UNIVERZITET U BEOGRADU
Matematički fakultet

MASTER RAD

Ojlerovi integrali

Mentor
Prof. dr Miloš Arsenović

Student
Jelena Ćosić
1007/2011

Beograd, 2012

Sadržaj

1 Uvod

1.1 Beskonačni proizvodi

Definicija:

Neka je dat niz realnih ili kompleksnih brojeva p_n, $n \in N$. Posmatrajmo niz proizvoda

$$P_1 = p_1 = \prod_{n=1}^{1} p_n, P_2 = p_1 p_2 = \prod_{i=1}^{2} p_i, P_3 = p_1 p_2 p_3 = \prod_{i=1}^{3} p_i$$

....

$$P_n = p_1 p_2 \cdots p_n = \prod_{i=1}^{n} p_i$$

Tada je

$$P = \prod_{i=1}^{+\infty} p_i = \lim_{n \to +\infty} P_n,$$

gde je

$$P_n = p_1 \cdot p_2 \cdots p_n$$

proizvod prvih n članova beskonačnog reda i zove se n-ti parcijalni proizvod.

Ako postoji konačna i različita od nule granična vrednost

$$P = \lim_{n \to +\infty} P_n$$

tada kažemo da beskonačan proizvod konvergira pri čemu je

$$P = \prod_{n=1}^{+\infty} p_n.$$

Ako ta granična vrednost ne postoji ili je jednaka 0 ili $+\infty$ tada kažemo da beskonačan proizvod nije konvergentan.

Svojstva:

Ako imamo beskonačni proizvod

$$\prod_{n=1}^{+\infty} p_n$$

i neka je m fiksirani prirodan broj. Tada ćemo parcijalne proizvode beskonačnog proizvoda

$$\prod_{i=m+1}^{+\infty} p_i$$

obeležiti sa $P'_k = p_{m+1}p_{m+2}\cdots p_{m+k}$.

Očigledno je da važi $P_{m+k} = P_m P'_k$ gde su P_i parcijalni proizvodi proizvoda

$$\prod_{n=1}^{+\infty} p_n.$$

Odakle sledi da je

$$\lim_{k\to+\infty} P_{m+k} = P_m \lim_{k\to+\infty} P'_k$$

Tvrđenje:

Izostavljanje konačno mnogo članova beskonačnog proizvoda ne utiče na njegovu konvergenciju.

Tvrđenje:

Potreban uslov da proizvod

$$\prod_{n=1}^{+\infty} p_n$$

konvergira je da njegov opšti član p_n teži ka jedinici kada n teži beskonačnosti.

Tvrđenje:

Beskonačan proizvod konvergira ako i samo ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $n_0 \in N$ tako da za svako $n > n_0, k \in N$ važi $|p_{n+1}p_{n+2}\cdots p_{n+k} - 1| < \epsilon$.

Tvrđenje:

Ako su počev od nekog n svi članovi niza a_n, $n \in N$ istog znaka tada proizvod

$$\prod_{n=1}^{+\infty}(1 + a_n)$$

konvergira ako i samo ako red

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

konvergira.

Tvrđenje:

Beskonačan proizvod sa pozitivnim članovima konvergira ako i samo ako red

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln p_n$$

konvergira. Ako je suma tog reda s onda taj proizvod ima vrednost e^s.

Za proizvod

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$$

kažemo da apsolutno konvergira ako konvergira proizvod

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + |a_n|)$$

Tvrđenje:

Ako beskonačan proizvod apsolutno konvergira onda on i konvergira.

1.2 Integrali kao funkcija parametara

Svojstveni parametarski integrali

$$I(y) = \int_a^b f(x,y)dx$$

Stav:

Ako je funkcija $f(x,y)$ integrabilna po x na segmentu $[a,b]$, za svako y iz neke okoline V tačke $y_0 \in \overline{R}$ i ako $f(x,y)$ ravnomerno teži ka funkciji $\phi(x)$ kada $y \to y_0$ po $x \in [a,b]$, onda je

$$\lim_{y \to y_0} I(y) = \int_a^b (\lim_{y \to y_0} f(x,y))dx = \int_a^b \phi(x)dx$$

Posledica:

Ako je, za svako $y < y_0 (y > y_0)$ iz neke okoline V tačke y_0, $f(x,y)$ neprekidna funkcija od $x \in [a,b]$ koja kad y rastući (opadajući) teži y_0 takođe monotono (po y) teži funkciji $\phi(x)$, neprekidno na $[a,b]$, tada važi

$$\lim_{y \to y_0} I(y) = \int_a^b (\lim_{y \to y_0} f(x,y))dx = \int_a^b \phi(x)dx.$$

Stav:

Neka je P pravougaonik $[a,b] \times [c,d]$ i neka je $f(x,y)$ neprekidna funkcija na P.

Tada je $I(y)$ neprekidna na $[c,d]$.

Stav:

Neka je $P = [a,b] \times [c,d]$ i funkcija $f : P \to R$ zadovoljava:

1) f neprekidna po $x \in [a,b]$ za svako $y \in [c,d]$

2) f ima parcijalni izvod $\frac{\partial f}{\partial y}$ koja je neprekidna funkcija na P.

Tada je funkcija koja je definisana kao $I(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ neprekidno diferencijabilna na $[c,d]$ i važi

$$I'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx.$$

Stav:

Neka su f i $\frac{\partial f}{\partial y}$ neprekidne realne funkcije na pravougaoniku $P = [\alpha, \beta] \times [c,d]$ i neka su $a(y)$ i $b(y)$ diferencijabilne funkcije definisane na $[c,d]$ sa vrednostima u $[\alpha, \beta]$.

Tada je $I(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx$ diferencijabilna funkcija na $[c,d]$ i važi

$$I'(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx - f(a(y),y)a'(y) + f(b(y),y)b'(y).$$

Stav:

Neka je funkcija $f : P \to R$ neprekidna na pravougaoniku $P = [a, b] \times [c, d]$. Tada je funkcija $I : [c, d] \to R$ koja je definisana integralom $I(y) = \int_a^b f(x, y)dx$ integrabilna i važi

$$\int_c^d I(y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy.$$

Nesvojstveni integrali

Neka je funkcija $f : [a, +\infty) \to R$ Riman integrabilna na svakom $[a, \beta] \subset [a, +\infty)$.

Tada granična vrednost:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\beta \to +\infty} \int_a^{\beta} f(x)dx$$

se naziva nesvojstveni integral prve vrste.

Neka je funkcija $f : [a, b) \to R$ integrabilna na svakom $[a, \beta] \subset [a, b)$, $-\infty < a < b < +\infty$.

Tada granična vrednost:

$$\int_a^{b} f(x)dx = \lim_{\beta \to b} \int_a^{\beta} f(x)dx$$

se naziva nesvojstveni integral druge vrste.

Isto važi i za slučaj kada je singularitet u donjoj granici.

Ravnomerna konvergencija nesvojstvenog integrala

Definicija:

Za integral $I(y) = \int_a^b f(x, y)dx$ kažemo da ravnomerno konvergira po $y \in Y, Y \subset R$ ako $F(\beta, y)$ ravnomerno teži ka $I(y)$ $(\beta \to b)$ po $y \in Y$, tj. ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $\beta_0 \in [a, b)$ tako da za svako $y \in Y$ i svako $\beta_0 < \beta < b$ važi $|I(y) - F(\beta, y)| = |\int_{\beta}^{b} f(x, y)dx| < \epsilon$.

Teorema:

Integral $I(y) = \int_a^b f(x, y)dx$ ravnomerno konvergira po $y \in Y \subset R$ ako i samo ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $\beta_0 \in [a, b)$,takvo da za sve β', β'' za koje je $\beta_0 < \beta' < \beta'' < b$ i za svako $y \in Y$ važi $|\int_{\beta'}^{\beta''} f(x, y)dx| < \epsilon$.

Posledica:

Ako je podintegralna funkcija f integrala $I(y) = \int_a^b f(x, y)dx$ neprekidna na $[a, b) \times [c, d]$ i taj integral konvergira za $y \in (c, d)$, ali divergira za $y = c$ (odnosno $y = d$), onda on neravnomerno konvergira na (c, d).

Tvrđenje:

Vajerštrasovo pravilo

Neka je $\phi : [a, b) \to R$ integrabilna funkcija takva da je $|f(x, y)| \leq \phi(x)$ za svako $x \in [a, b)$, $y \in Y \subset R$ i $\int_a^b \phi(x)dx < +\infty$.

Tada integral $I(y) = \int_a^b f(x, y)dx$ ravnomerno konvergira po $y \in Y$.

Tvrđenje

Abel-Dirihleovo pravilo

Neka su funkcije $f(x, y)$ i $g(x, y)$ definisane za $x \in [a, b)$ i $y \in Y \subset R$ i neka su za svako $y \in Y$ integrabilne po x na svakom segmentu $[\alpha, \beta] \subset [a, b)$. Za ravnomernu konvergenciju nesvojstvenog integrala$\int_a^b f(x, y)g(x, y)dx$ po $y \in Y$ dovoljno je da budu ispunjeni sledeći uslovi:

D1 Za svako $y \in Y$ funkcija $f(x, y)$ je neprekidna po $x \in [a, b)$ i ima ravnomerno ograničenu primitivnu funkciju, tj. postoji neka konstanta M takva da važi $|\int_a^\beta f(x, y)dx| \leq M$ za svako $y \in Y$ i sve $\beta \in [a, b)$;

D2 Za svako $y \in Y$ funkcija $g(x, y)$ je neprekidno diferencijabilna, monotona po $x \in [a, b)$ i $g(x, y) \to 0$ kad $x \to b$ po $y \in Y$;

ili važi

A1 Za svako $y \in Y$ funkcija $f(x, y)$ je neprekidna po $x \in [a, b)$ i nesvojstveni integral $\int_a^b f(x, y)dx$ ravnomerno konvergira po $y \in Y$;

A2 Za svako $y \in Y$ funkcija $g(x, y)$ je neprekidno diferencijabilna i monotona po $x \in [a, b)$, takođe je funkcija $g(x, y)$ ravnomerno ograničena po $x \in [a, b)$ i $y \in Y$

Teorema

Neka su članovi reda

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x)$$

nenegativne i neprekidne funkcije na $[a, b)$ i neka je njegov zbir $f(x)$ na $[a, b)$ neprekidna i integrabilna funkcija. Tada se taj red može integrisati član-po-član na $[a, b)$, tj. važi

$$\int_a^b (\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x))dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b a_n(x)dx.$$

Teorema

Neka su ispunjeni sledeći uslovi:

1) funkcija $f : [a, b) \times [c, d] \to R$ je neprekidna po $x \in [a, b)$ za svako $y \in [c, d]$, a funkcija $\frac{\partial f}{\partial y}$ je neprekidna na $[a, b) \times [c, d]$

2) integral $I(y) = \int_a^b f(x, y)dx$ konvergira za neko $y = y_0 \in [c, d]$

3) integral $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx$ ravnomerno konvergira na $[c, d]$.

Tada je funkcija $I(y)$ diferencijabilna na $[c, d]$ i važi $I'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx$.

Teorema

Ako je funkcija f neprekidna na $[a, b) \times [c, d]$ i nesvojstveni integral $I(y) = \int_a^b f(x, y)dx$ ravnomerno konvergira na $[c, d]$, onda je funkcija $I(y)$ integrabilna na $[c, d]$ i važi $\int_c^d I(y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy$.

2 Beta funkcija

Definicija:

Beta funkcija je funkcija dve promenljive koja je definisana na sledeći način:

$$\boxed{B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx}$$

gde su a i b promenljive za koje važi $a > 0$ i $b > 0$.

Ona zadovoljava sledeća svojstva:

$$B(a,b) = B(b,a) \tag{1}$$

$$B(a,b) = \frac{b-1}{a+b-1}B(a,b-1) \tag{2}$$

$$B(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}dt \tag{3}$$

koja će biti dokazana u nastavku rada .

Integral $B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\ dx$ može da bude nesvojstven. U slučaju kada je $a < 1$ tada kada $x \to 0$ podintegralna funkcija teži beskonačnosti pa da bi ovaj integral konvergirao potrebno je da važi sledeće: $1 - a < 1$ odakle dobijamo da je $a > 0$. Isto važi i za parametar b. U slučaju kada je $b < 1$, kad $x \to 1$ podintegralna funkcija teži beskonačnosti pa da bi integral konvergirao mora da važi $b > 0$. U to se možemo uveriti i na sledeći način:

$$B(a,b) = B_1(a,b) + B_2(a,b) = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\ dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\ dx.$$

$B_1(a,b)$ ima svojstvenu tačku $x = 0$ i konvergentan je za $a > 0$ i svako b.

Uvedimo sledeće:

$$B_1(a,b) \leq M_b \int_0^{\frac{1}{2}} x^{a-1}\ dx < +\infty, a > 0, \forall b$$

$$B_1(a,b) \geq m_b \int_0^{\frac{1}{2}} x^{a-1}\ dx = +\infty, a \leq 0, \forall b$$

Odakle možemo da zaključimo da je funkcija $B_1(a,b)$ definisana za $a > 0$ i svako b. Slično i za $B_2(a,b)$ dobijamo da je definisana za $b > 0$ i svako a pa možemo zaključiti da je beta funkcija B definisana na skupu : $\{(a,b) \in R^2\colon\ a > 0, b > 0\}$.

Podintegralna funkcija je neprekidna na $[0,1] \times (0,+\infty) \times (0,+\infty)$ osim u tačkama (0,a,b) i (1,a,b).

Da bi ispitali neprekidnost ispitajmo oblast konvergencije integrala B_1 i B_2.

$$\int_0^\delta x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx = I_1$$

$I_1 \geq m_{b,\delta}\int_0^\delta x^{a-1}dx$ računanjem integrala $\int_0^\delta x^{a-1}dx$ dobijamo $I_1 \geq m_{b,\delta}\frac{\delta^a}{a}$, gde je

$$m_{b,\delta} = \inf_{x\in[0,1]}(1-x)^{b-1}, \frac{\delta^a}{a} \to +\infty, a \to 0, \delta \in (0, \frac{1}{2}]$$

odakle sledi da B_1 ne konvergira ravnomerno na $(0,+\infty)$ u odnosu na a.
Ako je $a \geq a_1 > 0$ tada $\int_0^\delta x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx \leq M_{b,\delta}\int_0^\delta x^{a-1}dx = M_{b,\delta}\frac{\delta^a}{a} \leq M_{b,\delta}\frac{\delta^{a_1}}{a_1}$ odakle dobijamo da za svako $\epsilon > 0$ moguće je naći $\delta_\epsilon > 0$ tako da za svako δ, $0 < \delta < \delta_\epsilon$ i za svako b važi $\int_0^\delta x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx < \epsilon$ i možemo zaključiti da B_1 ravnomerno konvergira za $a \geq a_1 > 0$ analogno važi i za B_2 da ravnomerno konvergira za $b \geq b_1 > 0$. Sledi da je $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$ ravnomerno konvergentan na $\{(a,b) \in R^2\colon\ a \geq a_1 > 0, b \geq b_1 > 0\}$.
Kako je $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$ ravnomerno konvergentan na ovom skupu onda je taj integral i neprekidan na ovom skupu.

Beta funkcija se može izraziti kao trigonometrijski integral uvođenjem smene:

$$x = \sin^2\alpha, dx = 2\sin\alpha\cos\alpha d\alpha. \tag{4}$$

Zamenom (4) u integral

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx.$$

dobijamo:

$$\begin{aligned} B(a,b) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2\alpha)^{a-1}(1-\sin^2\alpha)^{b-1}2\sin\alpha\cos\alpha d\alpha \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\alpha)^{2a-2}(\cos\alpha)^{2b-2}\sin\alpha\cos\alpha d\alpha \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\alpha)^{2a-1}(\cos\alpha)^{2b-1}d\alpha. \end{aligned}$$

Takođe beta integral možemo da predstavimo u obliku beskonačnog integrala uvođenjem smene

$$x = \frac{t}{1+t}, dx = \frac{1}{(1+t)^2}dt \tag{5}$$

pri čemu ćemo dokazati i svojstvo (3).

Zamenom (5) u integral dobijamo

$$\begin{aligned}
B(a,b) &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t}\right)^{a-1} \left(1-\frac{t}{1+t}\right)^{b-1} \frac{1}{(1+t)^2} dt \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t}\right)^{a-1} \left(\frac{1}{1+t}\right)^{b-1} \frac{1}{(1+t)^2} dt \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a-1+b-1+2}} dt \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}} dt
\end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati. •

Dokaz svojstava (1) i (2):

Svojstvo (1):

$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$

Uvedimo smenu $x = 1-t, dx = -dt$.

Tada dobijamo:

$B(a,b) = -\int_1^0 (1-t)^{a-1}t^{b-1}dt = \int_0^1 (1-t)^{a-1}t^{b-1}dt.$

Uvedimo smenu $t = x, dt = dx$.

Dobijamo: $B(a,b) = \int_0^1 (1-x)^{a-1}x^{b-1}dx = B(b,a)$•

Svojstvo (2):

$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$

Uvedimo parcijalnu integraciiju:

$u = (1-x)^{b-1}$, $du = -(b-1)(1-x)^{b-2}dx$,$dv = x^{a-1}dx$,$v = \frac{x^a}{a}$

Integral tada postaje:

$B(a,b) = \frac{(1-x)^{b-1}x^a}{a}\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{b-1}{a}\int_0^1 x^a(1-x)^{b-2}dx$

Da bismo dobili gornje tvrđenje napišimo:

$x^a = x^{a-1}x = x^{a-1}(1-(1-x)) = x^{a-1} - x^{a-1}(1-x)$

$$\begin{aligned}
B(a,b) &= \frac{b-1}{a}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-2}dx - \frac{b-1}{a}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx \\
&= \frac{b-1}{a}B(a,b-1) - \frac{b-1}{a}B(a,b)
\end{aligned}$$

$B(a,b) + \frac{b-1}{a}B(a,b) = \frac{b-1}{a}B(a,b-1)$

$\frac{a+b-1}{a}B(a,b) = \frac{b-1}{a}B(a,b-1)$

$B(a,b) = \frac{b-1}{a+b-1}B(a,b-1)$•

Iz tvrđenja 1 i integrala $B(a,1) = \int_0^1 x^{a-1}dx = \frac{1}{a}$ neposredno dobijamo sledeću posledicu.

Posledica:

Neka je B funkcija. Tada važi:

a) $B(a,n) = B(n,a) = \frac{(n-1)!}{a(a+1)(a+2)...(a+n-1)}$, n je prirodan broj

b) $B(m,n) = B(n,m) = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(n+m-1)!}$, n i m su prirodni brojevi

Tvrđenje 2:

$\boxed{B(a,a) = \frac{1}{2^{2a-1}}B(\frac{1}{2},a)}$, $a > 0$

Dokaz:

Dokažimo ovo tvrđenje direktnom zamenom $b = a$ u formulu za beta funkciju.

$$\begin{aligned} B(a,a) &= \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{a-1}dx = \int_0^1 (x-x^2)^{a-1}dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2\right)^{a-1} dx \\ &= 2\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2\right)^{a-1} dx \end{aligned}$$

Uvedimo smenu $\frac{1}{2} - x = \frac{\sqrt{t}}{2}, dx = -\frac{dt}{4\sqrt{t}}$

Dobijamo sledeće:

$$\begin{aligned} B(a,a) &= 2\int_0^1 \left(\frac{1}{4} - \frac{t}{4}\right)^{a-1} \frac{dt}{4\sqrt{t}} = 2\int_0^1 \frac{1}{2^{2a}}(1-t)^{a-1}t^{-\frac{1}{2}}dt \\ &= \frac{2}{2^{2a}}\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{a-1}dt = \frac{1}{2^{2a-1}}B\left(\frac{1}{2},a\right) \end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati. •

Tvrđenje 3:

Formula dopune:

$$\boxed{B(a,1-a) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{1+t}dt = \frac{\pi}{\sin a\pi}},\ 0 < a < 1$$

Dokaz:

Ako u integral za beta funkciju stavimo $b = 1-a$ dobijamo $B(a,1-a) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{1+t}dt$.

Treba da važi da su a i b pozitivni tj. mora da važi $0 < a < 1$.

Ovaj integral možemo razložiti na dva integrala $\int_0^1 + \int_1^{+\infty}$.

Podintegralnu funkciju prvog integrala možemo napisati u obliku sume:

$$t^{a-1}\sum_{i=0}^{+\infty}(-1)^i t^{a+i-1}$$

Ovaj red uniformno konvergira po t za $0 < \epsilon \leq t \leq 1 - \epsilon' < 1$ za neke $\epsilon, \epsilon' > 0$.

Parcijalna suma ovog reda ima integrabilnu majorantu

$$0 < \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i t^{a+i-1} = t^{a-1} \frac{1 - (-t)^n}{1+t} < t^{a-1}$$

nad $[0, 1]$ pa ovaj red može da se integriše član po član. Dobijamo da je prvi integral jednak sumi

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{a+i}.$$

Drugi integral ćemo rešiti uvođenjem smene $t = \frac{1}{x}, dt = -\frac{dx}{x^2}$.

Tada se integral svodi na:

$$-\int_1^0 \frac{x^{1-a} x}{1+x} \frac{dx}{x^2} = \int_0^1 \frac{x^{-a}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^{(1-a)-1}}{1+x} dx = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{a-i}.$$

Sabiranjem ove dve sume dobijamo:

$$B(a, 1-a) = \frac{1}{a} + \sum_{i=1}^{+\infty} (-1)^i (\frac{1}{a+i} + \frac{1}{a-i}).$$

Treba pokazati da je

$$\frac{1}{a} + \sum_{i=1}^{+\infty} (-1)^i (\frac{1}{a+i} + \frac{1}{a-i}) = \frac{\pi}{\sin a\pi}. \tag{6}$$

Za dokaz ove činjenice potreban nam je već poznati razvoj funkcije $\sin x$ u beskonačni proizvod.

Tvrđenje :

$$\boxed{\sin x = x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)}$$

Uzmimo apsolutnu vrednost gornjeg izraza. Dobijamo:

$$|\sin x| = |x| \prod_{n=1}^{+\infty} |1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}|$$

Ako logaritmujemo gornju formulu dobijamo sledeće:

$$\log|\sin x| = \log|x| + \sum_{n=1}^{+\infty} \log|1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}|$$

zatim diferenciranjem dobijamo formulu:

$$\cot x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2} \tag{7}$$

Da bismo opravdali diferenciranje potrebno je da dokažemo da dobijeni red konvergira.

$$\left|\frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}\right| = \frac{2|x|}{n^2\pi^2 - |x|^2} < \frac{2M}{n^2\pi^2 - M^2} = \frac{2M}{\pi^2} \cdot \frac{1}{n^2 - \frac{M^2}{\pi^2}}$$

Red čiji je opšti član $a_n = \frac{1}{n^2 - c}$ konvergira.

Ako se u (7) svaki sabirak razloži na zbir dobija se:

$$\cot x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{x - n\pi} + \frac{1}{x + n\pi}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x + n\pi}$$

za sve $x \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

Pomnožimo ovaj izraz sa x i umesto x stavimo πx.

Dobijamo sledeće:

$$\pi x \cot \pi x = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{x^2 - n^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^2 - n^2}, x \notin Z$$

Iz veze tangensa i kotangensa $\tan x = \cot(\frac{\pi}{2} - x)$ dobija se razvoj tangensa na parcijalne razlomke:

$$\tan x = -\sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{x - \frac{2n-1}{2}\pi} + \frac{1}{x + \frac{2n-1}{2}\pi}), x \neq (k \pm \frac{1}{2})\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{8}$$

Ako umesto x stavimo $\frac{\pi x}{2}$ dobijamo:

$$\frac{\pi}{2} \tan \frac{\pi x}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{x - 2n + 1} + \frac{1}{x + 2n - 1}) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2 - (4n^2 - 1)}$$

za $x \neq 2k + 1, k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

Ako iskoristimo identitet $\frac{1}{\sin x} = \frac{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{1}{2}(\tan \frac{x}{2} + \cot \frac{x}{2})$ dobijamo recipročne vrednosti sinusa u parcijalne razlomke

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n (\frac{1}{x + n\pi} + \frac{1}{x - n\pi}), x \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{9}$$

Ako u (9) stavimo πx umesto x dobijamo:

$$\frac{\pi}{\sin \pi x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n (\frac{1}{x + n} + \frac{1}{x - n}), x \notin Z. \tag{10}$$

Ako u (10) umesto x stavimo a dobijamo

$$\frac{\pi}{\sin \pi a} = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n (\frac{1}{a+n} + \frac{1}{a-n}),$$

a time smo dokazali da važi Tvrđenje 3 •

Posledica:

Pomoću prethodnog tvrđenja možemo izračunati $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

$B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t)\sqrt{t}}$.

Nakon smene $t = u^2, dt = 2udu$ dobijamo $\int_0^{+\infty} \frac{2udu}{(1+u^2)u} = 2\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = 2 \arctan u|_{x=0}^{+\infty} = 2\frac{\pi}{2} = \pi$

3 Gama funkcija

Definicija

Gama funkcija je funkcija koja se definiše za $a > 0$ na sledeći način:

$$\boxed{\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx}.$$

Dokazaćemo da se ona može uvesti i na sledeće ekvivalentne načine:

$$\Gamma(a) = \lim_{n \to +\infty} n^a \frac{(n-1)!}{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)} \tag{11}$$

$$\frac{1}{\Gamma(a)} = ae^{\gamma a} \prod_{n=1}^{+\infty} (1 + \frac{a}{n}) e^{-\frac{a}{n}}, \tag{12}$$

gde je γ Ojlerova konstanta

Navešćemo neke reprezentacije gama funkcije koje se dobijaju sledećim smenama $x = t^2$, $x = -lnz$ i $x = e^t$.

$$\Gamma(a) = 2 \int_0^{+\infty} t^{2a-1} e^{-t^2} dt \tag{13}$$

$$\Gamma(a) = \int_0^1 \left(ln\frac{1}{z} \right)^{a-1} dz \tag{14}$$

$$\Gamma(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{at - e^t} dt \tag{15}$$

Gama funkcija zadovoljava sledeća svojstva:

1)

$$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$$

2)

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$$

3)

$$\Gamma(n+1) = n!$$

4)

$$\Gamma(a)\Gamma(a + \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}} \Gamma(2a)$$

koja će biti dokazana u nastavku rada.

$\Gamma(a) = \Gamma_1(a) + \Gamma_2(a) = \int_0^1 x^{a-1}e^{-x}dx + \int_1^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$

Integral $\Gamma_1(a)$ ravnomerno konvergira za svako $a \geq a_1 > 0$ što se može videti iz nejednakosti $x^{a-1}e^{-x} \leq x^{a_1-1}$, $0 \leq x \leq 1$, na osnovu Vajerštrasovog kriterijuma i činjenice da je $\int_0^1 x^{a_1-1}dx$ konvergentan.

Za $a > 0$ ovaj integral ne konvergira ravnomerno.

Ako je $m = \inf_{0 \leq x \leq \delta} e^{-x}$ tada $\int_0^\delta x^{a-1}e^{-x}dx \geq m \int_0^\delta x^{a-1}dx = m\frac{\delta^a}{a} \to +\infty$, $a \to 0+$ pri fiksnom $\delta < 1$, pa za neke $\epsilon > 0$ nije moguće odrediti $\delta_\epsilon > 0$ tako da za svako $a > 0$ i svako $0 < \delta < \delta_\epsilon$ važi $\int_0^\delta x^{a-1}e^{-x}dx < \epsilon$.

Za $a \leq a_2$ i $x > 0$, $x^{a_1-1}e^{-x} \leq x^{a_2-1}e^{-x}$ odakle dobijamo $\int_1^{+\infty} x^{a_2-1}e^{-x}dx < +\infty$ odakle dobijamo da je integral $\Gamma_2(a)$ konvergentan na osnovu Vajerštrasovog kriterijuma za svako $a \leq a_2$ ali $\Gamma(a)$ nije konvergentan.

Za svako a, jer za $a > 1$ i fiksno $N > 1$, $\int_N^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx \geq N^{a-1}\int_N^{+\infty} e^{-x}dx = N^{a-1}e^{-N} \to +\infty$ dobijamo da je $\Gamma(a)$ ravnomerno konvergentna na $[a_1, a_2], 0 < a_1 < a_2 < +\infty$.

Kako je podintegralna funkcija neprekidna na $[0, +\infty) \times (0, +\infty)$ osim u tačkama $(0, a)$ sledi da je $\Gamma(a)$ na $[a_1, a_2], 0 < a_1 < a_2 < +\infty$ neprekidna.

$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$ je na $[a_1, a_2]$ ravnomerno konvergentna odakle dobijamo da je $\Gamma(a)$ na ovom segmentu diferencijabilna.

Šta više $\Gamma(a) \in C^\infty([a_1, a_2])$ što možemo zapisati na sledeći način:

$$\Gamma^{(k)}(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}(\ln x)^k dx.$$

Kako je gama funkcija neprekidno diferencijabilna na $[a_1, a_2], 0 < a_1 < a_2 < +\infty$ i $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$ na osnovu Rolove teoreme postoji bar jedna tačka a_0 na $(1, 2)$ u kojoj je prvi izvod nula, a drugi izvod je pozitivan odakle možemo zaključiti da je prvi izvod monotono rastuća funkcija.

Stoga a_0 je jedina nula gama funkcije pri čemu za $x < a_0$ prvi izvod u tački x je negativan, a za $x > a_0$ prvi izvod u tački x je pozitivan.

Gama funkcija je monotono opadajuća za $x < a_0$, a monotono rastuća za $x > a_0$ odakle zaključujemo da gama funkcija ima lokalni minimum.

$\Gamma(a) = \frac{\Gamma(a+1)}{a} \to +\infty, a \to 0+$ što znači da je y-osa asimptota gama funkcije.

Dokaz svojstva 2:

$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$

Uvešćemo parcijalnu integraciju: $u = e^{-x}, du = -e^{-x}dx$, $dv = x^{a-1}dx, v = \frac{x^a}{a}$

Tada $\Gamma(a) = \frac{1}{a}x^a e^{-x}|_{x=0}^{+\infty} + \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} x^a e^{-x}dx$ pa kako prvi teži nuli ostaje nam drugi deo.

$\Gamma(a) = \frac{1}{a}\int_0^{=\infty} x^a e^{-x}dx = \frac{1}{a}\Gamma(a+1)$ odakle dobijamo dato tvrđenje. •

Dokaz svojstva 1:

$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = -e^{-x}|_{x=0}^{x=+\infty} = 1$

$\Gamma(2) = \int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = -xe^{-x}|_{x=0}^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = -e^{-x}|_{x=0}^{+\infty} = 1$ •

Posledica 2:

Gama funkcija je uopštenje faktorijela:

$\boxed{\Gamma(n+1) = n!}$

Tvrđenje 3:

Ojler-Gausova formula

$$\boxed{\Gamma(a) = \lim_{n\to+\infty} n^a \frac{(n-1)!}{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)}}$$

Dokaz:

Uvedimo sledeću smenu u gama funkciju koja je predstavljena u obliku (14):

$$z = y^n, dz = ny^{n-1}dy \tag{16}$$

$\Gamma(a) = \int_0^1 (\ln\frac{1}{z})^{a-1}dz = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 (n(1-z^{\frac{1}{n}}))^{a-1}dz = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 n^{a-1}(1-y)^{a-1}ny^{n-1}dy$

$\Gamma(a) = \lim_{n\to+\infty} n^a \int_0^1 y^{n-1}(1-y)^{a-1}dy = \lim_{n\to+\infty} n^a B(n,a) = \lim_{n\to+\infty} n^a \frac{(n-1)!}{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)}$

što je i trebalo dokazati. •

Iz ove formule može da se dobije razvoj gama funkcije u beskonačni proizvod, tj. formula Vajerštrasa.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(a)} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)}{n^a 1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{a}{n^a}(1+\frac{a}{1})(1+\frac{a}{2})\cdots(1+\frac{a}{n-1}) \\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{a}{n^a}\prod_{k=1}^{n-1}(1+\frac{a}{k})\end{aligned}$$

Ako n napišemo kao $n = e^{\ln n}$ i znajući razvoj za logaritamsku funkciju

$\ln n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \gamma + O(\frac{1}{n})$ prethodni izraz možemo da napišemo u sledećem obliku:

$$\frac{1}{\Gamma(a)} = \lim_{n\to+\infty} an^{-a}(1+\frac{a}{1})(1+\frac{a}{2})\cdots(1+\frac{a}{n-1})$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to+\infty} ae^{-\frac{a}{1}-\frac{a}{2}-\cdots-\frac{a}{n-1}-\frac{a}{n}+a\gamma+O(\frac{1}{n})}(1+\frac{a}{1})(1+\frac{a}{2})\cdots(1+\frac{a}{n-1}) \\
&= ae^{\gamma}\lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{a}{n}+O(\frac{1}{n})}\prod_{k=1}^{n-1}(1+\frac{a}{k})e^{-\frac{a}{k}} = ae^{ay}\prod_{k=1}^{+\infty}(1+\frac{a}{k})e^{-\frac{a}{k}}.
\end{aligned}
$$

Da bi dokazali da ovaj proizvod konvergira potrebno je odrediti veličinu činilaca.

$(1+x)e^{-x} = (1+x)(1-x+\frac{1}{2}x^2+O(x^3)) = 1-\frac{1}{2}x^2+O(x^3)$ odakle sledi da je

$(1+\frac{a}{k})e^{-\frac{a}{k}} = 1-\frac{1}{2}(\frac{a}{k})^2+O((\frac{a}{k})^3)$ pa će naš proizvod konvergirati jer i $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$ konvergira.

Tvrđenje 4:

Vajerštrasova formula

$$\boxed{\frac{1}{\Gamma(a)} = ae^{\gamma a}\prod_{n=1}^{+\infty}(1+\frac{a}{n})e^{-\frac{a}{n}}}$$

Tvrđenje 5:

Veza beta i gama funkcije

$$\boxed{B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}}$$

Dokaz:

$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$

Uvedimo smenu $x = sy, dx = sdy$ u $\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$.

$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty}(sy)^{a-1}e^{-sy}sdy$

$\frac{\Gamma(a)}{s^a} = \int_0^{+\infty} y^{a-1}e^{-sy}dy$

Zamenimo a sa $a+b$ i uvedimo smenu $s = 1+t$.

$\frac{\Gamma(a+b)}{(1+t)^{a+b}} = \int_0^{+\infty} y^{a+b-1}e^{-(1+t)y}dy$

Ako se obe strane jednakosti pomnože sa t^{a-1} i integrale po t u istim granicama dobija se

$\Gamma(a+b)\int_0^{+\infty}\frac{t^{a-1}dt}{(1+t)^{a+b}} = \int_0^{+\infty} t^{a-1}(\int_0^{+\infty} y^{a+b-1}e^{-(1+t)y}dy)dt$

Stavimo $ty = z$

$$
\begin{aligned}
\Gamma(a+b)B(a,b) &= \int_0^{+\infty} y^{a+b-1}e^{-y}(\int_0^{+\infty} t^{a-1}e^{-ty}dt)dy \\
&= \int_0^{+\infty} y^{a+b-1}e^{-y}(\int_0^{+\infty}(\frac{z}{y})^{a-1}e^{-z}\frac{dz}{y})dy \\
&= \int_0^{+\infty} y^{a+b-1}e^{-y}\frac{1}{y^a}(\int_0^{+\infty} z^{a-1}e^{-z}dz)dy \\
&= \int_0^{+\infty} y^{b-1}e^{-y}\Gamma(a)dy \\
&= \Gamma(a)\Gamma(b)
\end{aligned}
$$

Kada se izrazi $B(a,b)$ dobija se tražena jednakost .

Promena redosleda integracije je dozvoljena jer za $a > 1$ i $b > 1$ funkcija

$u(t,y) = t^{a-1}y^{a+b-1}e^{-(1+t)y}$ je neprekidna kao funkcija dve promenljive i pozitivna za $y \geq 0$ i $t \geq 0$, a $t^{a-1}\int_0^{+\infty} y^{a+b-1}e^{-(1+t)y}dy = \Gamma(a+b)\frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}$ i $y^{a+b-1}e^{-y}\int_0^{+\infty} t^{a-1}e^{-ty}dt = \Gamma(a)y^{b-1}e^{-y}$ su neprekidne funkcije po t za $t \geq 0$ i po y za $y \geq 0$, pa je za $a > 1$ i $b > 1$ dozvoljena promena redosleda integrisanja tj., za $a > 1$ i $b > 1$ važi $B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ ili

$B(a+1,b+1) = \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+2)}$.

Iskoristimo funkcionalnu vezu između beta i gama funkcije $B(a+1,b+1) = \frac{ab}{(a+b+1)(a+b)}B(a,b)$

$\frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+2)} = \frac{ab}{(a+b+1)(a+b)}\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$

Tada za $a > 0$ i $b > 0$ važi $B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ •

Ovu vezu je Jakobi dokazao pomoću dvostrukog integrala na sledeći način:

$$\begin{aligned}
\Gamma(a)\Gamma(b) &= \int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx \int_0^{+\infty} y^{b-1}e^{-y}dy \\
&= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}y^{b-1}e^{-y}dxdy \\
&= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} x^{a-1}y^{b-1}e^{-(x+y)}dxdy
\end{aligned}$$

Uvedimo smenu $x = uv, y = u(1-v)$ pri čemu je $0 < u < +\infty$, $0 < v < 1$, a Jakobijan je $dxdy = -ududv$.

$$\begin{aligned}
\Gamma(a)\Gamma(b) &= \int_0^{+\infty}\int_1^0 (-u)u^{a-1}v^{a-1}u^{b-1}(1-v)^{b-1}e^{-u}dudv \\
&= \int_0^{+\infty}\int_0^1 u^{a+b-1}v^{a-1}(1-v)^{b-1}e^{-u}dudv \\
&= \int_0^{+\infty} u^{a+b-1}e^{-u}du \int_0^1 v^{a-1}(1-v)^{b-1}dv \\
&= \Gamma(a+b)B(a,b)
\end{aligned}$$

Tvrđenje 6:

Ležandrova formula

$$\boxed{\Gamma(a)\Gamma(a+\tfrac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\Gamma(2a)}$$

Dokaz:

Na osnovu tvrđenja 2 za beta funkciju imamo $B(a,a) = \frac{1}{2^{2a-1}}B(\frac{1}{2},a)$.

Predstavljanjem beta funkcije sa obe strane pomoću gama funkcije $B(a,a)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(a)}{\Gamma(2a)}$ i $B(\frac{1}{2},a)=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(a)}{\Gamma(a+\frac{1}{2})}$ dobijamo: $\frac{\Gamma(a)\Gamma(a)}{\Gamma(2a)}=\frac{1}{2^{2a-1}}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(a)}{\Gamma(a+\frac{1}{2})}$, $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$.

Skraćivanjem sa $\Gamma(a)$ sa obe strane i sređivanjem izraza dobijamo izraz koji se traži:

$\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(2a)}=\frac{1}{2^{2a-1}}\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(a+\frac{1}{2})}$

$\Gamma(a+\frac{1}{2})\Gamma(a)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\Gamma(2a)$ •

Za gama funkciju ne postoji adiciona formula. Navedimo neke od formula koje se mogu dobiti iz prethodnih rezultata:

$B(a,1-a)=\frac{\pi}{\sin a\pi}$

$\Gamma(a)\Gamma(1-a)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(1-a)}{\Gamma(1)}=\frac{\Gamma(a)\Gamma(1-a)}{\Gamma(a+1-a)}=B(a.1-a)$

$\Gamma(1-a)=-a\Gamma(-a)$

$\Gamma(a)=\frac{\Gamma(1+a)}{a}$

$-a\Gamma(a)\Gamma(-a)=\frac{\pi}{\sin a\pi}$

$\Gamma(a)\Gamma(-a)=-\frac{\pi}{a\sin a\pi}$

$\Gamma(1+a)\Gamma(1-a)=\frac{a\pi}{\sin a\pi}$

$\Gamma(a-\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}-a)=\frac{\pi}{(a-\frac{1}{2})\sin\pi(\frac{1}{2}-a)}$

$\Gamma(\frac{1}{2}+a)\Gamma(\frac{1}{2}-a)=\frac{\pi}{\cos a\pi}$

Dokaz:

Korišćenjem Ojler-Gausove formule i proizvoda za sinus dokazaćemo jednu od prethodno navedenih formula.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(1-a)} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{a[(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)]}{n^a 1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}\frac{(n-a)[(1-a)(2-a)\cdots(n-1-a)]}{n^{1-a}1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{a(n-a)}{n}\frac{(1-a^2)(2^2-a^2)\cdots((n-1)^2-a^2)}{1^2\cdot 2^2\cdots(n-1)^2}\\
&= \lim_{n\to+\infty} a\prod_{k=1}^{+\infty}(1-\frac{a^2}{k^2})\\
&= \frac{a\sin a\pi}{a\pi}=\frac{\sin a\pi}{\pi}\bullet
\end{aligned}$$

4 Karakterizacija gama funkcije

U ovom odeljku biće reči o dve karakterizacije gama funkcije: pomoću Ležandrove formule i pomoću logaritamske konveksnosti.

Teorema:

Neka je F realna funkcija koja ima neprekidan prvi izvod i nema nula za $a > 0$, takva da važi :

1) $F(a+1) = aF(a)$

2) $F(a)F(a+\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}F(2a)$

tada je $F \equiv \Gamma$.

Dokaz:

Neka je $F(a) = f(a)\Gamma(a)$ i $f(a)$ ima neprekidan prvi izvod i različita je od nule za $a > 0$.

Zamenom $F(a) = f(a)\Gamma(a)$ u $F(a)F(a+\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}F(2a)$ dobijamo:

$F(a+1) = aF(a) \Leftrightarrow f(a+1)\Gamma(a+1) = af(a)\Gamma(a)$.

Znamo da je $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ pa zamenom dobijamo $af(a+1)\Gamma(a) = af(a)\Gamma(a)$.

Skraćivanjem sa $a\Gamma(a)$ dobijamo a) $f(a+1) = f(a)$.

$F(a)F(a+\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}F(2a) \Leftrightarrow f(a)\Gamma(a)f(a+\frac{1}{2})\Gamma(a+\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}f(2a)\Gamma(2a)$

Skraćivanjem dobijamo b) $f(a)f(a+\frac{1}{2}) = f(2a)$, f zadovoljava uslove a) i b).

Iz uslova a) dobijamo da je $f(0) = f(1)$ odakle možemo zaključiti da kad $a \to 0$ $f(a)$ ima graničnu vrednost.

Ako u uslov b) stavimo $a = \frac{1}{2}$ dobijamo $f(\frac{1}{2})f(1) = f(1)$. Skraćivanjem sa $f(1)$ dobijamo $f(\frac{1}{2}) = 1$.

Kako je funkcija $f(a) \neq 0$ za $a > 0$ sledi da je $f(a) > 0$ za $a \geq 0$.

Postoji funkcija koja ima neprekidan prvi izvod za $a \geq 0$. Nju ćemo obeležiti sa $g(a) = \ln f(a)$.

Logaritmovanjem uslova a) i b) dobijamo da ova funkcija zadovoljava sledeća dva uslova:

1) $g(a+1) = g(a)$

2) $g(a) + g(a+\frac{1}{2}) = g(2a)$

Neka je $h(a) = g'(a)$. Tada je $h(a)$ neprekidna funkcija koja diferenciranjem prethodnih uslova 1) i 2) zadovoljava sledeće uslove:

$h(a) = h(a+1)$

$h(a) + h(a+\frac{1}{2}) = 2h(2a)$

Ako u drugi uslov stavimo $\frac{a}{2}$ umesto a dobijamo:

$h(\frac{a}{2}) + h(\frac{a}{2} + \frac{1}{2}) = 2h(a)$

Ako u ovu formulu stavimo $\frac{a}{2}$ i $\frac{a+1}{2}$ umesto a dobijamo:

$h(\frac{a}{4}) + h(\frac{a}{4} + \frac{1}{2}) = 2h(\frac{a}{2})$ i $h(\frac{a+1}{4}) + h(\frac{a+1}{4} + \frac{1}{2}) = 2h(\frac{a+1}{2})$.

Sabiranjem ove dve formule dobijamo:

$\frac{1}{2}h(\frac{a}{4}) + \frac{1}{2}h(\frac{a+2}{4}) + \frac{1}{2}h(\frac{a+1}{4}) + \frac{1}{2}h(\frac{a+3}{4}) = h(\frac{a}{2}) + h(\frac{a+1}{2})$

Korišćenjem izraza $h(a) + h(a + \frac{1}{2}) = 2h(2a)$ dobijamo:

$\frac{1}{4}[h(\frac{a}{4}) + h(\frac{a+2}{4}) + h(\frac{a+1}{4}) + h(\frac{a+3}{4})] = h(a)$

Ako ponovimo ovaj postupak n puta dobijamo: $\frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{2^n-1} h(\frac{a+j}{2^n}) = h(a)$.

Kako je funkcija $h(a)$ neprekidna ovu sumu ćemo posmatrati kao integralnu sumu za integral $\int_a^{a+1} h(x)dx$.

Zbog uslova $h(a) = g'(a)$ i $g(a+1) = g(a)$ imamo

$h(a) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{2^n-1} h(\frac{a+j}{2^n}) = \int_a^{a+1} h(x)dx = g(a+1) - g(a) = g(a) - g(a) = 0.$

Prvi izvod funkcije g u tački a je 0 što znači da je $g(a) = const$, a odatle sledi da je $f(a) = e^{g(a)} = const.$

Kako znamo da je funkcija $f(a)$ neprekidna i ranije smo videli da je $f(\frac{1}{2}) = 1$ to znači da je $f(a) = 1$, a tada je $F(a) = \Gamma(a)$ što smo i trebali da dokažemo. •

Posledica:

Neka je F realna funkcija koja ima neprekidan prvi izvod i važi

1) $F(a+1) = aF(a)$

2) $F(a)F(a+\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}F(2a)$

3) $F(a)F(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}$

4) $F(1) = 1$

tada je $F \equiv \Gamma$.

Definicija:

Neprekidna funkcija f nad nekim intervalom naziva se konveksna nad tim intervalom kada za svake dve tačke x, y iz tog intervala i svako $0 \leq \alpha \leq 1$ važi

$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y).$

Definicija:

Pozitivna realna funkcija $f(x)$ je logaritamski konveksna kada je $\ln f(x)$ konveksna funkcija.

Iz definicije konveksnosti dobijamo:

$\ln f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha \ln f(x) + \beta \ln f(y) \leq ln(f(x)^{\alpha} f(y)^{\beta})$ odakle možemo zaključiti da

$f(\alpha x + \beta y) \leq (f(x)^{\alpha})(f(y)^{\beta})$.

Kada na desnu stranu primenimo nejednakost aritmetičke i geometrijske sredine dobijamo

$(f(x))^{\alpha}(f(y))^{\beta} \leq \alpha f(x) + \beta f(y)$ što znači da je uslov logaritamske konveksnosti jači od uslova konveknosti pa je svaka logaritamski konveksna funkcija i konveksna funkcija.

Tvrđenje:

Gama funkcija je logaritamski konveksna funkcija.

Dokaz:

Da bi ovo dokazali primenićemo nejednakost Koši-Bunjakovskog za integrale.

$\int_0^{+\infty}(f(x))^2 dx \int_0^{+\infty}(g(x))^2 dx \geq (\int_0^{+\infty} f(x)g(x)dx)^2$

Ako stavimo $f(x) = \sqrt{x^{a-1}e^{-x}}$ i $g(x) = \sqrt{x^{a-1}e^{-x}} \ln x$ tada je

$\int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx \int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}(\ln x)^2 \geq (\int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x} \ln x dx)^2 \Leftrightarrow \Gamma(a)\Gamma''(a) - (\Gamma'(a))^2 \geq 0.$ •

Teorema:

Neka je F realna funkcija definisana za pozitivne vrednosti argumenta za koju važi:

a) $F(a+1) = aF(a)$

b) F(a) je logaritamski konveksna

c) $F(1) = 1$

tada je $F \equiv \Gamma$.

Dokaz:

Primenimo uslov $F(a+1) = aF(a)$ više puta.

Dobijamo $F(a+n) = (a+n-1)(a+n-2)\cdots(a+1)aF(a)$.

Za celobrojno n dobija se $F(n) = (n-1)!$ pa se izračunavanje vrednosti funkcije može svesti na izračunavanje funkcije $F(a)$ za $a \in (0,1]$ tj. ako dokažemo da je $F = \Gamma$ na $(0,1]$ tada je $F = \Gamma$ na $(0,+\infty)$.

Ako je funkcija konveksna to znači da ona za $x_1 < x < x_2$ zadovoljava uslov

$\frac{F(x_1)-F(x)}{x_1-x} \leq \frac{F(x_2)-F(x)}{x_2-x}$.

Ovaj uslov se dobija ako u uslov konveksnosti stavimo da je $\alpha = \frac{x_2-x}{x_2-x_1}$, a tada je

$0 < \frac{x_2-x}{x_2-x_1} < 1$ i

$1 - \alpha = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ pa iz uslova konveksnosti dobijamo sledeće:

$F(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha F(x_1) + (1-\alpha)F(x_2)$

Zamenom izraza za α i $1-\alpha$ dobijamo:

$F(\frac{x_2-x}{x_2-x_1}x_1 + \frac{x-x_1}{x_2-x_1}x_2) \leq \frac{x_2-x}{x_2-x_1}F(x_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1}F(x_2)$

Svođenjem na zajednički činilac dobijamo:

$F(\frac{x_2x_1-xx_1+xx_2-x_1x_2}{x_2-x_1}) \leq \frac{(x_2-x)F(x_1)+(x-x_1)F(x_2)}{x_2-x_1}$

$\frac{(x_2-x_1)F(x)}{x_2-x_1} \leq \frac{(x_2-x)F(x_1)+(x-x_1)F(x_2)}{x_2-x_1}$

Skraćivanjem sa $x_2 - x_1$ dobijamo:

$(x_2 - x_1)F(x) \leq (x_2 - x)F(x_1) + (x - x_1)F(x_2)$

Izraz $x_2 - x_1$ možemo da predstavimo sa $x_2 - x + x - x_1$ pa zamenom u gornji izraz dobijamo $(x_2 - x + x - x_1)F(x) \leq (x_2 - x)F(x_1) + (x - x_1)F(x_2)$ pa sređivanjem se ovaj izraz može svesti na sledeći: $(x_2 - x)F(x) + (x - x_1)F(x) \leq (x_2 - x)F(x_1) + (x - x_1)F(x_2)$

$(x_2 - x)F(x) - (x_2 - x)F(x_1) \leq (x - x_1)F(x_2) - (x - x_1)F(x)$ pa se deljenjem sa $(x_2 - x)(x - x_1)$ dobija sledeći izraz $\frac{F(x)-F(x_2)}{x_2-x} \leq \frac{F(x_1)-F(x)}{x-x_1}$.

Ako je raspored tačaka drugačiji tj. ako postoji raspored tačaka $x_1 < x_2 < x$,

$\frac{F(x_1)-F(x_2)}{x_1-x_2} \leq \frac{F(x)-F(x_2)}{x-x_2}$, a pošto je $x_1 < x_2$ pomnožićemo brojilac i imenilac leve strane sa -1 pa dobijamo $\frac{F(x_2)-F(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{F(x)-F(x_2)}{x-x_2}$.

$(x - x_2)(F(x_2) - F(x_1)) \leq (x_2 - x_1)(F(x) - F(x_2))$

Prethodni izraz je ekvivalentan izrazu

$(x - x_2)(F(x_2) - F(x_1)) \leq (x_2 - x + x - x_1)(F(x) - F(x_2))$

pa sređivanjem dobijamo $(x - x_2)(F(x) - F(x_1)) \leq (x - x_1)(F(x) - F(x_2))$.

Deljenjem sa $(x - x_2)(x - x_1)$ dobijamo $\frac{F(x)-F(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{F(x)-F(x_2)}{x-x_2}$.

Neka je $0 < a < 1$ i $n \geq 2$. Imamo tačke $x_1 = n - 1 < x = n < x_2 = n + a$ i $x = n < x_1 = n + a < x_2 = n + 1$ i konveksnu funkciju $\ln F(x)$.

Tada $\frac{\ln F(n-1)-\ln F(n)}{(n-1)-n} \leq \frac{\ln F(n+a)-\ln F(n)}{(n+a)-n} \leq \frac{\ln F(n+1)-\ln F(n)}{(n+1)-n}$.

Ako koristimo $F(n) = (n-1)!$ dobijamo $\ln(n-1) \leq \frac{\ln F(n+a)-\ln(n-1)!}{a} \leq \ln n$.

Množenjem ove nejednakosti sa a i ako prebacimo a u eksponent i $\ln(n-1)!$ dodamo sa obe strane dobijamo $\ln((n-1)^a(n-1)!) \leq \ln F(n+a) \leq \ln(n^a(n-1)!)$, a pošto je logaritam monotono rastuća funkcija imamo da je $(n-1)^a(n-1)! \leq F(n+a) \leq n^a(n-1)!$.

Ako iskoristimo $F(a+n) = (a+n-1)(a+n-2)\cdots(a+1)aF(a)$ dobijamo

$\frac{(n-1)^a(n-1)!}{(a+n-1)(a+n-2)\cdots(a+1)a} \leq F(a) \leq \frac{n^a(n-1)!}{(a+n-1)(a+n-2)\cdots(a+1)a}$.

$(n-1)^a$ možemo da napišemo kao $n^a(\frac{n-1}{n})^a$ pa zamenom u gornji izraz dobijamo: $\frac{n^a(\frac{n-1}{n})^a(n-1)!}{(a+n-1)(a+n-2)\cdots(a+1)a} \leq F(a) \leq \frac{n^a(n-1)!}{(a+n-1)(a+n-1)\cdots(a+1)a}$ pa deljenjem leve strane sa $(\frac{n-1}{n})^a$ dobijamo $F(a) \leq \frac{n^a(n-1)!}{a(a+1)\cdots(a+n-2)(a+n-1)} \leq F(a)(1+\frac{1}{n-1})^a$ pa ako pustimo da $n \to +\infty$ dobijamo $F(a) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^a(n-1)!}{a(a+1)\cdots(a+n-2)(a+n-1)} = \Gamma(a)$ što je ustvari *Ojler-Gausova formula* za gama funkciju. $\bullet$

5 Logaritamski izvod gama funkcije

Logaritamski izvod gama funkcije se često zove i Ψ ili digama funkcija.

$\Psi(a) = \frac{d}{da}\ln\Gamma(a) = \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}$.

Funkcija Ψ zadovoljava funkcionalnu jednačinu $\Psi(a+1) = \frac{1}{a} + \Psi(a)$ koju dobijamo ako početnu funkcionalnu jednačinu logaritmujemo pa je zatim diferenciramo.

$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$

$\ln\Gamma(a+1) = \ln(a\Gamma(a))$

$\ln\Gamma(a+1) = \ln a + \ln\Gamma(a)$

Nakon diferenciranja dobijamo $\frac{\Gamma'(a+1)}{\Gamma(a+1)} = \frac{1}{a} + \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}$ što je ekvivalentno sa

$$\Psi(a+1) = \frac{1}{a} + \Psi(a). \tag{17}$$

Ako isti princip primenimo na formulu dopune i Ležandrovu formulu dobijamo:

$\Gamma(2a) = \frac{2^{2a-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(a)\Gamma(a+\frac{1}{2})$

$\ln\Gamma(2a) = \ln\frac{2^{2a-1}}{\sqrt{\pi}} + \ln\Gamma(a) + \ln\Gamma(a+\frac{1}{2})$

$\frac{\Gamma'(2a)}{\Gamma(2a)}2 = \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + \frac{\Gamma'(a+\frac{1}{2})}{\Gamma(a+\frac{1}{2})} + 2\ln 2$

Primenom $\Psi(a) = \frac{d}{da}\ln\Gamma(a) = \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}$ dobijamo:

$$\Psi(2a) = \frac{1}{2}\Psi(a) + \frac{1}{2}\Psi(a+\frac{1}{2}) + \ln 2 \tag{18}$$

$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}$

$\ln\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \ln\frac{\pi}{\sin a\pi}$

$\ln\Gamma(a) + \ln\Gamma(1-a) = \ln\frac{\pi}{\sin a\pi}$

Nakon diferenciranja dobijamo $\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} - \frac{\Gamma'(1-a)}{\Gamma(1-a)} = -\frac{1}{\sin a\pi}(\cos a\pi)\pi$.

Posle sređivanja $\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} - \frac{\Gamma'(1-a)}{\Gamma(1-a)} = -\pi\cot a\pi$.

Primenom $\Psi(a) = \frac{d}{da}\ln\Gamma(a) = \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}$ dobijamo:

$$\Psi(a) - \Psi(1-a) = -\pi\cot a\pi \tag{19}$$

Postoje dve formule za logaritamski izvod gama funkcije.

Pođimo od izraza

$\Gamma(b) - B(a,b) = \Gamma(b) - \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \frac{b\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\frac{\Gamma(a+b)-\Gamma(a)}{b} = \frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b)}\frac{\Gamma(a+b)-\Gamma(a)}{b}$

Ako uzmemo da $b \to 0$ na desnoj strani dobijamo

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \lim_{b \to 0} (\Gamma(b) - B(a,b))$$

što je logaritamski izvod po definiciji.

Ako znamo da gama i beta funkciju možemo predstaviti pomoću nesvojstvenih integrala kao $\Gamma(b) = \int_0^{+\infty} x^{b-1} e^{-x} dx$ i $B(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{b-1}}{(1+x)^{a+b}} dx$ zamenom u gornji izraz dobijamo

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \lim_{b \to 0} \int_0^{+\infty} x^{b-1} (e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^{a+b}}) dx.$$

Kada prođemo graničnim prelazom pod integral dobijamo $\Psi(a) = \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \int_0^{+\infty} (e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^a}) \frac{dx}{x}$, a formula dobijena na ovaj način se zove *Košijeva formula.*

Graničnim prelazom može da se pređe pod integral jer je funkcija $(e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^{a+b}}) \frac{1}{x}$ neprekidna funkcija po x i b i $x^b < 1$. Za gornju granicu je za $b \leq b_0$ $\left(\frac{1}{(1+x)^a} - e^{-x} \right) \frac{1}{x^{b_0 - 1}}$ majorirajuća funkcija.

Drugu formulu dobijamo ako iz Košijeve formule eliminišemo eksponencijalnu funkciju.

Ako stavimo $a = 1$ u Košijevu formulu dobijamo

$\Psi(1) = \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = \Gamma'(1) = \int_0^{+\infty} (e^{-x} - \frac{1}{1+x}) \frac{dx}{x} = -C$, pri čemu je kasnije dokazano da je $C = \gamma$ tj. da je to Ojlerova konstanta.

Ako oduzmemo ovu formulu od Košijeve formule dobijamo

$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + C = \int_0^{+\infty} (\frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^a}) \frac{dx}{x}$ uvedimo smenu $t = \frac{1}{1+x}, x = \frac{1}{t} + 1, dx = -\frac{dt}{t^2}$.

Dobijamo $\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + C = \int_1^0 (t - t^a) \frac{-tdt}{(1-t)t^2} = \int_0^1 \frac{1-t^{a-1}}{1-t} dt.$

Ova formula se zove *Gausova formula.*

Ovaj integral se može izračunati na dva načina.

Prvi način:

Uvedimo smenu $1 - t = u, dt = -du.$

$\Psi(a) = \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = -C + \int_0^1 \frac{1-t^{a-1}}{1-t} dt = -C - \int_1^0 \frac{1-(1-u)^{a-1}}{u} du = -C + \int_0^1 \frac{1-(1-u)^{a-1}}{u} du.$

Izraz $(1-u)^{a-1}$ možemo da razvijemo u binomni red.

$\Psi(a) = \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = -C + \int_0^1 (\frac{a-1}{1!} - \frac{(a-1)(a-2)}{2!} u + \frac{(a-1)(a-2)(a-3)}{3!} u^2 - ...) du$

$\Psi(a) = \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = -C + \frac{a-1}{1 \cdot 1!} - \frac{(a-1)(a-2)}{2 \cdot 2!} + \frac{(a-1)(a-2)(a-3)}{3 \cdot 3!} - ...$

Možemo zameniti sumu i integral jer dobijeni red konvergira na osnovu *Abelovog kriterijuma.*

Red $(1+x)^{a-1} = 1 + b_1 + b_2 + \cdots + b_n + ...$ konvergira za $x = 1$, $a > 0$, a red $\frac{1}{n}$ je monoton i ograničen pa je red $1 + a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n + ...$ konvergentan.

Formula dobijena na ovakav način se zove *Šternova formula.*

Drugi način:

$$\frac{1-t^{a-1}}{1-t} = (1-t^{a-1})\frac{1}{1-t} = (1-t^{a-1})\sum_{k=0}^{+\infty} t^k = \sum_{k=0}^{+\infty}(t^k - t^{a+k-1})$$

jer $0 \leq t < 1$ i svi članovi reda imaju isti znak.

Zamenom redosleda sume i integrala i ako integralimo član po član dobijamo

$$\Psi(a) = \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = -C + \sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{a+k}).$$

Zamena je dozvoljena jer je dobijeni red uniformno konvergentan jer za $0 < a \leq a_0$ majorira numerički red

$$(a_0+1)\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}.$$

Pomoću ove formule je moguće izvesti druge korisne formule.

Za funkcionalnu jednačinu

$$\Psi(a+1) = \frac{1}{a} - C + 1 - \frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{+\infty}(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{a+k}) = -C + \sum_{k=1}^{+\infty}(\frac{1}{k} - \frac{1}{a+k}) = -C + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{a}{k(a+k)}$$

za $a \neq -1, -2, ...$

Ako diferenciramo $\Psi(a)$ dobijamo

$$\Psi'(a) = \frac{d^2}{da^2}ln\Gamma(a) = \frac{\Gamma''(a)\Gamma(a) - (\Gamma'(a))^2}{(\Gamma(a))^2} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(a+k)^2}.$$

Diferenciranje je dozvoljeno jer ovaj red majorira numerički red $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$ i uniformno je konvergentan.

$$\Psi^n(a) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}n!}{(a+k)^{n+1}}, n \geq 1.$$

Iz ovog izraza možemo zaključiti da je drugi izvod pozitivan pa je dobijen drugi dokaz da je gama funkcija konveksna.

Ako stavimo da je $a = 1$ tada je $\Gamma''(1) = \frac{\pi^2}{6} + C^2$.

Tejlorov red za $\Gamma(1+a)$ funkciju nad intervalom $[1, 1+a]$, $a > 0$ ima sledeći oblik:

$\Gamma(1+a) = 1 - \frac{C}{1!}a + \frac{\pi^2+6C^2}{6\cdot 2!}a^2 + O(a^3)$ odakle dobijamo Tejlorov razvoj za prva tri člana funkcije $\Gamma(a)$ na $(0,a)$.

$\Gamma(a) = \frac{1}{a} - C + \frac{\pi^2+6C^2}{12}a + O(a^2)$

Ako iskoristimo $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ i podelimo izraz sa a dobijamo:

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + C = \sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{a+k}).$$

Ovaj izraz integralimo u granicama od 1 do a i dobijamo

$$\ln\Gamma(a) + C(a-1) = \sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{a-1}{k+1} - \ln\frac{a+k}{k+1}).$$

Ovakva integracija je dozvoljena jer je red konvergentan za $a > 0$.

Ako stavimo $a = 2$ u

$$\ln\Gamma(a) + C(a-1) = \sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{a-1}{k+1} - \ln\frac{a+k}{k+1})$$

dobijamo

$$C = \sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{1}{k+1} - \ln\frac{k+2}{k+1}).$$

Pređimo na graničnu vrednost

$$C = \lim_{n\to+\infty}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} - \ln(n+1)) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} - \ln n - \ln\frac{n+1}{n})$$

$$C = \gamma - \lim_{n\to+\infty}\ln(1+\frac{1}{n}) = \gamma$$

Ova konstanta se zove *Ojlerova konstanta.* Ona se može jednostavno prikazati pomoću izraza za izvod gama funkcije i činjenice da je $\Gamma'(1) = -C = -\gamma$.

$\gamma = -\Gamma'(1) = -\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln t dt = \int_0^1 \ln t d(e^{-t}-1) + \int_1^{+\infty}\ln t d(e^{-t})$

Uvedimo smenu $u = \frac{1}{t}$ u drugi integral.

$\gamma = \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}dt - \int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}du = \int_0^1 \frac{1-e^{-t}-e^{-\frac{1}{t}}}{t}dt.$

Kada u izraz $\Psi(a+1) = \Psi(a) + \frac{1}{a}$ stavimo vrednosti za $a = 1, 2, ..., n-1$, zatim ih saberemo i ako iskoristimo ocenu prvih n članova harmonijskog reda dobijamo

$\Psi(n) = \frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)} = -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n-1} = \ln(n-1) + O(\frac{1}{n})$, $n > 1$.

6 Gausova multiplikativna formula

$$\boxed{\Gamma(a)\Gamma(a+\tfrac{1}{n})\Gamma(a+\tfrac{2}{n})...\Gamma(a+\tfrac{n-1}{n}) = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{na-\frac{1}{2}}}\Gamma(na)}$$

Dokaz:

Uvedimo smenu $t = u^n$, $dt = nu^{n-1}du$ u $\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + C = \int_0^1 \frac{1-t^{a-1}}{1-t}dt.$

Dobijamo $\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + C = \int_0^1 \frac{1-u^{na-n}}{1-u^n}nu^{n-1}du = n\int_0^1 \frac{u^{n-1}-u^{na-1}}{1-u^n}du.$

Kada umesto a stavimo $a + \frac{k}{n}$ za $k = 0, 1, 2, ..., n-1$ dobijamo

$\frac{\Gamma'(a+\frac{k}{n})}{\Gamma(a+\frac{k}{n})} + C = n\int_0^1 \frac{u^{n-1}-u^{na+k-1}}{1-u^n}du.$

Saberimo sve vrednosti koje su dobijene za $k = 0, 1, 2, ..., n-1.$

Dobijamo $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma'(a+\frac{k}{n})}{\Gamma(a+\frac{k}{n})} + nC = n\int_0^1 (\frac{nu^{n-1}}{1-u^n} - \frac{u^{na-1}}{1-u})du.$

Da bi se eliminisao argument nC u Gausovu formulu umesto argumenta a stavićemo na zatim dobijenu formulu ćemo pomnožiti sa n i oduzećemo.

Tada dobijamo

$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma'(a+\frac{k}{n})}{\Gamma(a+\frac{k}{n})} - n\frac{\Gamma'(na)}{\Gamma(na)} = n\int_0^1 (\frac{nu^{n-1}}{1-u^n} - \frac{1}{1-u})du = -n\ln\frac{1-u^n}{1-u}|_0^1 = -n\ln(1+u+...+u^{n-1})|_0^1 =$
$= -n\ln n.$

Možemo napisati levu stranu u obliku logaritamskog izvoda po a.

Tada dobijamo

$$\frac{d}{da}\ln\frac{\Gamma(a)\Gamma(a+\frac{1}{n})\Gamma(a+\frac{2}{n})\cdots\Gamma(a+\frac{n-1}{n})}{\Gamma(na)} = -n\ln n.$$

Integralimo ovaj izraz po a. Dobijamo $\ln\frac{\Gamma(a)\Gamma(a+\frac{1}{n})\Gamma(a+\frac{2}{n})\cdots\Gamma(a+\frac{n-1}{n})}{\Gamma(na)} = -an\ln n + \ln(const)$ ili

$\Gamma(a)\Gamma(a+\frac{1}{n})\Gamma(a+\frac{2}{n})\cdots\Gamma(a+\frac{n-1}{n}) = const\frac{\Gamma(na)}{n^{na}}.$

Da bi odredili *const* stavimo da je $a = \frac{1}{n}$ dobijamo $\Gamma(\frac{1}{n})\Gamma(\frac{2}{n})\cdots\Gamma(\frac{n-2}{n})\Gamma(\frac{n-1}{n}) = \frac{const}{n}.$

$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}$

$E = \Gamma(\frac{1}{n})\Gamma(\frac{2}{n})\cdots\Gamma(\frac{n-2}{n})\Gamma(\frac{n-1}{n})$

$E^2 = \Gamma(\frac{1}{n})\Gamma(\frac{n-1}{n})\Gamma(\frac{2}{n})\Gamma(\frac{n-2}{n})\cdots\Gamma(\frac{n-2}{n})\Gamma(\frac{2}{n})\Gamma(\frac{n-1}{n})\Gamma(\frac{1}{n}) = \prod_{k=1}^{n-1}\Gamma(\frac{k}{n})\Gamma(1-\frac{k}{n}) =$

$= \frac{\pi^{n-1}}{\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-2)\pi}{n}\sin\frac{(n-1)\pi}{n}}.$

Da bi se izračunao proizvod sinusa iskoristićemo n-te kompleksne korene iz jedinice.

$\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} = z_k,\ k = 0, 1, ..., n-1$

Tada je

$$\frac{z^n-1}{z-1} = z^{n-1} + z^{n-2} + ... + z + 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(z - z_k) = \prod_{k=0}^{n-1}(z - \cos\frac{2k\pi}{n} - i\sin\frac{2k\pi}{n}).$$

Ako stavimo da je $z = 1$ i ako iskoristimo trigonometrijske formule za dvostruki ugao $1 - \cos\frac{2k\pi}{n} = 2\sin^2\frac{k\pi}{n}$ i $\sin\frac{2k\pi}{n} = 2\sin\frac{k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}$ dobijamo

$$n = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\prod_{k=1}^{n-1}(\sin\frac{k\pi}{n} - i\cos\frac{k\pi}{n}).$$

Kada uzmemo moduo izraza n dobijamo

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

jer $|\sin\frac{k\pi}{n} - i\cos\frac{k\pi}{n}| = |-i(\cos\frac{k\pi}{n} + i\sin\frac{k\pi}{n})| = |-i||\cos\frac{k\pi}{n} + i\sin\frac{k\pi}{n}| = 1$.
Dobija se $E^2 = \frac{\pi^{n-1}}{\frac{n}{2^{n-1}}} \Longrightarrow E = \sqrt{\frac{(2\pi)^{n-1}}{n}} \Longleftrightarrow \sqrt{\frac{(2\pi)^{n-1}}{n}} = \frac{const}{n}$ odakle dobijamo sledeće $\Gamma(\frac{1}{n})\Gamma(\frac{2}{n})\cdots\Gamma(\frac{n-2}{n})\Gamma(\frac{n-1}{n}) = \frac{\Gamma(na)}{n^{na}}n\sqrt{\frac{(2\pi)^{n-1}}{n}} = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{na-\frac{1}{2}}}\Gamma(na)$ •.

7 Primeri

Primer 1

Za $\alpha, \beta > -1$ izračunajmo sledeći integral: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha x \cos^\beta x dx$.

Uvedimo smenu $\sin^2 x = t, dt = 2 \sin x \cos x dx$ u gornji integral.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha x \cos^\beta x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{\frac{\alpha-1}{2}} (1-t)^{\frac{\beta-1}{2}} dt = \frac{1}{2} B(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+1}{2})$

Kada izrazimo beta funkciju preko gama funkcije dobijamo $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha x \cos^\beta x dx = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})\Gamma(\frac{\beta+1}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha+\beta}{2}+1)}$

Primer 2

Rabeov integral

$I = \int_0^1 \ln \Gamma(t) dt$

Uvedimo smenu $1 - x = t, -dx = dt$ dobijamo $I = \int_0^1 \ln \Gamma(1-x) dx$ pa je

$I = \frac{1}{2} \int_0^1 \ln[\Gamma(x)\Gamma(1-x)] dx = \frac{1}{2} \int_0^1 [\ln \pi - \ln \sin \pi x] dx = \frac{1}{2} \ln \pi - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \ln \sin 2x dx =$

$= \frac{1}{2} \ln \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx - \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x dx = \frac{1}{2} \ln \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}(-\frac{\pi}{2} \ln 2) = \ln \sqrt{2\pi}$.

Primer 3

Zapremina i površina n dimenzione sfere

Razlikujemo dva slučaja:

1) n je paran broj

2) n je neparan broj

Sfera je data sa $S^n = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} : \parallel x \parallel = R\}$ tj.${x_1}^2 + {x_2}^2 + ... + {x_n}^2 = R^2$. Uzećemo horizontalno parče od $x_{n+1} = -R$ do $x_{n+1} = +R$ debljine ΔX_{n+1}. Svako takvo parče je umanjena sfera dimenzije $(n-1)$ poluprečnika $\sqrt{R^2 - x_{n+1}^2}$. Zapremina tog dela je $c_{n-1}\sqrt{R^2 - x_{n+1}^2}^n \Delta x_{n+1}$ pa će zapremina cele sfere biti:

$$c_n R^{n+1} = 2c_{n-1} \int_0^R (R^2 - t^2)^{\frac{n}{2}} dt$$

Sređivanjem dobijamo:

$$c_n R^{n+1} = 2c_{n-1} R^n \int_0^R (1 - \frac{t^2}{R^2})^{\frac{n}{2}} dt$$

Uvedimo smenu u integral $s = 1 - \frac{t^2}{R^2}$. Dobijamo da je $t = R\sqrt{1-s}$, $dt = \frac{-Rds}{2\sqrt{1-s}}$ pa dobijamo

$$c_n R^{n+1} = 2c_{n-1} R^n \int_1^0 s^{\frac{n}{2}} \frac{-Rds}{2\sqrt{1-s}} = c_{n-1} R^{n+1} \int_0^1 s^{\frac{n}{2}} (1-s)^{-\frac{1}{2}} ds.$$

Skratimo sa R^{n+1} i dobijamo:

$$c_n = c_{n-1} \int_0^1 s^{\frac{n}{2}}(1-s)^{-\frac{1}{2}} ds.$$

Odakle dobijamo vezu između c_n i c_{n-1}. Uvedimo parcijalnu integraciju na sledeći način:

$$u = s^{\frac{n}{2}},\ dv = (1-s)^{-\frac{1}{2}} ds$$

$$du = \frac{n}{2} s^{\frac{n}{2}-1} ds,\ v = -2(1-s)^{\frac{1}{2}}$$

Naš integral onda postaje:

$$\int_0^1 s^{\frac{n}{2}}(1-s)^{\frac{1}{2}} ds = (-2s^{\frac{n}{2}}(1-s)^{\frac{1}{2}})|_0^1 + \frac{n}{2}\frac{2}{1} \int_0^1 s^{\frac{n}{2}-1}(1-s)^{\frac{1}{2}} ds$$

Prvi izraz je uvek nula pa $\int_0^1 s^{\frac{n}{2}}(1-s)^{-\frac{1}{2}} ds = \frac{n}{2}\frac{2}{1} \int_0^1 s^{\frac{n}{2}-1}(1-s)^{\frac{1}{2}} ds$ čime smo smanjili stepene unutar integrala ali je zbir stepena još uvek $\frac{n}{2} + \frac{1}{2}$.
Uradimo parcijalnu integraciju opet :

$$u = s^{\frac{n}{2}-1},\ dv = (1-s)^{\frac{1}{2}} ds$$

$$du = (\frac{n}{2}-1) s^{\frac{n}{2}-2} ds,\ v = -\frac{2}{3}(1-s)^{\frac{3}{2}}$$

Tada integral postaje:

$$\int_0^1 s^{\frac{n}{2}-1}(1-s)^{\frac{1}{2}} ds = (-\frac{2}{3}s^{\frac{n}{2}-1}(1-s)^{\frac{3}{2}})|_0^1 + (\frac{n}{2}-1)\frac{2}{3} \int_0^1 s^{\frac{n}{2}-2}(1-s)^{\frac{3}{2}} ds$$

Opet je prvi deo jednak nuli, pa početni integral postaje:

$$\int_0^1 s^{\frac{n}{2}}(1-s)^{-\frac{1}{2}} ds = \frac{n}{2}(\frac{n}{2}-1)\frac{2}{1}\frac{2}{3} \int_0^1 s^{\frac{n}{2}-1}(1-s)^{\frac{3}{2}} ds$$

Svaki put kada smanjimo stepen za s sa $\frac{n}{2} - (k-1)$ do $\frac{n}{2} - k$ i poveća se stepen za $1-s$ sa $k-1-\frac{1}{2}$ do $k-\frac{1}{2}$ ostaje nam faktor $\frac{n}{2}-(k-1)$ i faktor $\frac{2}{2k-1}$ pri čemu je zbir stepena uvek $\frac{n}{2}+\frac{1}{2}$.
Ukoliko postupak ponovimo k puta dobijamo:
$\int_0^1 s^{\frac{n}{2}}(1-s)^{-\frac{1}{2}} ds = \frac{n}{2}(\frac{n}{2}-1)(\frac{n}{2}-2)\cdots(\frac{n}{2}-(k-1))\frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{2}{5}\cdots\frac{2}{2k-1} \int_0^1 s^{\frac{n}{2}-k}(1-s)^{\frac{2k-1}{2}} ds$

1) n je paran broj

$n = 2k$

$\int_0^1 s^k(1-s)^{-\frac{1}{2}} ds = k(k-1)(k-2)\cdots(1)\frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{2}{5}\cdots\frac{2}{2k-1}\int_0^1 (1-s)^{\frac{2k-1}{2}} ds$

Sada možemo integral $\int_0^1 (1-s)^{\frac{2k-1}{2}} ds$ odmah izračunati

$\int_0^1 (1-s)^{\frac{2k-1}{2}} ds = (-\frac{2}{2k+1}(1-s)^{\frac{2k+1}{2}})|_0^1 = \frac{2}{2k+1}$.

$\int_0^1 s^k(1-s)^{-\frac{1}{2}} ds = k(k-1)(k-2)\cdots(1)\frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{2}{5}\cdots\frac{2}{2k-1}\frac{2}{2k+1}$

Integral postaje:

$$\int_0^1 s^k(1-s)^{-\frac{1}{2}} = 2^{2k+1}\frac{(k!)^2}{(2k+1)!}$$

jer se proizvod $\frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{2}{5}\cdots\frac{2}{2k-1}\frac{2}{2k+1}$ može predstaviti kao:

$\frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{2}{5}\cdots\frac{2}{2k-1}\frac{2}{2k+1} = \frac{2}{1}\frac{2}{2}\frac{2}{3}\frac{4}{4}\frac{2}{5}\frac{6}{6}\cdots\frac{2}{2k-1}\frac{2k}{2k}\frac{2}{2k+1} = 2^k\frac{2}{1}\frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{2}{4}\frac{2}{5}\frac{3}{6}\cdots\frac{2}{2k-1}\frac{k}{2k}\frac{2}{2k+1} = 2^k 2^{k+1}\frac{k!}{(2k+1)!}$

Odakle dobijamo da za $n = 2k$,

$$c_{2k} = 2^{2k+1}\frac{(k!)^2}{(2k+1)!}c_{2k-1}.$$

2) n neparno

$n = 2k-1$

$\int_0^1 s^{k-\frac{1}{2}}(1-s)^{-\frac{1}{2}} ds = (k-\frac{1}{2})(k-\frac{3}{2})(k-\frac{5}{2})\cdots(\frac{1}{2})\frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{2}{5}\cdots\frac{2}{2k-1}\int_0^1 s^{-\frac{1}{2}}(1-s)^{\frac{2k-1}{2}} ds$

$(k-\frac{1}{2})(k-\frac{3}{2})(k-\frac{5}{2})\cdots(\frac{1}{2})\frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{2}{5}\cdots\frac{2}{2k-1} = \frac{2k-1}{2}\frac{2k-3}{2}\frac{2k-5}{2}\cdots(\frac{1}{2})\frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{2}{5}\cdots\frac{2}{2k-1} = 1$

Odakle dobijamo $c_{2k-1} = c_{2k-2}\int_0^1 s^{-\frac{1}{2}}(1-s)^{\frac{2k-1}{2}} ds$

Uvedimo smenu $s^{\frac{1}{2}} = \sin(\theta)$, $1-s = \cos^2(\theta)$ i $\frac{1}{2}s^{-\frac{1}{2}} ds = \cos(\theta) d\theta$.

$\int_0^1 s^{-\frac{1}{2}}(1-s)^{\frac{2k-1}{2}} ds = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(\theta) d\theta$.

Uvedimo parcijalnu integraciju

$$u = \cos^{2k-1}(\theta)\ ,\ dv = \cos(\theta) d\theta$$

$$du = -(2k-1)\cos^{2k-2}(\theta)\sin(\theta) d\theta\ ,\ v = \sin(\theta)$$

Naš integral postaje:

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(\theta) d\theta = (\cos^{2k-1}(\theta)\sin(\theta))|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2k-1)\cos^{2k-2}(\theta)\sin^2(\theta) d\theta$

Prvi deo je uvek jednak nuli.

Znamo da je $\sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta)$.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(\theta) d\theta = (2k-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k-2}(\theta) d\theta - (2k-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(\theta) d\theta$

$(2k) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(\theta) d\theta = (2k-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k-2}(\theta) d\theta$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(\theta) d\theta = (\frac{2k-1}{2k}) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k-2}(\theta) d\theta$

Odakle dobijamo sledeću rekurzivnu formulu:

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(\theta) d\theta = \frac{(2k-1)(2k-3)(2k-5)\cdots(3)(1))}{(2k)(2k-2)(2k-4)\cdots(4)(2)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{1}{2^k} \frac{1}{2^{k-1}} \frac{(2k-1)!}{k!(k-1)!} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2^{2k}} \frac{(2k-1)!}{k!(k-1)!}$

Odakle dobijamo da za $n = 2k-1$,

$$c_{2k-1} = \frac{\pi}{2^{2k-1}} \frac{(2k-1)!}{k!(k-1)!} c_{2k-2}$$

Znajući da su $c_0 = 2$ i $c_1 = \frac{\pi}{2}$ dobijamo:

$c_{2k} = 2^{2k+1} \frac{(k!)^2}{(2k+1)!} c_{2k-1} = 2^{2k+1} \frac{(k!)^2}{(2k+1)!} \frac{\pi}{2^{2k-1}} \frac{(2k-1)!}{k!(k-1)!} c_{2k-2} = \frac{2\pi}{2k+1} c_{2k-2} = \frac{2^k \pi^k}{(2k+1)(2k-1)\cdots(5)(3)} c_0$

Sređivanjem dobijamo:

$$c_{2k} = \frac{2^{2k+1} \pi^k k!}{(2k+1)!}.$$

$c_{2k-1} = \frac{\pi}{2^{2k-1}} \frac{(2k-1)!}{k!(k-1)!} c_{2k-2} = \frac{\pi}{2^{2k-1}} \frac{(2k-1)!}{k!(k-1)!} 2^{2k-1} \frac{((k-1)!)^2}{(2k-1)!} c_{2k-3} = \frac{\pi}{k} c_{2k-3} = \frac{\pi^{k-1}}{k!} c_1 = \frac{\pi^k}{k!}$

Za n možemo da napišemo kao:

$$c_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$$

Zapremina n-dimenzione kugle je $V_n = c_n R^n$, tj. $V_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} R^n$.

Površina (n-1)-dimenzione sfere je data formulom: $S_{n-1} = \frac{dV_n}{dR} = \frac{nV_n}{R} = \frac{n \cdot \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2})} R^n}{R} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}} R^{n-1}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$,

a površina n-dimenzione sfere je: $S_n = \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} R^n$.

8 Literatura

[1] Đura Paunić: *FUNKCIONALNE JEDNAČINE KLASIČNIH MATEMATIČKIH FUNKCIJA*, Zavod za udžbenike Društvo matematičara Srbije, Beograd, 2009.

[2] Dušan Adnađević, Zoran Kadelburg: *MATEMATIČKA ANALIZA I*, Matematički fakultet, Beograd, 2004.

[3] Dušan Adnađević, Zoran Kadelburg: *MATEMATIČKA ANALIZA II*, Matematički fakultet, Beograd, 2008.

[4] Emil Artin, The Gamma Function, english translation Holt,Rinehart and Winston Inc.