УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Душица В. Буквић

МАСТЕР РАД

КРЕАТИВНО РЕШАВАЊЕ ПРОБЛЕМА У МАТЕМАТИЦИ

БЕОГРАД , 2012. године

САДРЖАЈ

1. УВОД

Једног петка, професор је задао домаћи задатак својим ученицима. Домаћи се састојао од три математичка проблема. Професор им је објаснио да су прва два проблема веома тешка, а да трећи проблем никада није решен и он доноси додатне поене. Да би добили додатне поене за трећи проблем, ученици не треба да га реше, али треба да га поставе и тако покажу знаке доброг мисаоног процеса.

Убрзо након тога, у учионицу је ушао ученик који је каснио на час. Он је само преписао задатке са табле без икаквих инструкција и објашњења, сем да је то домаћи који доноси додатне поене.

Овај ученик, чија су постигнућа осредња, предано је радио током викенда, у покушају да подигне свој просек. Са много напора је решио прва два проблема и са екстремним напором је решио трећи. У понедељак је донео свој домаћи професору и рекао да му је потребно додатно подучавање, јер је у решавању сва три проблема провео цео викенд. Запањени професор је објаснио величину учениковог достигнућа како самом ученику, тако и целом разреду.

Ова анегдота једног професора психологије је корисна да илуструје колико начин размишљања, очекивање и став имају ефекта на креативно решавање проблема. Не знајући да се од њега не очекује да реши проблем, ученик постаје ослобођен од самоуочавања, ограничења што му омогућује да примени максимални напор да реши проблем.

Као професор математике, радим са ученицима са сличним начином размишљања. Они већ у првом додиру са проблемом верују да се одговор не може наћи, осим ако се сам не појави пред њима. Они допуштају својим ниским очекивањима и уоченим ограничењима да их спрече да достигну своје потенцијале.

Код основних рачунских операција кораци који воде до решења су предвидљиви. У овој области углавном ученици добро функционишу. Међутим, када ученици похађају алгебру, а посебно геометрију или основе математике (специјалне школе), где је размишљање/вештина решавања проблема потребна, они наилазе на велике тешкоће.

Достизање способности за решавање проблема је главни циљ у оквиру едукативних програма у многим земљама. Постизање вишег нивоа способности решавања проблема даје основ за будуће учење, за ефикасно учешће у друштву и за обављање личних активности. Ученици треба да буду у стању да примене оно што су научили на нове ситуације. Студија о способости појединаца за решавања проблема пружа предност приказу њихових способности да ангажују основно размишљање и друге опште когнитивне приступе да би се суочили са изазовима у животу (Lesh & Zawojewski, 2007).

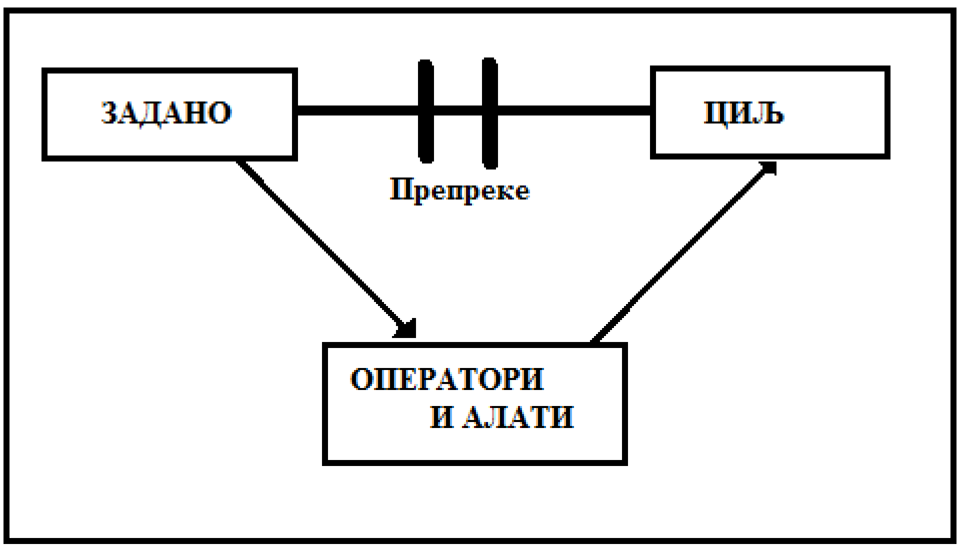
Способност за решавања проблема се може развити путем високог квалитета образовања. Прогресивне наставне методе, које се заснивају на решавању проблема учења, учење засновано на испитивању, као и индивидуални и групни рад на пројектима, могу да се користе како би се подстакло дубоко разумевање и припрема ученика за примену знања у не испитаним ситуацијама. Добра настава подразумева уређено учење и метакогниције, и уз помоћ ње се развијају когнитивни процеси који стоје у основи решавања проблема. То је начин да се ученици припреме за ефикасно расуђивање у непознатим ситуацијама, као и да попуне празнине у знању посматрањем, истраживањем и интеракцијом са непознатим системима.

Управо зато сам изабрала тему "Креативно решавање проблема у математици". Циљ овог рада је да се покаже да фокусирањем на сам начин решавања проблема, могу да се прошире мисаони процеси ученика и побољша њихово напредовање у школи.

2. РЕШАВАЊЕ ПРОБЛЕМА

Проблем постоји када лице има циљ, али не зна како да га постигне (Duncker, 1945).

Ова дефиниција је у ширем смислу представљена на *Слици 1*. ***Дато стање*** (**задано**) представља знање које особа има о проблему на самом почетку, а ***операције*** (**оператори и алати**) су дозвољене радње, које се могу извршити да би се постигао ***жељени циљ*** (**исход**), уз помоћ доступног ***алата***. ***Препреке*** које се морају превазићи (нпр. недостатак знања или очигледне стратегије), стоје на путу постизања циља. Превазилажење препрека може се постићи, не само њиховом спознајом, већ и мотивационим и афективним средствима (Funke, 2010).



Слика 1. Проблемска ситуација (после Funke & Frensch, 1995)

Као пример, размотримо једноставан проблем проналажење најкраћег могућег пута између два места, ако су дате мапе пута са обележеним предвиђеним временом, које је потребно да се пређе тај пут и калкулатор. ***Дато стање*** је дата информација – карта без означеененог пута - а стање ***циља*** је жељени одговор – најкраћи пут. Дозвољене радње (***операције***) су избор могућег пута, израчунавање укупног времена и упоређивање са временом потребним да се пређу други путеви. ***Алат*** (калкулатор) је на располагању као помоћ у сабирању времена.

У складу са овим, разумевање онога што се подразумева под проблемом, Мајер (Mayer, 1990) дефинише ***решавање проблема као когнитивну обраду, усмерену на трансформацију дате ситуације у циљ, када очигледне методе за решавање овакве ситуације нису доступне.***

Ова дефиниција је широко прихваћена у решавању проблема заједнице (на пример, види Klieme, 2004; Mayer & Wittrock, 2006; Reeff, Zabal & Blech, 2006).

Дефинисање ***способности решавање проблема*** у процени ПИСА 2012, заснива се на овим опште прихваћеним значењима термина „проблема“ и „решавање проблема“. Као што је наведено у следећем:

Способност решавања проблема је могућност појединца да се укључи у когнитивну обраду, да би разумео и решио проблемску ситуацију, где методе решавања нису одмах очигледне. То укључује његову спремност и вољу да се упусти у такве ситуације, да би достигао свој потенцијал конструктивне особе доброг расуђивања.

У следећем делу текста је приказан сваки део дефинисања способности решавања проблема.

Способност решавања проблема...

Способност обухвата много више од основне репродукције акумулираног знања. Она подразумева мобилизацију когнитивних и практичних вештина, креативних способности и других психосоцијалних ресурса, као што су ставови, мотивација и вредности (OECD, 2003б).

Претходно знање је важно у решавању проблема. Међутим, решавање проблема способности укључује могућност да се стекну нова знања и да се употребе, или да се користи претходно знање на нов начин, да би се решио неки нови проблем (тј. проблеми који нису рутинске природе).

...је могућност појединца да се укључи у когнитивну обраду...

Интерно решавање проблема одиграва се у когнитивном систему појединца и може се индиректно закључити радњама које појединац предузима. То обухвата представљање и манипулацију различитим врстама знања која постоје у когнитивном систему особе која решава проблем (Mayer & Wittrock, 2006).

Креативно, (дивергентно различито) размишљање и критичко размишљање су важне компоненте способности решавања проблема (Mayer, 1992). Креативно размишљање је когнитивна (спознајна) активност, која резултира проналажењем решења за нове проблеме. Критичко мишљење прати креативно размишљање и ангажовано је да процени могућа решења.

...да разуме и реши проблемску ситуацију...

У којој мери може појединац да се суочи са изазовима проблемске ситуације и да крене ка решавању проблема?

Решавање проблема почиње са признавањем да ситуацијски проблем постоји и постизањем разумевања природе ситуације. То захтева од особе која решава проблем да идентификује одређени проблем или проблеме који треба да се реше, да планира и спроведе решавање, уз праћење и оцењивање напретка током тих активности.

Често за проблеме из стварног света не постоји јединствено или тачно решење. Поред тога, проблемска ситуација може да се промени у току процеса решавања, вероватно услед интеракције са особом која решава проблем, или као резултат своје динамичне природе.

...где метода решавања није одмах очигледна...

Средства проналажења пута који води ка решењу, не треба бити испрва очигледна особи која решава проблем. На том путу ће се наићи на разне врсте препрека, или ће бити случајева да неке информације недостају. Ово се конкретно односи на не-рутинске проблеме, а не на оне рутинске, (односно на проблеме на које се претходно научен поступак решавања може јасно применити): особа која решава проблем мора активно да истражује и разуме проблем, или да осмисли *нову* стратегију, или пак да примени стратегију научену у *другачијем контексту* да би се дошло до решења.

Статус проблема - да ли је рутинске природе или не - зависи од тога колико је особа која решава проблем упозната са њим. Код једне особе, оно што представља *„проблем“* може имати једно очигледно решење, у односу на другу особу која има више искуства и праксе код решавања таквих проблема.

Неће увек бити случај да контекст или циљеви буду сами по себи непознати особи која решава проблем; оно што је важно је да су одређени проблеми нови или да начини остваривања циљева не буду одмах очигледни. Особа која решава проблем може имати потребу да истражи или дође у интеракцију са проблемском ситуацијом пре него што покуша да реши проблем.

... То укључује спремност да се упусти у решавање таквих ситуација...

Решавање проблема је лично и усмерено, то јест, особа која решава проблем обрађује информације на начин који се води остваривањем личних циљева (Mayer & Wittrock, 2006). Индивидуално знање и вештине које поседује особа помажу да се одреди ниво тежине или лакоће, како би се превазишле препреке до решења. Међутим, на овакве операције, које подразумевају примену таквог знања и вештина, утичу мотивациони и емоционални фактори као што су уверења (нпр. самопоуздање) и осећања које особа има у погледу заинтересованости и способности да се реши (Mayer, 1998).

Поред тога, контекст проблема (у зависности да ли он је он познат и схваћен), спољни ресурси који су на располагању особи која решава проблем (као што је приступ алатима), као и окружење у којем особа ради (нпр. испитна ситуација), ће имати утицај на начин на који та особа приступа проблему и на који се ангажује да би дошла до решења.

....у циљу постизања жељеног степена потенцијала особе, као конструктивног појединца правилног расуђивања...

Способност игра важан фактор код начина на које појединци помажу да се обликује свет, а не само да се изборе с њим: „... кључне способности могу користи како појединцу тако и друштву“ (Rychen & Salganik, 2003). Они би требало да „управљају својим животима на смислени и одговоран начина, преузимањем контроле над својим животним и радним условима“ (Ibid). Појединци треба да буду успешни у решавању проблема, да би постигли свој потенцијал као конструктивни, одговорни и разумни грађани.

3. ПРЕГЛЕД ИСТРАЖИВАЊА У ОБЛАСТИ РЕШАВАЊА ПРОБЛЕМА

3.1. Историјске и теоретске поставке

Психолошка истраживања решавања проблема почела су да се спроводе раних 1900. година, као изданак менталне филозофије (Humphrey, 1963; Mandler & Mandler, 1964). Током XX века развила су се четири теоретска прилаза:

1. Ране концепције;
2. Асоцијатизам;
3. Гешталт психологија;
4. Процесирање информација (Mayer, у штампи).

3.1.1. Ране концепције

Вилхелм Вундт (Wilhelm Wundt) отворио је 1879. године прву светску психолошку лабораторију у Лајпцигу у Немачкој, где је покушао да обучи прву генерацију експерименталних психолога. Вундтов главни допринос студији решавања проблема, ипак, био је у њеној забрани на основу тог комплексног когнитивног процеса који је био исувише компликован за изучавање путем експерименталних метода (Wundt, 1911/1973). Упркос његовим саветима, група коју су чинили његови бивши студенти – која је постала позната као Вурзбург група (Wurzburg group) – настојала је да проучава размишљање тако што су тражили од студената да опишу своје процесе мишљења док су решавали проблеме асоцијације појединих речи, као што је проналажење надређене парадигме речи „новина“ (нпр. одговор би био „штампа“). Иако нису дошли до новог теоретског приступа, Вурзбург група је пронашла емпиријски доказ који оспорава неке од кључних претпоставки менталне филозофије, укључујући оспоравања идеје да свако размишљање подразумева менталну имагинацију.

3.1.2. Асоцијатизам

У периоду од 1920. па све до 1950. године, први битни теоретски приступ који је преузео научну студију о решавању проблема био је *асоцијатизам* – становиште да се когнитивне презентације у мозгу састоје од идеја и веза између њих, и да когнитивни процеси у мозгу обухватају праћење ланца асоцијација из једне идеје на следећу (Mandler & Mandler, 1964; Mayer, 1992). На пример, у класичном учењу, Торндајк (Thorndike, 1911) је сместио гладну мачку у нешто што је он назвао *кутија слагалица* (*puzzle box*) – дрвену кутију у којој би се повлачењем петље конца закаченог за горњи део кутије отворила врата замке која би омогућила мачки да побегне до чиније са храном која се налази изван кутије. Према Торндајку, током многих покушаја, мачка је научила да побегне кроз процес који је он назвао *закон ефекта:* одговори који су водили до незадовољства постају мање повезани са самом ситуацијом, а одговори који су водили до задовољства постају више повезани са ситуацијом. Решавање неког проблема је једноставно ствар покушаја и грешке као и случајног успеха, према Торндајковом погледу асоцијатизма. Велики изазов асоцијативној теорији тиче се природе трансфера – то јест, објашњавање како особа која решава проблем смишља креативно решење које никад пре тога није било изведено. Асоцијативне концепције когниције које се могу наћи у текућим истрживањима обухватају неуронске везе, конекционистичке моделе и паралелно распоређене процесне моделе (Rogers & McClelland, 2004).

3.1.3. Гешталт психологија

Гешталт (Gestalt) приступ решавању проблема развијао се у периоду од 1930. до 1940. године као контратежа асоцијативном приступу. Према Гешталт приступу когнитивне презентације се састоје од кохерентних структура (уместо индивидуалних асоцијација) и према томе, когнитивни процес решавања проблема обухвата стварање једне кохерентне структуре (уместо јачања и слабљења асоцијација). Главно тежиште је стављено на природу схватања – увида на који начин се особе које решавају проблем крећу од тога како не знају решење па до самог решења проблема (Duncker, 1945; Mayer, 1995). На пример, у класичном учењу Колер (Kohler, 1925) је посматрао како је гладан мајмун на игралишту схватио како да споји кутије да би дохватио банану која је била постављена изнад њега. Колер је објаснио тај унутрашњи механизам термином *увид* – што би у буквалном смислу значило видети или увидети саму структуру ситуације. Главна препрека Гешталт теорији лежи у њеном недостатку прецизности. Гешталт концепције се могу наћи у модерним истраживањима о менталним моделима и шемама (Gentner & Stevens, 1983).

3.1.4. Ђерђ Поља

Ђерђ Поља (Geogre Polya) је рођен у Мађарској 1887. године, а емигрирао је у Сједињене Државе 1940. године. Као признати математичар, убрзо је постао познат по својим истрживањима и предавањима на тему решавања проблема на Стенфорд Универзитету (Stanford University). У његовим збиркама предавања "*Како решити проблем*" ("*How to Solve It*", 1957), објављеној по први пут 1945. године и "*Математичко откриће*" ("*Mathematical Discovery*", 1965), Поља је поделио решавање проблема на четири фазе:

(1) разумевање проблема,

(2) израда плана,

(3) извођење плана, и

(4) осврт.

Битан допринос Пољиног рада лежи у његовом посматрању да је решавање проблема вештина која може да се научи: „то може да се научи само имитацијом и вежбом“ (Polya, 1965, p. ix). Бавећи се углавном примерима који се тичу матемачког решавања проблема, Поља је предложио бројне методе решавања проблема које обухватају размишљање о повезаном проблему, растављање проблема на делове и понављање датог или самог циља.

3.1.5. Обрада информације

Приступ *обраде информације* развијао се у периоду од 1960. до 1970. године и базирао се на комјутерској метафори – идеји да су људска бића процесори информација (Mayer, 2009). Према приступу процесирања информација, решавање проблема подразумева серије менталних прорачуна – при чему се свака од њих састоји од примене једног процеса на једну менталну презентацију (као што је поређење два елемента да би се одредило да ли се они у нечему разликују). У њиховим збиркама предавања, "*Људско решавање проблема*", професори Невел и Симон ("*Human Problem Solving*", Newell & Simon, 1972) су предложили теорију да решавање проблема укључује *простор проблема* – презентацију свих међустања која се јављају између датог стања и циља, и *хеуристику претраге* – стратегије које воде од датог стања до циља. Невел и Симон су користили симулацију компјутера као истаживачки метод да би проверили њихову концепцију људског решавања проблема, при чему су направили компјутерске програме који су решавали проблеме користећи стратегије којима се служе људска бића. Битна предност приступа процесирања информација је у томе да решавање проблема може бити описано са великом јасноћом – као компјутерски програм. Битно ограничење приступу процесирања информација је у томе да је он најкориснији за описивање решавања проблема и то оних проблема који су добро дефинисани, више него за оне који су лоше дефинисани. Концепција когниције процесирања информација живи и даље као главно начело данашње когнитивне науке (Mayer, 2009).

3.2. Тренутна истраживања у вези решавања проблема

Учење о решавању проблема има нешто испрекидану традицију, при чему су се различите теме изучавале релативно изоловано једна од друге. Неке битне поставке истраживања у вези решавања проблема обухватају:

- *доношење одлука,*
- *расуђивање,*
- *интелигенцију и креативност,*
- *учење о вештинама размишљања,*
- *експертско решавање проблема,*
- *размишљање путем аналогије,*
- *математичко и научно решавање проблема,*
- *смештену когницију,*
- *когнитивну неурологију,*
- *сложено решавање проблема.*

Теорија која обједињује неколико оваквих различитих поставки истраживања у вези решавања проблема је идеја да решавање проблема зависи од знања особе која решава проблем, укључујући ту и знање потребно за одређену област (Mayer & Wittrock, 2006). Друга оваква теорија тиче се улоге човековог система за обраду информација – укључујући ту и озбиљна ограничења у погледу капацитета радне меморије.

3.2.1. Доношење одлуке

Доношење одлуке односи се на когнитивно процесирање укључено у прављењу избора између две или више алтернатива (Barron, 2000; Kahneman & Tversky, 2000; Markman & Medin, 2002). На пример, задатак доношења одлуке је да се изабере између:

(a) 85% шансе за освајање 1000 $ (са 15% шансе да се не освоји ништа) и

(b) добијање сигурних 800$.

Истраживање у вези процеса доношења одлуке довело је до прогресије четири групе теорија – теорије перспективе, дескриптивне теорије, хеуристичке теорије, и конструктивне теорије. Теорије перспективе, које се некада називају и економске теорије, одређују шта људи треба да раде ако су потпуно рационални. Теорије перспективе, као што се и очекује од тоерија вредности, предвиђају да људи треба да се одлуче за прву алтернативу, јер има вишу очекивану вредност (нпр., $850), пре него да изаберу другу алетрнативу (нпр., $800); ипак психолошко истраживање показује да људи преферирају другу алтернативу (Kahneman & Tversky, 1984). Дескриптивне теорије описују шта људи у ствари раде када су суочени са доношењем одлуке. Дескриптивне теорије, као што је *теорија перспективе*, се темеље на идеји да се људи радије одлучују да избегну губитак пре него да добију његов еквивалент, као и да људи имају тенденцију да прецене мале изгледе, а да потцене оне велике изгледе за добитак. На пример, већина људи се радије одлучује за сигуран добитак од 3000$ него за 80% шансе да освоје 4000$, али исто тако, већина људи ће радије изабрати 80% шансе да изгубе 4000$ него сигуран губитак од 3000$ (Kahneman & Tversky, 1979). Хеуристичке теорије граде се на овим проналасцима тако што се фокусирају на доменски специфиране стратегије које људи користе да би донели одлуке (Gigerenzer et al., 1999). На пример, већина људи ће одлучити да је већа вероватноћа да се слово „р“ појави у првом слогу енглеске речи него на трећем слогу (Tversky & Kahneman, 1973). Објашњење за ово је да они користе *доступност хеуристике*, у којој се претпоставља да је лакше сетити се речи које почињу словом „р“ од оних код којих је слово „р“ на трећем слогу. Конструктивне теорије се такође темеље на овим налазима тако што се фокусирају на доношење одлуке као процесу конструкције кохерентног менталног модела ситуације. На пример, људи ће вероватно рећи да ће купити нову карту за позориште од 10$ ако открију да су изгубили 10$, међутим, вероватно неће купити нову карту од 10$ ако открију да су изгубили карту коју су већ платили (Kahneman & Tversky, 1984). Објашњење за овакав закључак је да се људи укључују у процес *менталног рачунања* при чему је новац за карту изгубљен према другом сценарију а не према првом.

Битна тема у текућим теоријама доношења одлука базираним на доказима, тиче се централне улоге знања специфичним за дату област и когнитивног процесирања које води људе до задатка да донесу одлуку. Друга централна теорија је да људи користе стратегије које су пречице да би лакше превазишли ограничења обраде информација које намеће човеков систем информација, и тако се ослања на оно што професор Симон (Simon, 1982) назива *сатисфицирање(satisficing)* – одабир прихватљивог избора који задовољава дати критеријум.

3.2.2. Расуђивање

Расуђивање се односи на одређивање да ли један закључак произилази из његових премиса (Evans, 2005; Johnson-Laird, 2005). На пример, условљено расуђивање може се посматрати користећи проблем окретања картице на одређну страну као што је у следећем случају, „Ако картица има самогласник са једне стране, то значи да је паран број на другој страни. Изаберите оне картице које сигурно треба да окренете да би видели да ли оне крше правило А Д 4 7 " (Wason, 1966). Истрживање показује да људи успешније изводе ову радњу када се проблем окретања картица представи у конкретној форми, као што је, „ако особа пије пиво, онда та особа мора бити старија од 19 година. Изаберите једну или више картица које сигурно треба да окренете да би одредили да ли људи крше ово правило: КОНЗУМИРАЊЕ ПИВА, КОНЗУМИРАЊЕ КОКА-КОЛЕ, 16 ГОДИНА СТАРОСТИ, 22 ГОДИНЕ СТАРОСТИ" (Griggs & Cox, 1982). Накнадно истраживање је показало да људи успешније изводе ову радњу када идеја конкретног проблема укључује откривање преваранатa (Cosmides, 1989) или када се тражи дозвола (Cheng & Holyoak, 1985). Базирана на серији емпиријских истрживања, Џонсон-Лардова (Johnson-Laird, 2005) теорија менталног модела пружа сличан рачун дедуктивог расуђивања у којем људи граде конкретне менталне моделе ситуација описане премисама. Ови резултати указују на доменом одређено расуђивање, то јест, на идеју да људи радије користе конкретне контексте проблема да воде њихово расуђивање него да примене иста општа логичка правила на све проблеме.

3.2.3. Интелигенција и креативност

Истраживање везано за *интелигенцију и креативност* бави се објашњавањем индивидуалних разлика код човекове когнитивне способности за решавање проблема (Guilford, 1967; Sternberg, 1990, 1999; Sternberg & Grigorenko, 2003). Психометријско истраживање испитује корелације међу когнитивним тестовима (Carroll, 1993) и доказе опште интелигенције која се рефлектује високом корелацијом међу свим когнитивним тестовима. Међутим, факторска анализа (као и слични статистички алати) открива много мање специјализованих фактора, као што су форме вербалне способности, математичка способност, и просторна способност (Carroll, 1993; Sternberg, 1999). Савремена когнитивна научна истраживања фокусирају се на препознавању компонентних процеса који подржавају резултате тестова интелигенције, укључујући анализу когнитивних задатака као делова тестова интелигенције; као и истицање индивидуалних разлика које се јављају у ситему процесирања информација који је повезан са когнитивним тестовима. Овај рад указује на улогу домена специфичних знања и обраду креативности у когнитивним перформансама, као и на начине на које размишљање људи зависи од структуре човековог система за обраду информација.

3.2.4. Учење о вештинама размишљања

Истраживање у вези *учења о вештинама размишљања* фокусира се на вежбању које помаже људима да постану успешнији у решавању проблема (Bloom & Broder, 1950; Covington, Crutchfield, Davies & Olton, 1974; Nickerson, 1999; Ritchhart & Perkins, 2005). На пример, професори Блум и Бродер (Bloom & Broder 1950) су учили студенте да решавају економске проблеме тако што су их ставили у позицију да посматрају модел решавања проблема док су гласно размишљали о томе. Слично су и професори Ковингтон, Крачвфилд, Дејвис и Олтон (Covington, Crutchfield, Davies & Olton, 1974) учили ученике основне школе да реше проблеме загонетке тако што су тражили од њих да прочитају стрипове, који су састављени по узору на начин како се генеришу и тестирају хипотезе различитих проблема загонетки. Откриће које се тако упорно намеће је да вежбање решавања проблема тежи ефикасности када се фокусира на специфичне вештине потребне за задатак, као што су генерисање и тестирање хипотезе, када је особа која решава проблем успешна у својим вештинама, и када тест обухвата проблеме који су слични онима који се користе током вежбе. Не постоје чврсти докази да људи могу да се науче општим стратегијама решавања проблема које побољшавају перформансе преко различитих сетова проблемских ситуација (Nickerson, 1999; Ritchhart & Perkins, 2005). Дакле, важна тема истраживања вештина расуђивања тиче се улоге знања специфичног за одређену област, преко пружања подршке у решавању проблема.

3.2.5. Експертско решавање проблема

Истраживање у вези *експертског решавање проблема* обухвата упоређивање начина на које стручњаци и почетници долазе до решења (Chase & Simon, 1973; de Groot, 1965; Ericsson, Feltovich, & Hoffman, 2006). На пример, професионални играчи шаха су више у могућности да запамте позиције шаховских фигура на табли од почетника, али разлика између професионалаца и почетника нестаје онада када се шаховске фигуре насумично распореде по табли (Chase & Simon, 1973). Слично тако, ако поставимо шаховску таблу и затражимо од испитаника да направе следећи потез, професионални играчи неће направити више потеза од почетника, већ ће они направити боље потезе од почетника (de Groot, 1965). Истраживање у развоју експертизе показује да стручњаци морају да посвете отприлике десет година вежбању да би стекли знање које је потребно за експертски ниво решавања проблема, међутим знање потребно за успех у једној области не преноси се лако на другу област (Ericsson, Feltovich, & Hoffman, 2006).

Ови резултати су у складу са идејом да стручњаци не поседују боље опште когнитивне вештине од почетника - као што је бољи капацитет меморије – већ стручњаци имају већи ниво знања у специфичној области које се заснива на њиховом искуству (као што су шеме за начин на који неколико делова формира једну конфигурацију). Слично тако, ови резултати такође приказују ограничења човековог система обраде информација који изискује стратегије, као што су ментално уређење делова у конфигурације.

3.2.6. Размишљање путем аналогије

Размишљање путем аналогије односи се на решавање проблема коришћењем знања о сличном проблему (Holyoak, 2005). На пример, професори Гик и Холијак (Gick, 1980 и Holyoak, 1983) тражили су од студената да реше Данкеров (Duncker,1945) проблем са тумором где они морају да смисле како да униште тумор који не може бити оперисан, тако што ће користити терапију зрачењем које, ако је довољног интензитета може уништити ткиво које му се нађе на путу. Студенти углавном нису били успешни у долажењу до жељеног решења које гласи – терапија зрачењем слабог интензитета усмереног директно на тумор – чак иако им је пре тога дат текст о нападању тврђаве који се базира на истој општој одлуци да се у томе примени доста слабих напада на тврђаву. Главни закључак је да људи имају проблема да се усмере ка аналогном трансферу – да примене исти метод решавања из једног проблема који им је познат, на нови проблем који може бити решен помоћу исте методе – посебно у случају када се насловне приче разликују. Овакав закључак такође сугерише да човекова когниција тежи да буде специфична за неку област, тако да се стратегије решавања које се користе у једном контексту не пребацују аутоматски на други контекст.

3.2.7. Математичко и научно решавање проблема

Истраживање у вези *математичког и научног решавања проблема* фокусира се на то како ученици решавају проблеме специфичне за области математике или науке (Mayer, 2008). Истраживање показује да стручност потребна за решавање аритметичких проблема, као пример, зависи од специфичне врсте знања коју поседује особа која решава проблем , укључујући ту и чињенице, концепте, процедуре, стратегије и веровања (Anderson et al., 2001; Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001; Mayer, 2008). На пример, ученици су у могућности да распореде речи у категорије у оквиру аритметичког проблема, показујући тако да они поседују знање о одређеним шемама за специфичне врсте проблема (Hinsley, Hays, & Simon, 1977). Професори Рајли, Грино и Хелер (Riley, Greeno & Heller, 1982) су открили да млађи ученици могу боље и лакше да реше задатке са речима које су представљене ланчаном ситуацијом (нпр. Џон има 3 кликера. Он добије још 2 кликера. Колико он сада има кликера?) него задатке у упоредним ситуацијама (нпр. Џон има 3 кликера. Пит има 2 кликера више од Џона. Колико кликера има Пит?). Старији ученици су били успешни у оба типа задатка. Овим открићем се наводи да ученици могу почети решавање са једном једноставном шемом, а да им се додају нове када стекну више искуства у решавању.

На пољу научног решавања проблема, упорно се намеће резултат да ученици улазе у учионицу на часове науке са сетом већ постојећег схватања о томе како ствари функционишу, што се назива *предубеђење* или *заблуда*. На пример велики број студената физике верује да ако је један објекат у покрету нека сила мора деловати на њега да би остао у покрету – заблуда која се некад назива и *теорија подстицаја* (McCloskey, 1983). Такве заблуде утичу на то како ученици праве предвиђања или посматрају резултате у задатку научног решавања проблема, што често резултира *потврдом предрасуде* – покушаја да се докаже једна хипотеза а да се при томе занемаре противречни подаци (Chinn & Malhotra, 2002; Dunbar, 1993). Све у свему, истраживање у вези математичког и научног решавања проблема указује на улогу специфичних знања ученика у одређивању процеса решавања проблема.

3.2.8. Смештена когниција

Појам *смештена когниција* се односи на решавање проблема у оквиру специфичног физичког, социјалног и културног контекста (Nunes, Schlieman, & Carraher, 1993; Robbins & Aydede, 2009). На пример, у класичном учењу, професори Нанс, Шлиман и Керер (Nunes, Schlieman & Carraher, 1993) су открили да ученици у Бразилу користе потпуно различите рачунарске стратегије за решавање аритметичког проблема који им је задат на папиру у школи, у односу на оне проблеме са којима се сусрећу на свом послу као улични продавци. У школи, када им се зада проблем, као што је 35 x 10 = ___ они су покушали да примене рачунске операције множења које су учили, док су на улици они измислили стратегију која се заснива на поновљеном додавању елемената једначине (105 + 105 + 105 + 35 = 350). Код учења рачунских операција које користе купци у продавници да би одлучили који од два производа је боље купити, професор Лав (Lave, 1988) је дошао до закључка да људи никад не користе рачунање цене коштања које су учили у школи, већ уместо тога примењују различите стратегије у различитим ситуацијама. На пример да би направили избор између паковања кикирикија од 10 унца које кошта 90 центи и паковања од 4 унца које кошта 45 центи људи користе стратегију сразмере при чему је боље купити веће паковање јер кошта дупло више али има и више него дуплу количину. Истраживање у вези смештене когниције - или оно што може назвати *свакодневно размишљање* – показује да контекст у којем се људи сусрећу са проблемом утиче на то како ће они решити проблем.

3.2.9. Когнитивна неуролгија решавања проблема

Истраживање у вези *когнитивне неуролгије решавања проблема* се фокусира на мождану активност која се јавља током решавања проблема (Goel, 2005). На пример, професор Гоел (2005) је открио да се ангажују различити делови мозга за решавање проблема расуђивања који су представљени у апстрактној форми (нпр. Сви чланови скупа P су чланови скупа B. Сви чланови скупа C су чланови скупа P. Из тога следи да су сви чланови скупа C и чланови скупа B) у односу на оне који су представљени у конкретној форми (нпр. „Сви пси су кућни љубимци. Све пудлице су пси. Дакле, све пудлице су кућни љубимци.“). Овакви резултати опет сугеришу да је расуђивање донекле одређено доменом дате области, пре него да се базира на примени једног универзалног скупа правила расуђивања.

3.2.10. Комплексно решавање проблема

Пре око 30 година, професор Дурнер (Dörner, 1975) је усвојио термин *комплексно решавање проблема* да би описао одређени тип проблема који се изучава, а који се у погледу сложености разликује од простог решавања проблема, као и да би описао нове методе истраживања, пре свега компјутерски симулираних микросветова. У то време, научници су били све више убеђени да емпиријски докази и теоретски концепти, који су изведени из простих нових задатака не могу једноставно бити генерализовани и примењени на оне сложеније проблеме из стварног живота и да знање и стратегије специфичне за неку област играју важну улогу у решавању проблема.

У Европи су се појавила два основна приступа истраживања комплексног решавања проблема, а заједнички им је био нагласак на релативно уобичајене, семантички богате, компјутеризоване лабораторијске задатке конструисане тако да буду слични проблемима из стварног живота (Frensch & Funke, 1995; Funke & Frensch, 2007). Први приступ, који је покренуо професор Броудбент (1977; видети Berry & Broadbent, 1995), фокусира се на дистинкцију између *експлицитног решавања проблема* (где се решавање проблема контролише намером особе која решава проблем) и *имплицитног решавања проблема* (где је решавање проблема аутоматско или несвесно), и обично се користе математички добро дефинисани компјутерски модели. Други приступ, који је покренуо професор Дурнер (Dörner, 1980; Dörner et al, 1983), се бави „узајамним дејством когнитивних, мотивационих и социјалних компоненти решавања проблема" (Funke & Frensch, 2007), и користи веома сложене компјутерске симулације које укључују до 2000 повезаних промењљивих вредности.

Професори Френш и Фанке (Frensch and Funke, 1995b, p. 18) дали су предлог следећих дистинктивнх карактеристика комплексног решавања проблема које су у складу са обичајима истраживања установљеним од стране професора Броадбента и Дурнера (Broadbent and Dörner) *: "Дато стање, циљ и препреке које постоје између датог стања и циља су комплексни, динамично се мењају током решавања проблема и нису транспарентни. Тачна својства датог стања, циља и препрека су на самом почетку непознате особи која решава проблем."* Ова дефиниција вуче корене из европске традиције професора Броадбента и Дурнера. Много шири појам онога шта чини комплексни проблем, у односу на прост проблем, је предмет истраживања многих аутора (нпр., Sternberg & Frensch, 1991). Неки га користе да тако означе аутентичне задатке, без обзира на њихова својства; неки га такође користе на сличан начин као и професори Френш и Фанке, међутим допуштају то да комплексни проблеми буду динамични или нетранспарентни. Ове особине могу бити илустроване примером (Vollmeyer, Burns & Holyoak, 1996). Приказан је комјутерски симулиран акваријум. У симулацији су приказане четири врсте морских животиња (крабе, рачићи, јастози и морски гргечи); ове врсте су под утицајем четири особине (темпратура, салинитет, кисеоник и струја). Учесници истраживања (корисници система) могу манипулисати овим особинама, али веза између ових особина и морских животиња није дата. Промене које начине учесници у погледу температуре, салинитета, кисеоника и струје ће проузроковати промене код морске популације. Поред тога, у одсуству такве интервенције учесника, број популације јастога ће опасти *сам од себе*. Од учесника је затражено да пробају да пронађу везу између особина и морских животиња, тако што ће експериментисати са различитим полазним вредностима, а затим је од њих затражено да контролишу систем да би достигли специфичне циљне вредности за сваку морску животињу. Треба напоменути да су једначине на којима почива основни систем прилично произвољне, што подразумева да ће знање о биологији мора из стварног света бити у најбољем случају бескорисно, а у најгорем и контрапродуктивно.

Истраживање (Funke & Frensch, 2007) не подржава јаку везу између глобалне интелигенције и способности за комплексно решавање проблема када је специфичност и транспарентност циља мала, а када је сематички садржај богат, али неке компоненте интелигенције (нарочито капацитет способности расуђивања и потенцијала учења) приказују се у корелацији са способношћу за комплексно решавање проблема чак и када је сам задатак нетранспарентан. Међутим, као што је и случај код једноставних проблема, способност за комплексно решавање проблема у многоме зависи од знања специфичног за дату област и стратегија. Коначно, да ли је способност за комплексно решавање проблема независна конструкција у односу на „једноставно решавање проблема“ остаје отворено питање, иако резултати истраживања Немачког националног огранка ПИСА 2000 (Wirth & Klieme, 2004) и ПИСА 2003 (Leutner et al, 2004; Leutner & Wirth, 2005) подржавају постојање независне конструкције сложеног решавања проблема.

4. КРЕАТИВНО РЕШАВАЊЕ ПРОБЛЕМА

Карен Л. Пепкин је у једном свом истраживању радила на тематској јединици наставног плана и програма Креативне вештине решавања проблема (КВРП) у математици. Пепкин сматра да се добија непроцењива вредност за функционисање ученика у школи, ако се фокусира на овој теми и настави као вештини, као и кроз ојачавањем ове вештине кроз различите јединице у току семестра. Постоји много пројеката који укључују креативна решења као што су истраживања, сајмови природних и друштвених наука, креативно писање и други. "Такође, када се пред ученика постави есејско питање, он може да користи своје КВРП да би изабрао и развио свој одговор. За разлику од памћења напамет, КВРП више проширује мисаоне процесе него што их сужава." (Karen L. Pepkin)

ЦИЉЕВИ

Пепкин је поставила следеће циљеве:

1. Ученици ће бити у стању да установе кораке који су укључени у Креативно решавање проблема.
2. Ученици ће бити у могућности да пронађу идеје (генерисање могућих решења проблема).
3. Ученици ће моћи да процене основаност могућих решења у смислу поштовања критеријума.
4. На основу скупа критеријума, ученици ће бити у стању да направе оптималан избор.
5. Ученици ће бити у стању да развију план за имплементацију решења.
6. Ученици ће бити у стању да повежу начине на које Креативно решавање проблема могу користити у разним областима.

СТРАТЕГИЈЕ

У својој књизи, *"Примењена машта" ("Applied Imagination"*, Osborn, 1963), Озборн констатује да је креативни проблем процес решавања који има три поступка:

1) Утврђивање чињеница,

2) Проналажење идеја,

3) Проналажење решења.

Озборн објашњава да је утврђивање чињеница део који обухвата дефинисање проблема и „... прикупљање и анализирање релевантних података.“ Проналажење идеја бави се генерисањем и модификацијом идеја. На крају, проналажења решења је евалуативни процес који кулминира у проналажењу коначног решења (стр. 86).

Роџер Ван Оех, у својој књизи, "A Whack on the Side of the Head" (Roger Van Oech, 1990), види креативни процес као спој „... две главне фазе ... маштовите и практичне фазе“. У маштовитој фази можете стварати и играти се са идејама. У практичној фази, ви их оцењујете и извршавате (стр. 38).

У новијој студији, Трефингерова студија (Treffinger, 1995), „Креативно решавање проблема: Преглед и едукативне импликације“, врши се преглед новијих трендова у креативном решавању проблема. У том свом чланку, он КВРП види као...

- Представљање димензије процеса на природан, а не на неприродан начин.
- Пролазак кроз трансформацију од преписаног до описаног приступа.
- Начин на који постају флексибилнији и одговарају на задатак кроз контекстуално, лично, методолошки и циљно-спознајно разматрање.

Постоји одступање од „... процеса приказа, који прописује основни број или тип појединих корака или стратегије који се морају применити у фиксном редоследу“ (стр.304-305).

Другим речима, концепт је динамичан и интерактиван.

Пепкин се више посветила традиционалном моделу, јер искуства показују да више структуриран поступак функционише најбоље у првом случају. Ученици постају вештији, више динамичан приступ постаје могућ, ако су имали интернализоване поступке.

Због тога је одлучила да користи мешавине Ван Оех и Озборн процедура. " Ово ће бити процес са четири корака. Утврђивање проблема (утврђивање чињеница), ће бити јединствено за целу учионицу, по групама. Сви ће радити на одређеном проблему." (Karen L. Pepkin)

Кораци (фазе) :

1. ***Разјашњење проблема***
2. ***Размена идеја (Brainstorming)***
3. ***Евалуација и селекција***
4. ***Имплементација***

Разјашњење проблема укључује уверење свих ученика да разумеју шта решење проблема захтева. У овом кораку је укључен и преглед критеријума за успешан завршетак пројекта.

Током ***размене идеја***, ученици ће генерисати што више могућих идеја. Поигравање са идејама ће бити подстицано, са нагласком на обуздавању предрасуда и критика, а у циљу подстицања слободног протока и подстицања максималне излазне снаге.

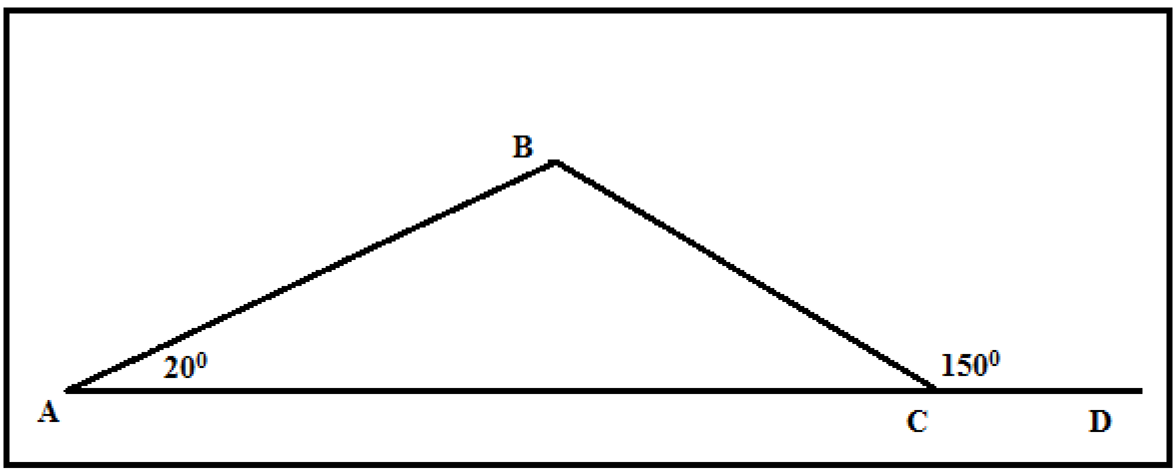
Током ***евалуације / селекције*** избора, чланови групе ће оценити предности и мане сваког предлога, и такође ће га допунити где је то могуће, или елиминисати неки део када је то неопходно, са циљем да група, као целина одлучи о једном избору.

У последњој фази, ***имплементације***, процес ће се састојати од плана за спровођење њихових избора.

Мада се креативно решавање проблема традиционално бави проблемима који имају више решења, попут оних из области менаџмента, област математике обично подразумева само једно решење. Али, геометрија и друге математичке јединице често представљају проблеме где постоји више начина доласка до истог решења.

Ево примера:

Ако је угао BCD = 150^0 и угао $\alpha = 20^0$, нађи угао β.



Слика 2

У овом проблему, можемо прво да израчунамо унутрашњи угао γ. Дати угао < BCD и угао < BCA = γ су упоредни углови, њихов збир је 180^0.

$$\gamma = 180^0 - 150^0 = 30^0$$

Затим, искористимо да је збир углова у троуглу 180^0

$$\beta = 180^0 - (20^0 + 30^0) = 180^0 - 50^0 = 130^0$$

Израчунали смо β.

Такође, може да се угао < BCD идентификује као спољашњи угао и као такав ће бити једнак збиру углова α и β.

$$\beta = 150^0 - 20^0 = 130^0$$

Израчунали смо β.

Ове су две различите методе за долажење до истог решења.

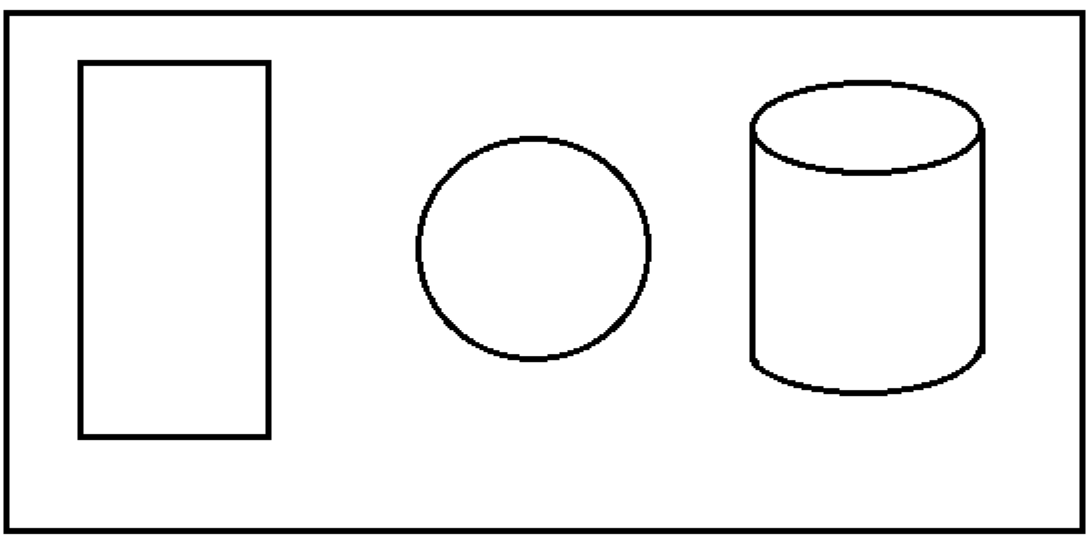
Дакле, постојање више од једног начина да се реши проблем, постаје проблем сам по себи за наше ученике. Уместо да их ослободи и омогући им више креативности у свом приступу, он их заправо збуњује.

На пример, увођењем инклузивног образовања у основним школама, ученици са посебним потребама имају могућност да похађају редовну школу. У једном мом одељењу имам ученика који је са посебним потребама и не зна основне ствари из математике, те наставу похађа по измењеном плану, прилагођеном његовом интелектуалном узрасту. Често се дешава да ме неко од других ученика пита: „Зашто не могу да радим оно што он ради?" а не лекције које су предвиђене за тај дан, или „Зашто је он добио то да уради?”, као да је за њега награда да ради нешто што они већ знају.

При упознавању ученика са корацима у креативном решавању проблема, Пепкин циљ је био да им помогне да превазиђу овај проблем, као и да им омогући да примењују ову вештину из области математике и у другим подручјима.

Из свог искуства, одлучила је да је потребно да се први дан учења нове наставне јединице утроши на сам процес, пре него да се ослоне на своје иницијално искуство, а затим да формулишу оно што се догодило после тога.

Првог дана, Пепкин им је представила јединице КВРП, објашњавајући шта је то и како може бити корисно у математици и другим областима. Нагласила је важност вредновања свих идеја. За почетак, им је приказала три поређана облика и питала их да изаберу онај који се разликује (преузето из *''A Whack on the Side of the Head’’*).(стр. 22).



Слика 3

Идеја је да њихов избор зависи од тога како га они посматрају. Свака фигура може бити нешто друго. Ваљак је другачији, јер је само он тродимензионални облик. Круг је другачији, јер је то једини облик који не садржи правоугаоник (страна цилиндра). Правоугаоник је другачији, јер је то једини облик који не садржи круг. Ова вежба наглашава потребу за разумевањем да има више од једног начина гледања на ствари и тиме вреднујемо перспективу сваке особе.

Пепкин је на табли поставила списак корака, а такође су и преиспитали преглед типова проблема којима ће се КВРП бавити још у групном процесу. Нагласак на концепт више решења или приступа. Ученицима је објашњен речник (критеријуми, фазе, појашњења, размена идеја, избор и примена, евалуација).

Ученици су подељени у групе од три до пет ученика да би сви имали прилику да учествују. Улога наставника је објашњена, и служи само као подршка. Идеја мора доћи из саме групе.

РАЗЈАШЊЕЊЕ ПРОБЛЕМА

Ученици су прво добили копију три пројекта са три различите групе критеријума које ће детаљно прегледати. Они ће затим добити други лист решења за проблем и свака група ће морати да одлучи да ли свако решење испуњава критеријуме или не. То ће дати студентима бољи осећај концепта.

РАЗМЕНА ИДЕЈА УНУТАР ГРУПЕ

Свака група је добила по један широки списак тема, и имали су задатак да генеришу што више могућих одговора . То ће се одигравати у виду игре. Победник је група која има највише одговора. При томе ће бити стављен акценат на квантитет и неосуђујући став.

ЕВАЛУАЦИЈА / СЕЛЕКЦИЈА

Користили су листе решења до којих је група дошла, а такође су добили списак критеријума којим ће се водити у процесу система елиминисања и мењања њихових избора док не буду остали са једним избором.

ИМПЛЕМЕНТАЦИЈА

Овде је група одлучивала о томе како ће да ураде пројекат. Пошто ово није стварни пројекат, по један представник из сваке групе је морао да опише како је група изабрала да га спроведе.

Нагласак је на томе да се сваки део ове наставне јединице спроведе кроз игру, што је то више могуће.

Другог дана, одељење је поново подељено у групе. Наставник је имао могућност да одлучи да ли ће групе бити сталне или ће се мењати и да ли ће ученик или наставник бирати састав група. Групе су имале одређени пројекат. Пример би био да се дизајнира игра на табли. По завршетку пројекта, ученици су заиста играли своју игру да би видели како то ради и направили измене по потреби. То је показало разлог за поштовање правила. Листа критеријума (правила) је изузетно важна. Број правила је значајан.

Премало правила би довело до нејасних концепта пројекта и не би дао ученицима могућност практичног придржавања конструкције. Превише правила би довело до тешкоћа и ограничења и на тај начин би заборавили на креативност. Неки узорак правила за стварање друштвене игре би могао да буде:

- Игра мора имати наслов.
- Игра мора да има почетак и крај.
- Мора да постоји начин да се креће по табли и табла мора да буде укључена.

Наредних дана лекције су укључивале све више и више математички-специфичне вештине, почевши са основним математичким, па све до геометрије. Оне могу да садрже два или три решења. На крају сваког часа, последњих петнаест минута је искоришћено за испитивање. Током овог дела часа свака група је бирала капитена да би објаснио како је њихова група завршила пројекат. Остале групе су могу да поставе једно или два питања.

Пепкин наглашава да ако се ова вештина не практикује током године, то ће бити губитак. Јер наставнику, сматра Пепкин, ће бити довољно да погледа неку наставну јединицу и одлучи како да лекцију обогати са мало креативног решавања проблема. Као и за било шта, пракса доводи до побољшања и довољно праксе доводи до професионализма.

ЛЕКЦИЈЕ

Ове лекције су дизајниране тако да је потребно групно планирање (тј. један и по час). Корекције се лако праве за краће временске периоде, елиминисањем понављања неког дела часа или дељењем лекције на два или три сегмента. Добро је што наставник може да користи свој суд о томе да ли за час треба више праксе или не, зависно да ли осећа да су ученици схватили концепт лекције.

<u>Први дан</u>

Увод

Наставник треба да представи тему уводним делом, као што је овај преузет из "Recall Enhancement Routine" (Schumaker, Bulgren, Deshler and Lenz).

„Данас ћу вам показати метод који ће нам помоћи да више мислимо и креативно решавамо проблеме . То се зове Креативно решавање проблема (КРП) и моћи ћете да га користите у различито време током целе године. Једном када научите ову процедуру видећете да вам она неће помоћи само на вашим часовима математике, већ и у другим предметима. Ја ћу данас разматрати кораке са вама, а ви ћете имати могућност да вежбате сваки корак, тако да ћете постати више упознати са методом.

Ми ћемо га користити по групама, тако да је веома важно да у оквиру сваке групе свака особа добије прилику да учествује и да идеје сваке особе буду цењене“ (стр. 26).

Загревање

Три фигуре су приказане (види слику 3). Од ученика се тражи да објасне која фигура се разликује од других. Кад ученици понуде своје идеје и објасне разлоге њихових избора, наставник треба да реагује позитивно, чак и кад указује разлоге због којих је њихов одговор нетачан. Наставник чини повезивања која доприносе, и веома су важна групи.

Речник и процедуре

Наставник објашњава појам стратегије КРП и дефинише све релевантне терминологије и кораке. Критеријуми, разјашњење, размена идеја, евалуација, избор и спровођење су примери које наставник треба да објасни, као и било који други који сматра да је назначен у зависности од нивоа часа. Наставник такође даје примере где се може користити и стратегија КРП која изазива додатне примере из часа, уверивши се да обухвата објашњења како може да се користи у школи. На крају овог одељка, наставник игра игру са студентима (2 екипе). Он даје појам који је прегледао и члан тима мора да пружи пример или дефиницију тог појма.

На остататку часа студенти ће бити подељени у групе од три до пет чланова. Наставник објашњава своју улогу као и код модератора. Они раде на следећим проблемима:

<u>РАЗЈАШЊЕЊЕ ПРОБЛЕМА</u>

Ученици ће добити три пројекта са три различите групе критеријума, који ће бити детаљно прегледани. То се може прилагодити тако да се да ствар која је позната ученику у вашој школи.

Пример- *„Напиши говор од једног минута да би убедио школски одбор да промени једну ствар у вашој школи. Критеријуми - она мора бити реална, не може бити штетна или негативна и мора бити специфична“.*

У овом сегменту наставник не размењује идеје са ученицима, али даје исправан и неисправан пример идеја да види да ли они разумеју поштовање критеријума.

<u>РАЗМЕНА ИДЕЈА УНУТАР ГРУПЕ</u>

Ученици уче да идеје што је више могуће генеришу. Потребно је да наставник напомене некритички став групе, и објасни које идеје често немају никакве везе са критеријумима, а које су корисне у стварању других решења, чак и ако они не одговарају самим решењима. Да би илустровали важност размене идеја (brainstorming) и начин на који наизглед неповезане идеје могу довести до решења, наставник може користити овај пример, или нешто из свог сопственог искуства.

"На часу маркетинга учествовала сам у групи. Наш пројекат је био да развијемо наш сопствени производ и маркетинг план. Када је размена идеја у току, тада није време за критику, и наша група се сложила да дозволи слободан проток идеја, без обзира колико бесмислено, или смешно изгледало. Ми смо размишљали о производима за које смо сматрали да су потребни, а никада нису направљени, или о било којем проналазку о којем смо сањали као деца. Затим смо разговарали о другим проналасцима, а убрзо је почело подсећање на дане пре микроталасне пећи. Један од наших чланова групе рекао је спонтано: „Штета што немају нешто тако да се храна охлади кад си у журби“. Ми смо се сви погледали и знали смо да смо пронашли идеју. Производ смо назвали „Микрохладан“ и то је одобрио наш професор. Да нисмо дозволили слободан проток идеја, или говорили једни другима да не говоримо о стварима које већ постоје, наша група никада не би дошла до те идеје." (Karen L. Pepkin)

Пример– *„Без стављања било каквих ограничења на време или новац, мислим да ће пуно ствари моћи да побољша квалитет живота у Хјустону. Сваки одговор ће бити вреднован поеном и тим који добије највише поена осваја награду“.*

ЕВАЛУАЦИЈА/СЕЛЕКЦИЈА

За пример који смо користили с ове листе наставник поставља критеријум на табли, као на пример:

„Ваше решење мора да буде бесплатно или да има минималну цену и мора бити у стању да се реализује у року од месец дана. Сада је ваш задатак промењен. Морате бити селективни. Погледајте сваки избор и елиминишите све оне који не одговарају критеријумима. Ова фаза није идеја. Ту за процену сваког избора само гледате како се уклапа са критеријумом. Када завршите, требало би да имате само један избор. “

ИМПЛЕМЕНТАЦИЈА

Током ове фазе ученици ће направити груби план како да остваре свој коначни избор из претходне фазе.

„Сад сте у завршној фази, или поступку, који се зове имплементација. Ви доносите одлуке како да урадите ваш пројекат, какав ће облик предузети и како ће заправо изгледати. То се може урадити у белешци, слици или дијаграмом (графички организатор) описивајући оно што намеравате да урадите.“

Сваки група мора изабрати капитена. Његов или њен посао је да објасни решење остатаку одељења. За то време друге групе морају да обрате посебну пажњу, јер ће после излагања решења давати повратне информације, конструктивне критике, и постављати питања.

У зависности од сопствене креативности наставника, а посебно ученика, може се прилагодити број и врста вежбе које се могу користити. На крају овог првог часа наставник коментарише кораке у КРП, као и терминологију, користећи реакције одељења на вежбама, као и примере који су навели ученике да дају свој пример.

Други дан

Наставник или омогућава ученицима да формирају своје групе од три до пет ученика, или сам бира групу. Затим уводи лекцију прегледом корака Креативног решавања проблема и улази у стварни пројекат. Ова лекција ће служити као преглед основних појмова и омогући ће ученицима стварну праксу у КРП.

РАЗЈАШЊЕЊЕ ПРОБЛЕМА

„Данашњи пројекат је пано о креативном процесу решавања проблема. Готов производ ће бити приказан у учионици као обавештавајући материјал. Критеријуми за пројекат су следећи:

1) *Пано мора имати наслов који укључује Креативно решавање проблема.*
2) *Мора да има најмање једну илустрацију.*
3) *Може да опише једну или више фаза процеса или читав процес.*
4) *Мора да има боје.*
5) *Мора бити оригиналан.*
6) *Груби нацрт мора да буде однет на одобрење пре него што се уради на паноу.*

Пре него што прођете кроз фазе које смо разматрали, морате добити сагласност. Ја ћу ићи по учионици и помагаћу вам, али идеје морају да долазе од вас самих.“

РАЗМЕНА ИДЕЈА УНУТАР ГРУПЕ

Свака група развија списак идеја о томе како да уради пано о Креативном решавању проблема.

„Сада је јасно да су сви на пројекту, свака група ће проналажењем идеја омогућити решење. Запамтите, у току ове фазе не би требало да критикујете идеје једних и других. Никада не знате када ће се нешто што звучи сулудо повезати са једном солидном идејом. Забавите се с тим. Ако се ваша група блокира у размишљању, треба само наставити са ширим и луђим размишљањем.“

ЕВАЛУАЦИЈА/СЕЛЕКЦИЈА

Имајући у виду критеријуме група оцењује сваки коментар (у овом пројекту могу бити два или три), и бира најбољи избор.

„Сада када је свака група направила листу, дошло је време за селекцију. Имајући у виду критеријуме, треба размотрити сваку сугестију и видите која најбоље одговара.“

ИМПЛЕМЕНТАЦИЈА

Група прецизира распоред илустрација, натписа, наслова, боја итд. А затим све то ставља у груби нацрт и чека одобрење наставника.

„Сада када сте сузили свој избор на један, морате да одлучите како је најбоље да завршите свој пројекат. Када се група договори о томе како ће га урадити, треба поднети предлог да га одобрим. Запамтите, не постоји један прави начин. Можете користити маркере, боје, слике из магазина, или све остало што може бити везано за пано. Такође можете бити креативни у типу писања који користите (нпр., штампање, скрипте, шаблоне, калиграфија, итд).“

Како група постаје искусна у КРП, она постаје независнија, и одобрење може бити елиминисано. Улога наставника је да циркулише међу групама и помогне у подстицању, разјашњавању и да коришћењем питања помогне групи да крене напред.

Трећи дан

Наставник уводи лекцију следећим речима:

„Сада би требало да будете више упућени у кораке Креативног решавања проблема. Данас ћемо са овом методом комбиновати нешто што свима треба да буде познато, игра на табли. Хајде да набројимо нешто и да видимо да ли можемо пронаћи сличности међу њима.“

РАЗЈАШЊЕЊЕ ПРОБЛЕМА

Наставник води одељење кроз списак података који на крају постају критеријуми за стварање игре:

1. Она мора имати наслов.
2. Она мора да има почетак и крај.
3. Она мора да има једноставна упутства, или група мора бити у стању да лако објаснити како се игра.
4. Мора да има тему.
5. Она мора да има делове који се крећу по табли.
6. Начин који се креће по табли мора бити наведен (коцкице, паук и сл.).
7. Мора да постоје наведена упуства о посебним додацима или казнама на табли, (нпр. одређена боја квадрата указује на додатне поене или на њихов губитак, одређена поља на које противник стане, враћају га назад на почетак, итд.)
8. Свака група мора да поднесе груби нацрт пре него што направи игру.

У зависности од нивоа одељења, наставник може користити више или мање изазовне критеријуме. Такође, лако се може проширити на два часа. Наставник треба да остави најмање петнаест минута за групе да се заиста играју игрице и да истраже да ли су потребне промене.

Ако програм који се учи укључује вероватноћу , наставник може да одлучи да сачува ову лекцију за ту јединицу , где студенти могу да схвате вероватноће доспевања на одређена поља и како се те вероватноће разликују са једном или две коцкице.

<u>РАЗМЕНА ИДЕЈА УНУТАР ГРУПЕ</u>

Ученици долазе са различитим идејама за игру. Они могу да почну са играма које већ знају, изгледом табле који им је већ познат или митских места. Овај пројекат се лако подводи под процес КРП.

„Јуче је пројекат био пано, данас је пројекат мало компликованији. Али пошто сте сви играли или видели друштвене игре , већ имате такав концепт на уму. Можда ћете желети да почнете са играма које већ знате и које произилазе из овог процеса. Можете користити омиљену причу или филм. Можете да креирате сопствено место или да користите место које већ постоји. Можете чак и да размишљате о омиљеном предмету или нешто што волите да радите ван школе. Ви тражите неку тему која уједињује игру. Запамтите, пустите ваше идеје да теку.“

<u>ЕВАЛУАЦИЈА/СЕЛЕКЦИЈА</u>

Током ове фазе гледају критеријуме да би направили коначан избор.

„Сада је време да погледате листу критеријума за игру, она вам може помоћи да елиминишете оне идеје које се очигледно лоше уклапају. Када дођете до две или три идеје, погледајте сваки критеријум и видите која идеја може да се користи са најмање измена.“

<u>ИМПЛЕМЕНТАЦИЈА</u>

Група чини грубу скицу на табли за игру, користи могућност да објасни како се игра игра или пише једноставна упутства.

„Сада сте спремни за израду саме игра. Не заборавите да прегледате критеријуме и да утврдите да ли се сви делови игре односе на тему. Када је ваша група завршила груб нацрт, доставите ми га на усвајање. Током последњег дела овог часа свака група ће играти своју игру. Направите потребне промене, будући да време то дозвољава.“

Четврти дан

У овој лекцији, наставник ће применити Креативно Решавање Проблема на математички проблем. Зависно од када је уведен КРП, наставник може прилагодити пример да би се уклапио са јединицом наставе. На пример, ако се КРП предаје на самом почетку школске године, наставник може преферирати пример из основне математике. Он у лекцију уводи следеће наредбе:

„Као што знате, ове недеље смо имали лекцију о Учењу креативног решавања проблема. Ми смо почели дискусију утврђивањем речника и прегледа у четири фазе односно –разјашњење проблема, размена идеја (brainstorming), евалуација /селекција и имплементација. Користили смо КРП да креирамо пано и друштвене игре. Данас сте спремни да га примените на решавање математичког проблема.“

Прикажите одељену слику 2;

РАЗЈАШЊЕЊЕ ПРОБЛЕМА

„Да бисте решили овај проблем, морате користити информације које већ знате о троугловима и угловима. Ви ћете морати да урадите више од једног корака. Такође је важно и треба имати на уму да постоји више начина да се реши овај проблем, али само је једно решење. Запамтите, ви тражите број степени угла у темену B.

Неки од вас ће одмах уочити одговор. Ако га и уочите, одуприте се нагону да га решите и идите заједно са другима постепено, кроз четири фазе. Запамтите, ви учите технику која се може применити на сложенијим проблемима."

Наставник би требало да подстакне бистрије ученике у свакој групи да делују као лидери, вође групе кроз четири фазе.

РАЗМЕНА ИДЕЈА УНУТАР ГРУПЕ

„Без било какве математичке калкулације, у процесу проналажења идеја реците све што знате о угловима и троугловима.“

Овде наставник прати одговоре групе и тражи од њих, када је то неопходно, да се осигура да су све релевантне информације прихваћене. Овај приступ је посебно погодан за ученике који не умеју да се снађу у ситуацији када су суочени са оваквим типом проблема.

ЕВАЛУАЦИЈА/СЕЛЕКЦИЈА

У овој фази студенти елиминишу непотребне и бескорисне информације, и почињу да уочавају могућа решења.

„Сада је време да се приступи решавању проблема. Видите све информације које су вам наведене и видите да ли можете да елиминишете нешто што вам не би било од помоћи. На пример, ако наведете разне врсте троуглова сврстане по

њиховим странама, као што су једнакостраничан, разнострани и једнакокраки, то не би било корисно и могло би да пређе ван листе. Ако дођете до неке идеје за решавање проблема, забележите је. Запамтите,ово није коначна фаза.“

ИМПЛЕМЕНТАЦИЈА

Током ове фазе, групе заправо раде математичка израчунавања. Они користе информације које се генеришу током претходне фазе, као и било какво решење стратегије.

„Сада је време да се заиста реши проблем. Користите информације наведене током последње две фазе. Запамтите, постоји више од једног корака. Ако још увек има проблема прилоком решавање проблема, вратите се у размену идеја (brainstorming) или евалуација/селекција фазу.“

На крају ове активности наставник дозвољава капитенима из сваке групе да поделе своја искуства кроз фазе. Такође, одељење разматра како КРП може бити од користи и у другим јединицама и темама.

5. МОЈ ЧАС

Основна школа: “Владимир Назор”
Разред: VII
Одељења: VII/1 и VII/3
Назив наставне јединице: Површина круга
Тип часа: обрада
Време извођења: средина месеца маја, у сваком одељењу по један час
Коришћен материјал:
- ✓ кругови направљени од папира
- ✓ маказе

Уводни део часа

Прво сам ученике поделила у нехомогене групе (групе у којима се налазе ученици различитог нивоа постигнућа из математике) од по пет ученика. Свакој групи су подељени кругови направљени од папира. Затим сам им саопштила који је њихов задатак:

"Данас треба да пронађемо формулу за површину круга. Сви сте добили по један модел круга. Ваш задатак је да од тих кругова направите фигуру која ће највише личити на паралелограм, а онда ћемо израчунати његову површину."

Задатак сам написала на табли.

На почетку сам намерно изоставила критеријум да је сечење кругова дозвољено само по пречницима.

Централни део часа

У одељењу VII/3 одмах је почело комешање и разговор између чланова групе. Сви су озбиљно схватили задатак. Међутим, ученици једне групе су били најопуштенији и врло сконцентрисани на задати проблем. Они су се договарали, пажљиво слушали једне друге, без страха излагали своје идеје, тако да су и ученици са слабијим постигнућима без устручавања равноправно учествовали у разговору. Често су ме звали да би ми рекли или показали своје идеје. Како је ова група почела да напредује, тако су остале групе у одељењу губиле самопоуздање. И поред мог бодрења групе се нису враћале на проблем, већ су покушавале да сазнају решење или су само немо посматрале шта се дешава у групи до њих.

Ученици VII/1 уопште нису били сконцентрисани и заинтересовани за рад. Ниједан мој покушај да их заинтересујем за проблем није успео. Чак су се неки ученици и бунили што морају сами да "ту нешто сецкају" и коментарисали: "Зар није лакше наставнице, да нам Ви "дате" ту формулу...." .

Сада следи опис рада групе у одељењу VII/3, која је успешно решила задати проблем.

Ученици су после мало разговора и договора кренули да цртају парелограме у њиховим круговима и да их секу.

Нисам их прекидала, у раду. Сачекала сам да заврше. (*Слика 4)*

Затим сам их питала да ли њихови паралелограми имају исту површину као дати кругови.

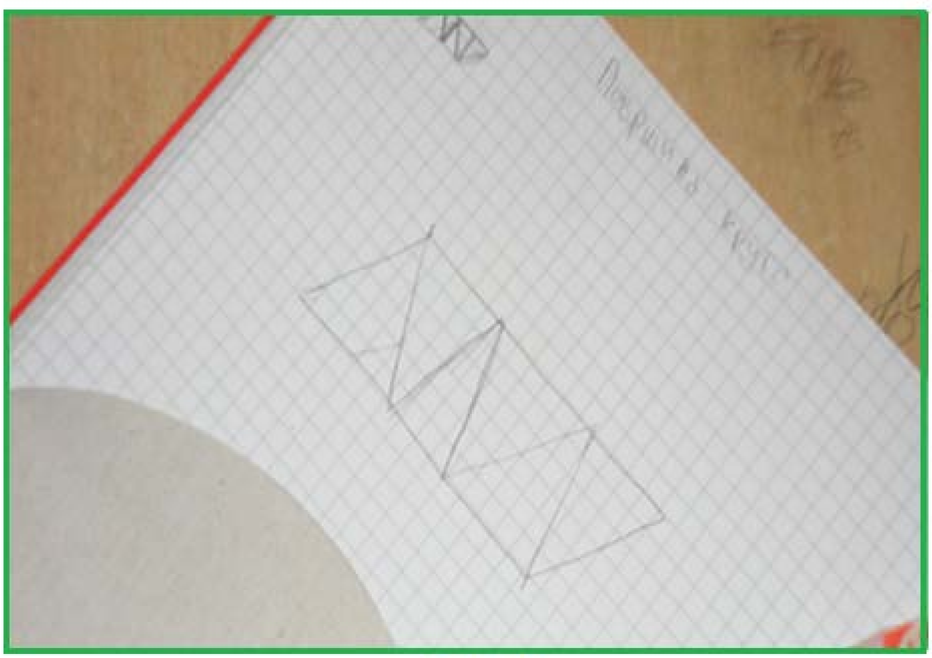
Сви су се сложили да је површина њихових паралелограма мања од површине круга, јер им су им остали не искоришћени делови круга.

Слика 4

После краћег времена ученица Александра је узвикнула:

"*Знам наставнице, морамо да направимо делове као за слагалицу и од њих да направимо паралелограм. Слично смо радили кад смо учили површину паралелограма*!"

Похвалила сам је, па смо се подсетили како смо у шестом разреду дошли до формуле за површину паралелограма. Затим сад додала и критеријум, да круг могу сећи само по пречницима круга и написала га на табли.



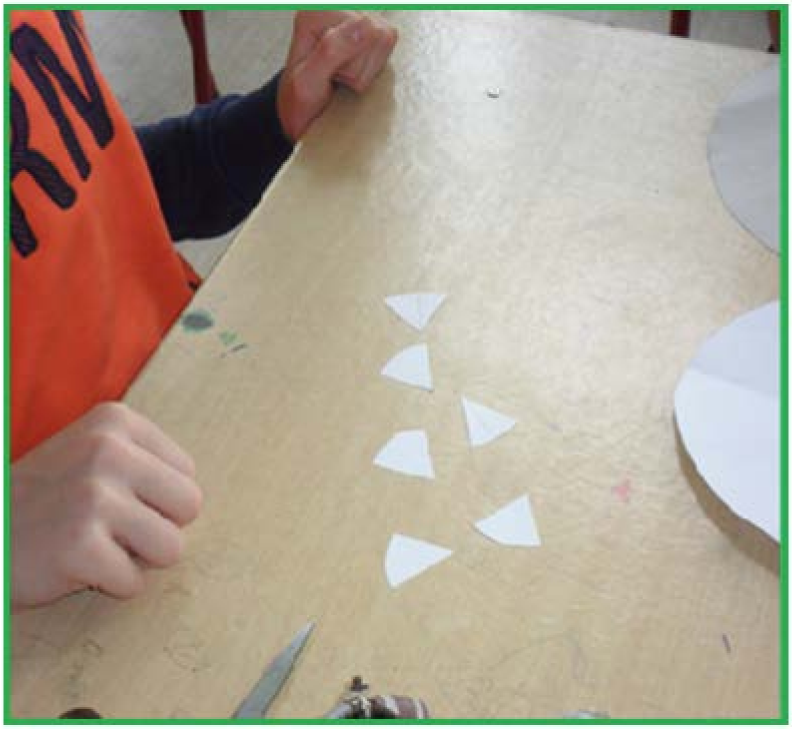
Слика 5

Опет је настало комешање, разговор и договор како ће решити проблем.

Приметила сам да ученица која је малопре дошла до идеје, није учествовала у разговору са групом него је цртала нешто у својој свесци.

Позвала ме је:

"Знам, погледајте треба да направимо да делови буду као троуглови." (*Слика 5)*



Слика 6

Чини ми се да се свима допала идеја, кренули су да цртају пречнике и да деле кругове на шест делова како су видели на њеном цртежу. (*Слика 6*)

Сад су постали много опуштенији и брзо су направили фирурице. (*Слика 7*)

Слика 7

Ученик Никола и Марија су били збуњени, и прокоментарисали како њима ове фигуре не личе на паралелограме, јер је су им странице "обле".

И остали ученици су се сложили са њима, да су по две стране "обле", али нису давали велики значај, тј није им сметало.

Ученица Злата је рекла:

"*Никола погледај на табли пише фигуре које највише личе на паралелограм.*"

Констатовала сам да су Никола и Марија у праву да ово нису паралелограми. Никола никако није могао да се помири са овом чињеницом и стално се питао како да направе да више личи на паралелограм.

Предложила сам им да пробају да реше тај проблем, да направе да више личи на паралелограм.

Опет је настало комешање, предлози, разговор... (*Слика 8*)

Слика 8

Ђорђе : "*Никола да ли се сећаш када смо учили обим круга, ако упишемо у круг правилни многоугао који има пуно страница он ће личити на тај круг*"

Никола: "*Па, да...... Али како ми то може помоћи?? ......*" , само је потврдио да се сећа тога, али није имао конкретну идеју како да реши проблем.

Марија: "*Наставнице, а да можда пробамо да нацртамо више пречника и онда исечемо круг?*"

Насмејала сам се : "*Што да не!! Пробајте да видите шта ћете добити.*"

Слика 9

Николи се допала идеја и одмах су прионули на рад. Убрзо смо добили фигуру која је више личила на паралелограм. (*Слика9)*

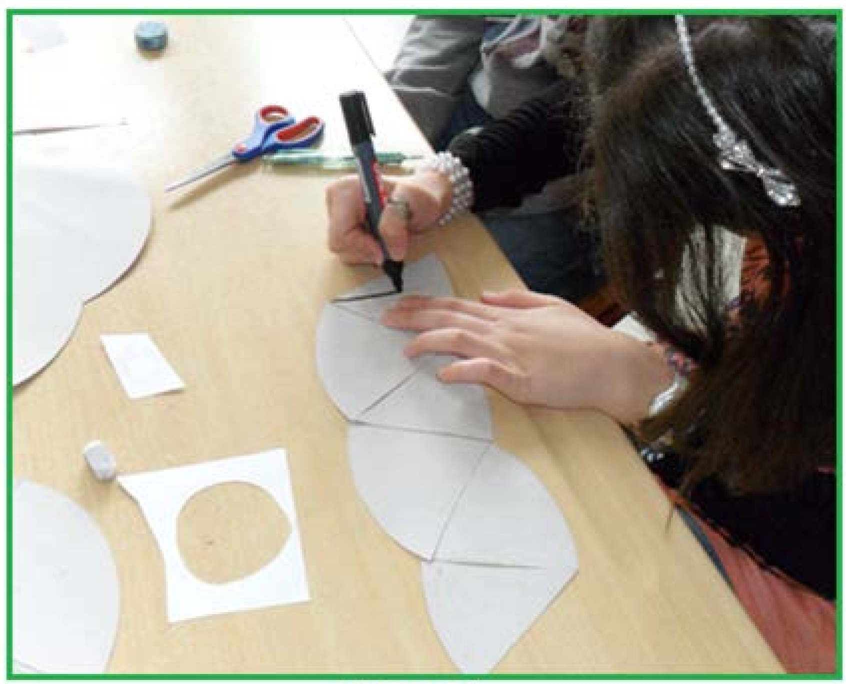
''*Добро, успели сте да од круга направите фигуру која највише личи на паралелограм. Малопре смо поновили формулу за израчунавање површине паралелограма. Хајде, да напишемо формулу за површину паралелограма који смо добили.*''

Ученици су узели лењире и почели да мере дужину странице и висину паралелограма. Одмах су приметили да не могу прецизно да измере страну фигуре која личи на паралелограм.

Скренула сам им пажњу да тако добијен резултат даје нам површину само паралелограма који мере лењиром, а нама треба нека општа формула уз помоћ које ћемо моћи да израчунамо површину било ког паралелограма.

Злата је почела да црта нешто на свом паралелограму:

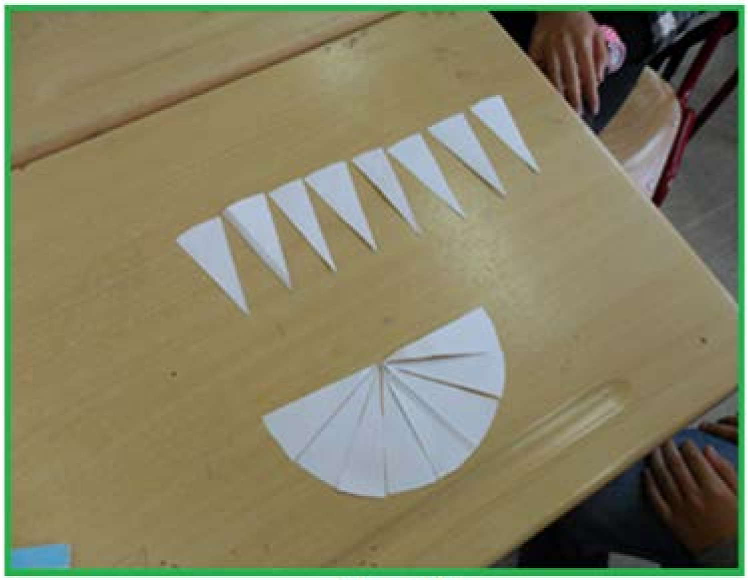
''*Погледајте висина паралелограма је у ствари полупречник круга!*'' (*Слика 10*)



Слика 10

Ђорђе се насмејао: "*Онда мора да и ова страница има неке везе са кругом?*"

Почео да помера делове: *"Е, погледајте па ово је..."* (*Слика 11)*



Слика 11

Сви су завршили у глас: *"Половина круга!!!"*

Затим је Ђорђе завршио своју мисао:

"*А дужина странице је уствари половина обима круга.*"

У својим свескама почели су да записују своја открића и да сређују формулу за површину паралелограма.

Ђорђе завршавајућу задатак, рече:

"*Ово је формула и за површину круга, јер ове фируре имају исту површину*".

6. ПОВЕЗАНОСТ СОЦИО-ЕКОНОМСКОГ СТАТУСА СА УЧЕЊЕМ МАТЕМАТИКЕ КРОЗ РЕШАВАЊЕ ПРОБЛЕМА

6.1. Евалуација мог часа

После одржаног часа у оба одељења, направила сам поређење између понашања ученика једног и другог одељења. Ученици VII/3 су показали већи ниво самопоуздања, били су упорнији, радозналији. Иначе су ово њихове стандардне особине на редовним часовима, они још воле и да раде у групама или пару, често решавају проблеме преко тачно замишљених математичких идеја и воле да се такмиче. С друге стране ученици VII/1 су имали мање самопоуздања, мање су били мотивисани да се укључе у решавање проблема. Ученици VII/1 више воле традиционалан приступ часу, нису такмичарски расположени, прибегавају више спољашњим упуствима.

Познато ми је да на нивоу целог одељења, у VII/3 је већи проценат ученика који су из економски стабилнијих и образованијих породица. Они увек имају уџбенике, збирке задатака и прибор, док у VII/1 није редак случај да неки ученик нема збирку или прибор за рад, због лоше економске ситуације.

Међутим највише ме је изненадило, што су два ученика из VII/1, који су добри математичари и постижу исте резултате као и добри математичари из VII/3, на овом часу деловали беспомоћно и збуњено. Кад сам се мало распитала, сазнала сам да је социо-економски статус (у даљем тексту СЕС)[1] ових ученика из VII/1, нижи од ученика из VII/3.

Постоје многе студије и истраживања која се баве питањем утицаја СЕС ученика на његова постигнућа и његовим приступима учења математике.

[1] Социо-економски статус ученика се односи на индекс који се израчунава на основу социалног, културолошког и образовног статуса породице из које потиче ученик (образовање родитеља, запосленост родитеља, занимање родитеља и поседовање одређених добара у домаћинству).

6.2. Истраживање о разликама међу искуствима ученика са нижим и вишим СЕС коефицијентом током часова математике

Сара Теул Лубиенски (Sarah Theule Lubienski) је у свом чланку *"Решавање проблема као начин приближавања математике свим узрастима: Примена истраживања током часа"* ("*Problem Solving as a Means Toward Mathematics for All: An Exploratory Look Through a Class*"), објављеном у часопису "Истраживање у образовању математике" (Journal for Research in Mathematics Education, јул 2000), објавила истраживање у којем је посматрала разна искуства ученика седмог разреда која су у вези са наставним планом и програмом, фокусирајући се на класне разлике у искуствима ученика које настају у реакцијама ученика током учења математике кроз решавања отворених и констекстуалних проблема.

МЕТОД

Школа и учионица

Ова студија је спроведена у социо-економској разноликој школи која се налази у граду на западу земље, средњем по величини, који је имао успешну развијену локалну аутомобилску индустрију. Међутим последњих деценија дошло је до пада привреде, због промена у индустрији.

Школа је имала друштвено-економску мешавину ученика, коју је чинило неколико ученика из више средње класе, (нпр. чији су родитељи стручњаци у својим областима са највишим звањима), неколико ученика из средње класе, (нпр. чији су родитељи факултетски образовани у областима као што су образовање или инжењеринг), неколико ученика из радничке класе, (нпр. чији родитељи раде у фабрикама), и неколико ученика из нижих класа, (нпр. чији су родитељи веома слабо образовани, без сталног запослења, и са примањима испод линије сиромаштва).

Ова школа је била почетно полазиште за Пројекат повезане математике (Connected Mathematics Project – CMP, у даљем тексту CMP), и ученици су у овом истраживању користили CMP пробне материјале током године која је претходила овом истраживању. Лубиенски истиче да је њена улога у школи као једногодишњи гостујући наставник математике у седмом разреду, обухватала коришћење пробног материјала са једним одељењем, као и успотављање везе са CMP и наставним моделом за друге наставнике у школи.

У одељењу је било око 30 ученика (јер неки су долазили и одлазили у току школске године). Ученици су били равномерно распоређени у погледу пола и са изузетком два Афроамериканца и једном учеником пореклом из Мексика, (чија је породица живела у Сједињеним Државама већ неколико генерација), сви остали ученици су били белци.

Ови ученици су били заједно током већег дела дана, смењујући се на часовима код четири наставника, који су предавали математику, енглески језик, природне и друштвене науке.

Наставни програм и педадошки приступ

СМР је пројекат развоја наставног програма средње школе који је финансиран од стране Националне Научне Фондације да би се креирали проблемски оријентисани материјали који су у складу са стандардима Националног савета наставника математике (НСНМ). У овом истраживању, СМР пробни материјали обезбеђују математички фокус за сваки час наставе, при чему ученици раде на проблемима свакога дана у и ван учионице. Лубиенски наглашава да ово истраживање није тестирање неког наставног програма, већ представља једно истраживање начина на који тренутно популарне идеје имплементиране у различите наставне програме, могу на различите начине да утичу на ученике са нижим и вишим СЕС количником.

И аутори СМР-а и чланови НСНМ-а наглашавају да ученици треба да науче математички садржај и процесе кроз решавање отворених, контекстуализованих проблема.

Дакле, ученицима није циљ да једноставно науче начин да реше појединачне проблеме, већ да употпуне истраживање проблема узимајући при том у обзир издвојене битне математичке идеје и процесе. Овакво издвајање се јавља и због тога што су проблеми тако пажљиво креирани да захтевају од ученика да размишљају о одређеним математичким идејама и повезаностима, и зато што наставник има активну улогу у истицању планираних идеја.

Проблеми су обично били постављени у контексту стварног света (нпр., анализирање података катастрофе, или пројектовање куће) и варирали су у зависности од времена потребног за њихово решавање од неколико минута до неколико дана. После многих проблема, била су постављана питања која су пратила задатак и која су помагала ученицима да се фокусирају на кључне обрасце и идеје. Свако истраживање завршавало се са проблемским задацима који су се задавали за домаћи задатак, а који су били математички слични проблемима који су се постављали у истраживању, али су генерално били постављени у различите контексте. У овој фази развоја истраживања, материјалима се додаје и „писање белешки“ које би требало да помогну ученицима да резимирају математичке идеје у одређеној тематској јединици.

Као што СМП и предлаже, лекције су конструисане помћу "покрени, истражи, резимирај" ("Launch, Explore, Summarize") модела. У једној типичниј лекцији, (која може трајати више или мање од једног часа), наставник истраживач, Лубиенски, је заједно са одељењем "покретала" проблем (подстицање истраживања), а онда су се ученици делили у групе да би „истражили“ и решили проблем. На крају наставник подстиче дикусију у којој су учествовали сви ученици у одељењу да би „резимирали“ резултате (разумевање битних математичких идеја). Током ових дискусија, Лубиенски је тражила од ученика да објасне како су решили проблем, подстицала их да упореде резултате са другим ученицима и постављала питања у којима су се истицале кључне математичке идеје.

Лубиенски свој педагошки приступ сматра разумно доследним и у складу са НСНМ стандардима, јер код ученика је подстицала истраживање, дикусију и разумевање битних математичких идеја. Резултати овог итрживања указују да и ученици деле њено виђење о кључним аспектима њеног педагошког приступа. На пример, када ученици негде "запну", она их усмерава у решавању, а избегава да им да "тачан одговор". И у анкети, где је било понуђено више одговора за наставникову реакцију за ученике који су "запели у решавању проблема", већина ученика је заокружила одговор "наставник нас подстиче да до решења дођемо сами", а нико није заокружио одговор "наставник нам само саопшти решење". Исто тако, ученици су потврдили да наставник "углавном" подстиче разматрање различитих метода за решавање проблема, да раде у групама и да могу да користе дигитроне на већем делу часова математике.

Прикупљање података

Лубиенски истиче да је ово истрживање почела са жељом да разуме на који начин ученици са вишим и нижим СЕС количником прихватају СМП пробни наставни програм и њен педагошки приступ. Наравно, није била сигурна до којег ће сазнања доћи, међутим сматрала је да ће контекст проблема бити доступнији ученицима из средње друштвене класе, јер је наставни план осмислила група људи који припадају истој. И надала се да ће доћи до сазњана да у изради својих не-традиционални домаћих задатака ученици из средње друштвених класа добијају више помоћи у отклањању препрека. Међутим, Лубиенски је наишла на врло мало доказа који би ишли у прилог овим претпоставкама, али сматра да су њен начин прикупљања података и њене методе анализе довољно отворени и за друге приступе.

Лубиенски је користила три сета интервјуа, различите врсте анкета, рад ученика, водила је дневник својих предавања и свакодневно снимала предавања да би документовала искуства ученика, обухватајући на тај начин и потешкоће и успехе ученика у решавању проблема, као и оно што они сматрају да им помаже или одмаже у раду.

Да би сазнала из какве породице ученици долазе, спровела је анкету међу родитељима о њиховом занимању, образовању, новчаним примањима, броју књига и компјутера које поседују, као и о дневној штампи коју читају. Ови индикатори се обично узимају у обзир приликом рачунања СЕС количника (нпр види Duberman, 1976; Kohr, Coldiron, Skiffington, Masters & Blust, 1988). Користила је ове податке и ученике распоределила у две, мало грубе категорије: ученике са вишим и нижим СЕС количником. Ученици са нижим СЕС количником су углавном били из радничке класе, а неки од њих чак и из ниже друштвене класе. Ученици са вишим СЕС количником су углавном били из онога што већина Американаца сматра средњом класом, при чему су неке породице биле и на граници више средње класе. На крају је добила дозволу да укључи 22 од 30 ученика, при чему је 18 ученика доставило тачне СЕС податке који су јој омогућили да их категоризује као ученике са нижим или вишим СЕС количником.

Лубиенски је свакодневно прикупљала домаће задатке, затим податке из анкете и на крају школске године разговарала са ученицима који су учествовали у истраживању. Дечаци и девојчице који су постизали добре или лоше резултате из обе СЕС категорије били су изабрани да буду "циљани ученици" који би помогли да раздвоје порекло СЕС од постигнућа, (што се мери почетним постигнућима ученика на часу, израдом домаћих задатака, залагањем и учествовањем у раду на часу). Ова група "циљаних ученика" је опсежно праћена и са њима је обављен разговор на почетку и крају школске године.

Питања у анкети су била фокусирана на искуствима и реакцијама ученика на СМП наставни програм и педагошки приступ наставника истраживача. У каснијим анкетама од ученика се тражило да одговоре да ли се и како променило њихово мишљење о часовима и наставном програму.

Анализирање података

При анализирању података, фокус је на сличностима и разликама међу искуствима ученика са нижим и вишим СЕС количником, а такође је узет у обзир и пол ученика. ("*Научници су истакли опасност изучавања зависности расе, друштвеног слоја и пола појединачно, [нпр., Campbel, 1989, Lubienski, 2000], тако да сам ја у овој студији више пажње посветила интеракцији међу половима.*" , Lubienski, стр.461). Обзиром да су ученици који су били анкетирани углавном били белци, фокус је био више на полну припадност и слој друштва. Посебна пажња је посвећена ученицима са добрим резултатима али из ниже СЕС групе, као и ученицима са лошим резултатима а из више СЕС групе, што је помогло да се разврстају разлике за које се чинило да су више повезане са постигнућем него са СЕС групом. Поред анализе података за све ученике који су учествовали, бележени су и случајеви "циљаних ученика" женског пола.

РЕЗУЛТАТИ

Општи ставови о традиционалном насупрот СМП натавном програму

Резултати које су добијени из анкета и интервјуа који се односе на склоности ученика ка једном облику наставног програма, указују на чињеницу да већи број ученика из више СЕС групе радије бира СМП пробне материјале него типичне математичке уџбенике које су користили у претходном разреду. Већи број ученика је имало помешано мишљење о наставном програму, али ученици који су чврсто били за СМП материјал су припадали вишој СЕС групи. Четири од шест ученика који су чврсто бранили традиционални програм су припадали нижој СЕС групи.

При коришћењу СМП материјала, од ученика се тражи да размишљају дубље и на различит начин него што је то случај при коришћењу традиционалног програма, тако да не изненађује чињеница што је велики број ученика негативно реаговао на нова залагања која се од њих очекују. Ипак, нису све њихове притужбе биле исте. Притужбе које су доминирале код ученика из ниже СЕС групе биле су да су постављени проблеми били исувише фрустрирајући, јер су били превише конфузни или тешки, (што је изјавило осам од девет ученика из ове групе). Неке од изјава су биле: „*Уџбеници су конфузни, јер су питања предуга и компликована*“, „*Не свиђа ми се овај уџбеник из математике јер не објашњава тачно!*“. Чак је и шест ученика из ниже СЕС групе нагласило да би били бољи у математици да се учи као што се раније учило. На пример, један од коментара „*Математика ми је раније стварно ишла од руке*“, „*Сада ми лошије иде, раније сам и могао нешто да урадим, а сад једноставно не разумем*“. Када се од њих тражило да објасне шта је то што је толико тешко или неразумљиво, ученици из ниже СЕС групе би пре свега говорили о потешкоћи да одреде шта је то што треба да ураде са проблемима, потешкоћа коју су приписивали сложеном вокабулару и општој структури реченице који се употребљавају, као недостатку одређених инструкција како да реше проблем. Због чињенице да је СЕС количник у корелацији са постигнућем ученика, битно је посветити пажњу ученицима из ниже СЕС групе који имају добре резултате, као и ученицима из више СЕС групе а са лошим резултатима. Две ученице које имају високе резултате из свих школских предмета су делиле мишљење својих вршњака из ниже СЕС групе о потешкоћама у наставном програму. Једна ученица је непрестано твдила да је за њу СМП приступ тежи због недостатка одређених инструкција за решавање проблема.

Неки од ученика из више СЕС групе су се такође жалили да су уџбеници нејасни, али њихове жалбе биле су изражене само на почетку године, (када се сматрало да је „кул“ жалити се због овога), и нису биле толико ватрене и личне; они су често нудили неки специфичан предлог, или указивали на један проблем или реч који су били нејасни.

Иако ниједан ученик из ниже СЕС групе није рекао да је за њих СМП наставни програм лакши од традиционалног, неколико ученика из више СЕС групе се пожалило да је решавање проблема по СМП програму лакше. Један ученик је објасно да је СМП метод лакши „јер мени добро иде решавање проблема“.

Лубиенски претпоставља да део незадовољства ученика из ниже СЕС групе потиче од чињенице да се они осећају несигурно при коришћењу неких математичких идеја чије познавање је био предуслов за спровођење наставног програма.

Унутрашње/спољашње инструкције

Ученици из ниже СЕС групе су више подржавали приступ у којем би наставник давао јасније инструкције и упутства за решавање проблема, то се може закључити на основу њихових коментара да недостају јасне инструкције. Када је ученицима било понуђено да рангирају различите начине рада на решавању проблема, ученици из ниже СЕС групе, а нарочито девојчице, веома високо су рангирали приступ у којем им "наставник даје веома детаљне инструкције". Такође, девојчице из ове групе су често питале наставника "да ли је овако добро?". Само су ученици из ниже СЕС групе одговорили да они више воле да им "наставник одмах каже правило по којем се решава задатак". Они су се жалили да их збуњује када сами покушавају да истраже решавање проблема и сами долазе до правила. Када су ученици из ниже СЕС групе говорили о аспектима наставниковог начина предавања који су према њима били "добри", обично су се фокусирали на способност наставника да добро објашњавања, посебно што се тиче питања из СМП материјала.

Чинило се да ученицима из више СЕС групе инструкције наставника нису толико важне. *„Г-ђа Лубиенски је добар наставник јер она не даје одговоре већ помаже да сами до њих дођемо и веома је фина*.“

Суочени са неизвешношћу отворених проблема који им се постављају, ученици из ниже СЕС групе су били пасивнији и несигурнији како да наставе са решавањем. Посматрајући резултате анкета, Лубиенска долази до закључка да ће ученици из ниже СЕС групе бити незадовољни и одустати када посустану у решавању проблема, док ће ученици из више СЕС групе размишљати дубље о проблему и пронаћи начин да наставе са решавањем.

Ученици из више СЕС групе су боље од ученика из ниже СЕС групе приказали унутрашњу мотивацију да реше проблем и жељу да се изборе са разним математичким идејама. Ученици који су изјавили да се њима свиђа да сами својим размишљањем дођу до решења били су из више СЕС групе. Лубиенска је у својим белешкама имала неколико примера ученика из више СЕС групе који су показивали интелектуалну радозналост и спремност да се упусте у изазов решавања математичких проблема, али ниједан сличан пример код ученика из ниже СЕС групе.

Лубиенска посебно наглашава да овим не жели да каже да ученици из ниже СЕС групе нису такође марљиво радили на решавању проблема, већ да су њих више мотивисале активности које су укључивале забаву, игре и друге контексте који су из њихове сфере интересовања, (спорт, или нека играчка, хоби...); математика их није привлачила, нити су јој посвећивали пажњу. У својим запажањима је забележила неколико примера где се чини да су ученици из ниже СЕС групе, (а нарочито девојчице које постижу добре резултате), били више заокупљени решавањем алгоритма који им је потребан за завршавање задатка, него да се ухвате у коштац и пробају да схвате математичке идеје ради њиховог личног добра.

Све у свему, чини се да већи број ученика из више СЕС групе поседује оријентацију и вештине које им омогућавају да активно интерпретирају отворене проблеме, верују да су њихова тумачења исправна и следе своје инстинкте у проналажењу решења. За то време, чини се да су ученици из ниже СЕС групе више заокупљени тиме да им се дају јасне смернице и упутства које би им омогућиле да заврше задатак и мање су склони креативним подухватима у решавању проблема.

Више размишљања/учења

Неколико ученика из обе СЕС групе је изјавило да их СМП програм подстиче да више размишљају, док је већина ученика рекла да им је СМП помогао да увиде како је математика повезана са стварним животом.

Начин на који су ученици говорили о предностима СМП програма разликује се у једном битном запажању: ученици из више СЕС групе су јасно изнели да је њима лично СМП програм доста помогао, док су ученици из ниже СЕС групе углавном говорили о предностима СМП пројекта са више спољне тачке гледишта, наводећи оно што они сматрају да се од њих очекује да науче, или оно што су други ученици рекли да су научили.

Као и ученици из више СЕС групе, тако је и већина ученика из ниже СЕС групе могла да изрази већину онога што је СМП пројекат намеравао да постигне. На пример „*СМП материјал подразумева неке ствари из стварног живота, тако да се од вас уствари очекује да проширите своје знање. Они вам неће рећи ево вам упутства па решите задатак, већ се очекује да сами дођете до њих*“. Када се тражило да одговоре да ли СМП пројекат код њих има тај резултат који су његови аутори очекивали, сви ученици из више СЕС групе су одговорили потврдно. Међутим, ученици из ниже СЕС групе, а нарочито девојчице су више оклевали приликом овог питања, одговарајући са "не знам" и "тако нешто". Већина ученика из ниже СЕС групе углавном је говорило о тешкоћама које су настале услед ометања њиховог начина учења. Девојчица из ниже СЕС групе, коју већина наставника сматра за веома мотивисану ученицу високих потигнућа, изнела је свој став који су делила већина њених вршњака из ниже СЕС групе, (приказано кроз анкете и интервјуе спроведених током године) :

"Ја обично покушавам да запамтим правило и решим проблеме. Не постављам питања како или зашто то треба тако. Мислим да ме то некад више збуњује, а некад нисам заинтересована. Мени само треба да знам како да решим задатак или нешто слично... Као кад смо радили позитивне и негативне бројеве, њихово сабирање и остало, ви сте неко време тражили од нас да сами дођемо до правила, а онда када је дошла г-ђа Мател, (њихова претходна наставница математике која ме је мењала кад сам била одсутна), она нам је једноставно рекла која су правила за дељење и множење, па смо једноставно могли да урадимо задатке, а не да размишљамо и сами дођемо до правила. Јер мислим да када нисам знала правила, погрешно сам радила задатке, а сада кад их знам, већину њих урадим тачно."

Већина ученика из ниже СЕС групе (нарочито девојчице) су се изјаснили да више воле приступ у којем им наставник каже по ком "правилу" да дођу до тачног "решења" проблема. Чини се да ученици ниже СЕС групе не виде учење преко рада на нејасноћама проблема као битан циљ овог наставног програма; те нејасноће су за њих једноставно збуњујуће препреке да дође до правог правила којим би решили проблем. Ученици из ниже СЕС групе говоре у трећем лицу о корисним странама овог наставног програма. Они сматрају да аутори СМП методе и наставник истраживач имају "добар разлог" да од ученика траже да до правила дођу сами, али их је недостатак инструкција и правила збуњивало. Ако и дође до побољшања неког ученика он то побољшање преписује наставнику који разуме њихове проблеме и који објашњава ствари једноставним и разумљивим језиком.

Контекстуализација

Ако ученици из ниже СЕС групе теже ка контекстуализованом приступу идејама могло би се очекивати да ће онда они имати користи од решавања контекстуализованих проблема. Међутим, подаци прикупљени током овог истраживања указују да ова претпоставка треба бити преиспитана.

У подацима овог чланка је наведено да су се ученици из ниже СЕС групе заиста више водили контекстуализацијом у својим оријентацијама ка различитим математичким идејама. Лубиенски је интервјуисала ученике о њиховим интерпретацијама математичких тврдњи које су представљене у медијима, (на пример, рекламе у часописима, новински чланци). Ученици из ниже СЕС групе су показали више неповерења према подацима који су ту представљени, боље су расуђивали на "здраво-разумски" начин, тако што су упућивали на слике или приче о искуствима њихових пријатеља или чланова породице након коришћења неког производа. Ученици из више СЕС групе су више били склони да детаљно проуче дате математичке информације не би ли нашли "рупу".

Њихово расуђивање није нужно било и тачније од ученика из ниже СЕС групе, али је било у математичком смислу више фокусирано и мање лично.

Поред тога, врста језика и докази које користе ученици приликом учествовања у дискусијама на часу, (са 14 насумично изабраних дана), сугеришу барем умерено вишу контекстуализовану оријентацију међу ученицима из ниже СЕС групе. Либиенски је бележила да ли ученици користе генерализован или контекстуализован језик. На пример, код проблема у вези са разликама у ценама производа у продавницама, као контекстуализован језик регистровала је онај кад су говорили о производима, доларима и продавницама, а као генерализован језик онај када су говорили само о бројкама без приписаног контекста. Да би избегла преувеличавање разлика, бележила је као граничне оне доприносе ученика дискусији, који нису били генерализовани или контекстуализовани. Према добијеним подацима, око две трећине из сваке групе су били гранични доприноси дискутовању. Ипак, постојали су обрасци понављања у преосталим доприносима. Контекстуализовани језик су више користили ученици из ниже СЕС групе, (дечаци 16% а девојчице 23% од укупних доприноса), док је тај проценат код ученика из више СЕС групе нижи (дечаци 3%, девојчице 10%). Генерализован језик су више користили ученици из више СЕС групе (дечаци 38%, девојчице 24%), док је тај проценат код ученика из ниже СЕС групе нижи (дечаци 11%, девојчице 6%).

Ученица са добрим постигнућима, али из ниже СЕС групе имала је потешкоће да направи разлику између питања базираних на мишљењу и оних која могу бити математички анализирана. На пример, у одговору на питање о подацима у којима се наводи да су мушкарци убијени у саобраћајним несрећама чешће него жене, ученица је рекла: "Можда су ти људи били на погрешном месту у погрешно време." Некако се чини да здраво-разумско расуђивање заузима примат над њеним схватањем корисности планираних математичких решења задатих проблема. Ова ученица је типичан представник многих ученика из ниже СЕС групе, који прилазе идејама на контекстуализован начин, приступ који би понекад могао да омета разумевање релевантних математичких идеја.

Остали докази указују на чињеницу да се ученици из ниже СЕС групе више фокусирају на индивидуалне проблеме занемаривајући тако математичке идеје које повезују различите задатке. Једна ученица је изјавили да никад није могла да схвати шта је требало да научи све док не добију тест из одређене области, друга се пожалила да има потешкоће да увиди како су проблеми које смо радили на часу повезани са онима које добијају за домаћи задатак. Ова девојчица је такође имала проблем да увиди повезаност између лекција; према њеном схватању, кад заврше неку област, они се никада више не враћају на њу. Насупрот томе, неколико ученика из више СЕС групе (али ниједан ученик из ниже СЕС групе) су запазили да се изнова и изнова сусрећемо са истим математичким идејама али у различитим контекстима.

Разлике у полу

Разлике у погледу пола ученика могу се уочити у залагању приликом израде домаћих задатака. Уочљиво је да су по том питању девојчице вредније од дечака са израдом више од 90% домаћих задатака. Ниво залагања који су уложили у израду задатака је у корелацији са резултатима тестова и контролних задатака, а односи се на дечаке и девојчице из више СЕС групе и на дечаке из ниже СЕС групе. Међутим, подаци су веома различити за девојчице из ниже СЕС групе. Ове девојчице су уложиле значајан труд, али оне још увек не разумеју математику на начин који би им омогућио да добро ураде тестове. Другим речима, у њиховом случају труд се није исплатио онако како се исплатио девојчицама из више СЕС групе.

У представама ученика о њиховим математичким способностима се могу уочити обрасци који иду изван актуелних разлика у погледу њихових постигнућа или способности. У анкети коју је спровела на крају године, питала је ученике да именују три ученика у разреду који су најбољи из математике. Лубиенски је приметила да ниједна од девојчица из ниже СЕС групе није именовала себе међу троје најбољих, чак ни ученица, коју девет ученика види као најбољу. Док је сваки ученик из више СЕС групе којег је неко именовао, такође именовао и самог себе као најбољег. Чак су и два ученика, које нико није именовао, именовали сами себе. Узимајући у обзир њихове домаће задатке и оцене на тестовима, ученице са добрим постигнућима из ниже СЕС групе су имале исто толико разлога да се осећају сигурно у математичком смислу као и ученици из више СЕС групе, а ипак нису.

ЗАКЉУЧАК

Лубиенски напомиње да посматрањем једног одељења у овом истраживању, не може се закључити да су ученици из ниже СЕС групе неспособни да функционишу у "реформисаном" одељењу и исто тако се не може закључити да ће ти ученици научити мање из проблемски концентрисане наставе него што би то био случај са традиционалном наставом. У ствари, неки ученици су указали да у поређењу са наставом где се од ученика тражи да нешто науче на памет, настава где се наглашава критичко размишљање, дискусија и решавање проблема могу, заиста, да се примене у одељењима ученика из ниже СЕС групе (нпр., Silver, Smith & Nelson, 1995) и да таква настава може повећати способности ученика у рачунању и решавању проблема (Knapp, Shieds & Turnbull, 1995).

Лубиенски скреће и пажњу да је мало наставника који посвећују пажњу раскораку у математичком смислу између ученика ниже и више СЕС групе, а тај раскорак је од посебне важности јер има функцију очувања математичког знања.

Питања покренута у овој студији, нада се Лубиенски, могу да продубе размишљања истраживача о сложеним чиниоцима обухваћених програмом рада "математичко знање за све", јер методе које код неких ученика највише обећавају могу да проузрокују неочекиване тешкоће код ученика којима је математичко оснаживање највише потребно.

7. ЗАКЉУЧАК

"Драги колега наставниче! Избегавајте речи "Ви сте погрешили". Говорите уместо њих "Ви сте углавном у праву, али...". Верујте ми – то није лицемерје него човечност. И остављајте ђацима онолико слободе колико то дозвољавају услови.

Пре свега – то је, неспорно, најбитније – потребно је научити младе да "МИСЛЕ". То је, ако хоћете, највећи национални и цивилизацијски интерес!"

George Pólya

Математика као наука је изграђена на строгим правилима која морају бити научена и савладана, због тога веома је битно подстицати ученике да се, ван тих правила изражавају кроз језик математике. Иван Анић истакао је у књизи *"Формула живота: за све који воле математику и желе да је поклоне другима" (*Анић, Павловић-Бабић и Радак, 2011), да је потребна трансформација из традиционалне наставе у проблемску, где долази до промена и у курикулуму, али и у стилу подучавања.

Кроз проблемску наставу подстичемо:

- ✓ *истраживање проблема* (не само меморисање процедура),
- ✓ *анализирање модела (*не само меморисање формула),
- ✓ *формулисање хипотеза* (не само вежбање рутине).

На овај начин ми охрабрујемо ученике, који уз помоћ моћног оружја (математике) решавају проблеме, ослобађајући своје мисаоне процесе и ојачавају своје самопоуздање.

У једном одељењу ставови ученика према математици нису иста, такође не треба заборавити и на различите социо-економске статусе. Због тога учење математике треба бити забавно, смислено и релеватно. Наставник треба да се посвети дизајнирању наставних активности како би се изградило поверење и развило поштовање према математици.

Групни рад је веома добар, поготово када ученици истражују. У групама састављеним од ученика са различитим постигнућима, до изражаја долазе разноликости које ће допринети бољем раду тима, развијању њиховог мишљења и расту самопоуздања. Нарочито је битно да комуникација у групама тече глатко, да се саслуша сваки члан, и поштује свачија идеја или став. Такав тим би давао резултате.

А улога нас наставника је да подстичемо комуникацију и кооперативно учење и да усмеравамо креативне енергије ученика у правцу решавања проблема.

8. ЛИТЕРАТУРА

PISA 2012 FIELD TRIAL PROBLEM SOLVING FRAMEWORK
DRAFT SUBJECT TO POSSIBLE REVISION AFTER THE FIELD TRIAL
Doc: ProbSolvFrmwrk_FT2012

Adey, P., Csapo, B., Demetriou, A., Hautamäki, J. & Shayer, M. (2007). Can we be intelligent about intelligence? Why education needs the concept of plastic general ability. *Educational Research Review 2*, 75–97.

Anderson, L. W., Krathwohl, D. R., Airasian, P. W., Cruikshank, K. A., Mayer, R. E., Pintrich, P. R., Raths, J. & Wittrock, M. C. (2001). *A Taxonomy for Learning, Teaching, nd Assessing: A Revision of Bloom's Taxonomy of Educational Objectives*. New York: Longman.

Baron, J. (2000). *Thinking and deciding* (3rd ed). New York: Cambridge University Press.

Baxter, G. P. & Glaser, R. (1997). An approach to analysing the cognitive complexity of science performance assessments (Technical Report 452), National Center for Research on Evaluation, Standards and Student Testing (CRESST), Los Angeles, CA.

Blech, C. & Funke, J. (2005). Dynamis review: An overview about applications of the Dynamis approach in cognitive psychology. Bonn: Deutsches Institut fűr Erwachsenenbildung (available at http://www.die-bonn.de/esprid/dokumente/doc-2005/blech05_01.pdf)

Blech, C. & Funke, J. (2010). You cannot have your cake and eat it, too: How induced goal conflicts affect complex problem solving. *Open Psycholog Journal 3*, 42–53.

Bloom, B.S., & Broder, B.J. (1950). *Problem-solving processes of college students: An exploratory investigation.* Chicago: University of Chicago Press.

Berry, D. C., & Broadbent, D. E. (1995). Implicit learning in the control of complex systems: In P.A. Frensch & J. Funke (Eds.), *Complex Problem Solving: The European Perspective* (pp. 3–25). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associate s.

Broadbent, D. E. (1977). Levels, hierarchies, and the locus of control. *Quarterly Journal of Experimental Psychology 29*, 181–200

Bransford, J. D., Brown, A. OL. & Cockling, R. R. (Eds.) (1999). *How People Learn: Brain, Mind, Experience, and School*. National Academy Press: Washington, DC.

Buchner, A. & Funke, J. (1993). Finite-state automata: Dynamic task environments in problem-solving research. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology 46A* (1), 83–118.

Carroll, J. B. (1993). *Human cognitive ability.* New York: Cambridge University Press.

Chase, W. G., & Simon, H. A. (1973). Perception in chess. *Cognitive Psycholog 4, 55-81*

Cheng, P. W., & Holyoak, K. (1985). Pragmatic reasoning schemas. *Cognitive Psychology, 17,* 391–416.

Chinn, C. A., & Malhotra, B. A. (2002). Children’s responses to anomalous scientific data: How is conceptual change impeded? *Journal of Educational Psychology, 94,* 327–343.

Cosmides, L. (1989). The logic of social exchange: Has natural selection shaped how humans reason? *Cognition, 31,* 187–276.

Covington, M. V., Crutchlton, R. S., Davies, L. B., & Oltron R. M. (1974). *The productive thinking program.* Columbus, OH: Merrill.

de Groot, A. D. (1965). *Thought and choice in chess.* The Hague, Netherlands: Mounton

Dörner, D., Kreuzig, H.W., Reither, F., & Stäudel, T. (1983). *Lohhausen. Vom Unigang mit Unbestimmteit und Komplexität* [*Lohhausen. On dealing with uncertainty and complexity*].Bern: Huber.

Dorner, D. (1980). On the difficulty people have in dealing with complexity. *Simulation & Games 11*, 87–106.

Dienes, Z., & Berry, D. (1997). Implicit learning: Below the subjective threshold. *Psychonomic Bulletin & Review 4*, 3–23.

Dunbar, K. (1993). Concept discovery in a scientific domain. *Cognitive Science, 17,* 397–434.

Duncker, K. (1945). On problem solving. *Psychological Monographs 58:*3 (Whole No. 270).

Ericsson, K. A., Feltovich, P. J., & Hoffman, R. R. (Eds.) (2006). *The Cambridge handbook of expertise and expert performance.* New York: Cambridge University Press.

Evans, J. S. B. T. (2005). Deductive reasoning. In K. J. Holyoak, & R. G. Morrison (Eds.), *The Cambridge handbook of thinking and reasoning* (pp. 169–184). New York: Cambridge University Press.

Frensch, P. A. & Funke, J. (Eds.). (1995). *Complex Problem Solving: The EuropeanPerspective.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Frensch, P.A. & Rünger, D. (2003) Implicit learning. *Current Directions in Psychological Science 12,* 13–18.

Funke, J. (2001). Dynamic systems as tools for analysing human judgement. *Thinking and Reasoning, 2001, 7* (1), 69–89.

Funke, J. (2010). Complex problem solving: A case for complex cognition? *Cognitive Processing 11*, 133–142.

Funke, J. & Frensch, P. A. (2007). Complex problem solving: The European perspective – 10 years after. In D. H. Jonassen (Ed.), *Learning to Solve Complex Scientific Problems* (pp. 25–47). New York: Lawrence Erlbaum.

Greiff, S. & Funke, J. (2008). *Indikatoren der Problemlöseleistung: Sinn und Unsinn verschiedener Berechnungsvorschriften. Bericht aus dem MicroDYN Projekt [Measuring Complex Problem Solving: The MicroDYN approach]*. Heidelberg: Psychologisches Institut.

Gentner, D., & Stevens, A. L. (Eds.). (1983). *Mental models.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Gick, M. I., & Holyoak, K. J. (1980). Analogical problem solving. *Cognitive Psychology* 12, 306-355

Gick, M. I., & Holyoak, K. J. (1983). Schema induction and analogical transfer. Cognitive *Psychology, 15,* 1–38.

Gigerenzer, G., Todd, P. M., & the ABC Research Group (Eds.). (1999). *Simple heuristics that make us smart.* Oxford, UK: Oxford University Press.

Goel, V. (2005). Cognitive neuroscience of deductive reasoning. In K. J. Holyoak, & R. G. Morrison (Eds.), *The Cambridge handbook of thinking and reasoning* (pp. 475–492) New York: Cambridge University Press

Griggs, R. A., & Cox, J. R. (1982). The elusive thematic-materials effect in Wason's selection task. *British Journal of Psychology, 73,* 407–420.

Guilford, J. P. (1967). *The nature of human intelligence*. New York: McGraw-Hill.

Hinsley, D., Hayes, J. R., & Simon, H. A. (1977). From words to equations. In P. Carpenter & M. Just (Eds.), *Cognitive processes in comprehension*. Hillsdale, NJ:Erlbaum.

Holyoak, K. J. (2005). Analogy. In K. J. Holyoak, & R. G. Morrison (Eds.), *The Cambridge handbook of thinking and reasoning* (pp. 117–142). New York: Cambridge University Press.

Humphrey, G. (1963). *Thinking: An introduction to experimental psychology*. New York: Wiley.

Johnson-Laird, P. N. (2005). Mental models and thought. In K. J. Holyoak, & R. G. Morrison (Eds.), *The Cambridge handbook of thinking and reasoning* (pp. 185–208)New York: Cambridge University Press.

Kahneman, D., & Tversky, A. (1979). Prospect theory: An analysis of decision under risk. *Econometrica, 47,* 263–291.

Kahneman, D., & Tversky, A. (1984). Choice, values, and frames. *American Psychologist,39*, 341–350.

Kahneman, D., & Tversky, A. (Eds.). (2000). *Choices, values, and frames*. New York:Cambridge University Press.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.). (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Klieme, E. (2004). Assessment of cross-curricular problem-solving competencies. In J.H. Moskowitz and M. Stephens (Eds.). *Comparing Learning Outcomes. International Assessments and Education Policy* (pp. 81–107). London: Routledge Falmer.

Kohler, W. (1925). *The mentality of apes.* New York: Liveright.

Klauer, K. & Phye, G. (2008). Inductive reasoning: a training approach. *Review of Educational Research, 78* (1), 85–123.

Klieme, E., Leutner, D. & Wirth, J. (Eds.). (2005). *Problemlösekompetenz von Schülerinnen und Schülern. Diagnostische Ansätze, theoretische Grundlagen und empirische Befunde der deutschen PISA 2000 Studie* [Problem-solving competency of students. Assessment approaches, theoretical basics, and empirical results of the German PISA 2000 study]. Wiesbaden, Germany: VS Verlag für Sozialwissenschaften

Lave, J. (1988). *Cognition in practice*. Cambridge, England: Cambridge University Press

Lesh, R. & Zawojewski, J. S. (2007). Problem solving and modeling. In F. Lester (Ed.), *The Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (2nd ed.) (pp. 763–804). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics; Charlotte, NC: Information Age Publishing (joint publication).

Leutner, D., Klieme, E., Meyer, K. & Wirth, J. (2004). Problemlösen [Problem solving]. In M. Prenzel, J. Baumert, W. Blum, R. Lehmann, D. Leutner, M. Neubrand, R. Pekrun, J. Rost & U. Schiefele (PISA-Konsortium Deutschland) (Eds.), *PISA 2003: Der Bildungsstand der Jugendlichen in Deutschland – Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs* (pp. 147–175). Münster, Germany: Waxmann.

Leutner, D. & Wirth, J. (2005). What we have learned from PISA so far: a German educational psychology point of view. *KEDI Journal of Educational Policy 2* (2), 39–56.

Mandler, J. M., & Mandler, G. (1964). *Thinking from associationism to Gestalt New* York: Wiley.

Markman, A. B., & Medin, D. L. (2002). Decision making. In D. Medin (Ed.), *Stevens' handbook of expeory psychology, Volume 2: Memry and cognitive processes* (2nd ed; pp. 413–466). New York: Wiley.

Mayer, R.E. (1990). Problem solving. In M. W. Eysenck (Ed.), *The Blackwell Dictionary of Cognitive Psychology* (pp. 284–288). Oxford: Basil Blackwell.

Mayer, R. E. (1992). *Thinking, Problem solving, Cognition* (2nd Ed.). New York, NY: Freeman.

Mayer, R. E. (1995). The search for insight: Grappling with Gestalt psychology's unanswered questions. In R. J. Sternberg & J. E. Davidson (Eds.), *The nature of insight* (pp. 3–32ess). Cambridge, MA: MIT Prss

Mayer, R. E. & Wittrock, M. C. (1996). Problem-solving transfer. In R. Calfee & R. Berliner (Eds.), *Handbook of Educational Psychology* (pp. 47–62). New York: Macmillan.

Mayer, R. E. (1998). Cognitive, metacognitive, and motivational aspects of problem solving. *Instructional Science 26*, 49–63.

Mayer, R.E. (2002). A taxonomy for computer-based assessment of problem solving. *Computers in Human Behavior 18*, 623–632.

Mayer, R. E. (2003). *Learning and Instruction*. Upper Saddle River, NJ: Merrill Prentice Hall.

Mayer, R. E. & Wittrock, M. C. (2006) Problem Solving. In P. A. Alexander and P. H .Winne (Eds.), *Handbook of Educational Psychology (2nd ed.)* (ch. 13). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Mayer, R. E. (2008). *Learning and instruction.* Upper Saddle River, NJ: Merrill Prentice Hall.

Mayer, R. E. (2009). Information processing. In T. L. Good (Ed.), *21st century education: A reference handbook* (pp. 168–174). Thousand Oaks, CA: SAGE.

Mayer, R. E. (in press). Problem solving. In D. Reisberg (Ed.), *Oxford handbook of cognitive psychology*. New York: Oxford University Press.

Mayer, R. E., & Wittrock, M. C. (2006). Problem solving. In P. A. Alexander & P. H. Winne (Eds.), *Handbook of educatinal psychology* (2nd ed; pp. 287–304). Mahwah, NJ: Erlbaum.

McCloskey, M. (1983). Intuitive physics. *Scientific America 248(*4), 122–130.

Newell, A., & Simon, H. A. (1972). *Human problem solving.* Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Nickerson, R. S. (1999). Enhancing creativity. In R. J. Sternberg (Ed.), *Handbook of creativity* (pp. 392–430). New York: Cambridge University Press.

Nunes, T., Schliemann A. D., & Crraher, D. W, (1993*). Street mathematics and school mathematics.* Cambridge, UK: Cambridge University Press.

OECD. (2003a). *The PISA 2003 Assessment Framework. Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*. Paris: OECD.

OECD. (2003b). The definition and selection of competencies (DeSeCo): Executive summary of the final report. Paris: OECD. http://www.oecd.org/dataoecd/47/61/35070367.pdf

OECD. (2004). *Problem Solving for Tomorrow's World. First Measures of Cross Curricular Competencies from PISA 2003*. Paris: OECD.

OECD. (March 2009). PIAAC problem solving in technology rich environments: Conceptual framework. Paris: OECD.

O'Neil, H. F. (2002). Perspectives on computer-based assessment of problem solving. *Computers in Human Behavior 18*, 605–607.

Osman M. (2010). Controlling uncertainty: A review of human behavior in complex dynamic environments. *Psychological Bulletin 136*, 65–86.

Riley, M., Greeno, J. G., & Heller, J. (1982). The development of children's problem solving ability in arithmetic. In H. Ginsberg (Ed.), *The development of mathemathinking* (pp. 153–199). New York: Academic Press.

Ritchhart, R., & Perkins, D. N. (2005). Learning to think: The challenge of teaching thinking. In K. J. Holyoak, & R. G. Morrison (Eds.), *The Cambridge handbook of thinking and reasoning* (pp. 775–802). New York: Cambridge University Press.

Robbins, P., & Aydede, M. (Eds.). (2009). *The Cambridge handbook of situated cognition.* New York: Cambridge University Press.

Rogers, T. T., & McClelland, J. L. (2004). *Semantic cognition: A paralled distribured processing approach.*. Cambridge, MA: MIT Press

Pólya, G. (1957). *How to solve it*. Garden City, NY: Doubleday. [Originally published in 1945 by Princeton University Press.]

Pólya, G. (1965). *Mathematical discovery (vol. 2)*. New York: Wiley

Pólya, G. (1945). *How to Solve It*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Reeff, J.-P., Zabal, A. & Blech. C. (2006). *The Assessment of Problem Solving Competencies. A Draft Version of a General Framework.* Bonn: Deutsches Institut für Erwachsenenbildung. (Retrieved May 8, 2008, from
http://www.die-bonn.de/esprid/dokumente/doc-2006/reeff06_01.pdf

Robertson, S. I. (2001). *Problem Solving*. East Sussex: Psychology Press.

Rychen D. S. & Salganik, L. H. (Eds.). (2003). *Key Competencies for a Successful Life and a Well-Functioning Society*. Götting Germany: Hogrefe and Huber.

Simon, H. A. (1982). *Models of bounded rationality*. Cambridge, MA: MIT Press.

Sternberg, R. J. (1990). *Metaphors of mind: Conceptions of the nature of intelligence*. New York: Cambridge Universitz Press

Sternberg, R. J. (1999). *Handbook of creativity*. New York: Cambridge University Press.

Sternberg, R. J., & Frensch, P. A. (Eds.). (1991). *Complex problem solving: Principles and mechanisms*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates

Sternberg, R. J., & Grigor003). *The psychology of abilities, competencies, and expertise*. New York: Cambridge University Press.

Thorndike, E. L. (1911). *Animal intelligence*. New York: Hafner.

Tversky, A., & Kahneman, D. (1973). Availability: A heuristic for judging frequency and probability. *Cognitive Psychology, 5*, 207–232.

Vollmeyer, R., Burns, B. D., & Holyoak, K. J. (1996). The impact of goal specificity and systematicity of strategies on the acquisition of problem structure. *Cognitive Science 20*, 75–100.

Vosniadou, S. & Ortony, A. (1989). *Similarity and Analogical Reasoning*. New York: Cambridge University Press.

Wason, P. C. (1966). Reasoning. In B. M. Foss (Ed.), *New horizons in psychology.* Harmondsworth, England: Penguin.

Wirth, J. & Klieme, E. (2004). Computer-based assessment of problem solving competence. *Assessment in Education: Principles, Policy and Practice 10*(3), 329–345.

Wundt, W. (1973). *An introduction to experimental psychology*. New York: Arno Press. [Originally published in German in 1911.]

Karen L. Pepkin *Creative Problem Solving in Math*

Osborn, Alex F. *Applied Imagination*. New York: Charles Scribner’s Sons, 1963.

Isaksen, Scott G., and Parnes, Sidney J. "*Curriculum Planning for Creative Thinking and Problem Solving.*" The Journal of Creative Behavior, 19 no.1 (1985), 1-29

Schumaker, Jean B., Bulgren, Janis A., Deschler, Donald D., and Lenz, B. Keith. *The Recall Enhancement Routine*, The Content Enhancement Series. Lawrence: The University of Kansas, 1998.

Treffinger, Donald J. "*Creative Problem solving: Overview and Educational Implications*." Educational Psychology Review, 7 (1995), 301-312.

VonOech, Roger. *A Whack on the Side of the Head*. New York: Wagner, 1990.

Sarah Theule Lubienski, *Problem Solving as a Means toward Mathematics for All: An Exploratory Look through a Class Lens,* Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 31, No. 4 (Jul., 2000), pp. 454-482, Published by: National Council of Teachers of Mathematics http://www.jstor.org/stable/749653

Knapp, M. S., Shields, P. M., & Turnbull, B. J. (1995). *Academic challenge in high-poverty classrooms*. Phi Delta Kappan, 76, 770-776.

Silver, E. A., Smith, M. S., & Nelson, B. S. (1995). The QUASAR Project: *Equity concerns meet mathematics education reform in the middle school*. In W. G. Secada, E. Fennema, & L. B. Adajian (Eds.), *New directions for equity in mathematics education* (pp. 9-56). New York: Cambridge University Press.

Анић, И., Павловић-Бабић, Д., Радак, В. (2011) *"Формула живота: за све који воле математику и желе да је поклоне другима"* Београд: Математископ, 21-30, 45-52.