MATEMATIČKI FAKULTET
UNIVERZITET U BEOGRADU

MASTER RAD

Primena grčkih slova u zaštiti od rizika

Mentor:
dr Slobodanka Janković, profesor

Kandidat:
dip. matematičar Marija Stevanović

Beograd, 2012.

Sadržaj

Uvod

Na berzi u svetu se pored akcija, obveznica, produkata (zlato, kukuruz,...) trguje i sa tzv. *opcijama* o kojima će biti reči u ovom radu. Ovi vrednosni papiri ne postoje kod nas, ali su veoma zastupljeni na svetskom tržištu. Osnovno pitanje koje se postavlja u vezi njih je obezbeđenje od rizika koje trgovina donosi. Postoji malo literature iz finansijske matematike na srpskom jeziku koja se bavi ovim problemom. Zbog toga se za pojam obezbeđenje od rizika upotrebljava engleska reč hedžing (*hedging*).

Kada ljudi odluče da se osiguraju od rizika, oni time sebe osiguravaju od nepovoljnih događaja. Ovo ne sprečava da se nepovoljan događaj desi, ali ukoliko se on desi i vi ste pravilno osigurani, njegov uticaj će biti smanjen. Na primer, ukoliko kupite osiguranje za kuću, vi ste sebe osigurali od požara, provale ili drugih nesrećnih slučajeva. Portfolio menadžeri, samostalni investitori, kao i korporacije, koriste tehnike za zaštitu od rizika da bi smanjili izlaganje različitim vidovima rizika. Osiguravanje od investicionog rizika znači strategijsko korišćenje finansijskih instrumenata na tržištu da bi se umanjio rizik od bilo kojih nepovoljnih promena cena. Drugim rečima, investitori osiguravaju jednu investiciju tako što ulažu u drugu investiciju. Preciznije, da bi ste se osigurali vi morate investirati u dve hartije od vrednosti sa negativnom korelacijom.

Osiguranje od rizika je strategijski kreiran u cilju da minimizira izlaganje investicije nepoželjnom poslovnom riziku, ali takođe i da dozvoli tom poslovnom poduhvatu da profitira od te investicije. U većini slučajeva tehnike osiguravanja uključuju korišćenje komplikovanih finansijskih instrumenata, poznatijih kao finansijski derivati. Finansijski derivati su vrednosni papiri čija se cena izvodi iz nekih drugih vrednosnih papira, tzv. podloge. Dva najčešća derivata su opcije i fjučersi. Fjučersi su ugovori između dve strane koji se odnose na kupovinu ili prodaju neke aktive u određeno vreme po određenoj ceni. Glavni razlog zašto kompanije koriste fjučerse jeste da bi ograničili njihovo izlaganje riziku usled bilo kakvih fluktuacija cena. Opcije su ugovori koji daju pravo kupcu, ali ga i ne obavezuju, da kupi ili proda naznačenu aktivu po određenoj ceni tačno određenog datuma, ili pre njega. Imajmo na umu da, zbog toga što postoji mnogo različitih vrsta opcija i fjučersa, investitor ima mogućnost da osigura mnogo toga kao na primer: akcije, cene raznih roba, kamatne stope, valute...

Kupovna opcija (call opcija) je ugovor koji vam omogućava da kupite akcije po određenoj ceni tačno određenog datuma ili pre njega. Kada kupite kupovnu opciju, cena koju plaćate za nju, tzv. opciona premija, obezbeđuje vam pravo da kupite odabrane akcije po određenoj ceni, poznatijoj pod imenom ugovorena cena. Ukoliko odlučite da ne kupite akcije, jer vas na to ništa ne obavezuje, vaš jedini trošak je opciona premija.

Prodajna opcija (put opcija) je ugovor koji vam omogućava da prodate akcije po određenoj ceni tačno određenog datuma ili pre njega. Sa prodajnom opcijom možete „osigurati" akcije tako što ćete fiksirati prodajnu cenu. Ukoliko se nešto dogodi što će uzrokovati pad cena vaših akcija, i stoga „oštetiti" vašu imovinu, u tom slučaju možete aktivirati vašu opciju i prodati akcije po prethodno dogovorenim cenama. Ukoliko cene vaših akcija skoče, i nema „štete", onda nema potrebe da koristite opciju, i još jednom vaš jedini trošak je opciona premija.

Valutna opcija je ugovor koji daje pravo vlasniku, ali ga ne obavezuje, da kupi (kupovna opcija) ili da proda (prodajna opcija) određenu sumu valuta, po deviznom kursu koji je ugovoren na dan kupovine određene opcije. Ugovoreni kurs je potpisan obavezujući sporazum u kome je određeno da izvesna suma neke valute treba biti prodata, po deviznom kursu koji je ugovoren na dan zaključivanja ugovora.

Ugovori slični opcijama postojali su još u doba Feničana i Rimljana. Tales se obogatio kada je jedne godine, predvidevši dobar rod maslina, napravio ugovor koji mu je omogućio da po niskoj ceni iznajmi veliki broj presa za masline i, pošto se obistinila njegova pretpostavka o izuzetnom rodu, iznajmljivao prese po daleko većoj ceni. Početkom XVII veka u Holadiji se javlja prodaja „opcija" na lale. Opcije su se u Americi pojavile početkom XIX veka, otprilike kad i akcije, ali svaki takav ugovor bio je pojedinačan, i do njega se dolazilo nakon pregovora dve strane, što je bilo nepraktično. Krajem šezdesetih godina XX veka uvedena su stroga pravila i standardi u pravljenju ovakvih ugovora tako da više nije bilo potrebe da dve strane pregovaraju pri svakom sklapanju ugovora, a formirana je i regulatorna komisija koja se brinula o sprovodjenju dogovorenih pravila. Trgovina opcijama na sadašnji način počela je 1973. godine.

U ovom radu bavićemo se nekim od alternativnih pristupa problemu osiguranja od rizika. Ovde će biti reči o *grčkim slovima* i njihovoj primeni u zaštiti od rizika. Svako grčko slovo meri neku drugu dimenziju rizika položaja opcija. Cilj trgovca je da upravlja grčkim slovima tako da svi rizici budu prihvatljivi. Analiza predstavljena u ovom radu odnosi se na trgovanja opcijama na berzi i to klasičnih evropskih opcija koji se odnose na akcije.

Rad je organizovan u tri poglavlja. U prvom poglavlju je definisan pojam opcije, navedene su vrste opcija kao i njihove osnovne karakteristike. Tu je dokazana bitna osobina koja važi za evropske call i put opcije – put-call paritet. Drugo poglavlje objašnjava kako se određuje cena opcije pomoću Black-Scholes formule. U trećem poglavlju su definisana grčka slova, opisane njihove osobine, i date su formule za njihovo izračunavanje. Predstavljene su mogućnosti kako zaštititi portfolio i učiniti ga delta-neutralnim i gama-neutralnim.

Cilj rada je da predstavi neke od mogućnosti korišćenja grčkih slova u zaštiti od rizika za portfolio koji je sastavljen od evropskih opcija.

1. Opcije

Opcije su vrednosni papiri koji spadaju u takozvane *finansijske derivate.* Finansijski derivati se karakterišu time da njihova vrednost zavisi, odnosno izvedena je, iz vrednosti nekih drugih vrednosnih papira, koje ćemo zvati *podloga* (eng. *underlying asset*). Najpoznatija vrsta finansijskih derivata su opcije, a najčešća podloga su akcije.

Definicija 1.1. ***Opcija*** je finansijski ugovor kojim se stiče pravo, ali ne i obaveza, da se kupi (kupovna opcija, eng. call option) ili proda (prodajna opcija, eng. put option) akcija, ili neki drugi vrednosni papir, pod dogovorenim uslovima.

Uslovi koji su prisutni u tom ugovoru su sledeći:

- *ugovorena cena* ili *cena po isteku* ili *na dospeću* (eng. *strike price* ili *exercise price*) vrednosnog papira na koji se odnose i
- *ugovoreno vreme do isteka opcije* (eng. *time to maturity, exercise time, strike time*).

Ugovorenu cenu, po kojoj se može kupiti odnosno prodati vrednosni papir, obeležavaćemo sa K, a vreme do isteka opcije sa T. Početnu cenu vrednosnog papira (na koji se odnosi opcija) u trenutku sklapanja ugovora označavaćemo sa $S(0)$, a cenu u trenutku t sa $S(t)$, $0 < t \leq T$. Osnovno pitanje u vezi sa opcijama je kako odrediti njihovu cenu.

U zavisnosti od toga da li se ugovor odnosi na kupovinu ili prodaju vrednosnog papira, imamo dve vrste opcija:

• *call opcija* - daje pravo ali ne i obavezu kupovine vrednosnog papira po unapred dogovorenoj ceni K;

• *put opcija* - daje pravo ali ne i obavezu prodaje vrednosnog papira po unapred dogovorenoj ceni K.

U pogledu vremena izvršenja opcije osnovne su dve vrste opcija:

• *evropske* - mogu da se aktiviraju samo u ugovoreno vreme T;

• *američke* - ove opcije, bilo call, bilo put, dopuštaju aktiviranje u bilo kom trenutku vremena koji je manji ili jednak ugovorenom vremenu T.

Nazivi američka i evropska opcija odnose se samo na vreme izvršavanja opcije, bez obzira na državu gde je opcija izdata.

Cenu evropske call opcije u trenutku $t \leq T$ obeležavaćemo sa $C(t)$, a cenu evropske put opcije u trenutku $t \leq T$ sa $P(t)$.

Vrednosni papir na koji se odnosi opcija najčešće je akcija, ali to može biti i bilo šta što se može prodati na tržištu, na primer forward ugovori, berzanski indeksi, strana valuta, pa čak i nekretnine. Opcije koje nisu klasične put i call nazivaju se *egzotične opcije*. Svaka opcija koja nije egzotična zove se *vanila opcija* (eng. *vanilla option*). Kao i kod svake druge trgovine i kod trgovine vrednosnim papirima postoje dve strane: prodavac i kupac. Za osobu koja prodaje (eng. *writer*) kaže se da je u *kratkoj poziciji* (eng. *short position*), dok je osoba koja kupuje u *dugoj poziciji* (eng. *long position*). Rizici pri sklapanju ugovora su različiti u zavisnosti od pozicije. Jedini rizik kupca opcije je cena koju je platio za tu opciju, dok, sa druge strane, osoba koja je prodala opciju može da ima veliki gubitak, jer mora da proda (ako je u pitanju call) ili da kupi (ako je u pitanju put) akciju po dogovorenim uslovima u slučaju da kupac opcije reši da aktivira opciju.

Za opcije koje su isplative, odnosno koje donose dobitak ako se aktiviraju, kažemo da su *u novcu* (eng. *in the money*), neisplative opcije su *van novca* (eng. *out of the money*). Ako je opcija na granici za nju kažemo da je *na novcu* (eng. *at the money*).

1.1. Vrednosti evropskih opcija u trenutku isteka

Pretpostavimo da imamo call opciju sa vremenom isteka T i ugovorenom cenom K. Označimo sa $S(T)$ cenu akcije na koju se opcija odnosi u trenutku isteka T. Koliko vredi call opcija u tom trenutku?

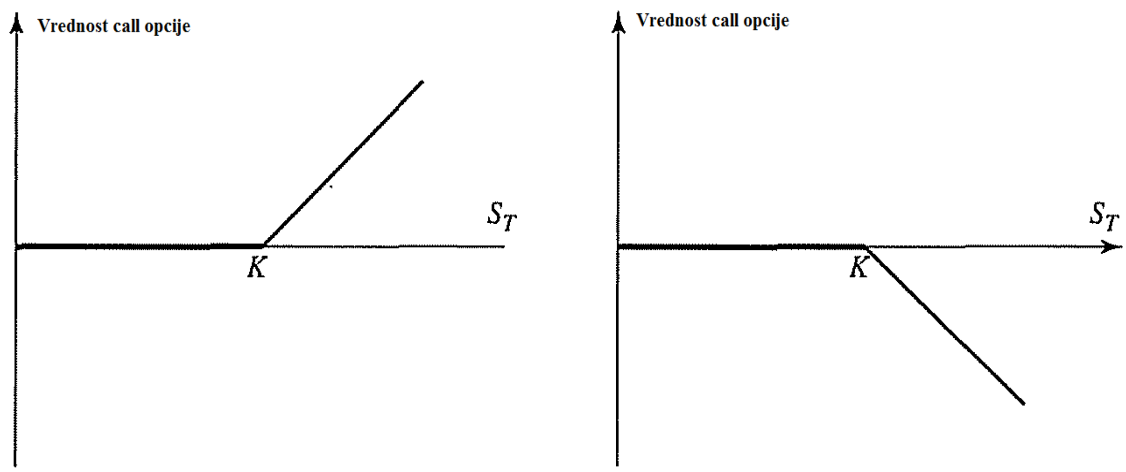
- Ako je $S(T) < K$, vrednost opcije je nula jer nećemo kupovati akciju za cenu K, kada je na tržištu možemo kupiti jeftinije za cenu $S(T)$.

- Da bi call opcija bila aktivirana neophodno je da važi nejednakost $S(T) > K$. Ako važi $S(T) > K$, tada opcija ima vrednost jer nam daje mogućnost da akciju, čija je cena $S(T)$ u trenutku T, kupimo po nižoj ugovorenoj ceni K. Aktiviranjem opcije kupujemo akciju po ceni K, koju možemo odmah da prodamo[1] po ceni $S(T)$ i zaradimo profit jednak $S(T) - K$.

Dakle, vrednost call opcije u trenutku isteka T jednaka je

$$C(T) = \max\{S(T) - K, 0\}.$$

Jasno je da smo u novcu ako je $S(T) > K$, van novca ako je $S(T) < K$, a na novcu za $S(T) = K$.



Slika 1.1. Long i short pozicija za evropsku call opciju

[1] Osim pretpostavke o idealnoj banci koja ne naplaćuje transakcije, kod koje je ista kamatna stopa i za one koji ulažu i za one koji se zadužuju i koja uvek daje pozajmicu po važećoj kamatnoj stopi, u svim razmatranjima pretpostavlja se da uvek možemo da kupimo ili da prodamo svaki vrednosni papir koji želimo po važećoj ceni.

Kao funkcija od cene $S(T)$, vrednost call opcije na isteku izgleda kao na slici 1.1. Vidimo da vrednost call opcije na isteku raste sa porastom cene akcije na isteku.

Stvar je obrnuta kada je u pitanju put opcija - ona daje pravo ali ne i obavezu prodaje vrednosnog papira po ugovorenoj ceni K u ugovoreno vreme T. Ako imamo put opciju, onda:

- ako je u trenutku isteka $S(T) > K$, put opcija je bezvredna, jer nema smisla prodavati akciju po ceni K ako to možemo uraditi na tržištu po većoj ceni $S(T)$.

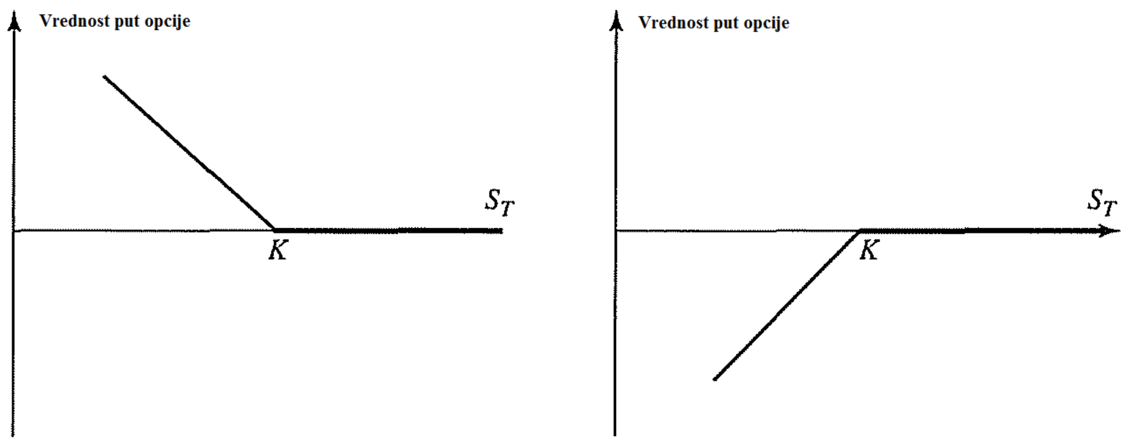
- ako je u trenutku isteka $S(T) < K$, onda put opcija ima vrednost: možemo kupiti na berzi akciju po ceni $S(T)$ i prodati je po ceni K i tako ostvariti profit $K - S(T)$, što predstavlja vrednost put opcije u tom trenutku.

Prema tome, formula za vrednost evropske put opcije u trenutku isteka je:

$$P(T) = \max\{K - S(T), 0\}.$$

U ovom slučaju, u novcu smo za $S(T) < K$, van novca za $S(T) > K$ i na novcu za $S(T) = K$.

Kao funkcija od cene $S(T)$ na isteku, vrednost put opcije na isteku izgleda kao na slici 1.2. Vidimo da vrednost put opcije na isteku opada sa porastom cene akcije na isteku.



Slika 1.2. Long i short pozicija za evropsku put opciju

Iz slika 1.1. i 1.2. vidimo da je vrednost put opcije na isteku ograničena, dok je vrednost call opcije na isteku neograničena. Naravno, za onoga ko je prodao call opciju, potencijalni gubitak je neograničen, a za onoga ko proda put opciju potencijalni gubitak je ograničen.

Nadalje ćemo pretpostavljati da

1. ne postoje troškovi novčanih transakcija;

2. sve podleže istoj kamatnoj stopi;

3. pozajmice i ulozi u banku imaju istu kamatnu stopu i uvek možemo da kupimo ili prodamo akciju ili opciju koju želimo po tržišnoj ceni (nema nestašice);

4. ne postoji *arbitraža* (eng. *arbitrage*), odnosno pravljenje sigurnog profita bez rizika. U praksi ako se takva mogućnost i pojavi, odmah se uoči i iskoristi i cene se brzo promene tako da takva mogućnost nestane. Dakle, ne postoji mogućnost za arbitražu, odnosno pravljenja profita bez rizika.

U daljem tekstu koristićemo sledeće oznake (neke od njih su se već pojavljivale):

- $S(0)$ - sadašnja cena akcije;
- K - ugovorena cena akcije;
- T - vreme do isteka opcije;
- $S(T)$ - cena akcije na isteku opcije;
- $r > 0$ - kamatna stopa, koja se neprekidno obračunava;
- C - vrednost jedne evropske call opcije;
- P - vrednost jedne evropske put opcije.

1.2. Cena bez arbitraže

Arbitraža je prilika za investiranje koja garantuje da se zaradi novac, odnosno ostvari profit, bez ikakvog rizika. Iako takve arbitražne mogućnosti na tržištu postoje, mnoge od njih su male praktične vrednosti. Trgovinski troškovi, nedostatak likvidnosti, širina ponude-potražnje, konstantni potezi tržišta koji imaju tendeciju da brzo eleminišu svaku mogućnost arbitraže i nemogućnost izvršavanja dovoljno velike trgovine bez pomeranja tržišta čine da je vrlo teško iskoristiti mogućnost arbitraže.

Definicija 1.2. ***Portfolio*** je kolekcija vrednosnih papira koju neki investitor poseduje.

Na tržištu bez arbitraže možemo uočiti da je odnos između cena različitih hartija od vrednosti zasnovan na sledećem principu:

(Opšti) princip o jednoj ceni. *Ako dva portfolija imaju iste vrednosti u budućem vremenu $T > t$, bez obzira na stanje na tržištu u trenutku T, oni moraju imati iste vrednosti u trenutku t. Ako je jedan portfolio vredniji (manje vredan) od drugog portfolija u budućem vremenu $T > t$, bez obzira na stanje tržišta u trenutku T, tada je taj portfolio vredniji (manje vredan) od drugog portfolija u trenutku $t < T$, to jest:*

Ako postoji $\tau > t$ tako da je $V_1(\tau) = V_2(\tau)$ (ili $V_1(\tau) > V_2(\tau)$, ili $V_1(\tau) < V_2(\tau)$) za svako stanje na tržištu u trenutku τ, onda je $V_1(t) = V_2(t)$ (ili $V_1(t) > V_2(t)$, ili $V_1(t) < V_2(t)$). □

Posledica. *Ako je vrednost portfolija sačinjenog od hartija od vrednosti jednaka 0 u budućem vremenu $T > t$, bez obzira na stanje na tržištu u trenutku T, onda vrednost portfolija u trenutku t mora biti jednaka 0, to jest:*

Ako postoji $T > t$ tako da je $V(T) = 0$ za svako stanje na tržištu u trenutku T, onda je $V(t) = 0$. □

Važna posledica principa o jednoj ceni je činjenica da ako vrednost portfolija u budućem trenutku T ne zavisi od stanja na tržištu u tom trenutku, onda je vrednost portfolija u sadašnjosti diskontovana vrednost portfolija u trenutku T, koja je neutralna od rizika (eng. *risk-neutral valuation*).

Značenje „diskontovana vrednost neutralna od rizika“ se odnosi na vremenske vrednosti novca: novac može biti deponovan u vremenu t_1 i vraćen u trenutku t_2 ($t_2 > t_1$) sa kamatom. Kamatna stopa zavisi od mnogih faktora, jedan od njih je verovatnoća neizvršenja obaveza one strane koja prima depozit. Ako je ova verovatnoća 0 ili približno jednaka 0, onda se vraćanje uloženog novca sa kamatom smatra bezrizično. Kamata se obračunava na mnogo načina, na primer, godišnje, polugodišnje, neprekidno. Ukoliko drugačije nije naznačeno, u ovom radu, kamata se obračunava neprekidno.

Za kamatu koja se nagomilava neprekidno, vrednost koja se dobija $B(t_2)$ u trenutku $t_2 > t_1$ od novca $B(t_1)$ uloženog u banku u trenutku t_1 je

$$B(t_2) = e^{r(t_2-t_1)}B(t_1), \tag{1.1}$$

gde je r bezrizična kamatna stopa koja važi u intervalu vremena između t_1 i t_2. Sadašnja vrednost $B(t_1)$ u trenutku $t_1 < t_2$ od novca $B(t_2)$ u trenutku t_2 je

$$B(t_1) = e^{-r(t_2-t_1)}B(t_2). \tag{1.2}$$

Lema 1.1. *Ako je vrednost $V(T)$ portfolija u budućem vremenu T nezavisna od stanja tržišta u trenutku T, onda je*

$$V(t) = V(T)e^{-r(T-t)}, \tag{1.3}$$

gde je $t < T$ i r konstantna bezrizična stopa.

Dokaz. Označimo sa $z = V(t)$ vrednost portfolija u trenutku T. Posmatrajmo portfolio napravljen od novca $V_2(t) = ze^{-r(T-t)}$ u vremenu t. Vrednost $V_2(T)$ portfolija u trenutku T je

$$V_2(T) = e^{r(T-t)}V_2(t) = e^{r(T-t)}\left(ze^{-r(T-t)}\right) = z;$$

videti (1.1) za $t_1 = t$, $t_2 = T$ i $B(t) = V_2(t)$.

Dakle, $V_2(T) = V(T) = z$, i iz opšteg principa o jednoj ceni zaključujemo da je $V_2(t) = V(t)$. Prema tome, $V(t) = V_2(t) = ze^{-r(T-t)} = V(T)e^{-r(T-t)}$, što smo i želeli da dokažemo. □

Primer. Koliko vrede evropske call i put opcije ako je cena podloge jednaka 0?

Odgovor. Označimo sa $S(t)$ cenu podloge u trenutku t. Ako u trenutku t podloga postane bezvredna, tj. ako je $S(t) = 0$, onda cena podloge nikada više neće biti iznad 0. Inače, ukazuje se mogućnost za arbitražu: kupimo podlogu bez troškova u vremenu t i prodamo je bezrizično čim njena vrednost bude iznad 0.

Prema tome, na dospeću, cena podloge će biti nula, tj. $S(T) = 0$. Odatle sledi da će na dospeću, call opcija biti bezvredna, a put će uvek ostvarivati premiju u iznosu od K, tj.

$$C(T) = \max(S(T) - K, 0) = 0;$$

$$P(T) = \max(K - S(T), 0) = K.$$

Iz leme 1.1. zaključujemo da je

$$C(t) = 0;$$

$$P(t) = Ke^{-r(T-t)},$$

gde je r konstatna bezrizična stopa.

1.3. Put-Call paritet

Put-call paritet je veza koja postoji izmedju cena (vrednosti) evropskih put i call opcija, koje imaju istu ugovorenu cenu akcije K, vreme do isteka T i odnose se na istu akciju.

Neka su $C(t)$ i $P(t)$ vrednosti evropske call i put opcije bez dividendi u trenutku t, sa istim vremenom do dospeća T i istom ugovorenom cenom K, koje se odnose na istu akciju čija je cena $S(t)$. Put-call paritet dat je sledećom formulom

$$P(t) + S(t) - C(t) = Ke^{-r(T-t)}. \quad (1.4)$$

Ako postoji dividenda pretpostavlja se da se ona isplaćuje neprekidno sa stopom q. U tom slučaju, put-call paritet dat je sa

$$P(t) + S(t)e^{-q(T-t)} - C(t) = Ke^{-r(T-t)}. \quad (1.5)$$

Dokaz jednakosti (1.4): Posmatrajmo sledeći portfolio:

- kupljena je jedna put opcija
- kupljena je jedna akcija
- prodata je jedna call opcija

sve na istu akciju. Vrednost portfolija $V(t)$ u trenutku t je

$$V(t) = P(t) + S(t) - C(t). \tag{1.6}$$

Odredimo vrednost portfolija u trenutku T:

- ako je $S(T) < K$, put opcija ima vrednost $K - S(T)$, a call opcija je bezvredna, pa je vrednost portfolija $\big(K - S(T)\big) + S(T) - 0 = K$.

- ako je $S(T) \geq K$, put opcija je bezvredna, a call opcija ima vrednost $S(T) - K$, pa je vrednost portfolija $0 + S(T) - (S(T) - K) = K$.

Dakle, vrednost portfolija u trenutku T je

$$V(T) = P(T) + S(T) - C(T) = K. \tag{1.7}$$

Na osnovu leme 1.1 i jednakosti (1.7), sledi

$$V(t) = V(T)e^{-r(T-t)} = Ke^{-r(T-t)}. \tag{1.8}$$

Put-call paritet dobijamo iz jednakosti (1.6) i (1.8)

$$P(t) + S(t) - C(t) = Ke^{-r(T-t)}. \quad \square$$

2. Black-Scholes formula

Black-Scholes formulom izračunavamo cenu evropske call opcije. To je jedan od najvažnijih matematičkih rezultata u vezi sa finansijskim tržištima, objavljenog 1973. godine u radu Black-a i Scholes-a, *The pricing of options and corporate liabilities*, [3]. Prvi kompletan dokaz ove formule dao je Merton (vidi [4]), koji je ovu formulu i nazvao Black-Scholes formulom. Za ove rezultate su Myron Scholes i Robert Merton dobili Nobelovu nagradu 1997. godine, a Fischer Black, koji je preminuo 1995. godine, nije doživeo ovo veliko priznanje.

Neka je $S(t)$ cena akcije u trenutku t. Pretpostavimo da je promena cene akcije tokom vremena takva da za bilo koje vrednosti t_1 i t_2, $t_1 < t_2$, slučajna veličina $\frac{S(t_2)}{S(t_1)}$ ima lognormalnu raspodelu[2] sa parametrima $\left(\mu - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_2 - t_1)$ i $\sigma^2(t_2 - t_1)$, tj.

$$ln\left(\frac{S(t_2)}{S(t_1)}\right) = \left(\mu - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_2 - t_1) + \sigma\sqrt{t_2 - t_1}\, Z,$$

[2] Slučajna veličina Y ima lognormalnu raspodelu sa parametrima μ i σ^2 ako je $Y = e^X$, gde je X slučajna veličina sa normalnom $N(\mu, \sigma^2)$ raspodelom.

gde je Z slučajna veličina sa standardizovanom normalnom raspodelom. Konstante μ i σ se nazivaju drift i volatilnost cene akcija $S(t)$ i predstavljaju očekivanu vrednost i standardnu devijaciju; q je neprekidna kamatna stopa po kojoj se obračunavaju dividende.

U Black-Scholes formuli cena evropske call opcije zavisi od sledećih parametara:

- S - cena akcije u trenutku t;
- T - dospeće opcije; vreme do dospeća je $T-t$;
- K - ugovorena cena akcije;
- r - bezrizična kamatna stopa, pretpostavlja se da je konstantna tokom života opcije, tj. u intervalu vremena između t i T;
- σ - volatilnost akcije, tj. standardna devijacija prinosa sredstava;
- q - stopa po kojoj se obračunava dividenda na akciju; pretpostavlja se da se dividenda obračunava po neprekidnoj stopi.

Pretpostavimo da cena akcija ima lognormalnu raspodelu i volatilnost σ, da se na akciju isplaćuje dividenda po neprekidnoj stopi q i da je bezrizična kamatna stopa konstantna i jednaka r. Neka je $C(S,t)$ vrednost call opcije u trenutku t sa ugovorenom cenom K i vremenom do dospeća T i neka je $P(S,t)$ vrednost put opcije u trenutku t sa ugovorenom cenom K i vremenom dospeća T. Black-Scholes formula za vrednost call i put opcije za akcije sa dividendom je

$$C(S,t) = Se^{-q(T-t)}N(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2); \tag{2.1}$$

$$P(S,t) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - Se^{-q(T-t)}N(-d_1), \tag{2.2}$$

gde je

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}; \tag{2.3}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} = \frac{ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \tag{2.4}$$

a sa $N(z)$ je označena funkcija raspodele standardizovane normalne slučajne veličine

$$N(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \,.$$

Za akcije bez dividendi, tj. za $q = 0$, Black-Scholes formula je

$$C(S,t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2); \tag{2.5}$$

$$P(S,t) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1), \tag{2.6}$$

gde je

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \;; \tag{2.7}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} = \frac{ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \,. \tag{2.8}$$

Iz rezultata dobijenih za evropsku call opciju, dobijamo rezultate za evropsku put opciju koristeći put-call paritet. Na primer, iz Black-Scholes formule dobijene za evropsku call opciju, možemo izvesti Black-Scholes formulu za evropsku put opciju na sledeći način: Iz (2.1), znamo

$$C(S,t) = Se^{-q(T-t)}N(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2).$$

Koristeći put-call paritet (1.5), nalazimo

$$\begin{aligned} P(S,t) &= Ke^{-r(T-t)} - Se^{-q(T-t)} + C(S,t) \\ &= Ke^{-r(T-t)} - Se^{-q(T-t)} + \left(Se^{-q(T-t)}N(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)\right) \\ &= Ke^{-r(T-t)}(1 - N(d_2)) - Se^{-q(T-t)}(1 - N(d_1)) \\ &= Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - Se^{-q(T-t)}N(-d_1), \end{aligned}$$

jer zbog simetričnosti oko nule gustine standardizovane normalne slučajne veličine važi da je $1 - N(a) = N(-a)$ za svako $a \in \boldsymbol{R}$.

Ako sa $V(S(t), K)$ označimo cenu opcije u trenutku t sa ugovorenom cenom K i cenom $S(t)$ akcije na koju je izdata opcija, lako je videti iz (2.11 - 2.14), da je $V(aS(t), aK) = a \cdot V(S(t), K)$ za svako $a > 0$. Prema tome,

$$V(S(t), K) = K \cdot V\left(\frac{S(t)}{K}, 1\right) = K \cdot V\left(1 + \frac{S(t) - K}{K}, 1\right).$$

Otuda, veličina

$$\frac{S - K}{K} = \frac{S(t) - K}{K}$$

predstavlja procenat kojim je opcija in-the-money ili out-of-the-money u trenutku t.

Primer. Call opcija sa ugovorenom cenom K je 15% out of the money. Naći cenu akcije koja je podloga za ovu opciju.

Rešenje. Za out of the money call opciju, cena akcije je niža od ugovorene cene, $S(t) < K$. Call opcija je 15% out of the money ako je

$$\frac{K - S(t)}{K} = 0.15,$$

tj. ako je $S(t) = 0.85K$. Za $K = 60$, nalazimo da je $S(t) = 51$.

3. Grčka slova za evropske call i put opcije

Neka je V vrednost portfolija sačinjenog od derivata koji se odnose na samo jednu podlogu[3]. Brzina promene vrednosti portfolija u odnosu na različite parametre, npr. cena podloge ili volatilnost podloge, važna je u obezbeđenju od rizika, tj. u hedžing svrhe. Te brzine promena se nazivaju *grčka slova* portfolija i označavaju se slovima grčkog alfabeta. To su:

- *Delta* (Δ) je brzina promene vrednosti portfolija u odnosu na cenu podloge S:

$$\Delta(\mathrm{V}) = \frac{\partial V}{\partial S}; \tag{3.1}$$

- *Gama* ($\boldsymbol{\Gamma}$) je brzina promene delte u odnosu na cenu podloge S, tj. drugi parcijalni izvod vrednosti portfolija u odnosu na cenu S:

$$\boldsymbol{\Gamma}(V) = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\ ; \tag{3.2}$$

- *Teta* ($\boldsymbol{\Theta}$) je brzina promene vrednosti portfolija u odnosu na vreme t (ne u odnosu na vreme do dospeća T):

$$\boldsymbol{\Theta}(V) = \frac{\partial V}{\partial t}\ ; \tag{3.3}$$

[3] Portfolio može biti npr. akcija, ili neki drugi vrednosni papir ili opcija.

- *Vega* ($\boldsymbol{\nu}$) je brzina promene vrednosti portfolija u odnosu na volatilnost podloge σ:

$$\boldsymbol{\nu}(V) = \frac{\partial V}{\partial \sigma}\ ; \tag{3.4}$$

- *Ro* ($\boldsymbol{\rho}$) je brzina promene vrednosti portfolija u odnosu na bezrizičnu kamatnu stopu r:

$$\boldsymbol{\rho}(V) = \frac{\partial V}{\partial r}. \tag{3.5}$$

Grčka slova predstavljaju mere osetljivosti portfolija na male promene osnovnih parametara od kojih zavisi vrednost tog portfolija. Jednim imenom ih nazivamo mere rizika ili hedž parametri.

Iz Black-Scholes formule (2.1) i (2.2) za opcije sa dividendama mogu se izvesti sledeće formule[4] zatvorenog tipa za grčka slova evropskih call i put opcija:

$$\Delta(C) = e^{-q(T-t)}N(d_1); \tag{3.6}$$

$$\Delta(P) = -e^{-q(T-t)}N(-d_1); \tag{3.7}$$

$$\boldsymbol{\Gamma}(C) = \frac{e^{-q(T-t)}}{S\sigma\sqrt{T-t}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_1^2}{2}}; \tag{3.8}$$

$$\boldsymbol{\Gamma}(P) = \boldsymbol{\Gamma}(C); \tag{3.9}$$

$$\boldsymbol{\Theta}(C) = -\frac{S\sigma e^{-q(T-t)}}{2\sqrt{2\pi(T-t)}}e^{-\frac{d_1^2}{2}} + qSe^{-q(T-t)}N(d_1) - rKe^{-r(T-t)}N(d_2); \tag{3.10}$$

---

[4] Pri izvođenju ovih formula diferenciramo nesvojstvene integrale koji predstavljaju limese određenih integrala po granicama tih integrala.

Važi ***lema 3.1***: *Neka je $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ neprekidna funkcija takva da nesvojstveni integral*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

postoji. Neka su $g, h: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ date sa

$$g(t) = \int_{-\infty}^{b(t)} f(x)dx\ ; \qquad h(t) = \int_{a(t)}^{\infty} f(x)dx\ ,$$

gde su $a(t)$ i $b(t)$ *diferencijabilne funkcije. Tada su $g(t)$ i $h(t)$ diferencijabilne i važi*

$$g'(t) = f\big(b(t)\big)b'(t);$$
$$h'(t) = -f(a(t))a'(t).$$

$$\boldsymbol{\Theta}(P) = -\frac{S\sigma e^{-q(T-t)}}{2\sqrt{2\pi(T-t)}} e^{-\frac{d_1^2}{2}} - qSe^{-q(T-t)}N(-d_1) + rKe^{-r(T-t)}N(-d_2); \quad (3.11)$$

$$\boldsymbol{\nu}(C) = Se^{-q(T-t)}\sqrt{T-t}\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}}; \quad (3.12)$$

$$\boldsymbol{\nu}(P) = \boldsymbol{\nu}(C); \quad (3.13)$$

$$\boldsymbol{\rho}(C) = K(T-t)e^{-r(T-t)}N(d_2); \quad (3.14)$$

$$\boldsymbol{\rho}(P) = -K(T-t)e^{-r(T-t)}N(-d_2). \quad (3.15)$$

Ukoliko smo izveli formule za grčka slova koja odgovaraju call opciji, na osnovu put-call pariteta možemo naći i grčka slova koja odgovaraju put opciji. Na primer, da bi izračunali delta put opcije, put-call paritet (1.5) možemo napisati u obliku

$$P = C - Se^{-q(T-t)} + Ke^{-r(T-t)}. \quad (3.16)$$

Diferenciranjem izraza (3.16) po S nalazimo

$$\Delta(P) = \Delta(C) - e^{-q(T-t)}.$$

Koristeći formulu (3.6) za $\Delta(C)$, dobijamo formulu (3.7) za $\Delta(P)$, tj.

$$\Delta(P) = e^{-q(T-t)}N(d_1) - e^{-q(T-t)} = -e^{-q(T-t)}(1 - N(d_1)) = -e^{-q(T-t)}N(-d_1).$$

3.1. Izvođenje formula za grčka slova

Zanimljivo je napomenuti da su formule za grčka slova (3.6 – 3.15) jednostavnije nego što se očekivalo. Na primer, delta za call opciju definišemo kao

$$\Delta(C) = \frac{\partial C}{\partial S}.$$

Diferenciranjem Black-Scholes formule (2.1) po S dobijamo

$$\Delta(C) = e^{-q(T-t)}N(d_1) + Se^{-q(T-t)}\frac{\partial}{\partial S}(N(d_1)) - Ke^{-r(T-t)}\frac{\partial}{\partial S}(N(d_2)), \tag{3.17}$$

gde su i d_1 i d_2 funkcije od S, videti (2.3) i (2.4).

Pokazaćemo da je

$$\Delta(C) = e^{-q(T-t)}N(d_1). \tag{3.18}$$

U (3.17) pojavljuje se izvod složene funkcije za koji važi

$$\frac{\partial}{\partial S}(N(d_1)) = N'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S}; \tag{3.19}$$

$$\frac{\partial}{\partial S}(N(d_2)) = N'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial S}. \tag{3.20}$$

Zatim, koristeći (3.19) i (3.20), možemo zapisati (3.17) kao

$$\Delta(C) = e^{-q(T-t)}N(d_1) + Se^{-q(T-t)}N'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S} - Ke^{-r(T-t)}N'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial S}. \tag{3.21}$$

Primetimo da se formule za d_1 i d_2, (2.3) i (2.4), mogu zapisati kao

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r-q)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} + \frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2}; \tag{3.22}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} = \frac{ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r-q)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} - \frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2}. \tag{3.23}$$

Sledeći rezultat objašnjava zašto se (3.21) svodi na (3.18):

Lema 3.2. Neka su d_1 i d_2 dati sa (3.22) i (3.23). Tada

$$Se^{-q(T-t)}N'(d_1) = Ke^{-r(T-t)}N'(d_2). \tag{3.24}$$

Dokaz. Podsetimo se da je $N(z)$ funkcija raspodele standardizovane normalne slučajne veličine, tj.

$$N(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{x^2}{2}}dx\,.$$

Iz leme 3.1, nalazimo da je

$$N'(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}.$$

Sledi,

$$N'(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}}; \tag{3.25}$$

$$N'(d_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_2^2}{2}}. \tag{3.26}$$

Dakle, da bi pokazali (3.24), dovoljno je da pokažemo da važi

$$Se^{-q(T-t)} e^{-\frac{d_1^2}{2}} = Ke^{-r(T-t)} e^{-\frac{d_2^2}{2}}. \tag{3.27}$$

Kako je $exp(ln(x)) = x$, nalazimo da je

$$Se^{-q(T-t)} = Ke^{-r(T-t)} \frac{S}{K} e^{(r-q)(T-t)} = Ke^{-r(T-t)} exp\left(ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r-q)(T-t)\right).$$

Iz (3.22) lako je videti da je

$$ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r-q)(T-t) = d_1 \sigma \sqrt{T-t} - \frac{\sigma^2 (T-t)}{2},$$

i otuda

$$Se^{-q(T-t)} = Ke^{-r(T-t)} exp\left(d_1 \sigma \sqrt{T-t} - \frac{\sigma^2 (T-t)}{2}\right).$$

Koristeći činjenicu da je $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$, dobijamo (3.27) na sledeći način:

$$Se^{-q(T-t)} e^{-\frac{d_1^2}{2}} = Ke^{-r(T-t)} exp\left(-\frac{d_1^2}{2} + d_1 \sigma \sqrt{T-t} - \frac{\sigma^2 (T-t)}{2}\right)$$

$$= Ke^{-r(T-t)} exp\left(-\frac{\left(d_1 - \sigma\sqrt{T-t}\right)^2}{2}\right)$$

$$= Ke^{-r(T-t)} e^{-\frac{d_2^2}{2}}. \quad \square$$

Vratimo se na dokazivanje formule (3.18) za Δ(C).

Iz (3.22) i (3.23) nalazimo

$$\frac{\partial d_1}{\partial S} = \frac{\partial d_2}{\partial S} = \frac{1}{\sigma S \sqrt{T-t}}. \tag{3.28}$$

Koristeći (3.28) i lemu 3.2 možemo zaključiti da formula (3.21) postaje

$$\begin{aligned}\Delta(C) &= e^{-q(T-t)}N(d_1) + Se^{-q(T-t)}N'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S} - Ke^{-r(T-t)}N'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial S} \\ &= e^{-q(T-t)}N(d_1) + Se^{-q(T-t)}N'(d_1)\left(\frac{\partial d_1}{\partial S} - \frac{\partial d_2}{\partial S}\right) \\ &= e^{-q(T-t)}N(d_1).\end{aligned}$$

Formula (3.18) je dokazana.

Formula za gama $\boldsymbol{\Gamma}(C)$:

Diferenciramo formulu (3.6) za $\Delta(C)$ po S. Imamo da je

$$\boldsymbol{\Gamma}(C) = \frac{\partial \Delta(C)}{\partial S} = e^{-q(T-t)}N'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S}.$$

Koristeći činjenicu da je $N'(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_1^2}{2}}$, videti (3.25), kao i da je $\frac{\partial d_1}{\partial S} = \frac{1}{\sigma S\sqrt{T-t}}$, videti (3.28), dobijamo da je

$$\boldsymbol{\Gamma}(C) = e^{-q(T-t)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_1^2}{2}}\frac{1}{\sigma S\sqrt{T-t}},$$

što je isto kao formula (3.8).

Formula za teta $\boldsymbol{\Theta}(C)$:

Diferenciramo Black-Scholes formulu (2.1) po t. Postupajući slično kao u izvođenju delte za call opciju, dobijamo

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Theta}(C) = Se^{-q(T-t)}N'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial t} + qSe^{-q(T-t)}N(d_1) \\ -Ke^{-r(T-t)}N'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial t} - rKe^{-r(T-t)}N(d_2).\end{aligned}$$

Koristeći rezultat leme 3.2 zaključujemo da je

$$\boldsymbol{\Theta}(C) = Se^{-q(T-t)}N'(d_1)\left(\frac{\partial d_1}{\partial t} - \frac{\partial d_2}{\partial t}\right) + qSe^{-q(T-t)}N(d_1) - rKe^{-r(T-t)}N(d_2).$$

Pošto je $d_1 - d_2 = \sigma\sqrt{T-t}$, nalazimo da je

$$\frac{\partial d_1}{\partial t} - \frac{\partial d_2}{\partial t} = -\frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}}.$$

Kako je $N'(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}}$, videti (3.25), zaključujemo da je

$$\boldsymbol{\Theta}(C) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} S e^{-q(T-t)} e^{-\frac{d_1^2}{2}} \frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}} + qSe^{-q(T-t)} N(d_1) - rKe^{-r(T-t)} N(d_2),$$

što je isto kao formula (3.10).

Formula za vega $\boldsymbol{\nu}(C)$:

Diferenciramo Black-Scholes formulu (2.1) po σ. Imamo da je

$$\boldsymbol{\nu}(C) = \frac{\partial C}{\partial \sigma} = Se^{-q(T-t)} N'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - Ke^{-r(T-t)} N'(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial \sigma}.$$

Koristeći rezultat leme 3.2, zaključujemo da je

$$\boldsymbol{\nu}(C) = Se^{-q(T-t)} N'(d_1) \left(\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - \frac{\partial d_2}{\partial \sigma} \right).$$

Pošto je $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$, sledi $d_1 - d_2 = \sigma\sqrt{T-t}$, pa je

$$\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - \frac{\partial d_2}{\partial \sigma} = \sqrt{T-t}.$$

Potom, koristeći činjenicu da je $N'(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}}$, videti (3.25), zaključujemo da je

$$\boldsymbol{\nu}(C) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} S e^{-q(T-t)} e^{-\frac{d_1^2}{2}} \sqrt{T-t},$$

što je isto kao formula (3.12).

Formula za ro $\boldsymbol{\rho}(C)$:

Diferenciramo Black-Scholes formulu (2.1) po r. Dobijamo da je

$$\boldsymbol{\rho}(C) = Se^{-q(T-t)} N'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial r} - Ke^{-r(T-t)} N'(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial r} + K(T-t)e^{-r(T-t)} N(d_2).$$

Iz leme 3.2 nalazimo da je

$$\boldsymbol{\rho}(C) = Se^{-q(T-t)}N'(d_1)\left(\frac{\partial d_1}{\partial r} - \frac{\partial d_2}{\partial r}\right) + K(T-t)e^{-r(T-t)}N(d_2).$$

Pošto je $d_1 - d_2 = \sigma\sqrt{T-t}$, nalazimo da je

$$\frac{\partial d_1}{\partial r} = \frac{\partial d_2}{\partial r},$$

i dakle,

$$\boldsymbol{\rho}(C) = K(T-t)e^{-r(T-t)}N(d_2),$$

što je isto kao formula (3.14).

Formule (3.9), (3.11), (3.13) i (3.15) za gama, teta, vega i ro koje se odnose na put opciju mogu se dobiti iz formula (3.8), (3.10), (3.12) i (3.14) koristeći put-call paritet (1.5).

3.2. Delta obezbeđenje od rizika

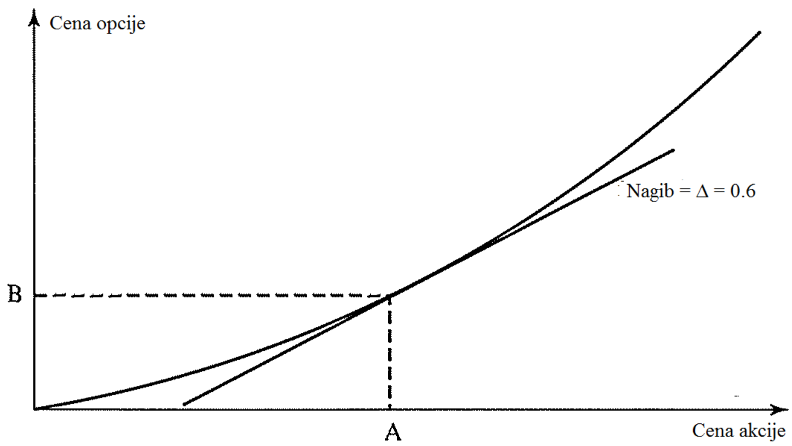
Pojam *delta* (Δ) opcije uveden je na početku trećeg poglavlja ovog rada. Definiše se kao brzina promene cene opcije u odnosu na cenu podloge. To je nagib krive koja se odnosi na cenu opcije u zavisnosti od cene podloge. Pretpostavimo da je delta call opcije koja se odnosi na akciju 0.6. To znači da kada se cena akcije promeni za mali iznos, cena opcije se promeni za oko 60% tog iznosa. Slika 3.1 prikazuje odnos između cene call opcije i cene odgovarajuće akcije. Kada tački A odgovara cena akcije, a tački B cena opcije, Δ je nagib naznačene krive. U principu,

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S},$$

gde je C cena call opcije i S cena akcije na koju se opcija odnosi.

Radi jednostavnosti, u nastavku teksta, pretpostavićemo da je $t = 0$.

Primer. Pretpostavimo da je na slici 3.1 cena akcije 100$ i cena opcije 10$. Pretpostavimo da je investitor prodao 20 ugovora na call opcije, tj. opcije za kupovinu 2000 akcija. Pozicija investitora može biti zaštićena kupovinom 0.6 · 2000 = 1200 akcija. Dobitak (gubitak) na poziciju opcije težio bi da bude ublažen gubitkom (dobiti) na poziciji akcije. Na primer, ako se cena akcije poveća za 1$ (što proizvodi dobit od 1200$ na kupljene akcije), cena opcije će težiti da se poveća za 0.6 · 1$ = 0.6$ (što proizvodi gubitak od 1200$ na prodate opcije). Ako cena akcije padne za 1$ (što proizvodi gubitak od 1200$ na kupljene akcije), cena opcije će težiti da se smanji za 0.6$ (što proizvodi dobit od 1200$ na prodate opcije).



Slika 3.1. Računanje delta

U ovom primeru, delta za poziciju investitora je

$$0.6 \cdot (-2000) = -1200.$$

Drugim rečima, investitor gubi $1200\Delta S$ time što je prodao opcije u slučaju kada se cena akcije poveća za ΔS. Delta jedne akcije je 1 tako da kupovina 1200 akcija ima deltu od +1200. Delta ukupnog položaja investitora je, dakle, nula. Delta položaja akcije poništava deltu položaja opcije. Pozicija sa delta koje je jednako nuli naziva se delta-neutralnom.

Važno je shvatiti da zato što se delta menja, pozicija investitora ostaje delta zaštićena (ili delta-neutralna) samo na relativno kratak vremenski period. Zaštita mora biti periodično prilagođena. Ovo je poznato kao rebalans. U našem primeru, poslednja 3 dana cena akcije može porasti na 110$. Kao što je naznačeno na slici 3.1, povećanje cene akcije dovodi do povećanja delte. Pretpostavimo da delta poraste sa 0.6 na 0.65. Tada bi morali da kupimo dodatnih 0.05 · 2000 = 100 akcija da bi ostali zaštićeni od rizika.

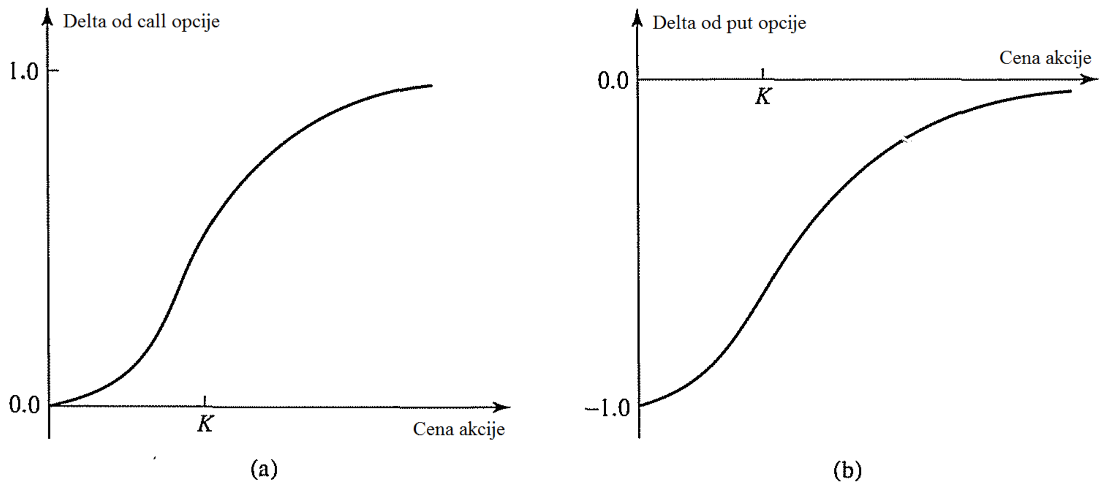
Delta hedžing shema koja je upravo opisana je dinamička hedžing shema, što znači da se periodično prilagođava promenama. Ona je suprotna statičkoj hedžing shemi gde se zaštita postavi na početku i nikad se ne prilagođava.

3.2.1. Delta od evropskih opcija na akcije

Za evropsku call opciju na akciju bez dividendi ($q = 0$), Δ možemo napisati u obliku

$$\Delta(C) = N(d_1),$$

gde je d_1 definisano izrazom (2.7). Ako želimo da uspostavimo delta hedžing, prodaja evropske call opcije podrazumeva kupovinu $N(d_1)$ akcija u bilo koje dato vreme. Slično, održavanje delta hedžinga kupovinom evropske call opcije podrazumeva prodaju $N(d_1)$ akcija u dato vreme.

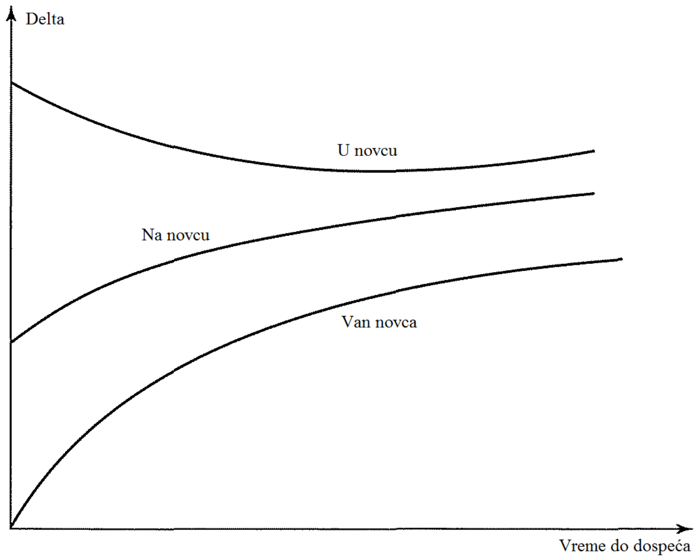


Slika 3.2. Ponašanje delte u odnosu na cenu akcije za (a) call opciju i (b) put opciju bez dividendi

Za evropsku put opciju na akciju bez dividendi, delta je dato sa

$$\Delta(P) = N(d_1) - 1.$$

Delta je negativno, što znači da bi se zaštitili ako smo kupili put opciju, onda treba da kupimo odgovarajuću akciju, a ako smo prodali put opciju treba i da prodamo odgovarajuću akciju. Slika 3.2 prikazuje promenu delte za call i put opcije u odnosu na promenu cene akcije. Slika 3.3 prikazuje ponašanje delte u odnosu na vreme do dospeća za call opciju koja je u novcu, na novcu i van novca.



Slika 3.3. Tipično ponašanje delte u odnosu na vreme do dospeća call opcije

3.2.2. Delta od evropskih opcija na druge podloge

Za evropsku call opciju na akciju za koju se dividenda isplaćuje neprekidno po stopi q, delta je

$$\Delta(C) = e^{-qT} N(d_1),$$

gde je d_1 definisano izrazom (2.3). Za evropsku put opciju na akciju, delta je

$$\Delta(P) = e^{-qT}[N(d_1) - 1].$$

Kada je podloga berzanski indeks, ove formule su korektne pri čemu je q jednako prinosu dividendi na indeks. Kada je podloga valuta, formule su tačne za q jednako inostranoj bezrizičnoj kamatnoj stopi, r_f.

Primer. Američka banka je prodala šestomesečnu put opciju po 1 milion £ sa ugovorenom cenom 16000 i želi da napravi svoj portfolio delta-neutralnim. Pretpostavimo da je trenutni devizni kurs 16200, bezrizična kamatna stopa u Velikoj Britaniji je 13% godišnje, bezrizična kamatna stopa u SAD-u 10% godišnje i volatilnost sterlinga je 15%. U ovom slučaju, $S(0)$ = 16200, K = 16000, r = 0.10, r_f= 0.13, σ = 0.15 i T = 0.5. Delta od put opcije na valutu je

$$[N(d_1) - 1]e^{-r_f T},$$

gde je d_1 dato izrazom (2.7). Nalazimo da je

$$d_1 = 0.0287 \text{ i } N(d_1) = 0.5115,$$

tako da je delta put opcije -0.458. To je delta jedne kupljene put opcije. (To znači da, kada se kurs povećava za ΔS, cena put opcije se snižava za 45.8% od ΔS.) Delta od ukupne bankine prodaje opcije je +458000. Da bi napravili delta-neutralnu poziciju moramo dodati sumu od prodaje sterlinga od 458000$ na poziciju opcije. Ova short pozicija sterlinga ima delta -458000 i neutrališe delta poziciju opcije.

3.2.3. Delta portfolija

Delta portfolija sastavljenog od opcija ili drugih derivata na podlogu čija je cena S je

$$\frac{\partial V}{\partial S},$$

gde je V vrednost portfolija.

Delta portfolija možemo izračunati iz delti pojedinačnih opcija koje čine portfolio. Ako se portfolio sastoji od količine w_i opcije i $(1 \leq i \leq n)$, delta portfolija dato je sa

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} w_i \Delta_i,$$

gde je Δ_i delta i-te opcije. Gornja formula može da se koristi za izračunavanje pozicije u podlozi, kako bi delta portfolija bilo jednako nula. Kada se ova pozicija zauzme, portfolio se naziva delta-neutralan.

Primer. Pretpostavimo da finansijska institucija u Sjedinjenim Američkim državama ima sledeće tri pozicije u opcijama na australijski dolar:

1. Kupila je 100000 call opcija sa ugovorenom cenom 0.55 i dospećem za 3 meseca. Delta svake od opcija je 0.533.
2. Prodala je 200000 call opcija sa ugovorenom cenom 0.56 i dospećem za 5 meseca. Delta svake od opcija je 0.468.
3. Prodala je 50000 put opcija sa ugovorenom cenom 0.56 i dospećem za 2 meseca. Delta svake od opcija je -0.508.

Delta celog portfolija je

$$100000 \cdot 0.533 - 200000 \cdot 0.468 - 50000 \cdot (-0.508) = -14900.$$

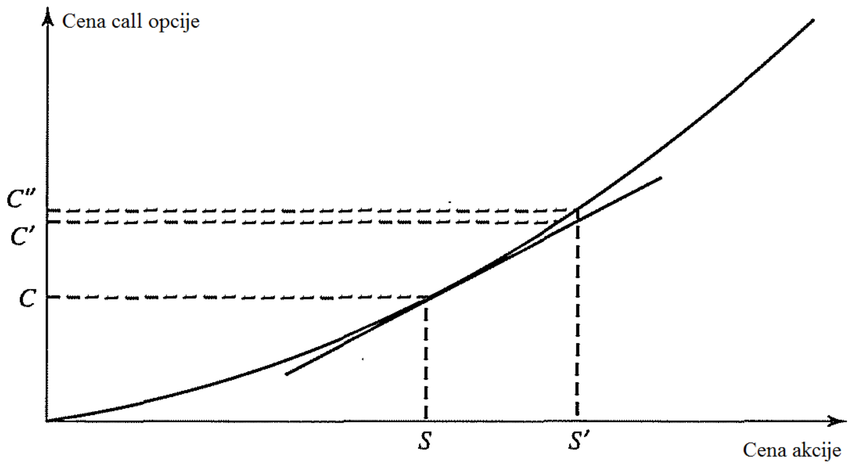
To znači da portfolio može biti delta-neutralan kupovinom 14900 australijskih dolara.

3.3. Gama *Γ*

Gama (***Γ***) portfolija sastavljenog od opcija na podlogu je brzina promene delte portfolija u odnosu na promenu cene podloge. To je drugi parcijalni izvod portfolija po ceni podloge:

$$\boldsymbol{\Gamma} = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}.$$

Ako je gama malo, delta se menja sporo, pa usklađivanja da bi se očuvala delta neutralnost portfolija treba da se sprovode relativno retko. Međutim, ako je gama veliko u apsolutnom smislu, delta je veoma osetljivo na cenu podloge. Tada je veoma rizično ostaviti delta-neutralan portfolio nepromenjen na bilo koje vreme. Slika 3.4. ilustruje ovo. Kada se cena podloge promeni sa S na S', delta hedžing podrazumeva da se cena opcije promeni sa C na C', a ustvari ona se kreće od C do C''. Razlika između C' i C'' je greška hedžinga. Ova greška zavisi od zakrivljenosti krive između cene opcije i cene podloge. Gama meri ovu zakrivljenost.[5]



Slika 3.4. Hedžing greška nastala zbog nelinearnosti

Pretpostavimo da je ΔS promena cene podloge tokom malog intervala vremena Δt i ΔV odgovarajuća promena cene portfolija. U poglavlju 3.5 pokazuje se da ako zanemarimo članove reda većeg od Δt, imamo da je

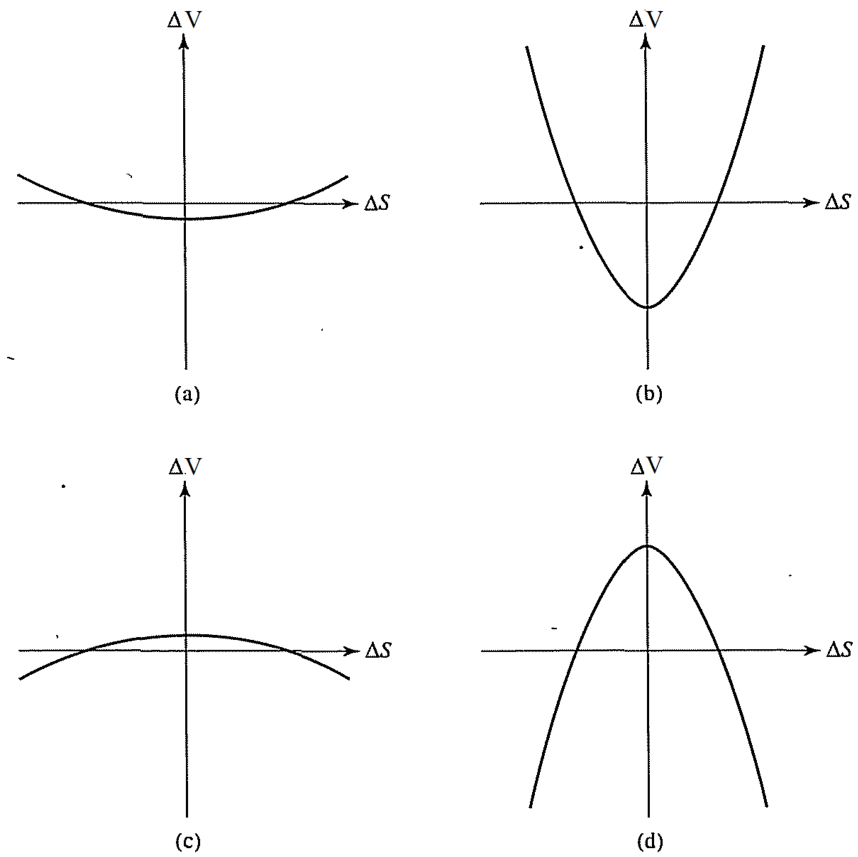
$$\Delta V = \boldsymbol{\Theta}\Delta t + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Gamma}\Delta S^2 \tag{3.29}$$

za delta-neutralan portfolio, gde je $\boldsymbol{\Theta}$ teta portfolija. Slika 3.5 pokazuje prirodu veze između ΔV i ΔS. Kada je gama pozitivno, teta ima tendeciju da bude negativno; u tom slučaju vrednost portfolija opada ako se S ne menja, ali se povećava ako postoje velike pozitivne ili velike negativne promene u ceni S. Kada je gama negativno, teta ima tendeciju da bude pozitivno, a tačno je i obrnuto; u tom slučaju vrednost portfolija raste

[5] U praksi se gama portfolija naziva zakrivljenost portfolija.

ako se S ne menja, ali se smanjuje ako postoje velike pozitivne ili velike negativne promene u ceni S. Sa povećanjem apsolutne vrednosti parametra gama, raste osetljivost vrednosti portfolija u odnosu na promenu S.

Primer. Pretpostavimo da gama delta-neutralnog portfolija sastavljenog od opcija na akciju, iznosi -10000. Jednačina (3.29) pokazuje da ako se cena podloge promeni za +2 ili -2 u kratkom vremenskom periodu, dolazi do neočekivanog pada u vrednosti portfolija za oko $0.5 \cdot 10000 \cdot 2^2 = 20000\$$.



Slika 3.5. Alternativni odnosi između ΔV i ΔS kod delta-neutralnog portfolija sa (a) malim pozitivnim gama, (b) velikim pozitivnim gama, (c) malim negativnim gama i (d) velikim negativnim gama

3.3.1. Gama-neutralan portfolio

Pozicija koja u podlozi ima gama jednako nula ne može se koristiti za promenu game od portfolija. Ono što se traži je pozicija u finansijskom instrumentu kao što je opcija koja nije linearno zavisna od podloge.

Pretpostavimo da delta-neutralan portfolio ima gama jednako Γ i da je gama opcije kojom se trguje Γ_T. Ako broj opcija, koji je dodat portfoliju iznosi w_T, tada je gama portfolija jednak

$$w_T\Gamma_T + \Gamma.$$

Dakle, pozicija u opciji kojom se trguje neophodno da bi portfolio bio gama-neutralan je $w_T = -\Gamma/\Gamma_T$. Uključivanjem opcije kojom se trguje verovatno će doći do promene delta portfolija, tako da pozicija u podlozi mora da se promeni da bi se očuvala delta-neutralnost. Imajmo na umu da je portfolio gama-neutralan samo u kratkom vremenskom periodu. Kako vreme prolazi, gama-neutralnost se može održati samo ako je pozicija u opciji kojom se trguje prilagođena tako da je uvek jednaka $-\Gamma/\Gamma_T$.

Pravljenje delta-neutralnog portfolija gama-neutralnim može se smatrati prvom korekcijom, zbog činjenice da se položaj u podlozi ne može kontinualno menjati kada se koristi delta hedžing. Delta-neutralnost pruža zaštitu od relativno malih promena cena akcija između rebalansa. Gama-neutralnost pruža zaštitu od većih promena u ceni akcija između rebalansa.

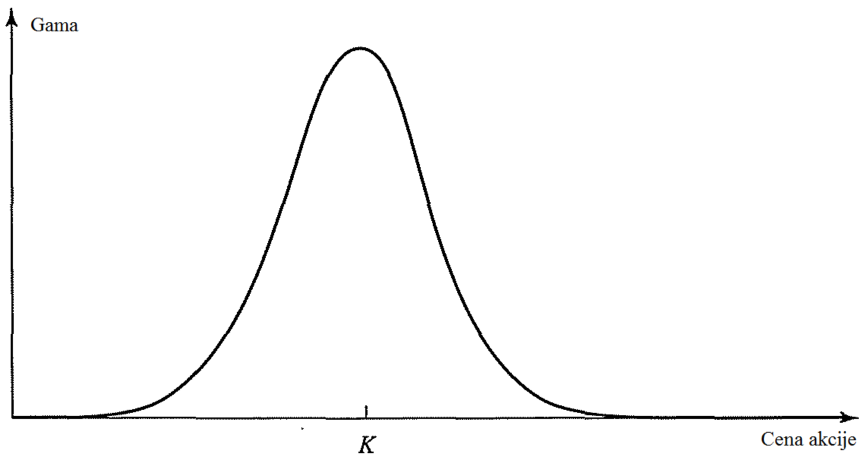
Primer. Pretpostavimo da je portfolio delta-neutralan i ima gama jednako -3000. Delta i gama od opcije kojom se posebno trguje su redom, 0.62 i 1.5. Portfolio može biti gama-neutralan dodavanjem kupljenih 3000/1.5 = 2000 call opcija. Međutim, delta portfolija će se zatim promeniti sa 0 na 2000 · 0.62 = 1240. Količina od 1240 jedinica podloge mora biti prodata iz portfolija kako bi ga sačuvali delta-neutralnim.

3.3.2. Gama od evropskih opcija na akcije i na druge podloge

Za evropsku call ili put opciju na akciju bez dividendi, gama je dato sa

$$\boldsymbol{\Gamma} = \frac{N'(d_1)}{S(0)\sigma\sqrt{T}},$$

gde je d_1 definisano izrazom (2.7) (za $t = 0$) i $N'(d_1)$ dato sa (3.25). Kada je u pitanju long pozicija, gama je uvek pozitivno i varira u odnosu na $S(0)$ na način prikazan na slici 3.6. Ponašanje gama u odnosu na vreme do dospeća za opciju u novcu, na novcu i van novca prikazano je na slici 3.7. Za opciju na novcu gama se povećava kada opada vreme do dospeća. Opcije na novcu sa kratkim vremenom do dospeća imaju veoma veliko gama što znači da je vrednost položaja kod opcije veoma osetljiva na skokove u ceni akcija.



Slika 3.6. Ponašanje gama opcije u odnosu na cenu akcije

Za evropsku call ili put opciju na akciju na koju se isplaćuje dividenda po stopi q, gama je

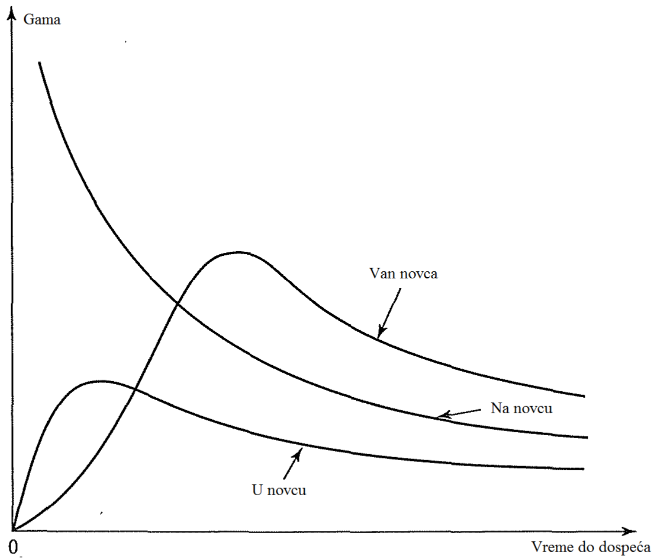
$$\boldsymbol{\Gamma} = \frac{N'(d_1)e^{-qT}}{S(0)\sigma\sqrt{T}},$$

gde je d_1 dato u (2.3). Kada je podloga berzanski indeks, q je jednako stopi po kojoj se isplaćuje dividenda na indeks. Kada je podloga valuta, q je jednako inostranoj bezrizičnoj kamatnoj stopi r_f.

Primer. Razmotrimo četvoromesečnu put opciju koja se odnosi na berzanski indeks. Trenutna vrednost indeksa je 305, ugovorena cena je 300, stopa po kojoj se obračunava dividenda je 3% godišnje, bezrizična kamatna stopa je 8% godišnje i volatilnost indeksa je 25% godišnje. Dakle, $S(0)$ = 305, K = 300, q = 0.03, r = 0.08 i σ = 0.25 i T = 4/12. Gama ove opcije jednako je

$$\frac{N'(d_1)e^{-qT}}{S(0)\sigma\sqrt{T}} = 0.00857.$$

Prema tome, povećanje indeksa za 1 (sa 305 na 306) povećava gama opcije za oko 0.00857.



Slika 3.7. Ponašanje game od opcije na akciju u odnosu na vreme do dospeća

3.4. Teta

Teta ($\boldsymbol{\Theta}$) portfolija sastavljenog od opcija je brzina promene vrednosti portfolija u odnosu na protok vremena dok svi ostali parametri ostaju isti. Teta se ponekad naziva vreme raspada portfolija. Za evropske call opcije na podlogu sa dividendom sa stopom

q, iz Black-Scholes formule za call opciju (2.1) izvodimo formulu za teta na način prikazan u poglavlju 3.1:

$$\boldsymbol{\Theta}(C) = -\frac{S(0)N'(d_1)\sigma e^{-qT}}{2\sqrt{T}} + qS(0)N(d_1)e^{-qT} - rKe^{-r(T)}N(d_2),$$

gde su d_1 i d_2 deinisani kao u (2.3) i (2.4) za $t = 0$, a $N'(d_1)$ dato je izrazom (3.25). Za evropske put opcije na akcije sa dividendom sa stopom q, formula za teta je

$$\boldsymbol{\Theta}(P) = -\frac{S(0)N'(d_1)\sigma e^{-qT}}{2\sqrt{T}} - qS(0)N(-d_1)e^{-qT} + rKe^{-rT}N(-d_2).$$

Za evropske call opcije bez dividendi, teta je

$$\boldsymbol{\Theta}(C) = -\frac{S(0)N'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} - rKe^{-rT}N(d_2),$$

gde su d_1 i d_2 definisani sa (2.7) i (2.8) ($t = 0$), a za put opcije bez dividendi teta je

$$\boldsymbol{\Theta}(P) = -\frac{S(0)N'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} + rKe^{-rT}N(-d_2).$$

Kada je u pitanju podloga koja je berzanski indeks, prve dve jednakosti su tačne za q koje je jednako prinosu dividendi na indeks. Ako je podloga valuta, jednačine su tačne ako je q inostrana bezrizična kamatna stopa, r_f.

U ovim formulama, vreme se meri u godinama. Najčešće, kada je teta navedeno, vreme se meri u danima, tako da je teta promena vrednosti portfolija u toku jednog dana dok svi ostali parametri ostaju isti. Teta možemo meriti ili po kalendarskom danu ili po danu trgovanja. Da bismo dobili teta po kalendarskom danu, formulu za teta treba podeliti sa 365 dana, a ako želimo teta po danu trgovanja, formulu delimo sa 252 dana[6].

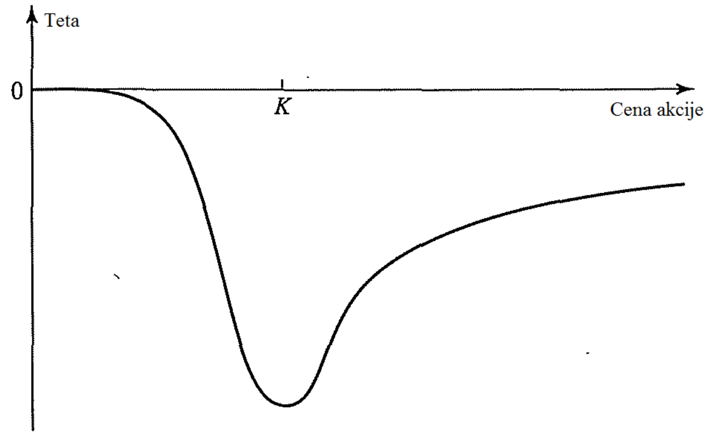
Primer. Posmatrajmo četvoromesečnu put opciju na berzanski indeks. Trenutna vrednost indeksa je 305, ugovorena cena je 300, prinos od dividendi je 3% na godišnjem nivou, bezrizična kamatna stopa je 8% godišnje i volatilnost indeksa na godišnjem nivou je 25%. Dakle, $S(0) = 0$, K = 300, q = 0.03, r = 0.08, σ = 0.25 i T = 0.33. Teta opcije je

[6] Godina se sastoji iz 252 dana trgovanja, tj. sedmica se sastoji od 5 dana; berza se otvara u ponedeljak ujutru, a zatvara u petak popodne.

$$-\frac{S(0)N'(d_1)\sigma e^{-qT}}{2\sqrt{T}} - qS(0)N(-d_1)e^{-qT} + rKe^{-rT}N(-d_2) = -18.15.$$

Teta je -18.15/365 = -0.0497 po kalendarskom danu ili -18.15/252 = -0.072 po danu trgovanja.

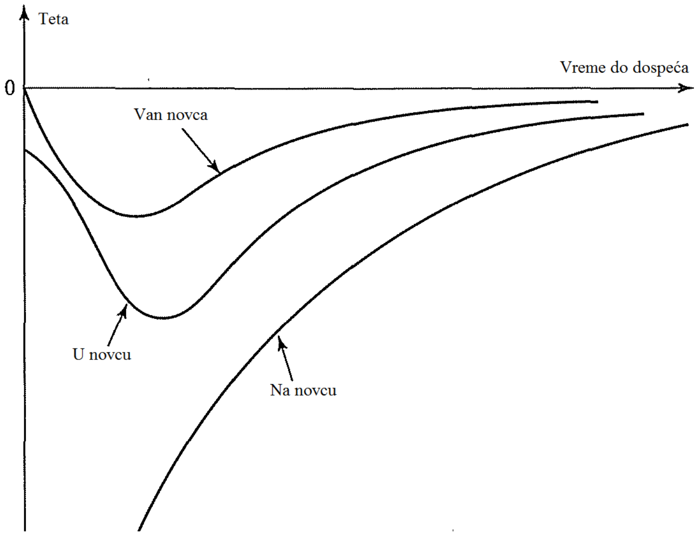
Teta od opcije je obično negativno[7]. To je zato što, kako vreme do dospeća opada, a sve drugo ostaje isto, opcija teži da postane manje vredna. Ponašanje teta za call opcije u odnosu na cenu akcije prikazano je na slici 3.8. Kada je cena akcije veoma mala, teta je blizu nule. Za call opciju na novcu, teta je veliko i negativno. Kako cena akcije postaje veća, teta teži $-rKe^{-rT}$. Slika 3.9. prikazuje tipično ponašanje teta za call opciju koja je u novcu, na novcu i van novca u odnosu na vreme do dospeća.



Slika 3.8. Ponašanje teta za evropsku call opciju u odnosu na cenu akcije

Teta nije isti tip hedžing parametra kao delta. Postoji neizvesnost oko buduće cene akcija, ali ne i neizvesnost oko proticanja vremena. Ima smisla zaštititi portfolija od promena u ceni podloge, ali nema smisla zaštititi portfolija od dejstva proticanja vremena. Uprkos tome, mnogi trgovci smatraju teta korisnom deskriptivnom statistikom za portfolio. To je zato što, videćemo kasnije, u delta-neutralnom portfoliju teta je približna zamena za gama.

[7] Izuzetak može biti kada je evropska put opcija na akciju bez dividendi u novcu. Drugi takav slučaj je kada je u novcu evropska call opcija na valutu sa veoma visokom kamatnom stopom.



Slika 3.9. Tipično ponašanje teta za evropsku call opciju u odnosu na vreme do dospeća

3.5. Veza između delta, gama i teta

Neka je $V(S,t)$ vrednost evropske opcije (bilo call, bilo put) na podlogu sa cenom S u trenutku t. $V(S,t)$ je beskonačno puta diferencijabilna funkcija po obe promenljive S i t (videti formule (2.1) i (2.2)).

Taylor-ov razvoj od $V(S,t)$ do kvadratnog člana[8] u okolini tačke (S,t) je

---

[8] Neka je $f: \boldsymbol{R^2} \to \boldsymbol{R}$ funkcija dve promenljive. Taylor-ov razvoj do linearnog člana funkcije $f(x,y)$ u okolini tačke $(a,b) \in \boldsymbol{R^2}$ je

$$f(x,y) = f(a,b) + (x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + (y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + O(|x-a|^2) + O(|y-b|^2),$$

kada $(x,y) \to (a,b)$, i ako su $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ neprekidne funkcije.

Taylor-ov razvoj do kvadratnog člana funkcije $f(x,y)$ u okolini tačke $(a,b) \in \boldsymbol{R^2}$ je

$$f(x,y) = f(a,b) + (x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + (y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + \frac{(x-a)^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)$$
$$+(x-a)(y-b)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) + \frac{(y-b)^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) + O(|x-a|^2) + O(|y-b|^2),$$

kada $(x,y) \to (a,b)$, i ako su treći parcijalni izvodi od $f(x,y)$ neprekidni.

$$V(S+dS,t+dt)=V(S,t)+dS\frac{\partial V}{\partial S}+dt\frac{\partial V}{\partial t}$$
$$+\frac{(dS)^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+\frac{(dt)^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}+(dS)(dt)\frac{\partial^2 V}{\partial S\partial t}$$
$$+O((dS)^3)+O((dt)^3). \tag{3.30}$$

Kod diskretizovanog modela za promenu cena akcija koji konvergira lognormalnom modelu ispunjen je sledeći uslov:

$$(dS)^2 \approx \sigma^2 S^2 dt.$$

Neka je $dV=V(S+dS,t+dt)-V(S,t)$. Ako zanemarimo sve članove reda većeg od dt iz (3.30), dobijamo

$$dV \approx \frac{\partial V}{\partial S}dS+\frac{\partial V}{\partial t}dt+\frac{(dS)^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \approx \frac{\partial V}{\partial S}dS+\frac{\partial V}{\partial t}dt+\frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dt. \tag{3.31}$$

Podsetimo se definicija grčkih slova

$$\Delta=\frac{\partial V}{\partial S},\ \ \boldsymbol{\Gamma}=\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\ \ \text{i}\ \ \boldsymbol{\Theta}=\frac{\partial V}{\partial t}.$$

Tada se aproksimativna formula (3.31) može zapisati kao

$$dV \approx \Delta dS+\boldsymbol{\Theta} dt+\frac{\sigma^2 S^2}{2}\boldsymbol{\Gamma} dt,$$

ili ekvivalentno,

$$dV-\Delta dS \approx \boldsymbol{\Theta} dt+\frac{\sigma^2 S^2}{2}\boldsymbol{\Gamma} dt\,. \tag{3.32}$$

Zbog jednostavnosti, pretpostavimo da podloga ne isplaćuje dividende.

U cilju zaštite od rizika derivata koje smo kupili moramo prodati Δ jedinica podloge. Ako je Π vrednost tako dobijenog portfolija, onda je $\Pi=V-\Delta S$. Imajmo u vidu da ako se vrednost podloge menja sa S na $S+dS$, onda se vrednost portfolija promeni za[9]:

[9] Ako na podlogu plaćamo dividende sa stopom q koja je neprekidna, onda je

$$d\Pi=dV-\Delta dS-q\Delta S dt.$$

$$
\begin{aligned}
d\Pi &\equiv \Pi(S+dS) - \Pi(S) \\
&= (V(S+dS) - \Delta(S+dS)) - (V(S) - \Delta S) \\
&= V(S+dS) - V(S) - \Delta dS \\
&= dV - \Delta dS.
\end{aligned}
$$

Tada, (3.32) postaje

$$d\Pi \approx \boldsymbol{\Theta} dt + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \boldsymbol{\Gamma} dt. \tag{3.33}$$

Razlog za prodaju Δ jedinica podloge portfolija je da vrednost portfolija bude neosetljiva na male promene u ceni podloge. Pošto je

$$\frac{\partial \Pi}{\partial S} = \frac{\partial V}{\partial S} - \Delta = 0,$$

sledi da je vrednost portfolija tokom malog perioda vremena dt koja odgovara promeni u ceni podloge sa S na $S + dS$ potpuno određena. Da bismo izbegli mogućnost arbitraže, vrednost ovog portfolija mora da raste po stopi koja je ista kao bezrizična kamatna stopa r, tj.

$$d\Pi = r\Pi dt. \tag{3.34}$$

Iz (3.33) i (3.34) zaključujemo da je

$$r\Pi \approx \boldsymbol{\Theta} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \boldsymbol{\Gamma}. \tag{3.35}$$

Napominjemo da je aproksimativna formula (3.35) zapravo jednakost za vanila evropske opcije za $q = 0$. Ova jednakost se može izvesti korišćenjem Black-Scholes formule.

3.6. Vega ν

Do sada smo implicitno pretpostavljali da je volatilnost sredstava podloge konstantna. U praksi se volatilnost menja tokom vremena. To znači da vrednost derivata podleže promenama kako zbog promene volatilnosti, tako i zbog promena u ceni podloge i zbog protoka vremena.

Vega[10] $\boldsymbol{\nu}$ portfolija koji se sastoji od derivata je brzina promene vrednosti portfolija u odnosu na volatilnost podloge:

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{\partial V}{\partial \sigma}.$$

Ako je vega veliko u apsolutnom smislu, vrednost portfolija je veoma osetljiva na male promene volatilnosti. Ako je vega malo u apsolutnom smislu, promene volatilnosti imaju relativno mali uticaj na vrednost portfolija.

Pozicija u podlozi ima vega jednako nuli. Međutim, vega portfolija se može menjati dodavanjem pozicije pomoću trgovine opcijama. Ako je $\boldsymbol{\nu}$ vega portfolija i $\boldsymbol{\nu}_T$ vega opcije kojom se trguje, pozicija $-\boldsymbol{\nu}/\boldsymbol{\nu}_T$ u opciji kojom se trguje čini portfolio trenutno vega-neutralnim. Nažalost, portfolio koji je gama-neutalan, u opštem slučaju neće biti i vega-neutralan, i obrnuto. Ako obezbeđenje od rizika zahteva da portfolio bude i gama-neutralan i vega-neutralan, onda mora da se koristiti najmanje dva trgovačka derivata, koja zavise od podloge.

Primer. Razmotrimo portfolio koji je delta-neutralan, sa gama od -5000 i vega od -8000. Opcija kojom se trguje ima gama jednako 0.5, vega 2 i delta 0.6. Portfolio može biti vega-neutralan dodavanjem kupljenih 4000 opcija kojima se trguje. To će povećati deltu na 2400, pa ćemo prodati 2400 jedinica podloge kako bi održali delta-neutralnost. Gama portfolija će se promeniti sa -5000 na -3000.

Da bi portfolio bio gama-neutralan i vega-neutralan, pretpostavimo da postoji druga opcija kojom trgujemo sa gama jednako 0.8, vega jednako 1.2 i delta jednako 0.5. Ako su w_1 i w_2 količine ove dve opcije kojima trgujemo uključenih u portfolio, zahtevamo da važi

$$-5000 + 0.5w_1 + 0.8w_2 = 0 \quad \text{i}$$

$$-8000 + 2w_1 + 1.2w_2 = 0.$$

Rešenje ovih jednačina je w_1 = 400, w_2 = 6000. S toga, portfolio može biti gama-neutralan i vega-neutralan dodavanjem 400 prvih opcija i 6000 drugih opcija kojima trgujemo. Delta

[10] Vega je ime dato jednom od grčkih slova, ali to nije slovo grčkog alfabeta. Oznaka koja se najčešće koristi je ni (ν), mada se koriste i slova lambda (λ), kao i kappa (κ).

portfolija nakon dodavanja opcija je 400·0.6 + 6000·0.5 = 3240. Dakle, 3240 jedinica podloge mora se prodati da bi se održala delta-neutralnost.

Za evropsku call ili put opciju bez dividendi, vega je dato sa

$$\boldsymbol{\nu} = S(0)\sqrt{T}N'(d_1),$$

gde je d_1 definisano u (2.7) (za $t = 0$), a $N'(d_1)$ u (3.25). Za evropsku call ili put opciju koja se odnosi na podlogu na koju se plaća dividenda po stopi q, vega je

$$\boldsymbol{\nu} = S(0)\sqrt{T}N'(d_1)e^{-qT},$$

gde je d_1 dato izrazom (2.3). Kada je podloga berzanski indeks, q je jednako prinosu dividendi na indeks. Kada je podloga valuta, q je jednako inostranoj bezrizičnoj kamatnoj stopi, r_f.

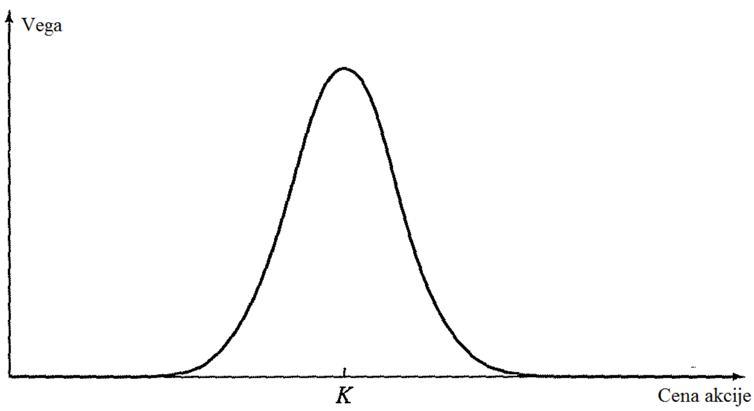
Vega long pozicije evropske ili američke opcije je uvek pozitivno. U opštem slučaju, ponašanje vega u odnosu na cenu akcije $S(0)$ prikazano je na slici 3.10.

Primer. Razmotrimo četvoromesečnu put opciju koja se odnosi na berzanski indeks. Trenutna vrednost indeksa je 305, ugovorena cena je 300, stopa po kojoj se obračunava dividenda je 3% godišnje, bezrizična kamatna stopa je 8% godišnje i volatilnost indeksa je 25% godišnje. Dakle, $S(0)$ = 305, K = 300, q = 0.03, r = 0.08 i σ = 0.25 i T = 4/12.

Vega opcije je

$$S(0)\sqrt{T}N'(d_1)e^{-qT} = 66.44.$$

Prema tome, 1% povećanja volatilnosti (sa 25% na 26%) povećava vrednost opcije za oko 0.6644 (0.01 · 66.44).



Slika 3.10. Ponašanje vega u odnosu na cenu akcije

Izračunavanje vega iz Black-Scholes modela može izgledati čudno, jer jedna od pretpostavki tog modela je da je volatilnost konstantna. Teoretski bi bilo tačnije izračunavati vega iz modela u kom se pretpostavlja da je volatilnost stohastička. Međutim, ispostavlja se da je vega izračunata iz modela sa stohastičkom volatilnosti veoma slična vegi iz Black-Scholes modela, tako da praksa izračunavanja vega iz modela sa konstantnom volatilnošću dosta dobro funkcioniše (više o tome može se videti u radovima [7] i [8]).

Gama neutralnost štiti od velikih promena u ceni podloge između hedž rebalansa. Vega neutralnost štiti od promene promenljive σ.

3.7. Ro $\boldsymbol{\rho}$

Ro $\boldsymbol{\rho}$ portfolija sastavljenog od opcija je brzina promene vrednosti portfolija u odnosu na kamatnu stopu:

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{\partial V}{\partial r}.$$

Ro ($\boldsymbol{\rho}$) meri osetljivost vrednosti portfolija na promene kamatnih stopi. Za evropsku call opciju bez dividendi, ro je

$$\boldsymbol{\rho}(C) = KTe^{-rT}N(d_2),$$

gde je d_2 definisano kao u (2.8) (za $t = 0$). Za evropske put opcije, ro je

$$\boldsymbol{\rho}(P) = -KTe^{-rT}N(-d_2).$$

Ove formule važe za evropske call i put opcije koje se odnose na akcije i berzanske indekse sa dividendom, a d_2 je definisano kao u (2.4).

Primer. Razmotrimo četvoromesečnu put opciju koja se odnosi na berzanski indeks. Trenutna vrednost indeksa je 305, ugovorena cena je 300, stopa po kojoj se obračunava dividenda je 3% godišnje, bezrizična kamatna stopa je 8% godišnje i volatilnost indeksa je 25% godišnje. Dakle, $S(0) = 305$, $K = 300$, $q = 0.03$, $r = 0.08$ i $\sigma = 0.25$ i $T = 4/12$. Ro opcije je

$$\boldsymbol{\rho} = -KTe^{-rT}N(-d_2) = -42.6.$$

To znači da promena za 1% (0.01) u bezrizičnoj kamatnoj stopi (sa 8% na 9%) smanji vrednost opcije za 0.426 (= 0.01 · 42.6).

U slučaju opcija na valutu, postoje dva parametra ro koja odgovaraju dvema kamatnim stopama. Ro koje odgovara domaćoj kamatnoj stopi za evropsku call opciju na valutu je

$$-Te^{-r_f T}S(0)N(d_1),$$

a za evropsku put opciju ro je

$$Te^{-r_f T}S(0)N(-d_1),$$

gde je d_1 dato izrazom (2.7) (za $t = 0$).

Osim u ekstremnim okolnostima, vrednost opcije je manje osetljiva na promene bezrizičnih kamatnih stopa od promena drugih parametara. Zbog toga je ro najmanje korišćeno grčko slovo.

Zaključak

Finansijske institucije u svetu nude svojim klijentima razne pakete opcija. Često opcije ne odgovaraju standardizovanim paketima kojima se trguje na berzi. Finansijske institucije tada svoje izlaganje suočavaju sa problemom hedžinga.

Delta (Δ) opcije je brzina promene njene cene u odnosu na promenu cene podloge. Delta hedžing podrazumeva stvaranje takve pozicije u kojoj je delta jednako nula (ponekad se naziva delta-neutralna pozicija). Pošto je delta podloge 1.0, jedan od načina zaštite u slučaju kada se poseduje opcija na tu podlogu je zauzimanje pozicije -Δ u podlozi. Delta opcije menja se tokom vremena. To znači da se položaj u podlozi mora često prilagođavati.

Kada je opcija učinjena delta-neutralnom sledeći korak je posmatranje gama ($\boldsymbol{\Gamma}$). Gama od opcije je brzina promene delte u odnosu na cenu podloge. To je mera zakrivljenosti odnosa između cene opcije i cene podloge. Kako bi zaštitili promenu vrednosti portfolija sastavljenog od opcija od većih promena u ceni akcija, potrebno je portfolio učiniti gama-neutralnim. Delta i gama hedžing su zasnovani na pretpostavci da je volatilnost podloge konstantna. U praksi, volatilnost se menja sa vremenom.

Vega ($\boldsymbol{\nu}$) opcije, ili portfolija meri brzinu promene vrednosti opcije ili portfolija u odnosu na volatilnost. Trgovac koji želi da zaštiti opciju od nestabilnosti dovodi je u poziciju u kojoj je vega-neutralna. Kao i sa postupkom stvaranja gama-neutralnosti, ovaj postupak obično podrazumeva uključivanje neutralne trgovačke opcije. Ako trgovac želi da postigne i vega-neutralnost i gama-neutralnost, obično je neophodno da se trguje sa dve opcije.

Dve druge mere rizika položaja opcije su teta i ro. Teta ($\boldsymbol{\Theta}$) meri brzinu promene vrednosti opcije u odnosu na protok vremena, dok sve ostalo ostaje konstantno. Ro ($\boldsymbol{\rho}$) meri brzinu promene vrednosti opcije u odnosu na kamatnu stopu, dok sve ostalo ostaje konstantno.

U praksi, trgovci obično rebalansiraju svoja portfolija najmanje jednom dnevno u održavanju delta-neutralnosti. Obično nije izvodljivo da se održi gama-neutralnost i vega-neutralnost na redovnoj osnovi. Po pravilu trgovci prate vrednosti grčkih slova. Ako rizik od gubitka postane preveliki, preuzimaju se korektivne mere kako bi se on smanjio.

U radu su prikazane mere zaštite portfolija sastavljenog od evropskih opcija. Pri tom su pretpostavljeni idealni uslovi trgovanja: konstantna kamatna stopa, nema troškova novčanih transakcija, nema arbitraže, postoji mogućnost kupovine i prodaje opcija u svakom trenutku, kao i konstantna volatilnost modela. U praksi se koriste Monte Karlo simulacije i numeričke metode u cilju pravljenja modela sa uslovima sličnim onima koji vladaju na tržištu, na osnovu kojih ocenjujemo vrednost parametara koji utiču na vrednost finansijskih derivata (vidi [13], [14], [15]). Na tržištu su pored evropskih opcija prisutne valutne opcije i američke opcije (vidi [16], [17], [18]). Cene opcija modeliraju se Braunovim kretanjem (vidi [1] - [8]), mada postoje modeli kod kojih se cene opcija određuju pomoću gama procesa, Lévy-jevih procesa i difuznih procesa (vidi [10], [11], [12]). Sve više pažnje usmereno je na ponašanje parametara ovakvih modela. U poslednjih petnaest godina na finansijskom tržištu pojavile su se tzv. egzotične opcije koje imaju nešto složenije isplate i karakteristike u odnosu na vanila opcije (vidi [9]). Neke od najčešćih vrsta egzotičnih opcija su granične opcije, look-back opcije, azijske opcije i teme su mnogih istraživanja (vidi [19], [20], [21]).

Literatura

[1] Dan Stefanica, *A Primer for the Mathematics of Financial Engineering*, Baruch College, FE PRESS, New York, 2008.

[2] John C. Hull, *Options, Futures, and Other Derivatives*, Pearson Prentice Hall, New Jersey, Sixth Edition, 2006.

[3] Black, Fischer, and Scholes, Myron, *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economy, 81 (1973): 637-59.

[4] Merton, Robert C., *Theory of Rational Option Pricing,* Bell Journal of Economics and Management Science, 4 (1973): 141-83.

[5] Claudio Albanese, Giuseppe Campolieti, *Advanced Derivatives Pricing and Risk Management – Theory, Tools and Hand-On Programming Application*, Elsevier Academic Press, London, 2006.

[6] Steven E. Shreve, *Stochastic Calculus for Finance II – Continuos-Time Models*, Springer, New York, 2004.

[7] J. C. Hull, A. White, *The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities*, Journal of Finance 42 (1987), 281 – 300.

[8] J. C. Hull, A. White, *An Analysis of the Bias in Option Pricing Caused by a Stochastic Volatility,* Advances in Futures and Options Research 3 (1988), 27- 61.

[9] Peter G. Zhang, *Exotic Options*, World Scientific Publishing , London, Second Edition, 1998.

[10] Kawai Reiichiro, Takeuchi Atsushi, *Greeks formulas for an asset price model with model with gamma processes,* Mathematical Finance 21 (2011), no. 4, 723-742.

[11] Jeannin, Marc; Pistorius, Martijn, *A transform approach to compute prices and Greeks of barrier options driven by a class of Lévy processes,* Quantitative Finance 10 (2010), no. 6, 629-644.

[12] Wang, Xiao-Tian, *Scaling and long-range dependence in option pricing I:pricing European option with transaction costs under the fractional Black-Scholes model,* Journal of Physics A: Mathematical and General 389 (2010), no. 3, 438-444.

[13] Jasra, Ajay; Del Moral, Pierre, *Sequential Monte Carlo methods for option pricing,* Stochastic Analysis Applied 29 (2011), no. 2, 292-316.

[14] Lyuu, Yuh-Dauh; Teng, Huei-Wen, *Unbiased and efficient Greeks of financial options,* Finance Stoch 15 (2011), no. 1, 141-181.

[15] Hager, Corinna; Hüeber, Stefan; Wohlmuth, Barbara, *Numerical techniques for the valuation of basket options and their Greeks,* Journal of Computational Finance 13 (2010), no. 4, 3-33.

[16] J. C. Hull, A. White, *Hedging the Risks from Writing Foreign Currency Options,* Journal of of International Money and Finance 6 (1987), 131-52.

[17] Xu, Weijun; Xu, Weidong; Li, Hongyi; Zhang, Weiguo, *A study of Greek letters of currency option under uncertainty environments,* Mathematical and computer modeling 51 (2010), no. 5-6, 670-681.

[18] Wang, Yang; Caflisch, Russel, *Pricing and hedging American-style options: a simple simulation-based approach,* Journal of Computational Finance 13 (2010), no. 4, 95-125.

[19] J. Ndogmo, D. Ntwiga, *High-order accurate implicit methods for barrier option pricing,* Applied Mathematics and Computation 218 (2011), no. 5, 2210-2224.

[20] Pospisil, Libor; Vecer, Jan, *Portfolio sensitivity to changes in the maximum and the maximum drawdown,* Quantitative Finance 10 (2010), no. 6, 617-627.

[21] Deelstra, Griselda; Petkovic, Alexandre; Vanmaele, Michèle, *Pricing and hedging Asian basket spread options,* Journal of Computational and Applied Mathematics 233 (2010), no. 11, 2814-2830.