Симплектоморфизми и флукс-хипотеза

Милан Перић
ментор: др Јелена Катић
Математички факултет
Универзитет у Београду

Садржај

1 Увод

Симплектичке структуре су настале у проучавању класичних механичких система (као што је рецимо планетарни систем) и дела класичне симплектичке геометрије су настала у покушајима разумевања оваквих система. Из оваквих проучавања се развила савремена симплектичка теорија. У уводном поглављу покушаћемо да скицирамо како се из проучавања варијационих проблема дошло до Хамилтонових система диференцијалних једначина и до основних појмова симплектичке геометрије који ће у каснијем делу рада бити формалније дефинисани.

Посматрајмо тачку x у Еуклидском простору R^n која се креће трајекторијом $x(t)$. Нека је $L(t, x, v)$ два пута диференцијабилна функција $2n+1$ променљиве $(t, x_1, \ldots, x_n, v_1, \ldots, v_n)$ где под $v \in R^n = T_x R^n$ подразумевамо тангентне векторе у тачки $x \in R^n$ који представљају брзину $\dot{x}$. Размотримо проблем минимализације дејства интеграла:

$$I(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x, \dot{x}) dt$$

на простору путева $x \in C^1([t_0, t_1], R^n)$ који задовољавају граничне услове:

$$x(t_0) = x_0 \qquad x(t_1) = x_1.$$

Овде функцију L називамо Лагранжијаном овог варијационог проблема. Непрекидно-диференцијабилан пут $x : [t_0, t_1] \to R^n$ називамо минималним ако је $I(x) \leq I(x + \xi)$ за сваку варијацију $\xi \in C^1([t_0, t_1], R^n)$ са условима $\xi(t_0) = \xi(t_1) = 0$.

Став 1. *Минимални пут $x : [t_0, t_1] \to R^n$ је решење Ојлер-Лагранжових једначина:*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v} = \frac{\partial L}{\partial x}, \tag{1}$$

где су x и v n димензиони вектори.

Доказ:
Пресликавање $I : C^1([t_0, t_1]), R^n) \to R$ је диференцијабилно ако је:

$$I(x + h) - I(x) = L_x h + O(h^2),$$

где је L_x линеарно пресликавање. Означимо са $h = h(t)$ прираштај на простору путева и применимо Тејлорову формулу:

$$I(x+h) - I(x) = \int_{t_0}^{t_1} (L(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) - L(t, x, \dot{x}))dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} (\frac{\partial L}{\partial x}h + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{h})dt + \int_{t_0}^{t_1} O(h^2) \sim \int_{t_0}^{t_1} (\frac{\partial L}{\partial x}h + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{h})dt.$$

Даље узевши да је $u = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ и $dv = \dot{h}dt$ примењујемо парцијалну интеграцију и добијамо:

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial x}hdt + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}h\Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}hdt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)hdt + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}h\Big|_{t_0}^{t_1}.$$

Како имамо услов $h(t_0) = h(t_1) = 0$ последњи сабирак је једнак нули и важи тврђење.

Q.E.D.

Ако су задовољени Лежандрови услови:

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial v_j \partial v_k}\right) \neq 0 \tag{2}$$

тада смо у претходном ставу дефинисали регуларан систем диференцијалних једначина другог реда n променљивих $x_1, \dots x_n$. Овде је корисно увести нове променљиве:

$$y_k = \frac{\partial L}{\partial v_k}(t, x, v).$$

Ако је x решење система добијамо да важи:

$$\dot{y_k} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_k} = \frac{\partial L}{\partial x_k}.$$

Дефиниција 1. *Ако имамо функцију $f : V \to R$, где је V коначно димензиони векторски простор, за $p \in V^*$ дефинишемо Лежандрову трансформацију са:*

$$f^* : V^* \to R \qquad f^*(p) = \sup_{x \in V}(p(x) - f(x)).$$

Ако имамо случај конвексне функције $f : R^n \to R$ за фиксирано $p = \frac{\partial f}{\partial x}$ једначина $x = x(p)$ се може решити на основу теореме о инверзној функцији и добити функција од p. Тада је Лежандрова трансформација:

$$f^*(p) = xp - f(x(p)).$$

Применом Лежандрових трансформација преводимо систем диференцијалних једначина другог реда са n променљивих у систем диференцијалних једначина првог реда са $2n$ променљивих и Ојлер-Лагранжов систем једначина се трансформише у Хамилтонов систем:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} \qquad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \tag{3}$$

односно важи став:

Став 2. *Нека је* $x : [t_0, t_1] \to R^n$ *непрекидно-диференцијабилан пут и* $y : [t_0, t_1] \to R^n$ *нове променљиве које смо раније увели. Тада је x решење Ојлер-Лагранжових једначина (1) ако и само ако су x и y решења Хамилтонових једначина (3).*

Доказ:
Диференцирајмо једначину:

$$H(t, x, y) = y\dot{x} - L(t, x, \dot{x}).$$

Диференцијал леве стране једнакости је:

$$dH = \frac{\partial H}{\partial y}dy + \frac{\partial H}{\partial x}dx + \frac{\partial H}{\partial t}dt,$$

док диференцирањем десне стране добијамо:

$$dH = yd\dot{x} + \dot{x}dy - \frac{\partial L}{\partial t}dt - \frac{\partial L}{\partial x}dx - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}d\dot{x} = \dot{x}dy - \frac{\partial L}{\partial t}dt - \frac{\partial L}{\partial x}dx.$$

Изједначавајући ове изразе добијамо:

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \dot{x} \qquad \frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = -\dot{y}.$$

Q.E.D.

Под условима:

$$\det\left(\frac{\partial^2 H}{\partial y_j \partial y_k}\right) \neq 0$$

могућа је и инверзна трансформација, тј. Хамилтонов систем се може превести у систем Ојлер-Лагранжових једначина одговарајућег варијационог проблема.

Иако су променљиве y_k формално уведене оне имају природну физичку интерпретацију као координате момента.

Пример: (Кеплеров проблем)
Посматрајмо систем диференцијалних једначина:

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial x_k}$$

где је $y = \dot{x} = v$ и Хамилтонијан је збир кинетичке и потенцијалне енергије:

$$H = \frac{1}{2}|y|^2 + V(x)$$

док је Лагранжијан њихова разлика:

$$L = \frac{1}{2}|v|^2 - V(x).$$

Кеплеров проблем је специјални случај горњих једначина за $n = 3$ и потенцијал $V(x) = -\frac{1}{|x|}$ и њиме се у класичној механици описује пут планета око Сунца или кретање елементарног наелектрисања око фиксног центра.

Можемо дати и мало друкчији приступ који доводи до варијационог принципа. Нека је L Лагранжијан који задовољава Лежандрове услове (2) и $H(t, x, y)$ одговарајућа Хамилтонова функција и нека су дате диференцијабилне криве $x : [t_0, t_1] \to R^n$ и $y : [t_0, t_1] \to R^n$ као и раније и $z(t) = (x(t), y(t))$. Тада се интеграл $I(x)$ слаже са интегралом дејства $\Phi_H(z)$ дефинисаним са:

$$\Phi_H(z) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\langle y, \dot{x}\rangle - H(t, x, y)\right) dt.$$

Ово је интеграл форме:

$$\lambda_H = \sum_{j=1}^{n} y_j dx_j - H dt$$

дуж криве $z : [t_0, t_1] \to R^n$. Он одговара интегралу $I(x)$, али је $\Phi_H(z)$ дефинисан за сваки пут z у фазном простору R^{2n} чак и када нису испуњени услови недегенерисаности. На основу следећег става видимо да Хамилтонове једначине могу бити директно изведене из принципа најмањег дејства.

Став 3. *Крива $z : [t_0, t_1] \to R^{2n}$ је критична тачка Φ_H ако и само ако су задовољене Хамилтонове једначине.*

Доказ:
Нека је $z_s = (x_s, y_s)$ једнопараметарска фамилија кривих и потражимо изводе за $s = 0$:

$$\xi = \frac{\partial}{\partial s} x_s\big|_{s=0} \qquad \mu = \frac{\partial}{\partial s} y_s\big|_{s=0} \qquad \widehat{\Phi_H} = \frac{\partial}{\partial s}\Phi_H(z_s)\big|_{s=0}.$$

Диференцирањем под знаком интеграла и парцијалном интеграцијом добијамо:

$$\widehat{\Phi_H} = \int_{t_0}^{t_1} \langle \mu, \dot{x} - \partial_y H \rangle \, dt - \int_{t_0}^{t_1} \langle \dot{y} + \partial_x H, \xi \rangle \, dt + \langle y(t_1), \xi(t_1) \rangle - \langle y(t_0), \xi(t_0) \rangle$$

и како посматрамо варијације са фиксним крајевима имамо $\xi(t_0) = \xi(t_1) = 0$ и последња два члана у изразу су једнака нули. Добијамо да се два интеграла анулирају за свако ξ и μ.

Q.E.D.

У кординатама $z = (x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_n)$ Хамилтонов систем може бити записан као:

$$J_0 \dot{z} = \nabla H_t(z)$$

где је $H_t(z) = H(t, z)$, ∇H_t означава градијент H_t, а J_0 матрицу $2n \times 2n$:

$$J_0 = \left[\begin{array}{cc} 0 & -E \\ E & 0 \end{array} \right],$$

где смо са E означили јединичну матрицу. Очигледно J_0 представља ротацију за $\pi/2$ у свакој од $O_{x_k y_k}$ равни и $J_0^2 = -E$.
Векторско поље:

$$X_{H_t} = -J_0 \nabla H_t : R^{2n} \to R^{2n}$$

називамо Хамилтоново векторско поље придружено функцији H_t или симплектички градијент H_t.

Задајмо временски зависну Хамилтонову функцију $R \times R^n \to R^n : (t, x, y) \mapsto H_t(x, y)$ и означимо са ϕ_H^{t,t_0} решење пресликавања заданог Хамилтоновим једначинама. Дефинисано је са $\phi_H^{t,t_0}(z_0) = z(t)$ где је $z(t)$ јединствено решење Хамилтонових једначина са почетним условом $z(t_0) = z_0$. Област дефинисаности ϕ_H^{t,t_0} је отворени скуп $\Omega_{t_0,t}$ свих $z_0 \in R^{2n}$ за које постоји решење на временском интервалу $[t_0, t]$. Дифеоморфизам $\phi_H^{t,t_0} : \Omega_{t_0,t} \to \Omega_{t,t_0}$ задовољава:

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi_H^{t,t_0} = X_{H_t} \circ \phi_H^{t,t_0}$$

$$\phi_H^{t_2,t_1} \circ \phi_H^{t_1,t_0} = \phi_H^{t_2,t_0} \qquad \phi_H^{t_0,t_0} = id.$$

У временски независном случају $H_t \equiv H$ нормализујемо стављајући $t = 0$ и добијену фамилију дифеоморфизама $\phi_H^t = \phi_H^{t,0}$ називамо Хамилтонов ток генерисан са H.

Дифеоморфизам $\psi : R^{2n} \to R^{2n}$ називамо симплектоморфизам ако је:

$$d\psi(\zeta)^T J_0 d\psi(\zeta) = J_0 \tag{4}$$

за свако $\zeta \in R^{2n}$. Као што име сугерише симплектоморфизми чувају симплектичку структуру (видети (5)). Прво ћемо показати да чувају класу Хамилтонових диференцијалних једначина.

Став 4. *Нека је $\psi : R^{2n} \to R^{2n}$ симплектоморфизам и нека је $\zeta(t)$ решење Хамилтонових диференцијалних једначина:*

$$\dot{\zeta} = X_{H \circ \psi}(\zeta).$$

Тада је $z(t) = \psi(\zeta(t))$ решење Хамилтоновог система, тј.:

$$X_{H \circ \psi} = \psi^* X_H,$$

где је $\psi^* X_H(a) = d\psi^{-1}(a) X_H(\psi(a))$ pull − back векторског поља X_h.

Доказ:
Једноставно се види да за сваки дифеоморфизам ψ на R^{2n} и сваку функцију H важи:

$$\nabla(H \circ \psi)(p) = d\psi(p)^T \nabla H(\psi(p)).$$

Из претпоставки става добијамо:

$$d\psi(\zeta)^T \nabla H(\psi(\zeta)) = \nabla(H \circ \psi)(\zeta)$$
$$= J_0\dot{\zeta} = d\psi(\zeta)^T J_0 d\psi(\zeta)\dot{\zeta} = d\psi(\zeta)^T J_0 \dot{z}.$$

Множењем са $(d\psi(\zeta)^T)^{-1}$ добијамо да је $\dot{z} = X_H(z)$ и следи закључак става.

Q.E.D.

Став 5. *Кад год је дефинисан ϕ_H^{t,t_0} је симплектоморфизам.*

Доказ:
Нека је $z_0 \in R^{2n}$ и дефинишимо $z(t) = \phi_H^{t,t_0}(z_0)$ и:

$$\Phi(t) = d\phi_H^{t,t_0}(z_0) \in R^{2n\times 2n}.$$

Тада је за свако $\zeta_0 \in R^{2n}$ функција $\zeta(t) = \Phi(t)\zeta_0$ решење једначине:

$$\dot{\zeta} = dX_{H_t}(z)\zeta.$$

Како је $J_0 X_{H_t} = \nabla H_t$ следи:

$$J_0\dot{\Phi}(t) = S(t)\Phi(t) \qquad \Phi(t_0) = E,$$

где је $S(t) \in R^{2n\times 2n}$ симетрична матрица:

$$S_{jk}(t) = \frac{\partial^2 H_t}{\partial z_j \partial z_k}(\phi_H^{t,t_0}(z_0)).$$

Треба да покажемо да је $\Phi^T J_0 \Phi = J_0$. Ово је очигледно тачно за $t = t_0$, а тада је тачно и за произвољно t јер:

$$\frac{d}{dt}\Phi^T J_0 \Phi = \Phi^T J_0 \dot{\Phi} + \dot{\Phi}^T J_0 \Phi = \Phi^T (S - S^T)\Phi = 0.$$

Q.E.D.

Најједноставнија класа симплектоморфизама су линеарни. Ако радимо у Еуклидском простору са канонском базом можемо идентификовати линеарно пресликавање са матрицом $\Psi \in R^{2n\times 2n}$. Таква матрица се назива симплектичка ако задовољава:

$$\Psi^T J_0 \Psi = J_0.$$

То значи да је одговарајуће линеарно пресликавање $\Psi : R^{2n} \to R^{2n}$ симплектоморфизам. Општије дифеоморфизам $\psi : R^{2n} \to R^{2n}$ је симплектоморфизам ако и само ако му је Јакобијан $d\phi(z)$ симплектичка матрица за свако $z \in R^{2n}$. Симплектичке матрице чине групу коју означавамо са $Sp(2n) = Sp(2n, R)$.

Став 6. *Ако су Φ и Ψ симплектичке матрице тада су и $\Phi\Psi$, Ψ^{-1} и Ψ^T такође симплектичке матрице.*

Став се лако доказује једноставним множењима идентитета из претпоставке. Као последицу видимо да симплектичке матрице заиста чине групу. Ако посматрамо матрицу у облику:

$$\Psi = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

где су A, B, C, D реалне $n \times n$ матрице закључујемо да је Ψ симплектичка ако и само ако је њен инверз облика:

$$\Psi^{-1} = \begin{bmatrix} D^T & -B^T \\ -C^T & A^T \end{bmatrix}$$

тј. ако су задовољене једнакости:

$$AB^T = BA^T \qquad CD^T = DC^T \qquad AD^T - BC^T = E.$$

Одавде лако следи да је матрица 2×2 симплектичка ако и само ако јој је детерминанта једнака 1. За матрице већих димензија може се показати да је детерминанта такође 1, али обрат тврђења не важи.

Посматрајмо диференцијалну 2-форму:

$$\omega_0 = \sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge dy_j \tag{5}$$

Користећи запис $\zeta = (\xi, \mu)$ и $\zeta' = (\xi', \mu')$ где су $\xi, \xi', \mu, \mu' \in R^n$ можемо писати:

$$\omega(\zeta, \zeta') = \sum_{j=1}^{n} (\xi_j \mu_j' - \xi_j' \mu_j) = \langle J_0 \zeta, \zeta' \rangle = -\zeta^T J_0 \zeta'.$$

Овде посматрамо ω_0 као кососиметричну, билинеарну форму на тангентном простору $T_z R^{2n} = R^{2n}$. Сви досадашњи појмови могу бити описани у терминима 2-форме ω_0. На пример ψ је симплектоморфизам ако и само ако је :

$$\psi^* \omega_0 = \omega_0$$

и Хамилтоново векторско поље X_H је одређено идентитетом:

$$i(X_H)\omega_0 = dH,$$

где је унутрашње множење дефинисано са:

$$i(X_H)\omega(\xi) = \omega(X_H, \xi).$$

Овакав приступ је доминантан у савременој симплектичкој теорији и ми ћемо га се држати у наредним поглављима.

Из претходне дискусије следи да сваки симплектоморфизам ψ чува запреминску форму:

$$dx_1 \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dy_n = \frac{1}{n!} \omega_0 \wedge \cdots \wedge \omega_0$$

јер ψ^* пролази кроз клинасти производ. Тј. важи:

$$\det d\psi(z) = 1.$$

Одавде видимо да симплектичке матрице имају детерминанту један. За $n > 1$ конструисани су примери дифеоморфизама који чувају запремину, а нису симплектички.

Нека $z(t) = (x(t), y(t))$ задовољава Хамилтонове једначине у случају када је $H_t \equiv H : R^{2n} \to R$ временски независно. Тада је:

$$\frac{d}{dt} H \circ z = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial x_j} \dot{x}_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial y_j} \dot{y}_j = 0. \tag{6}$$

Ово значи да је Хамилтонова функција H константна дуж решења система. Ово својство се уобичајено назива Закон очувања енергије. Геометријски значи да је скуп нивоа H инваријантан у односу на Хамилтонов ток.

Функција $F : R^{2n} \to R$ се назива интеграл за Хамилтонов систем (6) ако је константна дуж решења система. Сама Хамилтонова функција је интеграл. Ако је $z(t)$ решење система тада је:

$$\frac{d}{dt}F \circ z = (\nabla F)^T \dot{z} = -(\nabla F)^T J_0 \nabla H = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_j} \frac{\partial H}{\partial y_j} - \frac{\partial F}{\partial y_j} \frac{\partial H}{\partial x_j} \right).$$

Последњи израз се назива Пуасонова заграда од F и H и означава са:

$$\{F, H\} = -(\nabla F)^T J_0 \nabla H.$$

Може се показати да важи:

$$\{F, H\} = \omega_0(X_F, X_H)$$

Следи да је F интеграл Хамилтоновог система ако и само ако је $\{F, H\} = 0$. Једна од важних чињеница је да је простор глатких функција на R^{2n} Лијева алгебра у односу на Пуасонове заграде, тј. важи следећи став:

Став 7. *Простор $C^\infty(R^{2n})$ је Лијева алгебра што значи да је Пуасонова заграда антисиметрична и задовољава Јакобијев идентитет:*

$$\{\{F, G\}, H\} + \{\{G, H\}, F\} + \{\{H, F\}, G\} = 0$$

за сваке три глатке функције F, G и H на R^{2n}. Такође Лијева заграда придруженог Хамилтоновог векторског поља је дата са:

$$[X_F, X_H] = X_{\{F,H\}},$$

што ћемо доказати у ставу 13. Следи да Хамилтонова векторска поља формирају подалгебру Лијеве алгебре векторских поља на R^{2n}.

Још један начин описивања симплектоморфизама је као дифеоморфизама који чувају Пуасонову заграду, тј. важи и следећи став:

Став 8. *Дифеоморфизам* $\psi : R^{2n} \to R^{2n}$ *је симплектоморфизам ако и само ако је:*

$$\{F, G\} \circ \psi = \{F \circ \psi, G \circ \psi\}$$

за све $F, G \in C^{\infty}(R^{2n})$.

Ставови 7 и 8 се могу видети у [6].

2 Симплектичка линеарна геометрија

Дефиниција 2. *Симплектички векторски простор је уређени пар* (V, ω) *где је* V *коначно димензиони векторски простор, а* ω *билинеарна форма* $\omega : V \times V \to R$ *која је:*

- *кососиметрична:*

$$\forall v, u \in V \qquad \omega(v, u) = -\omega(u, v),$$

- *недегенерисана:*

$$\forall u \in V \qquad \omega(u, v) = 0 \quad \forall v \in V \Rightarrow u = 0.$$

Пример:
Основни пример симплектичког векторског простора је R^{2n} са стандардном формом

$$\omega_0 = \sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge dy_j.$$

Напомена: Приметимо да симплектички векторски простор мора бити парне димензије.

Дефиниција 3. *Линеарни симплектоморфизам симплектичког векторског простора* (V, ω) *је изоморфизам векторског простора* $\Psi : V \to V$ *који чува симплектичку структуру у смислу:*

$$\Psi^* \omega = \omega$$

где је:

$$\Psi^* \omega(u, v) = \omega(\Psi u, \Psi v).$$

Линеарни симплектоморфизми векторског простора чине групу коју означавамо са $Sp(V, \omega)$, а у случају стандардне симплектичке структуре Еуклидског простора са $Sp(2n) = Sp(R^{2n}, \omega_0)$.

Дефиниција 4. *Симплектички комплемент линеарног потпростора* $W \subseteq V$ *је потпростор дефинисан са:*

$$W^{\omega} = \{v \in V \ \mid \ \omega(v, u) = 0 \quad \forall u \in W\}.$$

Симплектички комплемент не мора бити трансверзалан у односу на W. Потпростор W се назива:

- изотропан ако је $W \subseteq W^{\omega}$;
- коизотропан ако је $W \supseteq W^{\omega}$;
- симплектички ако је $W \cap W^{\omega} = \{0\}$;
- Лагранжов ако је $W = W^{\omega}$.

Напомена: Приметимо да је W изотропан ако и само ако се ω анулира на W, а W је симплектички ако и само ако је $\omega \mid_W$ недегенерисана форма.

Став 9. *За сваки потпростор $W \subseteq V$ важи:*

$$\dim W + \dim W^{\omega} = \dim V \qquad (W^{\omega})^{\omega} = W.$$

Доказ:
Можемо дефинисати пресликавање из векторског простора V у дуални простор W^* са:

$$\varphi : V \to W^* \qquad \varphi : v \mapsto \omega(v, \cdot) \mid_W .$$

Одредимо језгро и слику овог пресликавања:

$$\ker \varphi = \left\{ v \in V \;\middle|\; \omega(v, \cdot) \mid_W = 0 \right\} = W^{\omega},$$

$$Im\varphi = \left\{ \omega(v, \cdot) \mid_W \;\middle|\; v \in V \right\} = W^*.$$

Како је W коначнодимензион важи:

$$\dim W = \dim W^*.$$

Коначно на основу теореме о изоморфизму имамо:

$$\dim V = \dim \ker \varphi + \dim Im\varphi,$$

$$\dim V = \dim W^{\omega} + \dim W.$$

За доказ другог дела става приметимо да је:

$$(W^{\omega})^{\omega} = \left\{ v \in W \;\middle|\; \omega(v, u) = 0 \ \forall u \in W^{\omega} \right\}.$$

Видимо да је $W \subset (W^\omega)^\omega$ јер за свако $v \in W$ имамо да је $\omega(v,u) = 0$ за све $u \in W^\omega$ из дефиниције W^ω. Са друге стране за свако $u \in W^\omega$ је $\omega(v,u) = 0$ за све $v \in (W^\omega)^\omega$ па из дефиниције следи да је $(W^\omega)^\omega \subset W$, тј. важи:

$$(W^\omega)^\omega = W.$$

Q.E.D.

Теорема 1. *Ако имамо симплектички векторски простор* (V,ω) *димензије* $2n$ *тада постоји база овог простора* $u_1, u_2, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n$ *таква да важи:*

$$\omega(u_j, u_k) = \omega(v_j, v_k) = 0 \quad \omega(u_j, v_k) = \delta_k^j \quad \forall j,k \in \{1,\ldots,n\}$$

и ова база се назива симплектичка база.

Доказ:
Теорему ћемо доказати индукцијом са кораком два.

- (база индукције) $\dim V = 2$
  Како је форма ω недегенерисана постоје вектори u и v такви да је:
  $$\omega(u,v) = 1$$
  и они чине симплектичку базу.

- (хипотеза) $\dim V = 2n-2$
  Нека сваки симплектички простор димензије $2n-2$ има базу траженог облика.

- (индукцијски корак) $\dim V = 2n$
  Из недегенерисаности фирме постоје вектори u_1 и v_1 такви да је:
  $$\omega(u_1, v_1) = 1.$$
  Нека је $V_1 = \mathfrak{L}(u_1, v_1)$ линеарни омотач ова два вектора. Тада је $V_1 \cap V_1^\omega = \{0\}$, што можемо видети из следећег рачуна. Нека је $v \in V_1 \cap V_1^\omega$.
  $$v \in V_1 \Rightarrow v = \alpha u_1 + \beta v_1$$
  $$v \in V_1^\omega \Rightarrow \omega(v, u_1) = 0,\ \omega(v, v_1) = 0$$

$$\omega(v,u_1)=\omega(\alpha u_1+\beta v_1,u_1)=\alpha\omega(u_1,u_1)-\beta\omega(u_1,v_1)=-\beta\Rightarrow\beta=0$$
$$\omega(v,v_1)=\omega(\alpha u_1+\beta v_1,v_1)=\alpha\omega(u_1,v_1)+\beta\omega(v_1,v_1)=\alpha\Rightarrow\alpha=0.$$

Следи да је $v=0$.
Доказаћемо сада да је:

$$V=V_1\oplus V_1^\omega.$$

Наиме, нека је w произвољан вектор и нека је:

$$\omega(w,u_1)=\nu \qquad \omega(w,v_1)=\mu.$$

Вектор v се може друкчије записати као:

$$w=-\nu v_1+\mu u_1+w+\nu v_1-\mu u_1=w_1+w_2,$$

где смо означили са $w_1=-\nu v_1+\mu u_1$ и $w_2=w+\nu v_1-\mu u_1$. Вектор w_1 припада V_1 као линеарна комбинација базних вектора, а вектор w_2 припада V_1^ω, што видимо из:

$$\omega(w_2,u_1)=\omega(w+\nu v_1-\mu u_1,u_1)$$
$$=\omega(w,u_1)-\nu\omega(u_1,v_1)-\mu\omega(u_1,u_1)=\nu-\nu=0$$
$$\omega(w_2,v_1)=\omega(w+\nu v_1-\mu u_1,v_1)$$
$$=\omega(w,v_1)+\nu\omega(v_1,v_1)-\mu\omega(u_1,v_1)=\mu-\mu=0.$$

Из претходног става знамо да је $\dim V_1^\omega=2n-2$ и он има симплектичку базу $\{u_2,\dots,u_n,v_2,\dots,v_n\}$ на основу идукцијске претпоставке. Тада имамо да је $\{u_i,v_i\}_{i=1}^n$ симплектичка база простора V.

Овим смо доказали тврђење теореме.

Q.E.D.

Последица:
Ако је (V,ω) произвољан симплектички векторски простор постоји изоморфизам:

$$\Psi:R^{2n}\to V$$

такав да важи:

$$\Psi^*\omega=\omega_0.$$

Заиста, довољно је уочити изоморфизам дефинисан са:

$$\Psi z = \sum_{j=1}^{n} x_j u_j + \sum_{j=1}^{n} y_j v_j,$$

где је $z = (x_1 \dots x_n, y_1, \dots y_n)$.

Став 10. *Ако је V $2n$ димензиони реални векторски простор, тада је кососиметрична билинеарна форма ω недегенерисана ако и само ако је њен n-тоструки спољашњи производ $\omega \wedge \omega \wedge \dots \wedge \omega$ различит од 0.*

Доказ:
Нека је форма ω дегенерисана и нека је $v \neq 0$ тако да је :

$$\omega(v, u) = 0 \quad \forall u \in V.$$

Ако изаберемо базу $v_1, \dots, v_n$ тако да је $v_1 = v$ тада је:

$$\omega^n(v_1, \dots, v_n) = 0.$$

Нека је сада форма ω недегенерисана. Како је w_0^n форма запремине и различита од 0, то је на основу претходне последице и ω^n различита од 0.

Q.E.D.

На основу реченог у уводном поглављу, о елементима $Sp(2n)$ можемо размишљати као о реалним матрицама димензије $2n \times 2n$ које задовољавају услов:

$$\Psi^T J_0 \Psi = J_0$$

где је:

$$J_0 = \begin{bmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{bmatrix}.$$

Став 11.

$$Sp(2n) \cap O(2n) = Sp(2n) \cap GL(n, C) = O(2n) \cap GL(n, C) = U(n).$$

Доказ:

Приметимо да за реалну $2n \times 2n$ матрицу Ψ важи:

$$\begin{array}{ccc} \Psi \in GL(n,C) & \Leftrightarrow & \Psi J_0 = J_0 \Psi \\ \Psi \in Sp(2n) & \Leftrightarrow & \Psi^T J_0 \Psi = J_0 \\ \Psi \in O(2n) & \Leftrightarrow & \Psi^T \Psi = E \end{array}$$

и лако је уочити да сваки од ова два услова повлачи трећи. Пресек ових група се састоји од матрица:

$$\Psi = \begin{bmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{bmatrix} \in GL(2n,R)$$

које задовољавају услов:

$$X^T Y = Y^T X \quad X^T X + Y^T Y = E,$$

а то је заправо услов да матрица буде унитарна.

Q.E.D.

3 Симплектичке многострукости

3.1 Основни појмови

Сматраћемо надаље да је M глатка многострукост без границе и најчешће компактна, ако није друкчије наглашено.

Дефиниција 5. *Симплектичка структура на глаткој многострукости је затворена недегенерисана 2 форма $\omega \in \Omega^2(M)$.*

Из недегенерисаности следи да је сваки тангентни простор T_qM симплектички векторски простор. Из овог алгебарског својства можемо закључити да постоји канонски изоморфизам тангентног и котангентног раслојења:

$$TM \to T^*M : X \mapsto i(X)\omega = \omega(X, \cdot).$$

Како је сваки тангентни простор симплектички можемо закључити да је симплектичка многострукост увек парно димензиона. Такође како се, на основу показаног у ставу 10, n -тоструки клинасти производ $\omega \wedge \cdots \wedge \omega$ никад не анулира следи да M мора бити оријентабилна.
Затвореност је геометријско својство и као последицу уочавамо да је симплектичка форма ω представник кохомолошке класе :

$$a = [\omega] \in H^2_{DR}(M; R).$$

Став 12. *Ако је M затворена, симплектичка многострукост тада су де Рамове кохомолошке групе $H^{2k}_{DR}(M), 1 \leq k \leq n$ нетривијалне.*

Доказ:
Нека је за неко k $H^{2k}_{DR}(M) = 0$. Знамо да је $d\omega = 0$ и $d\omega^{\wedge k} = 0$, па како је $H^{2k}_{DR}(M)$ тривијална ω^k је у нултој класи, тј. ова форма је и тачна. Следи да је $\omega^k = d\alpha$ за неку $2k-1$ форму α. Сада применом Стоксове теореме добијамо:

$$\int_M \omega^{\wedge n} = \int_M d\alpha \wedge \omega^{\wedge n-k} = \int_M d(\alpha \wedge \omega^{\wedge n-k}) = \int_{\partial M} \alpha \wedge \omega^{\wedge n-k}.$$

Знамо да је M без руба, па је интеграл запреминске форме нула што даје контрадикцију.

Q.E.D.

Познато је да су кохомолошке групе сфере:

$$H^k_{DR}(S^n) = \left\{ \begin{array}{cc} R & k = 0, n, \\ \{0\} & k \neq 0, n. \end{array} \right.$$

Одавде имамо пример парно димензионих многострукости које не допуштају симплектичку структуру, а то су сфере $S^{2n}, n \geq 2$.

Поред стандардног примера R^{2n} можемо дати још неке основне примере симплектичких многострукости:

- C^n уз стандардну идентификацију са R^{2n};
- сваки отворен скуп у R^{2n};
- оријентабилне површи;
- сферу S^2 можемо посматрати као:

  $$S^2 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in R^3 | \sum_j x_j^2 = 1 \right\}.$$

  Тада је симплектичка форма на њој дата са :

  $$\omega_x(\xi, \eta) = \langle x, \xi \times \eta \rangle, \qquad \xi, \eta \in T_x S^2.$$

  Површина сфере са овом формом је 4π;
- котангентно раслојење (видети поглавље 3.2.).

Дефиниција 6. *Нека је X глатко векторско поље и ϕ_t фамилија дифеоморфизама многострукости M таква да је:*

$$\frac{d\phi_t}{dt}(x) = X(\phi(x)), \qquad \phi_0(x) = x.$$

Тада је Лијев извод форме ω у правцу вектора X дефинисан са:

$$L_X \omega = \lim_{t \to 0} \frac{\phi_t^* \omega - \omega}{t}.$$

Аналогно се дефинише извод векторског поља у правцу вектора:

$$L_X Y = \lim_{t \to 0} \frac{\phi^*_{-t}(Y_{\phi_t}) - Y}{t}.$$

и може се показати да је Лијев извод исто што и комутатор векторских поља, тј. важи:

$$[X, Y] = L_X Y = \frac{d}{dt} \phi^*_{-t} Y.$$

Овде је ϕ_t ток X, а $\phi^* Y(p) = d\phi^{-1}(p) Y(\phi(p))$ $pull - back$ векторског поља Y.

Теорема 2. *(Картанова формула) Ако је $\phi_t : M \to M$ глатка фамилија глатких пресликавања, $X(\phi_t(x)) = \frac{d}{dt}\phi_t(x)$ и ω к-форма тада је:*

$$\frac{d}{dt} \phi_t^* \omega = \phi_t^* \left(d(i(X)\omega) + i(X) d\omega \right). \tag{7}$$

Доказ:
Доказује се индукцијом по степену форме. Детаљи се могу видети у [9].

Ако имамо глатку фамилију ω_t диференцијалних форми из линеарности $pull - back$-а може се доказати општији облик:

$$\frac{d}{dt} \phi_t^* \omega_t = \phi_t^* \left(d(i(X)\omega) + i(X) d\omega + \frac{d\omega_t}{dt} \right). \tag{8}$$

Сетимо се да смо дефинисали у уводном поглављу симплектоморфизме, сада можемо дати општију дефиницију:

Дефиниција 7. *Симплектоморфизам симплектичке могострукости (M, ω) је дифеоморфизам ψ који чува симплектичку форму, тј. за који важи:*

$$\omega = \psi^* \omega.$$

Групу симплектоморфизама означаваћемо са $Symp(M, \omega)$ или $Symp(M)$. Како је форма недегенерисана хомоморфизам тангентног и котангентног раслојења је бијекција па постоји један-један однос векторских поља и 1-форми:

$$\chi(M) \to \Omega^1(M) : X \mapsto i(X)\omega.$$

За векторско поље кажемо да је симплектичко ако је $i(X)\omega$ затворена форма. Простор симплектичких векторских поља означавамо са $\chi(M,\omega)$. Када је M затворена $\chi(M,\omega)$ је Лијева алгебра групе $Symp(M,\omega)$, што следи из следећег става.

Став 13. *Нека је M затворена многострукост и $t \mapsto \psi_t$ глатка фамилија дифеоморфизама генерисаних фамилијом векторских поља $X_t \in \chi(M)$ са:*

$$\frac{d}{dt}\psi_t = X_t \circ \psi_t \qquad \psi_0 = id.$$

Тада је $\psi_t \in Symp(M,\omega)$ за свако t ако и само ако је $X_t \in \chi(M,\omega)$ за свако t. Даље важи да ако су $X, Y \in \chi(M,\omega)$ тада је и $[X,Y] \in \chi(M,\omega)$ и важи:

$$i\left([X,Y]\right)\omega = dH \qquad H = \omega(X,Y).$$

Доказ:

На основу Картанове формуле за Лијев извод (7) и чињенице да је форма затворена добијамо:

$$\frac{d}{dt}\psi_t^*\omega = \psi_t^*(i(X_t)d\omega + d(i(X_t)\omega)) = \psi_t^* d(i(X_t)\omega),$$

тј. важи први део става.

Приметимо да је X симплектичко векторско поље ако и само ако је Лијев извод $L_X\omega = 0$.

Нека су сада X и Y симплектичка векторска поља са одговарајућим токовима ϕ_t и ψ_t. Тада имамо:

$$[X,Y] = L_Y X = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\psi_t^* X$$

$$i\left([X,Y]\right)\omega = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} i(\psi_t^* X)\omega = L_Y(i(X)\omega) = di(Y)i(X)\omega = d(\omega(X,Y)).$$

Другу једнакост смо добили из тога што је $\psi_t^*\omega = \omega$, па је и $i(\psi_t^* X)\omega = \psi_t^*(i(X)\omega)$. Трећу једнакост смо добили из Картанове формуле (7) уз чињеницу да је форма $i(X)\omega$ затворена.

Q.E.D.

За сваку глатку функцију $H : M \to R$ векторско поље $X_H : M \to TM$ одређено са:

$$i(X_H)\omega = dH$$

се назива Хамилтоново векторско поље придружено Хамилтоновој функцији H. Ако је М затворена ово векторско поље генерише једнопараметарску групу дифеоморфизама ϕ_H^t која задовољава:

$$\frac{d}{dt}\phi_H^t = X_H \circ \phi_H^t \qquad \phi_H^0 = id.$$

Ова фамилија се назива Хамилтонов ток придружен функцији H.

Пошто је тачна форма и затворена Хамилтонов ток чува ω. Ако означимо Хамилтонове дифеоморфизме многострукости M са $Ham(M)$ закључујемо да је $Ham(M) \subseteq Symp(M)$. У специјалном случају када је $H^1_{DR}(M) = \{0\}$ тада је $Ham(M) = Symp(M)$. Можемо приметити да је векторско поље X_H тангентно на ниво $H = const$ из једначина:

$$dH(X_H) = (i(X_H)\omega)(X_H) = \omega(X_H, X_H) = 0.$$

Пример:
Нека је H функција висине x_3 на сфери S^2 независна од t.. Нивои су кругови константне висине и Хамилтонов ток ϕ_H^t ротира сваки круг константном брзином. У цилиндричним координатама X_H је заправо векторско поље $\frac{\partial}{\partial\theta}$.

У првом поглављу смо дефинисали Пуасонову заграду, сада дајемо општију дефиницију:

Дефиниција 8. *Пуасонова заграда $\{\cdot,\cdot\}$ на M је пресликавање:*

$$\{\cdot,\cdot\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M),$$

које је:

- *антисиметрично;*
- *билинеарно;*
- *задовољава Лајбницово правило;*
- *задовољава Јакобијев идентитет.*

Може се показати да је изразом:

$$\{F, G\} = \omega(X_F, X_G)$$

дефинисана Пуасонова заграда. Пуасонова заграда дефинише структуру Лијеве алгебре на простору глатких функција на M.

Став 14. *Нека је (M, ω) симплектичка многострукост. Тада важи:*

1. *Где год је дефинисан Хамилтонов ток ϕ_H^t је симплектоморфизам који је тангентан на потпростор нивоа H.*

2. *За сваку Хамилтонову функцију H и сваки симплектоморфизам ψ важи:*
$$X_{H\circ\psi} = \psi^* X_H.$$

3. *Лијева заграда два Хамилтонова векторска поља X_F и X_G је Хамилтоново векторско поље $[X_F, X_G] = X_{\{F,G\}}$.*

Доказ:
Први део става смо већ показали раније. Други део следи из:

$$i(X_{H\circ\psi})\omega = d(H \circ \psi) = \psi^* dH = \psi^* i(X_H)\omega = i(\psi^* X_H)\omega.$$

Овде друге једнакост следи из тога што $pull - back$ комутира са оператором d, а последња из чињенице да је $\psi^*\omega = \omega$.
Трећи део става је заправо друкчије формулисан други део става 13.

Q.E.D.

Из овог става можемо закључити да Хамилтонова векторска поља формирају подалгебру Лијеве алгебре векторских поља. Пресликавање $H \mapsto X_H$ је сурјективни хомоморфизам Лијевих алгебри глатких функција на M са Пуасоновим заградама у Лијеву алгебру Хамилтонових векторских поља. Језгро овог пресликавања чине константне функције.

3.2 Хамилтонова изотопија

Посматрајмо глатко пресликавање:

$$[0,1] \times M \to M : (t,q) \mapsto \psi_t(q)$$

такво да је $\psi_t \in Symp(M,\omega)$ и $\psi_0 = id$. Оваква фамилија симплектоморфизама се назива симплектичка изотопија на M, и свака оваква фамилија је генерисана јединственим векторским пољем $X_t : M \to TM$ које задовољава:

$$\frac{d}{dt}\psi_t = X_t \circ \psi_t.$$

Како је ψ_t симплектоморфизам за свако t и векторска поља X_t су симплектичка и важи:

$$di(X_t)\omega = 0.$$

Ако су све ове 1-форме тачне тада постоји глатка фамилија Хамилтонових функција $H_t : M \to R$ таква да је:

$$i(X_t)\omega = dH_t,$$

што значи да је X_t Хамилтоново векторско поље придружено фамилији H_t за свако t. У овом случају се H_t назива временски зависан Хамилтонијан, а ψ_t се назива Хамилтонова изотопија.

Приметимо да ако је M простоповезана многострукост свака симплектичка изотопија је Хамилтонова, јер је тада $H^1_{DR}(M) = \{0\}$.

Симплектоморфизам ψ је Хамилтонов ако постоји Хамилтонова изотопија ψ_t која спаја $\psi_0 = id$ и $\psi_1 = \psi$. Простор Хамилтонових симплектоморфизама означавамо са $Ham(M,\omega)$ или једноставније $Ham(M)$. Однос симплектичке и Хамилтонове групе дифеоморфизама је тема којој ћемо се детаљније посветити у наредним главама и може да представља окосницу даљих истраживања јер садржи доста отворених проблема.

3.3 Котангентно раслојење

Котангентна раслојења формирају једну од основних класа симплектичких многострукости. Котангентно раслојење T^*L је векторско раслојење чија су сечења 1-форме на L. Универзална или канонска (Лиувилова) форма $\lambda_{can} \in \Omega^1(T^*L)$ је форма чија је симплектичка форма дата са:

$$\omega_{can} = -d\lambda_{can}.$$

У стандардним локалним координатама (x, y) где су x кординате на L, а y на фибри T_xL канонске форме су дате са:

$$\lambda_{can} = y\ dx, \qquad \omega_{can} = dx \wedge dy.$$

Нека су $x : U \to R^n$ локалне координатне карте на L. Можемо о координатама мислити као о реално вредносним функцијама на U. Тада су диференцијали у тачки $q \in U$ линеарна пресликавања $dx_j(q) : T_qL \to R$ и чине базу дуалног простора T_q^*L па се сваки вектор $v^* \in T_q^*L$ може записати као:

$$v^* = \sum_{j=1}^{n} y_j\ dx_j.$$

Координате y_j су јединствено одређене са q и v^* и одређују координатне функције $T^*U \to R^n : (q, v^*) \mapsto y(q, v^*)$. Све у свему имамо координатне карте $T^*U \to R^n \times R^n : (q, v^*) \mapsto (x(q), y(q, v^*))$ и у овим координатама је канонска 1-форма дата са:

$$\lambda_{can} = \sum_{j=1}^{n} y_j\ dx_j.$$

Да бисмо показали да је ова форма независна од избора координатних карата можемо посматрати шта се дешава при смени координата, а можемо дати и дефиницију форме независну од координата што ћемо овде и учинити. Посматрајмо пројекцију:

$$\pi : T^*L \to L, \qquad (q, v^*) \mapsto q.$$

Диференцијал ове пројекције је линеарно прескликавање:

$$d\pi(q, v^*) : T_{(q,v^*)}T^*L \to T_qL.$$

Сада је v^* линеарни функционал на T_qL и вредност канонске 1-форме у тачки (q, v^*) је композиција:

$$\lambda_{can(q,v^*)} = v^* \circ d\pi(q, v^*) : T_{(q,v^*)}T^*L \to R,$$

тј. $pull-back$ v^* при пројекцији π. Ово је сагласно са дефиницијом од раније јер у локалним координатама (x, y) на T^*L линеарно пресликавање $d\pi(q, v^*)$ је дато са $(\xi, \eta) \mapsto \xi$ и следи да је $v^* \circ d\pi(q, v^*)$ линеаран функционал $(\xi, \eta) \mapsto \langle y, \xi \rangle$ који може бити записан као $\sum_j y_j \; dx_j$. Очигледно је из представљања форме λ_{can} да је 2-форма $\omega_{can} = -d\lambda_{can}$ недегенерисана, па је (T^*L, ω_{can}) симплектичка многострукост.

Став 15. *1-форма $\lambda_{can} \in \Omega^1(T^*)L$ је јединствено одређена својством:*

$$\sigma^* \lambda_{can} = \sigma$$

за сваку 1-форму $\sigma : L \to T^*L$.

Доказ:
У локалним координатама x на L 1-форма σ на L може бити записана као:

$$\sigma = \sum_{j=1}^{n} a_j(x) \; dx_j.$$

Када је посматрамо као пресликавање из L у T^*L ова форма је дата у локалним координатама са:

$$x \mapsto (x_j, \ldots, x_n, a_1(x), \ldots a_n(x)),$$

па је $pull-back$ форме λ_{can} заправо форма σ.

Q.E.D.

Ако имамо две симплектичке многострукости (M_1, ω_1) и (M_2, ω_2) тада је и њихов Декартов производ симплектичка многострукост, са формом $\mu\pi_1^*\omega_1 + \nu\pi_2^*\omega_2$, где су π_1 и π_2 канонске пројекције, а μ и ν произвољне константе различите од нуле. Ова форма је затворена због линеарности и затворености ω_1 и ω_2:

$$d\omega = d(\mu\pi_1^*\omega_1 + \nu\pi_2^*\omega_2) = \mu\pi_1^* d\omega_1 + \nu\pi_2^* d\omega_2 = 0.$$

За недегенерисаност погледајмо:

$$\omega((X_1, X_2), (Y_1, Y_2)) =$$

$$\mu\pi_1^*\omega_1((X_1, X_2), (Y_1, Y_2)) + \nu\pi_2^*\omega_2((X_1, X_2), (Y_1, Y_2)) =$$

$$\mu\omega_1(\pi_{1*}(X_1, X_2), \pi_{1*}(Y_1, Y_2)) + \nu\omega_2(\pi_{2*}(X_1, X_2), \pi_{2*}(Y_1, Y_2)) =$$
$$\mu\omega_1(X_1, Y_1) + \nu\omega_2(X_2, Y_2).$$

Ако је $(X_1, X_2) \neq 0$ тада је $X_1 \neq 0$ или $X_2 \neq 0$. Узмимо да је $X_1 \neq 0$. Из недегенерисаности ω_1 постоји Y тдј. $\omega(X_1, Y) \neq 0$. Можемо изабрати $(Y_1, Y_2) = (Y, 0)$ и видимо да је тада ω различито од нуле. Слично можемо поступити и у другом случају и закључујемо да је форма недегенерисана.

3.4 Мозеров трик и Дарбуова теорема

У овом делу ћемо описати Мозеров трик који има многе значајне последице, као што је да симплектичке многострукости немају локалних инваријанти.

Слободно говорећи Мозеров аргумент говори да за сваку фамилију симплектичких форми $\omega_t \in \Omega^2(M)$ са тачним изводом:

$$\frac{d}{dt}\omega_t = d\sigma_t$$

постоји фамилија дифеоморфизама ψ_t тако да важи:

$$\psi_t^*\omega_t = \omega_0. \tag{9}$$

Главна идеја је да одредимо дифеоморфизме ψ_t представљајући их као ток фамилије векторских поља X_t на M. Претпоставимо да је:

$$\frac{d}{dt}\psi_t = X_t \circ \psi_t, \qquad \psi_0 = id. \tag{10}$$

Треба одредити векторска поља X_t тако да је задовољена једначина (9). Диференцирањем уз примену Картанове формуле (8) добијамо:

$$0 = \frac{d}{dt}\omega_t = \psi_t^*\left(\frac{d}{dt}\omega_t + i(X_t)d\omega_t + di(X_t)\omega_t\right).$$

Како је ω_t затворена форма за свако t и њен извод тачна форма ово је задовољено ако важи:

$$\sigma_t + i(X_t)\omega_t = 0. \tag{11}$$

Како је форма ω_t недегенерисана постоји јединствена фамилија векторских поља X_t која задовољава ову једначину и на тај начин смо добили фамилију ψ_t која задовољава тражене услове као решење диференцијалне једначине (10).

Овај аргумент је скроз коректан у случају када је M компактна многострукост. У општем случају треба проверити да постоји решење диференцијалне једначине на траженом временском интервалу.

Став 16. *Нека је M $2n$ димензиона глатка многострукост и $Q \subseteq M$ компактна подмногострукост. Претпоставимо да су $\omega_0, \omega_1 \in \Omega^2(M)$ затворене 2-форме које су једнаке и недегенерисане на T_qM у свакој тачки $q \in Q$. Тада постоје околине Q N_0 и N_1 и дифеоморфизам $\psi : N_0 \to N_1$ тако да важи:*

$$\psi\mid_Q = id \qquad \psi^*\omega_1 = \omega_0.$$

Доказ:

У светлу Мозеровог трика довољно је показати да постоји 1-форма $\sigma \in \Omega^1(N_0)$ таква да важи:

$$\sigma\mid_{T_QM} = 0, \qquad d\sigma = \omega_1 - \omega_0.$$

Тада можемо посматрати фамилију затворених форми:

$$\omega_t = \omega_0 + t(\omega_1 - \omega_0) = \omega_0 + td\sigma.$$

Скупљајући N_0 по потреби можемо добити да је ова фамилија недегенерисана на N_0 за свако t. Тада можемо добити одговарајућа векторска поља X_t која се анулирају на Q решавајући једначину (10). Скупљајући поново околину N_0 по потреби можемо добити да решење диференцијалне једначине постоји на временском интервалу $0 \leq t \leq 1$.

Да би показали постојање форме σ разматраћемо рестрикцију експоненцијалног пресликавања на нормално раслојење $TQ^\perp$ подмногострукости Q у односу на произвољну Риманову метрику на М:

$$\exp : TQ^\perp \to M.$$

Посматрајмо и околину нултог сечења:

$$U_\varepsilon = \left\{(q,v) \in TM \mid q \in Q, v \in T_qQ^\perp, |v| < \varepsilon\right\}.$$

Рестрикција експоненцијалног пресликавања на U_ε је дифеоморфизам на $N_0 = \exp(U_\varepsilon)$ за довољно мало ε. Дефинишимо сада $\phi_t : N_0 \to N_0$ за $0 \le t \le 1$ са:

$$\phi_t(\exp(q,v)) = \exp(q,tv).$$

Сада је ϕ_t дифеоморфизам за $t > 0$ и важи:

$$\phi_0(N_0) \subseteq Q, \qquad \phi_1 = id, \qquad \phi_t\,|_Q = id.$$

Даље следи:

$$\phi_0^*\tau = 0, \qquad \phi_1^*\tau = \tau,$$

где смо са τ означили $\tau = \omega_1 - \omega_0$.
Како је ϕ_t дифеоморфизам за свако $t > 0$ можемо дефинисати векторско поље :

$$X_t = \left(\frac{d}{dt}\phi_t\right) \circ \phi_t^{-1}.$$

Добијамо:

$$\frac{d}{dt}\phi_t^*\tau = \phi_t^* L_{X_t}\tau = d(\phi_t^* i(X_t)\tau) = d\sigma_t,$$

где је фамилија 1-форми :

$$\sigma_t(q;v) = \tau\left(\phi_t(q); \frac{d}{dt}\phi_t(q), d\phi(q)v\right)$$

глатка у тренутку $t = 0$ и анулира се на Q. Даље следи:

$$\tau = \phi_1^*\tau - \phi_0^*\tau = \int_0^1 \frac{d}{dt}\phi_t^*\tau dt = d\sigma, \qquad \sigma = \int_0^1 \sigma_t dt.$$

Q.E.D.

Теорема 3. *(Дарбу) Свака симплектичка форма ω на M је локално дифеоморфна стандардној форми ω_0 на R^{2n}.*

Доказ:
Довољно је применити претходни став у случају када је Q једна тачка.

Последица:
Нека је (M, ω) симплектичка многострукост димензије $2n$. Тада постоји отворено покривање $\{U_\alpha\}_\alpha$ многострукости M и карте $\alpha : U_\alpha \to \alpha(U_\alpha) \subseteq R^{2n}$ тако да важи $\alpha^*\omega_0 = \omega$. Овај атлас има симплектичку матрицу преласка:

$$d(\beta \circ \alpha^{-1})(x) \in Sp(2n), \qquad x \in \alpha(U_\alpha \cap U_\beta).$$

Карте са овом особином се називају Дарбуове карте.
Из овога закључујемо да за разлику од Риманове геометрије симплектичке многострукости немају локалних инваријанти, већ само глобалне као што је на пример кохомолошка класа форме $[\omega]$.

Теорема 4. *Нека је M затворена многострукост и ω_t глатка фамилија форми на M у истој кохомолошкој класи. Тада постоји фамилија дифеоморфизама ψ_t на M тако да важи:*

$$\psi_0 = id \qquad \psi_t^*\omega_t = \omega_0.$$

Скица доказа:
Да бисмо применили Мозеров трик морамо наћи глатку фамилију 1-форми σ_t такву да важи:

$$d\sigma_t = \frac{d}{dt}\omega_t.$$

Како су ω_t у истој кохомолошкој класи форме $\omega_t - \omega_0$ су тачне, па су и форме $\tau_t = \frac{d}{dt}\omega_t$, тј. за свако t постоји 1-форма σ_t таква да је $d\sigma_t = \tau_t$. Глаткост фамилије се показује индукцијом по броју скупова у добром покривању многострукости M. Докаже се да важи за компактно садржане форме у координатним картама применом Поенкареове леме са компактним носачем, а затим се индуктивни корак доказује употребом Мајер-Виеторисовог низа. За детаље видети [6].

Q.E.D.

Нека је $Q \subseteq M$ подмногострукост. Фамилија улагања $\psi_t : Q \to M$ која почиње са инклузијом се назива изотопија Q у M. Ако је $\psi_t = \psi_0$ на неком подскупу $Y \subset Q$ назива се изотопија *rel* Y. Ако ψ_t чува симплектичку структуру назива се симплектичка изотопија. За две симплектичке форме ω_0 и ω_1 кажемо да су изотопне ако постоји глатка фамилија ω_t симплектичких форми исте кохомолошке класе која их спаја. Кажемо да су јако изотопне ако постоји фамилија изотопија ψ_t на M тако да је $\psi_1^* \omega_1 = \omega_0$.

Једна од познатих чињеница из диференцијалне топологије је да се изотопија компактне подмногострукости $Q \subset M$ може проширити на цео M, али је питање када је то могуће у симплектичкој категорији. На неку околину од Q је могуће проширити ако је Q лепо изабрана у односу на форму ω, рецимо када је симплектичка или Лагранжова. За проширење на цео M међутим постоје кохомолошке опструкције. Више детаља о овоме у [6].

Теорема 5. *Нека је (M, ω) компактна симплектичка многострукост и $Q \subset M$ компактан подскуп. Нека је $\psi_t : U \to M$ симплектичка изотопија отворене околине U скупа Q и нека је:*

$$H^2(M, Q; R) = 0.$$

Тада постоји околина N од Q таква да је $N \subset U$ и симплектичка изотопија $\phi_t : M \to M$ Таква да за свако t важи:

$$\psi_t \mid_N = \phi_t \mid_N .$$

Доказ:
Видети [6].

3.5 Подмногострукости и околине

Разматраћемо уложене подмногострукости које унутрашњу топологију наслеђују из окружења. Подмногострукост $Q \subset M$ се назива симплектичка (изотропна, коизотропна, Лагранжова) ако је за свако $q \in Q$ подпростор $T_q Q$ симплектичког векторског простора $(T_q M, \omega)$ симплектички (изотропан, коизотропан, Лагранжов).

Пример:
Нулто сечење и фибре котангентног раслојења T^*L са канонском симплектичком структуром су Лагранжове, јер се канонска 1-форма анулира на овим подмногострукостима. Или општије за сваку глатку подмногострукост $Q \subset L$ анихилатор:

$$TQ^{\perp} = \left\{(q, v^*) \in T^*L | q \in Q, v^* |_{T_qQ} = 0\right\}$$

је Лагранжов подпростор. Подмногострукост $TQ^{\perp}$ се назива конормално раслојење и специјални случајеви су нулто сечење ($Q = L$) и фибра ($Q = pt$).

Пример:
За дату симплектичку многострукост (M, ω) прозвод $M \times M$ допушта природну симплектичку структуру $(-\omega) \times \omega$. Подпростори $M \times \{pt\}$ и $\{pt\} \times M$ су симплектички, док је дијагонала Лагранжов подпростор.

Став 17. *График $\Gamma_\sigma \subset T^*L$ 1-форме σ је Лагранжов ако и само ако је σ затворена.*

Доказ:
График Γ_σ је слика улагања $\sigma : L \to T^*L$. Следи да се симплектичка форма $-d\lambda_{can}$ анулира на Γ_σ ако и само ако:

$$0 = \sigma^*(d\lambda_{can}) = d(\sigma^*\lambda_{can}) = d\sigma.$$

Овде смо користли особину канонске форме да је $\sigma^*\lambda_{can} = \sigma$.
Q.E.D.

Став 18. *Нека је (M, ω) симплектичка многострукост и $\psi : M \to M$ дифеоморфизам. Тада је ψ симплектоморфизам ако и само ако је график:*

$$graph(\psi) = \{(q, \psi(q)) \mid q \in M\} \subset M \times M$$

Лагранжова подмногострукост симплектичког простора $(M \times M, -\omega \times \omega)$.

Доказ:
Означимо γ улагање:

$$\gamma : M \to M \times M, \qquad q \mapsto (q, \psi(q)),$$

и нека је $\hat{\omega} = \pi_1^*\omega - \pi_2^*\omega$ форма на производу $M \times M$. График је Лагранжов потпростор ако и само ако је $\gamma^*\hat{\omega} = 0$. Са друге стране имамо:

$$\gamma^*\hat{\omega} = \gamma^*\pi_1^*\omega - \gamma_2^*\omega = (\pi_1 \circ \gamma)^*\omega - (\pi_2 \circ \gamma)^*\omega.$$

Користећи чињеницу да је $\pi_1 \circ \gamma$ идентитета, а $\pi_2 \circ \gamma = \psi$ закључујемо да важи еквиваленција:

$$\gamma^*\hat{\omega} = 0 \Longleftrightarrow \psi^*\omega = \omega.$$

Q.E.D.

Овај став показује колико су Лагранжове подмногострукости важне, и у њиховом проучавању су се развиле значајне технике и нашли важни примери у симплектичкој теорији.

Теорема 6. *Нека је за $j = 0, 1$ (M_j, ω_j) симплектичка многострукост, Q_j компактна симплектичка подмногострукост и $\nu_{Q_j} = (TQ_j)^\omega$ симплектичко нормално раслојење. Претпоставимо да постоји изоморфизам $\Phi : \nu_{Q_0} \to \nu_{Q_1}$ симплектичких нормалних раслојења на Q_0 и Q_1 која наткривају симплектоморфизам $\varphi : (Q_0, \omega_0) \to (Q_1, \omega_1)$. Тада се φ може проширити до симплектоморфизма $\psi : (N(Q_0), \omega_0) \to (N(Q_1), \omega_1)$ тако да $d\psi$ индукује пресликавање Φ на ν_{Q_0}.*

Доказ:

Прво приметимо да се φ може проширити до дифеоморфизма $\varphi' : N(Q_0) \to N(Q_1)$ тако да $d\varphi'$ индукује пресликавање Φ на TQ_0^ω. Овде можемо узети:

$$\varphi' = \exp_1 \circ \Phi \circ \exp_0^{-1}$$

где је $\exp_j$ експоненцијално пресликавање околине нултог сечења у нормалном раслојењу Q_j у неку околину Q_j у M_j. Закључујемо да су ω_0 и ω_1 две симплектичке форме које се поклапају на тангентном простору компактне подмногострукости па тврђење теореме следи применом става (16).

Q.E.D.

Теорема 7. *Нека је (M, ω) симплектичка многострукост и $L \subset M$ компактна Лагранжова подмногострукост. Тада постоји околина $N(L_0) \subset T^*L$ нултог сечења и околина $V \subset M$ од L и дифеоморфизам $\phi : N(L_0) \to V$ тако да важи:*

$$\phi^*\omega = -d\lambda \qquad \phi\big|_L = id$$

где смо са λ означили канонску 1-форму на T^*L.

Доказ:
Доказ почива на чињеници да је нормално раслојење L у M изоморфно тангентном раслојењу. Детаљи се могу наћи у [6].

Став 19. *Нека је (M, ω) компактна симплектичка многострукост. Тада се околина идентитете у $Symp(M)$ може идентификовати са околином нуле у векторском простору затворених 1-форми на M.*

Скица доказа:
На основу претходне теореме постоји околина $N(\Delta) \subset M \times M$ дијагонале Δ, конвексна околина $N(M_0) \subset T^*M$ нултог сечења M_0 и дифеоморфизам $\psi : N(\Delta) \to N(M_0)$. Претпоставимо да је $\psi \in Symp(M, \omega)$ довољно C^1 близу идентитете. На основу става 18 график ψ је Лагранжова подмногострукост $N(\Delta)$, па је $L = \Psi(graph(\psi))$ Лагранжова подмногострукост T^*M. Надаље L је слика глатког пресликавања:

$$M \to T^*M : q \mapsto \Psi(q, \psi(q))$$

које је C^1 близу канонског улагања нултог сечења. Следи да је граф 1-форме σ на M која је затворена на основу става 17. Детаљније у [6].

Q.E.D.

4 Група симплектоморфизама и група Хамилтонових дифеоморфизама

У претходном поглављу смо дефинисали групе симплектоморфизама и Хамилтонових дифеоморфизама. Њихов однос је и главна тема овог рада, а овде ћемо навести њихиве основне особине. Прво ћемо показати да два симплектоморфизма ψ_1 и ψ_2 која су довољно близу у C^1 топологији могу бити спојена глатким путем симплектоморфизама, тј. важи теорема:

Теорема 8. *Нека је (M, ω) компактна симплектичка многострукост. Тада је група симплектоморфизама $Symp(M, \omega)$ локално путно повезана.*

Доказ:
Доказ се базира на томе да се околина идентитете у $Symp(M, \omega)$ може идентификовати са околином нуле у векторском простору 1-форми на M, на основу става 19. Наиме, можемо идентификовати дијагоналу у простору $M \times M$ са нултим сечењем у T^*M, чиме смо добили тражену идентификацију околине идентитете у $Symp(M, \omega)$ са простором затворених 1-форми. Све ове форме имају график Γ_σ који лежи у конвексној околини $N(M_0)$ нултог сечења у T^*M и ако имамо 1-форму σ имамо и цео пут $t\sigma, t \in [0, 1]$. Следи да је простор форми контрактибилан, па и околина идентитете.

Q.E.D.

Група симплектоморфизама компактне многострукости је бесконачно димензиона Лијева група чија је Лијева алгебра простор $\chi(M, \omega)$ симплектичких векторских поља и то је једна са Картанове листе простих нерастављивих Лијевих група.

Нека је $Symp_0(M, \omega)$ компонента идентитете у $Symp(M, \omega)$. На основу претходне теореме за свако $\psi \in Symp_0(M, \omega)$ постоји глатка фамилија симплектоморфизама $\psi_t \in Symp(M, \omega)$ таква да је $\psi_0 = id$ и $\psi_1 = \psi$. За фамилију симплектоморфизама постоји јединствена фамилија векторских поља $X_t M \to TM$ таква да важи:

$$\frac{d}{dt}\psi_t = X_t \circ \psi_t.$$

Кажемо да фамилија X_t генерише изотопију ψ_t. Како су ψ_t симплектоморфизми за свако t и векторска поља X_t су симплектичка и важи $di(X_t)\omega = 0$. Ако су све ове 1-форме тачне тада постоји глатка фамилија Хамилтонових функција $H_t : M \to R$ таква да је:

$$i(X_t)\omega = dH_t.$$

Нека је за свако t X_t Хамилтоново векторско поље придружено функцији H_t. Подсетимо се да се у овој ситуацији ψ_t назива Хамилтонова изотопија генерисана временски зависним Хамилтонијаном H_t. Симплектоморфизам $\psi \in Symp(M, \omega)$ се назива Хамилтоновим ако постоји Хамилтонова изотопија $\psi_t \in Symp(M, \omega)$ од $\psi_0 = id$ до $\psi_1 = \psi$. Простор Хамилтонових симплектоморфизама означавамо са $Ham(M, \omega) = Ham(M)$. Навикли смо да су групе у геометрији дате трансформацијама које чувају задату структуру, што овде није случај и није одмах јасно да је $Ham(M)$ група.

Став 20. *Подгрупа $Ham(M, \omega) \subset Symp(M, \omega)$ је нормална и путно повезана.*

Доказ:
Ако је $H_t = 0$ тада је и $dH_t = 0$ и добијамо векторско поље $X_t = 0$ које генерише изотопију $\psi_t = id$, јер је тада $\frac{d\psi_t}{dt} = 0$. Из овога видимо да је id неутрал у $Ham(M)$.

Нека су сад ψ_t и ϕ_t Хамилтонове изотопије генерисане временски зависним Хамилтонијанима H_t и K_t. Показаћемо да је $\psi_t \circ \phi_t$ генерисана Хамилтонијаном дефинисаним са:

$$(H \sharp K)_t = H_t + K_t \circ \psi_t^{-1}.$$

По дефиницији је:

$$i(X_{H\sharp K})\omega = \omega(X_{H\sharp K}, \cdot).$$

Такође је:

$$i(X_{H\sharp K})\omega = d(H\sharp K) = d(H_t + K_t \circ \psi_t^{-1}) =$$

$$dH_t + dK_t \circ d\psi_t^{-1} = \omega(X_{H_t}, \cdot) + \omega(X_{K_t}, d\psi_t^{-1}) =$$

$$\omega(X_{H_t}, \cdot) + \omega(d\psi_t(X_{K_t}), \cdot) = \omega(X_{H_t} + d\psi_t(X_{K_t}), \cdot).$$

Из овога можемо закључити да је:

$$X_{H\sharp K} = X_{H_t} + d\psi_t(X_{K_t}).$$

Са друге стране диференцирањем добијамо:

$$\frac{d(\psi_t \circ \phi_t)}{dt} = \frac{d\psi_t}{dt} + d\psi_t(\frac{d\phi_t}{dt}) = X_{H_t} + d\psi_t(X_{K_t}).$$

Овим је показано да је $Ham(M)$ затворено за композицију.

За инверз посматрајмо:

$$\overline{H}_t = -H_t \circ \psi_t.$$

На основу показаног знамо да је:

$$H\sharp\overline{H} = 0,$$

па видимо да је $Ham(M)$ затворен за инверз. Овим смо показали да је $Ham(M)$ заиста група.

Нека је сада χ произвољан симплектоморфизам. Да бисмо показали да је $\chi \circ \psi_t \circ \chi^{-1}$ Хамилтонов дефинишимо:

$$H_t^\chi = H_t \circ \chi^{-1}.$$

Можемо извести сличан рачун као и раније:

$$i(X_{H_t^\chi})\omega = \omega(X_{H_t^\chi}, \cdot)$$

$$i(X_{H_t^\chi})\omega = dH_t^\chi = d(H_t \circ \chi^{-1}) =$$
$$dH_t \circ d\chi^{-1} = \omega(X_{H_t^\chi}, d\chi^{-1}) =$$
$$\omega(d\chi(X_{H_t^\chi}), \cdot).$$

Овим смо показали да је:

$$X_{H_t^\chi} = d\chi(X_{H_t^\chi}).$$

Такође диференцирањем добијамо исти израз:

$$\frac{d}{dt}(\chi \circ \psi_t \circ \chi^{-1}) = d\chi(X_{H_t^\chi}),$$

па можемо заључити да је група $Ham(M)$ нормална.

Путна повезаност је очигледна из дефиниције.

Q.E.D.

Претходне дефиниције можемо уопштити и на случајеве када M није компактна, при чему ћемо захтевати да је без границе. У овом случају ћемо посматрати симплектоморфизме са компактним носачем, а групе ћемо означавати са $Symp^c(M) = Symp^c(M, \omega)$ и $Ham^c(M) = Ham^c(M, \omega)$. У овим групама имамо топологију C^1 конвергенције на компактним скуповима.

$$Symp^c(M) = \bigcup_{K \subset M \ \ K \ kompaktan} Symp^K(M)$$

где смо са $Symp^K(M)$ означили симплектоморфизме са носачем у компактном скупу K. Овде важи да за сваки коначан непрекидан пут $\phi_t, t \in [0,1]$ у $Symp^c(M)$ постоји компактан скуп K који садржи све носаче ϕ_t. Потпуно аналогно:

$$Ham^c(M) = \bigcup_{K \subset M \ \ K \ kompaktan} Ham^K(M)$$

где $Ham^K(M)$ садржи све симплектоморфизме ϕ који су временске функције неке Хамилтонове изотопије са носачем у K.

Став 21. *Нека имамо многострукост са тачном формом $(M, \omega = -d\lambda)$ и фамилију дифеоморфизама ϕ_t са компактним носачем уз услов $\phi_0 = id$. Тада је:*

1. *ψ_t симплектоморфизам за свако t ако и само ако је форма $\psi_t^*\lambda - \lambda$ затворена за свако t;*

2. *ψ_t Хамилтонов симплектоморфизам за свако t ако и само ако је форма $\psi_t^*\lambda - \lambda$ тачна за свако t.*

Доказ:

Први део става следи из дефиниције, јер је ψ_t симплектичка ако и само ако је $\psi_t^*\omega = \omega$, а то значи да је и $d(\psi_t^*\lambda - \lambda) = 0$.

Подсетимо се да је ψ_t Хамилтонов ако само ако је форма $i(X_t)\omega = dH_t$ тачна. Применом Картанове формуле добијамо:

$$\psi_t^*\lambda - \lambda = \psi_t^*\lambda - \psi_0^*\lambda = \int_0^t \frac{d}{ds}\psi_s^*\lambda ds =$$

$$\int_0^t \psi_s^*(i(X_s)(-\omega) + d(i(X_s)\lambda))ds = d\int_0^t \psi_s^*(i(X_s)\lambda)ds - \int_0^t \psi_s^*(i(X_s)\omega).$$

Добили смо да је $\psi_t^*\lambda - \lambda$ тачна форма за свако t ако и само ако је $\int_0^t \psi_s^*(i(X_s)\omega)$ тачан за свако t, а ово важи ако и само ако је форма $\psi_t^*(i(X)\omega)$ тачна.

Q.E.D.

Овде можемо посматрати хомоморфизам:

$$Symp_0^c(M) \to H_c^1(M;R) \qquad \psi \mapsto [\lambda - \psi^*\lambda].$$

И такође слично као што ћемо показати касније за компактне многострукости овде имамо тачан низ:

$$0 \to Ham^c(M) \to Symp_0^c \to H_c^1(M;R) \to 0.$$

Објаснимо још мало алгебарску структуру групе $Ham(M)$ у следећих неколико ставова.

Став 22. *Нека су ψ_t и ϕ_t Хамилтонови токови генерисани Хамилтоновим функцијама F и G. Ако за свако t важи да је $\psi_t \circ \phi_t = \phi_t \circ \psi_t$ тада је $\{F, G\} = 0$.*

Доказ:

Као што смо видели у доказу става да је $Ham(M)$ група, Хамилтоновим токовима $\psi_t \circ \phi_t$ и $\phi_t \circ \psi_t$ одговарају :

$$F + G \circ \psi_t^{-1} \qquad G + F \circ \phi_t^{-1}.$$

И како су једнаки за свако t имамо:

$$F + G \circ \psi_t^{-1} = G + F \circ \phi_t^{-1}.$$

Сада ову једнакост можемо диференцирати у односу на t и добијамо следећи низ једнакости:

$$-dG(X_F) = -dF(X_G),$$

$$\omega(X_G, X_F) = \omega(X_F, X_G),$$

$$\{F, G\} = \{G, F\}.$$

Из антикомутативности Пуасонове заграде имамо тврђење става.

Q.E.D.

Став 23. *Нека је* (M,ω) *симплектичка многострукост и* $U \subset M$ *отворен и непразан подскуп. Тада постоје* $\psi, \phi \in Ham(M,\omega)$ *такви да им је носач у* U *и* $\psi \circ \phi \neq \phi \circ \psi$.

Доказ:
Изаберимо тачку $x \in U$ као и тангентне векторе $X, Y \in T_x U$ такве да је $\omega(X,Y) \neq 0$. Конструишемо функције F и G такве да је:

$$dF_x = i(X)\omega_x, \qquad dG_x = i(Y)\omega_x.$$

Овакве функције можемо увек добити у тачки. Затим, дефинишемо ван тачке x функције на произвољан начин. Изаберимо и скуп V такав да је $x \in V \subseteq \overline{V} \subset U$. На основу Урисонове леме постоји функција:

$$\rho : M \to R,$$
$$\rho(x) = \begin{cases} 1 & x \in V, \\ 0 & x \in U^c. \end{cases}$$

Сада можемо дефинисати нове функције множењем почетних са ρ:

$$\widetilde{F} = \rho \cdot F, \qquad \widetilde{G} = \rho \cdot G.$$

Придружимо овим функцијама Хамилтонове дифеоморфизме ψ и ϕ. Тада је у тачки x $\psi \circ \phi \neq \phi \circ \psi$, на основу претходног става, јер је:

$$\{\widetilde{F}, \widetilde{G}\}_x = \{F, G\}_x = \omega(X_F, X_G)_x = \omega(X,Y) \neq 0.$$

На основу њихове конструкције носач функција $\widetilde{F}$ и $\widetilde{G}$ је у U, па је и носач ψ и ϕ у U.

Q.E.D.

Наведимо у вези са овом темом још две теореме које је дао Бањага (видети [1]):

Теорема 9. *Ако је* (M,ω) *затворена симплектичка многострукост група* $Ham(M,\omega)$ *је проста.*

Теорема 10. *Нека су* (M_1,ω_1) *и* (M_2,ω_2) *две затворене симплектичке многострукости чије су групе Хамилтонових дифеоморфизама изоморфне. Тада су ове многострукости конформно симплектоморфне, тј. постоји дифеоморфизам* $\psi : M_1 \to M_2$ *и број* $c \neq 0$ *тако да је* $\psi^*\omega_2 = c\omega_1$.

Другим речима теорема говори да алгебарска структура групе Хамилтонових дифеоморфизама одређује симплектичку многострукост до на фактор.

5 C^1 и C^0 флукс-хипотеза

Дефинисаћемо флукс хомоморфизам на универзалном наткривању $\widetilde{Symp_0(M)}$ (погледати додатак). Претпоставимо да је M затворена многострукост и означимо са $\widetilde{Symp_0(M,\omega)}$ универзално наткривање компоненте идентитете. Тачка у $\widetilde{Symp_0(M,\omega)}$ је хомотопска класа глатког пута $\psi_t \in Symp_0(M,\omega)$ са фиксним крајевима $\psi_0 = id$ и $\psi_1 = \psi$. Ову класу ћемо означити са $\{\psi_t\}$. Структура групе може бити уведена на два еквивалентна начина као композиција симплектоморфизама или као настављање путева. Тако можемо мислити о $\{\psi_t\} \cdot \{\phi_t\}$ као о класи еквиваленције пута $\psi_t \circ \phi_t$ или као о класи еквиваленције глатке репараметризације дате са :

$$\chi_t = \begin{cases} \phi_{2t} & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \psi_{2t-1} \circ \phi_1 & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Може се показати да је пут $\psi_t \circ \phi_t$ хомотопан χ_t са фиксним крајевима, па имамо једнакост класа:

$$\{\chi_t\} = \{\psi_t \circ \phi_t\}.$$

Дефиниција 9. *Флукс хомоморфизам $Flux : \widetilde{Symp_0(M)} \to H^1(M,R)$ дефинишемо са :*

$$Flux(\{\psi_t\}) = \int_0^1 [i(X_t)\omega]\, dt \in H^1(M,R)$$

где је X_t векторско поље дефинисано са:

$$\frac{d}{dt}\psi_t = X_t \circ \psi_t.$$

Морамо најпре проверити да је флукс добро дефинисан тј. да зависи само од хомотопске класе са фиксним крајевима пута ψ_t. Користићемо уобичајену идентификацију $H^1(M,R)$ са $Hom(\pi_1(M),R)$, тј. сматраћемо да кохомолошка класа одговара хомоморфизму $\pi_1(M) \to R$ дефинисаном са :

$$\gamma \mapsto \int_0^1 \int_0^1 \omega(X_t(\gamma(s)), \dot{\gamma}(s))ds\ dt.$$

Став 24. *Флукс је добро дефинисан, тј. десна страна претходне формуле зависи само од хомотопске класе γ и хомотопске класе ψ_t са фиксним крајевима.*

Доказ:
Како је ψ_t фамилија симплектоморфизама 1-форме $i(X_t)\omega$ су затворене. Дефинишимо сада пресликавање $\beta : S^1 \times [0,1] \to M$ са:

$$\beta(s,t) = \psi_t^{-1}(\gamma(s)).$$

Диференцирајући једнакост $\psi_t(\beta(s,t)) = \gamma(s)$ у односу на s и t добијамо:

$$d\psi_t(\beta)\frac{\partial \beta}{\partial s} = \dot{\gamma}(s) \qquad d\psi_t(\beta)\frac{\partial \beta}{\partial t} = -X_t(\gamma(s))$$

и како су ψ_t симплектоморфизми важи $\psi_t^* \omega = \omega$ па имамо:

$$Flux(\{\psi_t\})(\gamma) = \int_0^1 \int_0^1 \omega\left(\frac{\partial \beta}{\partial s}, \frac{\partial \beta}{\partial t}\right) ds\ dt.$$

Геометријски ово значи да је β пресликавање цилиндра $S^1 \times [0,1]$ на M са фиксираним крајним кружницама. Закључујемо да једначина зависи само од хомотопске класе ψ_t са крајевима $\psi_0 = id$ и $\psi_1 = \psi$, тј. дефиниција флукса је коректна.

Q.E.D.

Овај став има и геометријску интерпретацију:
вредност $Flux(\{\psi_t\})$ на петљи γ је заправо симплектичка површина ограничена петљом γ при изотопији ψ_t. Сличан аргумент важи и ако посматрамо природније пресликавање $\beta'\,[0,1] \times S^1 \to M$ дато са:

$$\beta'(t,\theta) = \psi_t(\gamma(\theta)).$$

Ово пресликавање представља слику петље γ при току ψ_t.

Став 25.

$$\int \beta^* \omega = \int \beta'^* \omega.$$

Доказ:
Довољно је показати да су пресликавања:

$$\beta'(t,\theta) = \psi_t(\gamma(\theta)) \quad \text{и} \quad \psi(\beta(\theta, 1-t)) = \psi_1 \circ \psi_{1-t}(\gamma(\theta))$$

хомотопна са фиксираним крајним кружницама (у $t = 0$ и $t = 1$), а то важи јер су путеви $\{\psi_t\}$ и $\{\psi_1 \circ \psi_{1-t}\}$ хомотопни са фиксним крајевима. (Довољно је уочити фамилију симплектоморфизама $\psi_{t,s} = \psi_t \circ \psi_s, t \geq s$.)

Сада следи једна од најважнијих теорема која нам даје везу између флукс хомоморфизма и Хамилтонових симплектоморфизама.

Теорема 11. *Нека је $\psi \in Symp_0(M, \omega)$. Тада је ψ Хамилтонов симплектоморфизам ако и само ако постоји симплектичка изотопија:*

$$[0, 1] \to Symp_0(M, \omega) : [0, 1] \mapsto \psi_t$$

таква да важи:

$$\psi_0 = id \qquad \psi_1 = \psi \qquad Flux(\{\psi_t\}) = 0.$$

Такође ако је $Flux(\{\psi_t\}) = 0$ тада је $\{\psi_t\}$ изотопан са фиксираним крајевима Хамилтоновој изотопији.

Доказ:
Ако је ψ Хамилтонијан он је крајња тачка Хамилтонове изотопије ψ_t која одговара фамилији Хамилтонових функција $H_t : M \to R$ и:

$$Flux(\{\psi_t\}) = \int_0^1 [i(X_t)\omega]\, dt = \int_0^1 [dH_t]\, dt = 0.$$

Обратно, нека је $\psi_t \in Symp_0(M, \omega)$ симплектичка изотопија од $\psi_0 = id$ до $\psi_1 = \psi$ таква да је $Flux(\{\psi_t\}) = 0$ и дефинишемо $X_t \in \chi(M, \omega)$ са:

$$\frac{d}{dt}\psi_t = X_t \circ \psi_t.$$

Знамо да је интеграл $\int_0^1 i(X_t)\omega\ dt$ тачан и треба да мењамо изотопију ψ_t тако да је $i(X_t)\omega$ тачна за свако t. Еквивалентно је да треба да је интеграл $\int_0^T i(X_t)\omega\ dt$ тачан за свако $T \in [0, 1]$. Први корак је модификовати ψ_t Хамилтоновом изотопијом тако да добијемо да је 1-форма $\int_0^1 i(X_t)\omega\ dt$ нула.
Како је $Flux(\{\psi_t\}) = 0$ постоји функција $F : M \to R$ таква да је:

$$\int_0^1 i(X_t)\omega\ dt = dF.$$

Нека је ϕ_F^s Хамилтонов ток ове функције. Како је овај ток Хамилтонов довољно је доказати теорему за композицију $\phi_F^{-1} \circ \psi$. Ово је крајња тачка настављања путева ψ_t' дефинисаног са:

$$\psi_t' = \begin{cases} \psi_{2t} & 0 \leq t \leq 1/2, \\ \phi_F^{1-2t} \circ \psi_1 & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Изотопија ψ_t' је генерисана фамилијом векторских поља X_t' таквим да је $\int_0^1 X_t' dt = 0$. Дакле можемо узети да је $\psi = \psi_1$ за неку изотопију са $\int_0^1 X_t dt = 0$.
Нека за свако t важи да је $\theta_t^s \in Symp_0(M,\omega), s \in R$ ток генерисан векторским пољем:

$$Y_t = -\int_0^t X_\lambda \, d\lambda$$

$$\frac{d}{ds}\theta_t^s = Y_t \circ \theta_t^s \qquad \theta_t^0 = id.$$

Из $Y_0 = Y_1 = 0$ следи да је $\theta_0^s = \theta_1^s = id$ за свако s па је :

$$\phi_t = \theta_t^1 \circ \psi_t$$

жељена изотопија од $\phi_0 = id$ до $\phi_1 = \psi_1 = \psi$. Ово следи из тога што је флукс хомоморфизам група и важи:

$$\begin{aligned} Flux(\{\phi\}_{0 \leq t \leq T}) &= Flux\left(\{\theta_t^1\}_{0 \leq t \leq T}\right) + Flux\left(\{\psi_t\}_{0 \leq t \leq T}\right) \\ &= Flux\left(\{\theta_T^s\}_{0 \leq s \leq 1}\right) + \int_0^T [i(X_t)\omega] \, dt \\ &= [i(Y_T)\omega] + \int_0^T [i(X_t)\omega] \; dt = 0. \end{aligned}$$

У другој једнакости смо искористили да је флукс хомотопно инваријантан, а у трећој да је θ_T^s ток Y_T.

Q.E.D.

Приметимо да сви ови резултати важе и ако M није компактна многострукост при чему се посматрају симплектоморфизми са компактним носачем и група $H_c^1(M,R)$.

Став 26. *Ако је $\omega = -d\lambda$ и $\psi_t : M \to M$ симплектичка изотопија са компактним носачем тада је $Flux(\{\psi_t\}) = [\lambda - \psi_1^*\lambda]$.*

Доказ:
Ако је ψ_t генерисана векторским пољем X_t са компактним носачем тада важи:

$$[i(X_t)\omega] = -[\psi_t^* i(X_t) d\lambda] = -[\psi_t^* L_{X_t}\lambda] = -\frac{d}{dt}[\psi_t^*\lambda].$$

Одавде следи закључак става инеграцијом од 0 до 1.

Q.E.D.

Посматрајмо кореспонденцију $\psi \to \sigma = C(\psi)$ између симплектоморфизама $\psi : M \to M$ који су довољно C^1 близу идентитети и затворених 1-форми σ на M. Прецизније нека је $\Psi : N(\Delta) \to N(M_0)$ локални симплектоморфизам између околине дијагонале $\Delta \subset M \times M$ и околине нултог сечења $M_0 \subset T{*}M$ такав да је $\Psi^*\omega_{can} = -(\omega)\times\omega$ и $\Psi(q,q) = (q,0)$ за $q \in M$. Тада је $\sigma = C(\psi) \in \Omega^1(M)$ дефинисано са:

$$\Psi(graph(\psi)) = graph(\sigma).$$

Став 27. *Ако је $\psi_t \in Symp(M)$ симплектичка изотопија таква да је ψ_t довољно близу идентитети у C^1 топологији за свако t тада је:*

$$Flux(\{\psi_t\}) = -[\sigma_1]$$

где је где је $\sigma_t = C(\psi_t)$. Специјално ψ_t је Хамилтонова изотопија ако и само ако су 1-форме σ_t тачне.

Доказ:
Посматрајмо локалну симплектичку изотопију:

$$\Phi_t = \Psi \circ (id \times \psi_t) \circ \Psi^{-1}$$

у $N(M_0) \subset T^*M$. Постоји глатка фамилија дифеоморфизама $f_t : M \to M$ таква да важи:

$$\Phi_t \circ i = \sigma_t \circ f_t$$

где је $i : M \to T^*M$ инклузија нултог сечења. Можемо посматрати σ_t као пресликавања $M \to T^*M$. Означимо са $i_\Delta = \Psi^{-1} \circ i : M \to M \times M$ инклузију дијагонале. Тада је:

$$Flux(\{\psi_t\}) = i_\Delta^* Flux(\{id \times \psi_t\}) = i_\Delta^* \Psi^* Flux(\{\Phi_t\}) = i^* Flux(\{\Phi_t\}).$$

Може се показати да иако изотопија Φ_t на отвореној околини нултог сечења у T^*M није са компактним носачем можемо применити претходни став $Flux(\{\Phi_t\}) = [\lambda_{can} - \Phi_1^*\lambda_{can}]$. Следи:

$$i^*Flux(\{\Phi_t\}) = -\left[i^*\Phi_1^*\lambda_{can}\right] = -\left[f_1^*\sigma_1^*\lambda_{can}\right] = -\left[\sigma_1\right].$$

Овде смо искористили да је $\sigma^*\lambda_{can} = \sigma_1$ и чињеницу да је f_1 изотопно идентитети. Овим је став доказан.

Q.E.D.

Ако је ψ_t Хамилтонова изотопија таква да је само у крајњој тачки $\psi = \psi_1$ довољно C^1 близу идентитети тада 1-форма $\sigma = C(\psi)$ не мора бити тачна, али на основу наредног става кохомолошка класа σ мора припадати слици:

$$\Gamma_\omega = Flux(\pi_1(Symp_0(M))) \subset H^1(M;R).$$

Група $\Gamma = \Gamma_\omega$ се назива флукс група или Калабијева група. Она је подгрупа $H^1(M, P_\omega)$ где је $P_\omega = [\omega] \cdot H_2(M;Z) \subset R$ пребројива група периода ω, тј. скуп вредности ω на пребројивој групи $H_2(M;Z)$. Следи да је и Γ пребројива група.

Став 28. *Ако је $\psi \in Symp_0(M,\omega)$ довољно близу идентитете у C^1 топологији и $\sigma = C(\psi) \in \Omega^1(M)$ дефинисано као и раније тада важи:*

$$\psi \in Ham(M,\omega) \Longleftrightarrow [\sigma] \in \Gamma_\omega.$$

Доказ:

Посматрајмо симплектичку изотопију ψ_t задату са $C(\psi_t) = t\sigma$. Тада важи да је:

$$Flux(\{\psi_t\}) = -\left[\sigma\right].$$

Како је ψ Хамилтонов симплектоморфизам може се продужити на петљу: $[0,2] \to Symp_0(M,\omega) : t \mapsto \psi_t$, која је за $t \geq 1$ генерисана Хамилтоновим векторским пољима и задовољава $\psi_0 = \psi_2 = id$. Даље важи да је:

$$Flux(\{\psi_t\}_{0\leq t\leq 2}) = Flux(\{\psi_t\}_{0\leq t\leq 1}) = -[\sigma].$$

Из овога следи да је $[\sigma] \in \Gamma_\omega$.

Обратно, ако је $[\sigma] \in \Gamma_\omega$ изаберимо петљу $\psi_t \in Symp_0(M,\omega)$ са

$Flux(\{\psi_t\}) = [\sigma]$ и продужимо је на интервал $[0,2]$ са $C(\psi_t) = [(t-1)\sigma]$ за t између 1 и 2. Ово можемо урадити кад год је σ довољно мало у C^1 топологији. Добијени пут ψ_t, $0 \leq t \leq 2$ има нула флукс па може бити деформисан у Хамилтонову изотопију. Из овога следи да је $\psi = \psi_2$ Хамилтонов симплектоморфизам.

Q.E.D.

Став 29. *Сваки гладак пут $\psi_t \in Ham(M)$ је генерисан Хамилтоновим векторским пољима.*

Доказ:
Нека је $\psi_0 = id$. Тада је кохомолошка класа $\sigma_t = C(\psi_t)$ у групи $\Gamma_\omega = Flux(\pi_1(Symp_0(M)))$ за довољно мало t. Како је група Γ_ω пребројива глатко пресликавање $t \mapsto [\sigma_t]$ је константа. Како је $\sigma_0 = 0$ следи да је σ_t тачна за свако довољно мало t. Из овога следи да је $Flux(\{\psi_t\}_{0 \leq t \leq \varepsilon}) = 0$ за довољно мало ε, па је ψ_t изотопија за довољно мало t.

Q.E.D.

Став 30. *1. Постоји тачан низ просто повезаних Лијевих група:*

$$0 \to \widetilde{Ham}(M,\omega) \to \widetilde{Symp_0}(M,\omega) \to H^1(M;R) \to 0$$

где је $\widetilde{Ham}(M,\omega)$ универзално наткривање $Ham(M,\omega)$, а треће пресликавање флукс хомоморфизам.

2. Постоји тачан низ Лијевих алгебри:

$$0 \to R \to C^\infty(M) \to \chi(M,\omega) \to H^1(M;R) \to 0$$

где је треће пресликавање $H \mapsto X_H$ а четврто $X \mapsto [i(X)\omega]$.

3. Постоји тачан низ група:

$$0 \to \pi_1(Ham(M,\omega) \to \pi_1\left(Symp_0(M,\omega)\right) \to \Gamma_\omega \to 0$$

где је Γ_ω слика од $\pi_1(Symp_0(M,\omega) \subset \widetilde{Symp_0}(M,\omega)$ при флукс хомоморфизму.

4. Постоји тачан низ група:

$$0 \to Ham(M,\omega) \to Symp_0(M,\omega) \to H^1(M;R)/\Gamma \to 0$$

где је треће пресликавање индуковано флуксом.

Доказ:
На основу претходног става сваки гладак пут $\psi_t \in Ham(M)$ који полази у идентитети је Хамилтонова изотопија па има флукс 0. То показује да је $\widetilde{Ham}(M) \subset \ker(Flux)$. Обратно ако је $Flux(\{\psi_t\}) = 0$ тада је пут ψ_t хомотопан са фиксним крајевима Хамилтоновој изотопији па је $\{\psi_t\} \in \widetilde{Ham}(M)$. Следи да је $\widetilde{Ham}(M) = \ker(Flux)$. Први део става следи сада из сурјективности флукса.
Остали делови су очигледни осим можда у трећем делу да је пресликавање $\pi_1(Ham((M))$ инјективно у $\pi_1(Symp_0(M))$. Посматрајмо произвољан пут $[0,1] \to \widetilde{Symp_0(M)}$ са крајем у $\widetilde{Ham}$ и изотопно са фиксним крајевима путу у $\widetilde{Ham}(M) = \ker(Flux)$. Ово је сада параметризована верзија првог дела става па и овај део тврђења следи.

Q.E.D.

Подгрупа Γ_ω групе $H^1(M;R)$ из претходних ставова још увек није добро проучена, а колики је њен значај показује следећа теорема.

Теорема 12. *Нека је (M, ω) компактна симплектичка многострукост и $\Gamma_\omega \subset H^1(M;R)$ слика $\pi_1(Symp_0(M))$ при флукс хомоморфизму. Тада су еквивалемтна тврђења:*

1. *$Ham(M, \omega)$ је подмногострукост $Symp(M, \omega)$;*
2. *$Ham(M, \omega)$ је C^1 затворена у $Symp(M, \omega)$;*
3. *Γ_ω је дискретна група.*

Доказ:
Посматрајмо поново већ дефинисан дифеоморфизам:

$$\psi \to C(\psi).$$

Добијамо идентификацију C^1 околине:

$$U \subset Symp_0(M, \omega)$$

идентитете у групи симплектоморфизама (M, ω) са C^1 околином:

$$V \subset \ker\ d \subset \Omega^1(M)$$

нуле у простору затворених 1-форми. На основу доказаног става овај дифеоморфизам слика Хамилтонове дифеоморфизме на скуп затворених 1-форми у V чија хомолошка класа је у $\Gamma = \Gamma_\omega$.

$$C(Ham(M,\omega) \cap U) = V_\Gamma = \{\sigma \in V \mid [\sigma] \in \Gamma\}.$$

Сада Γ је дискретна ако и само ако V_Γ садржи само тачне форме у довољно малој околини V нуле, а то важи ако и само ако је $Ham(M,\omega) \cap U$ дифеоморфно линеарном потпростору V, за довољно мало U. Овим је показана еквиваленција првог и трећег тврђења. Доказујемо да из другог следи трећи део става. Претпоставимо супротно да Γ није дискретна. Како је Γ пребројива подгрупа реалног векторског простора $H^1(M;R)$ следи да није затворена и скуп $cl(\Gamma) \setminus \Gamma$ садржи прозвољно мали елемент. Следи да постоји затворена 1-форма $\sigma \in V \setminus V_\Gamma$ која може бити апроксимирана низом $\sigma_\nu \in V_\Gamma$ у C^∞ топологији. Изаберимо $\psi, \psi_\nu \in Symp_0(M,\omega)$ тако да је $C(\psi) = \sigma$ и $C(\psi_\nu) = \sigma_\nu$. Тада је на основу става 28 $\psi_\nu \in Ham(M,\omega)$ и $\psi \in Symp_0(M,\omega) \setminus Ham(M,\omega)$. Како ψ_ν C^∞ конвергира ка ψ добили смо контрадикцију.
Остало је још да покажемо да из трећег дела става следи други. Претпоставимо супротно претпоставци да $Ham(M,\omega)$ није C^1 затворена у $Symp_0(M,\omega)$. Тада мора постојати симплектоморфизам $\psi \in Symp(M,\omega)$ који може бити апроксимиран низом $\psi_\nu \in Symp(M,\omega)$ у C^1 топологији. Фиксирајмо довољно велики цео број k такав да је $\psi_k^{-1} \circ \psi \in U$. Тада је $\left[C(\psi_k^{-1} \circ \psi)\right] \notin \Gamma$ на основу става 28 и $\gamma_\nu = [C(\psi_\nu^{-1} \circ \psi_\nu)] \in \Gamma$ за свако довољно велико ν. Следи да Γ није затворена па није ни дискретна што је контрадикција. Овим смо доказали целу теорему.

Q.E.D.

Из претходне теореме видимо да ако је Γ_ω дискретна тада је $Ham(M,\omega)$ Лијева подгрупа $Symp(M,\omega)$, чија је Лијева алгебра простор Хамилтонових векторских поља. Подсетимо се да је Γ_ω подгрупа $H^1(M, P_\omega)$ где је $P_\omega = [\omega] \cdot H_2(M;Z) \subset R$ пребројива група периода ω. Видимо да је Γ_ω дискретна када је P_ω дискретна, рецимо када је $[\omega] \in H_2(M;Q)$. Када M није компактна и ω је тачна тада је Γ тривијална група, па самим тим и дискретна. Познато је да је Γ дискретна и када је Келерова или општије Лефшецова многострукост (за дефиниције видети додатак). Решени су још неки случајеви у којима се зна да је Γ дискретна, али који захтевају тешке методе савремене симплектичке топологије.

Сада можемо дати флукс-хипотезе:

Хипотеза 1. *За све компактне симплектичке многострукости* (M, ω) *група* $Ham(M, \omega)$ *је* C^1 *затворена у групи* $Symp_0(M, \omega)$.

На основу претходне теореме еквивалентна је хипотеза:

Хипотеза 2. *Флукс група је дискретна за све компактне симплектичке многострукости.*

Такође можемо дати и хипотезу у случају C_0 конвергенције:

Хипотеза 3. *За све симплектичке многострукости група* $Ham(M, \omega)$ *је* C^0 *затворена у компоненти идентитете у групи свих симплектоморфизама.*

Приметимо да група $Ham(M, \omega)$ не мора бити C^0 затворена у групи симплектоморфизама, мада нису још увек пронађени контрапримери. Могуће је да група $Symp^c(R^{2n})$ има више компоненти повезаности. Произвољан симплектоморфизам ϕ са компактним носачем у R^{2n} може се рескалирати да има носач у произвољно малој околини тачке. Ово нам даје изотопију од ϕ до елемента који је произвољно C^0 близу идентитете. Ово је један могући правац даљег истраживања јер није познато да ли је $Symp^c(R^{2n})$ неповезан за неко n. Један од познатих резултата је да је $Symp^c(R^4)$ контрактибилан, па самим тим и повезан (видети [6]).

Надаље ћемо под флукс-хипотезом подразумевати C^1 хипотезу.

Главни проблем флукс-хипотезе можемо видети и на следећи начин. Посматрајмо дугачак Хамилтонов пут $\{\phi_{t\in[0,1]}\}$ који почиње у идентитети и чији график призвољно пута напушта Вајнштајнову околину U дијагонале у $(M \times M, -\omega \times \omega)$, али се враћа у околину у тренутку $t = 1$. Као што је познато U можемо идентификовати са нултим сечењем у котангентном раслојењу M и тада је Хамилтонова изотопија која остаје унутар U дата као график фамилије тачних 1-форми. Ако пут напушта околину нема аргумента да 1-форма која одговара крајњој тачки буде тачна.

Може се доказати да ако је $Ham(M)$ C^k затворен за неко $k \geq 1$ еквивалентно је да је C^k затворен за свако $k \geq 1$. Само се случај C^0 конвергенције суштински разликује и делује тешко решив сем у неким специјалним случајевима. Све познате инваријанте су C^0 инваријанте придружене Хамилтоновим путевима али зависе од крајње тачке. Такође важи да је група свих симплектоморфизама $Symp(M)$ C^0 затворена у групи свих дифеоморфизама, али није познато да ли је компонента идентитете $Symp_0(M)$ C^0 затворена у групи $Symp(M)$ (погледати [5]).

Да бисмо разјаснили везу између флукс-хипотезе и тополошких особина орбита $\{\phi_t(x)\}$ петљи $\{\phi_t\}$ наведимо теорему која се може наћи у [5]:

Теорема 13. *За сваки Хамилтонов ток $\{\phi_{t\in[0,1]}\}$ на затвореној симплектичкој многострукости постоји најмање једна фиксна тачка $x \in M$ за ϕ_1 тако да је петља $\{\phi_t(x)\}_{t\in[0,1]}$ контрактибилна. Специјално свака петља у G на којој се флукс анулира евалуацијом се слика у $0 \in \pi_1(M)$.*

Као последицу ове теореме имамо следећи став.

Став 31. *Флукс хомоморфизам има дискретну слику на $\pi_1(Symp_0(M))$ ако и само ако има дискретну слику на подгрупи K групе $\pi_1(Symp_0(M))$ формираној од петљи са контрактибилним орбитама у M.*

Скица доказа:
Морамо показати да ако флукс хомоморфизам има дискретну слику на подгрупи формираној од симплектичких петљи са тривијалном евалуацијом у $\pi_1(M)$ цела слика Γ је дискретна. Да бисмо видели ово довољно је доказати да постоји околина нуле U у $H^1(M;R)$ таква да је свака класа $\alpha \in \Gamma \cap U$ слика при $Flux$ симплектичке петље са контрактибилном орбитом.

Ако је U довољно мала околина може да се докаже да тада свака класа $\alpha \in U$ може бити представљена 1-формом λ која генерише аутономни локално Хамилтонов ток ψ_t^λ чије затворене орбите у временском интервалу $t \in [0,1]$ су нуле λ.

Да видимо да U има тражена својства уочимо $\alpha \in \Gamma$. Тада је ψ_1^λ ϕ_1 за Хамилтонов ток $\{\phi_t\}$. Може се доказати да постоји x фиксна тачка $\phi_1 = \psi_1^\lambda$, тако да је одговарајућа затворена орбита од $\{\phi_t\}$

контрактибилна. Посматрајмо сада петљу у $Symp_0(M)$ добијену композицијом путева $\{\phi_{1-t}\}$ и $\{\psi_t\}$. Њен флукс је једнак α. Следи да ако су једине фиксне тачке ψ_1^λ нуле λ тада су њихове орбите контрактибилне. Више детаља се може пронаћи у [5].

У светлу претходног излагања делује да је свака симплектичка орбита Хамилтонова до на хомотопију. У општем случају одговор је одричан, а неки специјални случајеви су предмет истраживања (погледати [5]).

Дефиниција 10. *Симплектичко дејство $S^1 = R/Z$ на (M, ω) је једнопараметарска подгрупа $R \to Symp(M) : t \mapsto \psi_t$ симплектоморфизама која има период 1. Дејство се назива Хамилтоновим ако су симплектоморфизми Хамилтонови.*

Аналогно се дефинише и торусно дејство $T^n = R^n/Z^n$ на (M, ω). У [5] се може пронаћи слдећи став:

Став 32. *Нека је (M, ω) затворена симплектичка многострукост.*

1. *У димензији 4 свако симплектичко S^1 дејство са контрактибилном орбитом је Хамилтоново (и има фиксну тачку).*

2. *Постоје не-Хамилтонова симплектичка S^1 дејства на 4 димонзионој многострукости са орбитама хомологним 0 , али које нису контрактибилне.*

3. *У димензији 6 постоје не-Хамилтонова S^1 дејства са фиксном тачком, па и контрактибилним орбитама.*

Из претходног видимо да није могуће разликовати Хамилтонове петље од других на основу само тополошких особина орбита. Ако посматрамо еваулацију: $ev_\phi : H_k(M) \to H_{k+1}(M)$ петље $\{\phi_{t\in[0,1]}\}$, у димензији $k > 0$, она слика k-цикле γ у траг $C_\gamma = \cup_t\{\phi_t(\gamma)\}$. Следи да је $\{\phi_t\}$ Хамилтонова до на хомотопију ако и само ако се $[\omega]$ анулира на слици $ev\,|_{H^1}$.

Напоменимо још једну варијанту флукс-хипотезе. Нека је M симплектичка многострукост и $L \subset M$ Лагранжова подмногострукост и означимо са $H(L)$ (тј. $S(L)$) простор Лагранжових подмногострукости добијених од L Хамилтоновом (тј. Лагранжовом изотопијом). У овом контексту C^i хипотеза гласи да је $H(L)$ C^i затворена у $S(L)$ (видети [5]).

6 Примери

6.1 Разна тврђења

На овом месту навешћемо неке познате резултате, углавном без доказивања, јер докази захтевају напредније симплектичке технике.

- Нека је G група дифеоморфизама који чувају неку дату структуру на M. Тада је c-флукс хомоморфизам:

$$F_c : \pi_1(G) \to H^1(M; R)$$

  дефинисан за пар $(\phi_{t\in[0,1]}, \gamma) \in \pi_1(G) \times H_1(M; R)$. Интеграција класе $c \in H^2(M)$ на трагу $\{\phi_t\}_{t\in[0,1]}$ се анулира ако је c карактеристична класа структуре очуване са G. За случај када је G група симплектичких дифеоморфизама и када је c прва Чернова класа тангентног раслојења симплектичке многострукости флукс се анулира за монотоне многострукости. (Многосотрукост је монотона ако је симплектичка и задовољава $c = k\omega$ за неко $k > 0$). Тврђење се може видети у [5].

- Доказано је такође да је Γ дискретна када је класа симплектичке форме нерастављива, тј. када је $[\omega]$ сума производа елемената $H^1(M; R)$ (видети [5]).

- У случају торуса $T^{2n} = R^{2n}/Z^{2n}$ важи да је $\Gamma_\omega = H^1(T^{2n}; Z)$, па је самим тим и дискретна и флукс-хипотеза важи. Детаљан доказ се може видети у [6].

- Такође флукс-хипотеза важи у случају симплектичког торусног дејства на затворене симплектичке многострукости. Доказ се може видети у [5].

- Флукс-хипотеза важи ако је многострукост сферно рационална. Многострукост је сферно рационална ако је слика сферних 2-класа при интеграционом морфизму $\int \omega : H_2^S \to M$ дискретна подгрупа R (облика λZ за неки ненегативан реалан број λ). Сферне класе можемо схватити као класе које могу бити представљене непрекидним пресликавањима на 2-сфери.

$$H_2^S = im(\pi_2(M) \to H_2(M; Z)).$$

Такође хипотеза важи за многострукости чији је минимални Чернов број нула или није мањи од $\dim M$, који је ненегативни генератор слике H_2^S прве Чернове класе тангентног раслојења M. Хипотеза важи и ако M има димензију 4 и $\pi_1(M)$ дејствује тривијално на $\pi_2(M)$. Доказ ових тврђења се може видети у [5].

- Тек недавно је Оно у раду [12] доказао да је за затворене симплектичке многострукости флукс група дискретна, уз помоћ најсофистициранијих и најнапреднијих верзија Флорове хомологије.

- Посматрајмо простор глатких пресликавања $M \to M$ и означимо са $Map_0(M)$ компоненту повезаности идентитете. Флукс хомоморфизам је тада могуће проширити до хомоморфизма $\pi_1(Map_0(M)) \to H^1(M; R)$. Дефинишимо Γ_{top} као слику овог пресликавања. Показано је да C^0 хипотеза важи у случају Лефшецове многострукости за коју важи да је $\Gamma_{top} = \Gamma$. Доказ се може видети у [5].

6.2 Реалне Ботове многострукости

Сада ћемо детаљније доказати флукс-хипотезу у једном мало једноставнијем случају.

Дефиниција 11. *Реална Ботова кула висине n је низ RP^1 раслојења:*

$$M_n \to M_{n-1} \to \cdots \to M_1 \to pt$$

где је свако RP^1 раслојење $M_i \to M_{i-1}$ пројективизација Витнијеве суме два реална линеарна раслојења на M_{i-1}. Свако M_i се назива реална Ботова многострукост.

Може се приметити да је $M_1 = RP^1$ и $M_2 = (RP^1)^2$ или Клајнова боца. Ако је свако раслојење у кули тривијално тада је $M_n = (RP^1)^n$. Имамо велики избор нетривијалних раслојења на сваком степену куле, па су познате многе различите класе дифеоморфизама у реалним Ботовим многострукостима. Један део Ботових

многострукости је оријентабилан, а неке од њих су симплектичке многострукости и оне су нама овде занимљиве. Показаћемо да за реалне Ботове многострукости важи да су еквивалентни ставови:

1. M је кохомолошки симплектичка (видети додатак);
2. M је симплектичка;
3. M допушта Келерову структуру (видети додатак).

Приметимо да импликације (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) увек важе док обрнуте импликације не важе у општем случају. На пример $CP^2 \sharp CP^2$ је кохомолошки симплектичка, али није симплектичка многострукост јер не допушта скоро комплексну структуру. Постоје и примери многострукости које су симплектичке, али не допуштају Келерову структуру.

Покушајмо сада да друкчије опишемо Ботове многострукости. Нека је $B(n)$ скуп горње троугаоних матрица над прстеном $Z/2$ које на дијагонали имају 0. За $z \in S^1$ и $a \in Z/2 = \{0, 1\}$ дефинишимо $z(a) = z$ ако је $a = 0$ и $z(a) = \overline{z}$ за $a = 1$. Можемо дефинисати и инволуцију a_i на $T^n = (S^1)^n$ са:

$$a_i(z_1, \ldots, z_n) = (z_1, \ldots, z_{i-1}, -z_i, z_{i+1}(A^i_{i+1}), \ldots z_n(A^i_n)),$$

где A^i_j означава елемент матрице A у i-тој врсти и j-ој колони. Означимо са $G(A)$ групу трансформација на T^n генерисану са a_i, и означимо са $M(A) = T^n/G(A)$ количнички простор. $M(A)$ је реална Ботова многострукост и свака Ботова многострукост се може добити као $M(A)$ за неко $A \in B(n)$. Ботова многострукост не одређује јединствено матрицу A, али она ипак садржи све геометријске информације о њој. На пример:

$$M(A) \text{ је оријентабилна} \Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{n} A^i_j = 0 \text{ за свако } i.$$

Такође можемо Ботове многострукости описати као количнички простор R^n са афиним трансформацијама. Нека је $\Gamma(A)$ група афиних трансформација генерисаних са s_i које дефинишемо са:

$$s_i\left(u_1, \ldots, u_n\right) = \left(u_1, \ldots u_{i-1}, u_i + \frac{1}{2}, (-1)^{A^i_{i+1}} u_{i+1}, \ldots, (-1)^{A^i_n} u_n\right).$$

Тада експоненцијално пресликавање $R \to S^1 : u \mapsto \exp(2\pi\sqrt{-1}u)$ индукује дифеоморфизам $R^n/\Gamma(A)$ на $T^n/G(A) = M(A)$.

Нека су $du_1, \ldots du_n$ стандардне 1-форме на R^n. Како је свака du_j инваријантна у односу на паралелну транслацију у R^n оне одговарају формама на $T^n \cong R^{2n}/Z^{2n}$ које ћемо исто означити. Следи да је ендоморфизам a^*_i на $H^*(T^N)$ индукован са $a_i \in G(A)$ дат са:

$$a^*_i([du_j]) = \begin{cases} [du_j] & \textit{ако је } A^i_j = 1 \\ -[du_j] & \textit{ако је } A^i_j = 0 \end{cases}.$$

Приметимо да како је $M(A) = T^n/G(A)$ и $G(A)$ је коначна група важи:

$$H^*(M(A)) = H^*(T^n)^{G(A)}.$$

Став 33. *Нека је J подскуп $\{1, 2, \ldots, n\}$. Тада $\prod_{j\in J}[du_j] \in H^*(T^n)$ је инваријанта у односу на $G(A)$ ако и само ако је $\sum_{j\in J} A_j = 0$ у Z_2.*

Доказ:
Из већ реченог следи:

$$a^*_i\left(\prod_{j\in J}[du_j]\right) = (-1)^{\sum_{j\in J} A^i_j} \prod_{j\in J}[du_j].$$

Следи да је $\prod_{j\in J}[du_j]$ фиксиран са a_i^* ако и само ако је $\sum_{j\in J} A_j^i = 0$, што повлачи закључак става са обзиром да је $G(A)$ генерисана са a_i.

Q.E.D.

Сада можемо формулисати најважнију теорему у са вези Ботовим многострукостима.

Теорема 14. *Нека је $a \in B(2n)$. Тада су еквивалентна тврђења:*

1. *$M(A)$ је кохомолошки симплектичка, тј. постоји $\alpha \in H^2(M(A))$ таква де је α^n различито од нуле.*

2. *Постоји n подскупова $\{j_1, j_{n+1}\}, \dots \{j_n, j_{2n}\}$ скупа $\{1, 2, \dots, 2n\}$ таквих да важи:*
$$\coprod_{k}^{n}\{j_k, j_{k+n}\} = \{1, 2, \dots, 2n\}$$
$$A_{j_1} = A_{j_{n+1}}, \dots A_{j_n} = A_{j_{2n}}.$$

3. *Постоји симплектичка форма на $M(A)$.*

4. *Постоји Келерова структура на $M(A)$.*

Такође свака $\alpha \in H^2(M(A))$ која задовољава први услов може бити представљена као симплектичка форма.

Доказ:
Како је свака симплектичка многострукост кохомолошки симплектичка и свака Келерова многострукост симплектичка довољно је доказати импликације (1) $\Rightarrow$ (2) и (2) $\Rightarrow$ (4).

Претпоставимо да је испуњен први услов. Као што је речено можемо идентификовати $H^*(M(A))$ са $H^*(T^n)^{G(A)}$ па форму α можемо на јединствен начин записати као:

$$\alpha = \sum_{j<k, A_j = A_k} c_{j,k}[du_j \wedge du_k] \qquad c_{j.k} \in R$$

и како је $\alpha^n \neq 0$ следи друго тврђење.

Претпоставимо сада да $A \in B(2n)$ задовољава други услов и идентификујмо R^{2n} са C^n на следећи начин:

$$z_k = u_{j_k} + \sqrt{-1}u_{j_{k+n}}.$$

У овом смислу $\Gamma(A)$ дејствује бихоломорфно и изометрично. У ствари дејство $s_i \in \Gamma(A)$ на C^n може се дати као:

$$s_i(z_1, \dots z_n)_k = \begin{cases} z_k + \frac{1}{2} & \text{ако је } i = j_k \\ z_k + \frac{\sqrt{-1}}{2} & \text{ако је } i = j_{k+n} \\ z_k & \text{ако је } A^i_{j_k} = A^i_{j_{k+n}} = 0 \text{ и } i \neq j_k, j_{k+n} \\ -z_k & \text{ако је } A^i_{j_k} = A^i_{j_{k+n}} = 1 \end{cases}$$

где k са леве стране означава k-ту компоненту. Закључујемо да количнички простор $M(A) = C^n/\Gamma(A)$ наслеђује стандардну Келерову структуру на C^n.

Претпоставимо сада да форма α задовољава први услов теореме. Можемо дефинисати диференцијалну затворену 2-форму на R^{2n} са:

$$\omega = \sum_{j<k, A_j = A_k} c_{j,k} du_j \wedge du_k.$$

Очигледно из услова да је $\alpha^n \neq 0$ следи да се форма ω не анулира па је симплектичка форма на R^{2n}. Како је ω инваријантна за дејство $\Gamma(A)$ на R^{2n} одговара симплектичкој форми на количничком простору $M(A) = R^{2n}/\Gamma(A)$.

Q.E.D.

Теорема 15. *Нека је $M(A)$ реална Ботова многострукост и ω симплектичка форма дефинисана у претходној теореми. Тада је флукс група Γ_ω решеткаста група $H^1(M(A))$ максималног ранга.*

Доказ:
На основу става 33 $H^1(M(A))$ је генерисана са $[du_j]$ са $A_j = 0$. Како је $M(A)$ симплектичка број нула колона у A је паран и $H^1(M(A))$ је парнодимензиони простор, на основу теореме 14, и нека је та димензија $2r$. Из линеарности можемо заменити редослед координата тако да је форма ω на $M(A)$ дата са:

$$\omega = \sum_{i=1}^{r} du_i \wedge du_{i+r} + \sum_{j<k, A_j = A_k \neq 0} c_{j,k} du_j \wedge du_k.$$

Како је $M(A) = T^{2n}/G(A)$ и $A_p = 0$ за $p = 1, \dots 2r$ добијамо да множење S^1 на p-тој координати на T^{2n} одговара дејству S^1 на $M(A)$

и дефинише симплектичку изотопију $\{\phi_t^p\}$. Једнопараметарска фамилија $\{X_t^p\}$ која одговара овој изотопији је тада дата са $\frac{\partial}{\partial u_p}$ до на константу и следи да је:

$$Flux(\{\phi_t^p\}) = \int_0^1 [i(X_t^p)\omega]\, dt = \int_0^1 [du_q]dt = [du_q]$$

где је $q = p + r$ за $1 \leq p \leq r$ и $q = p - r$ за $r + 1 \leq p \leq 2r$. Ово показује да Γ_ω разапиње $H^1(M(A))$ над R. Како је Γ_ω затворена и дискретна у $H^1(M(A))$ она мора бити мрежа пуног ранга.

Q.E.D.

7 Калабијев хомоморфизам

Ради комплетности излагања у овом поглављу позабавићемо се некомпактним случајем и још једним хомоморфизмом названим Калабијев хомоморфизам. (Или понекад други Калабијев хомоморфизам када се под првим подразумева флукс хомоморфизам.)

Нека је (M, ω) некомпактна тачна симплектичка многострукост и изаберимо 1-форму $\lambda \in \Omega^1(M)$ тако да важи:

$$\omega = -d\lambda.$$

Означимо са $Symp_0^c(M, \omega)$ компоненту идентитете групе симплектоморфизама са компактним носачем и са $Ham^c(M, \omega)$ групу Хамилтонових дифеоморфизама са компактним носачем. (Подразумевана је топологија директног лимеса.) Тада, на основу става 21, за $\phi \in Symp_0^c(M, \omega)$ важи да је Хамилтонов ако и само ако постоји функција F таква да је:

$$\phi^*\lambda - \lambda = dF.$$

Дефиниција 12. *За дато $\phi \in Ham^c(M)$ можемо дефинисати:*

$$CAL(\phi) = -\frac{1}{n+1}\int_M F\omega^n$$

и називамо га Калабијевим хомоморфизмом.

Став 34. *Калабијев хомоморфизам је добро дефинисан, тј. број $CAL(\phi)$ не зависи од избора 1-форме λ која задовољава $\omega = -d\lambda$ и пресликавање:*

$$CAL : Ham^c(M) \to R$$

јесте хомоморфизам.

Доказ:

Нека је $\lambda+\alpha$ друга 1-форма таква да је $d\alpha = 0$. Тада како ϕ индукује идентитету у кохомологији форма $\phi^*\alpha - \alpha$ је тачна. Довољно је показати да ако је $\phi^*\alpha - \alpha = dG$ следи да је $\int G\omega^n = 0$ а ово следи из следећих једнакости:

$$\int_M G\omega^n = \int_M G\ d\lambda \wedge \omega^{n-1} = \int_M (d(G\lambda) - dG \wedge \lambda) \wedge \omega^{n-1}$$

$$= \int_M (-\phi^*\alpha + \alpha) \wedge \lambda \wedge \omega^{n-1} = \int_M -\phi^*\alpha \wedge \lambda \wedge \omega^{n-1} + \int_M \phi^*(\alpha \wedge \lambda \wedge \omega^{n-1})$$
$$= \int_M -\phi^*\alpha \wedge (\lambda - \phi^*\lambda) \wedge \omega^{n-1} = 0.$$

Последњи израз је нула јер је α затворена и $\lambda - \phi^*\lambda$ тачна форма. Како ϕ чува ω да бисмо видели да је CAL хомоморфизам можемо извести следећи рачун:

$$CAL(\phi\psi) = -\frac{1}{n+1}\int (F\sharp G)\omega^n = -\frac{1}{n+1}\int (F + G \circ \phi^{-1})\omega^n$$
$$= -\frac{1}{n+1}\int F\omega^n - \frac{1}{n+1}\int G \circ \phi^{-1}\omega^n = CAL(\phi) + CAL(\psi).$$

Q.E.D.

Можемо дати и друкчије образложење претходних тврђења. Познато је да је јединствена функција са компактним носачем F која задовољава $\phi^*\lambda - \lambda = dF$ дата симплектичким дејством:

$$F(z) = \int_0^1 (i(X_s)\lambda - H_s) \circ \phi_s(z) ds$$

где је $\phi_s \in Ham^c(M)$ прозвољна Хамилтонова изотопија од $\phi_0 = id$ до $\phi_1 = \phi$ тј.:

$$\frac{d}{dt}\phi_t = X_t \circ \phi_t \qquad \phi_0 = id \qquad i(X_t)\omega = dH_t.$$

Став 35. *Под претходним претпоставкама важи:*

$$CAL(\phi) = \int_0^1 \int_M H_t\omega^n \ dt$$
$$CAL(\phi) = -\frac{1}{n+1}\int_M \phi^*\lambda \wedge \lambda \wedge \omega^{n-1}.$$

Доказ:

Нека је $F_t : M \to R$ јединствена функција са компактним носачем таква да је $\phi_t\lambda - \lambda = dF_t$. Тада следи:

$$\int_M \phi_t^*\lambda \wedge \lambda \wedge \omega^{n-1} = \int_M (\phi_t^*\lambda - \lambda) \wedge \lambda \wedge \omega^{n-1},$$

$$\int_M (dF_t)\wedge\lambda\wedge\omega^{n-1} = \int_M (d(F_t\lambda) - F_t d\lambda)\wedge\omega^{n-1},$$
$$\int_M d(F_t\lambda\wedge\omega^{n-1}) - \int_M F_t(d\lambda)\wedge\omega^{n-1} = \int_M F_t\omega^n.$$

Да бисмо доказали први део става искористимо да важи:

$$\frac{d}{dt}\int_M F_t\omega^n = \int_M (i(X_t)\lambda - H_t)\omega^n.$$

Како је свака $2n+1$ форма на M нула важи:

$$0 = i(X_t)(\lambda\wedge\omega^n) = (i(X_t)\lambda)\omega^n - \lambda\wedge i(X_t)(\omega^n)$$
$$= (i(X_t)\lambda)\omega^n - n\lambda\wedge i(X_t)\omega\wedge\omega^{n-1}$$
$$= (i(X_t)\lambda)\omega^n + n(dH_t)\wedge\lambda\wedge\omega^{n-1}$$
$$= (i(X_t)\lambda)\omega^n + nd(H_t\lambda)\wedge\omega^{n-1} - nH_t d\lambda\wedge\omega^{n-1}$$
$$= (i(X_t)\lambda + nH_t)\omega^n + nd(H_t\lambda\wedge\omega^{n-1}).$$

Интеграљењем ове једнакости на M добијамо:

$$\int_M (i(X_t)\lambda + nH_t)\omega^n = 0,$$

па даље следи:

$$\frac{d}{dt}\int_M F_t\omega^n = \int_M (i(X_t)\lambda - H_t)\omega^n = -(n+1)\int_M H_t\omega^n$$

чиме је доказан став.

Q.E.D.

Овим је на други начин доказано да је $CAL(\phi)$ добро дефинисан. На основу става 34 Калабијев хомоморфизам се може продужити до:

$$CAL : Symp_0^c(M,\omega)\to R$$

тако да на тачним многострукостима имамо хомоморфизам:

$$Flux\oplus CAL : Symp_0^c \to H_c^1\times R.$$

У општем случају када је M и даље некомпактна али не нужно тачна многострукост можемо дефинисати хомоморфизам на универзалном наткривању $\widetilde{Ham^c}(M)$ формулом:

$$\widetilde{CAL}(\{\phi_t\}) = \int_0^1 \int_M H_t \omega^n \ dt$$

где је H_t јединствени Хамилтонијан са компактним носачем који генерише изотопију ϕ_t. Ако означимо са Λ слику $\pi_1(Ham^c(M))$ при $\widetilde{CAL}$ добијамо индуковани хомоморфизам;

$$CAL : Ham^c(M, \omega) \to R/\Lambda.$$

У некомпактном случају важи и следећа теорема.

Теорема 16. *Ако је M некомпактна многострукост без границе тада је језгро Калабијевог хомоморфизма $CAL : Ham^c(M, \omega) \to R/\Lambda$ проста група.*

Овај став се може видети у [6].

8 Топологија симплектичке групе

Топологија симплектичке групе је веома занимљива за проучавање, јер многа важна и интересантна питања још увек немају одговоре. На пример питања:

- Који дифеоморфизми дате симплектичке многострукости су изотопни симплектоморфизму?
- Ако су два симплектоморфизма глатко изотопни да ли су и симплектички изотопни?

На ова питања још нема општег одговора, већ су урађени само неки важни примери.

Како симплектоморфизми чувају кохомолошку класу $[\omega]$ слика $\pi_0(Symp(M,\omega))$ у $\pi_0(Diff(M))$ је садржана у подгрупи која се састоји од оних елемената који фиксирају $[\omega]$. Посматрајмо за пример стандардни торус $T^{2n} = R^{2n}/Z^{2n}$. Може се доказати да свака матрица $\Psi \in SL(2n, Z)$ даје дифеоморфизам на торусу и тај дифеоморфизам чува кохомолошку класу стандардне симплектичке структуре ако и само ако је Ψ симплектичка матрица. Видимо да је сваки дифеоморфизам који чува кохомолошку класу $[\omega_0]$ хомотопан симплектоморфизму, али за $n \geq 2$ не знамо да ли је изотопан симплектоморфизму. Такође не знамо да ли је сваки симплектоморфизам на T^{2n} симплектички изотопан линеарном симплектоморфизму Ψ.

Особине пресликавања $\pi_0(Symp(M,\omega)) \hookrightarrow \pi_0(Diff(M))$ су за сада испитане само за неке специфичне многострукости, али ми можемо посматрати и општији случај, тј. пресликавање:

$$\pi_k(Symp(M,\omega)) \hookrightarrow \pi_k(Diff(M)).$$

Ово пресликавање није увек сурјективно, на пример ако имамо форму $\tau_\lambda = \lambda\sigma_0 \times \sigma_1$ на $S^2 \times S^2$ где су σ_0 и σ_1 стандардне површинске форме са укупном површином 1 и $\lambda \geq 1$. Показано је да се топологија групе $G_\lambda = Symp(S^2 \times S^2, \tau_\lambda)$ мења са променом параметра λ. Када је $\lambda = 1$ $\pi_0(G_\lambda) = Z/Z_2$ је генерисана дифеоморфизмима који мењају две сфере, и G_λ прелази деформационом ретракцијом у Лијеву групу $SO(3) \times SO(3)$. Када је $\lambda > 1$ $\pi_0(G_\lambda) = 0$ и $\pi_1(G_\lambda)$ је бесконачна (елемент бесконачног реда је ротација).

Како $\pi_1(Diff(S^2 \times S^2))$ има ред најмање 2 следи да пресликавање $\pi_1(G_\lambda) \to \pi_1(Diff(S^2 \times S^2))$ није сурјективно. Конструисани су и примери некомпактних многострукости за које важи чињеница да се $\pi_1(Symp^c(M,\omega))$ не слика сурјективно у $\pi_1(Diff(M))$.

Постоји и други разлози да очекујемо да је $\pi_k(Symp(M,\omega))$ мања од $\pi_k(Diff(M))$. Посматрајмо евалуацију:

$$\pi_k(Ham(M,\omega)) \to \pi_k(M)$$

На основу става 30 може се доказати да инклузија $Ham(M) \hookrightarrow Symp_0(M)$ индукује изоморфизам на π_k, па када је $k > 1$ свеједно је да ли посматрамо $\pi_k(Ham(M))$ или посматрамо $\pi_k(Symp_0(M,\omega))$, али за случај $k = 1$ постоји разлика. На пример, познато је да је евалуација тривијална на $\pi_1(Ham(T^{2n},\omega_0))$ а није тривијална на $\pi_1(Symp_0(T^{2n},\omega_0))$. Ово запажање се може уопштити за произвољну многострукост.

Став 36. *Нека је (M,ω) компактна симплектичка многострукост и $\{\phi_t\}_{t\in[0,1]}$ петља у $Ham(M,\omega)$. Тада су петље $t \mapsto \phi_t(x)$ нула у хомологији.*

Скица доказа:
Доказ се заснива на налажењу Поенкареовог дуала класе петље $\gamma = \{\phi_t\}_{0\leq t\leq 1}$. Може се израчунати да је Поенкареов дуал класе γ класа:

$$\frac{1}{Vol(M)}\left[Flux(\{\phi_t\}) \wedge \frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!}\right] \in H^{2n-1}(M;R).$$

Следи да је γ нула у хомологији кад год је $Flux(\{\phi_t\}) = 0$. Више детаља у [6].

Јаче тврђење да су петље контрактибилне у M се може показати, али захтева дубље савремене симплектичке технике.

Уопште можемо посматрати хомоморфизам:

$$\pi_1(Map(M,M)) \to \pi_1(M)$$

индукован евалуацијом:

$$Map(M,M) \to M : \phi \mapsto \phi(q)$$

где смо са $Map(M,M)$ означили простор непрекидних пресликавања из M у M. Слика овог хомоморфизма се назива група евалуација. Ова група је донекле изучавана, док се у случајевима када је $k>1$ о аналогним групама зна јако мало.

Можемо такође посматрати језгро пресликавања из $\pi_k(Symp(M))$ у $\pi_k(Diff(M))$. Зајдел је изучавао овај проблем за случај $k=0$. Овде са проблем своди на то да треба наћи два симплектоморфизма који су глатко изотопни, а нису симплектички изотопни. Посматрао је форму ψ_L придружену уложеним Лагранжовим сферама. Показао је да је $\psi_L \circ \psi_L$ увек глатко хомотопно идентитети, али у многим случајевима није симплектички изотопно идентитети. Докази се заснивају на примени Флорових хомолошких група.

Овде смо набројали само нека тополошка питања у вези са симплектичком групом из којих се види да је ово област у којој су тек неки проблеми решени, а многа занимљива питања су још увек отворена и представљају област отворену за нова истраживања.

9 Уместо закључка

Покушали смо у овом раду да дамо приказ једног савременог и тешког математичког проблема. Подразумевано је да је за разумевање рада неопходно само основно математичко предзнање, па су поступно уведени основни појмови симплектичког приступа. Главна тема рада су Хамилтонова и симплектичка група дифеоморфизама и њихов однос. Објашњена је флукс- хипотеза у C^0 и C^1 варијанти, а дата су и еквивалентна тврђења. Такође наведени су примери класа многострукости за које је проблем решен. Надамо се да је из рада видљиво колико је ова тема интересантна и какве могућности даје за даље истраживање. Наравно даља истраживања подразумевају овладавање напреднијим и софистициранијим техникама, тако да се овај текст може сматрати и уводом у даљи рад. Надамо се да смо успели у нашој намери да један апстрактан и тежак проблем јасно и занимљиво изложимо.

10 Додатак(Неке дефиниције)

На ово месту ћемо навести дефиниције неких појмова коришћених у раду, које не спадају у стандардно математичко образовање, а нису нашле своје природно место у ранијим поглављима.

Дефиниција 13. *Ако је M $2n$ димензиона многострукост скоро комплексна структура на M је комплексна структура J на тангентном раслојењу TM.*

Недегенерисана 2-форма $\omega \in \Omega^2(M)$ је компактибилна са скоро комплексном структуром J ако је компактибилна са J као симплетичка билинеарна форма наTM, тј. ако:$\langle u, v\rangle = \omega(u, Jv)$ дефинише Риманову метрику.

Скоро комплексна структура J се назива интеграбилном ако постоји атлас $\{\alpha, U_\alpha\}_\alpha$ на M тако да је J представљена матрицом J_0 у локалним координатама:

$$d\alpha(q) \circ J_0 = J_0 \circ d\alpha(q) : T_qM \to R^{2n}$$

Дефиниција 14. *Келерова многострукост је симплектичка многострукост (M, ω) са интеграбилном скоро комплексном структуром J.*

Дефиниција 15. *Ако су множења $L^{n-1}_{[\omega]} : H^1(M) \to H^{2n-1}(M)$ и $L^n_{[\omega]} : H^0(M) \to H^{2n}(M)$ изоморфизми $[\omega]$ се назива Лефшецов елемент. У овом случају уређени пар (M, ω) се назива Лефшецова многострукост.*

Важи да је свака Келерова многострукост и Лефшецова, као и да је свака Лефшецова многострукост симплектичка.

Дефиниција 16. *Многострукост M димензије $2n$ је кохомолошки симплетичка ако постоји $\alpha \in H^2_{DR}(M)$ тако да је α^n различито од нуле.*

Дефиниција 17. *Универзално наткривање $\pi : \widetilde{P} \to P$ тополошког простора P је простор хомотопских класа путева :*

$$\left\{\gamma : [0,1] \to P \;\middle|\; \gamma(0) \text{ фиксирано } \pi([\gamma]) = \gamma(1)\right\}.$$

Литература

[1] A. Banyaga, *The structure of classical diffeomorphism groups*, Mathematics and its applications 400, Kluwer Academic Publisher's group,1997.

[2] A. Cannas da Silva, *Lectures on Sympletic Geometry*, Springer-Verlag, Lecture Notes in Mathematics, 2006

[3] J. Ђуретић, *Геодезијске линије у Хоферовој метрици*, Математички факултет, мастер рад, Београд, 2010.

[4] H. Ishida, *Sympletic Real Bott Manifolds*, arXiv: 1001.3726v1 [math.SG], 2010.

[5] F. Lalonde, D. McDuff and L.Polterovich, *On the Flux conjectures*, CRM Proceedings and Lectures Notes vol 15, 1998.

[6] D. McDuff, D. Salamon, *Introduction to symplectic topology*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, 1995.

[7] D. McDuff, *Lectures on groups of symplectomorphisms*, arXiv: math/0201032v2 [math.SG], 2004.

[8] Д. Милинковић, В. Драговић, *Анализа на многострукостима*, Математички факултет, Београд, 2003.

[9] Д. Милинковић, *Мини курс о симплектичким многострукостима*, скрипта, Београд, 2001.

[10] Y.-G. Oh, *Sympletic Topology and Floer Homology*, monograph, 3-45

[11] Y.-G. Oh, *Stefan Müller The Group of Hamiltonian Homeomorphisms and C^0-Sympletic Topology*, Journal of Sympletic Geometry Volume 5, 2007.

[12] K. Ono, *Floer-Novikov cohomology and the flux conjecture*, Geometric And Functional Analysis, 2006, Volume 16, Number 5, 981-1020

[13] L. Polterovich, *The Geometry of the Group of Symplectic Diffeomorphism*, ETH Zürich, Lectures in Mathematics, Birkhüauser, 2001