Универзитет у Београду

Математички факултет

Мастер рад

Сингуларне вредности и идеали компактних оператора

Аутор:
Ана Ђурђевац

Ментор:
др Данко Јоцић

Јун, 2013.

Садржај

Увод

У овом мастер раду су изложена најзначајнија својства сингуларних вредности оператора, њихова улога у нормирању идеала компактних оператора и примена на операторне неједнакости којима се уопштавају класичне неједнакости за реалне и комплексне бројеве.

У првом поглављу су наведена основна својства и дефиниције које су коришћене у раду. Основна својства сингуларних вредности компактних оператора и неједнакости везане за њих су приказане у оквиру другог поглавља. Проблеми везани за сопствене и сингуларне вредности су једна од централних тема матричне анализе. У трећем поглављу је изложена теорија симетрично-нормираних идеала прстена ограничених оператора у Hilbert-овом простору.

Сингуларне и сопствене вредности имају велику улогу у израчунавањима у статистици и у шемама за компресију података, која се базира на апроксимацији дате матрице матрицом мањег ранга. Такође, имају и централну улогу у теорији унитарно инваријантних норми. Многи модерни алгоритми израчунавања су засновани на одређивању сингуларних вредности.

Постоји много неједнакости које укључују сингуларне и сопствене вредности. Међутим, апроксимације и неједнакости нису биле првобитна мотивација за проучавање сингуларних вредности. Математичари XIX века, који су се бавили диференцијалном геометријом и алгебром су изучавали следећи проблем:
Како одредити да ли за две реалне билинеарне форме

$$\Phi_A(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j \quad \text{и} \quad \Phi_B(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}x_iy_j,$$

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^n,\ B = (b_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}), \quad x = (x_i)_{i=1}^n,\ y = (y_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$$

постоје реалне унитарне матрице $Q_1, Q_2 \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, такве да је $\Phi_A(x,y) = \Phi_B(Q_1x, Q_2y)$.

Овај проблем су независно решила три математичара. Наиме, италијански математичар E. Beltrami (1873) који се бавио диференцијалном геометријом, француски алгебриста C. Jordan (1874) и енглески математичар J. J. Sylvester (1889/90) су дали три различита доказа о факторизацији реалних квадратних матрица, тј. да за сваку реалну матрицу $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ постоје реалне унитарне матрице $Q_1, Q_2 \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, за које је

$$Q_1^T A Q_2 = \Sigma = diag(\sigma_1(A), \dots, \sigma_n(A))$$

ненегативна дијагонална матрица, где су $\sigma_1^2(A) \geq \cdots \geq \sigma_n^2(A)$ сопствене вредности оператора AA^T. Касније су рад у том правцу наставили многи математичари као што су Autonne, Wintner, Murnaghan, Wiliams, Eckart, Young...

Док су алгебристи изучавали сингуларне вредности и поларну декомозицију за коначно димензионалне матрице, паралено и независно од њих у теорији интегралних једначина су се развијале врло повезане идеје. E. Schmidt је 1907. године објавио општу теорију реалних интегралних једначина, у којој је посматрао и симетрична и несиметрична језгра. У свом раду, у несиметричном случају, Schmidt је увео следећи пар интегралних једначина

$$f(s) = \lambda \int_a^b K(s,t) g(t)\, dt \quad \text{и} \quad g(s) = \lambda \int_a^b K(t,s) f(t)\, dt,$$

при чему функције f и g нису идентички једнаке нули. Schmidt је показао да број λ мора бити реалан, јер је λ^2 сопствена вредност симетричног језгра

$$H(s,t) = \int_a^b K(s,\tau) K(t,\tau)\, d\tau.$$

Ако K посматрамо као аналог матрице A, тада је H аналог матрице AA^T. Schimdt такво λ назива " сопствена вредност". Један од првих математичара који уводи појам " сингуларних вредности"је Smithies, у свом раду 1937.

Током 1949−50, значајна серија радова у Proceedings of the National Academy of Sciences (U.S.) је садржала важне неједнакости везане за сингуларне и сопствене вредности. Најзначајније од тих неједнакости су представљене у овом раду. H. Weyl, Ky Fan, G. Pólya и A. Horn су неки од математичара који су у овом периоду највише допринели развоју ове области.

Глава 1

Сопствене и сингуларне вредности компактних оператора

Ово поглавље почињемо навођењем неких основних дефиниција и својстава компактних оператора.
Са $\mathbb{H}$ ћемо означавати комплексан, сепарабилан Hilbert-ов простор, а простор ограничених оператора на простору $\mathbb{H}$ означаваћемо са $\mathcal{B}(\mathbb{H})$. Идеал компактних оператора на простору $\mathbb{H}$ означаваћемо са $\mathcal{C}_\infty(\mathbb{H})$.

Теорема 1.1. [*Спектрална теорема за самоадјунговане компактне операторе*]
Сваки компактан самоадјунговани оператор A има ортонормирану базу својих сопствених вектора. Све сопствене вредности оператора A (осим евентуално нуле) су реалне и коначне вишеструкости, па поређане у низ, уз понављање сагласно својој вишеструкости, чине коначан или нули конвергентан низ $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$. Ако је $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ ортонормирани низ њима одговарајућих сопствених вектора, онда важи разлагање

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n \otimes e_n^*.$$

Теорема 1.2. [*Поларна декомпозиција ограниченог оператора*]
За сваки $A \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ постоји позитиван оператор D и парцијална изометрија V такви да је $A = VD$. Штавише, оваква репрезентација је јединствена уколико су D и V спрегнути релацијом $\mathcal{N}(V) = \mathcal{N}(D)$.

За доказ теорема 1.1 и 1.2 погледати [1]. Уобичајена ознака за оператор $\sqrt{A^*A}$ је $|A|$, па је $A = V\,|A|$, што се назива *поларном репрезентацијом* за A. При томе је V парцијална изометрија из $\overline{R(A^*)} = \overline{R(|A|)}$ у $\overline{R(A)}$ и $V = 0$ на $\mathcal{N}(|A|) = \mathcal{N}(A)$.

За сваки компактан оператор A и оператор A^*A је такође компактан и ненегативан. Уколико све сопствене вредности оператора A^*A поновимо онолико пута колика им је вишеструкост и поређамо их у опадајући низ $\lambda_1(A^*A) \geq \lambda_2(A^*A) \geq \ldots$, добијамо један нули конвергентан низ.

Дефиниција 1.1. *Бројеви*

$$s_n(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\lambda_n(A^*A)} = \lambda_n(|A|)$$

називају се ***сингуларним вредностима*** *или* $s-$***бројевима*** *оператора A.*

Приметимо да је при том $s_1(A) = \|A\|$.
Нека својства сингуларних вредности:
1) За сваки скалар c је $s_j(cA) = |c|\, s_j(A)$.
2) $s_j(A) = s_j(A^*)$, за све $j = 1, 2, \ldots$
3) За сваки ограничен оператор B важе следеће неједнакости

$$\text{а) } s_j(BA) \leq \|B\|\, s_j(A) \quad \text{за све } j = 1, 2, \ldots\,, \tag{1.1}$$

$$\text{б) } s_j(AB) \leq \|B\|\, s_j(A) \quad \text{за све } j = 1, 2, \ldots\,. \tag{1.2}$$

Δ Према дефиницији 1.1 је

$$s_j^2(BA) = \lambda_j((BA)^*BA) = \lambda_j(A^*B^*BA)$$

и $s_j^2(A) = \lambda_j(A^*A)$. Такође важи и

$$\langle A^*B^*BAf, f\rangle = \|BAf\|^2 \leq \|B\|^2\, \|Af\|^2 = \left\langle \|B\|^2\, A^*Af, f \right\rangle.$$

Из претходне релације следи $A^*B^*BA \leq \|B\|^2\, A^*A$, због чега је

$$s_j^2(BA) = \lambda_j(A^*B^*BA) \leq \lambda_j(\|B\|^2\, A^*A) = \|B\|^2\, s_j^2(A).$$

Тиме смо доказали својство а). Да бисмо доказали својство б), користимо да важи $s_j(A) = s_j(A^*)$ и већ доказано својство а)

$$s_j(AB) = s_j(B^*A^*) \leq \|B^*\|\, s_j(A^*) = \|B\|\, s_j(A). \qquad \square$$

Ако је оператор A компактан, тада је и оператор $|A|$ такође компактан и позитиван оператор, те се он према теореми 1.1 може представити у следећем облику

$$|A| = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(|A|)\, \langle \cdot, f_n\rangle\, f_n = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(A) f_n \otimes f_n^*.$$

Према теореми 1.2 о поларној декомпозицији имамо да важи $A = V\,|A|$, па је

$$A = V\,|A| = V \sum_{n=1}^{\infty} s_n(A) f_n \otimes f_n^* = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(A) V f_n \otimes f_n^*.$$

Ако узмемо $e_n \overset{\text{def}}{=} Vf_n$ добијамо такозвани сингуларни или Schmidt-ов развој компактног оператора А

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(A) e_n \otimes f_n^*. \tag{1.3}$$

При том су $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ортонормиране базе простора $\overline{R(A)}$, односно $\overline{R(|A|)} = \overline{R(A^*A)} = \overline{R(A^*)}$, сачињене од сопствених вредности вектора оператора $|A|$ и $|A^*|$. Из (1.3) добијамо да важи и

$$A^* = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(A) f_n \otimes e_n^*.$$

1.1 Сопствене и сингуларне вредности компактних оператора и дијагонални елементи њихових матрица

Лема 1.1. [Weyl, Horn] *Ако је A компактан оператор, тада је*

$$\det\left[\langle Af_i, Af_j\rangle\right]_{i,j=1}^n \le \prod_{k=1}^n s_k^2(A)\ \det\left[\langle f_i, f_j\rangle\right]_{i,j=1}^n \tag{1.4}$$

за сваки систем вектора $f_1, \dots f_n$, при чему се једнакост у (1.4) достиже за систем вектора $e_1, \dots e_n$ из Schmidt-овог развоја оператора $|A|$.

Δ Приметимо прво да је лему довољно доказати за позитивне компактне операторе, јер је $s_n(A) = s_n(|A|)$ и

$$\det\left[\langle Af_i, Af_j\rangle\right]_{i,j=1}^n = \det\left[\langle A^*Af_i, f_j\rangle\right]_{i,j=1}^n = \det\left[\langle |A|^2 f_i, f_j\rangle\right]_{i,j=1}^n = \det\left[\langle |A| f_i, |A| f_j\rangle\right]_{i,j=1}^n.$$

Оператор $|A|$ је позитиван и компактан, па има развој $|A| = \sum_{n=1}^\infty s_n(A) e_n \otimes e_n^*$. Оператор A^*A је такође позитиван компактан оператор и има развој $A^*A = \sum_{n=1}^\infty s_n^2(A) e_n \otimes e_n^*$. Нека је $P_N \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^N e_k \otimes e_k^*$, при чему разматрамо само случајеве када је $N \ge n$. Посматрамо ли оператор $A_N \overset{\text{def}}{=} |A|\, P_N = \sum_{k=1}^N s_k(A) e_k \otimes e_k^*$, имамо да је

$$A_N^* A_N = \sum_{k,l=1}^N s_l(A) s_k(A) \langle e_k, e_l\rangle\, e_l \otimes e_k^* = \sum_{k=1}^N s_k(A)^2 e_k \otimes e_k^*.$$

На основу тога следи

$$\begin{aligned}
\det\left[\langle A_N f_i, A_N f_j\rangle\right]_{i,j=1}^n &= \det\left[\left\langle f_i, A_N^* A_N f_j\right\rangle\right]_{i,j=1}^n \\
&= \det\left[\left\langle f_i, \sum_{k_j=1}^N s_{k_j}^2(A) \left\langle f_j, e_{k_j}\right\rangle e_{k_j}\right\rangle\right]_{i,j=1}^n \\
&= \det\left[\sum_{k_j=1}^N s_{k_j}^2(A) \overline{\left\langle f_j, e_{k_j}\right\rangle} \left\langle f_i, e_{k_j}\right\rangle\right]_{i,j=1}^n \\
&= \sum_{(k_1,\dots,k_n)\in\{1,2,\dots,N\}^n} \prod_{j=1}^n s_{k_j}^2(A) \prod_{j=1}^n \overline{\left\langle f_j, e_{k_j}\right\rangle} \det\left[\left\langle f_i, e_{k_j}\right\rangle\right]_{i,j=1}^n.
\end{aligned}$$

Како је $\det\left[\left\langle f_i, e_{k_j}\right\rangle\right]_{i,j=1}^n = 0$ уколико је $k_j = k_l$ за неке $j \ne l$ из $\{1, 2, \dots, N\}$, то у суми остају само оне n-торке у којима су сви индекси k_j различити. Ако са S_n означимо скуп пермутација скупа $\{1, 2, \dots, n\}$ претходна сума се своди на

$$\sum_{\substack{(k_1,\dots,k_n)\in\{1,2,\cdots,N\}^n,\\ k_i\neq k_j,\ \text{за}\ i\neq j}} \prod_{j=1}^{n} s_{k_j}^2(A) \prod_{j=1}^{n} \overline{\langle f_j, e_{k_j}\rangle} \det\left[\langle f_i, e_{k_j}\rangle\right]_{i,j=1}^{n} =$$

$$\sum_{1\le k_1<\cdots<k_n\le N} \prod_{j=1}^{n} s_{k_j}^2(A) \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \prod_{j=1}^{n} \overline{\left\langle f_j, e_{k_{\sigma(j)}}\right\rangle} \det\left[\langle f_i, e_{k_j}\rangle\right]_{i,j=1}^{n} =$$

$$\sum_{1\le k_1<\cdots<k_n\le N} \prod_{j=1}^{n} s_{k_j}^2(A) \overline{\det\left[\langle f_i, e_{k_j}\rangle\right]_{i,j=1}^{n}} \det\left[\langle f_i, e_{k_j}\rangle\right]_{i,j=1}^{n} \le$$

$$\prod_{j=1}^{n} s_j^2(A) \sum_{1\le k_1<\cdots<k_n\le N} \left|\det\left[\langle f_i, e_{k_j}\rangle\right]_{i,j=1}^{n}\right|^2 =$$

$$\prod_{j=1}^{n} s_j^2(A) \det\left[\langle P_N f_i, P_N f_j\rangle\right]_{i,j=1}^{n}.$$

Последња једнакост је добијена из претходно доказаног дела једнакости, када се оне примене на оператор P_N уместо на оператор A_N, јер је тада $s_1(P_N) = \cdots = s_N(P_N) = 1$ и имамо

$$\det\left[\langle P_N f_i, P_N f_j\rangle\right]_{i,j=1}^{n} = \sum_{1\le k_1<\cdots<k_n\le N} \left|\det\left[\langle f_i, e_{k_j}\rangle\right]_{i,j=1}^{n}\right|^2.$$

Тиме смо доказали да важи

$$\det\left[\langle A_N f_i, A_N f_j\rangle\right]_{i,j=1}^{n} \le \prod_{k=1}^{n} s_n^2 \det\left[\langle P_N f_i, P_N f_j\rangle\right]_{i,j=1}^{n}. \tag{1.5}$$

Како $P_N \xrightarrow{s} I$ и $A_N = |A|\, P_N \xrightarrow{s} |A|$ када $N\to\infty$, имаћемо да такође

$$\begin{aligned} \langle P_N f_i, P_N f_j\rangle &\to \langle f_i, f_j\rangle \quad \text{кад} \quad N\to\infty, \\ \langle A_N f_i, A_N f_j\rangle \to \langle |A|\, f_i, |A|\, f_j\rangle &= \langle Af_i, Af_j\rangle \quad \text{кад} \quad N\to\infty, \end{aligned}$$

за свако $i, j \in 1, \dots n$. Како је свака детерминанта непрекидна функција својих елемената, закључујемо да важи

$$\begin{aligned} \det\left[\langle P_N f_i, P_N f_j\rangle\right]_{i,j=1}^{n} &\to \det\left[\langle f_i, f_j\rangle\right]_{i,j=1}^{n} \quad \text{кад } N\to\infty, \\ \det\left[\langle A_N f_i, A_N f_j\rangle\right]_{i,j=1}^{n} &\to \det\left[\langle Af_i, Af_j\rangle\right]_{i.j=1}^{n} \quad \text{кад } N\to\infty. \end{aligned}$$

На основу тога (1.4) следи из релације (1.5) кад $N\to\infty$.
Треба још показати да се једнакост достиже када за векторе $f_1, \dots, f_n$ изаберемо баш првих n вектора из развоја оператора $|A|$, тј. векторе $e_1, \dots, e_n$. Тада важи

$$\begin{aligned} \det\left[\langle Ae_i, Ae_j\rangle\right]_{i,j=1}^{n} &= \det\left[\langle |A|\, e_i, |A|\, e_j\rangle\right]_{i,j=1}^{n} = \det\left[\langle s_i(A)e_i, s_j(A)e_j\rangle\right]_{i,j=1}^{n} \\ &= \det\left[s_i(A)s_j(A)\,\langle e_i, e_j\rangle\right]_{i,j=1}^{n} = \prod_{k=1}^{n} s_k^2(A) \det\left[\langle e_i, e_j\rangle\right]_{i,j=1}^{n} = \prod_{k=1}^{n} s_k^2(A). \end{aligned}$$ □

Димензију оператора $A\in\mathbb{H}$, тј. његов ранг, дефинишемо као $r(A) \stackrel{\text{def}}{=} \dim R(A)$. Оператор A се назива коначно димензионалним оператором ако је његов ранг коначан. Суму вишеструкости свих не-нула сопоствених вредности оператора $A\in\mathcal{C}_\infty(\mathbb{H})$ ћемо означавати са $\nu(A)\,(\le\infty)$.

Лема 1.2. *Нека је A компактни оператор и $(f_j)_{j=1}^{r(A)}$ неки ортонормирани систем вектора за који важи*

$$|\langle Af_j, f_j\rangle| = s_j(A), \quad \text{за } j = 1, \dots, r(A),$$

тада је оператор A нормалан и $(f_j)_{j=1}^{r(A)}$ чине потпуни систем сопствених вектора у $\overline{R(A)}$.

Δ Из претпоставке леме и Cauchy - Schwarz-ове неједнакости добијамо

$$s_1^2(A) = |\langle Af_1, f_1\rangle|^2 \le \|Af_1\|^2 = \langle A^*Af_1, f_1\rangle .$$

С друге стране, min-max својство каже

$$s_1^2(A) = \lambda_1(A^*A) = \max_{\|f\|=1} \langle A^*Af, f\rangle .$$

Одатле следи да је

$$s_1^2(A) = \langle A^*Af_1, f_1\rangle ,$$

односно

$$\left\langle s_1^2(A)f_1, f_1\right\rangle = s_1^2(A)\, \|f_1\|^2 = \langle A^*Af_1, f_1\rangle .$$

Тиме смо добили да у Cauchy-Schwarz-овој неједнакости важи једнакост. То значи да су Af_1 и f_1 линеарно зависни: $Af_1 = kf_1$, при чему је $s_1(A) = |k|$. Аналогно добијамо да то важи и за оператор A^*, тј. $A^*f_1 = lf_1$ и $|l| = s_1(A)$. Одатле добијамо да је испуњено

$$A^*Af_1 = klf_1 = s_1^2(A)f_1.$$

Како је $s_1^2(A) = \lambda_1(A^*A)$, закључујемо да је f_1 сопствени вектор оператора A^*A који одговара сопственој вредности $\lambda_1(A^*A)$. Слично као малопре закључујемо

$$s_2^2(A) = \|\langle Af_2, f_2\rangle\|^2 \le \|Af_2\|^2 = \langle A^*Af_2, f_2\rangle$$
$$s_2^2(A) = \lambda_2(A^*A) = \max_{\|f\|=1, \langle f, f_1\rangle = 0} \langle A^*Af, f\rangle ,$$

одакле следи

$$A^*Af_2 = s_2^2(A)f_2,$$

односно добили смо да је f_2 сопствени вектор оператора A^*A који одговара сопственој вредности $\lambda_2(A^*A)$. Понављајући поступак добијамо да важи

$$A^*Af_j = s_j^2(A)f_j, \quad \text{за } j = 1, 2, \dots, r(A)$$

и да $(f_j)_{j=1}^{r(A)}$ чине потпуни ортонормирани систем сопствених вектора оператора A^*A који одговарају његовим не-нула сопственим вредностима. Одатле следи да се оператор A^*A, као и оператор A, анулира на потпростору $\mathcal{L}$ који је ортогоналан на све векторе $(f_j)_{j=1}^{r(A)}$.
На исти начин закључујемо да се и оператор A^* анулира на истом потпростору $\mathcal{L}$. На основу тога закључујемо да се сваки вектор $g \in \overline{R(A)}$ може представити на следећи начин

$$g = \sum_{k=1}^{r(A)} \langle g, f_k\rangle\, f_k.$$

Специјално

$$Af_j = \sum_{k=1}^{r(A)} \langle Af_j, f_k \rangle f_k. \tag{1.6}$$

Из Parseval-ове једнакости добијамо

$$\langle Af_j, Af_j \rangle = \sum_{k=1}^{r(A)} |\langle Af_k, f_k \rangle|^2 . \tag{1.7}$$

Како је

$$|\langle Af_j, f_j \rangle|^2 = s_j(A)^2 = \langle Af_j, Af_j \rangle ,$$

из (1.7) следи да је

$$\langle Af_j, f_k \rangle = 0, \quad \text{за } j \neq k.$$

Стога је из (1.6)

$$Af_j = \langle Af_j, f_j \rangle f_j$$

и на тај начин се A може представити у облику

$$A = \sum_{j=1}^{r(A)} \langle Af_j, f_j \rangle \langle \cdot, f_j \rangle f_j = \sum_{j=1}^{r(A)} \langle Af_j, f_j \rangle f_j \otimes f_j^*.$$

Одатле добијамо да оператор A^* има следеће представљање

$$A^* = \sum_{j=1}^{r(A)} \overline{\langle Af_j, f_j \rangle} f_j \otimes f_j^*.$$

Сада то да је A нормалан оператор произилази из

$$A^*A = \sum_{j=1}^{r(A)} |\langle Af_j, f_j \rangle|^2 f_j \otimes f_j^* = AA^*. \qquad \square$$

Лема 1.3. [Weyl] *За сваки компактан оператор A је*

$$|\lambda_1(A) \dots \lambda_n(A)| \leq s_1(A) \dots s_n(A), \quad \text{за свако } n = 1, \dots, \nu(A). \tag{1.8}$$

Ако је $\nu(A) = r(A) \leq \infty$, тада једнакост важи за свако n ако и само ако је оператор A нормалан.

Δ Према Schur-овој леми (чији се доказ може наћи у [4]), постоји ортонормирани систем $(\omega_i)_{i=1}^{\nu(A)}$ за који матрица оператора A има горње троугаону форму:

$$A\omega_i = a_{i1}\omega_1 + a_{i2}\omega_2 + \cdots + a_{ii}\omega_i, \quad \text{за } i = 1, \dots, \nu(A),$$

где су $a_{ij} = \langle A\omega_i, \omega_j\rangle$ и специјално $a_{ii} = \langle A\omega_i, \omega_i\rangle = \lambda_i(A)$. На основу тога закључујемо да је

$$\begin{aligned}
\langle A\omega_i, A\omega_j\rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{i} a_{ik}\omega_k, \sum_{l=1}^{j} a_{jl}\omega_l \right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{i}\sum_{l=1}^{j} a_{ik}\overline{a_{jl}}\,\langle \omega_k, \omega_l\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{\min(i,j)} a_{ik}\overline{a_{jk}} \\
&= \sum_{k=1}^{\min(i,j)} \langle A\omega_i, \omega_k\rangle\,\overline{\langle A\omega_j, \omega_k\rangle}\,.
\end{aligned}$$

Одатле следи

$$\begin{aligned}
\det\left[\langle A\omega_i, A\omega_j\rangle\right]_{i,j=1}^{n} &= \det\left[\langle A\omega_i, \omega_j\rangle\right]_{i,j=1}^{n} \det\left[\overline{\langle A\omega_i, \omega_j\rangle}\right]_{i,j=1}^{n} \\
&= \left|\det\left[\langle A\omega_i, \omega_j\rangle\right]_{i,j=1}^{n}\right|^2 \\
&= \lambda_1^2(A)\ldots\lambda_n^2(A). \qquad (1.9)
\end{aligned}$$

С друге стране према леми 1.1 важи

$$\det\left[\langle A\omega_i, A\omega_j\rangle\right]_{i,j=1}^{n} \le s_1^2(A)\ldots s_n^2(A)\ \det\left[\langle \omega_i, \omega_j\rangle\right]_{i,j=1}^{n}, \qquad (1.10)$$

при чему је последња детерминанта једнака 1, јер је систем ω_i ортонормиран. Из једнакости (1.9) и неједнакости (1.10) добијамо да важи прво тврђење леме

$$\left|\lambda_1(A)\ldots\lambda_(A)\right| \le s_1(A)\ldots s_n(A).$$

Размотримо још случај када је $\nu(A) = r(A)$ и када важи једнакост у (1.8) за свако $n = 1,\ldots,r(A)$. Одатле следи да важи $|\lambda_j(A)| = s_j(A)$, односно $|\langle A\omega_j, \omega_j\rangle| = s_j(A)$, за $j = 1,\ldots,r(A)$. Према леми 1.2 закључујемо да је тада оператор A нормалан.

Приметимо да када је оператор A коначно димензионалан, да ће тада важити једнакост у (1.8) за $n = \nu(A)$. □

Напомена: A. Horn је показао да релација (1.8), под претпоставком да се последња неједнакост замени једнакошћу, потпуно карактерише везу између сингуларних вредности и сопствених вредности коначно димензионалног оператора. То значи да за произвољне комплексне бројеве $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ и произвољне ненегативне бројеве $s_1,\ldots,s_n$ који задовољавају услове

$$\begin{aligned}
|\lambda_1| \ge |\lambda_2| \ge \cdots &\ge |\lambda_n| \\
s_1 \ge s_2 \ge \cdots &\ge s_n \\
|\lambda_1\ldots\lambda_k| \le s_1\ldots s_k, \quad k &= 1,\ldots,n-1 \\
|\lambda_1\ldots\lambda_n| &\le s_1\ldots s_n
\end{aligned}$$

постоји n-димензиони оператор A такав да је $\lambda_j(A) = \lambda_j$ и $s_j(A) = s_j$, за све $j = 1,\ldots,n$.

Лема 1.4. [Weyl, Hardy, Littlewood, Pólya] *Нека је* $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *конвексна функција и* $\Phi(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} \Phi(x) = 0$ *и нека су* $(a_j)_{j=1}^{\omega}$ *и* $(b_j)_{j=1}^{\omega}$, $(\omega \leq \infty)$ *нерастући низови реалних бројева такви да важи*

$$\sum_{j=1}^{k} a_j \leq \sum_{j=1}^{k} b_j, \quad \text{за } k = 1, 2, \ldots, \omega. \tag{1.11}$$

Тада важи

$$\sum_{j=1}^{k} \Phi(a_j) \leq \sum_{j=1}^{k} \Phi(b_j), \quad \text{за } k = 1, 2, \ldots, \omega.$$

Специјално, за $\omega = \infty$ *добијамо да је*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \Phi(a_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \Phi(b_j).$$

Даље, ако је Φ *строго конвексна функција, тада ће једнакост у*

$$\sum_{j=1}^{\omega} \Phi(a_j) \leq \sum_{j=1}^{\omega} \Phi(b_j) \quad (< \infty)$$

важити ако и само ако је $a_j = b_j$ *за све* $j = 1, \ldots, \omega$.

Δ Нека је Φ' леви извод функције Φ. Због претпоставки леме тај леви извод постоји и то је ненегативна, растућа функција, односно, одатле закључујемо да је Φ ненегативна растућа функција. Показаћемо да се функција Φ може записати у следећем интегралном облику:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-u)_+ \, d\Phi'(u),$$

где је $y_+ = \max(y, 0)$. Како је

$$(x-u)_+ = max(x-u, 0) = \begin{cases} 0, & x < u \\ x-u, & x > u \end{cases}$$

добијамо да је за произвољан позитиван број N

$$\begin{aligned} \int_{-N}^{\infty} (x-u)_+ \, d\Phi'(u) &= \int_{-N}^{x} (x-u) \, d\Phi'(u) \qquad (1.12) \\ &= \int_{-N}^{x} x \, d\Phi'(u) - \int_{-N}^{x} u \, d\Phi'(u) \\ &= x\,\Phi'(x) - x\,\Phi'(-N) - N\Phi'(-N) - x\Phi'(x) + \int_{-N}^{x} \Phi'(u) \, du \\ &= \int_{-N}^{x} \Phi'(u) \, du - (x+N)\,\Phi'(-N). \qquad (1.13) \end{aligned}$$

Како је лева страна (1.12) ненегативна, тада је и десна страна (1.13) ненегативна, односно добијамо

$$(x+N)\,\Phi'(-N) \le \int_{-N}^{x} \Phi'(u)\,du \tag{1.14}$$
$$= \Phi(x) - \Phi(-N) \le \Phi(x),$$

за $x > -N$. Одатле следи да је

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} N\,\Phi'(-N) < \infty \tag{1.15}$$
$$\lim_{N\to\infty} \Phi'(-N) = 0. \tag{1.16}$$

Како према претпоставци леме важи $\lim\limits_{x\to-\infty} \Phi(x) = 0$, то из (1.14), (1.15) следи

$$\lim_{N\to\infty}(x+N)\Phi'(-N) = \lim_{N\to\infty} N\Phi'(-N) = 0.$$

Да бисмо добили тражену репрезентацију довољно је сада само у (1.12) пустити да $N \to \infty$, јер тада добијамо

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x-u)_+\,d\Phi'(u) = \int_{-\infty}^{x} \Phi'(u)\,du - \lim_{N\to\infty}(x+N)\Phi'(-N)$$
$$= \Phi(x) - \lim_{x\to-\infty} \Phi(x) = \Phi(x).$$

Дакле, добили смо да важи $\Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-u)_+\,d\Phi'(u)$. Из те репрезентације следи

$$\sum_{j=1}^{k} \Phi(a_j) = \int_{-\infty}^{\infty} A_k(x)\,d\Phi'(x),$$

где је

$$A_k(x) = \sum_{j=1}^{k} (a_j - x)_+.$$

И слично, важи

$$\sum_{j=1}^{k} \Phi(b_j) = \int_{-\infty}^{\infty} B_k(x)\,d\Phi'(x),$$

где је

$$B_k(x) = \sum_{j=1}^{k} (b_j - x)_+.$$

Да бисмо завршили доказ леме довољно је још доказати да су $A_k(x)$ и $B_k(x)$ међусобно повезани релацијама

$$A_k(x) \le B_k(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{1.17}$$

Разликујемо следећа два случаја:

Први случај је ако је $x \le \min(a_k, b_k)$ или $x \ge b_1$.
Ако је $x \le \min(a_k, b_k)$, тада је због (1.11) $x \le a_j$ и $x \le b_j$, за $j = 1, \dots, k$, одакле следи $(a_j - x)_+ = a_j - x$ и $(b_j - x)_+ = b_j - x$, за $j = 1, \dots, k$. Користећи услов (1.11) добијамо да важи (1.17).
Слично добијамо и у случају када је $x \ge b_1$, тада је $x \ge b_j$ и $x \ge a_j$, због чега је $(a_j - x)_+ = (b_j - x)_+ = 0$ за $j = 1, \dots, k$, одакле следи (1.17).

Други случај је ако је $a_{q+1} \le x < a_q$ и $b_{p+1} \le x < b_p$, за неке p и q. Тада је

$$(a_j - x)_+ = \begin{cases} a_j - x, & j = 1, \dots, q \\ 0, & j = q+1, \dots, k \end{cases}$$

$$(b_j - x)_+ = \begin{cases} b_j - x, & j = 1, \dots, p \\ 0, & j = p+1, \dots, k. \end{cases}$$

Разликујемо два подслучаја. Први, ако је $p \ge q$ и тада због (1.11) важи

$$A_k(x) = \sum_{j=1}^{q} a_j - qx \le \sum_{j=1}^{q} b_j - qx + (b_{q+1} - x) + \dots + (b_p - x) = B_k(x).$$

Други подслучај је када је $p < q$ и тада је

$$A_k(x) = \sum_{j=1}^{q} a_j - qx \le \sum_{j=1}^{q} a_j - qx - (b_{p+1} - x) - \dots - (b_p - x) \le \sum_{j=1}^{q} b_j - px = B_k(x).$$

Доказали смо да важи релација (1.17), одакле следи

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k} \Phi(a_j) &= \int_{-\infty}^{\infty} A_k(x)\, d\Phi'(x) \\ &\le \int_{-\infty}^{\infty} B_k(x)\, d\Phi'(x) = \sum_{j=1}^{k} \Phi(a_j). \end{aligned}$$

Да бисмо још доказали да важи $\sum_{j=1}^{\omega} \Phi(a_j) = \sum_{j=1}^{\omega} \Phi(b_j)$, разматраћемо најопштији случај када је $\omega = \infty$. Тада из (1.17) добијамо да је

$$A(x) = \sum_{j=1}^{\infty} (a_j - x)_+ \le B(x) = \sum_{j=1}^{\infty} (b_j - x)_+.$$

Из $\sum_{j=1}^{k} \Phi(a_j) \le \sum_{j=1}^{k} \Phi(b_j)$ следи да кад год ред $\sum_{j=1}^{\infty} \Phi(b_j)$ конвергира, тада и ред $\sum_{j=1}^{\infty} \Phi(a_j)$ конвергира и још важи

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \Phi(a_j) &= \int_{-\infty}^{\infty} A(u)\, d\Phi'(u) \\ &\le \int_{-\infty}^{\infty} B(u)\, d\Phi'(u) = \sum_{j=1}^{\infty} \Phi(b_j), \end{aligned}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $A(x) = B(x)$, односно ако је $a_j = b_j$, за свако j. $\square$

Теорема 1.3. [Weyl] *Нека је A компактан оператор и $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}, f(0) = 0$ функција таква да је функција $f \circ exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto f(e^t)$ конвексна. Тада је*

$$\sum_{j=1}^{k} f(|\lambda_j|) \leq \sum_{j=1}^{k} f(s_j), \quad \text{за } k = 1, \ldots, \nu(A),$$

где је $\lambda_j = \lambda_j(A)$, $s_j = s_j(A)$. Специјално, ако је $\nu(A) = \infty$ добијамо

$$\sum_{j=1}^{\infty} f(|\lambda_j|) \leq \sum_{j=1}^{\infty} f(s_j).$$

Ако је функција $\Phi(t) = f(e^t)$ строго конвексна, тада једнакост

$$\sum_{j=1}^{\nu(A)} f(|\lambda_j|) = \sum_{j=1}^{\infty} f(s_j),$$

под претпоставком да је десна страна коначна, важи ако и само ако је оператор A нормалан.

Δ Ова теорема је последица лема 1.3 и 1.4. Из леме 1.3 следи

$$|\lambda_1(A) \ldots \lambda_n(A)| \leq s_1(A) \ldots s_n(A)$$

одакле следи да низови $a_j \stackrel{\text{def}}{=} \ln(|\lambda_j|)$ и $b_j \stackrel{\text{def}}{=} \ln s_j$ задовољавају услове леме 1.4. Такође, према претпоставкама теореме и функција $\Phi(t) = f(e^t)$ задовољава тражене услове, јер је она конвексна и важи

$$\Phi(-\infty) = \lim_{t \to -\infty} f(e^t) = f(0) = 0.$$

Дакле, можемо применити лему 1.4

$$\sum_{j=1}^{k} \Phi(a_j) \leq \sum_{j=1}^{k} \Phi(b_j)$$

$$\sum_{j=1}^{k} f(e^{\ln|\lambda_j|}) \leq \sum_{j=1}^{k} f(e^{\ln s_j})$$

одакле следи тврђење теореме.
Размотримо још случај када је функција $\Phi(t)$ строго конвексна и важи

$$\sum_{j=1}^{\nu(A)} f(|\lambda_j|) = \sum_{j=1}^{\infty} f(s_j).$$

Тада у случају када је $\nu(A) < \infty$ узимајући $k = \nu(A)$ из претходно доказаног добијамо да је

$$\sum_{j=1}^{\infty} f(s_j) = \sum_{j=1}^{\nu(A)} f(|\lambda_j|) \leq \sum_{j=1}^{\nu(A)} f(s_j)$$

одакле следи да мора да важи $\sum_{j=1}^{\nu(A)} f(|\lambda_j|) = \sum_{j=1}^{\nu(A)} f(s_j)$ и $s_j(A) = 0$, за $j > \nu(A)$, јер је $f(s_j) = 0$, за $j > \nu(A)$ и $f(0) = 0, f(x) > 0$, за $x > 0$. Дакле, за $r(A) = \nu(A)$ из леме 1.4 следи да важи $\lambda_j(A) = s_j(A)$. Слично, за $\nu(A) = \infty$ из претпоставки теореме и леме 1.4 следи тврђење. Према томе, у оба случаја, и када је $\nu(A) = r(A) < \infty$ и $\nu(A) = \infty$ на основу леме 1.3, закључујемо да је оператор A нормалан.
Обрнуто, како за нормалан оператор A важи $\nu(A) = r(A)$, онда је $|\lambda_j(A)| = s_j(A)$, односно важи

$$\sum_{j=1}^{\nu(A)} f(|\lambda_j|) \leq \sum_{j=1}^{\infty} f(s_j). \qquad \square$$

Последица 1.1. *За сваки компактан оператор A важе следеће релације:*

$$\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j(A)|^p \leq \sum_{j=1}^{n} s_j^p(A), \quad \text{за свако } p > 0 \text{ и за све } n = 1, \ldots, \nu(A) \tag{1.18}$$

$$\prod_{j=1}^{n} (1 + r\,|\lambda_j(A)|) \leq \prod_{j=1}^{n} (1 + r s_j(A)), \quad \text{за свако } r > 0 \text{ и за све } n = 1, \ldots, \nu(A). \tag{1.19}$$

Δ Да бисмо доказали последицу применимо претходну теорему на функцију $f(x) = x^p$ за прву релацију, односно на функцију $f(x) = \ln(1 + rx)$ за другу релацију. Обе функције задовољавају услове теореме. Прву релацију добијамо директно, а другу релацију добијамо на следећи начин

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \ln(1 + r\,|\lambda_j|) &\leq \sum_{j=1}^{n} \ln(1 + r s_j) \\
\ln \prod_{j=1}^{n} (1 + r\,|\lambda_j|) &\leq \ln \prod_{j=1}^{n} (1 + r s_j) \\
\prod_{j=1}^{n} (1 + r\,|\lambda_j(A)|) &\leq \prod_{j=1}^{n} (1 + r s_j(A)). \qquad \square
\end{aligned}$$

1.2 Сингуларне вредности збира и производа компактних оператора

У овој секцији разматрамо резултате Ky Fan-а и A. Horn-а.

Лема 1.5. [Ky Fan] *Ако је A компактни оператор, тада за сваки природан број n важи*

$$\max\left|\sum_{j=1}^{n}\langle UAf_j, f_j\rangle\right| = \sum_{j=1}^{n} s_j(A),$$

где се максимум узима по свим унитарним операторима U и ортонормираним системима $(f_j)_{j=1}^{n}$. Специјално,

$$\sum_{j=1}^{n}|\langle Af_j, f_j\rangle| \leq \sum_{j=1}^{n} s_j(A).$$

Δ Означимо са P ортопројектор на потпростор $\mathcal{L}$ генерисан векторима $f_1, \ldots, f_n$ и дефинишимо оператор $A_1 \stackrel{\text{def}}{=} PUAP$. Тада је

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\langle A_1 f_j, f_j\rangle &= \sum_{j=1}^{n}\langle PUAPf_j, f_j\rangle\\ &= \sum_{j=1}^{n}\langle UAPf_j, Pf_j\rangle\\ &= \sum_{j=1}^{n}\langle UAf_j, f_j\rangle,\end{aligned}$$

зато што је $f_j \in \mathcal{L}$, за свако $j = 1, \ldots, n$. Докажимо да сума $\sum_{j=1}^{n}\langle A_1 g_j, g_j\rangle$ не зависи од избора ортонормираног система $(g_j)_{j=1}^{n}$. Како је A_1 коначнодимензиони оператор, он је компактан и има Schmidt-ов развој $A_1 = \sum_{m=1}^{n} s_m(A_1) e_m \otimes f_m^*$. За произвољни ортонормирани систем $(g_j)_{j=1}^{n}$ важи

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\langle A_1 g_j, g_j\rangle &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} s_m(A_1)\langle g_j, f_m\rangle\langle e_m, g_j\rangle\\ &= \sum_{m=1}^{n} s_m(A_1)\sum_{j=1}^{n}\langle e_m, g_j\rangle\overline{\langle f_m, g_j\rangle}\\ &= \sum_{m=1}^{n} s_m(A_1)\langle e_m, f_m\rangle\\ &= \sum_{m=1}^{n}\langle A_1 f_m, f_m\rangle,\end{aligned}$$

одакле следи

$$spA_1 = \sum_{j=1}^{n}\langle A_1 f_j, f_j\rangle = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j(A_1) = tr(A_1).$$

С друге стране, користећи последицу 1.1 узимајући за $p = 1$ добијамо да важи:

$$\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j(A_1)| \leq \sum_{j=1}^{n} s_j(A_1).$$

Такође, за сваки ограничени оператор B показали смо да важи (1.1) и (1.2) одакле следи да је

$$\begin{aligned} s_j(A_1) = s_j(PUAP) &\leq \|PU\| s_j(AP) \\ &\leq \|P\|\|U\| s_j(A)\|P\| \leq s_j(A), \end{aligned}$$

за свако $j = 1, \ldots, n$. Из тога закључујемо да важи неједнакост у релацији коју треба доказати

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^{n} \langle UAf_j, f_j\rangle \right| = \left| \sum_{j=1}^{n} \langle A_1 f_j, f_j\rangle \right| &= \left| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(A_1) \right| \\ \leq \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j(A_1)| &\leq \sum_{j=1}^{n} s_j(A_1) \leq \sum_{j=1}^{n} s_j(A). \end{aligned}$$

Треба још показати да се једнакост достиже. Да бисмо то урадили представимо оператор A у поларној форми $A = VH = V\,|A|$, где је V парцијална изометрија и $H = |A| \geq 0$ компактан оператор, одакле следи да има ортонормирану базу $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ састављену од његових сопствених вектора. Јасно је да постоји унитаран оператор U такав да је

$$UAe_j = V^* A e_j = He_j, \quad \text{за свако } j = 1, 2, \ldots.$$

За овако дефинисан оператор U добијамо да се максимум достиже:

$$\sum_{j=1}^{n} \langle UAe_j, e_j\rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle He_j, e_j\rangle = \sum_{j=1}^{n} s_j(A).$$

Дакле, добили смо да је

$$\max_{U,(f_j)_{j=1}^{n}} \left| \sum_{j=1}^{n} \langle UAf_j, f_j\rangle \right| = \sum_{j=1}^{n} s_j(A).$$

Још је остало да докажемо специјалан случај. Нека је U_0 унитаран оператор такав да је

$$U_0^* f_j = e^{i\theta_j} f_j,$$

где је $\theta_j = arg\,\langle Af_j, f_j\rangle$. Како се сваки комплексан број може записати у следећем облику $\langle Af_j, f_j\rangle = e^{i\theta_j}\,|\langle Af_j, f_j\rangle|$, добијамо да важи:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} |\langle Af_j, f_j\rangle| &= \sum_{j=1}^{n} e^{-i\theta_j}\,\langle Af_j, f_j\rangle = \sum_{j=1}^{n} \left\langle Af_j, e^{i\theta_j} f_j \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n} \langle Af_j, U_0^* f_j\rangle = \sum_{j=1}^{n} |\langle U_0 A f_j, f_j\rangle| \leq \sum_{j=1}^{n} s_j(A), \end{aligned}$$

што је и требало доказати. □

Последица 1.2. [A. Horn] *За компактне операторе A и B је*

$$\prod_{j=1}^{n} s_j(AB) \leq \prod_{j=1}^{n} s_j(A) \prod_{j=1}^{n} s_j(B), \quad \text{за свако } n = 1, 2 \ldots . \tag{1.20}$$

Δ Нека је $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ ортонормиран систем вектора из развоја оператора $|AB| = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(AB) e_n \otimes e_n^*$. Тада на основу леме 1.1 важи

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n} s_k^2(AB) &= \det\,[\langle ABe_i, ABe_j\rangle]_{i,j=1}^{n} \\
&\leq \prod_{k=1}^{n} s_k^2(A)\, \det\,[\langle Be_i, Be_j\rangle]_{i,j=1}^{n} \\
&\leq \prod_{k=1}^{n} s_k^2(A) \prod_{k=1}^{n} s_k^2(B)\, \det\,[\langle e_j, e_k\rangle]_{j,k=1}^{n} \\
&= \prod_{k=1}^{n} s_k^2(A) \prod_{k=1}^{n} s_k^2(B).
\end{aligned}$$

Тиме је релација (1.20) доказана. □

Последица 1.3. [Ky Fan] *За компактне операторе A и B је*

$$\sum_{j=1}^{n} s_j(A+B) \leq \sum_{j=1}^{n} s_j(A) + \sum_{j=1}^{n} s_j(B), \quad \text{за свако } n = 1, 2 \ldots \tag{1.21}$$

Δ Да бисмо доказали релацију (1.21) применимо лему 1.5 на оператор $A + B$:

$$\max_{U,(f_j)_{j=1}^{n}} \Big|\sum_{j=1}^{n} \langle U(A+B)f_j, f_j\rangle \Big| = \sum_{j=1}^{n} s_j(A+B).$$

Можемо одабрати унитаран оператор U и ортонормиран систем вектора $\{f_1, \ldots, f_n\}$ за које се максимум достиже и тада имамо

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} s_j(A+B) &= \Big|\sum_{j=1}^{n} \langle U(A+B)f_j, f_j\rangle \Big| \\
&= \Big|\sum_{j=1}^{n} \langle (UA+UB)f_j, f_j\rangle \Big| \\
&\leq \Big|\sum_{j=1}^{n} \langle UAf_j, f_j\rangle \Big| + \Big|\sum_{j=1}^{n} \langle UBf_j, f_j\rangle \Big| \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} s_j(A) + \sum_{j=1}^{n} s_j(B)
\end{aligned}$$

при чему последња неједнакост следи поново на основу леме 1.5. Тиме смо доказали да важи 1.21. □

Користећи претходну лему можемо једноставно установити наредне резултате.

Теорема 1.4. [Ky Fan] *Ако су A и B компактни оператори и функција $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ и $f(0)=0$ неопадајућа конвексна функција тада важи*

$$\sum_{j=1}^{k} f(s_j(A+B)) \le \sum_{j=1}^{k} f(s_j(A)+s_j(B)), \quad \textit{за свако } k=1,2,\dots$$

и као последица тога важи

$$\sum_{j=1}^{\infty} f(s_j(A+B)) \le \sum_{j=1}^{\infty} f(s_j(A)+s_j(B)).$$

Δ Да бисмо доказали теорему користимо лему 1.2 и лему 1.3, при чему за функцију Φ узимамо следећу функцију

$$\Phi(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \le x < \infty \\ 0, & -\infty \le x < 0. \end{cases} \tag{1.22}$$

Како је $f(0)=0, \Phi(-\infty)=0$ и Φ је конвескна, то функција Φ испуњава услове леме. За низове $(a_j)_{j=1}^{\infty}$ и $(b_j)_{j=1}^{\infty}$ узмемо редом низове $(s_j(A+B))_{j=1}^{\infty}$ и $(s_j(A)+s_j(B))_{j=1}^{\infty}$. Ти низови на основу леме 1.3 задовољавају услове леме 1.4. Тако закључујемо да је

$$\sum_{j=1}^{k} \Phi(a_j) \le \sum_{j=1}^{k} \Phi(b_j),$$

односно, како су низови $(a_j)_{j=1}^{\infty}$ и $(b_j)_{j=1}^{\infty}$ позитивни, важи

$$\sum_{j=1}^{\infty} f(s_j(A+B)) \le \sum_{j=1}^{\infty} f(s_j(A)+s_j(B)).$$ □

Теорема 1.5. [Horn] *Нека су A и B компактни оператори и функција $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ и $f(0)=0$ таква да је функција $f\circ exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: t\mapsto f(e^t)$ конвексна. Тада важи*

$$\sum_{j=1}^{k} f(s_j(AB)) \le \sum_{j=1}^{k} f(s_j(A)s_j(B)), \quad \textit{за свако } k=1,2,\dots,$$

а као последица и

$$\sum_{j=1}^{\infty} f(s_j(AB)) \le \sum_{j=1}^{\infty} f(s_j(A)s_j(B)).$$

Δ Слично као у претходној теореми, за доказ ове теореме користимо лему 1.2 и лему 1.4, с тим што сада за низове $(a_j)_{j=1}^{\infty}$ и $(b_j)_{j=1}^{\infty}$ бирамо редом низове $(\ln\, s_j(AB))_{j=1}^{\infty}$ и $(\ln\,[s_j(A)s_j(B)])_{j=1}^{\infty}$, док за функцију Φ узимамо функцију

$$\Phi(t) = \begin{cases} f(e^t), & 0 \le t < \infty \\ 0, & -\infty \le x < 0. \end{cases} \tag{1.23}$$

Покажимо да они задовољавају услове леме 1.4.

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k} a_j &= \sum_{j=1}^{k} \ln\, s_j(AB) = \ln \prod_{j=1}^{k} s_j(AB)\\ &\leq \ln \prod_{j=1}^{k} [s_j(A)s_j(B)] = \sum_{j=1}^{k} \ln[s_j(A)s_j(B)] = \sum_{j=1}^{k} b_j.\end{aligned}$$

На основу леме 1.4 важи

$$\sum_{j=1}^{k} \Phi(a_j) \leq \sum_{j=1}^{k} \Phi(b_j)$$

$$\sum_{j=1}^{k} f(e^{\ln s_j(AB)}) \leq \sum_{j=1}^{k} f(e^{\ln(s_j(A)s_j(B))})$$

$$\sum_{j=1}^{k} f(s_j(AB)) \leq \sum_{j=1}^{k} f(s_j(A)s_j(B)),$$

што је и требало доказати. □

Приметимо да се неједнакости из теорема 1.4 и 1.5 могу уопштити на случај са n оператора. Користећи то, доказујемо следеће последице:

Последица 1.4. *Ако су $A_1, A_2, \ldots, A_n$ компактни оператори, тада важи*

$$\sum_{j=1}^{k} s_j^p(A_1 \ldots A_n) \leq \sum_{j=1}^{k} s_j^p(A_1) \ldots s_j^p(A_n), \quad \textit{за } k = 1, 2, \ldots \ \textit{ и сваке } p > 0$$

ако и само ако важи

$$\prod_{j=1}^{k} s_j(A_1 \ldots A_n) \leq \prod_{j=1}^{k} s_j(A_1) \ldots s_j(A_n), \quad \textit{за } k = 1, 2, \ldots \tag{1.24}$$

Δ Директан смер следи из познатог тврђења да је

$$\lim_{p \to 0+} \left(\frac{\sum_{j=1}^{k} x_j^p}{k} \right)^{\frac{1}{p}} = \sqrt[k]{\prod_{j=1}^{k} x_j},$$

при чему су $x_1, \ldots, x_n$ позитивни реални бројеви. Како је према претпоставци

$$\left(\frac{\sum_{j=1}^{k} s_j^p(A_1 \ldots A_n)}{k} \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{\sum_{j=1}^{k} s_j^p(A_1) \ldots s_j^p(A_n)}{k} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{за све } k = 1, 2, \ldots$$

пуштањем лимеса кад p тежи нули на основу претходног добијамо да важи

$$\sqrt[k]{\prod_{j=1}^{k} s_j^p(A_1 \ldots A_n)} \leq \sqrt[k]{\prod_{j=1}^{k} s_j^p(A_1) \ldots s_j^p(A_n)}, \quad \text{за све } k = 1, 2, \ldots,$$

што је еквивалентно са (1.24).
Обрнуто тврђење директно следи из теореме 1.5, ако за функцију f узмемо $f(t) = t^p$. Она очигледно задовољава услове теореме, па важи

$$\sum_{j=1}^{k} s_j^p(A_1 \ldots A_n) = \sum_{j=1}^{k} f(s_j(A_1 \ldots A_n)) \leq \sum_{j=1}^{k} f(s_j(A_1) \ldots s_j(A_n)) = \sum_{j=1}^{k} s_j^p(A_1) \ldots s_j^p(A_n),$$

што је и требало доказати. □

Ако у претходној последици узмемо $A_1 = \cdots = A_n = A$ добијамо да важи:

Последица 1.5. *Ако је A компактан оператор, n природан број и $p > 0$ тада важи*

$$\sum_{j=1}^{k} s_j^{p/n}(A^n) \leq \sum_{j=1}^{k} s_j^p(A), \quad \text{за све } k = 1, 2, \ldots$$

Глава 2

Симетрично-нормирани идеали прстена ограничених линеарних оператора

2.1 Двострани идеали прстена ограничених линеарних оператора

Дефиниција 2.1. *Скуп $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathbb{H})$ је двострани идеал ако важи:*
1) *ако оператори $A, B \in \mathcal{M}$ тада је и $A + B \in \mathcal{M}$,*
2) *ако оператор $A \in \mathcal{M}$ и $B \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ тада је $AB \in \mathcal{M}$ и $BA \in \mathcal{M}$,*
3) *$\mathcal{M} \neq \{0\}$ и $\mathcal{M} \neq \mathcal{B}(\mathbb{H})$.*

Како $I \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ и $\mathcal{B}(\mathbb{H})$ је линеаран скуп, закључујемо да је и двострани идеал $\mathcal{M}$ такође линеаран скуп. Примери идела су скуп коначно димензионих оператора $\mathcal{K}(\mathbb{H})$ и скуп компактних оператора $C_\infty(\mathbb{H})$. Важи да су $\mathcal{K}(\mathbb{H})$ и $C_\infty(\mathbb{H})$ најмањи односно највећи двострани идеали, прецизније важи следећа теорема.

Теорема 2.1. $[J.Calkin]$ *Ако је $\mathcal{M}$ двострани идеал у $\mathcal{B}(\mathbb{H})$, тада је*

$$\mathcal{K}(\mathbb{H}) \subseteq \mathcal{M} \subseteq \mathcal{C}_\infty(\mathbb{H}).$$

Доказ теореме се може наћи у [4].

Последица 2.1. *$\mathcal{C}_\infty(\mathbb{H})$ је једини затворен двострани идеал у $\mathcal{B}(\mathbb{H})$.*

Једно од својстава идеала је:
Сваки двострани идеал је самоадјунгован.
Односно, ако је $\mathcal{M}$ двострани идеал и $A \in \mathcal{M}$, тада је и $A^* \in \mathcal{M}$.
Ова особина директно следи из поларне репрезентације оператора $A = U\,|A|$, где је U унитаран оператор. Из претходне репрезентације следи да је $|A| = U^*A \in \mathcal{M}$, односно $A^* = |A|\,U^* \in \mathcal{M}$.

Симетрично-нормирани идеали

Да бисмо дефинисали симетрично-нормиране идеале треба нам појам симетричне норме. Нека је $\mathcal{I} \subset \mathcal{B}(\mathbb{H})$ двострани идеал.

Дефиниција 2.2. *Функционал* $\left\|\!\left|\cdot\right|\!\right\| : \mathcal{I} \to \mathbb{C}$ *је* ***симетрична норма*** *ако важи:*
1) $\|\!|X|\!\| > 0, \quad$ *за свако* $X \in \mathcal{I}, X \neq 0$,
2) $\|\!|\lambda X|\!\| = |\lambda| \, \|\!|X|\!\|, \quad$ *за све* $X \in \mathcal{I}, \lambda \in \mathbb{C}$,
3) $\|\!|X+Y|\!\| \leq \|\!|X|\!\| + \|\!|Y|\!\|, \quad$ *за све* $X, Y \in \mathcal{I}$,
4) $\|\!|AXB|\!\| \leq \|A\| \, \|\!|X|\!\| \, \|B\|, \quad$ *за све* $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{H}), X \in \mathcal{I}$,
5) *ако је* X *једнодимензионални оператор, тада је* $\|\!|X|\!\| = \|X\| = s_1(X)$.

Пример симетричне норме је стандардна норма дефинисана на $\mathcal{B}(\mathbb{H})$.
Норма $\|\!|\cdot|\!\|$ је **унитарно инваријантна норма** ако се у претходној дефиницији услов 4) замени следећим условом
4') $\|\!|UX|\!\| = \|\!|XU|\!\| = \|\!|X|\!\|, \quad$ за све $X \in \mathcal{I}$ и U произвољан унитаран оператор.
Приметимо да је свака симетрична норма и унитарно инваријантна норма, тј. да услов 4) повлачи услов 4'). Заиста, ако су U и V унитарни оператори, тада према услову 4) важи

$$\|\!|UXV|\!\| \leq \|U\| \, \|\!|X|\!\| \, \|V\| = \|\!|X|\!\| . \tag{2.1}$$

С друге стране, како су оператори U и V унитарни, оператор X можемо написати на следећи начин $X = U^{-1}UXVV^{-1}$, па опет на основу 4) имамо да је

$$\|\!|X|\!\| = \left\|\!\left|U^{-1}UXVV^{-1}\right|\!\right\| \leq \left\|U^{-1}\right\| \|\!|UXV|\!\| \left\|V^{-1}\right\| = \|\!|UXV|\!\| . \tag{2.2}$$

Из релација (2.1) и (2.2) следи $\|\!|UXV|\!\| = \|\!|X|\!\|$, одакле директно следи услов $4')$.

Особине симетричних норми

1) *Ако је* $\mathcal{I} \subset \mathcal{B}(\mathbb{H})$ *двострани идеал и* $\|\!|\cdot|\!\| : \mathcal{I} \to \mathbb{C}$ *симетрична норма, тада је*

$$\|\!|X|\!\| = \|\!|X^*|\!\| = \left\|\!\left|(XX^*)^{\frac{1}{2}}\right|\!\right\| = \left\|\!\left|(X^*X)^{\frac{1}{2}}\right|\!\right\|, \quad \text{за свако } X \in \mathcal{I}.$$

Δ Нека је $X = U|X|$ поларна репрезентација оператора $X \in \mathcal{I}$. Показали смо већ да је тада и $|X| \in \mathcal{I}$. Тада на основу 4) важи

$$\|\!|X|\!\| = \|\!|U|X||\!\| \leq \|U\| \, \|\!||X||\!\| = \|\!| \, |X| \, |\!\| . \tag{2.3}$$

С друге стране, како је $|X| = U^*X$, опет на основу 4) имамо да важи

$$\|\!||X||\!\| = \|\!|U^*X|\!\| \leq \|U^*\| \, \|\!|X|\!\| = \|\!|X|\!\| . \tag{2.4}$$

На основу релација (2.3) и (2.4) следи да важи $\|\!|X|\!\| = \left\|\!\left|(X^*X)^{\frac{1}{2}}\right|\!\right\|$. Слично, претходним поступком примењеним на оператор $X^* = |X|U^*$ и $|X| = X^*U$ добијамо да важи $\|\!|X^*|\!\| = \left\|\!\left|(X^*X)^{\frac{1}{2}}\right|\!\right\|$. $\square$

2) *Нека је под претпоставкама из* 1) *оператор* $X \in \mathcal{I}$. *Ако оператор* $Y \in \mathcal{C}_\infty(\mathbb{H})$ *и задовољава*

$$s_j(Y) \leq c s_j(X), \quad \text{за } j = 1, 2, \ldots, \tag{2.5}$$

где је c *позитивна константа. Тада*

$$Y \in \mathcal{I} \text{ и } \|\!|Y|\!\| \leq c \, \|\!|X|\!\| . \tag{2.6}$$

Δ Нека је $H_X = |X| = \sqrt{X^*X}$ и $H_Y = |Y| = \sqrt{Y^*Y}$. Како према претпоставци важи (2.5), постоји унитаран оператор V и оператор $A \in \mathcal{B}(\mathbb{H}), A \geq 0, \|A\| \leq 1$ тако да је испуњено

$$H_Y = cAVH_XV^{-1}. \tag{2.7}$$

За оператор V одаберемо неки оператор који ортонормирану базу $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ сопствених вектора оператора H_X пресликава у ортонормирану базу $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ сопствених вектора оператора H_Y : $Ve_n = f_n, n = 1, 2, \ldots$ Тада за оператор A мора да важи: $Af_n = \frac{s_n(Y)}{c\, s_n(X)} f_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Односно, оператор A је дефинисан следећом једнакости $A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n(Y)}{c\, s_n(X)} f_n \otimes f_n^*$. Како $X \in \mathcal{I}$, знамо да је тада и $H_X \in \mathcal{I}$. Из релације (2.7) следи да $H_Y \in \mathcal{I}$, док из поларне репрезентације $Y = UH_Y$ следи да и $Y \in \mathcal{I}$. Такође, користећи релацију (2.7) добијамо да важи

$$\begin{aligned} |||H_Y||| &= \left|\left|\left| cAVH_XV^{-1} \right|\right|\right| = c \left|\left|\left| AVH_XV^{-1} \right|\right|\right| \\ &\leq c\, \|A\|\, \|V\| \left\|V^{-1}\right\| |||H_X||| \leq c\, |||H_X||| \end{aligned}$$

одакле на основу особине 1) следи (2.6). $\square$

3) *Ако је $\mathcal{I} \subset \mathcal{B}(\mathbb{H})$ двострани идеал и $X \in \mathcal{I}$, тада је $s_1(X) \leq |||X|||$. Ако је оператор X још и коначно димензионалан, тада важи $|||X||| \leq \sum_j s_j(X)$.*

Δ Нека је $Y = s_1(X) \langle \cdot, f \rangle f$, при чему је f произвољан јединични вектор. Тада је за $c = 1$ задовољена релација (2.5), па на основу особине 2) добијамо да важи $|||Y||| \leq |||X|||$. С друге стране имамо да важи $|||Y||| = \|Y\| = \|X\| = s_1(X)$. Одатле закључујемо да важи $s_1(X) \leq |||X|||$.
Ако је оператор X још и коначно дименизионалан, тада је његов Schmidt-ов развој дат са $X = \sum_{j=1}^{n} s_j(X) \langle \cdot, f_j \rangle f_j$. Тада на основу особина 3) и 5) из дефиниције 2.4 имамо да је

$$|||X||| \leq \sum_{j=1}^{n} |||s_j(X) \langle \cdot, f_j \rangle f_j||| = \sum_{j=1}^{n} s_j(X),$$

што је и требало доказати. $\square$

Дефиниција 2.3. *Двострани идеал $\mathcal{I} \subset \mathcal{B}(\mathbb{H})$ је* ***симетрично-нормирани идеал*** *у прстену $\mathcal{B}(\mathbb{H})$ ако постоји симетрична норма $|||\cdot|||_{\mathcal{I}}$ дефинисана на њему у којој је $\mathcal{I}$ Banach–ов простор.*

Теорема 2.2. *Ако се симетрично нормирајући идеали $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{I}_2$ састоје од истих елемената, тада су њихове одговарајуће норме еквивалентне.*

Δ Означимо са $\mathcal{I}$ скуп елемената симетрично нормирајућег идеала $\mathcal{I}_1$ (што је исто као и скуп елемената симетрично нормирајућег идеала $\mathcal{I}_2$). Посматрамо функционал $|||\cdot|||$ дефинисан на $\mathcal{I}$ на следећи начин

$$|||X||| \stackrel{\text{def}}{=} \max\{|||X|||_1, |||X|||_2\}, \quad \text{за } X \in \mathcal{I}$$

где је $|||X|||_1 = |||X|||_{\mathcal{I}_1}$ и $|||X|||_2 = |||X|||_{\mathcal{I}_2}$. Овако дефинисан функционал је норма. Из претходног својства 3) имамо да важе следеће неједнакости

$$\|X\|_{\mathcal{B}(\mathbb{H})} \leq |||X|||_1 \qquad \text{и} \qquad \|X\|_{\mathcal{B}(\mathbb{H})} \leq |||X|||_2, \qquad \text{за све } X \in \mathcal{I}.$$

Одатле следи да ако низ оператора конвергира у обе норме, $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$, тада тај низ у свакој од ових норми има исту граничну вредност. Из претходног закључујемо да је простор $\mathcal{I}$ комплетан у норми $\|\cdot\|$. Посматрамо идентичко пресликавање I као оператор на домену $\mathcal{I}$ са нормом $\|\cdot\|$, у сваки од простора $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{I}_2$. Из дефиниције норме $\|\cdot\|$ следи да је оператор I ограничен и то норме ≤ 1. Према Banach-овој теореми о хомеоморфизму следи да је I непрекидно и као пресликавање из оба простора $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{I}_2$ на простор $\mathcal{I}$, са нормом $\|\cdot\|$. Дакле, свака од норми $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ је еквивалентна норми $\|\cdot\|$, због чега су и норме $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ еквивалентне. □

Из претходне теореме следи да свака симетрична норма $\|X\|$ зависи једино од сингуларних вредности оператора X. Односно, ако оператори X_1 и X_2 имају исте сингуларне вредности, тада су и њихове норме $\|X_1\|$ и $\|X_2\|$ исте.
Дакле, за сваку симетричну норму имамо да је

$$\|X\| = \Phi(s_1(X), s_2(X), \dots)$$

где је $\Phi(\xi_1, \xi_2, \dots)$ функција ненегативних промењљивих ξ_j која има одговарајућа својства.
Важан случај је када је идеал $\mathcal{I}$ једнак идеалу $\mathcal{K}(\mathbb{H})$ коначно димензионалних оператора. У овом случају се домен претходне функције Φ састоји од свих нерастућих низова $(\xi_j)_{j=1}^{\infty}$ ненегативних бројева, од којих је само коначно много различито од нуле. У наредном поглављу ћемо испитивати оне функције $\Phi(\xi_1, \xi_2, \dots)$ које дефинишу симетричну норму на идеалу $\mathcal{K}(\mathbb{H})$.

2.2 Симетричне нормирајуће функције

Нека је c_0 простор реалних низова $\xi = (\xi_j)_{j=1}^{\infty}$ који теже нули. Означимо са $\hat{c}$ скуп који се састоји од низова са коначно много не-нула елемената.

Дефиниција 2.4. *Реална функција $\Phi(\xi) = \Phi(\xi_1, \xi_2, \dots)$ дефинисана на $\hat{c}$ се назива* ***нормирајућа функција*** *ако има следећа својства*

i) $\Phi(\xi) > 0,$ *за све* $\xi \in \hat{c}, \xi \neq 0,$

ii) $\Phi(\alpha\xi) = |\alpha| \Phi(\xi),$ *за све* $\xi \in \hat{c}, \alpha \in \mathcal{B}(\mathbb{H}),$

iii) $\Phi(\xi + \eta) \leq \Phi(\xi) + \Phi(\eta),$ *за све* $\xi, \eta \in \hat{c},$

iv) $\Phi(1, 0, 0, \dots) = 1.$

Симетрична нормирајућа функција (с.н. функција) је нормирајућа функција која има и следеће својство:
$v)$ $\Phi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, 0, \dots) = \Phi(|\xi_{\sigma(1)}|, |\xi_{\sigma(2)}|, \dots, |\xi_{\sigma(n)}|, 0, \dots),$
за све $\xi = (\xi_j)_{j=1}^{\infty} \in \hat{c}$ и произвољну пермутацију σ скупа $\{1, 2, \dots, n\}$.

Особине симетрично нормирајућих функција

Лема 2.1. *Ако за векторе $\xi = (\xi_j)$, $\eta = (\eta_j)$ из $\hat{c}$ важи*

$$|\xi_j| \leq |\eta_j|, \quad \text{за све } j = 1, 2, \dots$$

тада важи

$$\Phi(\xi) \leq \Phi(\eta).$$

Δ Због особине $v)$ из дефиниције 2.4, без умањења општости можемо претпоставити да су координате ξ_j и η_j не-негативне. Очигледно је довољно тврђење доказати за случај када је

$$\xi_j = \eta_j, \quad \text{за } j = 1, \dots, k-1$$
$$\xi_j < \eta_j, \quad \text{за } j = k.$$

Означимо са $\alpha = \frac{\xi_k}{\eta_k}$. Тада је $\xi_k = \alpha\eta_k = (\frac{1+\alpha}{2} - \frac{1-\alpha}{2})\eta_k$. Остале координате вектора ξ можемо записати на следећи начин $\xi_j = (\frac{1+\alpha}{2} + \frac{1-\alpha}{2})\xi_j$, за$j \neq k$. На основу тога и особине $iii)$ из дефиниције 2.4 добијамо да важи

$$\Phi(\xi) = \Phi(\xi' + \xi'') \leq \Phi(\xi') + \Phi(\xi'') \tag{2.8}$$

где је

$$\xi'_j = \frac{1+\alpha}{2}\xi_j, \quad \xi''_j = \frac{1-\alpha}{2}\xi_j, \quad j \neq k$$
$$\xi'_k = \frac{1+\alpha}{2}\eta_k, \quad \xi''_k = -\frac{1-\alpha}{2}\eta_k.$$

Како је

$$\Phi(\xi') = \frac{1+\alpha}{2}\Phi(\eta)$$

и из својства $v)$ из дефиниције 2.4 добијамо да важи:

$$\begin{aligned}\Phi(\xi'') =& \frac{1-\alpha}{2}\Phi(\xi_1, \xi_2, \dots, -\eta_k, \xi_{k+1}, \dots) \\ =& \frac{1-\alpha}{2}\Phi(\xi_1, \xi_2, \dots, \eta_k, \xi_{k+1}, \dots) = \frac{1-\alpha}{2}\Phi(\eta).\end{aligned}$$

Добијамо да из (2.8) следи тврђење:

$$\Phi(\xi) \leq \frac{1+\alpha}{2}\Phi(\eta) + \frac{1-\alpha}{2}\Phi(\eta) = \Phi(\eta). \qquad \square$$

Да бисмо доказали следећу важну Ky Fan-ову лему, потребно је да прво докажемо помоћну лему везану за векторе n-димензионог реалног простора.

Лема 2.2. *Уколико вектори $\xi = (\xi_j)_{j=1}^n$ и $\eta = (\eta_j)_{j=1}^n$ задовољавају следеће услове*

$$\xi_1 \geq \xi_2 \geq \dots \geq \xi_n \geq 0, \tag{2.9}$$
$$\eta_1 \geq \eta_2 \geq \dots \geq \eta_n \geq 0, \tag{2.10}$$
$$\sum_{j=1}^k \xi_j \leq \sum_{j=1}^k \eta_j, \quad \text{за свако } k = 1, \dots, n, \tag{2.11}$$

тада вектор ξ има следећу репрезентацију

$$\xi = \sum_{k=1}^{2^n n!} d_k \eta^{(k)}, \tag{2.12}$$

где су $\eta^{(k)}$ сви $n-$димензиони вектори добијени из η пермутовањем његових координата и још множећи их са 1 или -1, а d_k не-негативни бројеви за које је $\sum_{k=1}^{2^n n!} d_k = 1$.

Приметимо да лему можемо формулисати и на следећи начин: сваки вектор ξ који задовољава услове (2.9) припада конвексном омотачу вектора $\eta^{(k)}$.

Δ $[B.\,S.\,Mitjagin]$: Нека је G конвексни омотач вектора $\eta^{(k)}$. Претпоставимо супротно тврђењу леме, тј. да вектор ξ нема репрезентацију (2.12). То значи да $\xi \notin G$. Како је сваки конвексан скуп пресек полупростора који га садрже, постоји хиперраван од G таква да се G и вектор ξ налазе са супротних страна те хиперравни. Нека је једначина те хиперравни $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b$. Тада за сваки вектор $(x_j)_{j=1}^{n} \in G$ важи $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b$, док за вектор $\xi = (\xi_j)_{j=1}^{n}$ важи $\sum_{j=1}^{n} a_j \xi_j > b$. Међу векторима $\eta^{(k)}$ из G, можемо одабрати вектор $\eta^{(r)} = (\eta_j^{(r)})_{j=1}^{n}$ такав да важи

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \eta_j^{(r)} = \sum_{j=1}^{n} a_j^* \eta_j \tag{2.13}$$

где је $(a_j^*)_{j=1}^{n}$ вектор чије су компоненте $|a_1|, |a_2|, \ldots |a_n|$ поређане у нерастући редослед. Како $\eta^{(r)} \in G$, то важи

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \eta_j^{(r)} \leq b. \tag{2.14}$$

Из релација (2.13) и (2.14) добијамо да је

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^* \eta_j \leq b. \tag{2.15}$$

Узимајући у обзир да важи $\sum_{j=1}^{k} \xi_j \leq \sum_{j=1}^{k} \eta_j$ и $a_k^* \geq 0$, за све $k = 1, \ldots, n$, као и неједнакост (2.15) и следећу једнакост

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^* \eta_j = a_1^* \eta_1 + a_2^*(\eta_1 + \eta_2 - \eta_1) + a_3^*(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 - \eta_1 - \eta_2) + \cdots + a_n^*(\eta_1 + \cdots + \eta_n - \eta_1 - \cdots - \eta_{n-1})$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \eta_j a_n^* + \sum_{j=1}^{n-1} (a_j^* - a_{j+1}^*) \sum_{k=1}^{j} \eta_k,$$

добијамо да је

$$\begin{aligned} b \geq \sum_{j=1}^{n} a_j^* \eta_j &= \sum_{j=1}^{n} \eta_j a_n^* + \sum_{j=1}^{n-1} (a_j^* - a_{j+1}^*) \sum_{k=1}^{j} \eta_k \\ &\geq \sum_{j=1}^{n} \xi_j a_n^* + \sum_{j=1}^{n-1} (a_j^* - a_{j+1}^*) \sum_{k=1}^{j} \xi_k = \sum_{j=1}^{n} a_j^* \xi_j, \end{aligned}$$

односно закључујемо да важи

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^* \xi_j \leq b. \tag{2.16}$$

С друге стране, слично следи и једнакост

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^* \xi_j = \sum_{j=1}^{n} a_j^* \xi_n + \sum_{j=1}^{n-1} (\xi_j - \xi_{j+1}) \sum_{k=1}^{j} a_k^*.$$

Због одабира низа $(a_j^*)_{j=1}^n$ важиће

$$\sum_{j=1}^{k} a_j \leq \sum_{j=1}^{k} a_j^*, \quad \text{за } k = 1, \ldots, n$$

и важи $\xi_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, n$, због чега добијамо

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^* \xi_j \geq \sum_{j=1}^{n} a_j \xi_j > b. \tag{2.17}$$

Међутим, из релација (2.16) и (2.17) добијамо контрадикцију, односно закључујемо да $\xi \in G$. □

Лема 2.3. [Ky Fan] *Нека су $\xi = (\xi_j)_{j=1}^\infty$ и $\eta = (\eta_j)_{j=1}^\infty$ из $\hat{c}$. Ако*

$$\xi_1 \geq \xi_2 \geq \cdots \geq 0 \tag{2.18}$$

$$\eta_1 \geq \eta_2 \geq \cdots \geq 0 \tag{2.19}$$

$$\sum_{j=1}^{k} \xi_j \leq \sum_{j=1}^{k} \eta_j, \quad \textit{за } k = 1, 2, \ldots \tag{2.20}$$

тада за сваку симетричну нормирајућу функцију Φ важи

$$\Phi(\xi) \leq \Phi(\eta).$$

Δ Како низови ξ и η припадају $\hat{c}$, све њихове координате почев од n су једнаке 0. Означимо са $\eta^{(\nu)}$ вектор из $\hat{c}$ такав да су његових првих n координата добијени пермутовањем бројева η_j, $j = 1, \ldots, n$ и множењем са 1 или -1. Тада на основу претходне леме, из (2.12), важи

$$\xi = \sum_{\nu} t_\eta \eta^{(\nu)} \text{ и } \sum_{\nu} t_\nu = 1,\, t_\nu \geq 0$$

Користећи особине $iii)$ и $ii)$ из дефиниције 2.4 добијамо да је

$$\begin{aligned}\Phi(\xi) =& \Phi(\sum_{\nu} t_\eta \eta^{(\nu)}) \\ \leq& \sum_{\nu} \Phi(t_\nu \eta^{(\nu)}) = \sum_{\nu} t_\nu \Phi(\eta^{(\nu)})\end{aligned}$$

Како због особине $v)$ из дефиниције 2.4 важи $\Phi(\eta^{(\nu)}) = \Phi(\eta)$, добијамо тврђење леме

$$\Phi(\xi) = \Phi(\eta) \sum_{\nu} t_\nu \leq \Phi(\eta).$$ □

Нека је k конус свих нерастућих низова из $\hat{c}$ који се састоје од ненегативних бројева. Сваком вектору $\xi = (\xi_j)_{j=1}^{\infty}$ из $\hat{c}$ можемо придружити вектор $\xi^* = (\xi_j^*)_{j=1}^{\infty}$ из k, при чему је $\xi_j^* = \left|\xi_{\eta_j}\right|$, $j = 1, 2, \dots$ и η_j је пермутација позитивних целих бројева таква да је низ $(\left|\xi_{\eta_j}\right|)_{j=1}^{\infty}$ нерастући. Како је за симетрично нормирајуће функције испуњен услов $v)$ из дефиниције 2.4, важи $\Phi(\xi) = \Phi(\xi^*), \xi \in \hat{c}$. Дакле, с.н. функција је јединствено дефинисана ако је задата на конусу k. Одатле следи да се услови $i) - v)$ који дефинишу с.н. функцију могу заменити еквивалентним условима у којима фигуришу само вектори из k:

Лема 2.4. *Нека је $\Phi(\xi)$ функција дефинисана на конусу k. Једнакост*

$$\tilde{\Phi}(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(\xi^*), \quad \text{за све } \xi \in \hat{c} \tag{2.21}$$

дефинише једну с.н. функцију ако и само ако су задовољени следећи услови:

i′) $\Phi(\xi) > 0$, *за свако* $\xi \in k$, $\xi \neq 0$

ii′) $\Phi(\alpha\xi) = \alpha\Phi(\xi)$, *за све* $\alpha \geq 0$, $\xi \in k$

iii′) $\Phi(\xi + \eta) \leq \Phi(\xi) + \Phi(\eta)$, *за све* $\xi, \eta \in k$

iv′) $\Phi(1, 0, \dots) = 1$

v′) $\xi = (\xi_j)_{j=1}^{\infty}, \eta = (\eta_j)_{j=1}^{\infty} \in k$, $\sum_{j=1}^{n} \xi_j \leq \sum_{j=1}^{n} \eta_j$, $n = 1, 2, \dots$ *тада је* $\Phi(\xi) \leq \Phi(\eta)$.

Δ Директан смер следи директно из дефиниције с.н. функције, јер ако је $\Phi(\xi)$ с.н. функција тада су задовољени услови $i) - v)$ на $\hat{c}$ из дефиниције 2.4, па они специјално важе и на конусу k, односно важе услови $i') - iv')$, док услов $v')$ следи из Ку Fan-ове леме 2.3.
Обрнуто, нека функција Φ дефинисана на конусу k задовољава услове $i') - v')$. Тада функција $\tilde{\Phi}$ дефинисана једнакошћу (2.21) на $\hat{c}$ очигледно задовољава услове $i), ii), iv)$ и $v)$ из дефиниције 2.4.
Докажимо још да важи својство $iii)$. Нека су ξ и η низови из $\hat{c}$ и $\zeta = \xi + \eta$. Очигледно да за тако дефинисане низове важи

$$\sum_{j=1}^{n} \zeta_j^* \leq \sum_{j=1}^{n} (\xi_j^* + \eta_j^*).$$

Тада из својства $v')$ и $iii')$ следи да је

$$\tilde{\Phi}(\xi + \eta) = \tilde{\Phi}(\zeta) \leq \Phi(\xi^* + \eta^*) \leq \Phi(\xi^*) + \Phi(\eta^*) = \tilde{\Phi}(\xi) + \tilde{\Phi}(\eta).$$

Тиме смо доказали да важи и својство $iii)$. □
У даљем тескту ћемо и за функцију $\tilde{\Phi}$ и за Φ користити исту ознаку Φ, с тим што ћемо их разликовати у зависности од домена.

Најједноставнији пример с.н. функције је функција Φ_∞, дефинисана на конусу k следећом релацијом

$$\Phi_\infty(\xi) = \xi_1, \quad \text{за свако } \xi \in k.$$

Следећи једноставан пример с.н. функције је функција Φ_1 дефинисана са

$$\Phi_1(\xi) = \sum_j \xi_j, \quad \text{за свако } \xi \in k.$$

Очигледно је да важи

$$\Phi_\infty(\xi) = \max_j |\xi_j|$$
$$\Phi_1(x) = \sum_j |\xi_j|$$

и за све $\xi \in \hat{c}$.
Функције $\Phi_\infty(\xi)$ и $\Phi_1(\xi)$ су екстремне с.н. функције, односно да важи

Лема 2.5. *За сваку с.н. функцију* Φ *важе следеће неједнакости*

$$\xi_1 \leq \Phi(\xi) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \quad \text{за све } \xi \in k.$$

ΔЛема директно следи из Ку Faнове леме2.3, јер за сваки вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n, 0, \ldots)$ из конуса k важи:

$$\xi_1 = \Phi(\xi_1, 0, \ldots) \leq \Phi(\xi) \leq \Phi(\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j, 0, \ldots) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \Phi(1, 0, \ldots) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j,$$

због чега је природно да функције Φ_∞ и Φ_1 називамо минимална, односно максимална с.н. функција. $\square$

У следећој леми установићемо однос између с.н. функција Φ на конусу k и унитарно инваријантних норми $|||\cdot|||$ на скупу коначно димензионалних оператора $\mathcal{K}(\mathbb{H})$.

Лема 2.6. *Ако је* Φ *с.н. функција, тада једнакост*

$$\|A\|_\Phi = \Phi(s(A)), \quad \text{за произвољно } A \in \mathcal{K}(\mathbb{H}) \tag{2.22}$$

дефинише унитарно инваријантну норму на $\mathcal{K}(\mathbb{H})$.
Обрнуто, ако је $|||\cdot|||$ *унитарно инваријантна норма на кончно димензионалмим операторима и* $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ *ортонормирана база простора* $\mathbb{H}$*, тада једнакост*

$$\Phi(\xi) = \left\| \sum_{j=1}^{k} \xi_j \langle \cdot, e_j \rangle e_j \right\|_\Phi, \quad \text{за све } \xi \in k \tag{2.23}$$

дефинише с.н. функцију Φ *за коју је* $|||\cdot||| = \|\cdot\|_\Phi$.

Δ Нека је $\|A\|_\Phi = \Phi(s(A)), \quad A \in \mathcal{K}(\mathbb{H})$ и $\|\cdot\|_\Phi : \mathcal{K}(\mathbb{H}) \to \mathbb{C}$. Треба показати да су задовољени услови из дефиниције 2.2. Прва два својства следе директно из особина с.н. функција.
3′) Ако $A, B \in \mathcal{K}(\mathbb{H})$, тада $s(A)$ и $s(B)$ имају коначно не-нула чланова и према леми 1.3 важи

$$\sum_{j=1}^{n} s_j(A+B) \leq \sum_{j=1}^{n} s_j(A) + \sum_{j=1}^{n} s_j(B)$$

Користећи последњу релацију и особину $v')$ из леме 2.4 добијамо да је

$$\begin{aligned}\Phi(s(A+B)) =& \Phi(\sum_{j=1}^{n} s_j(A+B)) \leq \Phi(\sum_{j=1}^{n}(s_j(A)+s_j(B))) \\ \leq& \Phi(\sum_{j=1}^{n} s_j(A)) + \Phi(\sum_{j=1}^{n} s_j(B)) = \Phi(s(A)) + \Phi(s(B)).\end{aligned}$$

Односно, важи

$$\|A+B\|_\Phi \leq \|A\|_\Phi + \|B\|_\Phi\,.$$

$4')$ Како је

$$s_j(AU) = s_j(A) = s_j(UA), \quad \text{за сваки унитаран оператор } U \text{ и свако } j$$

добијамо да је испуњено и

$$\|AU\|_\Phi = \|A\|_\Phi = \|UA\|_\Phi\,, \quad \text{за сваки унитаран оператор } U.$$

5) Ако је A једнодимензиони оператор тада је

$$\|A\| = s_1(A) \quad \text{и} \quad s_{j+1}(A) = 0, \quad j = 1, 2, \dots$$

одакле следи:

$$\|A\|_\Phi = \Phi(s_1(A), 0, \dots) = s_1(A)\,\Phi(1, 0, \dots) = s_1(A) = \|A\|\,.$$

Обрнуто, ако је фунцкија Φ дефинисана са (2.23), тада се директно из својства унитарно инваријантних норми изводи да она задовољава услове $i) - v)$ из дефиниције 2.4. □

Последица 2.2. *Свака унитарно инваријантна норма на идеалу $\mathcal{K}(\mathbb{H})$ је симетрична норма на том идеалу.*

Δ Нека је $|||\cdot|||$ унитарно инваријантна норма на $\mathcal{K}(\mathbb{H})$ и Φ с.н. функција генерисана том нормом. Како за све операторе $B, C \in B(\mathbb{H})$ важи

$$s_j(BAC) \leq \|B\|\,\|C\|\,s_j(A), \quad \text{за свако } A \in \mathcal{K}(\mathbb{H}),$$

то из особина с.н. функција следи да је

$$\Phi(s(BAC)) \leq \Phi(\|B\|\,\|C\|\,s(A)) = \|B\|\,\|C\|\,\Phi(s(A)).$$

Тиме смо доказали да важи особина 4) из дефиниције 2.2

$$|||BAC||| \leq \|B\|\,\|C\|\,|||A|||\,. \qquad \square$$

2.3 Симетрично-нормирани идеали генерисани симетрично нормирајућим функцијама

Нека је $\xi = (\xi_j)_{j=1}^{\infty}$ произвољан низ реалних бројева и $\xi^{(n)} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, 0, \dots)$. Тада је за сваку с.н. функцију Φ низ $(\Phi(\xi^{(n)}))_{n=1}^{\infty}$ неопадајући.
Формирамо скуп $c_\Phi \overset{\text{def}}{=} \{\xi \in c_0 : \sup_{n\in\mathbb{N}} \Phi(\xi^{(n)}) < \infty\}$. Проширићемо домен функције Φ следећом дефиницијом

$$\Phi(\xi) \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \Phi(\xi^{(n)}) \quad \text{за све } \xi \in c_\Phi.$$

Скуп c_Φ има следећа својства:
1) *Ако* $\xi, \eta \in c_\Phi$, *тада и* $\xi + \eta \in c_\Phi$.
Ова особина директно следи из следећег низа неједнакости и тога што због припадности низова ξ и η скупу c_Φ важи $\sup_{n\in\mathbb{N}} \Phi(\xi^{(n)}) < \infty$ и $\sup_{n\in\mathbb{N}} \Phi(\eta^{(n)}) < \infty$.

$$\begin{aligned}\sup_{n\in\mathbb{N}} \Phi((\xi+\eta)^{(n)}) =& \sup_{n\in\mathbb{N}} \Phi(\xi^{(n)} + \eta^{(n)}) \\ \le& \sup_{n\in\mathbb{N}}(\Phi(\xi^{(n)}) + \Phi(\eta^{(n)})) \le \sup_{n\in\mathbb{N}}(\Phi(\xi^{(n)})) + \sup_{n\in\mathbb{N}}(\Phi(\eta^{(n)})) < \infty.\end{aligned}$$

2) *Ако је* $\alpha \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ *и* $\xi \in c_\Phi$, *тада* $\alpha\xi \in c_\Phi$.
Ово тврђење директно следи из тога што је $\sup_{n\in\mathbb{N}} \Phi(\xi^{(n)}) < \infty$ и следећег низа једнакости

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \Phi(\alpha\xi^{(n)}) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\alpha| \;\; \Phi(\xi^{(n)}) = |\alpha| \sup_{n\in\mathbb{N}} \Phi(\xi^{(n)}).$$

3) *Ако је* $\xi = (\xi_j)_{j=1}^{\infty} \in c_\Phi$ *и вектор* $\eta = (\eta_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0$ *задовољава услов* $\sum_{j=1}^{n} \eta_j^* \le \sum_{j=1}^{n} \xi_j^*$, *за свако* $n = 1, 2, \dots$, *тада и* $\eta \in c_\Phi$.

Δ Прво ћемо показати да је

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \Phi((\xi^{(n)})_{n=1}^{\infty}) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \Phi((\xi^{*(n)})_{n=1}^{\infty}), \quad \xi \in c_\Phi. \tag{2.24}$$

Ако је $(\xi^{*(n)})_{n=1}^{\infty} = (\xi_{\sigma(1)}, \xi_{\sigma(2)}, \dots, \xi_{\sigma(n)}, 0, \dots)$, тада је према дефиницији вектора ξ^* испуњено $\xi_j \le \xi_{\sigma(j)}$, за свако $j = 1, \dots, n$. На основу тога закључујемо да у (2.24)важи $\le$. Обрнуту неједнакост у (2.24) добијамо из

$$\Phi((\xi^{*(n)})_{n=1}^{\infty}) = \Phi((\xi_{\sigma(1)}, \xi_{\sigma(2)}, \dots, \xi_{\sigma(n)}, 0, \dots)) \le \Phi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{\max_{1\le k\le n} \sigma(k)}, 0, \dots).$$

Нека је n прозивољан природан број. Према услову тврђења важи $\sum_{j=1}^{k} \eta_j^* \le \sum_{j=1}^{k} \xi_j^*$, за све $k = 1, \dots, n$. Користећи лему 2.3 и претходно доказану једнакост (2.24) из следећег низа неједнакости добијамо да важи тврђење:

$$\begin{aligned}\Phi((\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, 0, \dots)) \le& \Phi((\eta_1^*, \eta_2^*, \dots, \eta_n^*, 0, \dots)) \\ \le& \Phi((\xi_1^*, \xi_2^*, \dots, \eta_n^*, 0, \dots)) \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \Phi((\xi_n^*)_{n=1}^{\infty}) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \Phi((\xi_n)_{n=1}^{\infty}). \;\; \Box\end{aligned}$$

4) *Користећи претходно тврђење добијамо да важи следећа еквиваленција*

$$\xi = (\xi_j)_{j=1}^{\infty} \in c_\Phi \Leftrightarrow \xi^* = (\xi_j^*)_{j=1}^{\infty} \in c_\Phi.$$

Директно се проверава да с.н. функција Φ у проширеном домену c_Φ задржава својства $i') - v')$ из леме 2.4.
Скуп c_Φ називамо *природним доменом* с.н. функције Φ.

Свакој с.н. функцији Φ придружујемо скуп $\mathcal{C}_\Phi(\mathbb{H})$ свих оператора $A \in C_\infty(\mathbb{H})$ за који је $s(A) = (s_j(A))_{j=1}^\infty \in c_\Phi$, тј. $\mathcal{C}_\Phi(\mathbb{H}) = \{A \in C_\infty(\mathbb{H}) | (s_j(A))_{j=1}^\infty \in c_\Phi\}$. За свако $A \in \mathcal{C}_\Phi(\mathbb{H})$ уочимо и $\|A\|_\Phi \overset{\text{def}}{=} \Phi(s(A))$.
Ако $A \in C_\infty(\mathbb{H})$ тада он има Schmidt-ов развој $A = \sum_{j=1}^\infty s_j(A) e_j \otimes f_j^*$ и ако је A_n $n-$та парцијална сума Schimdt-овог развоја оператора A, тада је $A_n = \sum_{j=1}^n s_j(A) e_j \otimes f_j^*$, односно $\|A_n\|_\Phi = \Phi(s(A_n)) = \Phi((s_1(A), \dots, s_n(A), 0, \dots))$. Одатле следи

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{C}_\Phi(\mathbb{H}) &\Leftrightarrow A \in C_\infty(\mathbb{H}) \ \wedge \ (s_j(A))_{j=1}^\infty \in c_\Phi \\ &\Leftrightarrow A \in C_\infty(\mathbb{H}) \ \wedge \ \sup_{n \in \mathbb{N}} \Phi(s_j^{(n)}(A)) < \infty \\ &\Leftrightarrow A \in C_\infty(\mathbb{H}) \ \wedge \ \sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n\|_\Phi < \infty. \end{aligned}$$

Тиме смо показали да важи

$$A \in \mathcal{C}_\Phi(\mathbb{H}) \Leftrightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n\|_\Phi < \infty$$

и

$$\|A\|_\Phi = \lim_{n \to \infty} \|A_n\|_\Phi = \Phi(s(A)).$$

Ку Fan-ове норме дефинисане са

$$\|A\|_{(k)} = \sum_{i=1}^k s_i(A), \quad \text{за свако } k = 1, 2, \dots,$$

представљају фамилију унитарно инваријантих норми. Из леме 2.3 директно следи следећа теорема:

Теорема 2.3. *[Доминационо својство] Ако $A \in \mathcal{C}_\Phi$ и оператор $B \in C_\infty(\mathbb{H})$ има следеће својство*

$$\sum_{j=1}^n s_j(B) \le \sum_{j=1}^n s_j(A), \quad \text{за } n = 1, 2, \dots$$

тада $B \in \mathcal{C}_\Phi(\mathbb{H})$ и $\|B\|_\Phi \le \|A\|_\Phi$.

Претходна теорема у терминима с.н. функција значи да је свака с.н. функција Φ изотона, односно да важи $\Phi\left((s_n)_{n=1}^\infty\right) \le \Phi\left((t_n)_{n=1}^\infty\right)$ за слабо потчињени, нерастући, позитиван низ $(s_n) \prec_w (t_n)$, тј. за оне низове који задовољавају $\sum_{n=1}^k s_n \le \sum_{n=1}^k t_n$ за свако $k = 1, 2, \dots$.

Теорема 2.4. *Нека је Φ с.н. функција. Тада је скуп $\mathcal{C}_\Phi(\mathbb{H})$ с.н. идеал са нормом*

$$\|A\|_\Phi = |||A||| = \Phi(s(A)) \quad \text{за свако } A \in \mathcal{C}_\Phi(\mathbb{H}).$$

Δ Прво ћемо показати да је $\mathcal{C}_\Phi(\mathbb{H})$ двострани идеал. Нека A_1 и A_2 припадају $\mathcal{C}_\Phi(\mathbb{H})$. Према дефиницији то значи да $s(A_1)$ и $s(A_2)$ припадају $\mathcal{C}_\Phi(\mathbb{H})$. На основу леме 1.3 важи:

$$\sum_{j=1}^{n} s_j(A_1+A_2) \le \sum_{j=1}^{n} s_j(A_1) + \sum_{j=1}^{n} s_j(A_2)$$

одакле следи да $A_1 + A_2 \in \mathcal{C}_\Phi(\mathbb{H})$.
Према $v')$ из леме 2.4, важи $\|A_1 + A_2\|_\Phi \le \|A_1\|_\Phi + \|A_2\|_\Phi$. Наиме, ако је $\xi = s(A_1+A_2)$ и $\eta = s(A_1) + s(A_2)$, тада

$$\sum_{j=1}^{n} \xi_j = \sum_{j=1}^{n} s_j(A_1+A_2) \le \sum_{j=1}^{n} s_j(A_1) + \sum_{j=1}^{n} s_j(A_2) = \sum_{j=1}^{n} \eta_j,$$

одакле следи

$$\Phi(s(A_1+A_2)) = \Phi(\xi) \le \Phi(\eta) = \Phi(s(A_1)+s(A_2)) \le \Phi(s(A_1) + \Phi(s(A_2))).$$

Очигледно је да важи да ако $A \in \mathcal{C}_\Phi(\mathbb{H})$ и $\lambda \in \mathbb{C}$, тада и

$$\lambda A \in \mathcal{C}_\Phi(\mathbb{H}) \text{ и } \|\lambda A\|_\Phi = |\lambda| \, \|A\|_\Phi \, .$$

Покажимо сада да је простор $\mathcal{C}_\Phi(\mathbb{H})$ комплетан. Доказаћемо да је сваки апсолутно конвергентан низ у $\mathcal{C}_\Phi(\mathbb{H})$ конвергентан у том простору. Нека је $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ апсолутно конвергентан у $\mathcal{C}_\Phi(\mathbb{H})$, тј.

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \|A_n\|_\Phi < \infty,$$

тада је и $\sum_{n=1}^{\infty} \|A_n\|_{\mathcal{C}_\infty(\mathbb{H})} \le C$. Како је простор $\mathcal{C}_\infty(\mathbb{H})$ комплетан, закључујемо да ред $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ апсолутно конвергира у $\mathcal{C}_\infty(\mathbb{H})$ и означимо са

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} A_n,$$

при чему имамо и да $A \in \mathcal{C}_\infty(\mathbb{H})$. Прво ћемо доказати да је испуњена слаба основна неједнакост (с.о.н.). Како је за неке ортонормиране системе $e_1, \ldots, e_k$ и $f_1, \ldots, f_k$ испуњено

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k} s_i(A) &= \sum_{j=1}^{k} |\langle Ae_j, f_j\rangle| = \sum_{j=1}^{k} \left| \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} A_n e_j, f_j \right\rangle \right| \\
&\le \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k} |\langle A_n e_j, f_j\rangle| \le \sum_{n=1}^{\infty} \max_{(e_j)_{j=1}^k, (f_j)_{j=1}^k} \sum_{j=1}^{k} |\langle A_n e_j, f_j\rangle| \\
&\le \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k} s_j(A_n) = \sum_{j=1}^{k} (\sum_{n=1}^{\infty} s_j(A_n)),
\end{aligned}$$

на основу чега закључујемо да је $s_k(A) \prec_w \sum_{k=1}^{\infty} s_k(A_n)$ за све $k = 1, 2, \ldots$.

Према изотоности и непрекидности с.н. функције Φ добијамо да је

$$\begin{aligned}\Phi(s_1(A),\dots,s_k(A),0,\dots) &\le \Phi(\sum_{n=1}^{\infty} s_1(A_n),\dots,\sum_{n=1}^{\infty} s_k(A_n),0,\dots)\\ &= \lim_{N\to\infty}\Phi(\sum_{n=1}^{N} s_1(A_n),\dots,\sum_{n=1}^{N} s_k(A_n),0,\dots)\\ &\le \limsup_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\Phi(s_1(A_n),\dots,s_k(A_n),0,\dots)\\ &\le \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\Phi(s_1(A_n),\dots,s_k(A_n),\dots)\\ &\le \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\|A_n\|_\Phi = C<\infty.\end{aligned}$$

Узимањем супремума по $k\in\mathbb{N}$, добијамо тражено (с.о.н.)

$$\|A\|_\Phi = \Phi(s_j(A)_{j=1}^{\infty}) \le C = \sum_{n=1}^{\infty}\|A_n\|_\Phi\,. \tag{2.25}$$

Да бисмо утврдили да је $\sum_{n=1}^{\infty}$ конвергентан у $\mathcal{C}_\Phi(\mathbb{H})$ применимо (2.25) на апсолутно конвергентан остатак реда $\sum_{n=N+1}^{\infty} A_n$:

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} A_n - \sum_{n=1}^{N} A_n\right\|_\Phi = \left\|\sum_{n=N+1}^{\infty} A_n\right\|_\Phi \le \sum_{n=N+1}^{\infty}\|A_n\|_\Phi \to 0, \quad \text{кад } N\to\infty,$$

јер је $\sum_{n=N+1}^{\infty}\|A_n\|_\Phi<\infty$. Тиме смо доказали да је простор $\mathcal{C}_\Phi(\mathbb{H})$ комплетан.
За крај доказа треба још утврдити да је $\|UA\|_\Phi = \|AU\|_\Phi = \|A\|_\Phi$, за сваки унитаран оператор U, а то следи из раније доказаних својстава (1.1) и (1.2). □

2.4 p-модификације симетрично нормирајућих функција и унитарно инваријантних норми

Посебно важан пример унитарно инваријантних норми су Schatten-ове p-норме дефинисане са

$$\|A\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{\infty} s_i^p(A)} \ \text{ за } \ 1\le p<\infty$$

и $\|A\|_\infty = \|A\| = s_1(A)$, што се поклапа са $\mathcal{B}(\mathbb{H})$ нормом $\|A\|$.
Један од начина модификације с.н. функције Φ је да уведемо њену p-модификацију $\Phi^{(p)}$, за $p\ge 1$, са

$$\Phi^{(p)}\left((z_n)_{n=1}^{\infty}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt[p]{\Phi\left((|z_n|^p)_{n=1}^{\infty}\right)}.$$

Функција $\Phi^{(p)}$ је дефинисана на $\mathcal{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathbb{H}) = \{(z_n)_{n=1}^{\infty}\in c_0 : (|z_n|^p)_{n=1}^{\infty}\in\mathcal{C}_\Phi(\mathbb{H})\}$. У терминима унитарно инваријантних норми, $p-$модификација било које $\|\cdot\|_\Phi$ норме је дата следећом формулом

$$\|A\|_{\Phi^{(p)}} = \||A|^p\|_\Phi^{\frac{1}{p}}, \quad \text{за све } A \text{ за које је } |A|^p\in\mathcal{C}_\Phi(\mathbb{H}).$$

Дакле, имамо да је

$$\|A\|_{\Phi^{(p)}} = \Phi^{(p)}(s(A)) = \sqrt[p]{\Phi((s_i^p(A)))} = \sqrt[p]{\Phi((s_i(|A|^p)))} = \sqrt[p]{\||A|^p\|_\Phi} = \||A|^p\|_\Phi^{\frac{1}{p}}$$

односно

$$\Phi^{(p)}(s_i(A)) < \infty \quad \iff \quad \Phi(s_i(|A|^p)) < \infty \quad \iff \quad \||A|^p\|_\Phi < \infty.$$

Да бисмо доказали да је и $\Phi^{(p)}$ с.н функција, према леми 2.5 довољно је доказати да је $\|\cdot\|_{\Phi^{(p)}}$ унитарно инваријантна норма. Доказаћемо неједнакост троугла, остале особине се директно доказују.

$$\begin{aligned}
\|A+B\|_{\Phi^{(p)}}^p =&\Phi((s_i^p(A+B))) \\
\leq&\Phi(((s_i(A)+s_i(B))^p)) && (2.26)\\
\leq&\Phi((1-\alpha)^{1-p}s_i^p(A)+\alpha^{1-p}s_i^p(B)) && (2.27)\\
\leq&(1-\alpha)^{1-p}\Phi(s_i^p(A))+\alpha^{1-p}\Phi(s_i^p(B)) && (2.28)\\
=&(\Phi^{(p)}(s(A))+\Phi^{(p)}(s(B)))^p && (2.29)\\
=&(\|A\|_{\Phi^{(p)}}+\|B\|_{\Phi^{(p)}})^p.
\end{aligned}$$

Неједнакост (2.26) следи из теореме 2.3. Наиме, према леми 1.3 важи $\sum_{k=1}^n s_k(A+B) \leq \sum_{k=1}^n s_k(A)+\sum_{k=1}^n s_k(B)$, за $n=1,2,\ldots$. Како је функција $t \to t^p$ конвексна на $[0,+\infty)$ за $p \geq 1$, према теореми 1.4 имамо да је

$$s_n^p(A+B) \prec_w (s_n(A)+s_n(B))^p.$$

На основу претходне релације, према теореми 2.3 добијамо да важи неједнакост (2.26). Неједнакост (2.27) следи из конвексности функције $t \to t^p$ на $[0,\infty)$ за $p \geq 1$. Како је функција Φ с.н. функција за њу важи неједнакост троугла, одакле следи неједнакост (2.28). Једнакост (2.29) добијамо ако за α узмемо $\alpha = \frac{\|B\|_{\Phi^{(p)}}}{\|A\|_{\Phi^{(p)}}+\|B\|_{\Phi^{(p)}}}$. □

За с.н. функције Φ, Ψ, Ω користићемо ознаку $\Omega \preceq \Phi\Psi$, кад год оне задовољавају $\Omega(s_n t_n) \preceq \Phi(s_n)\Psi(t_n)$, за све комплексне низове $(s_n)_{n=1}^\infty, (t_n)_{n=1}^\infty$. За операторе то ће индуковати уопштену Hölder-ову неједнакост

$$\|AB\|_\Omega \leq \|A\|_\Phi \|B\|_\Psi \qquad \text{за све } A \in \mathcal{C}_\Phi(\mathbb{H}) \text{ и } B \in \mathcal{C}_\Psi(\mathbb{H}),$$

одакле такође следи да важи $AB \in \mathcal{C}_\Omega(\mathbb{H})$. Наиме, због изотоности имамо да је

$$\begin{aligned}
&\|AB\|_\Omega = \Omega\left(s_i(AB)_{i=1}^\infty)\right) \leq \Omega\left(s_i(A)_{i=1}^\infty s_i(B)_{i=1}^\infty)\right) \leq \\
&\Phi(s_i(A)_{i=1}^\infty)\Phi(s_i(B)_{i=1}^\infty) = \|A\|_\Phi \|B\|_\Psi < \infty.
\end{aligned}$$

Теорема 2.5. *За сваку с.н. функцију Φ и свако $p,q>0$ је испуњено*

$$\Phi^{(\frac{pq}{p+q})} \preceq \Phi^{(p)}\Phi^{(q)},$$

па у специјалном случају имамо да важи следећа Hölder-*ова неједнакост*

$$\|AB\|_{\Phi^{(\frac{pq}{p+q})}} \leq \|A\|_{\Phi^{(p)}} \|B\|_{\Phi^{(q)}} \qquad \textit{за сваки оператор } A \in \mathcal{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathbb{H}) \textit{ и } B \in \mathcal{C}_{\Phi^{(q)}}(\mathbb{H}).$$

Δ Како je $\frac{1}{\frac{p+q}{q}} + \frac{1}{\frac{p+q}{p}} = 1$, применом Young-ове неједнакости на пар $\{\frac{p+q}{q}, \frac{p+q}{p}\}$ за свако $u > 0$, добијамо да je

$$(s_n t_n)^{\frac{pq}{p+q}} = (us_n)^{\frac{pq}{p+q}} (\frac{t_n}{u})^{\frac{pq}{p+q}} \prec_w \frac{qu^p}{p+q} s_n^p + \frac{p}{p+q} \frac{t_n^q}{u^q}.$$

Користећи теорему 2.3 и субадитивност с.н. функције Φ добијамо да важи

$$\begin{aligned}\Phi\left((s_n t_n)^{\frac{pq}{p+q}}\right) \leq &\Phi\left((\frac{qu^p}{p+q} s_n^p + \frac{p}{p+q}\frac{t_n^q}{u^q})\right)\\ \leq &\frac{qu^p}{p+q}\Phi\left(s_n^p\right) + \frac{p}{(p+q)u^q}\Phi\left(t_n^q\right)\\ = &\left(\Phi^{(p)}(s_n)\Phi^{(q)}(t_n)\right)^{\frac{pq}{p+q}},\end{aligned}$$

ако за u одаберемо $u = \sqrt[p+q]{\frac{\Phi(t_n^q)}{\Phi(s_n^p)}}$. $\square$

Литература

[1] М. Арсеновић, М. Достанић, Д. Јоцић, *Теорија мере, функционална анализа и теорија оператора*, Математички факултет, Београд, 1998.

[2] R. Bhatia, *Matrix Analysis*, Springer - Verlag, New York, 1997.

[3] M. S. Birman, M. Z. Solomjak, *Spectral Theory of Self-Adjoint Operators in Hilbert Space*, D.Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1987.

[4] I. C. Gohberg, M. G. Kreǐn, *Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators*, Translation of mathematical monographs, Vol. 18, AMS, 1969.

[5] D. Jocić, *Multipliers of elementary operators and comparison of row and column space Schatten p-norms*, Linear Algebra and its Applications 431, $2062 - 2070$ (2009.)

[6] Д. Ј. Кечкић, *Структура слике и језгра елементарних оператора*, Докторска теза, Математички факултет, Београд, 2002.

[7] С. Симић, *Оцене и асимптотика сопствених и сингуларних вредности компактних оператора*, Магистарска теза, Природно-математички факултет, Крагујевац, 1998.

[8] B. Simon, *Trace Ideals and Their Applications* Cambridge University Press, 1979.

[9] R. A. Horn, C. R. Johnson, *Topics in Matrix Analysis* Cambridge University Press, 1991.