdot \sqrt{10} = 632\,456 \text{ dolara.}$$

Pretpostavimo da je očekivana promena vrednosti portfelja nula i da je promena vrednosti portfelja normalno raspodeljena. Kako je:

$$P(\, x \leq -2.23\,) = 0.01,$$

VaR je:

$$2.23 \cdot 632\,456 = 1\,473\,621 \text{ dolara.}$$

Želimo da izračunamo VaR portfelja koji ima akcije kompanije AT&T u vrednosti od 5 miliona dolara. Volatilnost je 1% dnevno. Izračunaćemo desetodnevni VaR na 99%-nom nivou poverenja. Standardna devijacija prinosa za 10 dana je:

$$1\% \cdot 5\,000\,000 \cdot \sqrt{10} = 158\,144 \text{ dolara.}$$

Desetodnevni VaR na 99%-nom nivou poverenja je:

$$2.33 \cdot 158\,144 = 368\,405 \text{ dolara.}$$

Razmotrimo sada portfelj koji sadrži akcije obe kompanije. Pretpostavimo da je korelacija među prinosima ove dve kompanije konstantna i iznosi 0.3. Računamo $\sigma_{x,y}$:

$$\sigma_{x,y} = \sqrt{{\sigma_x}^2 + {\sigma_y}^2 + 2\rho\sigma_x\sigma_y} = 220\,227.$$

Desetodnevni VaR portfelja je:

$$220\,227 \cdot \sqrt{10} \cdot 2.33 = 1\,622\,657.$$

Prednost diversifikacije portfelja uočavamo kada oduzmemo VaR portfelja od zbira VaR-ova pojedinačnih portfelja:

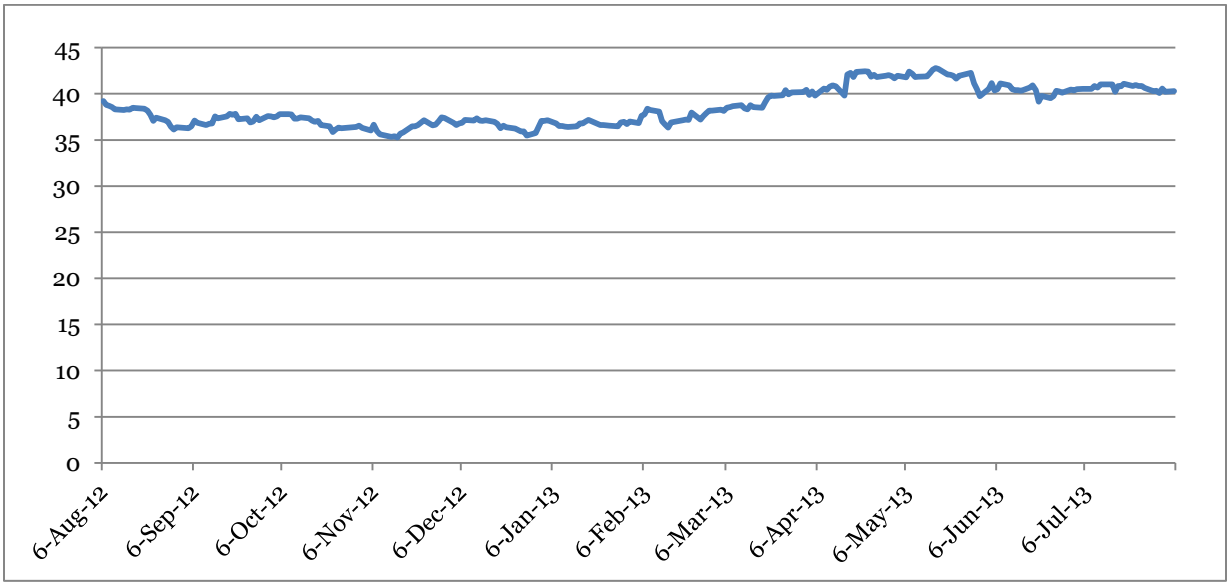
$$1\,473\,621 + 368\,405 - 1\,622\,657 = 219\,369.$$

Metod Monte Karlo simulacije

Treći metod je fleksibilniji od prethodna dva. Monte Karlo metod dozvoljava upotrebu istorijske raspodele prinosa. Veliki broj simulacija koristi se za prognozu prinosa. Svaka simulacija biće drugačija, ali će u totalu odgovarati izabranim statističkim parametrima, tj. istorijska raspodela će se ponoviti i izabrana volatilnost i korelacija ostaće iste. Ovaj metod je realniji i veća je verovatnoća da da tačnije rezultate od prva dva metoda. Implementacija ovog metoda zahteva vreme i novac, i zato se metod ređe koristi.

Primer 11

Želimo da izračunamo mesečni VaR portfelja koji sadrži akciju preduzeća Coca Cola Company na nivou poverenja 99%. Dati su istorijski podaci o ceni uz pomoć kojih ćemo izračunati prosečan prinos i standardnu devijaciju u poslednjih godinu dana. Kako je tabela velika, dat je grafik cene akcija od 6. avgusta 2012. do 5. avgusta 2013. godine.



Računamo prinos portfelja formulom $R_{i+1} = \frac{B_{i+1}}{B_i} - 1$:

Datum	Cena	Prinos
8/6/2012	39.22	
8/7/2012	38.79	-1.10%
8/8/2012	38.69	-0.26%
8/9/2012	38.54	-0.39%
	...	
7/31/2013	40.08	-0.60%
8/1/2013	40.57	1.22%
8/2/2013	40.22	-0.86%
8/5/2013	40.29	0.17%

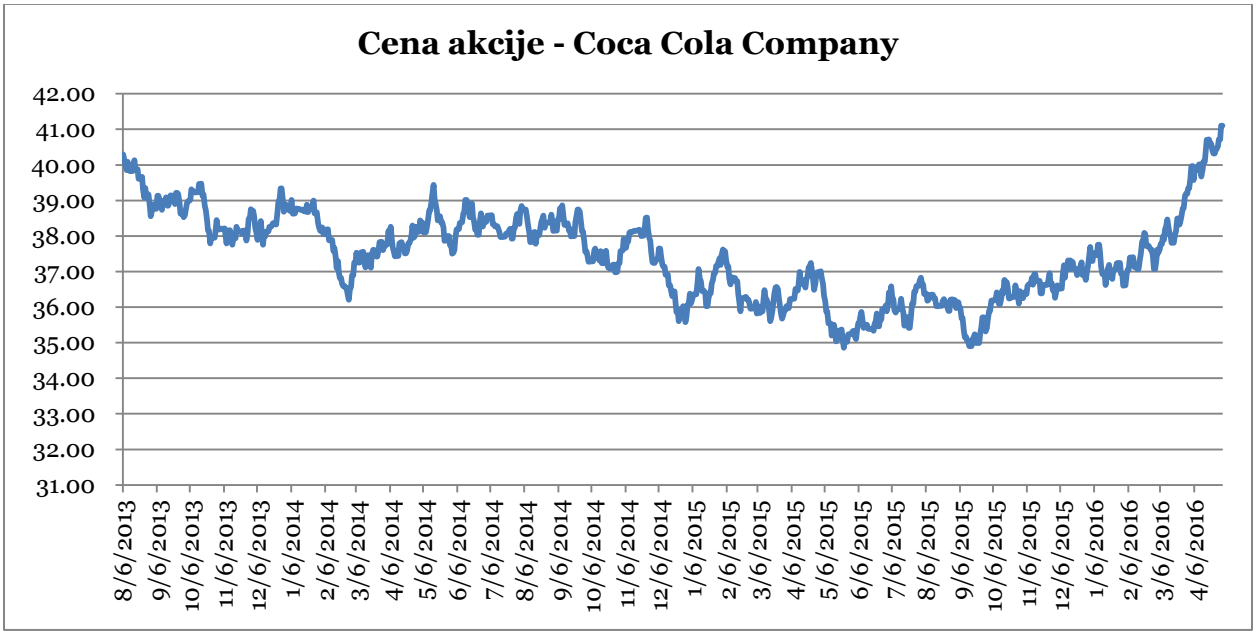
Izračunati srednji prinos je $\overline{R_t} = 0.0070\%$, a standardna devijacija $\sigma = 0.010101$. Sada simuliramo prinose u narednih 1000 dana uz pomoć generisanja broja iz normalne raspodele (pretpostavka je da dati prinosi imaju normalnu raspodelu sa očekivanjem 0 i disperzijom 1), i zatim računamo prinose formulom:

$$R_i = \mu\, \sigma t + \sigma\, \varphi_i\, \delta t^{1/2},$$

a cenu formulom:

$$B_{i+1} = B_i\, (1 + \mu\, \sigma t + \sigma\, \varphi\, \delta t^{1/2}),$$

gde je φ_i slučajno generisan broj iz normalne raspodele $N(0,1)$, μ je jednako $\overline{R_t} = 0.0070\%$, δt vremenski interval koji posmatramo - tj. jedan dan, a B_i cena u prethodnoj iteraciji. Cena pri prvoj iteraciji jeste cena od 5. avgusta 2013. godine (poslednja cena za koju imamo podatak). Simulirane cene na grafiku izgledaju ovako:



Zaista, simulirani prinosi imaju prosek jednak srednjem prinosu u prethodnih godinu dana, i standardnu devijaciju jednaku uzoračkoj devijaciji.

Sledeći korak je sortiranje dobijenih prinosa po veličini. Zanima nas koji je deseti prinos po iznosu, jer se traži 99%-ni VaR, a imamo 1000 iteracija (1%·1000=10). Deseti prinos iznosi -0.9746%, što znači da je VaR jednak:

$$-0.9746\% \cdot 40.29 = -0.3927,$$

tj. sa 99% sigurnosti tvrdimo da gubitak portfelja koji sadrži jednu akciju preduzeća Coca Cola Company 6. avgusta neće biti veći od 0.3927 dolara. Kako nam je informacija o ceni akcije 6. avgusta dostupna i iznosi 24.52 dolara, možemo izračunati gubitak tj. dobitak pošto je cena 5. avgusta bila 24.31 dolar. Dobitak je 0.21 dolar, što znači da se ocena VaR-a u ovom slučaju pokazala tačnom.

5. Zaključak

Nakon analiziranja mogućih modela koji bi optimizovali portfelj i pomogli investitorima da dođu do željenih ciljeva kao što su konkretan prinos ili nivo rizika, primeri u ovom radu pokazali su da je bolje koristiti se teorijom portfelja Harija Markovica i birati optimalne udele nego investirati jednake količine vrednosnih papira u portfelj. Zaključujemo da je modelovanje primenljivo na stvarne slučajeve uz pomoć korišćenja softverskih alata za računanje i numeričku optimizaciju.

Takođe je zaključeno da je korisno ocenjivati i preispitivati svoj portfelj jer se optimalni udeli konstantno menjaju. Metoda vrednosti pri riziku pokazala je da se može računati istorijski gubitak na određenom nivou poverenja i primeniti na simulirane buduće gubitke, kako bi se stekla šira slika o riziku koji portfelj nosi.

6. Literatura

1. Stewart, J., 2002., *Calculus*, Brooks Cole

2. Bodie Z., Kane A., Marcus A., 2008., *Essentials of Investments,* McGrow-Hill/Irwin

3. Markovic, H., 1959., *Portfolio Selection,* J. Wiley and Sons

4. Jouini, E., Cvitanic, J., Musiela, M., 2001., *Options pricing, interest rates and risk management,* Cambridge University Press

5. Luenberger D.G., 1998., *Investment science,* Oxford

6. Cvitanic, J., Zapatero, F., 2004., *Introduction to the economics and mathematics of financial markets*, Masacusets Institute of Technology

7. Carmona, R.A., 2007., *Paris - Princeton Lessons on Mathematical Finance*, Springer

8. Schweser notes, 2012., *Corporate finance, portfolio management and capital instrumets*, Caplan Inc.

9. McDonnel, P., 2008., *Optimal portfolio modeling*, Wiley Trading

10. Best, M. J., 2010., *Portfolio Optimization*, CRC Press

11. Prigent, J. L., 2007., *Portfolio Optimization and Performance Analysis*, Taylor and Francis

12. Puhle, M., 2008., *Bond Portfolio Optimization*, Springer

13. Tapiero, C. S., 2004., *Risk and Financial Management*, J. Wiley and Sons

14. Rudolf, M., 1994., *Algorithms for portfolio optimization and portfolio insurance*, P. Haupt

15.Istorijske cene kompanija, *finance.yahoo.com*