UNIVERZITET U BEOGRADU
MATEMATIČKI FAKULTET

MASTER RAD

GEOMETRIJSKA TEORIJA SIMETRIJA I PRIMENE

SMER: PROFESOR MATEMATIKE I RAČUNARSTVA

STUDENT: BRANKA SAVIĆ

Beograd, 2013. godine

MENTOR
Dr Srđan Vukmirović

ČLANOVI KOMISIJE
Dr Srđan Vukmirović
Dr Neda Bokan
Dr Milan Božić

Sadržaj

Uvod

Ovim radom sam pokušala da opišem kako se pojam simetrije izučava u našim školama i kako bi trebalo poboljšati predavanja da bi učenicima bilo interesantnije.

U prvom poglavlju sam opisala metode izučavanja matematičkih pojmova.

Osnovne definicije i teoreme izometrijskih transformacija u ravni i prostoru navela sam u drugom i trećem poglavlju. Takođe, u tim poglavljima sam objasnila simetriju likova u ravni, odnosno prostoru.

U četvrtom poglavlju, od jednostavnijih ka složenim zadacima prikazala sam primenu simetrije, onako kako smatram da bi učenicima bilo lakše da razumeju pojam simetrije.

U petom i šestom poglavlju osvrnula sam se na ciljeve nastave matematike, odnosno kako bi gradivo iz geometrije trebalo približiti učenicima da bi im bilo zanimljivo.

1. METODE IZUČAVANJA MATEMATIČKIH POJMOVA

U nastavi matematike, da bi se ostvarili ciljevi nužno je da između učenika i nastavnog sadržaja posreduje nastavnik. Nastavne metode su načini rada na nastavnim sadržajima u kojima učestvuju nastavnik i učenici, a često se u njihovoj primeni koriste nastavna sredstva. Nastavne metode su sredstvo realizacije matematičkog vaspitanja i obrazovanja učenika, pa je jasno da nastavnik uvek treba da se potrudi da odabere odgovarajuće metode. Izbor nastavne metode najviše zavisi od sadržaja nastavne jedinice, od učenika (njihovog predznanja), materijalnih uslova, ...

Metoda usmenog izlaganja ponekad se zove i monološka metoda. Jedna je od najstarijih nastavnih metoda. Reč je o metodi rada u kojoj nastavnik izlaže delove nastavnog sadržaja. To može biti obrazlaganje, objašnjenje, predavanje, opisivanje, ... U matematici je to najčešće objašnjenje, a objašnjavaju se sadržaji matematičkih pojmova, znakovi i termini, postupci računanja, postupak rešavanja zadataka, ... Uspešnost objašnjavanja zavisi od predznanja učenika i njihove mogućnosti povezivanja novog gradiva sa već naučenim.

Uz ovu metodu nastavnik mora paziti o tempu izlaganja i intonaciji. Mora isticati bitne elemente gradiva, pogledom pratiti učenike i njihovu uključenost u rad. Povremeno ponavljati delove gradiva i tražiti od učenika da ukratko ponove rečeno.

Metoda razgovora ili dijaloška metoda je način rada u matematici u obliku dijaloga između nastavnika i učenika ili učenika međusobno, a zasniva se kroz niz pitanja i odgovora. Za uspešnost ove metode učenici moraju imati određeno predznanje. Učenici su stalno misaono i verbalno aktivni, razmišljaju i zaključuju. Kroz razgovor može se proveriti da li su učenici razumeli naučeno, postoje li praznine u znanju i jesu li zainteresovani za rad. Ako učenik ne odgovori odmah na pitanje, postavljaju se pomoćna ili dopunska pitanja. Kako se učenički odgovori i pitanja ne mogu predvideti, nedostatak ove metode može biti nepredviđeno skretanje i proširivanje teme i gubljenje dragocenog vremena.

Metod rada sa tekstom je metoda rada u kojem učenici direktno rade na pripremljenom tekstu. To može biti udžbenik, zbirka zadataka, kontrolni listić, ... Ovom se metodom može učiti novi sadržaj, vežbati, ponavljati i ispitivati znanje. Koristeći se tekstom, kod učenika se stvara navika služenja knjigom kao izvorom znanja, a uče se i nalaženju potrebnih informacija. Pošto je rad na tekstu najčešće individualna aktivnost učenika, pre početka rada im treba dati detaljna uputstva. Npr. prvo dobro da pročitaju tekst zadatka, zatim da razmisle kako i kojim postupkom je najefikasnije rešavati, pa tek onda da ga rešavaju zadatak.

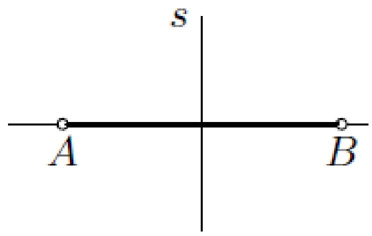
Metoda demonstracije je pokazivanje u nastavi svega što je moguće perceptivno doživeti. S obzirom da su nastavni sadržaji matematike proizašli iz potrebe stvarnog sveta u ljudskoj evoluciji, mnogi sadržaji učenicima se mogu opažanjem predočiti. Koristi se u svim situacijama kada se upoznaju različiti objekti, aktivnosti, ... Za demonstriranje u matematici se koriste štapići, modeli geometrijskih tela i likova, razne slike, ...

Metoda pismenih i grafičkih radova ili metoda crtanja je način rada u kojem se pojedini delovi nastavnih sadržaja zapisuju rečima ili izražavaju crtežom, tabelom ili dijagramom. Npr. zapisivanje matematičkih simbola, termina, računskih operacija, ... Grafička varijanta ove metode ima veliku primenu u aritmetici i geometriji. Crteži mogu biti unapred pripremljeni ili izrađeni u toku časa. Geometrijskim crtežom se mogu prikazati dužina, kružnica, geometrijski likovi, projekcije tela, ... Dijagrami i grafikoni se koriste za prikazivanje kvantitativnih odnosa, tablice za računanje vrednosti funkcija u određenim tačkama.

2. IZOMETRIJE RAVNI E^2

Definicija:

U ravni euklidskoj E^2 lik Φ je osnosimetričan sa likom Φ'u odnosu na neku pravu s ako je $S_s(\Phi)=\Phi'$,2) gde je sa S_s označena simetrija (refleksija) u odnosu na pravu s. Pravu s nazivamo osom simetrije likova Φ i Φ'. Specijalno, ako je $S_s(\Phi)=\Phi$, tada se kaže da je prava s osa simetrije lika Φ, a za takav lik kažemo da je simetričan.



slika 1

Teorema**:

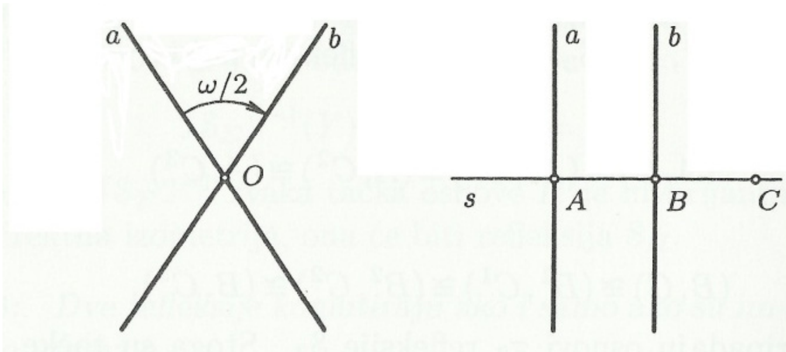
Svaka izometrija ravni može se predstaviti kao kompozicija najviše triju osnih refleksija.

Iz teoreme sledi da je svaka direktna izometrija u ravni kompozicija dveju osnih refleksija. Direktne izometrije ili kretanja čuvaju orjentaciju. One se predstavljaju parnim brojem refleksija (zato što refleksija menja orjentaciju. (slika 2)

- Ako se ose a i b tih dveju refleksija seku u nekoj tački O, kompoziciju $I=S_bS_a$ zvaćemo rotacijom ravni i obeležavaćemo je sa $\mathfrak{R}_{O,w}$. U toj oznaci w je dvostruki orjentisani ugao koji zahvataju prave a i b, u tom redosledu. Ugao w zvaćemo uglom, a tačku O središtem ili centrom rotacije $\mathfrak{R}_{O,w}$. Reći ćemo da je $\mathfrak{R}_{O,w}$ rotacija oko tačke O za ugao w.

* Dokazi teorema iz ovog poglavlja mogu se naći u knjizi Geometrija, D. Lopandić

- Ako su prave a i b međusobno upravne i seku se u tački O, rotaciju S_bS_a zvaćemo centralnom simetrijom ravni i obeležavaćemo je sa S_O. Tačku O zvaćemo centrom simetrije S_O.
- Ako su ose a i b tih dveju refleksija, u tačkama A i B upravne na nekoj pravoj s i ako je $S_b(A)=C$, kompoziciju S_bS_a zvaćemo translacijom ravni i obeležavaćemo je sa $\Im_{\overrightarrow{AC}}$. Pravu s zvaćemo osom, a orjentisanu duž AC vektorom translacije $\Im_{\overrightarrow{AC}}$. Reći ćemo da je $\Im_{\overrightarrow{AC}}$ translacija duž prave AC za vektor $\overrightarrow{AC}$



slika 2

Ako je I indirektna izometrija ravni, ona će na osnovu teoreme, biti ili osna refleksija ili kompozicija triju osnih refleksija. Ako je $I=S_sS_bS_a$, pri čemu su ose a i b u tačkama A i B upravne na pravoj s i ako je $S_b(A)=C$, tu transformaciju ćemo zvati klizajućom refleksijom ravni i obeležavaćemo je sa $\varsigma_{\overrightarrow{AC}}$. Pravu zvaćemo osom, a orjentisanu duž AC vektorom klizajuće refleksije $\varsigma_{\overrightarrow{AC}}$. $\varsigma_{\overrightarrow{AC}}$ je klizajuća refleksija duž prave AC za vektor $A\overline{C}$.

Naredne dve teoreme izvode klasifikacije direktnih i indirektnih izometrijskih transformacija Euklidske ravni.

Teorema

Svaka direktna izometrijska transformacija I ravni E^2 predstavlja koicidenciju, translaciju ili rotaciju.

Teorema

Svaka indirektna izometrijska transformacija I ravni E^2 predstavlja osnu ili klizajuću refleksiju te ravni.

Prethodne dve teoreme omogućuju da klasifikaciju transformacija euklidske ravni E^2 prikažemo u obliku sledeće sheme:

IZOMETRIJSKE TRANSFORMACIJE EUKLIDSKE RAVNI

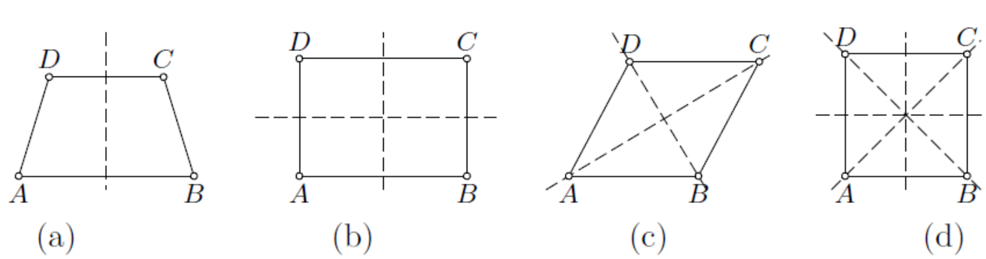
↙		↘	
Direktne izometrijske transformacije		Indirektne izometrijske transformacije	

↙	↓	↘	↙	↘
Koincidencija	Translacija	Rotacija	Osna refleksija	Klizajuća refleksija

2.1 SIMETRIJE LIKOVA U RAVNI E^2

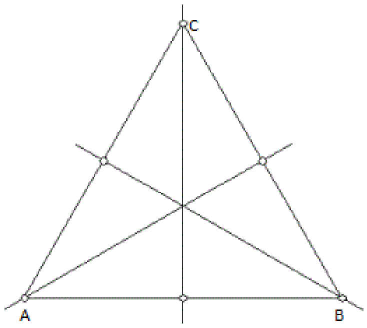
Svakoj od transformacija koje su prethodno opisane odgovara specifična relacija podudarnosti definisana na skupu likova u pomenutoj ravni. Tako se dolazi do tzv. identične, obrtne, translatorne, osnosimetrične i klizajuće podudarnosti likova. Ako je u nekoj ravni E^2 lik Φ podudaran sa likom Φ', tada po definiciji postoji izometrijska transformacija I ravni E^2 takva da je $I(\Phi)=\Phi'$.

Izometrijsku transformaciju I ravni E^2 koja prevodi neki lik Φ na taj isti lik Φ nazivamo simetrijom lika Φ. Budući da je identična transformacija $\mathcal{E}$ ravni E^2 izometrijska i da za svaki lik $\Phi\subset E^2$ važi relacija $\mathcal{E}(\Phi)=\Phi$, svaki lik $\Phi\subset E^2$ raspolaže najmanje jednom simetrijom.



slika 3

U ravni E^2 postoje likovi koji raspolažu sa više simetrija. Jednakokraki trapez *ABCD* u ravni E^2 (slika 3a) raspolaže ne samo koincidencijom, već i osnom simetrijom; osa te simetrije određena je središtima paralelnih stranica *AB* i *CD*. Pravougaonik *ABCD* u ravni E^2 (slika 3b) raspolaže sa dve osne simetrije: centralnom simetrijom i koincidencijom. Ose simetrije pravougaonika određene su središtima naspramnih stranica. Romb *ABCD* u ravni E^2 (slika 3c) raspolaže istim brojem simetrija, kao i pravougaonik: centralnom simetrijom i koincidencijom. Njegove ose simetrija određene su njegovim dijagonalama.



slika 4

ROTACIJA	REFLEKSIJA
$e=\begin{pmatrix} A\,B\,C \\ A\,B\,C \end{pmatrix}$	$S_P=\begin{pmatrix} A\,B\,C \\ A\,C\,B \end{pmatrix}$
$r_1=\begin{pmatrix} A\,B\,C \\ B\,C\,A \end{pmatrix}$	$S_q=\begin{pmatrix} A\,B\,C \\ C\,B\,A \end{pmatrix}$
$r_2=\begin{pmatrix} A\,B\,C \\ C\,A\,B \end{pmatrix}$	$S_r=\begin{pmatrix} A\,B\,C \\ B\,A\,C \end{pmatrix}$

tabela 1

Jednakostranični trougao *ABC* u ravni E^2 raspolaže sa šest simetrija. To su identitet, rotacije r_1 i r_2 za uglove 120^o i 240^o i tri osne simetrije, koje su određene simetralama p, q, r stranica *AB*, *BC* i *AC* (slika 4; tabela1). Kvadrat *ABCD* u ravni E^2 (slika 3d) raspolaže sa osam simetrija; to su rotacije r_1, r_2 i r_3 oko njegovog središta za uglove 90^o, 180^o, 270^o, 360^o, dve osne simetrije kojima su ose određene središtima naspramnih stranica i dve osne simetrije kojima su ose određene njegovim dijagonalama (slika 3d; tabela 2).

ROTACIJA	REFLEKSIJA
$e=\begin{pmatrix} A\,B\,C\,D \\ A\,B\,C\,D \end{pmatrix}$	$S_P=\begin{pmatrix} A\,B\,C\,D \\ B\,A\,D\,C \end{pmatrix}$
$r_1=\begin{pmatrix} A\,B\,C\,D \\ B\,C\,D\,A \end{pmatrix}$	$S_q=\begin{pmatrix} A\,B\,C\,D \\ D\,C\,B\,A \end{pmatrix}$
$r_2=\begin{pmatrix} A\,B\,C\,D \\ C\,D\,A\,B \end{pmatrix}$	$S_m=\begin{pmatrix} A\,B\,C\,D \\ C\,B\,A\,D \end{pmatrix}$
$r_3=\begin{pmatrix} A\,B\,C\,D \\ D\,A\,B\,C \end{pmatrix}$	$S_n=\begin{pmatrix} A\,B\,C\,D \\ A\,D\,C\,B \end{pmatrix}$

tabela 2

Svaka od navedenih figura raspolaže konačnim brojem simetrija. U ravni E^2 postoje i figure koje raspolažu sa beskonačnim brojem simetrija. Na primer, krug raspolaže s beskonačno mnogo simetrija, jer rotacija oko njegovog središta za bilo koji ugao predstavlja rotacionu simetriju tog kruga, a prava određena bilo kojim njegovim dijametrom predstavlja njegovu osu simetrije.

Skup svih simetrija nekog lika Φ u ravni E^2 predstavlja grupu; tu grupu nazivamo grupom simetrija lika Φ i simbolički obeležavamo $G(I_\Phi)$. Ukupan broj elemenata grupe $G(I_\Phi)$ nazivamo redom te grupe simetrija. U tabeli 3 predstavljene su grupe simetrija jednakostraničnog trougla ABC, a u tabeli 4 grupe simetrija kvadrata $ABCD$.

•	e	r_1	r_2	S_r	S_q	S_p
e	e	r_1	r_2	S_r	S_q	S_p
r_1	r_1	r_2	e	S_q	S_p	S_r
r_2	r_2	e	r_1	S_p	S_r	S_q
S_r	S_r	S_p	S_q	e	r_2	r_1
S_q	S_q	S_r	S_p	r_1	e	r_2
S_p	S_p	S_q	S_r	r_2	r_1	e

tabela 3

•	e	r_1	r_2	r_3	S_p	S_q	S_m	S_n
e	e	r_1	r_2	r_3	S_p	S_q	S_m	S_n
r_1	r_1	r_2	r_3	e	S_m	S_n	S_q	S_p
r_2	r_2	r_3	e	r_1	S_q	S_p	S_n	S_m
r_3	r_3	e	r_1	r_2	S_n	S_m	S_p	S_q
S_p	S_p	S_n	S_q	S_m	e	r_2	r_3	r_1
S_q	S_q	S_m	S_p	S_n	r_2	e	r_1	r_3
S_m	S_m	S_p	S_n	S_q	r_1	r_3	e	r_2
S_n	S_n	S_q	S_m	S_p	r_3	r_1	r_2	e

tabela 4

Definicija

Punktualnom grupom simetrija nazivamo grupu u kojoj sve simetrije raspolažu najmanje jednom invarijantnom tačkom.

Iz same definicije neposredno sledi da punktualna grupa simetrija nekog lika u ravni E^2 može da raspolaže isključivo simetrijama koje imaju invarijantnih tačaka; to su centralna simetrija i osne simetrije. U punktualnoj grupi centralne simetrije moraju imati zajedničko središte, ukoliko takva grupa raspolaže i osnim simetrijama, ose tih simetrija sadrže i pomenuto središte. Razlikujemo dve vrste punktualnih grupa simetrija; to su cikličke i diedarske grupe. Ciklička grupa C_n je grupa simetrija rotacija pravilnog poligona sa n stranica. Elementi grupe su rotacije za ugao, oko ose koja prolazi kroz središte poligona. Na primer, kod jednakostraničnog trougla elementi cikličke grupe su $C_n=\{e,r_1,r_2\}$. Diedarska grupa D_n je grupa simetrija pravilnog poligona sa n stranica. Na primer, elementi diedarske grupe kod kvadrata su $D_n=\{e,r_1,r_2,r_3,p,q,m,n\}$. Diedarska grupa simetrija tipa D_n uvek raspolaže jednom podgrupom C_n.

3. IZOMETRIJA PROSTORA E^3 *

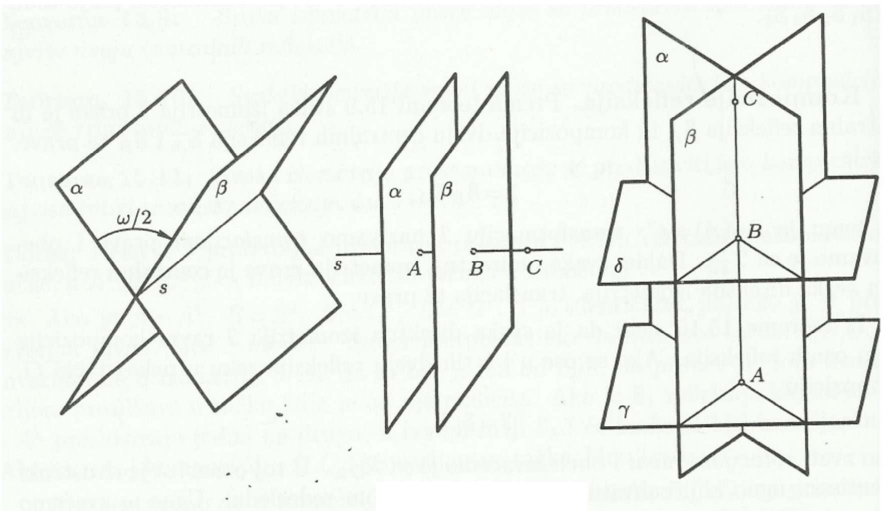
Teorema

Svaka izometrija prostora može se predstaviti kao kompozicija najviše četiri ravanske refleksije.

Iz teoreme sledi da je svaka direktna izometrija I prostora ili kompozicija dveju ravanskih refleksija ili kompozicija četiri ravanske refleksije (slika 5):

- Ako je $I=S_\beta S_\alpha$, pri čemu se ravni α i β seku duž neke prave s, tu transformaciju ćemo zvati osnom rotacijom prostora i obeležavaćemo je sa $\Re_{s,\omega}$. U toj oznaci ω je ugao dvostruko orjentisanog diedra koji, redom, obrazuju ravni α i β. Ugao ω ćemo zvati uglom, a pravu s osom rotacije $\Re_{s,\omega}$. Reći ćemo da je $\Re_{s,\omega}$ rotacija oko prave s za ugao ω.
- Ako su ravni α i β međusobno upravne, osnu rotaciju $S_\beta S_\alpha$ zvaćemo osnom simetrijom prostora i obeležavaćemo sa S_s. Pravu s ćemo zvati osom simetrije S_s.
- Ako su ravni α i β, redom, u tačkama A i B upravne na nekoj pravoj s i $S_\beta(A)=C$, kompoziciju $S_\beta S_\alpha$ ćemo zvati translacijom prostora i obeležavaćemo je sa $\Im_{\overrightarrow{AC}}$. Pravu s ćemo zvati osom translacije, a orjentisanu duž AC vektorom translacije $\Im_{\overrightarrow{AC}}$. Reći ćemo da je $\Im_{\overrightarrow{AC}}$ translacija prostora duž prave AC za vektor $\overrightarrow{AC}$.
- Ako je $I=S_\delta S_\gamma S_\beta S_\alpha$, pri čemu se ravni α i β i seku duž neke prave s, a ravni γ i δ su u tačkama A i B upravne na s i $S_\delta(A)=C$, transformaciju I ćemo zvati zavojnim kretanjem i obeležavaćemo je sa $Z_{\overrightarrow{AC},\omega}$. U toj oznaci ω je ugao dvostrukog orjentisanog diedra koji, redom, obrazuju ravni α i β. Pravu s ćemo zvati osom, orjentisanu duž AC vektorom, a ugao ω uglom zavojnog kretanja $Z_{\overrightarrow{AC},\omega}$.

* Više o izometrijama prostora može se pronaći u [3] i [4]



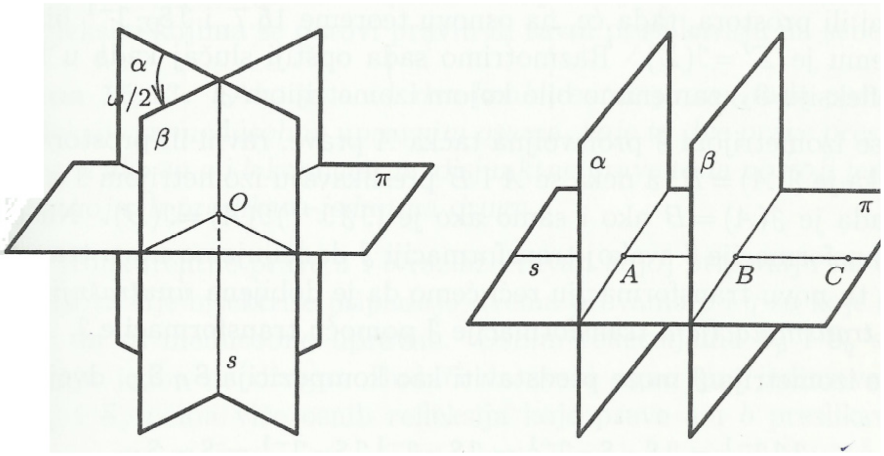
slika 5

Ako je I indirektna izometrijska transformacija, ona će na osnovu teoreme, biti ili ravanska refleksija ili kompozicija triju ravanskih refleksija (slika 6):

- Ako je $I=S_\pi S_\beta S_\alpha$, pri čemu se ravni α i β seku duž neke prave s koja je upravna na ravni π, transformaciju I zvaćemo rotacionom refleksijom i obeležavaćemo je sa $\mathfrak{R}_{\pi;s,\omega}$. U toj oznaci ω je ugao dvostruko orjentisanog diedra koji, redom, obrazuju ravni α i β. Ravan π je osnova, prava s osa, a ugao ω je ugao rotacione refleksije $\mathfrak{R}_{\pi;s,\omega}$.

- Ako su ravni α i β međusobno upravne, a O presek prave s i ravni π, rotacionu refleksiju $\mathfrak{R}_{\pi;s,\omega}$ zvaćemo centralnom simetrijom prostora i obeležavaćemo je sa S_o. Tačku O zvaćemo centrom simetrije S_o.

- Ako je $I=S_\pi S_\beta S_\alpha$, pri čemu su α i β dve ravni koje su, redom, u tačkama A i B upravne na nekoj pravoj s ravni π i ako je $S_\beta(A)=C$, transformaciju I zvaćemo klizajućom refleksijom prostora i obeležavaćemo je sa $\varsigma_{\pi,\overrightarrow{AC}}$. Ravan π zvaćemo osnovom, pravu s osom, a orjentisanu duž AC vektorom klizajuće refleksije $\varsigma_{\pi,\overrightarrow{AC}}$.



slika 6

Naredne dve teoreme omogućuju klasifikaciju direktnih i indirektnih izometrijskih transformacija.

Teorema

Svaka direktna izometrijska transformacija I prostora E^3 predstavlja koincidenciju, translaciju, osnu rotaciju ili zavojno kretanje.

Teorema

Svaka indirektna izometrijska transformacija I prostora E^3 predstavlja ravansku, osnorotacionu ili klizajuću refleksiju.

Sada klasifikacija izometrijskih transformacija euklidskog prostora E^3 može da se prikaže u obliku sledeće sheme:

IZOMETRIJSKE TRANSFORMACIJE EUKLIDSKOG PROSTORA E^3

↙ ↘

Direktne izometrijske transformacije | Indirektne izometrijske transformacije

↙ ↙ ↘ ↘ | ↙ ↓ ↘

Koincidencija | Translacija | Osne rotacije | Zavojna kretanja | Ravanska refleksija | Osnorotaciona refleksija | Klizajuća refleksija

---

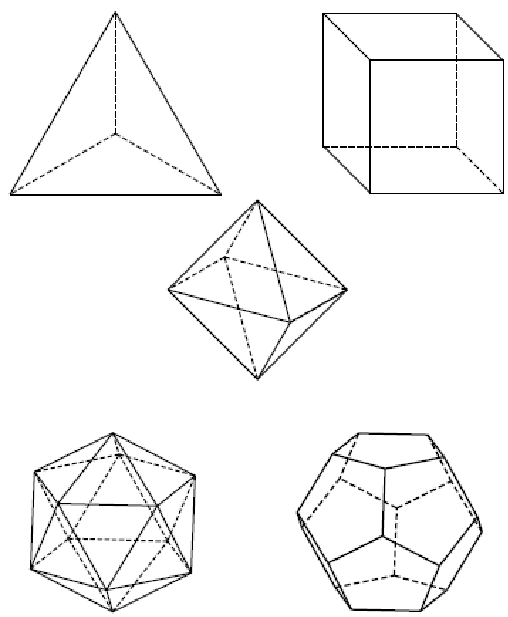
3.1 SIMETRIJE PRAVILNIH POLIEDARA U PROSTORU E^3

Poliedar je prostorni geometrijski lik čiji se rub sastoji iz povezanog skupa poligonskih površi tako raspoređenih da je svaka ivica jedne površi istovremeno ivica tačno još jedne površi, a površi sa zajedničkim temenom pripadaju stranama tačno jedne rogljaste površi. Poligonske površi zovemo pljosnima tog poliedra, a ivice i temena pljosni zovemo ivicama i temenima poliedra. Skup svih poligonskih površi na rubu poliedra zovemo poliedarskom površi.

Poliedre koji zadovoljavaju sledeće uslove:

1. sve pljosni su pravilne i međusobno podudarne poligonske površi
2. sve rogljaste površi su pravilne i međusobno podudarne oko svakog temena u istom broju
3. sve pljosni su konveksne i svi rogljevi su konveksni

zovu se pravilni poliedri (slika 7).



Slika 7: Pravilni poliedri – PLATONOVA TELA: tetraedar, heksaedar, oktaedar, ikosaedar i dodekaedar

Pravilni tetraedar, pravilni heksaedar (kocka), pravilni oktaedar, pravilni ikosaedar i pravilni dodekaedar su jedini pravilni poliedri, poznati još kao Platonova tela. Njihova lepota prozilazi iz simetrija i jednakosti njihovih odnosa.

Definicija

Simetrijom lika u prostoru Φ nazivamo svaku izometrijsku transformaciju E^3 te ravni takvu da je $I(\Phi)=\Phi$.

Skup svih simetrija lika $\Phi\subset E^3$ obrazuje grupu; ta grupa se naziva grupom simetrija lika Φ i simbolički obeležavamo $G(I_\Phi)$. Broj elemenata grupe $G(I_\Phi)$ nazivamo redom grupe. Sledeća teorema, koja se može naći u [3], precizira grupe simetrija pravilnih poliedara:

Teorema

Ukupan broj simetrija pravilnog polidra Φ u prostoru E^3 jednak je dvostrukom broju njegovih ivičnih uglova odnosno četvorostrukom broju njegovih ivica. Jednu polovinu tih simetrija čine direktne, a drugu polovinu čine indirektne izometrijske transformacije.

Ako pravilan poliedar Φ ima *t* temena, *i* ivica, *p* pljosni i ako svaka pljosan ima *m* stranica a svaki rogalj *n* ivica, iz teoreme se zaključuje da se red grupe $G_I(\Phi)$ simetrija i red grupe $G_{I+}(\Phi)$ rotacija tog pravilnog poliedra mogu izraziti sledećim jednakostima:

$$\text{red } G_I(\Phi) = 2\text{red } G_{I+}(\Phi) = 2\,mp = 2\,nt = 4\,i$$

Izvedena svojstva omogućuju s obzirom na postojeće vrste pravilnih poliedara sledeću tabelu:

	Vrste poliedara Φ	**red** $G_I(\Phi)$	**red** $G_{I+}(\Phi)$
1	Pravilan tetraedar	24	12
2	Pravilan heksaedar	48	24
3	Pravilan oktaedar	48	24
4	Pravilan dodekaedar	120	60
5	Pravilan ikosaedar	120	60

Ovim je ustanovljeno koliki je red grupe simetrija i red grupe rotacija svakog od postojećih pet vrsta pravilnih poliedara.

Pravilan tetraedar raspolaže sa:

8 osnih rotacija reda tri koje su definisane u oba smera u odnosu na prave određene visinama tog tetraedra;

3 osne simetrije reda dva koje su definisane u odnosu na prave određene središtima naspramnih ivica;

1 identična transformacija;

6 ravanskih simetrija definisanih u odnosu na simetralne ravni unutrašnjih diedara;

6 osnorotacionih simetrija reda četiri definisanih u oba smera u odnosu na prave određene središtima naspramnih ivica.

Pravilan heksaedar (kocka) raspolaže sa:

6 osnih simetrija reda četiri definisanih u oba smera u odnosu na prave određene središtima naspramnih pljosni;

3 osne simetrije reda dva definisane u odnosu na prave određene središtima naspramnih pljosni;

6 osnih simetrija reda dva definisanih u odnosu na prave određene središtima naspramnih ivica;

8 osnih simetrija reda tri definisanih u oba smera u odnosu na prave određene naspramnim temenima;

1 identična transformacija;

6 ravanskih simetrija definisanih u odnosu na simetralne ravni unutrašnjih diedara;

3 ravanske simetrije definisane u odnosu na medijalne ravni ivica;

6 osnorotacionih simetrija reda četiri, definisanih u odnosu na prave određene središtima naspramnih pljosni;

8 osnorotacionih simetrija reda šest, definisanih u oba smera u odnosu na prave određene naspramnim temenima;

1 centralna simetrija.

Učenicima je teško da razumeju simetriju likova u ravni, odnosno prostoru, jer ne mogu da zamisle kako izgleda refleksija i rotacija slike i predmeta. Zato bi metodom demonstracije trebalo učenicima prikazati te simetrije. Na primer, napraviti od kartona kvadrat ili pravilan trougao. Probušiti ga iglom (vrhom šestara) u sredini, a zatim okretati za odgovarajući ugao (120 za trougao i 90 za kvadrat), a on će se preslikati u sebe. Za demonstraciju refleksije možemo koristiti ogledalo. Ogledalo se stavi uspravno na kartonski model kvadrata, iznad neke od njegovih osa simetrije. Kvadrat će se ogledati u sebi.

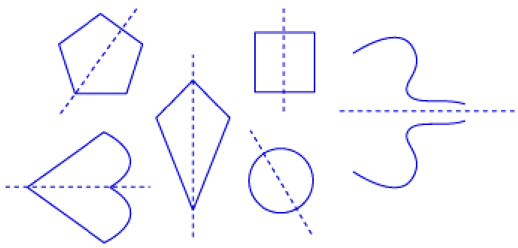
Slično za poliedre, napraviti model poliedra od kartona, recimo kocku, a zatim uočavati simetrije. Držati kocku za dva naspramna temena i zarotirati je za 90, 180, 270 stepeni. Kocka će se slikati u sebe, i slično. Zatim, metodom razgovora možemo učenike motivisati da nađu još neke transformacije koje slikaju lik u sebe.

4. PRIMENA SIMETRIJE U ZADACIMA

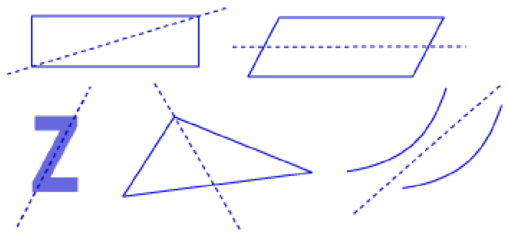
U ovom poglavlju navodimo neke jednostavne zadatke, kojima se učenicima može dodatno objasniti pojam simetrije kroz praktičan rad. Tu se može koristiti metod razgovora, metod demonstracije, metod crtanja, …

1. Osnosimetrične figure su na:

a) slici A

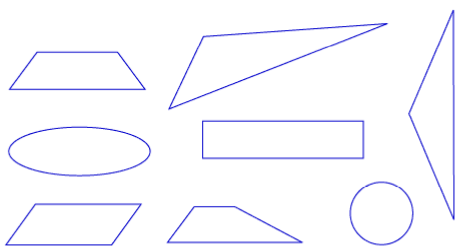


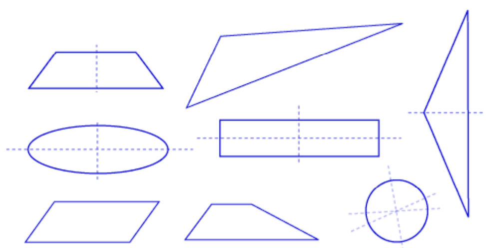
b) slici B



REŠENJE:
Osnosimetrične figure su na slici A.

2. Za svaku figuru pronađi sve linije simetrije koje postoje.



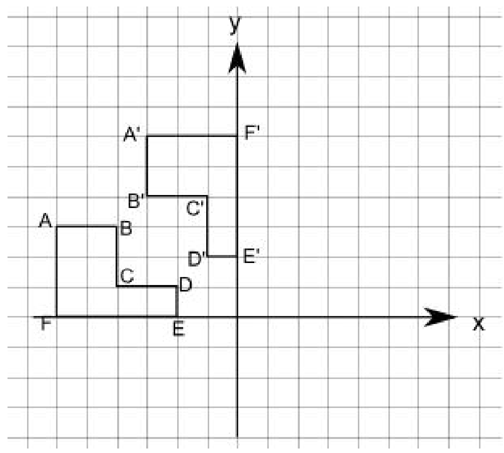


REŠENJE:
Korišćena metoda razgovora.

3. Nacrtati:

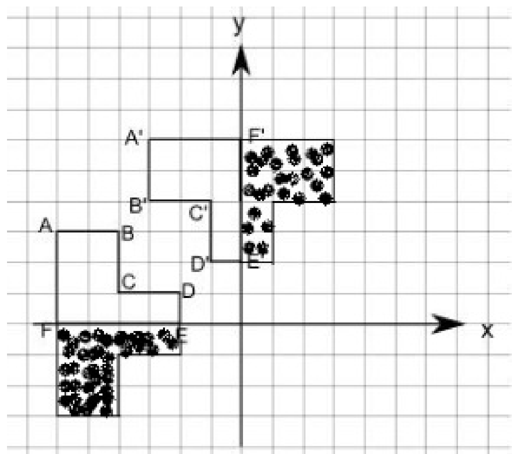
a) osnosimetričnu figuru figuri ABCDEF u odnosu na x-osu

b) osnosimetričnu figuru figuri A’B’C’D’E’F’ u odnosu na y-osu

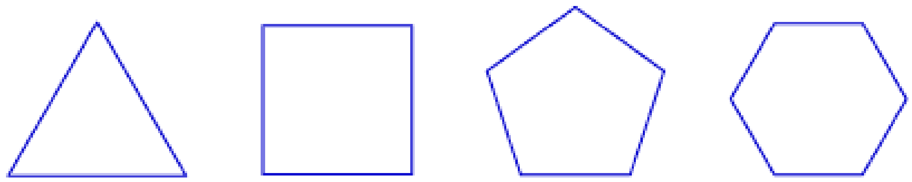


REŠENJE:

Korišćene metode razgovora i demonstracije



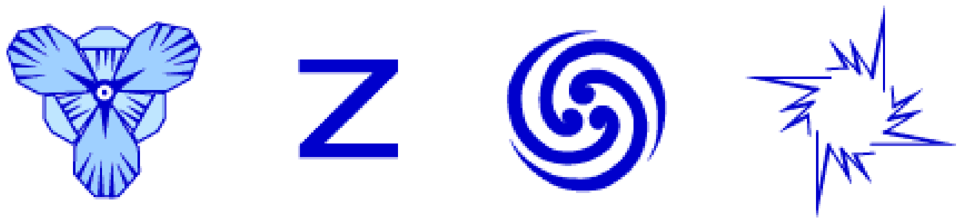
4. Da li pravilni poligoni dati na slici imaju rotacionu simetriju? Ako imaju, gde je centar rotacije i koliki je ugao rotacije?



REŠENJE:

Pravilni poligoni imaju rotacionu simetriju. U svakom slučaju, centar rotacije je centar poligona, a ugao rotacije je $360^{o}/n$, gde je n broj stranica poligona. Dakle, ugao rotacije je 120^{o}, 90^{o}, 72^{o}, 60^{o}, redom, za jednakostranični trougao, kvadrat, petougao i šestougao. Korišćena metoda razgovora.

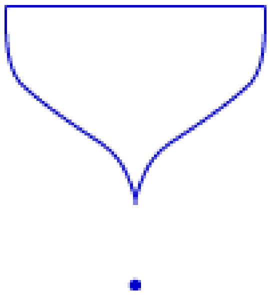
5. Odrediti ugao rotacije sledećih figura:



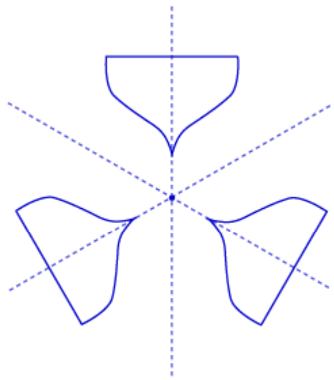
REŠENJE:

Za svaku figuru centar rotacije je centar figure, a ugao je, s leva u desno, 120^{o}, 180^{o}, 120^{o}, 90^{o}. Upotrebljena metoda razgovora i metoda demonstracije.

6. Od date figure napraviti figure koja kao simetriju ima rotaciju za 120 stepeni oko datog centra simetrije.



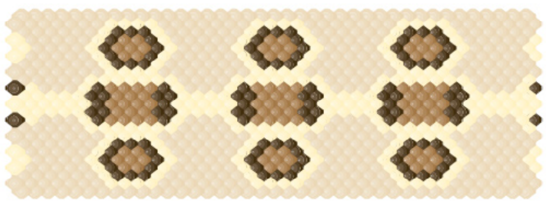
REŠENJE:
Korišćene metoda razgovora i metoda crtanja



7. Kojim izometrijskim transformacijama su nastale sledeće bordure:

REŠENJE:
a) translacija
b) translacija ili rotacija za ugao
c) translacija ili horizontalna refleksija
d) translacija ili vertikalna refleksija
Upotrebljena metoda razgovora i metoda demonstracije.

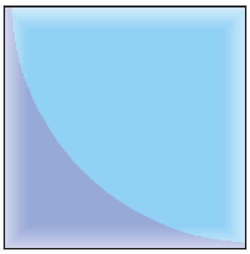
8. Na koju izometrijsku transformaciju podseća šara na zmijinoj koži:



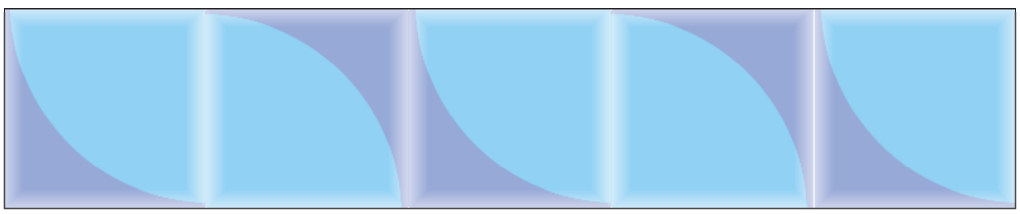
REŠENJE:

Translacija, rotacija za ugao 180^{o}, horizontalna refleksija, vertikalna refleksija, klizajuća refleksija. Korišćene metoda razgovora i metoda demonstracije.

9. Datu sliku rotirati za ugao 180^{o}, a zatim dobijenu sliku translirati. Kakva se bordura dobija?



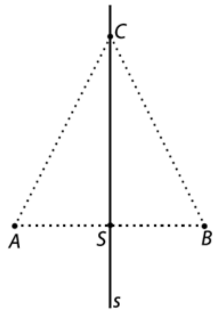
REŠENJE:



10. Osnom simetrijom u odnosu na pravu s tačka A se preslikava na tačku B. Neka je S presek prave s i duži AB i neka je C proizvoljna tačka prave s različita od tačke C.

Osnom simetrijom u odnosu na pravu s:

1) slika duži AC jeste duž _____.
2) slika duži AB jeste duž _____.
3) slika duži AS jeste duž _____.
4) slika duži CS jeste duž _____.
5) slika $\sphericalangle ACS$ jeste ugao _____.
6) slika $\sphericalangle ASC$ jeste ugao _____.
7) slika $\sphericalangle CAS$ jeste ugao _____.



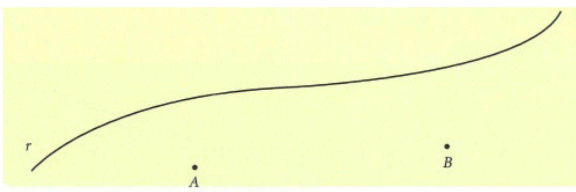
REŠENJE:

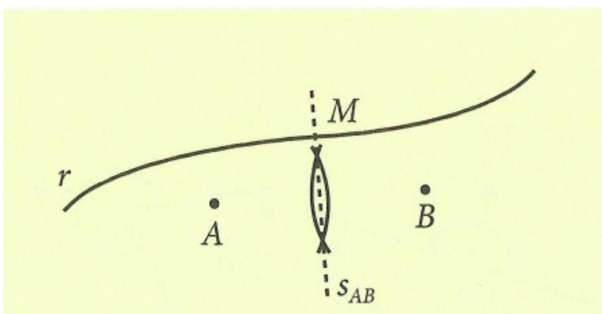
1) BC; 2) AB; 3) SB; 4) CS; 5) $\sphericalangle BCS$; 6) $\sphericalangle BSC$; 7) $\sphericalangle CBS$. Korišćena metoda rada sa tekstom.

11. Na slici linija predstavlja reku, a tačke A i B čiji žitelji žele zajednički da izgrade most preko reke, ali tako da bude jednako udaljen od oba sela.

Kako da odrede mesto za gradnju mosta?

U kom slučaju njihovi zahtevi ne mogu biti ispunjeni?

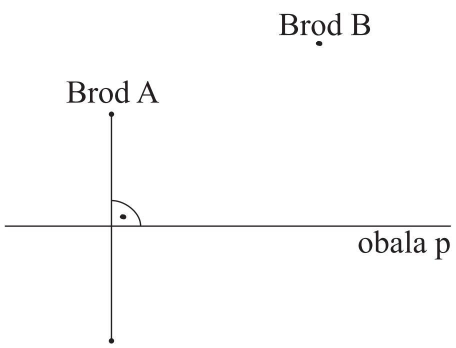




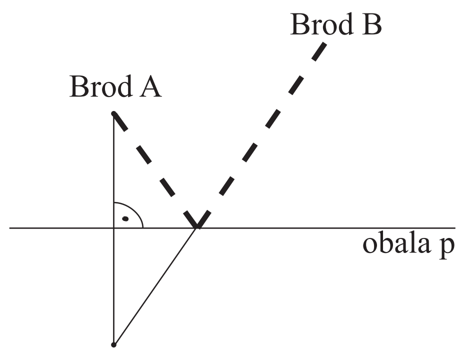
REŠENJE:

Most mora da se nalazi na simetrali S_{AB}, duži AB. Korišćena metoda rada sa tekstom.

12. Dva broda A i B nalaze se usidreni na moru, nedaleko od pravolinijske obale p. S jednog broda poslat je čamac na drugi brod. Čamac je usput morao da iskrca na obalu jednog putnika. Odrediti (konstruisati) najkraći put kojim čamac treba da ide da bi se obavio postavljeni zadatak.



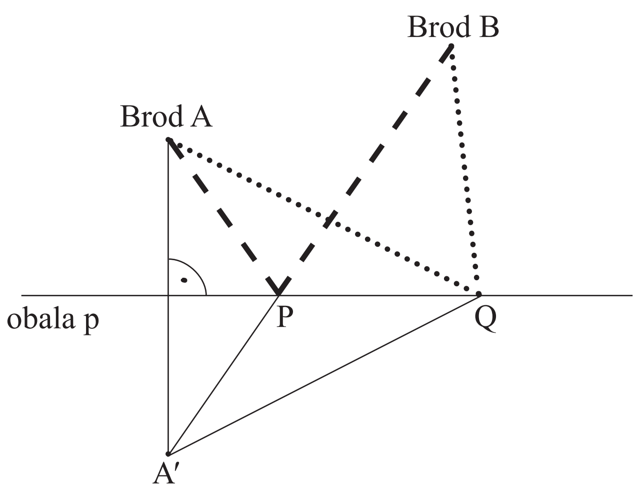
slika 1.



slika 2.

Nađimo tačku *A'* simetričnu sa *A* u odnosu na obalu *p* kao osu simetrije. Spojimo tačku *A'* sa tačkom *B*. U preseku te duži i prave *p* je tražena tačka *P* na kojoj treba iskrcati putnika. Ovo je najkraći put, jer kad bi se putnik iskrcao na nekom drugom mestu, npr. u tački *Q*, najkraći put koji smo našli konstrukcijski je *AP+PB*, odnosno *A'P+PB*, tj. *A'P+PB=A'B*.

Putanja *AQ+QB* je duža, jer je to u stvari putanja *A'Q+QB*, koja predstavlja zbir dve stranice trougla *A'QB*, a zbir dve stranice uvek je veći od dužine treće stranice.



5. CILJEVI NASTAVE MATEMATIKE

Nastava je svrhoviti, dvosmerni, planski i racionalno organizovani radni proces u kojem se, pojednostavljeno rečeno, vrši prenošenje znanja i iskustva starijih generacija na mlađe, sa svrhom njihovog osposobljavanja za samostalno i uspešno snalaženje u životnom okruženju.

Cilj označava očekivano, zamišljeno buduće stanje koje želimo postići određenim aktivnostima i sredstvima (sadržajima). Ciljevima iskazujemo formulaciju očekivanih promena koje će nastati kod učenika nakon što ovlada sadržajima koji su obuhvaćeni u određenom ciklusu školovanja.

Cilj nastave matematike je sticanje temeljnih matematičkih znanja potrebnih za razumevanje pojava i zakonitosti u prirodi i društvu, sticanje osnovne matematičke pismenosti i razvijanje sposobnosti i umeća rešavanja matematičkih problema.

Da bi se postigli ciljevi u vaspitno-obrazovnom radu, neophodno je da se poštuju određeni principi nastave. To su polazne osnove pri uspostavljanju, stvaranju, procenjivanju i vrednovanju celokupnog vaspitno-obrazovnog procesa u nastavi. Njih bi trebalo da se pridržava svako ko organizuje i sprovodi nastavu matematike. Konačna svrha im je da se matematičko obrazovanje učini maksimalno efikasnim. Metodika nastave matematike uspostavlja razne principe, od kojih su neka:

1) princip primerenosti
2) princip nauke
3) princip interesa i aktivnosti
4) princip sistematičnosti i postupnosti
5) princip istorije i savremenosti

Principi nisu međusobno odvojeni već se uzajamno uslovljavaju i istovremeno ostvaruju.

Princip primerenosti zasniva se na spoznaji da se dete postupno razvija i da stoga nastavni rad treba uskladiti sa psihofizičkim snagama učenika. Nastava po sadržaju i načinu ne sme biti ni prelagana, ni preteška, s proučavanjem pojedinih nastavnih sadržaja ne treba započeti ni prerano ni prekasno, psiho-fizičke osobine učenika ne treba da se ni precenjuju ni potcenjuju.

Učenje ne sme biti previše lako zato što lakoća učenja ne stvara kod učenika navike rada i savladavanja teškoća. Zahtevi koji se stavljaju pred celi razred moraju biti primereni većini učenika. Međutim, uvek će se naći nekoliko učenika za koje su zahtevi teški, a takođe i nekoliko učenika za koje su zahtevi isuviše laki. Prvima treba ukazati individualnu pomoć, bilo na redovnom času bilo na dopunskoj nastavi. A učenicima koji bolje znaju i lakše savlađuju nastavno gradivo treba ih usmeravatida dublje proučavaju matematiku, dajući im dodatne zadatke, literaturu, ...

Princip nauke u nastavi matematike sastoji se u nužnom skladu nastavnih sadržaja i nastavnih metoda s jedne i zahteva i zakonitosti matematike kao nauke s druge strane. To znači da nastavnik matematike treba učenike da upoznaje s onim činjenicama i u njihovom mišljenju da formira one pojmove koji su danas naučno potvrdjeni. Nastava mora biti takva da omogućava dalja produbljivanja i proširivanja gradiva i prirodan nastavak matematičkog obrazovanja na višem stupnju.

Nastava mora da bude takva da budi interes prema predmetu. Ako nastavni rad nije propraćen pozitivnim emocionalnim uzbudjenjima učenika, njegov efekat će biti slab, stečena znanja ostaće pasivna i veoma brzo i zaboravljena. Te povoljne situacije u nastavi stvara nastavnik kao organizator nastavnog procesa, premda takva situacija mnogo zavisi i od objektivnih uslova u kojima se radi. Nastavnik može sadržaje obrađivati suvoparno, monotono, nizanjem činjenica, što za posledicu ima nezainteresovanost učenika. Stoga nastavne sadržaje treba obraditi kvalitetnije, tako da učenike rad zanese, koncentriše, oduševi.

Poštujući princip aktivnosti treba učenicima dati da sami rade, jer znanje se ne može dobiti, dati, preneti, pokloniti, ono se stiče vlastitom aktivnošću. Kvalitet znanja zavisi upravo od intenziteta aktivnosti, pa je uspeh u nastavi proporcionalan udelu vlastite aktivnosti.

Sistematičnost znači obrađivanje nastavnih sadržaja u određenom logičkom pregledu, a postupnost u radu nastavnika izražena je sledećim pravilima: od lakšeg ka težem, od jednostavnog ka složenom, od bližeg ka daljem, od poznatog ka nepoznatom, od konkretnog ka apstraktnom. Nastavnikova veština je da pronađe takvu postupnost i sistematičnost u obrađivanju gradiva bez prevelikih skokova i preteških prelaza.

Većina učenika nema ni najosnovnije predstave o razvoju matematike. Oni misle da je matematika uvek bila takva kakva je sada. Bilo bi korisno da znaju da kod Euklida nije bilo formula, da su u srednjem veku pravila za rešavanje kvadratnih jednačina bila komplikovanija nego danas (zbog nepostojanja pojma negativnih brojeva trebalo je razmatrati mnogo posebnih slučajeva),... Znajući te činjenice učenici će shvatiti da su se pogledi na jedan te isti pojam menjali i da su pojmovi vremenom postajali jednostavniji. Oni počinju da cene savremene matematičke metode i pojmove i shvataju da njihovo sadašnje stanje nije konačno.

Princip savremenosti odnosi se na neprestano aktuelizovanje i osavremenjivanje nastavnih sadržaja i unošenje novih činjenica, ali i osavremenjivanje nastavnih pomagala (od logaritamskih tablica preko šubera do računara).

6. GEOMETRIJA U ŠKOLI

Nastava geometrije je značajna sa različitih gledišta:

- logičkog – izučavanje geometrije je izvor i sredstvo aktivnog intelektualnog razvoja čoveka i njegovih umnih sposobnosti,
- saznajnog – pomoću geometrije dete spoznaje svet koji ga okružuje, njegove prostorne i količinske odnose,
- primenjenog – trodimenziona euklidska geometrija je osnova koja obezbeđuje čovekovu spremnost za savladavanje kako bliskih oblasti tako i mnogih profesija, čini mu dostupnim neprekidno obrazovanje i samoobrazovanje,
- istorijskog – na primerima iz istorije razvoja geometrije prati se ne samo razvoj matematike već i ljudske kulture u celini,
- filozofskog – geometrija pomaže da se osmisli svet u kome živimo, da se kod čoveka formiraju razvojne naučne predstave o realnom fizičkom prostoru.

Učeći geometriju učenik treba da prođe osnovne etape razvoja geometrije, ne preskačući nijednu od njih. Jer, u suprotnom, može doći do nerazumevanja gradiva i gubljenja interesa za učenje geometrije.

Osnovne etape koje možemo razlikovati u razvoju geometrije, na osnovu metodologije geometrije, načina dokazivanja i sistematizacije materijala koji se primenjuju u svakoj od etapa, su: dogrčka, grčka i savremena.

- U dogrčkoj etapi geometrija je bila empirijska nauka. Mnogobrojne geometrijske činjenice koje su milenijumima pre našeg vremena poznavali stari Egipćani, Vavilonci, Indusi, Kinezi i drugi narodi, dobijene su kao rezultat posmatranja, iskustva, eksperimenta. Praktične metode koje su u toj etapi bile korišćene i danas fasciniraju svojom originalnošću i oštroumnošću.

- Početkom VI veka pre naše ere Grci su poznavali geometriju Egipćana i tokom nekoliko vekova razvili je do visokog stepena savršenstva. U Staroj Grčkoj se odigrao postepeni prelaz od praktične ka teorijskoj geometriji. U tom periodu su otkrivene mnogobrojne geometrijske činjenice, ali, što je najvažnije, razrađene su savršene logičke metode i sav geometrijski materijal doveden u skladan sistem, koji je opisao Euklid u svojim "Elementima". Metodološko savršenstvo "Elemenata" je tako veliko da su oni tokom dva milenijuma vršili takav uticaj na razvoj geometrije i bili udžbenik geometrije praktično u celom svetu.

- Početak savremene etape razvoja geometrije vezan je za razradu aksiomatske metode. Sa savremenog gledišta, u osnovi geometrije leži struktura prostora koju određuje neki sistem aksioma. Savremena geometrija daje mogućnost da se razmatraju modeli ne samo fizičkog prostora, već prostora bilo koje strukture, čiji se pojmovi i svojstva uklapaju u geometrijsku shemu.

U skladu sa ovim osnovnim etapama razvoja geometrije, prema akademiku Grigoriju Davidiviču Glejzeru sistem školskog geometrijskog obrazovanja treba da predstavlja jedinstven predmet, koji se sastoji iz tri ili četiri međusobno povezana kursa.

Prvi kurs – "Slikovita geometrija". On treba da se uči u osnovnoj školi. Njegov osnovni cilj je obogaćenje geometrijskih predstava učenika, upoznavanje sa maksimalno bogatim skupom geometrijskih figura (kako ravnih, tako i prostornih), usvajanje osnovne geometrijske terminologije, sticanje umeća i navika u predstavljanju (crtanju) geometrijskih figura.

Osnovne nastavne delatnosti u ovoj etapi: posmatranje i pravljenje (crtanje) dvodimenzionalnih i trodimenzionalnih geometrijskih figura od papira, kartona, plastelina; jednostavni geometrijski eksperimenti kojima se utvrđuju elementarna svojstva figura (jednakost, razloživa jednakost, jednaka veličina, simetričnost); merenje; modeliranje. Pojedini zadaci iz poglavlja 4 (zadaci od 1-5) trebalo bi da se rade na ovom kursu.

Drugi kurs – "Praktična geometrija". Njegov cilj je da suštinski obogati prostorne predstave učenika, da se oni upoznaju sa osnovnim činjenicama planimetrije i stereometrije. U tom kursu učenici praktičnim metodama (iskustvom ili ogledom) utvrđuju osnovne geometrijske činjenice (svojstva ravnih i prostornih geometrijskih figura), uče da ih koriste u radu i praktičnoj delatnosti.

Osnovne nastavne delatnosti na ovoj etapi: merenje, konstrukcija, predstavljanje, ogled, modeliranje i konstruisanje geometrijskih slika, izračunavanje po formulama dobijenih eksperimentalnim putem, uz primenu računarske tehnike.

Prva i druga etapa školske geometrije mogu biti spojene u jedinstveni kurs slikovito-praktične geometrije, koji metodološki odgovara dogrčkom periodu razvoja geometrije.

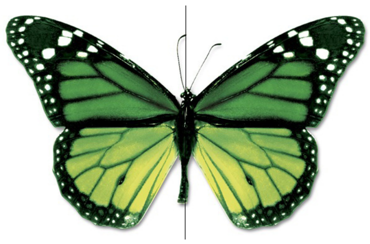
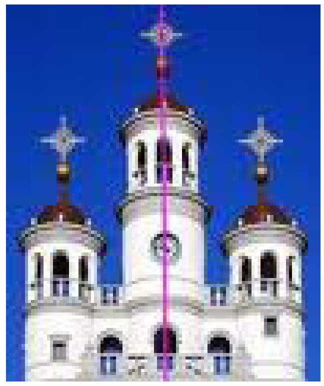
Treći kurs – "Sistematski kurs geometrije". On treba da se izučava u osnovnoj školi, da se nastavlja u srednjoj školi i da se ili sastoji iz dva dela: planimetrije i stereometrije, ili da bude jedinstveni kurs geometrije. Njegov cilj je izučavanje geometrije na osnovu sistematizacije i dovođenja do logičke elegancije skupa pojmova i činjenica naučenih tokom prva dva kursa. Osnovni predmet izučavanja u toj etapi moraju biti invarijante grupe kretanja i grupe sličnosti tj. za osnovu kursa se prirodno uzimaju geometrijske transformacije, među njima i vektori koji predstavljaju translatorna kretanja.

Pitanje izgradnje ovog kursa na aksiomatskoj osnovi je diskutabilno, jer je nemoguće postići razumevanje suštine aksiomatske izgradnje geometrije od strane svih učenika osnovne škole, pa i većine učenika srednje škole (izuzimajući škole sa matematičkim usmerenjem). Stoga bi, u početku trebalo na osnovu ubedljivih slikovitih konstatacija formulisati dovoljno jaka tvrđenja, koja će omogućiti da se brzo pređe na rešavanje velikog broja sadržajni zadataka sa učenicima. Primeri takvih tvrđenja su teorema o zbiru uglova u trouglu ili Pitagorina teorema. Zatim, posle rešavanja mnogih geometrijskih zadataka i nakupljanja većeg broja geometrijskih činjenica u svesti učenika, formiraće se određeni nivo logičke culture, razviće se prostorno mišljenje, pa se učenicima može otkriti logička struktura kursa i saopštiti da od sada u dokazima imaju pravo da koriste samo poznate pojmove i tvrđenja. Na taj način učenici će se postepeno i na prirodan način navići na metode deduktivnog mišljenja.

Četvrti kurs – mali po obimu, izgrađen na aksiomatskoj osnovi, može biti uveden samo u matematičkim odeljenjima u srednjoj školi, ili fakultativno, za učenike koji ispoljavaju povišeni interes za matematiku. Ovde mogu biti izložena pitanja istorije razvoja geometrije, njenog aksiomatskog zasnivanja, problemi potpunosti i neprotivrečnosti aksiomatike, mogućnost različitih interpretacija euklidske geometrije, nastanak geometrije Lobačevskog i druga pitanja koja spadaju u deduktivnu metodu.

7. ZAKLJUČAK

U osnovnoj školi simetrija se izučava u petom razredu. Na početku predavanja učenike treba upoznati da je reč simetrija grčkog porekla i da znači skladnost, slaganje. Objasniti im da simetričnih oblika ima svuda oko nas i navesti im slikovite primere u slikarstvu, u građevini: zgrade, u prirodi: leptir, ...

Ta priča trebalo bi da deci bude zanimljiva i dovoljno lepa, da je zapamte i da ih zainteresuje za učenje simetrije. Tek nakon toga treba uvesti formalno definiciju osne simetrije i početi sa zadacima.

U knjigama i zbirkama ima dosta zadataka u kojima učenici treba da prepoznaju osnosimetrične figure, da nacrtaju ose simetrija ukoliko postoje kod datih figura, da nacrtaju simetričnu figuru date figure, ... Uspešnim radom ovih zadataka učenici će razumeti pojam osne simetrije i prepoznavati je kod objekata iz svakodnevnog života.

Detaljnije izučavanje izometrijskih transformacija je u prvom razredu srednje škole. U srednjoj školi se rade složeni konstruktivni zadaci koji su učenicima, uglavnom, teški. Pojedini učenici teško barataju šestarom i imaju problem preciznosti crtanja. Poseban problem zadaje rotacija zbog orjentisanog ugla, ako učenici dobro ne razumeju da se mere uglova koji su orjentisani u smeru suprotnom kretanju kazaljke na satu izražavaju pozitivnim brojevima, a mere onih koji su orjentisani u smeru kazaljke na satu negativnim. Smatram da svaki učenik treba da zna da trougao ili četvorougao konstruiše izometrijskom transformacijom, a da kompozicije izometrijskih transformacija i složenije konstruktivne zadatke rade bolji učenici.

Na kraju izučavanja izometrijskih transformacija većina učenika bi trebala da prepoznaje izometrijske transformacije u objektima iz svakodnevnog života.

LITERATURA

[1] G. D. Glejzer, *Geometrija u školi, Iz nedeljnog priloga „Matematika" novina „Prvi septembar", broj 34, septembar 1995., str. 3-4.*

[2] N. Ikodinović, *Matematika udžbenik sa zbirkom zadataka za prvi razred gimnazija i srednjih stručnih škola, Klett, 2013. god.*

[3] D. Lopandić, *Geometrija http://poincare.matf.bg.ac.rs/~zlucic/LopandicGeometrija.pdf*

[4] Z. Lučić, *Euklidska i hiperbolička geometrija, Beograd, Total Design i Matematički fakultet, 1997. god.*

[5] V. Mićić, V. Jocković, Đ. Dugošija, V. Andrić, *Matematika za peti razred osnovne škole, Zavod za udžbenike Beograd, 2007. godine*