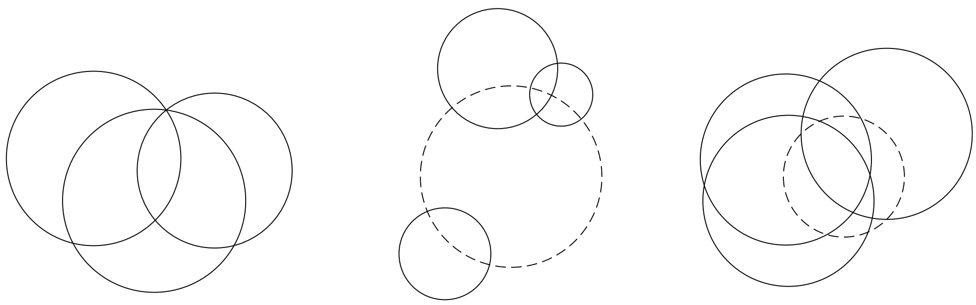
Matematički fakultet
Univerzitet u Beogradu

MASTER RAD

Kružni snopovi i transformacije u euklidskom modelu inverzivnog prostora

Tomović Siniša



Beograd, Januar 2013.

Mentor:

Dr Zoran Lučić

Članovi komisije:

Dr Neda Bokan, Dr Milan Božić, Dr Zoran Lučić

Sadržaj

Uvodna reč

Inverzivna geometrija je oblast matematike koja je zabeležila intenzivan razvoj u poslednja dva veka, i još uvek je aktuelno i aktivno područje istraživanja. Razlozi za to su brojni: od raznovrsnosti drugih matematičkih oblasti sa kojima se prožima i dopunjuje, preko istaknutih primena u naučne svrhe, do svojevrsne estetske dimenzije - bilo u smislu elegancije i veće jednostavnosti pri izvođenju nekih matematičkih dokaza, ili konkretnih umetničkih ostvarenja koja se njome služe. Ona se u inverzivnoj ravni, prema Kleinovom *Erlangenskom programu*[1], može definisati kao geometrija koja se bavi svojstvima figura invarijantnim pri kružnim transformacijama. Upravo će te transformacije zauzimati centralno mesto u ovom radu, a posebno njihovo dejstvo u izdvojenim skupovima krugova - snopovima, koji imaju suštinsku ulogu u konformnim modelima neeuklidskih geometrija.

Najveći deo literature na koju je autor naišao, a koja se sistematski i ekstenzivno bavi ovim transformacijama je podrazumevala analitički, i naročito pristup iz ugla kompleksne analize. U ovom radu se pruža jedan drugačiji, najpre u osnovi sintetički, euklidski pristup u ravni, a potom i njegovo uopštenje na trodimenzioni prostor, i naposletku analitički u n-dimenzionom prostoru. Stoga su neke od poznatih tema i stavova koji su u tekstovima bibliografije predočeni i dokazivani u kompleksnoj ravni, predstavljeni pomenutim sintetičkim putem. Takođe, radi kompaktnijeg izlaganja materije i pedagoškog momenta, nekoliko originalnih pojmova su uvedeni na samom početku (radikalna tačka, radikalni krug u proširenom značenju, inverzija u snopu), kao i radikalna sfera i snopovi sfera kasnije. "Snop krugova" i "medijacikl" su termini u prevodu autora (bundle of circles, mid-circle, eng.) jer na odgovarajuće nije naišao u domaćoj literaturi. Ravanske konstrukcije su rađene u programu WinGCLC (v. 2009).

U prvoj glavi se polazeći od potencije tačke zasniva niz drugih potrebnih osnovnih pojmova: radikalna tačka, osa, centar, krug, pramenovi i snopovi krugova i inverzija u snopu. U drugoj glavi je dato klasično izlaganje inverzije u odnosu na krug, ispitivanje njenih invarijanti, primene u rešavanju odabranih problema i uvođenje euklidskog modela inverzivne ravni. Kružne transformacije i njihova osnovna svojstva, zatim klasifikacija i dejstvo uz grafički prikaz, a potom konstrukcija njihove slike pomoću karakterističnog paralelograma i ponašanje u krugovima snopa – tema su treće glave. U četvrtoj glavi se kao analogon niza odgovarajućih pojmova u ravni, uvode u trodimenzionom prostoru: potencija tačke u odnosu na sferu, radikalna ravan, centar, sfera, pramenovi i snopovi sfera, i inverzija u snopu sfera. Sferna inverzija kao produženje kružne inverzije na sferu, te sferni model inverzivne ravni konstruisan pomoću stereografske projekcije dati su u petoj glavi. U šestoj glavi se kružni snopovi i transformacije razmatraju kao osnovni činioci konformnih modela euklidske i neeuklidskih geometrija. Analitička generalizacija sferne inverzije i njenih svojstava u n-dimenzionom euklidskom prostoru obrađuje se u sedmoj glavi. U osmoj su ponuđeni elementi aksiomatskog pristupa inverzivnoj geometriji. Najzad, deveta glava u istorijskom svetlu zaokružuje inverzivnu geometriju koja je prikazana u prethodnom delu rada.

[1] *Christian Felix Klein: Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, Erlangen, 1872.

1 Kružni snopovi

U ovoj glavi sva razmatranja će biti u domenu euklidske planimetrije. Njih ćemo potom u narednim glavama preneti i proširiti na tzv. inverzivnu ravan i prostor. Prvi pojam koji uvodimo i koji predstavlja osnovni gradivni element daljeg izlaganja biće potencija tačke u odnosu na krug. Ovaj specifičan, metrički odnos tačke i kruga posluziće nam da definišemo i ispitamo određene familije krugova i neka tim familijama pridružena preslikavanja, a koja su predmet ovog rada.

1.1 Potencija tačke u odnosu na krug

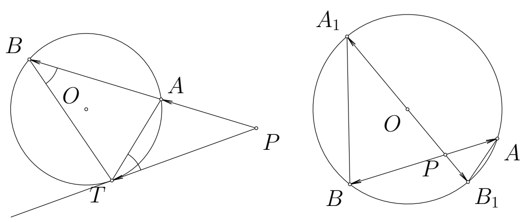
Stav 1.1 *Neka je tačka P u ravni kruga $k(O,r)$. Proizvod rastojanja tačke P od bilo koje dve tačke na krugu k sa kojima je kolinearna je konstantan broj. Ako su pritom rastojanja usmerena, taj broj iznosi $PO^2 - r^2$, i njega zovemo potencija tačke P u odnosu na krug k, i označavamo sa $p(P,k)$.*

Dokaz Neka su A i B tačke kruga k kolinearne sa P. Ispitaćemo tri slučaja:

1) Ako je P spoljašnja tačka kruga, onda nije $A - P - B$[2], pa uzmimo da je npr. $P - A - B$. Tada su trouglovi PAT i PTB slični (imaju zajednički ugao i $\angle PTA \cong \angle PBT$), pa je $PA : PT = PT : PB$ tj. $PA \cdot PB = PT^2 = PO^2 - r^2$. Kako nije $A - P - B$, sledi $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} > 0$, pa je $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = PT^2 = PO^2 - r^2$.

2) Ako P pripada krugu k (tj. poklapa se sa A ili B), tada je $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0 = PO^2 - r^2$.

3) Ukoliko je P unutar kruga, tada je $A - P - B$. Neka su A_1 i B_1 presečne tačke prave OP sa krugom k (i neka je $A_1 - P - O$). Zbog podudarnosti odgovarajućih periferijskih uglova, trouglovi APB_1 i A_1PB su slični, pa je $AP : A_1P = PB_1 : PB$, tj: $PA \cdot PB = PA_1 \cdot PB_1 = (r - PO) \cdot (r + PO) = r^2 - PO^2$. Kako je $A - P - B$, tada je $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = PO^2 - r^2$. □



Slika 1:

[2] Sa $A - B - C$ označavamo relaciju na pravoj da je tačka B između tačaka A i C

Primetimo da je tačka van/na/unutar kruga ako i samo ako je njena potencija u odnosu na taj krug veća/jednaka/manja od nule. Ako je tačka P van kruga k, i T dodirna tačka tangente na k kroz P, tada je $p(P,k) = PT^2$. Ako je tačka P unutar kruga, i T krajnja tačka tetive kroz P upravne na pravu OP, tada je $p(P,k) = -PT^2$.

1.2 Radikalna osa, centar, krug. Pramenovi i snopovi krugova. Inverzija u snopu

U ovom odeljku odredićemo i bavićemo se posebnim skupom tačaka u ravni - koje imaju jednake potencije u odnosu na više datih krugova te ravni. Navedimo najpre neke pojmove koji će se koristiti:

Ugao između dva kruga ravni u njihovoj presečnoj tački je ugao između njihovih tangenata u toj tački. Za dva kruga se kaže da su *ortogonalni* ako zaklapaju prav ugao u svakoj zajedničkoj tački. Za pravu određenu centrima dva nekoncentrična kruga kažemo da je njihova *osa*. Za četiri ili više tačaka kažemo da su *konciklične* ako pripadaju istom krugu. Dve tačke kruga su *suprotne* na njemu ako su one krajnje tačke nekog njegovog prečnika. Ukoliko su različiti, za krug k kažemo da *polovi krug* l (odnosno da je l *ekvator* od k), ako k sadrži dve suprotne tačke na l.

Lema 1.2 *Neka su $k(O_k, r_k)$ i $l(O_l, r_l)$ dva kruga. Tada je k ortogonalan na l $\iff$ $r_k^2 = p(O_k, l)$, a k je ekvator od l $\iff$ $r_k^2 = -p(O_k, l)$.*

Dokaz Neka se k i l seku u A i A'. Za ortogonalne krugove k i l tvrđenje direktno sledi iz toga što je trougao $\triangle O_kO_lA$ pravougli i definicije potencije tačke.

$$
\begin{aligned}
\text{Krug } k \text{ je ekvator od } l \quad &\iff \quad \text{Tačke } A \text{ i } A' \text{ su suprotne na } k \\
&\iff \quad \triangle O_lO_kA \cong \triangle O_lO_kA' \\
&\iff \quad \angle O_lO_kA \cong \angle O_lO_kA' = \pi/2 \\
&\iff \quad \angle O_lO_kA \cong \angle O_lO_kA' = \pi/2 \\
&\iff \quad O_lA^2 - O_kA^2 = O_lO_k^2 \text{ (tj. } r_l^2 - r_k^2 = O_lO_k^2) \\
&\qquad\quad \text{(prema (obrnutoj) Pitagorinoj teoremi)} \\
&\iff \quad r_k^2 = -p(O_k, l)
\end{aligned}
$$

□

Za svaku tačku koja ima jednake potencije u odnosu na dva ili više zadatih krugova kažemo da je *radikalna tačka* tih krugova. Primetimo da takva tačka mora biti istovremeno na, van ili unutar njih.

Stav 1.3 *Tačka $\bar{O}$ je radikalna krugovima k i l ako i samo ako je ona njihova zajednička tačka ili centar zajedničkog ortogonalnog kruga (kada je van njih) ili centar zajedničkog ekvatora (kada je unutar njih).*

Dokaz Neka je $\bar{O}$ proizvoljna tačka. Tada koristeći prethodnu lemu dobijamo:

$$p(\bar{O},k) = p(\bar{O},l) = \begin{cases} 0 \iff \bar{O} \in k,l \\ \bar{r}^2 \iff \bar{k}(\bar{O},\bar{r}) \perp k,l \\ -\bar{r}^2 \iff \bar{k}(\bar{O},\bar{r}) \text{ ekvator od } k,l. \end{cases}$$

□

Krug $\bar{k}(\bar{O},\sqrt{|p|})$, gde je $p = p(\bar{O},k) = p(\bar{O},l)$, koji može imati tri tipa, tj. koji predstavlja zajedničku tačku (degenerisan slučaj), ortogonalni krug ili ekvator krugova k i l, zovemo *radikalnim krugom* tih krugova.

Dakle, za date krugove, centar svakog njihovog radikalnog kruga je njihova radikalna tačka, i ona u potpunosti određuje taj radikalni krug. Pronađimo sada skup svih radikalnih tačaka dva kruga.

Stav 1.4 *Na osi dva nekoncentrična kruga jedinstveno je određena njihova radikalna tačka. Prava kroz tu tačku upravna na osu je skup svih radikalnih tačaka tih krugova, i ona se naziva radikalna osa tih krugova.*

Dokaz Neka su $k(O,r)$, $k'(O',r')$, $r \geq r'$ ta dva nekoncentrična kruga i neka je $S = \{P|p(P,k) = p(P,k')\}$ skup njihovih radikalnih tačaka, a q njihova osa. Pronaći ćemo presek skupa S sa pravom q - pokazaćemo da je to jedinstveno određena, radikalna tačka Q, i konstruisaćemo je. Zatim ćemo pokazati da ona i sve ostale tačke skupa S predstavljaju pravu koja je u Q upravna na q.

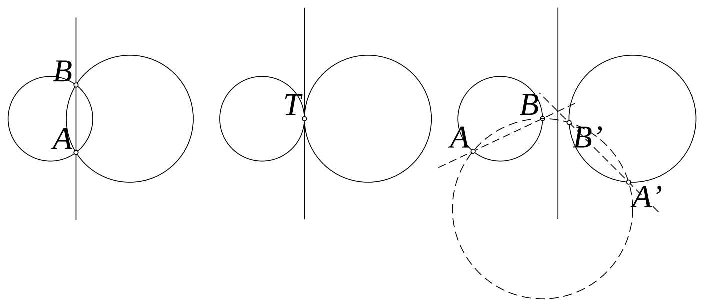
Neka je D tačka te ravni takva da je $DO' \perp OO'$ i $DO'^2 = r'^2 - r^2$. Pokažimo da je pomenuta tačka Q zapravo presečna tačka prave q i medijatrise duži OD. Naime

$$\begin{aligned} Q \in q \cap S &\iff Q \in q \ \wedge \ OQ^2 - r^2 = O'Q^2 - r'^2 \\ &\iff Q \in q \ \wedge \ OQ^2 - O'Q^2 = r^2 - r'^2 = DO'^2 = DQ^2 - QO'^2 \\ &\iff Q \in q \ \wedge \ DQ^2 = OQ^2 \\ &\iff Q \in q \ \wedge \ \text{Q pripada medijatrisi duži } OD \end{aligned}$$

Ako je P proizvoljna tačka ravni i $\hat{P}$ podnožje upravne na p kroz P, tada je

$$\begin{aligned} P \in S &\iff OP^2 - O'P^2 = r^2 - r'^2 \\ &\iff \text{ prema (obrnutoj) Pitagorinoj teoremi } O\hat{P}^2 - O'\hat{P}^2 = r^2 - r'^2 \\ &\iff p(\hat{P},k) = p(\hat{P},k') \\ &\iff \hat{P} = Q. \end{aligned}$$

Dakle, tačka P pripada skupu S ako i samo ako je Q podnožje normale kroz P na pravoj q tj. ako i samo ako P pripada pravoj upravnoj na q u Q. Primetimo za kraj i zašto uslov nekoncentričnosti u iskazu stava: ako bi bilo $O = O'$, jednakost potencija tačke u odnosu na oba kruga povlači $r = r'$, tj. da se krugovi poklapaju. □



Slika 2: Konstrukcija radikalne ose krugova

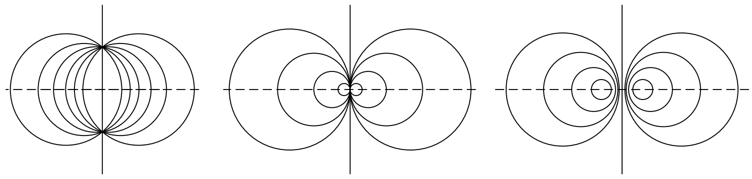
Odredimo radikalnu osu neka dva kruga u zavisnosti od toga da li se oni seku, dodiruju ili su disjunktni:

Ako se dva kruga seku, presečne tačke su im radikalne, pa je njima određena radikalna osa. Kada se dva kruga dodiruju, njihova radikalna osa je zajednička tangenta u tački dodira (jer dodirna tačka im je radikalna, a radikalna osa je upravna na osu krugova). Najzad, ako su krugovi $k(O,r)$ i $k'(O',r')$ disjunktni, za konstrukciju njihove radikalne ose dovoljno je odrediti jednu njenu tačku (radikalna osa će biti upravna kroz tu tačku na pravu OO'). Ako je l neki krug koji seče k u tačkama A,B i seče k' u tačkama A',B', presek pravih AB i $A'B'$ je tačka koja pripada radikalnoj osi (slika 2, desno).

Skup svih krugova ravni od kojih svaka dva imaju za radikalnu osu istu pravu s, naziva se *pramen krugova*, a prava s *radikalna osa* tog pramena krugova. Za krugove nekog pramena kažemo i da su *koaksijalni*.

Neka su k i l dva proizvoljna kruga nekog pramena $\mathcal{P}$ čija je radikalna osa p. Tada je p upravna na ose svih parova krugova tog pramena, pa su njihovi centri kolinearni na osi k i l, koju zovemo i *osom tog pramena*. Proizvoljna tačka na radikalnoj osi p je radikalna tačka svakog para krugova pramena, pa ima jednaku potenciju u odnosu na sve njegove krugove. Zato presek k i l predstavlja ujedno i presek svih parova krugova tog pramena. Prema tome da li je taj presek dva proizvoljna kruga k i l pramena (pa i svaka dva kruga pramena) 2, 1, ili 0 tačaka, za pramen kažemo da je *eliptički, parabolički* ili *hiperbolički*. Ako se k i l seku u A i B, svi krugovi tog (eliptičkog) pramena će sadržati A i B; pritom, ukoliko je m proizvoljan krug kroz A i B, tada on seče svaki krug tog pramena u tim tačkama, tj. njima je s radikalna osa, pa m pripada pramenu. Ako se k i l dodiruju u A, onda će i svaki krug tog (paraboličkog) pramena dodirivati k (i l) u A; u slučaju da je m proizvoljan krug koji dodiruje k u A, tada je A jedina zajednička tačka kruga m i svakog kruga tog pramena, tj. p im je radikalna osa, pa i m pripada tom pramenu. Najzad, ako su k i l disjunktni, onda će i svi krugovi tog (hiperboličkog) pramena biti međusobno disjunktni.

Iz prethodnog zaključujemo da eliptički pramen krugova čine svi krugovi kroz neke dve tačke A i B, i njega tada označavamo sa $el[AB]$, a parabolički pramen krugova čine svi krugovi tangentni na neki krug k u tački A, i njega onda označavamo tada sa $pa[k,A]$. Konstrukciju hiperboličkog pramena ćemo preciznije odrediti pošto uvedemo pojam upravnih pramenova krugova.



Slika 3: Eliptički, parabolički i hiperbolički pramen krugova

Stav 1.5 *Ako su k i l dva kruga pramena kojima je radikalan krug k', onda je k' radikalan svakom paru krugova tog pramena.*

Dokaz Kako je centar kruga k' radikalna tačka krugova k i l, biće i radikalna tačka svaka dva kruga tog pramena, a time i k' njihov radikalni krug.□

U zavisnosti da li je k' zajednička tačka, ortogonalan krug ili ekvator, direktno sledi:

Lema 1.6 *Ako dva kruga sadrže neku tačku P, imaju ortogonalan krug l ili ekvator Γ, tada i svaki krug njihovog pramena redom sadrži P, ortogonalan je na l ili ima ekvator Γ.*

Stav 1.7 *Neka su k i l dva kruga nekog pramena $\mathcal{P}$, i k' i l' neka dva njima radikalna kruga određenih tipova. Tada taj pramen $\mathcal{P}$ čine svi parovi krugova kojima su radikalni k' i l', istih tipova.*

Dokaz Centri krugova k' i l' su radikalne tačke krugova k i l, pa određuju radikalnu osu pramena $\mathcal{P}$, i imaju jednake potencije u odnosu na sve krugove iz $\mathcal{P}$, pa su k' i l' radikalni svakom paru krugova pramena, sa tom odgovarajućom potencijom. Ako su m, n krugovi kojima su radikalni k', l', tada iz $k' = k'(O_{k'}, \sqrt{p(O_{k'}, m)}) = k'(O_{k'}, \sqrt{p(O_{k'}, n)}) = k'(O_{k'}, \sqrt{p(O_{k'}, k)}) = k'(O_{k'}, \sqrt{p(O_{k'}, l)})$, i obzirom da je k' istog tipa u odnosu na m, n, k, l, vidimo da će $p(O_{k'}, m)$, $p(O_{k'}, n)$, $p(O_{k'}, k)$, $p(O_{k'}, l)$ biti istog znaka, pa i međusobno jednake, i zato će $O_{k'}$ biti radikalna tačka krugova m, n, k, l i slično dobijamo za O'_l, tj. svaka dva od njih imaju za radikalnu osu istu pravu $O_{k'}O_{l'}$, pa su i svi oni koaksijalni.□

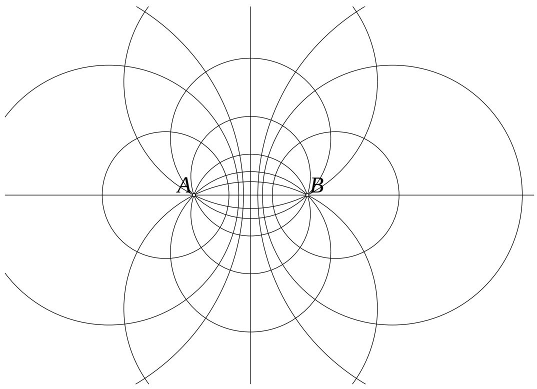
Na taj način je pramen jednoznačno određen sa svoja dva proizvoljna kruga k i l, pa ga možemo označiti i sa kl. Iz prethodnog stava sledi, npr. ako neka dva kruga k i l imaju zajednički ortogonalan krug k', i zajednički ekvator l', tada će pramen kl da čine svi krugovi na koje je ortogonalan k' i pritom im je ekvator l'. Takođe, specijalno, ako su k' i l' krugovi koji su ortogonalni na k i l (a oni uvek postoje, jer su im centri proizvoljne dve spoljašnje i radikalne tačke krugova k i l), važi sledeće:

Stav 1.8 *Ako su k i l dva kruga nekog pramena koji su ortogonalni na krugove k' i l', onda taj pramen čine svi krugovi ortogonalni na k' i l'.*

Zato se pramen krugova nekad definiše i kao skup svih krugova ortogonalnih na neka dva kruga k' i l'. Kako centri krugova k' i l' određuju radikalnu osu krugova k i l na koje su ortogonalni, osa krugova k' i l' je radikalna osa pramena kl. I obrnuto, osa pramena kl je radikalna osa pramena $k'l'$. Radikalne ose pramenova kl i $k'l'$ su zato međusobno upravne, pa za te pramenove kažemo da su međusobno *upravni pramenovi*. Na slici 1.2 je dat njihov prikaz: jednog punom, a drugog isprekidanom linijom. U slučaju da je kl hiperbolički, onda će $k'l'$ biti eliptički, i obrnuto; ako je kl parabolički, takav će biti i $k'l'$. To možemo primetiti kad uočimo presečnu tačku Q radikalnih osa pramenova kl i $k'l'$. Ako je $k = k(O_k, r_k)$, $k' = k(O_{k'}, r_{k'})$, iz ortogonalnosti radikalnih osa pramenova kl i $k'l'$, i ortogonalnosti krugova k i k', biće

$$O_kQ^2 + O_{k'}Q^2 = O_kO_{k'}^2 = r_k^2 + r_{k'}^2,$$

pa je $O_kQ^2 - r_k^2 = -[O_{k'}Q^2 - r_{k'}^2]$, tj. $p(Q,k) = -p(Q,k')$, pa je Q van/na/unutar k ako i samo ako je unutar/na/van k'.



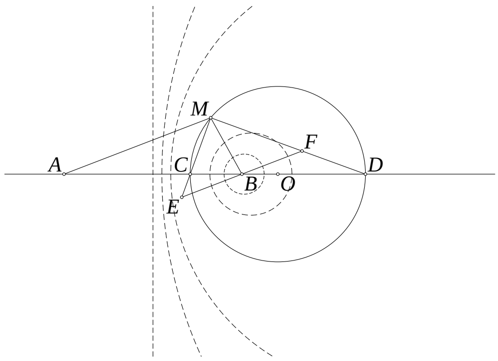
Slika 4: Upravni pramenovi krugova

Kako je svaki pramen određen na njega upravnim pramenom (stav 1.8), sa $h[AB]$ ćemo označiti hiperbolički pramen na koga je upravan pramen $el[AB]$, i za tačke A, B čemo reći da su *granične tačke* pramena $h[AB]$.

Primetimo da je radikalna osa pramena $el[AB]$ prava AB, a pramena $h[AB]$ medijatrisa duži AB (tačke A, B su simetrične u odnosu na osu pramena $el[A, B]$, jer ona sadrži centre njegovih krugova, i radikalna je pramenu $h[AB]$).

Opišimo sada konstrukciju hiperboličkog pramena krugova upravnog na zadati eliptički pramen mn. Presečne tačke A, B krugova m i n biće granične traženom hiperboličkom pramenu. Pokazaćemo da će onda svaki od krugova iz tog pramena $h[AB]$ biti tzv. *Apolonijev krug* u odnosu na tačke A i B, tj. predstavljaće geometrijsko mesto tačaka čiji je odnos rastojanja od te dve tačke neka konstanta. Zaista, ako je M proizvoljna tačka na nekom krugu $k(O, r)$ iz $h[AB]$ koji seče pravu AB u tačkama C i D (slika 5), kako je $OA \cdot OB = r^2$ (jer je to potencija tačke O u odnosu na bilo koji krug l iz $el[AB]$, imajući u vidu da je l ortogonalan na k i da je r dužina tangentnog odsečka iz O na l), važi $(OA - r) \cdot (OB + r) = (r - OB) \cdot (r + OA)$, tj. $AC : CB = AD : BD$. Ukoliko su E i F redom presečne tačke prave kroz B koja je paralelna pravoj AM, sa pravama CM i MD, imamo na osnovu Talesove teoreme $AM : EB = AC :$

$CB = AD : BD = AM : BF$, pa je $EB = BF$, a kako je ugao $\angle EMF$ prav, biće $EB = BF = BX$, pa je $AM : MB = AC : CB = AD : DB$. Iz te jednakosti, tačka C biće presečna simetrale ugla AMB i prave AB[3], a D presečna prave kroz M upravne na MC i prave AB. Dakle, ako imamo zadate granične tačke A, B hiperboličkog pramena, i bar jednu tačku M nekog njegovog kruga, taj krug i konstruišemo nad prečnikom CD.

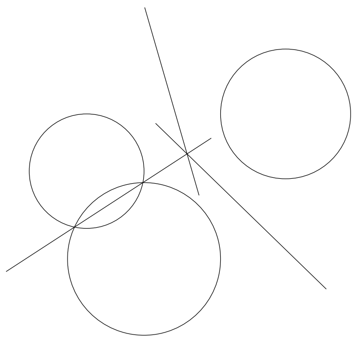


Slika 5: Krug hiperboličkog pramena je Apolonijev krug u odnosu na granične tačke tog pramena

Pogledajmo, s druge strane, konstrukciju eliptičkog pramena upravnog na dati hiperbolički pramen mn. Granične tačke A i B hiperboličkog pramena biće presečne tačke ose krugova m i n, i kruga čiji je centar prozivoljna tačka O na njihovoj radikalnoj osi, a poluprečnik mu je tangentni odsečak iz O na npr. m. Otuda dobijamo i eliptički pramen $el[AB]$ upravan na mn.

Ako su data neka tri kruga - odredimo njihovu radikalnu tačku:

Stav 1.9 *Radikalne ose triju nekoaksijalnih krugova pripadaju pramenu pravih. Ako postoji presečna tačka tih osa, ona je jedina radikalna tačka tih krugova, i naziva se jos i radikalnim centrom tih krugova*[4].



Slika 6: Konstrukcija radikalnog centra

Dokaz Pretpostavimo da tri kruga ne pripadaju istom pramenu i da nikoja dva nisu koncentrična. Tada oni, par po par, određuju tri različite radikalne ose. Ako se bilo koje dve od njih seku u nekoj tački, ta tačka ima jednake potencije u odnosu na sva tri

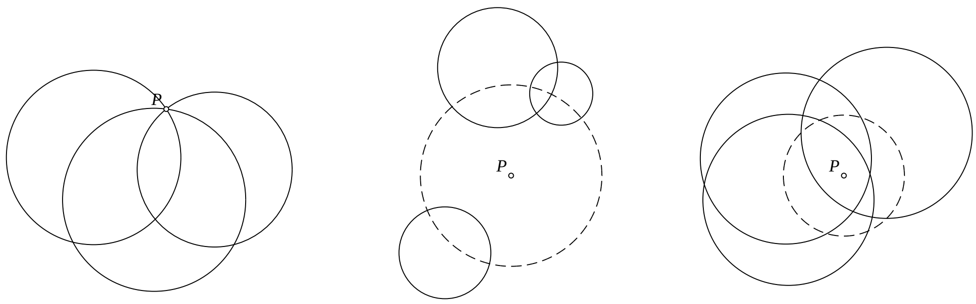
[3] "Simetrala naspramnog ugla ivice trougla deli tu ivicu u razmeri preostale dve odgovarajuće ivice" je reformulacija trećeg stava šeste knjige Euklidovih *Elemenata* [15, 258.str]

[4] Zaključujemo da tri kruga imaju radikalni centar ako i samo ako njihova sredista čine temena trougla. No, ako su radikalne ose paralelne, može se usvojiti da je njihov presek, tj. radikalni centar, specijalna, beskonačno daleka tačka

kruga, pa ona pripada i trećoj osi. Otuda se one sve ili seku u istoj tački, ili su paralelne.□

Iz poznatih svojstava radikalne tačke krugova (stav 4.3), radikalni centar tri nekoaksijalna kruga (imavši u vidu njegovu jedinstvenost) predstavlja centar njihovog jedinog zajedničkog radikalnog kruga, odnosno:

Stav 1.10 *Radikalni centar tri nekoaksijalna kruga je njihova jedina zajednička tačka ili centar jedinog zajedničkog ortogonalnog kruga (kada je van njih) ili centar jedinog zajedničkog ekvatora (kad je unutar njih).*



Slika 7: Radikalni centar P tri nekoaksijalna kruga (koji su ujedno generatrise kružnog snopa)

Skup svih krugova ravni od kojih svaka tri imaju za radikalni krug isti krug α, naziva se *kružni snop.* Neposredno sledi da i svaka tri nekoaksijalna kruga snopa imaju isti radikalni centar (koji ćemo stoga zvati i radikalnim centrom tog snopa, a krug α - radikalnim krugom snopa), odnosno:

Stav 1.11 *Snop krugova je skup svih krugova sa zajedničkom tačkom, ortogonalnim krugom ili ekvatorom. Za njega tada kažemo da je parabolički, hiperbolički ili eliptički snop, redom.*

Vidimo da je potencija centra snopa u odnosu na njegove krugove redom jednaka, veća ili manja od nule. Kako je snop jednoznačno određen svojim radikalnim krugom i tipom, parabolički/hiperbolički/eliptički snop krugova kome je radikalan krug α ćemo označavati redom sa $\mathcal{PS}(\alpha)$, $\mathcal{HS}(\alpha)$, $\mathcal{ES}(\alpha)$. Na osnovu stava 1.10 vidimo da je svaki snop takođe određen sa svoja tri nekoaksijalna kruga k, l, m, pa se stoga označava i sa klm, a za krugove k, l, m tada kažemo da predstavljaju njegovu *generatrisu.*

Stav 1.12 *Ako krugovi k i l pripadaju nekom snopu, onda i pramen kl pripada tom snopu.*

Dokaz Neka su krugovi k i l iz snopa kome je radikalan krug α, i neka je m proizvoljan krug pramena kl, a n, p proizvoljni krugovi tog snopa. Tada centar O tog snopa ima jednake potencije u odnosu na k, l, pa zato i u odnosu na m, ali i u odnosu na n, p, tj. O je radikalan centar krugova m, n, p, k, l, i α im je radikalni krug, pa i m pripada tom snopu.□

Stav 1.13 *Krugovi snopa kroz neku tačku, različitu od njegovog centra, pripadaju eliptičkom pramenu tj. prolaze kroz još jednu tačku.*

Dokaz Neka je tačka O centar snopa, i k krug tog snopa kroz A, tada on seče pravu $p = OA$ jos u nekoj tački A', pa je $p \cap k = \{A, A'\}$. Neka je l proizvoljan krug tog snopa kroz A, onda on seče krug k u još jednoj tački $X \neq A$, $k \cap l = \{A, X\}$. Kako k i l pripadaju istom snopu, njihova radikalna osa - prava XA će sadržati radikalni centar snopa O, pa su X, A, O kolinearne, pa $X \in p$, $X \in k$, i $X \in p \cap k = \{A, A'\}$, $X \neq A$, pa je $X = A'$.$\square$

Tipove snopova možemo razlučiti i po njihovoj esencijalnoj različitosti u smislu incidentnosti: u eliptičkom se svaka dva kruga seku (ali ne svi u istoj tački) i svaki pramen je eliptički, u paraboličkom svi krugovi prolaze kroz istu tačku, pri čemu su pramenovi eliptički ili parabolički, a u hiperboličkom snopu postoje disjunktni krugovi, dok pramenovi mogu biti bilo kog tipa.

Uočimo jednu osobinu snopa (koja može poslužiti i kao njegova alternativna definicija):

Stav 1.14 *Snop klm je najmanji skup krugova koji sadrži nekoaksijalne k, l, m i sa svaka dva od svojih krugova, sadrži i ceo pramen koji oni daju. Odnosno, $klm = \bigcap\{S | k, l, m \in S \wedge (u, v \in S \Rightarrow uv \subseteq S)\}$.*

Dokaz Neka je α radikalan krug snopa klm. Označimo sa $A = \bigcap\{S | k, l, m \in S \wedge (u, v \in S \Rightarrow uv \subseteq S)\}$. Pokažimo da je $A = klm$. Vidimo da $k, l, m \in klm$; ako $u, v \in klm$, onda iz stava 1.12 imamo $uv \in klm$, pa je $A \subseteq klm$. Pokažimo i da je $klm \subseteq A$. Neka je $n \in klm$ proizvoljan, tako da $Q \in n, Q \notin k, l, m$. Tada postoje krugovi k_1 i k_2 redom pramenova kl i lm kroz tačku Q. Kako $n, k_1, k_2 \in klm$, i prolaze kroz Q, na osnovu stava 1.13 prolaze kroz još jednu tačku, tj. pripadaju istom pramenu, odnosno $n \in k_1 k_2 \in A$ (k_1 i k_2 su dobijeni formiranjem pramenova počev od krugova k, l, m). $\square$

2 Inverzija u odnosu na krug

2.1 Definicija i osnovna svojstva

Za dve tačke kažemo da su međusobno *inverzne u odnosu na snop* ako su presečne tačke krugova nekog eliptičkog pramena tog snopa. Na osnovu stava 1.13 vidimo da svaka tačka osim centra snopa ima jedinstvenu njoj inverznu tačku. Otuda se može definisati preslikavanje koje svakoj tački dodeljuje njoj inverznu tačku u odnosu na neki snop (osim njegovom centru), i to preslikavanje onda zovemo *inverzijom u odnosu na taj snop*.[5]

Neka je $\mathcal{S}$ snop kome je radikalan krug $\alpha = \alpha(O, r)$, i neka su P i P' inverzne u odnosu na $\mathcal{S}$, i pritom je k krug iz $\mathcal{S}$ koji sadrži P i P'. Ako je $\mathcal{S}$ ne-parabolički, tačke P i P' su tada kolinearne sa njegovim centrom O (jer je PP' radikalna osa eliptičkog pramena snopa, pa sadrži njegov centar). U slučaju da je $\mathcal{S}$ hiperbolički, biće $p(O,k) = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP'} = r^2$ (jer je $k \perp l$). Ako je $\mathcal{S}$ eliptički, biće $p(O,k) = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP'} = -r^2$ (jer k seče l u suprotnim tačkama Q i Q', pa je $p(O,k) = \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OQ'} = -r^2$). Najzad, ako je $\mathcal{S}$ parabolički, $p(O,k) = 0$.

Uočena svojstva inverznih tačaka će nam poslužiti za njihove ekvivalentne definicije u odgovarajućim tipovima snopova:

Neka je $\mathcal{S}(\alpha(O,r))$ snop krugova. Preslikavanje I_α koje tačku $P \neq O$ slika u tačku P' na pravoj OP tako da je $OP \cdot OP' = r^2$ zovemo inverzijom u tom snopu, pri čemu važi:

1) ako je snop hiperbolički, tačke P i P' su sa iste strane tačke O (i tada za tu inverziju kažemo i da je *hiperbolička*, odnosno da je *inverzija u odnosu na krug* k)

2) ako je snop eliptički, tačke P i P' su sa raznih strana tačke O (i tada za tu inverziju kažemo i da je *eliptička*)

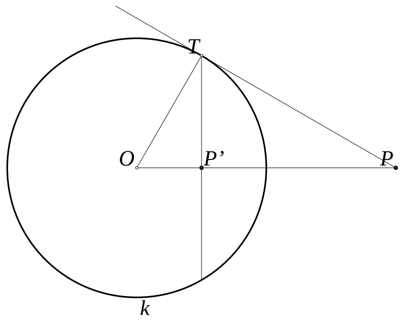
3) ako je snop parabolički, tačka P' je zajednička tačka svih krugova (tj. $r = 0$, a inverzija je *parabolicka*)

Vidimo da je eliptička inverzija kompozicija hiperboličke inverzije i centralne simetrije u odnosu na centar O kruga α. U narednom izlaganju ćemo zato najpre i najviše posvetiti pažnju osobinama hiperboličke (tj. inverzije u odnosu na krug), a potom će iz njih slediti i odgovarajuća svojstva eliptičke inverzije (naziva se još i antiinverzija). Parabolička je trivijalna kao preslikavanje svih tačaka u jednu. Stoga kada se bude govorilo o pojmu inverzije, podrazumevaće se da je hiperbolička, osim ukoliko se ne naglasi drugačije.

Posmatrajmo u ravni ravni $\mathbb{E}$ inverziju $I_k : P \mapsto P'$ u odnosu na krug $k(O, r)$. Ona, dakle, slika tačku P u tačku P' na polupravoj (OP tako da je $OP \cdot OP' = r^2$. Krug k, njegov centar O i poluprečnik r zovemo redom: *krug*, *centar* i *poluprečnik inverzije*. Vidimo da je inverzija bijekcija ravni $\mathbb{E}$ bez tačke O u sebe, $I_k : \mathbb{E}\backslash\{O\} \to \mathbb{E}\backslash\{O\}$ (otuda se naziva i kvazi-transformacijom euklidske ravni). Ako skup $\mathbb{E}^O = \mathbb{E}\backslash\{O\}$ nazovemo *probušenom ravni* $\mathbb{E}$ u tački O, onda

[5]za međusobno inverzne tačke se kaže i da su simetrične - motivaciju za taj naziv videćemo u odeljku "Odnos inverzije i osne refleksije"

je inverzija bijekcija probušene ravni. Uočimo da ako je tačka P inverzna tački P', tada je i P' inverzna P, pa je inverzija i involutivna, tj. $I_k^2 = Id$. Za datu tačku P opišimo konstrukciju njoj inverzne tačke P' u odnosu na krug $k(O,r)$:



Slika 8: Konstrukcija para inverzniih tačaka

Ako je P u spoljašnjosti kruga, neka je T dodirna tačka tangente kroz P na krug, i P' podnožje normale iz T na pravoj OP. Tačka P' je inverzna tački P jer su trouglovi OPT i OTP' slični, pa važi $OP : OT = OT : OP'$, odnosno $OP \cdot OP' = OT^2 = r^2$.

Ako je P u unutrašnjošti kruga, i tačka T presečna upravne na OP u tački P sa krugom k, P' dobijamo kao presek tangente kroz T i prave OP (jer su iznova OPT i OTP' slični trouglovi).

Polara tačke P je prava upravna na pravoj OP u tački P'.

Na osnovu definicije (i konstrukcije) inverzije zaključujemo:

Stav 2.1 *Inverzija slika unutrašnjost kruga inverzije bez centra O u njegovu spoljašnjost, i obrnuto, njegovu spoljašnjost u unutrašnjost bez centra O. Tačka je invarijantna pri inverziji ako i samo ako pripada krugu inverzije.*

Primetimo za kraj ovog uvoda u inverzivno preslikavanje, i jedno svojstvo slaganja inverzija u koncentričnim krugovima.

Stav 2.2 *Kompozicija dve inverzije sa zajedničkim centrom je homotetija čiji je koeficijent kvadrat odnosa njihovih poluprečnika.*

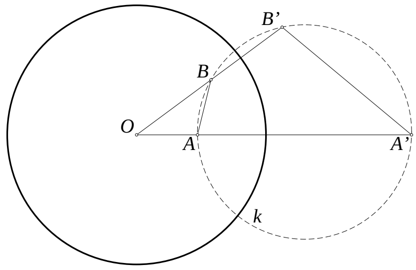
Dokaz Ukoliko se prvom inverzijom u krugu $k(O,r)$ tačka P slika u tačku P', a drugom inverzijom u krugu $k'(O,r')$ P' slika u tačku P'', iz $OP \cdot OP' = r^2$ i $OP' \cdot OP'' = r'^2$, dobijamo $OP''/OP = (r'/r)^2$, i pritom su O, P, P' kolinearne. □

2.2 Slike figura pri inverziji

U odeljku koji sledi pronaći ćemo i proučiti redom slike: parova i trojki tačaka pri inverziji, a zatim pravih i krugova u ravni.

Stav 2.3 *Neka inverzija sa centrom O slika dve tačke A i B u tačke A' i B'. Tada su trouglovi AOB i $B'OA'$ slični, a rastojanje između tačaka A' i B' je* *dato sa:*

$$A'B' = \left(\frac{r^2}{OA \cdot OB}\right) AB$$



Slika 9: Slika para tačaka pri inverziji

Dokaz Iz definicije inverzije imamo: $OA \cdot OA' = r^2 = OB \cdot OB'$, pa je $OA : OB' = OB : OA'$, a kako je i $\angle AOB = \angle A'OB'$, trouglovi AOB i $B'OA'$ su slični. Onda se odnos između rastojanja tačaka, i rastojanja njihovih slika pri inverziji dobija iz: $A'B' : AB = OB' : OA = r^2 : (OA \cdot OB)$, pa sledi formula iz tvrđenja. $\square$

Ako je Φ neka figura ravni $\mathbb{E}$ i O tačka te ravni, označimo sa $\Phi^O = \Phi \backslash \{O\}$.

Stav 2.4 *Neka je $I_k : X \mapsto X'$ inverzija u odnosu na krug $k(O, r)$ ravni $\mathbb{E}$. Ako je p prava, a l krug te ravni, tada:*

(i) ako $O \in p$, tada je $(p^O)' = p^O$

(ii) ako $O \notin p$, p' je krug koji sadrži tačku O, bez te tačke[6]

(iii) ako $O \in l$, $(l^O)'$ je prava koja ne sadrži tačku O

(iv) ako $O \notin l$, l' je krug koji ne sadrži tačku O

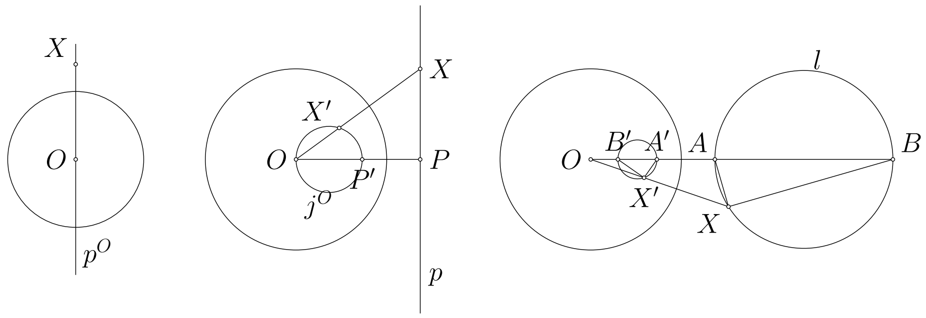
Dokaz Pri ovom dokazu koristićemo da ako za skupove A i B važi $A' \subseteq B$, da je onda $A \subseteq B'$, obzirom na involutivnost i bijektivnost inverzije.

(i) Neka je X tačka prave p različita od O (slika 10, levo), tada X' pripada polupravoj $(OX$, dakle pravoj p, pa je $(p^O)' \subseteq p^O$.

(ii) Neka je tačka P podnožje upravne iz tačke O na pravoj p (slika 10, sredina). Tada je $P \neq O$ jer $O \notin p$, pa P' postoji . Neka je X proizvoljna tačka prave p različita od P. Na osnovu stava 2.3 trouglovi $\triangle OPX$ i $\triangle OX'P'$ su slični, pa je $\angle OX'P = \angle OPX = \pi/2$, i zato X' pripada krugu j nad prečnikom OP'. Kako je $X' \neq O$, sledi $X' \in j^O$, pa je $p' \subseteq j^O$. Obrnutim koracima za $X \in j^O$ dobijamo da $X' \in p$, pa $(j^O)' \subseteq p$, odnosno $j^O \subseteq p'$.

(iii) Ovaj deo sledi iz (ii) (ako zamenimo j sa l), kako je $l^O = p'$ (p prava odgovarajuća krugu l), biće $(l^O)' = p$ (slika 10, sredina).

[6]tj. $p' = j^O$ za neki krug j kroz O



Slika 10: Slike prave i kruga pri inverziji

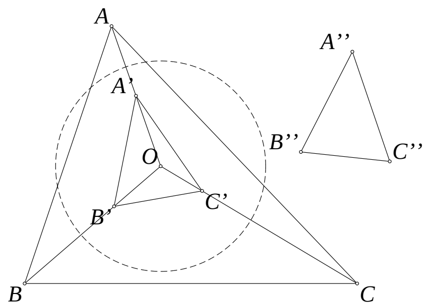
(iv) Neka su A i B presečne tačke prave određene sa O i centrom kruga l, sa krugom l, i neka je npr. $O-A-B$ (slika 10, desno). Izaberimo proizvoljnu tačku X na l različitu od A, B. Tada su slični parovi trouglova $\triangle OAX$, $\triangle OX'A'$ i $\triangle OBX$, $\triangle OX'B'$, pa je i $\angle A'X'B' = \angle A'X'O - \angle B'X'O = \angle OAX - \angle OBX = \pi/2$, pa X' pripada krugu nad prečnikom $A'B'$. I u drugom smeru, dobijamo da se svaka tačka kruga nad $A'B'$ slika na krug l. Analogno se obrađuje slučaj $O - B - A$. □

Kao što se transformacije izometrije i sličnosti euklidske ravni ispituju i dele na direktne i indirektne u zavisnosti od njihovog dejstva na orijentaciju trouglova, možemo se zapitati da li i inverzija ima neki uticaj i kakav na orijentisanost određenih objekata. Kako nas zanima sama orijentacija, možemo npr. umesto trouglova razmatrati krugove koji su oko njih opisani. (Recimo, za krug se uzima da je pozitivno orijentisan ako pri kretanju po njemu unutrašnja oblast ostaje sa leve strane). Ukoliko izdvojimo ne proizvoljan, već dovoljno mali krug koji ne sadrži centar inverzije [6, 258.str], posmatrajući sliku 10, desno, možemo primetiti da tačke A i B opisuju krug k u suprotnim smerovima, dok tačke B i A' opisuju redom krugove k i k' u istom smeru. Dakle, inverzne tačke A i A' odgovaraju suprotnim smerovima, pa se može reći da je inverzija *indirektna transformacija.* Drugo razmatranje bi bilo: inverzija čuva orijentaciju bilo kog kruga ako je njen centar unutar tog kruga, a u suprotnom je menja [20, 46.str].

Ako je figura Φ prava/krug ravni $\mathbb{E}$, skup Φ^O ćemo zvati *pravom/krugom probušene ravni* $\mathbb{E}^O$. Ako Φ sadrži O, kažemo da Φ^O prolazi kroz/sadrži O u $\mathbb{E}^O$. Tada prethodnu teoremu možemo formulisati u probušenoj ravni kao: inverzija slika pravu ili krug u pravu ili krug. Pri tom, prava se slika u pravu ako i samo ako sadrži centar inverzije. Krug se slika u krug ako i samo ako ne sadrži centar inverzije. Prava koja ne sadrži centar inverzije O se slika u krug kroz O, i obrnuto.

Stav 2.5 *Pogodnim krugom inverzije se bilo koje tri različite tačke A, B, C mogu slikati u temena trougla $A'B'C'$ podudarnog datom trouglu A'', B'', C''.*

Dokaz Pretpostavimo da postoji takva inverzija koja tačke A, B, C slika redom



u tačke A', B', C', takve da je $\triangle A'B'C'$ podudaran zadatom $\triangle A''B''C''$ (slučaj kada su A, B, C kolinearne se posebno razmatra). Na osnovu osobina njenog kruga inverzije doći ćemo do dovoljnih podataka za njegovu konstrukciju. Vidimo da su slični trouglovi $\triangle OBC$ i $\triangle OC'B'$, $\triangle OAC$ i $\triangle OC'A'$, $\triangle OAB$ i $\triangle OB'A'$. Obzirom da su O, B, B' i O, C, C' trojke kolineranih tačaka, i posmatrajući uglove u $\triangle B'OC'$ i $\triangle A'B'C'$ imamo da je:

$$\begin{aligned}
\angle BOC &= \angle B'OC' \\
&= \pi - (\angle OB'C' + \angle OC'B) \\
&= \angle A' + \angle A'B'O + \angle A'C'O \\
&= \angle A' + \angle BAO + \angle OAC
\end{aligned}$$

Dalje je $\angle BOC = \angle A + \angle A'$ ako O pripada uglu CAB koji sadrži duž BC, odnosno $\angle BOC = 2\pi - (\angle A + \angle A')$, u suprotnom. Pretpostavimo zato da je O u unutrašnjosti trougla ABC (a analogno se razmatra kada se O nađe u bilo kojoj drugoj oblasti na koju prave određene stranicama trougla ABC razbijaju ravan). Onda je $\angle BOC = \angle A + \angle A'$, i slično $\angle AOC = \angle B + \angle B'$, $\angle AOB = \angle C + \angle C'$. Otuda tačka $O \in GMT(BC, \angle A + \angle A') \cap GMT(AB, \angle C + \angle C')$, gde smo sa $GMT(d, \angle u)$ označili geometrijsko mesto tačaka (krug) iz kojih se duž d vidi pod uglom $\angle u$ (1). Ako je $O'' \in GMT(B''C'', \angle A + \angle A') \cap GMT(A''B'', \angle C + \angle C')$ (O'' unutar trougla $A''B''C''$)(2), tada je (O, A', B', C') podudarna četvorki (O'', A'', B'', C''), pa je $OB' = O''B''$, $OA' = O''A''$, $OC' = O''C''$ (3), pa su određene i tačke A', B', C' redom na pravama OA, OB, OC. Najzad, kako je A' inverzna tački A, tačka X koja je presečna tačka kruga nad prečnikom OA i upravne u tački A' na pravu OA će pripadati krugu inverzije (ako je $O-A-A'$, u suprotnom A i A' samo zamene mesta) (4). Dakle, prateći redom (1),(2),(3),(4) konstruišemo tačke O'', O', A', B', C', X i traženi krug inverzije.

U slučaju da su A, B, C kolinearne, tada centar inverzije $O \in GMT(AB, \angle C') \cap GMT(BC, \angle A')$. Konstruišemo k'' opisan oko $A''B''C''$, a potom $k'(O_1, r_1)$ koji sadrži O, tako da je O_1O upravna na pravu AB; A', B', C' će biti presečne pravih OA, OB, OC sa k'.

□

Inverzna slika trougla je obično "iskrivljena" figura čiji su deo lukovi krugova kroz O (preciznije, stranica trougla se slika u luk kruga ako i samo ako njom određena prava ne sadrži O).

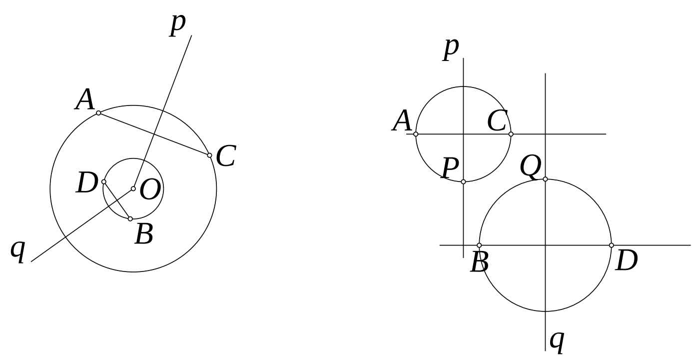
2.3 Invarijante preslikavanja inverzijom

Za preslikavanje kažemo da *čuva* neko svojstvo objekata (ili relaciju objekata), ako ih slika u objekte sa istim svojstvom (tj. objekte u toj relaciji). Za to njihovo svojstvo (relaciju) kažemo da je *invarijantno* pritom preslikavanju.

2.3.1 Razdvojenost parova tačaka i dvorazmera

Dva različita para tačaka A, C i B, D se *razdvajaju* međusobno ako A, B, C, D leže na krugu (ili pravoj) tako da svaki od lukova AC (odnosno segmenata AC) sadrži tačno jednu od preostalih tačaka B i D. Razdvojenost parova tačaka A, C i B, D označavamo sa $AC//BD$.

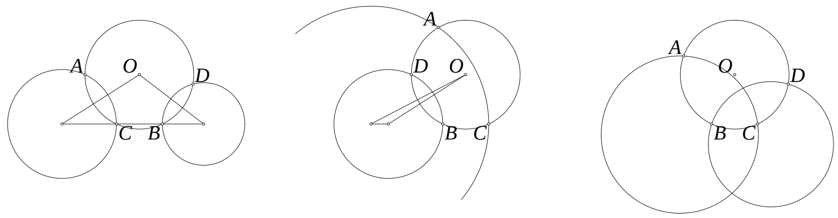
Stav 2.6 *Ako četiri tačke A, B, C, D nisu kolinearne, niti konciklične, onda postoje dva disjunktna kruga, jedan kroz A i C, drugi kroz B i D.*



Slika 11:

Dokaz Primetimo najpre da je medijatrisa p duži AC različita od medijatrise q duži BD. Ako se prave p i q seku, kao na slici 11 levo, njihova zajednička tačka O je centar dva koncentrična kruga, jednog kroz A i C, i drugog kroz B i D. Ako su p i q paralelne (ista slika, desno), paralelne su i prave AC i BD. Ako su P i Q tačke, redom, na p i q, takve da su na središnjoj liniji između paralelnih pravih AC i BD, očigledno je da krugovi APC i BQD nemaju zajedničkih tačaka. $\square$

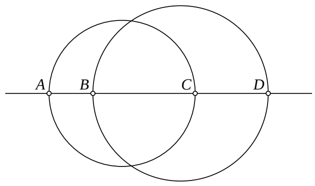
Ako se dva para tačaka A, C i B, D, na pravoj ili krugu, ne razdvajaju međusobno, možemo konstruisati dva disjunktna kruga, jedan kroz A i C, drugi kroz B i D. U slučaju da su kolinearne npr. biće krugovi nad prečnicima AC i BD. Ukoliko su konciklične tako da je $AB//CD$ i $BC < AD$ (slika 12, levo i sredina), možemo uzeti da su centri presečne tačke prave BC sa medijatrisama duži AC i BD, redom. Nešto drugačiji pristup je potreban u lakšem slučaju kada je $ABCD$ četvorougao (slika 12, desno).



Slika 12:

Ako je, sa druge strane, $AC//BD$, bilo koji krug kroz A i C, ali ne kroz B, "razdvaja" B i D, u smislu da je jedna od tih tačaka u unutrašnjosti, a druga u njegovoj spoljašnjosti. Otuda zadati krug kroz A i C seče svaki krug kroz B i D.

Iz kontrapozicije stava 2.6 sledi da ako svaki krug kroz dve tačke ima najmanje dve zajedničke tačke sa svakim krugom kroz druge dve tačke, da te četiri tačke moraju biti kolinearne (slika 13) ili konciklične (slika 12, desno). Pod tim uslovima, kao što smo videli, dva para tačaka se međusobno razdvajaju. Ovi zaključci nam omogućavaju da redefinišemo razdvojenost na jedan simetričan način koji ne podrazumeva da znamo da li su četiri tačke kolinearne ili koncikličke ili nijedno: za dva različita para tačaka, AC i BD, kažemo da se međusobno razdvajaju ako svaki krug kroz A i C seče svaki krug kroz B i D.



Slika 13: Razdvojeni parovi tačaka

Zapravo, postoji i treći način da se karakteriše razdvojenost, bez pominjanja krugova uopšte (na osnovu uopštene Ptolomejeve teoreme – za njenu formulaciju i dokaz pogledati stav 2.18):

Stav 2.7 *Međusobna rastojanja četiri različite tačke A, B, C, D zadovoljavaju*

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD \geq AC \cdot BD,$$

sa znakom jednakosti samo ako $AC//BD$.

Dvorazmera četiri različite tačke A, B, C, D je broj:

$$[A, B; C, D] = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}$$

Jednostavno se pokazuje da dvorazmera zadovoljava: $[A, B; C, D] = [B, A; D, C] = [C, D; A, B]$. Ako podelimo obe strane u nejednakosti stava 2.7 sa $AC \cdot BD$ dobijamo:

Stav 2.8 *Dvorazmere četiri različite tačke A, B, C, D zadovoljavaju*

$$[AD, BC] + [AB, DC] = 1$$

ako i samo ako $AC//BD$.

Ovaj kriterijum razdvajanja izražen pomoću dvorazmere nam omogućava da obrnemo situaciju; umesto da definišemo razdvojenost pomoću krugova, možemo definisati krugove pomoću razdvojenosti (tj. koristeći dvorazmeru): bilo koje tri različite tačke A, B, C određuju jedinstveni krug (ili pravu) ABC, koji se može opisati kao skup koji se sastoji iz te tri tačke i svih tačaka X koje zadovoljavaju:

$$BC//AX \text{ ili } CA//BX \text{ ili } AB//CX.$$

Pokažimo da inverzija čuva dvorazmeru tačaka:

Stav 2.9 *Ako se A, B, C, D slikaju inverzijom u A', B', C', D', onda je*

$$[A'B'; C'D'] = [AB; CD]$$

Dokaz Na osnovu 2.3 stava imamo:

$$[A'B'; C'D'] = \frac{A'C' \cdot B'D'}{A'D' \cdot B'C'} = \frac{\frac{r^2 AC}{OA \cdot OC}}{\frac{r^2 AD}{OA \cdot OD}} \cdot \frac{\frac{r^2 BD}{OB \cdot OD}}{\frac{r^2 BC}{OB \cdot OC}} = \frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC} = [AB; CD].$$

□

Za parove tačaka A, B i C, D koji se međusobno razdvajaju kažemo da su *harmonijski konjugovani* ako je $[AB; CD] = 1$. Lako se pokaže da to važi ako i samo ako inverzija u krugu nad prečnikom A, B slika C u D. Tačke u kojima bisektrise unutrašnjeg i spoljašnjeg ugla kod nekog temena trougla seku naspramnu stranicu su harmonijski konjugovane sa temenima te stranice. Iz očuvanja dvorazmere sledi i očuvanje harmonijske konjugovanosti pri inverziji.

Takođe, inverzija čuva razdvojenost parova tačaka:

Stav 2.10 *Ako se A, B, C, D invertuju u $A', B', C'D'$ i $AC//BD$, tada je $A'C'//B'D'$.*

Dokaz Iz stavova 2.8 i 2.9 nalazimo da $AC//BD$ povlači

$$[A'D'; B'C'] + [A'B'; D'C'] = [AD; BC] + [AB; DC] = 1,$$

pa je $A'C'//B'D'$.□

Ukoliko u razmeru duži želimo da uvrstimo i tačku ∞ u inverzivnoj ravni, onda je možemo dodefinisati sa: $AB/AC = \begin{cases} |AB|/|AC|, A \neq C \\ \infty, A = C \end{cases}$, gde su A, B, C tri tačke koje nisu sve iste, i $|AB|$ dužina duži u dosadašnjem, euklidskom smislu. Dalje dopunjujemo ovu definiciju sa $A\infty/B\infty = 1$, $A\infty/AB = \infty$, $AB/A\infty = 0$, i $\infty\infty/\infty A = 0$, $\infty B/\infty\infty = \infty$, $A\infty/A\infty = 1$. Onda dobijamo da važi: $[\infty B; CD] = BD/BC, [A\infty; CD] = AC/AD, [AB; \infty D] = BD/AD$ i $[AB; C\infty] = AC/BC$.

2.3.2 Ortogonalni krugovi

Stav 2.11 *Neka je data inverzija $I_k : X \mapsto X'$ u odnosu na krug $k(O, r)$, i neka je krug $l(\bar{O}, \bar{r}) \neq k$. Tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna:*

1. *l sadrži neke dve inverzne tačke*
2. *l se slika u sebe*
3. *l je ortogonalan na k*

Dokaz Neka prava $O\bar{O}$ seče krug l u tačkama P i $\bar{P}$. 1. $\Rightarrow$ 2. Pretpostavimo da l sadrži dve inverzne tačke X, X'. Kako je jedna u unutrašnjosti, a druga u spoljašnjosti kruga inverzije k, l seče k u raznim tačkama A i B. Kako su A, B, X' zajedničke krugovima l i l', oni se poklapaju, tj. l se slika u sebe. 2. $\Rightarrow$ 3. Neka je $l = l'$. Kako je P' na pravoj OP i pripada l', onda je $P' = \bar{P}$, pa l sadrži dve inverzne tačke P i P'. 3. $\Rightarrow$ 1. Ako je l ortogonalan na k, i jedna od zajedničkih tačaka im je A, tada su prave OA i $\bar{O}A$ redom tangente krugova l i k, i međusobno su upravne. Otuda je $\angle OAP \cong \angle O\bar{P}A$, a iz toga su i slični trouglovi $\triangle OAP$ i $\triangle O\bar{P}A$, pa je $OP \cdot O\bar{P} = OA^2$, tj. $P = P'$. $\square$

Prethodna teorema govori i o konstrukciji inverznih tačaka pomoću ortogonalnih krugova:

Stav 2.12 *Inverz P' tačke P u odnosu na krug k je druga presečna tačka bilo koja dva kruga kroz P koji su ortogonalni na k.*

Vidimo da su zato granične tačke hiperboličkog pramena inverzne u svakom od njegovih krugova, odnosno da su tačke koje definišu Apolonijev krug inverzne u njemu.

2.3.3 Uglovi između krivih

Ako se dva kruga seku u tačkama T i T', orijentisani uglovi koje oni zahvataju u tim tačkama biće podudarni i suprotni jer se oni slikaju jedan na drugog refleksijom u odnosu na osu tih krugova. Sa tim zapažanjem u vidu dokazujemo sledeći stav:

Stav 2.13 *Inverzija čuva (apsolutne) uglove između dva kruga, i pritom im menja orijentaciju.*

Dokaz Neka je $I_k : X \mapsto X'$ inverzija u odnosu na krug k, i S_1 i S_2 dva kruga. Ako je ugao između S_1 i S_2 nula, tj. ako su tangentni, obzirom da inverzija čuva incidentnost i krugove, oni se inverzijom slikaju u tangentne krugove, tj. krugove koji zaklapaju ugao nula. Pretpostavimo da su S_1 i S_2 krugovi kojima je zajednička tačka P i da su njihove tangente u toj tački redom t_1 i t_2. Neka su k_1 i k_2 jedinstveni krugovi čije su tangente u tački P takođe t_1 i t_2 (pa time i tangentni sa S_1 i S_2) i koji su ortogonalni na krug inverzije k.[7] Kako se oni inverzijom slikaju u sebe, ugao koji oni zahvataju u P biće podudaran i suprotan uglu u inverznoj tački P'. Međutim, ugao između S_1' i S_2' je jednak uglu između k_1 i k_2 u P', jer su k_1 i k_2 njihovi tangentni krugovi toj tački. □

Tangenta na krivu u tački M te krive je granični položaj prave $M\overline{M}$, gde je $\overline{M}$ tačka krive koja teži M. *Orijentisani ugao između dve krive* S_1 *i* S_2 u njihovoj zajedničkoj tački P, u oznaci $\angle(S_1S_2;P)$ je oštar, orijentisani ugao redom između njihovih tangenata t_1 i t_2 u toj tački.

Neka je $\phi : X \mapsto X'$ transformacija inverzivne ravni. Ako za proizvoljne dve krive S_1 i S_2 i njihovu bilo koju presečnu tačku P važi da je $\angle(S_1S_2;P) = \angle(S_1'S_2';P')$ (odnosno $\angle(S_1S_2;P) = -\angle(S_1'S_2';P')$), za tu transformaciju kažemo da je *konformna* (odnosno *antikonformna*). Konformne i antikonformne transformacije se zajednički zovu *izogonalne* transformacije. Dakle, izogonalne transformacije su one koje čuvaju (apsolutni) ugao između krivih.

Stav 2.14 *Inverzija je antikonformno preslikavanje.*

Dokaz Neka je $I_k : X \mapsto X'$ inverzija u odnosu na krug k, S_1 i S_2 dve proizvoljne krive, M njihova zajednička tačka, $\overline{M}$ tačka krive S_1, a O centar inverzije. Tada su trouglovi $\overline{M}MO$ i $O\overline{M}'M'$ slični, pa uglovi $\overline{M}MO$ i $O\overline{M}'M'$ podudarni i suprotni, i kada $\overline{M}$ teži M, ujedno i $\overline{M}'$ teži M', pa je otuda ugao između tangente na S_1 u M i prave OM jednak uglu između tangente na S_1' u M' i prave OM. Analogno se izvodi i za krivu S_2, pa je ugao između krivih S_1 i S_2 u tački M podudaran i suprotan uglu između S_1' i S_2' u tački M'. □

Najzad, znajući da je inverzija izogonalna transformacija, možemo zaključiti da se bilo koja dva nekoncentrična disjunktna kruga k i l mogu njome slikati u koncentrične krugove - za centar inverzije uzimamo bilo koju graničnu tacku hiperboličkog pramena kl (imajući u vidu ortogonalnost k i l na krugove odgovarajućeg upravnog eliptičkog pramena kroz te granične tačke).

2.3.4 Simetrične tačke. Pramenovi i snopovi

Obzirom da se međusobno ortogonalni krugovi slikaju inverzijom u ortogonalne krugove, i kako su simetrične tačke presečne tačke neka dva kruga ortogonalna na krug inverzije, zaključujemo da važi sledeći:

Stav 2.15 (Princip simetrije) *Ako su tačke A i A' simetrične u odnosu na krug k, onda su i njihove slike $F(A)$ i $F(A')$ pri inverziji F takođe simetrične u odnosu na krug $F(k)$.*

Prethodni stav možemo izraziti i koristeći pojam konjugovanosti inverzijom:

Definicija Za dva preslikavanja M i $\tilde{M}$ kažemo da su *konjugovana (ili da se indukuju) preslikavanjem* F ako je: $\tilde{M} = F \circ M \circ F^{-1}$.

[7]Njihova jedinstvenost se lako pokaže u slici inverzijom sa centrom P

Stav 2.16 *Neka je F inverzija, i I_k inverzija u odnosu na krug k. Tada je $F \circ I_k \circ F^{-1}$ inverzija u odnosu na krug $F(k)$, tj. $F \circ I_k \circ F^{-1} = I_{F(k)}$ (I_k, $I_{F(k)}$ su konjugovane inverzijom F).*

Dokaz Neka je za proizvoljnu tačku A, $A' = I_k(A)$, tj. tačke A i A' simetrične u odnosu na krug k. Prema Principu simetrije tačke $F(A)$ i $F(A')$ će biti simetrične u odnosu na $F(k)$, dakle $I_{F(k)}(F(A)) = F(A') = F(I_k(A))$, pa je $F^{-1} \circ I_{F(k)} \circ F = I_k$, odnosno $F \circ I_k \circ F^{-1} = I_{F(k)}$. □

Primedba Neposrednom proverom primećujemo da se u prethodnom tvrđenju može uzeti da je F i bilo koja kompozicija inverzija (dakle, i sličnost), tj. da i tada važi $F \circ I_k \circ F^{-1} = I_{F(k)}$.

Obzirom na čuvanje relacije incidentnosti, krugova i simetričnih tačaka, pramen krugova se slika u pramen krugova istog tipa. Iz toga, kao i stava 1.14 sledi da se čuvaju i snopovi krugova i njihov tip.

2.3.5 Medijacikli krugova i inverzivno rastojanje

Ako se krug α slika inverzijom u krug β, onda za krug te inverzije kažemo da je *medijacikl* krugova α i β.

Stav 2.17 *Bilo koja dva kruga imaju bar jedan medijacikl. Dva diskjunktna ili tangentna kruga imaju tačno jedan medijacikl. Dva kruga koji se seku imaju dva medijacikla, koji su međusobno ortogonalni.*

Dokaz Neka su α i β dva kruga. Ako se oni seku, možemo ih invertovati u dve prave koje se seku. Te prave se slikaju jedna u drugu refleksijom u odnosu na simetrale uglova koje one grade. Invertujući nazad, vidimo da α i β imaju dva međusobno ortogonalna medijacikla koji polove uglove između njih. Ako su α i β tangentni, možemo ih invertovati u paralelne prave. Odatle, ti krugovi imaju jedinstveni medijacikl. Ako su α i β disjunktni, možemo ih invertovati u koncentrične krugove radijusa (npr.) a i b. Ti koncentrični krugovi se slikaju jedan u drugog inverzijom u koncentričnom krugu čiji radijus je geometrijska sredina $\sqrt{ab}$ (iz stava 2.2). Invertujući nazad, dobijamo da disjunktni krugovi α i β imaju (kao i tangentni krugovi) jedinstveni medijacikl. Ako su α i β podudarni, njihov medijacikl se poklapa sa njihovom radikalnom osom. □

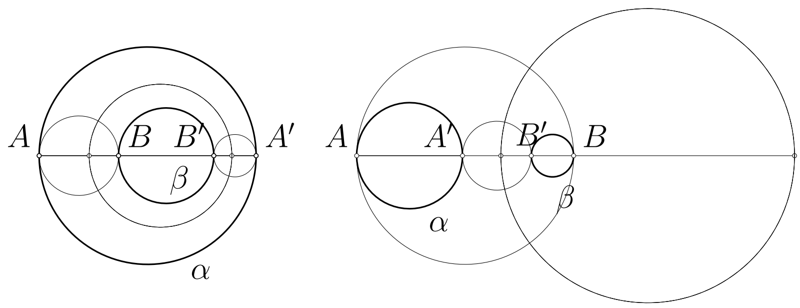
Neka se krug α slika inverzijom $I_k : X \mapsto X'$ u krug α', pri čemu su $O_\alpha, O_k, O_{\alpha'}$ redom centri krugova α, k, α'. Za date α i α' odredimo krug k, tj. konstruišimo njihov medijacikl.

Ako je k medijacikl α i α', i prava $p = O_k O_\alpha$, tada je p ortogonalna na α, pa je i $p' = p$ ortogonalna na α', a zato i $O_{\alpha'}$ pripada p, tj. krugovi k, α, α' imaju zajedničku osu p. Uzmimo oznaku $k(AB)$ za krug nad prečnikom AB.

U slučaju da α i α' nisu tangentni, neka ih p seče u tackama M, N odnosno $\bar{M}, \bar{N}$. Tada je $M' = \bar{M}, N' = \bar{N}$ ili je $M' = \bar{N}, N' = \bar{M}$ (*). Tada su krugovi $k(MM')$ i $k(NN')$ ortogonalni na k (stav 2.11). Obzirom da O_k leži na p, pramen $k(MM')k(NN')$ mora biti hiperbolički, tj. parovi tačaka M, M' i N, N' se međusobno ne razdvajaju, a sam krug k biće nad prečnikom određenim graničnim tačkama tog pramena. Ako se α i α' seku, vidimo da se u oba slučaja (*) M, M' i N, N' međusobno ne razdvajaju, pa postoje dva medijacikla. Ako su α i α' disjunktni, i npr. raspored je $M - N - \bar{M} - \bar{N}$ - jedino u drugom slučaju u (*) se M, M' i N, N' međusobno ne razdvajaju, pa postoji tačno jedan medijacikl.

Pod pretpostavkom da su α i α' tangentni u nekoj tački A, onda k prolazi kroz A i ortogonalan je na $k(MN)$, gde su M, N preostale tačke u kojima p seče redom α i α'. Zato je k krug nad prečnikom određenim sa A i tačkom inverznom A u odnosu na krug $k(MN)$.

(Trivijalno, medijacikl dva međusobno podudarna kruga $\alpha = \alpha'$ je bilo koji krug hiperboličkog snopa $\mathcal{HS}(\alpha)$.)



Slika 14: Konstrukcija medijacikala zadatih disjunktnih krugova

Primetimo da medijacikl dva tangentna ili presečna kruga polovi ugao koji oni zaklapaju (što lako vidimo u slici inverzijom sa centrom u zajedničkoj tački). Postavlja se pitanje da li jedinstveni medijacikl disjunktnih krugova isto tako deli neku vrednost koju oni određuju. Da bismo to otkrili, prirodno se javlja potreba da osmislimo, za neka dva disjunktna kruga, određeno *inverzivno rastojanje* (α,β) koje će se poloviti medijaciklom, takvo da, ako je γ krug hiperboličkog pramena određenog sa α i β, važi:

$$(\alpha, \beta) + (\beta, \gamma) = (\alpha, \gamma)$$

Ako je centar inverzije granična tačka tog hiperboličkog pramena, dobijamo tri koncentrična kruga čiji radijusi a, b, c zadovoljavaju $a < b < c$ ili $a > b > c$, i definišimo:

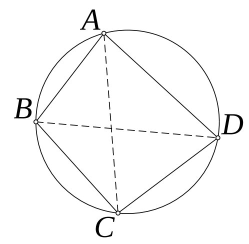
$$(\alpha, \beta) = |ln\frac{a}{b}|$$

Svaki od odnosa poluprečnika a, b, c tih koncentričnih krugova ne zavisi od poluprečnika ove inverzije kojom su oni dobijeni jer se sve inverzije sa istim centrom mogu predstaviti kao kompozicija neke homotetije i fiksirane inverzije sa tim centrom – obzirom da je kompozicija inverzija sa zajedničkim centrom homotetija – pa u slici daju krugove čiji se poluprečnici razlikuju do na proizvod koeficijentom homotetije. Zato prirodni logaritam odnosa poluprečnika koncentričnih krugova u koje se preslikavaju krugovi nekog hiperboličkog pramena, ispunjava uslove da bude rastojanje. To rastojanje naziva se *inverzivnim rastojanjem disjunktnih krugova.*

2.4 Neke primene inverzije

U ovom odeljku biće prikazan izbor klasičnih teorema elementarne geometrije koje se ističu pogodnom primenom inverzije u svom dokazu.

Sledeći stav upotrebio je *Klaudije Ptolomej*[8] da bi sačinio tablice tetiva u prvoj knjizi *Almagest*a, matematičkom i astronomskom spisu o prividnom kretanju zvezda i putanjama planeta (u geocentričnom sistemu). Verovatno je tvrđenje bilo poznato i pre Ptolomejevog vremena, ali njegov dokaz prvi je koji je stigao do nas.



Teorema 2.18 (Uopštena Ptolomejeva teorema)
Ako su A, B, C, D četiri komplanarne tačke, tada je $AB \cdot CD + BC \cdot AD \geq AC \cdot BD$. Jednakost pritom važi ako i samo ako su A, B, C, D kolinerane ili konciklične.

Dokaz Neka su A, B, C, D četiri komplanarne tačke. Neka se inverzijom sa centrom u npr. A tačke B, C, D slikaju redom u B', C', D'. Tada iz nejednakosti trougla i prema formuli za odnos rastojanja dve tačke i njihovih slika pri inverziji zaključujemo: $C'D' + B'C' \geq B'D' \iff \frac{r^2}{AC \cdot AD} \cdot CD + \frac{r^2}{AB \cdot AC} \cdot BC \geq \frac{r^2}{AB \cdot AD} \cdot BD \iff AB \cdot CD + BC \cdot AD \geq AC \cdot BD$. Jednakost će važiti $\iff$ B', C', D' kolinearne, tj. $\iff$ A, B, C, D kolinearne ili konciklične.□

Naredni problem razmatrao je Papos iz Aleksandrije[9].

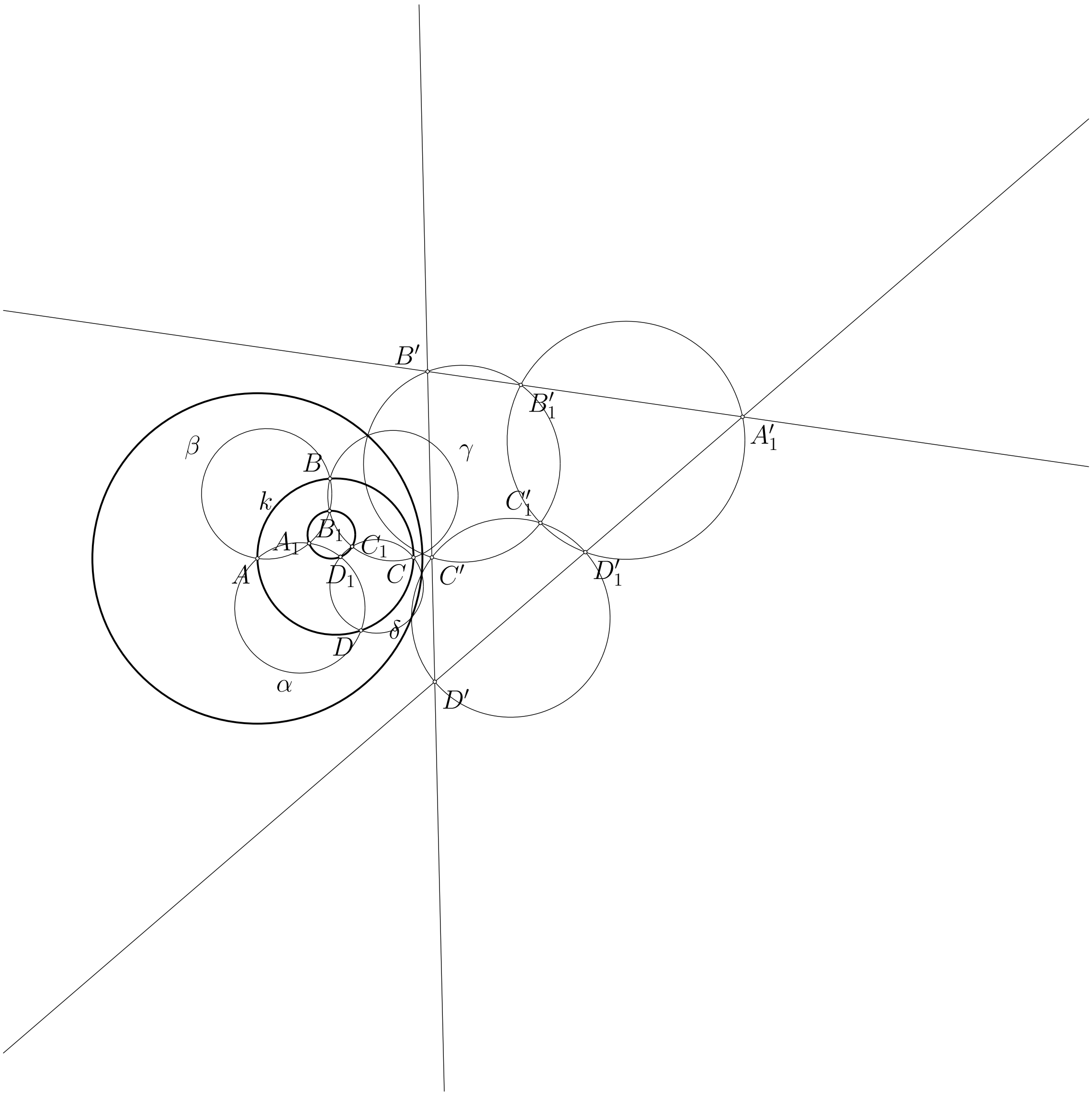
Teorema 2.19 *Neka su a, b, c_0 krugovi sa prečnicima PQ, PR, RQ, pri čemu je $P - R - Q$. Ako je $c_0, c_1, c_2, ...$ niz krugova sa iste strane prave PQ, koji dodiruju krugove a, b i svaki u nizu dodiruje prethodni, dokazati da je rastojanje centra kruga c_n od prave PQ, n puta veće od prečnika tog kruga.*

Dokaz Posmatrajmo inverziju u odnosu na krug sa centrom P koji je ortogonalan na c_n: prava l određena sa P, Q se slika u sebe, a krugovi a i b u paralelne prave a' i b' ortogonalne na l; krugovi $c_0, c_1, c_2, ..., c_n, ...$ se slikaju u krugove kojima su tangente i a' i b', pa su oni podudarni međusobno, pa i krugu $c_n = c_n'$. Obzirom da je c_0 ortogonalan na l, i c_0' će biti ortogonalan na l, tj. njegov centar će biti na l, pa je rastojanje centra kruga c_n od te prave n puta veće od poluprečnika tog kruga. □

[8]Κλαύδιος Πτολεμαῖος, grčko-rimski astronom, geograf i matematičar, približno (90-168)
[9]Πάππος ὁ 'Αλεξανδρεύς, grčki matematičar (290-350)

Teorema 2.20 (Miquelova teorema o šest krugova) [10]

Krugovi koji imaju za tetive stranice tetivnog četvorougla seku se opet u četiri konciklične tacke.



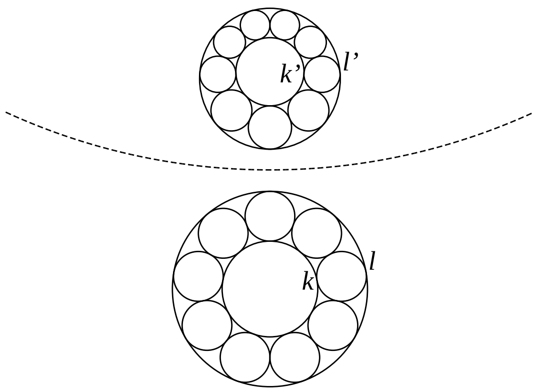
Slika 15: Miquelova teorema

[10] *Auguste Miquel*, francuski matematičar. Dokaz je objavio 1838. godine u *Théorème sur les intersections des cercles et des sphéres, Journal de Liouville, Sér. I, 3 (1838) 517-522*

Dokaz Neka su $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ krugovi jedne ravni takvi da se: α i β seku u tačkama A i A_1; β i γ seku u tačkama B i B_1; γ i δ seku u tačkama C i C_1; δ i α seku u tačkama D i D_1. Ako su tačke A, B, C, D konciklične, treba dokazati da su i tačke A_1, B_1, C_1, D_1 konciklične. Pretpostavimo da su A, B, C, D na nekom krugu k. Neka je $I : X \mapsto X'$ inverzija sa centrom A. Tada su α', β', k' prave koje se seku u temenima trougla $A_1'B'D'$, i sadrže redom tačke D_1', B_1', C', pri čemu su γ', δ' krugovi redom kroz četvorouglove $B'C'C_1'B_1'$ i $C'D'D_1'C_1'$, pa su oni tetivni, i $\angle B_1'C_1'C' = \pi - \angle B', \angle D_1'C_1'C' = \pi - \angle D'$, pa je $\angle B_1'C_1'D_1' = \angle B' + \angle D'$, ali kako je $\angle A_1' = \pi - (\angle B' + \angle D')$, imamo $\angle B_1'C_1'D_1' = \pi - \angle A_1'$, pa je i $A_1'B_1'C_1'D_1'$ tetivan, tj. tačke A_1, B_1, C_1, D_1 su konciklične.□

Teorema 2.21 (Steinerova teorema) [11] *Neka je k krug u unutrašnjosti kruga l takav da postoji niz krugova $a_1, a_2, ..., a_n$ koji dodiruju krugove k i l, i od kojih se svaka dva susedna, uključujući a_n i a_1, dodiruju. Ako je b_1 proizvoljni krug koji dodiruje k i l, i $b_2, ..., b_n$ krugovi od kojih svaki dodiruje krugove k, l i prethodni u nizu, dokazati da se i b_n i b_1 dodiruju.*

Dokaz Uočimo inverziju $X \mapsto X'$ koja krugove k i l slika u koncentrične krugove. Tada će krugovi $a_1', a_2', ..., a_n'$ biti sa njima tangentni i međusobno podudarni, pa će njihovi prečnici biti stranice pravilnog n-tostranog poligona; tada će i b_1' biti podudaran sa njima, tako da će i cikličan niz krugova počev od b_1', od kojih svaki dodiruje krugove k', l' i prethodni u nizu, imati takođe n krugova.□



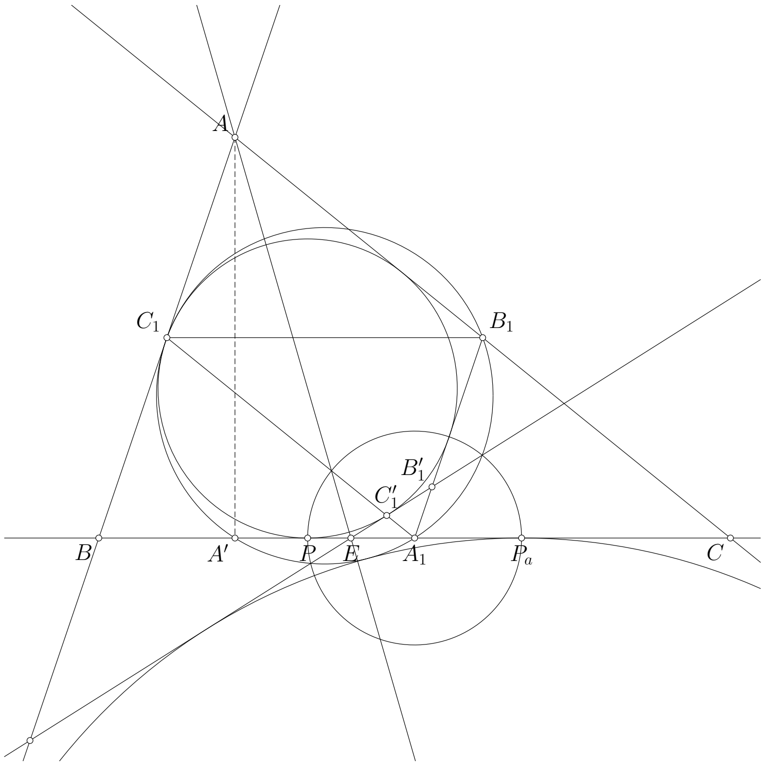
Teoremu koja sledi mnogi geometričari svrstavaju među estetski najimpresivnije u modernoj geometriji trougla.[12] Nju je prvi formulisao i dokazao Karl Wilhelm Feuerbach[13] u radu objavljenom 1822; većim delom je to učinio računskim putem, upotrebivši trigonometriju. Otada je dato još pregršt različitih, ali za jednog od najelegantnijih dokaza smatra se onaj koji koristi inverziju.

[11] *Jacob Steiner*, švajcarski matematičar (1796-1863)

[12] '...najlepša teorema elementarne geometrije ikada viđena još od Euklidovog doba.", *Coolidge, The Heroic Age of Geometry, Bulletin of the American Mathematical Society 35, 1229, p. 38*

[13] nemački matematičar (1800 - 1834)

Teorema 2.22 (Feuerbachova teorema) *Dokazati da Eulerov krug*[14] *trougla dodiruje upisani krug i spolja upisane krugove tog trougla u tzv. Feuerbachovim tačkama tog trougla.*



Slika 16: Feuerbachova teorema

Dokaz Neka su P i P_a dodirne tačke upisanog kruga k i spolja upisanog kruga k_a trougla ABC sa ivicom BC. Eulerov krug e tog trougla sadrži središta A_1, B_1, C_1 odgovarajućih ivica i podnožje visine A' iz temena A. Tačka A_1 je središte duži PP_a (jer $BP = CPa$). Kako je BC tangenta krugova k i k_a i prolazi kroz centar A_1 kruga $i(A_1, A_1P)$, k i k_a su ortogonalni na i, pa se inverzijom I_i u odnosu na krug i preslikavaju u sebe. Krug o prolazi kroz centar inverzije, pa se preslikava u neku pravu o'. Pokažimo da prava o' dodiruje krugove k i k_a. Ona sadrži presečnu tačku E bisektrise unutrašnjeg ugla kod temena A sa ivicom BC trougla ABC jer $I_i(A') = E$ (tačke $(A', E; P, P_a)$ su harmonijski konjugovane kao normalna projekcija tačaka $(A, E; S, S_a)$ koje su harmonijski konjugovane jer su S i S_a presečne tačke bisektrisa unutrašnjeg i spoljašnjeg ugla ACE u trouglu ACE sa pravom AE), a takođe i tačke $I_i(B_1) = B'_1$ i $I_i(C_1) = C'_1$. Trouglovi $A_1B_1C_1$ i $A_1C'_1B'_1$ su slični, prava e' sa pravom AB određuje ugao ACB, a kako pravu BC seče u tački E koja pripada bisektrisi ugla BAC, predstavlja drugu zajedničku tangentu krugova k i k_a.□

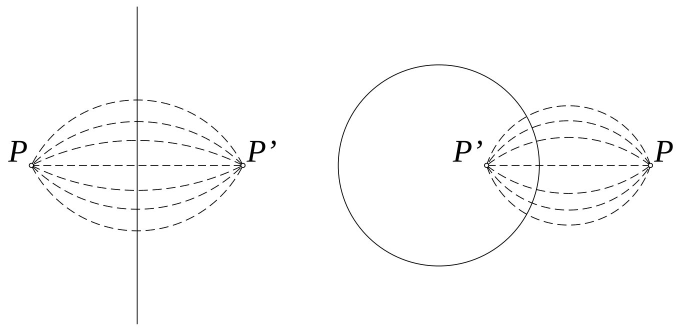
[14] *Eulerov krug* trougla je krug koji sadrži središta ivica i podnožja visina tog trougla. Njegovo postojanje dokazao je Leonhard Euler, švajcarski matematičar (1707-1783); da taj krug sadrži i središta duži određenih ortocentrom i temenima trougla pokazali su francuski geometričari Jean-Victor Poncelet (1788-1867) i Charles Julien Brianchon (1783-1864). Otud se on još zove i *krug devet tačaka* trougla.

Apolonijevi problemi predstavljaju varijante problema konstrukcije kruga tangentnog na tri zadata kruga k, l, m (pri čemu svaki od k, l, m može biti i tačka, kao degenerisan slučaj kruga, a na nju je onda tangentan svaki krug koji je sadrži). Oni se mnogu umnogome uprostiti primenjujući inverziju.

Koristeći inverziju u odnosu na krug može se pokazati i da se sve konstrukcije (tačaka) u elementarnoj geometriji ravni tj. one koje se izvode pomoću šestara i lenjira, mogu postići i samo upotrebom šestara[15]; one se takođe mogu izvesti i ako su jedina sredstva lenjir i krug u ravni čiji centar je poznat.

2.5 Odnos inverzije i osne refleksije

Posmatrajući osobine inverzije u ravni nailazimo na pojedine sličnosti sa osnom refleksijom. Na primer, oba preslikavanja su bijektivne involucije koje razmenjuju oblasti na koje skup fiksnih tačaka (krug inverzije, odnosno osa refleksije) deli domen. Takođe, svaka tačka i njena slika (inverzne, ili osnosimetrične) su presečne tačke krugova eliptičkog pramena ortogonalnog na skup fiksnih tačaka (slika 17). Štaviše, što je veći poluprečnik inverzije (pa krug inverzije postaje 'bliži' pravoj po svojoj zakrivljenosti), inverzija se 'više ponaša' kao refleksija u odnosu na pravu. Pokažimo da je zaista tako:

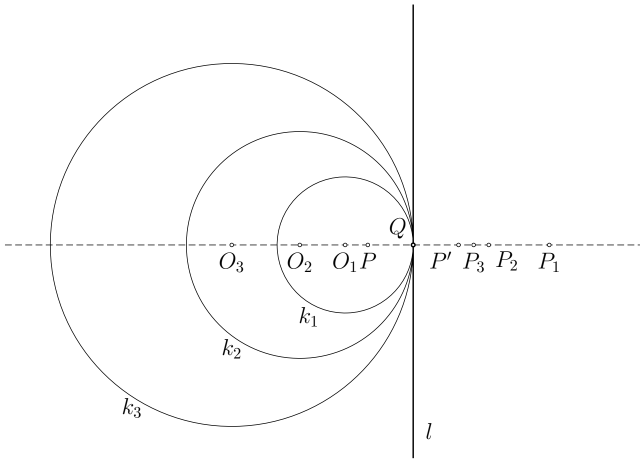


Slika 17: Eliptički pramen ortogonalan na osu refleksije, odnosno krug inverzije

Neka je l prava i P proizvoljna tačka ravni van l, a prava p upravna na l kroz P (slika 18). Posmatrajmo familiju krugova $k_i(O_i, r_i), i = 1, 2...$ sa centrima na p i sa iste strane prave l, koji su tangentni u Q, i takvi da je $O_iQ > O_jQ$, tj. $r_i > r_j$ za $i > j$. Neka je P proizvoljna tačka na p, i $P' = R_l(P)$ njena refleksija u odnosu na l. Za svaki krug k_i konstruišimo inverz tačke P u odnosu na njega: $P_i = I_{k_i}(P)$. Dokažimo da se P_i približava refleksiji P' tačke P kako r_i raste, odnosno da

$$I_{k_i} \longrightarrow R_l(r_i \to \infty)$$

[15] za dokaz pogledati [23, str. 38]



Slika 18: Inverzija sa beskonačno udaljenim centrom se ponaša kao refleksija

Kako je $O_iP \cdot O_iP_i = r_i^2$ i $O_iP = O_iQ - QP = r_i - QP$, te je $O_iP_i = \frac{r_i^2}{r_i - QP}$, $QP_i = O_iP_I - O_iQ = O_iP_i - r_i = \frac{QP}{1-\frac{QP}{r_i}} \longrightarrow QP = QP'(r_i \to \infty)$, odnosno $I_{k_i}(P) = P_i \longrightarrow P' = R_l(P)(r_i \to \infty)$.

Vidimo, dakle, da ako rastojanje centra inverzije teži beskonačnosti (od fiksirane tačke na njenom krugu), njen krug teži nekoj pravoj (tangenti u toj tački), a sama inverzija deluje kao refleksija u odnosu na tu pravu.

To je, pored navedenih sličnosti, još jedan razlog zašto se često poistovećuju nazivi refleksija i inverzija; refleksija se naziva inverzijom u odnosu na pravu - granični krug (sa beskonačno udaljenim centrom), i obrnuto: inverzija se naziva i *refleksijom u odnosu na krug*, a za inverzne tačke se kaže da su *simetrične* u odnosu na krug inverzije. Uska povezanost ovih preslikavanja poslužiće nam kao deo motivacije za uvođenje pojma tzv. inverzivne ravni koje sledi.

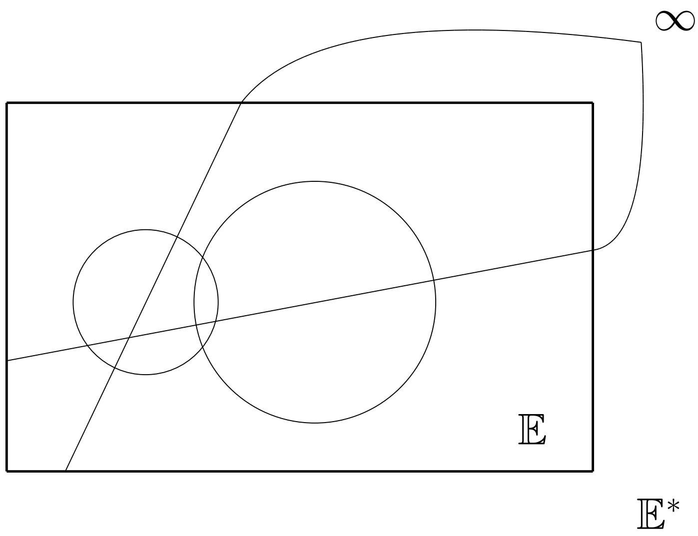
Postoji takođe i zanimljiv, optički odnos refleksije i inverzije. Naime, kako se refleksija može predstaviti slikom u ravnom ogledalu, postavlja se pitanje može li se i inverzija fizički ostvariti slikom u nekom (zakrivljenom) ogledalu; odgovor je potvrdan, takvo ogledalo, oblika nalik zvonu, zove se anamorfoskop.[16]

2.6 Inverzivna ravan

Podsetimo se da inverzija prema svojoj definiciji bijektivno slika sve tačke ravni $\mathbb{E}$ izuzev centra inverzije O, odnosno ona je bijekcija na "probušenoj" ravni u centru inverzije, $\mathbb{E}\backslash\{O\}$. Primetimo da što je tačka na nekoj pravoj kroz centar inverzije, bliža tom centru, da je njena slika sve udaljenija, i da rastojanje te slike od centra onda teži beskonačnosti na toj pravoj. Stoga uzimamo da se

[16]Za konstrukciju anamorfoskopa pogledati članak *Designing a mirror that inverts in a circle*, Gerald T. Cargo, Jack E. Graver and John L. Troutman, The Mathematical Intelligencer (2002) 24: 4-8.

centar bilo kog kruga inverzije slika u jedan poseban objekat koji ćemo prirodno zvati *beskonačno daleka tačka* ∞ ili *idealna tačka*, a koji dodajemo euklidskoj ravni i svakoj njenoj pravoj. Tako dopunjenu euklidsku ravan $\mathbb{E}$ tačkom ∞ zovemo *inverzivna*[17] (ili konformna) ravan $\mathbb{E}^* = \mathbb{E} \cup \infty$.



Slika 19: Inverzivna ravan i njeni krugovi

Euklidsku pravu p dopunjenu tačkom ∞ nazivamo *pravom inverzivne ravni*, $p^* = p \cup \infty$. Sve prave inverzivne ravni $\mathbb{E}^*$, kao i krugove njoj pridružene euklidske ravni $\mathbb{E}$ zajednički zovemo *krugovima inverzivne ravni* $\mathbb{E}^*$ (slika 19). Dakle, prava je specijalni krug inverzivne ravni koji sadrži tačku ∞ i za njen centar se uzima takođe ∞.

Videćemo da se ovakvim dodavanjem tačke ∞ mnogi osnovni pojmovi euklidske ravni mogu prirodno proširiti na inverzivnu ravan. Za krugove inverzivne ravni se kaže da su *presečni, tangentni* ili *disjunktni* prema tome da li im je broj zajedničkih tačaka 2, 1 ili 0. Primećujemo da se svake dve prave u $\mathbb{E}^*$ seku bar u tački ∞. Kako su paralelne prave u $\mathbb{E}$ disjunktne, njihove dopune u $\mathbb{E}^*$ će imati zajedničku samo tačku ∞, pa *paralelne prave inverzivne ravni* $\mathbb{E}^*$ posmatramo kao krugove tangentne u ∞. *Refleksija inverzivne ravni* $\mathbb{E}^*$ *u odnosu na njenu pravu* p^* je produženje refleksije ravni $\mathbb{E}$ u odnosu na pravu p koje fiksira tačku ∞; za p^* kažemo da je *osa* te refleksije. Očito su joj sve fiksne tačke na osi. *Euklidska izometrija (homotetija, sličnost) u inverzivnoj ravni* $\mathbb{E}^*$ je produženje euklidske izometrije (homotetije, sličnosti) ravni $\mathbb{E}$ koje fiksira tačku ∞. Objasnimo razlog za ovakvu definiciju: naime, za produženje kompozicije preslikavanja uzimamo kompoziciju produženja tih preslikavanja. Izometrija ravni $\mathbb{E}$ je kompozicija nekih refleksija (najviše tri), pa će i kompozicija njihovih produženja na $\mathbb{E}^*$ fiksirati ∞, i dati produženje te izometrije. Homotetija ravni $\mathbb{E}$ je kompozicija inverzija u dva koncentrična kruga, pa će

[17] M. Bôcher, Bulletin of the American Mathematical Society, 20 (1914), str. 194

kompozicija produženja tih preslikavanja u $\mathbb{E}^*$ fiksirati ∞, i dati produženje te homotetije. Sličnost ravni $\mathbb{E}$ je kompozicija izometrije i homotetije, pa će kompozicija njihovih produženja u $\mathbb{E}^*$ fiksirati ∞ i dati produženje te sličnosti. Refleksiju inverzivne ravni posmatramo i kao *inverziju sa centrom* ∞ čiji je krug njena osa. U tom slučaju, vidimo da je svaka sličnost inverzivne ravni kompozicija konačno mnogo inverzija (sa konačnim ili beskonačnim centrom). Sada na osnovu stava 2.4 možemo reći:

Stav 2.23 *Inverzija slika krugove u krugove u inverzivnoj ravni.*

Nadalje u tekstu ćemo pojmove krug/pravu/sličnost podrazumevati u inverzivnoj ravni, na maločas uveden način; ako želimo posebno naglasiti, euklidski krug ćemo zvati i krugom sa konačnim prečnikom ili centrom (ili označiti sa e-krug). Najzad, kao posledicu dodavanja tačke ∞ euklidskoj ravni dobili smo da je inverzija bijekcija cele inverzivne ravni.

3 Kružne transformacije

3.1 Definicija i osnovna svojstva

Sve bijekcije inverzivne ravni na sebe koje krugove preslikavaju na krugove zvaćemo *kružnim transformacijama.* Primetimo da su sličnost, inverzija, kao i njihova kompozicija, primeri kružnih transformacija. Pokazaćemo da su to i jedine kružne transformacije u inverzivnoj ravni. Za to će nam biti potreban sledeći stav elementarne geometrije (za dokaz pogledati [14, str. 35]):

Stav 3.1 (Drugi Peanov stav) [18] *Ako su A, B, C tri nekolinearne tačke, tada tačka D pripada ravni ABC ako i samo ako pripada skupu tačaka pravih koje sadrže: tačku A i neku tačku duži BC ili tačku B i neku tačku duži CA ili tačku C i neku tačku duži AB.*

Kao i jedno pomoćno tvrđenje koje ćemo dokazati:

Stav 3.2 *Ako kružna transformacija fiksira tačku ∞, ona je sličnost.*

Dokaz Neka je data kružna transformacija $T : X \mapsto X'$, takva da je $T(\infty) = \infty$. Primetimo da ona čuva incidentnost, e-krugove i prave, pa zato i tangente i paralelnost pravih. (Do kraja ovog dokaza ćemo pod krugom podrazumevati e-krug). Unutrašnjost kruga se slika u unutrašnjost kruga (tačka je u spoljašnjosti ako i samo ako pripada nekoj njegovoj tangenti). Stoga se i duž slika u duž (presek prave sa unutrašnjošću kruga). Takođe se čuvaju temena pravougaonika (presek kruga i dve paralelne prave), pa i upravne prave (sadrže susedne parove temena pravougaonika), a time i središte duži (presek dijagonala pravougaonika čija je jedna dijagonala ta duž). Temena kvadrata (pravougaonik upravnih dijagonala) se slikaju na temena nekog kvadrata. Čuvaju se temena podudarnih susednih duži na pravoj (tri kolinearna temena dva kvadrata sa zajedničkom stranicom), pa time i temena lanca podudarnih duži na pravoj. Neka je $ABCD$ kvadrat, tada postoji sličnost Sim koja kvadrat $A'B'C'D'$ preslikava na kvadrat $ABCD$, a proizvod $Sim \circ T$ će biti kružna transformacija koja fiksira temena kvadrata $ABCD$. Neka je X proizvoljna tačka na pravoj AB. Tada će prema Arhimedovoj aksiomi postojati konačan lanac podudarnih duži čiji je prvi član AB, tako da poslednji član A_1B_1 sadrži X. Tada su i A_1 i B_1 fiksne. Dokažimo da je fiksna i tačka X. Neka je S_1 srediste duži A_1B_1. Ako je $X = S_1$, onda će X biti fiksna; u suprotnom će pripasti jednoj od zatvorenih duži A_1S_1 ili S_1B_1, a krajeve te duži oznacimo sa A_2B_2; tada će i tačka X' pripasti A_2B_2 (T čuva duži, a A_2 i B_2 su fiksne). Ponavljamo razmatranje za duž A_2B_2 i njeno središte S_2. Tačka X će se poklopiti sa nekim središtem S_n nakon konačno mnogo koraka, i zato biti fiksna, ili će pripadati, kao i X', svakom članu niza umetnutih segmenata A_nB_n. Kako taj niz prema Kantorovoj aksiomi ima jedinstvenu zajedničku tačku, dobijamo $X = X'$. Iz istih razloga će svaka tačka pravih AC i BC da bude invarijantna, pa će na osnovu drugog Peanovog stava svaka tačka ravni ABC biti invarijantna u kompoziciji $Sim \circ T$. Dakle, $Sim \circ T$ identičko, pa je T sličnost. $\square$

[18] Giuseppe Peano, italijanski matematičar (1858 - 1932)

Stav 3.3 (Carathéodoryeva teorema) [19] *Svaka kružna transformacija je ili sličnost ili kompozicija izometrije i inverzije (konačnog prečnika).*

Dokaz Neka je T kružna transformacija. Ako je $T(\infty) = \infty$, tada je prema prethodnom tvrđenju T sličnost. Pretpostavimo da T ne fiksira ∞, tj. da je $T(O) = \infty$ za neku konačnu tačku O. Onda će proizvod $T \circ I_1$, gde je Inv inverzija sa središtem O poluprečnika 1, biti sličnost obzirom da mu je tačka ∞ invarijantna. Neka je r^2 njen koeficijent. Tada je $T \circ I_1 = Isom \circ I_k \circ I_1$, gde je $Isom$ neka izometrija, a I_k inverzija sa centrom O i poluprečnikom r (jer je svaka sličnost kompozicija izometrije i homotetije, i na osnovu stava 2.2). Otud je $T = Isom \circ I_k$. $\square$

Obzirom da je iz dokaza prethodne teoreme, za transformaciju T koja nije sličnost, $T = Isom \circ I_k = Isom \circ I_k \circ Isom^{-1} \circ Isom = I_{Isom(k)} \circ Isom$, u njenom iskazu se može kompozicija izometrije i inverzije zameniti sa: kompozicija inverzije (konačnog prečnika) i izometrije. Kako za svake dve tačke A, B na krugu k važi $|T(A)T(B)| = |AB|$, T čuva rastojanje na njemu, pa se on zove još i *izometrijski krug* te transformacije. Efektivnu konstrukciju tog kruga smo već našli u dokazu stava 2.5.

Pol kružne transformacije je tačka koja se pri njoj slika u ∞. Ukoliko ona nije sličnost, uočavamo da je pol ujedno i centar izometrijskog kruga.

Primetimo da je svaka kružna transformacija proizvod najviše četiri inverzije ili, preciznije, ona se može izraziti kao proizvod r refleksija i i inverzija (konačnog prečnika), gde je $r \leq 3, i \leq 2, r + i \leq 4$. Naime, svaka izometrija je proizvod najviše tri refleksije ($r \leq 3$); svaka sličnost je proizvod homotetije i rotacije, odnosno homotetije i osne refleksije, a homotetija je proizvod dveju inverzija u koncentričnim krugovima, što u rastavljanju sličnosti daje 1 ili 2 osne refleksije i dve inverzije ($r \leq 2, i \leq 2$).

Kružnu transformaciju ćemo zvati *homografijom*[20] ili *antihomografijom* ako je broj inverzija u njenoj dekompoziciji paran, odnosno neparan. Vidimo da je bilo koja homografija identiteta ili proizvod tačno dve različite inverzije, a antihomografija je inverzija ili proizvod tačno tri inverzije. Proizvod dveju inverzija ćemo zvati *eliptičkom, paraboličkom* ili *hiperboličkom homografijom* u zavisnosti od toga da li se krugovi inverzije seku, da li se dodiruju ili su disjunktni. Proizvod dveju inverzija u odnosu na dva međusobno upravna kruga se naziva *Mebijusova involucija.* Ako se kružna transformacija inverzivne ravni može predstaviti kao proizvod najmanje četiri inverzije, ona se naziva *loksodromičnom homografijom.*

Lako se pokazuje da skup kružnih transformacija predstavlja grupu u odnosu na kompoziciju preslikavanja i da skup homografija čini njenu podgrupu. Homografije su direktne, a antihomografije indirektne transformacije (u smislu objašnjenom u odeljku 2.2). Iz Carathéodoryeve teoreme vidimo da homogra-

[19] *Constantin Carathéodory* (grč. *Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή*), grčki matematičar (1873 - 1950). Direktni dokazi ove teoreme, date u nešto drugačijoj formulaciji u kompleksnoj ravni, izgleda su svojevremeno bili tako retki ili nepotpuni da je on smatrao neophodnim da objavi jedan 1937. godine u [3]

[20] Ona se u literaturi naziva još i *Möbiusova transformacija*, naročito pri razmatranjima u kompleksnoj analizi, a po nemačkom matematičaru August Ferdinand Möbiusu (1790 -1868). Koriste se i nazivi *bilinearno*, kao i *linearno frakciono preslikavanje.*

fija čuva orijentaciju kruga koji ne sadrži njen pol, a u suprotnom ga menja. Antihomografija čuva orijentaciju kruga samo ako on sadrži njen pol. Kako je inverzija antikonformno preslikavanje, vidimo da je svaka kružna transformacija izogonalna: homografije su konformne, a antihomografije – antikonformne.

Sledeći stav daje još jednu važnu karakterizaciju kružnih transformacija.

Stav 3.4 *Bijekcija inverzivne ravni čuva dvorazmeru ako i samo ako je kružna transformacija.*

Dokaz Obzirom da inverzija čuva dvorazmeru (prema stavu 2.9), onda i svaka kružna transformacija čuva dvorazmeru. Neka je ϕ bijekcija inverzivne ravni koja čuva dvorazmeru, $\phi : X \mapsto X'$. (1) Pretpostavimo da je $\phi(\infty) = \infty$. Tada za proizvoljne četiri tačke A, B, C, D važi $[A\infty; CD] = [A'\infty; C'D']$ i $[AB; \infty D] = [A'B'; \infty D']$, pa je $\frac{AC}{AD} = \frac{A'C'}{A'D'}$ i $\frac{AD}{BD} = \frac{A'D'}{B'D'}$. Onda zaključujemo $\frac{A'C'}{A'D'} \cdot \frac{A'D'}{B'D'} = \frac{AC}{AD} \cdot \frac{AD}{BD} \Rightarrow \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'D'}{BD} = k$, za neku konstantu k, tj. za proizvoljne tačke A i C važi: $A'C' = kAC$, pa je ϕ sličnost, a time i kružna transformacija. (2) U slučaju da je $\phi(\infty) \neq \infty$, neka je $O = \phi^{-1}(\infty)$. Tada je $\phi \circ I_O(\infty) = \infty$, gde je I_O inverzija sa centrom O. Onda je taj proizvod bijekcija koja čuva dvorazmeru, pa je prema (1) takođe i neka sličnost S; pritom je $\phi = S \circ I_O$, dakle ϕ je kružna transformacija. □

Primetimo jedno poređenje metričkih invarijanti: eukidske izometrije su transformacije koje čuvaju dužinu duži, sličnost čuva njihovu razmeru, a još opštije – kružne transformacije su one koje čuvaju dvorazmeru duži inverzivne ravni.

3.2 Klasifikacija i dekompozicija kružnih transformacija na inverzije

Klasifikaciju kružnih transformacija ćemo izvršiti prema broju njihovih fiksnih tačaka i tipu. Za njihovu dekompoziciju na inverzije biće nam ključni Carathéodoryeva teorema, Uopšten princip simetrije koji ćemo formulisati, kao i klasifikacija sličnosti euklidske ravni prema broju fiksnih tačaka i čuvanju orijentacije.

Obzirom da skup fiksnih tačaka sličnosti inverzivne ravni čini skup njenih fiksnih tačaka u odgovarajućoj euklidskoj ravni dopunjen tačkom ∞, možemo zaključiti (v. [14, str. 221], [17, str. 141]):

Stav 3.5 *Neka je T sličnost inverzivne ravni. Ako je ona direktna, i ima $1, 2$ ili bar 3 fiksne tačke, onda je ona redom translacija, dilativna rotacija ili identiteta. Ako je ona indirektna, i ima $1, 2$ ili bar 3 fiksne tačke, onda je ona redom: klizajuća refleksija, dilativna refleksija ili osna refleksija.*

Taj stav će nam poslužiti da dokažemo sledeće:

Stav 3.6 *Kružna transformacija koja fiksira tri različite tačke inverzivne ravni je identiteta ili inverzija čiji krug je određen tim tačkama.*

Dokaz Neka kružna transformacija T fiksira tačke A, B, C. Na osnovu Carathéodoryeve teoreme zaključujemo da ona mora biti sličnost, ili kompozicija izometrije i inverzije. Ako je T sličnost i fiksira tri različite tačke, tada je njen koeficijent 1, pa je ona izometrija koja fiksira te tri tačke, te na osnovu prethodnog stava, mora biti Id ili osna refleksija (tj. inverzija) čija je osa prava ABC (u slučaju da su A, B, C kolinearne) [14, str. 218]. Razmotrimo slučaj da je T=$Isom \circ Inv$, gde je Inv neka inverzija u odnosu na (konačan) krug poluprečnika r, a $Isom$ izometrija. Tada je $Isom(Inv(A, B, C)) = (A, B, C)$, pa je $Inv(A, B, C) = Isom^{-1}(A, B, C) = (A', B', C')$, gde je trougao $\triangle A'B'C'$ podudaran $\triangle ABC$, pa je $A'B' = AB$, a kako imamo da je rastojanje između inverznih tačaka $A'B' = \frac{r^2}{OA \cdot OB} \cdot AB$, dobijamo da je $r^2 = OA \cdot OB$, i slično $r^2 = OA \cdot OC$, i $r^2 = OB \cdot OC$, i otuda je $OA = OB = OC = r$, te tačke A, B, pripadaju krugu inverzije Inv, a kako su onda i fiksne pri toj inverziji, imamo da je $(A,' B', C') = (A, B, C)$, tj. $Isom$ fiksira A, B i C, te je $Isom = Id$ (na osnovu prethodnog stava, i jer su A, B, C nekolinearne - konciklične na odgovarajućem krugu inverzije Inv), pa je $T = Inv_{ABC}$, tj. inverzija čiji je krug određen tačkama A, B, C.$\Box$

Iz prethodne teoreme neposredno sledi:

Stav 3.7 *Kružna transformacija koja fiksira četiri nekonciklične tačke je identiteta.*

Pokažimo da je svaka (anti)homografija jedinstveno određena slikom zadate trojke tačaka:

Stav 3.8 (Osnovna teorema inverzivne geometrije) *Za date trojke različitih tačaka A, B, C i A', B', C' postoje tačno dve kružne transformacije inverzivne ravni, jedna homografija H i jedna antihomografija AH, koje slikaju A, B, C redom u A', B', C'. Pritom je $AH = H \circ Inv_{ABC}$, gde je Inv_{ABC} inverzija čiji je krug određen tačkama A, B, C.*

Dokaz Postojanje bar jedne kružne transformacije T koja slika A,B,C redom u A',B',C' sledi iz tvrđenja 2.5 u kome smo preslikali tri proizvoljne tačke u temena zadatog trougla. Pokažimo da takvih transformacija ima tačno dve. Pretpostavimo da postoji još jedna, npr. J: tada je i $T^{-1} \circ J$ kružna transformacija koja fiksira tri tačke A, B, C, te ona mora biti identiteta ili Inv_{ABC}, pa je $J = T$ ili $J = T \circ Inv_{ABC}$. Jedna od T i J je homografija, a druga antihomografija. $\Box$

Za skupove tačaka kažemo da su *kružno podudarni* ukoliko postoji kružna transformacija koja slika jedan od njih na drugog. Kao posledicu prethodne teoreme vidimo da su svaka dva trotemenika (tj. trojke nekolinearnih tačaka), dva kruga, ili bilo koji krug i prava kružno podudarni.

Nakon što smo ustanovili da su one kružne transformacije koje fiksiraju ∞ upravo sličnosti, pokazaćemo da je svaka kružna transformacija konjugovana inverzijom nekoj sličnosti.

Lako se utvrđuje:

Stav 3.9 *a) Relacija konjugovanosti kružnih transformacija inverzijom je relacija ekvivalencije; njene klase na kružnim transformacijama ćemo zvati klasama konjugacije kružnih transformacija tom inverzijom.*
b) Svaka transformacija T i njen konjugat $T' = F \circ T \circ F^{-1}$ inverzijom F imaju jednak broj fiksnih tačaka; pritom T fiksira tačku A ako i samo ako T' fiksira tačku $F(A)$.

c)(Uopšten princip simetrije) Ako su F i T kružne transformacije, tako da je $T = I_{k_1} \circ I_{k_2} \circ ... \circ I_{k_n}$, tada je $F \circ T \circ F^{-1} = I_{F(k_1)} \circ I_{F(k_2)} \circ ... \circ I_{F(k_n)}$.

Primetimo da (anti)homografija inverzijom indukuje (anti)homografiju.

Neka je T kružna transformacija. Opišimo njena svojstva u zavisnosti od toga da li je ona (anti)homografija i od broja njenih fiksnih tačaka. Za to ćemo koristiti zapažanje da se svaki eliptički/parabolički/hiperbolički pramen krugova pogodnom inverzijom slika u pramen konkurentih pravih, paralelnih pravih ili skup koncentričnih krugova.

1) U slučaju da T ima bar tri fiksne tačke, na osnovu stava 3.6 vidimo da je ona identiteta ako je homografija, odnosno inverzija ako je antihomografija.

2) Neka T ima tačno dve fiksne tačke F_1 i F_2, a pritom je F inverzija čiji je centar jedna od tih tačaka, npr. F_1. Tada se F_1 slika u ∞. Odgovarajuća konjugovana transformacija $T' = F \circ T \circ F^{-1}$ će fiksirati tačke $F(F_1) = \infty$ i $F(F_2) = O$, gde je O neka konačna tačka. T' fiksira ∞, pa je zato sličnost, i to dilativna rotacija sa centrom O ako je T homografija, odnosno dilativna refleksija ako je T antihomografija (iz stava 3.5).

a) Pretpostavimo da je T homografija. Onda je ona konjugovana nekoj dilativnoj rotaciji $T' = H_O^k \circ R_O^\theta$ sa centrom O, $k > 0$ (pri čemu T' može biti i homotetija, ili čista rotacija). Tu dilativnu rotaciju sa centrom O možemo predstaviti na sledeći način. Neka je K' pramen pravih koje se seku u O, a L' skup koncentričnih krugova sa centrom O. Homotetija H_O^k će biti kompozicija dve inverzije čiji su krugovi l_1' i l_2' iz L' (i čiji je odnos radijusa $\sqrt{k}$), $H_O^k = I_{l_1'} \circ I_{l_2'}$. Rotacija R_O^θ je kompozicija dve refleksije čije su ose k_1' i k_2' iz K' (i koje zaklapaju ugao $\theta/2$), $R_O^\theta = I_{k_1'} \circ I_{k_2'}$, pa je $T' = H_O^k \circ R_O^\theta = (I_{l_1'} \circ I_{l_2'}) \circ (I_{k_1'} \circ I_{k_2'})$. Tada će (na osnovu Uopštenog principa simetrije) biti:

$$T = F \circ T' \circ F^{-1} = (I_{F(l_1')} \circ I_{F(l_2')}) \circ (I_{F(k_1')} \circ I_{F(k_2')})$$

Međutim, kako su k_1' i k_2' konkurentne prave u tački O koje zaklapaju ugao $\theta/2$, to će $k_1 = F(k_1')$ i $k_2 = F(k_1')$ biti krugovi koji se seku u tačkama F_1 i F_2 pod istim uglom, tj. k_1 i k_2 će biti krugovi eliptičkog pramena K kroz tačke F_1 i F_2. Sa druge strane, l_1' i l_2' su koncentrični krugovi u O koji su ortogonalni na pramen K', pa će i krugovi $l_1 = F(l_1')$ i $l_2 = F(l_1')$ pripadati hiperboličkom pramenu L koji je ortogonalan na K. Dobili smo otud da je:

$$T = (I_{l_1} \circ I_{l_2}) \circ (I_{k_1} \circ I_{k_2}),$$

tj. da je proizvoljna homografija T koja fiksira dve tačke kompozicija najviše četiri inverzije. U slučaju da je dilativna rotacija čista rotacija (tj. homotetičan deo je identički, $k = 1$, $l_1 = l_2$), onda je

$$T = I_{k_1} \circ I_{k_2},$$

tj. T je konjugovana rotaciji, i ona je kompozicija inverzija u odnosu na dva kruga eliptičkog pramena koji se seku u fiksnim tačkama od T, pa je homografija

T *eliptička.* Kako su pri rotaciji M' invarijantni koncentrični krugovi iz L', to će i T ostavljati invarijatnim krugove hiperboličkog pramena L kojem su granične fiksne tačke od T. U slučaju da je dilativna rotacija T' čista homotetija (tj. rotacioni deo je identički, $\theta = 2Z\pi$, $k_1 = k_2$), onda je

$$T = I_{l_1} \circ I_{l_2},$$

odnosno T je konjugovana homotetiji, i ona je kompozicija inverzija u odnosu na dva kruga hiperboličkog pramena koje razmenjuju fiksne tačke od T, pa je homografija T *hiperbolička.* Kako su pri homotetiji T' invarijantne prave iz K' kroz njen centar, to će i T ostavljati invarijatnim krugove eliptičkog pramena K kroz fiksne tačke od T. Najzad, ako je dilativna rotacija T' prava (tj. ni homotetičan, ni rotacioni deo nisu identički), zaključujemo

$$T = (I_{l_1} \circ I_{l_2}) \circ (I_{k_1} \circ I_{k_2}),$$

dakle, T je konjugovana pravoj dilativnoj rotaciji, gde su k_1 i k_2, i l_1 i l_2, par po par, različiti krugovi dva upravna pramena krugova (redom eliptičkog, i hiperboličkog), i čije su granične tačke fiksne tačke od T, pa je homografija T *loksodromična.*

b) Pretpostavimo da je T antihomografija. Ona je konjugovana nekoj dilativnoj refleksiji $T' = H_O^k \circ S_{p'}$ sa centrom O, gde tačka O pripada pravoj p' (pri čemu T' ne može biti i čista refleksija, jer bi fiksirala više od dve tačke). Tu dilativnu refleksiju sa centrom O možemo posmatrati na sledeći način. Neka je L' skup koncentričnih krugova sa centrom O. Kako $O \in p'$, oni su svi ortogonalni na p'. Homotetija $H_O^k, k > 0$ će biti kompozicija dve inverzije čiji su krugovi l_1' i l_2' iz L' (i čiji je odnos radijusa $\sqrt{k}$), $H_O^k = I_{l_1'} \circ I_{l_2'}$, pa je $T' = H_O^k \circ S_{p'} = (I_{l_1'} \circ I_{l_2'}) \circ I_{p'}$. Tada će biti:

$$T = F \circ T' \circ F^{-1} = (I_{F(l_1')} \circ I_{F(l_2')}) \circ I_{F(p')}$$

Međutim, kako su l_1' i l_2' koncentrični krugovi u O koji su ortogonalni na pravu p', pa će i krugovi $l_1 = F(l_1')$ i $l_2 = F(l_1')$ biti ortogonalni na krug $p = F(p')$. Dobili smo otud da je:

$$T = (I_{l_1} \circ I_{l_2}) \circ I_p,$$

tj. da je proizvoljna antihomografija koja fiksira dve tačke kompozicija tačno tri inverzije.

3) Najzad, razmotrimo slučaj kada T ima tačno jednu fiksnu tačku F_1. Neka je F inverzija sa centrom F_1; ona slika F_1 u ∞. Odgovarajuća konjugovana transformacija $T' = F^{-1} \circ M \circ F$ fiksira jedino tačku $F(F_1) = \infty$, pa je ona translacija za neki vektor v ako je T homografija, odnosno klizajuća refleksija ako je T antihomografija.

a) Pretpostavimo da je T homografija. Otuda je ona konjugovana translaciji $M' = \tau_v$. Neka je K' pramen paralelnih pravih upravnih na vektor v. Translacija τ_v će biti kompozicija dve refleksije čije su ose prave k_1' i k_2' iz K' (i na međusobnom rastojanju $|v|/2$).

Tada je $T' = \tau_v = I_{k_1'} \circ I_{k_2'}$, pa je:

$$T = F \circ T' \circ F^{-1} = I_{F(k_1')} \circ I_{F(k_2')}$$

Ali kako su k_1' i k_2' paralelne prave, to će $k_1 = F(k_1')$ i $k_2 = F(k_2')$ biti krugovi koji se dodiruju u F_1, tj. k_1 i k_2 će biti krugovi paraboličkog pramena K čiji je centar fiksna tačka F_1. Tj. T je konjugovana translaciji, i ona je kompozicija inverzije u odnosu na dva kruga paraboličkog pramena čiji je centar fiksna tačka od T, pa je homografija T *parabolička*.

b) Pretpostavimo da je T antihomografija. Otuda je T konjugovana klizajućoj refleksiji $T = G_v$. Neka je K' pramen paralelnih pravih upravnih na vektor v, i prava l' upravna na taj pramen. Klizajuća refleksija G_v će biti kompozicija tri refleksije: redom, prve dve čije su ose prave k_1' i k_2' iz K' (i na međusobnom rastojanju $|v|/2$), i treća je refleksija sa osom l'. Tada je $T' = G_v = (I_{k_1'} \circ I_{k_2'}) \circ I_{l'}$, pa je $T = (I_{k_1} \circ I_{k_2}) \circ I_l$, gde su $k_1 = F(k_1')$, $k_2 = F(k_2')$, $l = F(l')$. Ali kako su k_1' i k_2' paralelne prave, to će $k_1 = F(k_1')$ i $k_2 = F(k_2')$ biti krugovi koji se dodiruju u F_1, tj. k_1 i k_2 će biti krugovi paraboličkog pramena K čiji je centar fiksna tačka F_1, i biće upravni na krug l u tački F_1. Tj. T je konjugovana klizajućoj refleksiji, i ona je kompozicija tri inverzije: redom, prve dve inverzije u odnosu na dva kruga paraboličkog pramena čiji centar je fiksna tačka od T, i treća je inverzija u krugu koji je na njih ortogonalan u toj tački.

Ako prethodne rezultate sumiramo, dobijamo:

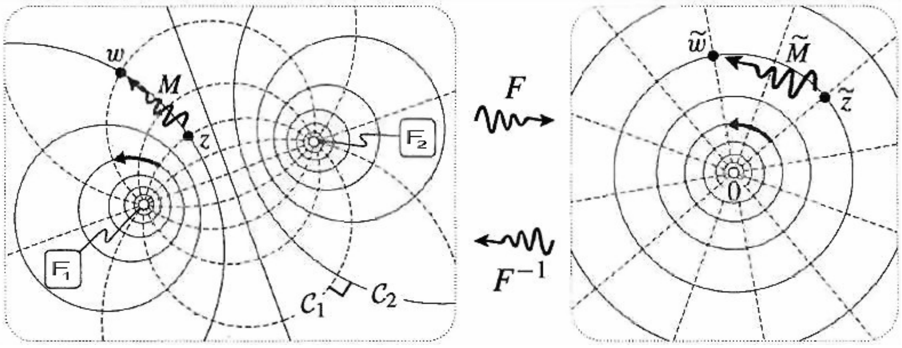
Stav 3.10 *Ako homografija T ima bar tri fiksne tačke, ona je identiteta; ako ima tačno dve fiksne tačke, tada je ona eliptička, hiperbolička, ili loksodromična homografija; konjugovana je redom rotaciji, homotetiji ili pravoj dilativnoj rotaciji, i predstavlja kompoziciju, redom, dve inverzije u krugovima eliptičkog pramena određenog fiksnim tačkama od T, dve inverziji u krugovima hiperboličkog pramena čije su granične tačke fiksne tačke od M, ili četiri inverzije u odnosu na parove krugova, koji par po par, pripadaju upravnim pramenovima krugova (eliptičkom i hiperboličkom) čije su granične tačke – fiksne tačke od T. Ako T ima tačno jednu fiksnu tačku, tada je ona parabolička homografija; konjugovana je translaciji, i predstavlja kompoziciju dve inverzije u krugovima paraboličkog pramena čiji centar je fiksna tačka od T.*

Ako je T antihomografija i ima bar tri fiksne tačke, ona je inverzija; tačno dve fiksne tačke, ona je konjugovana dilativnoj refleksiji i predstavlja kompoziciju 3 inverzije redom u disjunktnim krugovima i na njih ortogonalnom krugu; tačno jednu fiksnu tačku, konjugovana je klizajućoj refleksiji i kompozicija je 3 inverzije redom u tangentnim krugovima i na njih ortogonalnom krugu u toj tački.

3.3 Dejstvo kružnih transformacija - homografija

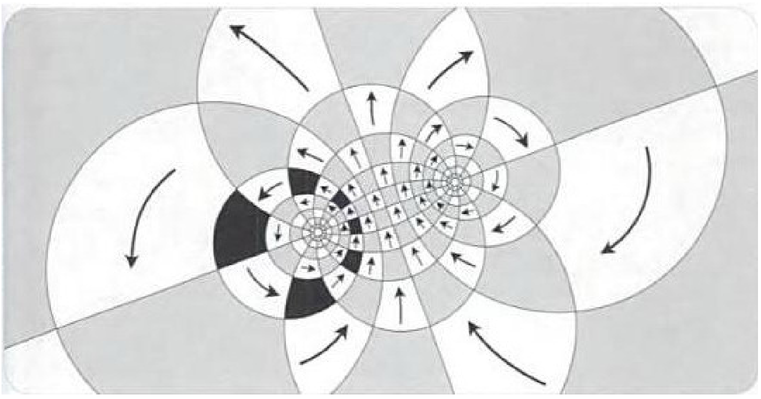
Ovde ćemo neke od zaključaka prethodnog odeljka prikazati grafički uz objasnjenje. Obzirom da je svaka antihomografija kompozicija inverzije – čije predstavljanje i dejstvo nam je poznato – i neke homografije, ovde ćemo posebno obratiti pažnju na same homografije.

Neka je data homografija M i njoj odgovarajuća, konjugovana homografija M'.



Slika 20: Pomeraj tačke na invarijantnom krugu pri eliptičkoj homografiji

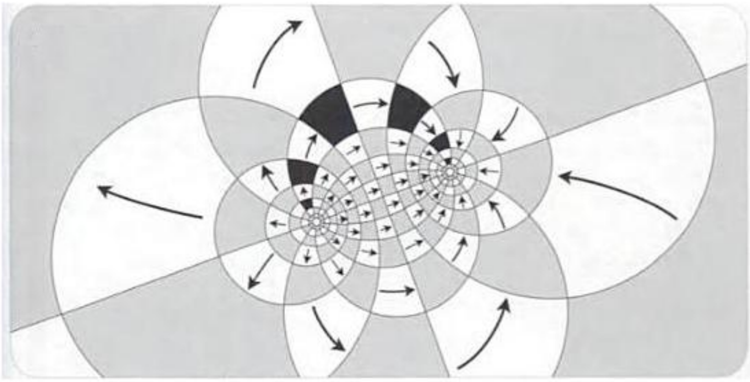
Na slici 20 je prikazano indukovanje homografijom M u slučaju kada je ona eliptička. Obzirom da je konjugovana sličnost M' rotacija ako i samo ako ostavlja invarijantnim koncentrične krugove kojima je središte njena fiksna tačka O (slika desno), M je eliptička ako i samo ako ostavlja invarijantnim odgovarajuće krugove hiperboličkog pramena L (nacrtani punom linijom, slika levo). Ugao rotacije M' prikazane na slici je $\theta = \pi/3$: ona pomera tačku z' duž luka kruga iz L' između pravih pramena K' koje zaklapaju ugao $\pi/6$, do tačke $M'(z')$, pa homografija M odgovarajuću tačku z pomera duž luka kruga iz eliptičkog pramena K, između krugova pramena L (nacrtani isprekidanom linijom) koji zaklapaju isti ugao, do tačke $M(z)$.



Slika 21: Dejstvo eliptičke homografije na krivolinijske "pravougaonike"

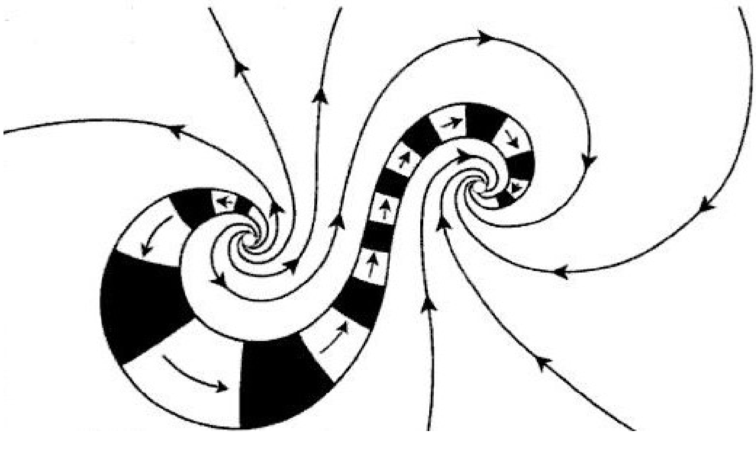
Na sledećoj slici 21 je ilustrovano dejstvo opisane eliptičke homografije na posebne oblasti inverzivne ravni. Svaki zatamnjeni "pravougaonik" (krivolinijski, čije su strane lukovi krugova) se slika homografijom $M(z)$ u sledeći takav u pravcu strelica - neki od njih su obojeni crno da bi se to naglasilo. Ovakva figura je karakteristična za sve periodične homografije: početni "pravouganik" će se vratiti u sebe posle n primena homografije, gde je n njen period (eliptička homografija je periodična sa periodom n ako je ugao konjugovane rotacije $\theta = 2\pi m/n$, gde je m/n nesvodljiv razlomak); na slici je period homografije 6.

Pogledajmo prikaz hiperboličke homografije (slika 22). Konjugovana sličnost



Slika 22: Dejstvo hiperboličke homografije

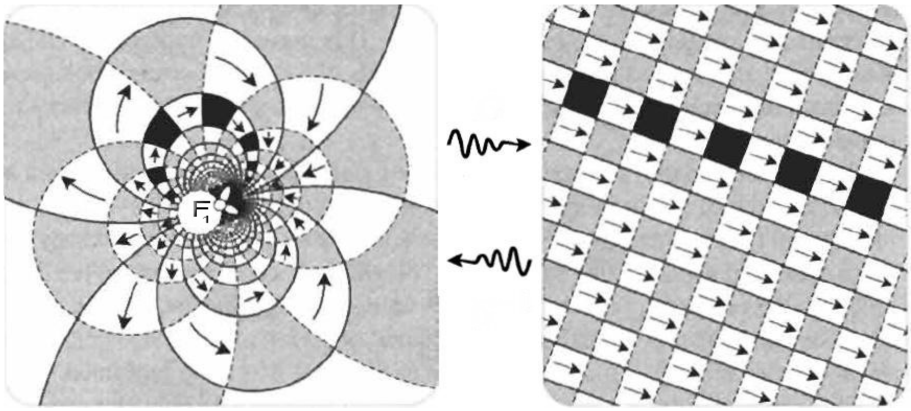
M' je homotetija ako i samo ako ostavlja invarijantnim prave kroz svoju fiksnu tačku (pramen K'), pa je M hiperbolička ako i samo ako ostavlja invarijantnim krugove odgovarajućeg eliptičkog pramena K kroz svoju fiksnu tačku. Slika prikazuje takvu transformaciju sa koeficijentom homotetije $k > 1$. Primetimo da se uzastopnom primenom homografije M na osenčene "pravougaonike", oni udaljavaju od fiksne tačke F_1 i približavaju fiksnoj tački F_2: $M^n(z) = F^{-1} \circ (M')^n(z) \circ F \longrightarrow F^{-1}(\infty) = F_2 (n \to \infty)$. Zato u ovom slučaju kažemo da je F_1 *odbojna tačka*, a F_2 *privlačna tačka homografije*; ako je koeficijent homotetije $k < 1$, F_1 i F_2 menjaju uloge.



Slika 23: Dejstvo loksodromične homografije

Na ilustraciji 23 može se videti dejstvo loksodromične homografije. Ovde nisu invarijantni ni krugovi iz K, ni krugovi iz L, već istaknute krive na slici (sa strelicama); takođe je ilustrovan efekat uzastopnih primena M na mali "pravouganik" blizu F_1. Kao i kod hiperboličke homografije, jedna fiksna tačka je odbojna, a druga privlačna (i menjaju uloge u zavisnosti od koeficijenta i ugla konjugovane dilativne rotacije M').

Prikaz paraboličke homografije je dat na slici 24. Na levom delu su prikazana



Slika 24: Dejstvo paraboličke homografije

dva ortogonalna parabolička pramena (punom K i isprekidanom linijom K_1) određena fiksnom tačkom F_1 (i oni su invarijantni pri M). Konjugovanjem (inverzijom sa centrom F_1) se oni slikaju u ortogonalne pramenove paralelnih pravih (desni deo slike, odgovarajućom punom/isprekidanom linijom). Dejstvo obe homografije na odgovarajuće osenčene oblasti je prikazano; svaki (krivolinijski) pravouganik se slika u sledeći u pravcu strelice. Vektor translacije M' (koja je kompozicija refleksija u odnosu na dve prave iz K') je upravo vektor pomeraja pravougaonika (desno).

3.4 Konstrukcija slike pri kružnoj transformaciji. Karakteristični paralelogram

Podsetimo se da prema stavu 3.8 postoje tačno dve kružne transformacije koje tri tačke slikaju u date tri tačke; pritom je za određivanje konstrukcije tih kružnih transformacija dovoljno pronaći jednu koja je homografija, a ova druga koja je antihomografija će biti kompozicija te homografije i inverzije u krugu definisanom sa tri originalne tačke. Mi ćemo za date fiksne tačke i pol (a time poznate i njihove slike), odrediti konstrukciju jedine dve kružne transformacije kojima one odgovaraju; biće, dakle, dovoljno izvesti onu koja je homografija i nije sličnost[21]. Koristićemo osobine kružnih transformacija da čuvaju krugove, uglove i dvorazmeru tačaka.

Neka je M homografija (koja nije sličnost) čije su fiksne tačke F_1, F_2 i čiji je pol m_∞. Konstruišimo sliku M_z proizvoljne tačke z pri toj homografiji. Imamo da je $M : F_1, F_2, m_\infty, \infty, z \mapsto F_1, F_2, \infty, M_\infty, M_z$.

Iz relacije $[F_1 m_\infty \infty z] = [F_1 \infty M_\infty M_z]$ dobijamo da je $m_\infty z : F_1 z = F_1 M_\infty : F_1 M_z$ (1), a iz $[F_1 \infty m_\infty z] = [F_1 M_\infty \infty M_z]$ sledi $F_1 m_\infty : F_1 z = M_\infty M_z : F_1 M_z$ (2), pa su trouglovi $m_\infty z F_1$ i $M_\infty F_1 M_z$ slični (3). Specijalno, ako je $z = F_2$, zamenom u (1) proizilazi da je $m_\infty F_2 = F_1 M_\infty$, i analogno $m_\infty F_1 = F_2 M_\infty$ (zamenom F_1 i F_2).

[21] za konstrukciju sličnosti na osnovu slika 3 date tačke pogledati npr. [14, 218. str]

(I) Pretpostavimo da su fiksne tačke različite. Onda M_∞ predstavlja presečnu tačku krugova $k(F_2, F_1m_\infty)$ i $k(F_1, F_1m_\infty)$. Otud vidimo da je $m_\infty = M_\infty$ ako i samo ako je m_∞ središte segmenta F_1F_2.

(Ia) Pretpostavimo najpre da m_∞ ne polovi duž F_1F_2, tj. $m_\infty \neq M_\infty$. Ako su F_1, F_2, m_∞ nekolinearne, $F_1M_\infty F_2m_\infty$ će biti paralelogram i njega ćemo zvati *karakteristični paralelogram*[22] homografije M (slika 3.4). Ukoliko su kolinearne, njima će biti i M_∞, i pritom će se poklapati središta duži F_1F_2 i $m_\infty M_\infty$. Dakle, tačku M_∞ ćemo stoga konstruisati kao centralno-simetričnu tački m_∞ u odnosu na središte F_1F_2. Obzirom da se prave F_2m_∞, $m_\infty z$ i F_2z slikaju redom u prave F_2M_∞, $M_zM\infty$ i krug $F_2M_zM_\infty$, i kako je ugao između prave i kruga podudaran periferijskom uglu nad tetivom određenom njihovim presečnim tačkama, i čuvaju se uglovi, biće $\triangle F_2m_\infty z$ sličan $M_zM_\infty F_2$. (5) Otuda je (ukoliko su prave F_2z, F_1F_2 unutar tupog ugla $\angle m_\infty F_2M_\infty$, slično se pokazuje u svim slučajevima)

$$\begin{aligned}\angle zF_2M_z &= \angle m_\infty F_2M_\infty - \angle m_\infty F_2z - \angle M_zF_2M_\infty\\ &= (\pi - \angle F_2m_\infty F_1) - \angle m_\infty F_2z - \angle m_\infty zF_2\\ &= \angle zm_\infty F_1.\ (6)\end{aligned}$$

Takođe kako je

$$\begin{aligned}F_2z : F_2M_z &= m_\infty F_2 : M_\infty M_z \text{ (iz (5))}\\ &= F_1M_\infty : M_\infty M_z \text{ (iz (4))}\\ &= m_\infty z : F_1m_\infty \text{ (iz (3))}\end{aligned}$$

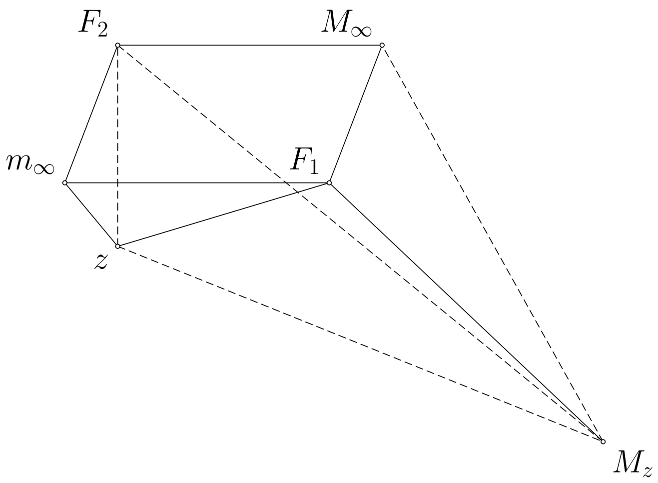
i s obzirom na (6), zaključujemo da je $\triangle zF_2M_z$ sličan $\triangle zm_\infty F_1$. (7)

Primetimo da kako homografija M slika pravu F_1m_∞ na pravu F_1M_∞, a one se seku u drugoj fiksnoj tački, da ona zapravo predstavlja perspektivno preslikavanje prve prave na drugu - to sledi jer je ona projektivno preslikavanje obzirom da čuva harmonijsku konjugovanost tačaka, a pritom i zajednički element mnogostrukosti slika u sebe [1, str. 85.].

(Ib) Ako je $m_\infty = M_\infty$, tj. m_∞ je središte segmenta određenog fiksnim tačkama, analogno kao u (3), za drugu fiksnu tačku F_2 imamo sličnost trouglova $\triangle zm_\infty F_2$, $\triangle F_2M_\infty M_z$, pa je $\angle F_1M_zF_2 = \pi - \angle F_1zF_2$, te su tačke F_1, z, F_2, M_z konciklične (odnosno kolinearne ako i samo ako je z na pravoj F_1F_2), i otuda će tražena tačka M_z biti presečna tačka kruga (prave) kroz F_1, F_2, z sa pravom kroz F_1 koja zaklapa sa pravom F_1F_2 ugao podudaran $\angle F_1zm_\infty$.

(U slučaju da su date z, M_z, m_∞ kod involucije M, fiksne tačke možemo odrediti na sledeći nacin: neka je b bisektrisa ugla $\angle zm_\infty M_z$, O presečna tačka medijatrise duži zM_z i prave kroz m_∞ upravne na b, i k krug sa centrom O kroz tačku z; tada su fiksne tačke presečne tačke kruga k i bisektrise b).

[22] Prvi koji je pomenuo ovaj objekat bio je Ernst Jacobsthal u *Ueber die Klasseninvariante ähnlicher Abbildungen. Kon. Norske Vid. Selskab Forhandlinger, Part I, 25 (1952) 119-24; Part II, 26 (1953), 10-15*



(II) Specijalno, ukoliko $F_1 = F_2$, F_1 polovi duž $m_\infty M_\infty$. Konstrukciju izvodimo na osnovu sličnosti trouglova $m_\infty z F_1$ i $M_\infty F_1 M_z$ iz (3).

3.5 Kružne transformacije u krugovima snopa

Za kružnu transformaciju sačinjenu od inverzija u krugovima nekog snopa kažemo da je *kružna transformacija tog snopa*. Dokazaćemo da se bilo koja kružna transformacija snopa može svesti na kompoziciju najviše tri inverzije tog snopa, i da stoga mora biti ne-lokosodromična. Radi preglednosti kompoziciju inverzija u krugovima k i l ćemo označavati sa $k \circ l$. Dokažimo najpre par pomoćnih stavova:

Stav 3.11 *Za date krugove k i l i tačku P, postoje krugovi $\overline{k}$ i $\overline{l}$ pramena kl kroz P takvi da je $k \circ l = \overline{k} \circ \overline{l}$.*

Dokaz Neka su k i l krugovi, i tačka P van njih. Ako su k i l presečni / tangentni / disjunktni, postoji inverzija $F : X \mapsto X'$ koja ih slika u k', l', i to redom u dve prave koje se seku u nekoj (konačnoj) tački O / dve paralelne prave / dva koncentrična kruga. Neka je onda $\overline{k}'$ prava OP'/prava kroz P' paralelna k', l'/krug kroz P' koncentričan k' i l'. Tada će $I_{k'} \circ I_{l'}$ biti neka rotacija R / translacija T/homotetija H, i neka je tada $\overline{l}'$ prava kroz O / prava paralelna k', l' / krug koncentričan k' i l', takva da je $k' \circ l' = \overline{k'} \circ \overline{l'}$ $=R$ / T / H; konjugovanjem tog izraza inverzijom F dobijamo $k \circ l = \overline{k} \circ \overline{l}$, gde su $\overline{k} = F^{-1}(\overline{k}')$ i $\overline{l} = F^{-1}(\overline{l}')$. □

Stav 3.12 *Ako krugovi k, l, m pripadaju eliptičkom pramenu, pri čemu je P jedna od njihovih zajedničkih tačaka, onda postoji krug k_* tog pramena takav da je $k \circ l \circ m = k_*$.*

Dokaz Inverzijom $X \mapsto X'$ sa centrom P se krugovi k, l, m slikaju u konkurentne prave k', l', m', pa će k'_* biti prava njihovog pramena takva da su jednake

rotacije $l' \circ m'$ i $k' \circ k'_*$ tj. takva da su jednaki orijentisani uglovi $\angle l'm'$ i $\angle kk'_*$.
□

Neka su k, l, m, n četiri kruga nekog snopa $\mathcal{S}$; pokažimo da se kompozicija inverzija u njima može svesti na kompoziciju u neka dva kruga tog snopa (ako se ta dva kruga poklapaju, očito je ta kompozicija identiteta). Neka je tačka P proizvoljna na k (i u slučaju paraboličkog snopa, različita od zajedničke tačke krugova tog snopa). Onda na osnovu stava 3.11 postoje krugovi $k', l', l'', m', m'', n' \in \mathcal{S}$ kroz tačku P takvi da je $k \circ l = k' \circ l'$, $l' \circ m = l'' \circ m'$, $m' \circ n = m'' \circ n''$. Tada će biti $k \circ l \circ m \circ n = k' \circ l' \circ m \circ n = k' \circ l'' \circ m' \circ n = k' \circ l'' \circ m'' \circ n'$, gde krugovi k', l'', m'', n' pripadaju snopu i imaju zajedničku tačku, pa prema 1.13 pripadaju i nekom eliptičkom pramenu el, a na osnovu 3.12 biće $k' \circ l'' \circ m'' \circ n' = m_* \circ n'$, gde m_* pripada pramenu el, a time i snopu $\mathcal{S}$. Otuda je $k \circ l \circ m \circ n = m_* \circ n'$, gde $m_*, n' \in \mathcal{S}$. Stoga se svaka kružna transformacija snopa može predstaviti kao kompozicija najviše tri inverzije tog snopa.

4 Sferni snopovi

4.1 Potencija tačke u odnosu na sferu

Koristeći rezultate prvog poglavlja za krugove u ravni, lako se izvode analogne definicije, tvrdjenja i zaključci za sfere u prostoru u ovom poglavlju.

Stav 4.1 *Neka su dati tačka P i sfera $\Sigma(O,r)$. Proizvod rastojanja tačke P od bilo koje dve tacke sfere sa kojima je kolinearna je konstantan broj koji iznosi $PO^2 - r^2$ i njega zovemo potencija tačke P u odnosu na sferu Σ i označavamo sa $p(P,\Sigma)$.*

Tačka je van/na/unutar sfere ako i samo ako je njena potencija u odnosu na tu sferu veća/jednaka/manja od nule. Ako je tačka P van sfere Σ, i T dodirna tačka tangente na Σ kroz P, tada je $p(P,\Sigma) = PT^2$. Ako je tačka P unutar sfere, i T krajnja tačka tetive kroz P upravne na pravu OP, tada je $p(P,k) = -PT^2$.

4.2 Radikalna ravan, osa, centar, sfera. Pramenovi i snopovi sfera. Inverzija u snopu sfera

Ugao između dve sfere u njihovoj presečnoj tački je ugao između njihovih tangentnih ravni u toj tački. Za dve sfere se kaže da su *ortogonalne* ako zaklapaju prav ugao u svakoj zajedničkoj tački. Za pravu određenu centrima dve nekoncentrične sfere kažemo da je njihova *osa*. Bilo koju ravan u kojoj leži osa nekih sfera zovemo njihovom *osnom ravni*. Za sfere kojima su centri nekomplanarne tačke kažemo da su u *opštem polozaju*. Za pet ili više tačaka kažemo da su *kosferne* ako pripadaju istoj sferi. Dve tačke sfere su *suprotne* na njoj ako su one krajnje tačke nekog njenog prečnika. Ako su Σ i Γ dve različite sfere, za sferu Σ kažemo da *polovi sferu* Γ (odnosno da je Γ *ekvator* od Σ), ako Σ sadrži dve suprotne tačke na γ.

Za svaku tačku koja ima jednake potencije u odnosu na dve ili više zadatih sfera kažemo da je *radikalna tačka* tih sfera. Ona je istovremeno na, van ili unutar njih.

Lema 4.2 *Neka su $\Sigma(O_\Sigma, r_\Sigma)$ i $\Gamma(O_\Gamma, r_\Gamma)$ dve sfere. Tada je Σ ortogonalna na $\Gamma \iff r_\Sigma^2 = p(O_\Sigma,\Gamma)$, a Σ je ekvator od $\Gamma \iff r_\Sigma^2 = -p(O_\Sigma,\Gamma)$.*

Stav 4.3 *Tačka $\bar{O}$ je radikalna sferama Γ i Δ ako i samo ako je ona njihova zajednička tačka ili centar zajedničke ortogonalne sfere (kada je van njih) ili centar zajedničkog ekvatora (kada je unutar njih).*

Sfera $\bar{\Gamma}(\bar{O}, \sqrt{|p|})$, gde je $p = p(\bar{O},\Gamma) = p(\bar{O},\Sigma)$, koja predstavlja zajedničku tačku (degenerisan slučaj), ortogonalnu sferu ili ekvator sfera Γ i Σ, zovemo *radikalnom sferom* tih sfera.

Dakle centar svake radikalne sfere date dve sfere je njihova radikalna tačka, i ona određuje tu radikalnu sferu.

Stav 4.4 *Na osi dve nekoncentrične sfere jedinstveno je određena njihova radikalna tačka. Ravan kroz tu tačku upravna na osu je skup svih radikalnih tačaka tih sfera, i ona se naziva radikalna ravan tih sfera.*

Odredimo radikalnu ravan dve sfere u zavisnosti od toga da li se one seku, dodiruju ili su disjunktne:

Ako se one seku, presečne tačke su im radikalne i predstavljaju krug, pa je njime određena radikalna ravan. Kada se dve sfere dodiruju, radikalna ravan je zajednička tangentna ravan u tački dodira. Najzad, ako su dve sfere $\Gamma(O, r)$ i $\Gamma'(O', r')$ disjunktne, za konstrukciju njihove radikalne ravni dovoljno je odrediti jednu njenu pravu (radikalna ravan biće upravna kroz tu pravu na pravu OO'). Ako je Δ neka sfera koja seče Γ po krugu k i seče Γ' po krugu k', presek ravni krugova k i k' je prava koja pripada radikalnoj ravni.

Skup svih sfera od kojih svake dve imaju za radikalnu istu ravan Θ, naziva se *pramen ravni*, a ravan Θ *radikalna ravan* tog pramena sfera. Za sfere nekog pramena kažemo i da su *koaksijalne*.

Neka su Γ i Δ dve sfere nekog pramena $\mathcal{P}$ čija je radikalna ravan Π. Tada je Π upravna na ose svih parova sfera tog pramena, pa su njihovi centri kolinearni na osi Γ i Δ, koju zovemo i *osom tog pramena*. Proizvoljna tačka radikalne ravni Π je radikalna svakom paru sfera tog pramena, pa ima istu potenciju u odnosu na sve njegove sfere. Zato presek Γ i Δ predstavlja ujedno i presek svih parova sfera tog pramena.

Ukoliko je presek dve proizvoljne sfere Γ i Δ pramena (pa i svake dve sfere tog pramena) krug, 1, ili 0 tačaka, za pramen kažemo da je *eliptički, parabolički* ili *hiperbolički*.

Stav 4.5 *Ako su Γ i Δ dve sfere nekog pramena kojima je radikalna sfera Γ', onda je Γ' radikalna svakom paru sfera tog pramena.*

Otuda sledi:

Lema 4.6 *Ako dve sfere sadrže neku tačku P, imaju ortogonalnu sferu Σ ili ekvator Θ, tada i svaka sfera njihovog pramena redom sadrži P, ortogonalna je na Σ ili ima ekvator Θ.*

Stav 4.7 *Neka su Γ i Δ dve sfere nekog pramena, i Γ' i Δ' neke dve njima radikalne sfere određenih tipova. Tada taj pramen čine svi parovi sfera kojima su radikalne Γ' i Δ', istih tipova, a koje imaju zajedničku osnu ravan sa Γ, Δ, Γ', Δ'.*

Zato je pramen jednoznačno određen sa svoje dve sfere Γ i Δ, pa ga možemo označiti i sa $\Gamma\Delta$. Specijalno, ako su Γ' i Δ' sfere ortogonalne na Γ i Δ (one uvek postoje, jer su im centri proizvoljne dve spoljašnje i radikalne tačke krugova Γ i Δ), važi sledeće:

Stav 4.8 *Ako su Γ i Δ dve sfere nekog pramena ortogonalne na sfere Γ' i Δ', onda taj pramen čine sve sfere ortogonalne na Γ' i Δ', i kojima je zajednička osna ravan sa Γ, Δ, Γ', Δ'.*

Otud se pramen sfera može definisati kao skup svih sfera ortogonalnih na neke dve sfere Γ' i Δ' u zajedničkoj osnoj ravni. Radikalne ravni pramenova $\Gamma\Delta$ i $\Gamma'\Delta'$ su međusobno upravne, pa zato za pramenove $\Gamma\Delta$ i $\Gamma'\Delta'$ kažemo da su međusobno *upravni pramenovi.* U slučaju da je $\Gamma\Delta$ hiperbolički, onda ce $\Gamma'\Delta'$ biti eliptički, i obrnuto. Ako je $\Gamma\Delta$ parabolički, takav će biti i $\Gamma'\Delta'$.

Eliptički pramen sfera čine sve sfere kroz neki krug k, i njega tada označavamo sa $el[k]$. Parabolički pramen sfera čine sfere tangentne na neku sferu Γ u tački A, i njega označavamo tada sa $Pa[\Gamma, A]$. Kako je svaki pramen određen na njega upravnim pramenom i osom, sa $h[AB]$ ćemo označiti hiperbolički pramen na koga je upravan pramen $el[k]$, pri čemu tačke A i B odredjuju osu, a k je bilo koji krug na kome su one suprotne; za njih kažemo i da su *granične tačke* pramena $h[AB]$. Primetimo da je radikalna ravan pramena $el[k]$ ravan kruga k, a pramena $h[AB]$ medijalna ravan duži AB. Svaka od sfera hiperboličkog pramena predstavlja tzv. *Apolonijevu sferu* u odnosu na svoje granične tačke, tj. ona je geometrijsko mesto tačaka čiji je odnos rastojanja od graničnih tačaka određena konstanta.

Ukoliko su sfere u opštem položaju, njima određene radikalne ravni se seku u jedinstvenoj tački koju zovemo *radikalnim centrom* tih sfera. Ona je njihova jedina zajednička tačka ili centar jedine zajedničke ortogonalne sfere (kada je van njih) ili centar jedinog zajedničkog ekvatora (kada je unutar njih). Skup svih sfera od kojih svake četiri imaju za radikalnu istu sferu Σ zovemo *sferni snop*. Otud je snop sfera skup svih sfera sa zajedničkom tačkom, ortogonalnom sferom ili ekvatorom. Za njega tada kažemo da je, redom: parabolički, hiperbolički ili eliptički snop. Kako je svaki snop sfera jednoznačno određen svojom radikalnom sferom Σ i tipom, parabolički/hiperbolički/eliptički snop ćemo označavati redom sa $\mathcal{PS}(\Sigma)$, $\mathcal{HS}(\Sigma)$, $\mathcal{ES}(\Sigma)$. Svaki snop je određen sa svoje četiri sfere u opštem položaju Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4, pa se može označiti i sa $\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3\Sigma_4$, a za njih kažemo da predstavljaju njegovu *generatrisu*.

Stav 4.9 *Ako sfere Σ_1 i Σ_2 pripadaju nekom snopu, onda i pramen $\Sigma_1\Sigma_2$ pripada tom snopu.*

Stav 4.10 *Sfere snopa kroz neku tačku P koja nije centar snopa, pripadaju eliptičkom pramenu u datoj osnoj ravni, i prolaze kroz tačno još jednu tačku kolinearnu sa P i centrom snopa.*

Stav 4.11 *Neka su Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4 sfere u opštem položaju. Snop $\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3\Sigma_4$ je najmanji skup sfera koji sadrži Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4 i sa svake dve od svojih sfera, sadrži i ceo pramen koji one daju. Odnosno, $\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3\Sigma_4 = \bigcap\{S | \Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4 \in S \wedge (u, v \in S \Rightarrow uv \subseteq S)\}$.*

Dakle, opisno govoreći, snop sfera predstavlja zatvorenje četiri sfere u opštem položaju u odnosu na operaciju formiranja pramena sfera.

5 Inverzija u odnosu na sferu

5.1 Definicija i osnovna svojstva. Inverzivan prostor i invarijante

Za dve tačke kažemo da su međusobno *inverzne u odnosu na snop* ako su presečne tačke sfera nekog eliptičkog pramena tog snopa u zajedničkoj osnoj ravni. Na osnovu stava 4.10 vidimo da svaka tačka osim centra snopa ima jedinstvenu njoj inverznu tačku. Otuda se može definisati preslikavanje koje svakoj tački dodeljuje njoj inverznu tačku u odnosu na neki snop (osim njegovom centru), i to preslikavanje onda zovemo *inverzijom u odnosu na taj snop*. Prepoznajemo tipove inverzije kao tipove svog odgovarajućeg snopa, pa imamo *hiperboličku, eliptičku i paraboličku inverziju*. Parabolicka inverzija je trivijalno preslikavanje kojim se svaka tačka slika u centar snopa. Hiperboličku inverziju ćemo zvati i *inverzijom u odnosu na sferu*, i najviše ćemo obratiti pažnju na nju, obzirom da eliptička inverzija predstavlja kompoziciju hiperboličke inverzije i centralne simetrije u odnosu na centar snopa. Ako je Σ sfera sa centrom O i poluprečnika r, tačka P (različita od O) se inverzijom u odnosu na tu sferu slika u tačku P' na polupravoj OP ako je $OP \cdot OP' = r^2$. Za tačku P' ćemo reći da je *inverzna tački P u odnosu na sferu* Σ, a tu sferu ćemo zvati *sferom inverzije*. Tačku O ćemo zvati *centrom inverzije*. P' se može definisati i kao druga presečna tačka tri sfere kroz P ortogonalne na sferu inverzije.

Iz definicije vidimo da je inverzija u odnosu na sferu involutivna bijekcija koja razmenjuje unutrašnje i spoljašnje tačke sfere, a da su tačke same sfere njene jedine invarijantne tačke.

Analogno pojmu inverzivne ravni uvodimo pojam inverzivnog prostora tako što se euklidskom prostoru doda *idealna ili beskonačno daleka tačka* ∞, koja pripada svim ravnima i pravama. Euklidski prostor dopunjen tačkom ∞ naziva se *inverzivnim (konformnim) prostorom*, a ravni i prave dopunjene sa ∞ zovu se *ravnima i pravama inverzivnog prostora*. Sve ravni inverzivnog prostora i sfere pridruženog euklidskog prostora (sfere konačnog prečnika) zovemo zajednički *sfere inverzivnog prostora*.

Slično odgovarajućem slučaju u ravni, izvodimo sledeće tvrđenje:

Stav 5.1 *Inverzija u odnosu na sferu čuva sfere, krugove, dvorazmeru, uglove između krivih, simetrične tačke, pramenove i snopove sfera.*

Dokaz Neka je Σ sfera inverzije $X \mapsto X'$ sa centrom O, τ ravan, i ψ sfera. Očigledno se ravan kroz O slika u ravan kroz O jer su inverzne tačke kolinearne sa centrom inverzije. Ako je $\tau \ni O$, neka je T podnožje normale iz O na τ. Neka je X proizvoljna tačka ravni τ, $X \neq T$, tada je restrikcija sferne inverzije u ravni OTX, inverzija u odnosu na presečni krug te ravni i σ, pa iz sličnosti trouglova OTX i $OX'T'$, X' pripada krugu nad prečnikom OT', tj. sferi Ψ nad prečnikom OT' (bez tačke O). I obrnuto, ako je tačka $X \neq O, T, X \in \psi$, tada tačka X' pripada pravoj ravni OTX kroz T upravnoj na OT, tj. X' pripada ravni τ. Ako je $O \notin \psi$, i osa σ i ψ seče ψ u tačkama A i B, i $X \in \psi$, tada je X' u ravni ABX na krugu sa prečnikom $A'B'$, tj. na sferi sa prečnikom $A'B'$. Dakle, sferna inverzija čuva sfere i ravni, pa zato i krugove i prave. Dokaz za čuvanje dvorazmere je isti kao u ravni. Kako je inverzija u krugu izogonalna, takva će biti i sferna inverzija, ako uočimo tangente dve sfere kroz proizvoljnu presečnu tacku u osnoj ravni koja sadrži tu tačku. Imajući u vidu čuvanje uglova, i da međusobno inverzne tačke pripadaju trima sferama ortogonalnim na sferu inverzije, čuvaće se simetrične tačke. Obzirom na čuvanje incidentnosti, krugova i sfera, i simetričnih tačaka, pramen sfera se slika u pramen sfera istog tipa. Iz toga, kao i stava 4.11 sledi da se čuvaju i snopovi sfera određenog tipa. □

Bijekcije inverzivnog prostora na sebe koje sfere preslikavaju na sfere zvaćemo *sfernim transformacijama.* Primećujemo da su izometrije i sličnosti prostora, kao i njihove kompozicije, primeri sfernih transformacija, i analogno kao u inverzivnoj ravni, pokazuje se da su one i jedine sferne transformacije inverzivnog prostora. Samo se pritom, umesto Drugog, može iskoristiti tzv. Treći Peanov stav čiji dokaz je izložen u [14, str. 36-37] i koji glasi:

Stav 5.2 *Ako su A, B, C, D četiri nekomplanarne tačke, tada je E tačka prostora S ako i samo ako pripada skupu tačaka ravni koje sadrže: pravu AD i neku tačku duzi BC, ili pravu BD i neku tačku duzi CA ili pravu CD i neku tačku duži AB.*

Stav 5.3 *Svaka sferna transformacija inverzivnog prostora je ili sličnost ili proizvod izometrije i inverzije (u sferi konačnog prečnika).*

Preciznije, svaka sferna transformacija se može izraziti kao proizvod r refleksija i i inverzija, gde je $r \leq 4, i \leq 2, r + i \leq 5$. Naime, svaka izometrija je proizvod najviše četiri ravanske refleksije ($r \leq 4$); svaka sličnost je proizvod direktne homotetije i osne rotacije, odnosno direktne homotetije i osno-rotacione refleksije [13, str. 182,184], a direktna homotetija je proizvod dve inverzije u koncentričnim sferama, što u rastavljanju sličnosti daje 2 ili 3 ravanske refleksije i dve inverzije ($r \leq 3, i \leq 2$).

5.2 Stereografska projekcija

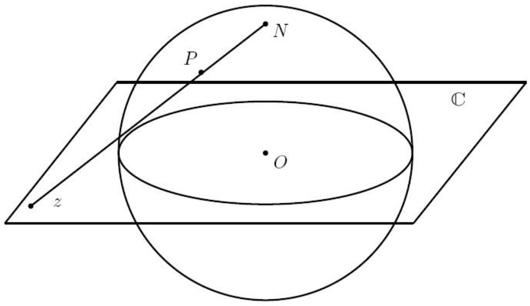
Stereografsku projekciju prvi je upotrebio Ptolomej (125. p.n.e.) da bi omogućio prikaz pozicije nebeskih tela vidljivih na nebeskoj sferi.

Neka je Σ sfera sa centrom O, i odaberimo njenu tačku N koju ćemo zvati *severni pol sfere* (a njoj suprotnu tačku na sferi - *južni pol*). Neka je Π (euklidska) ravan koja sadrži O i koja je normalna na pravu NO. Krug $\pi \cap \Sigma$ zovemo *ekvatorijalni krug* te sfere. Preslikavanje ST koje svakoj tački M sfere (različitoj od N) dodeljuje tačku $NM \cap \Pi$ zovemo *stereografska projekcija*[23].

Ukoliko se ravan Π dopuni do inverzivne idealnom tačkom, toj tački se pridružuje severni pol, te se stereografska projekcija proširuje na celu sferu Σ koja se slika na tu inverzivnu ravan.

Primetimo da je stereografska projekcija zapravo restrikcija pogodno odabrane sferne inverzije: ako je S sfera sa centrom N koja sadrži ekvator, tj. poluprečnika $NO\sqrt{2}$, onda se sfera Σ bez tačke N inverzijom u odnosu na S slika na ravan Π,

[23] Stereografska projekcija se nekad definiše i kao inverzna opisanom preslikavanju ST, tj. tako da slika ravan na sferu. Takođe, ona se može uopštiti da ravan Π ne mora da sadrži centar sfere.



Slika 25:

i pritom restrikcija te inverzije na ravan Π predstavlja preslikavanje ST. Otuda stereografska projekcija ima i odgovarajuće osobine inverzije: ona čuva uglove, krugove slika u krugove itd.

Posmatrajmo pramen krugova $\{k_i\}$ u ravni Π, i neka su $\{\Sigma_i\}$ sfere kojima su ekvatori krugovi iz $\{k_i\}$; tada i one sačinjavaju pramen sfera istog tipa. Kako je $\{k_i\} = \Pi \bigcap \{\Sigma_i\}$, stereografskom projekcijom dobijamo skup krugova $\{k_i'\} = \Sigma \bigcap \{\Sigma_i'\}$. Neka je k_i' izabrani krug, i k_j' bilo koji drugi iz $\{k_i'\}$. Tada se njihove ravni seku po nekoj pravoj k_i^*, pri čemu svaka tačka na njoj ima jednake potencije u odnosu na njih (koja je jednaka potenciji u odnosu na sferu), zato i u odnosu na sfere Σ_i' i Σ_j', pa pripada radikalnoj ravni pramena $\{\Sigma_i'\}$, dakle prava k_i^* je presek te radikalne ravni i ravni kruga k_i', i po njoj se seku sve ravni krugova iz $\{k_i'\}$. Analogno se pokazuje da stereografske slike krugova snopa u ravni predstavljaju krugove na sferi Σ čije se ravni seku u jednoj tački – koja ima jednake potencije u odnosu na njih i sferu, pa je van/na/unutar sfere ako je originalni snop krugova hiperbolički/ parabolički/ eliptički. Otuda možemo definisati pramen i snop krugova na sferi: skup krugova na sferi čije se ravni seku po jednoj pravoj zovemo *pramen krugova sfere*, i to redom hiperbolički/parabolički/eliptički ako ta prava ne seče/dodiruje/prodire tu sferu; skup krugova na sferi čije se ravni seku u istoj tački zovemo *snop krugova sfere*, i on je redom hiperbolički/parabolički/eliptički ako je ta tačka van/na/unutar te sfere. Ukoliko opet (inverzno) stereografski projektujemo pramen ili snop krugova sfere na ravan – dobijamo pramen, odnosno snop krugova u ravni odgovarajućeg tipa, što zaokružuje opravdanje za prethodnu definiciju. Za dve tačke na sferi kažemo da su *inverzne (ili simetrične) u odnosu na krug na sferi*, ako su krugovi sfere kroz te dve tačke ortogonalni na taj krug.

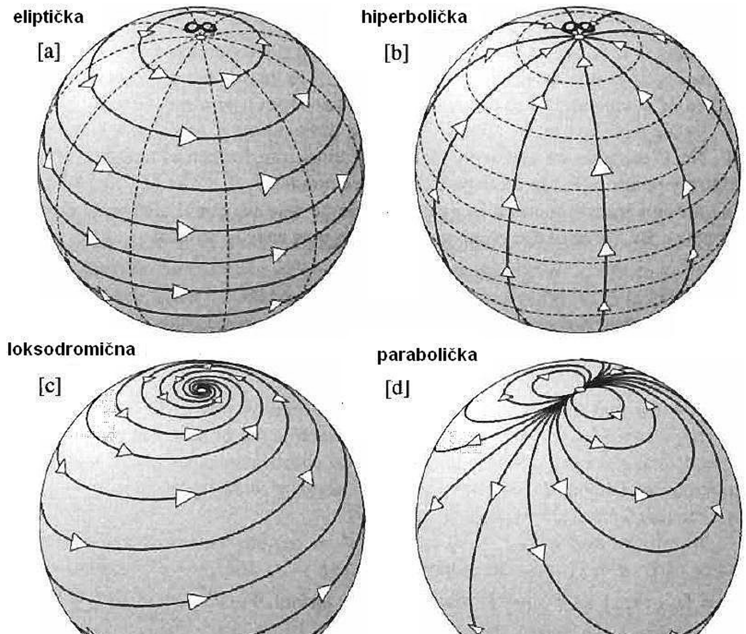
Posebno, imajući u vidu da je stereografska projekcija izogonalno preslikavanje sfere na ravan, pomoću nje se u ravni može prezentovati ograničena oblast sfere sa vernim prikazom uglove, i jedna je od najčešće korišćenih metoda za konstruisanje geografskih mapa. Ona omogućava i izvodjenje formula sferne trigonometrije iz formula trigonometrije ravni koje je razvio Giuseppe Cesàro[24]. Nama će dalje ova projekcija poslužiti za uvođenje tzv. sfernog modela inverzivne ravni.

[24]italijanski kristalograf i mineralog (1849-1939)

5.3 Prenošenje kružnih transformacija na sferu. Sferni model inverzivne ravni

Neka je T proizvoljna kružna transformacija inverzivne ravni Π. Pokazali smo da je ona konjugovana nekoj sličnosti T', i to odgovarajućom inverzijom koja fiksnu tačku od T slika u ∞. Neka je Σ sfera inverzivnog prostora koja dodiruje Π u fiksnoj tački O od T'. O ćemo smatrati južnim polom, a njoj suprotnu tačku – N severnim polom sfere Σ. Tada će restrikcija inverzije u odnosu na sferu S, I_S čiji je centar N i koja sadrži O na ravan Π, biti stereografska projekcija $ST : z \to \hat{z}$ koja slika ravan Π na sferu Σ. Očito se ∞ tačka ravni Π slika u tačku N.

Neka je K' pramen konkurentnih pravih kroz O, i L' pramen koncentričnih krugova sa centrom O. Tada su $ST(K')$ meridijani sfere Σ (veliki krugovi kroz O i N), a $ST(L')$ njeni uporednici. Ako je P' proizvoljan pramen paralelnih pravih ravni Π, tada je $ST(P')$ skup krugova $\hat{P}$ sfere Σ koji se dodiruju u severnom polu N i imaju zajedničku tangentu paralelnu pramenu P'. Sada ćemo razmotriti kakva kretanja sfere Σ stereografski indukuje sličnost T', kao i kakve odgovarajuće putanje na toj sferi nastaju njihovim dejstvom.



Slika 26: Putanje na sferi indukovane stereografskom projekcijom pri kružnoj transformaciji inverzivne ravni

1) Ako je T' rotacija sa centrom O, njen konjugat stereografijom ostvaruje rotaciju sfere Σ oko ose ON. Rotaciji tačke z po krugu $l \in L$ pritom odgovara rotacija tačke $\hat{z} = ST(z)$ po odgovarajućem uporedniku $ST(l)$. Dakle, invari-

jantni krugovi u ravni se stereografijom slikaju u invarijantne uporednike sfere. Fiksne tačke indukovane rotacije su O i severni pol N. Pri tom se meridijani slikaju u meridijane. (slika 26, a)

2) Ako je T' homotetija sa centrom O, ona stereografski indukuje homotetiju sfere Σ sa centrom O. Homotetiji tačke z po pravoj $k \in K$ odgovara homotetija tačke $\hat{z} = ST(z)$ po odgovarajućem meridijanu $ST(k)$. Dakle, invarijantne prave homotetije ravni se stereografijom slikaju u invarijantne meridijane sfere. Fiksne tačke indukovane homotetije su O i severni pol N. Pri tom se uporednici slikaju u uporednike. (slika 26, b)

3) Iz prethodna dva slučaja zaključujemo da ako je T' homografija - dilativna rotacija, da će njeno dejstvo biti odgovarajuća kompozicija, i da će odgovarajuće indukovane putanje biti "spirale" na slici. Takve putanje zovu se loksodrome (T je loksodromična). Meridijani i uporednici se slikaju redom u meridijane i uporednike. (slika 26, c)

4) Pretpostavimo da je T' translacija za neki vektor v. Neka je on i vektor ranije pomenutog pramena P' paralelnih pravih. Translaciji tačke z po pravoj $p \in P$ pritom odgovara rotacija tačke $\hat{z} = ST(z)$ po odgovarajućem krugu iz $\hat{P}$. Dakle, invarijantne prave pri translaciji ravni se stereografijom slikaju u invarijantne krugove iz $\hat{P}$ (translatorne krugove) pri indukovanoj transformaciji sfere. Fiksna tačka te transformacije je severni pol N. (slika 26, d)

5) Pretpostavimo da je T' osna refleksija u odnosu na pravu p' koja sadrži tačku O. Tada se ravan Θ koja sadrži p' i tačku N slika inverzijom I_S u sebe; pa ako su z i z' tačke ravni Π simetrične u odnosu na pravu p, tj. ravan Θ, onda će njihove stereografske projekcije $\hat{z}$ i $\hat{z'}$ biti tačke sfere $\Sigma = I_S(\Pi)$ simetrične u odnosu na ravan $\Theta = I_S(\Theta)$, tj. osna refleksija sa osnovom p' će indukovati na sferi Σ refleksiju u odnosu na ravan meridijana $ST(p')$. Uporednici pritom ostaju invarijantni, i fiksne su samo tačke tog meridijana. Dakle, ako je refleksija $I_{p'}$ deo razlaganja indirektne sličnosti T' (konjugovane nekoj antihomografiji), ona će putanje dobijene direktnim delom sličnosti T' (homotetija, translacija, ili Id) preslikati refleksijom u odnosu na ravan (N, p').

Najzad, za proizvoljnu kružnu transformaciju T smo odredili njeno dejstvo (i putanje) na odgovarajućoj sferi. Primetimo da smo prenošenjem kružnih transformacija na sferu dobili i jedan model inverzivne ravni (u kome se ∞ tačka identifikuje sa severnim polom).

6 Kružni snopovi i konformni modeli prostora

U ovom poglavlju ukazaćemo na to da pogodni lukovi krugova snopa predstavljaju prave u (poznatim) konformnim modelima euklidskog i neeuklidskog prostora, a da pritom restrikcije kružnih transformacija (generisanih inverzijama u pomenutim krugovima) daju izometrije u tim modelima.

Neka je $\mathcal{S}$ neki snop krugova ravni $\mathbb{E}$. Svakoj tački A te ravni dodelimo preslikavanjem f par A, A', gde je A' inverzna A u tom snopu. Za ravan $\mathbb{E}$, njenu tačku A i krug p, skupove $\mathbb{E}/f$[25], A/f i p/f nazovimo redom $\mathcal{S}$-ravan $\mathbb{E}$, $\mathcal{S}$-tačka A i $\mathcal{S}$-prava p.[26] Govorićemo da $\mathcal{S}$-tačka A pripada $\mathcal{S}$-pravoj p ili da $\mathcal{S}$-prava p sadrži $\mathcal{S}$-tačku A ako tačka A u skupovnom smislu pripada krugu p. Inverziju u krugu p nazovimo $\mathcal{S}$-refleksijom u $\mathcal{S}$-pravoj p. Za kompoziciju $\mathcal{S}$-refleksija kažemo da je izometrija $\mathcal{S}$-ravni. Za dva para $\mathcal{S}$-tačaka kažemo da su podudarni ako se jedan slika u drugog nekom izometrijom. Ugao između dve $\mathcal{S}$-prave p i q je euklidski ugao između krugova p i q. Kažemo da su one međusobno upravne (ortogonalne) ako su takvi međusobno krugovi p i q.

U slučaju da je snop hiperbolički, uvedeni pojmovi predstavljaju odgovarajuće pojmove (kada se reč $\mathcal{S}$- zameni sa h-) u Poenkareovom disk modelu hiperboličke ravni čija je apsoluta radikalni krug snopa. Za dokaz da je h-ravan uistinu model hiperboličke ravni pogledati npr. [14, str. 282].

Ako je snop parabolički, posmatrajmo sve prave euklidske ravni (koja se još naziva paraboličkom ravni). One se inverzijom u centru snopa P slikaju u njegove krugove bez tačke P. Osne refleksije euklidske ravni indukuju inverzije tog snopa. Ako su tačke A, B, C kolinearne, onda je duž AC podudarna sa CB ako i samo ako je dvorazmera $[A'B'C'P'] = 1$, gde su A', B', C' konciklične tačke u koje se slikaju redom A, B, C. Kako inverzija čuva relacije incidencije, razdvojenosti (i na pravoj i na krugu) i dvorazmeru, ako uzmemo za prave - krugove bez zajedničke tačke snopa, za refleksije – inverzije u njima, a za podudarne duži one koje će dati odgovarajuću dvorazmeru jednaku 1, parabolički snop (bez zajedničke tačke) predstavlja konformni model euklidske ravni.

U slučaju da je snop eliptički, uvedeni pojmovi predstavljaće odgovarajuće pojmove u modelu eliptičke ravni (eliptičkog disk modela) čiji je ekvator radikalni krug snopa. Da bismo naglasili da je neki pojam eliptički u narednom izlaganju, dodaćemo mu prefiks "el-". Pogledajmo neke elemente dokaza da je $\mathcal{ES}(l)$ uistinu model el-ravni.

Podsetimo se u ovom pasusu aksioma eliptičke planimetrije. Grupa aksioma incidencije glasi: svaka prava sadrži najmanje tri razne tačke (I.1.), postoji prava koja sadrži bilo koje dve tačke (I.2.), postoji najviše jedna prava koja sadrži dve razne tačke (I.3.). Grupa aksioma poretka: ako su A, B, C, D četiri kolinearne tačke takve da je $A, B//C, D$ tada su svake dve od tačaka A, B, C, D medju sobom različite (II.1.), ako su A, B, C, D četiri kolinearne tačke takve da je $A, B//C, D$ tada je $A, B//D, C$ i $C, D//A, B$ (II.2.), ako su A, B, C, D četiri kolinearne tačke takve da je $A, B//C, D$, tada nije $A, C//B, D$ (II.3.),

[25] Identifikujemo tačke kao dvočlani skup $\{x, f(x)\}$

[26] Ako je reč o hiperboličkom ili eliptičkom snopu, oni su redom $\mathbb{E}/\sim$, $A/\sim$ i $p/\sim$, gde su tačke u relaciji (ekvivalencije) $\sim$ ako su inverzne ili se poklapaju. Na taj način identifikujemo međusobno inverzne tačke.

ako su A, B, C tri razne tačke neke prave p, tada na pravoj p postoji tačka D takva da je $A, B//C, D$ (II.4.), ako su A, B, C, D razne kolinearne tačke tada važi najmanje jedna od relacija: $A, B//C, D$, $A, C//B, D$, $A, D//B, C$ (II.5.), ako su A, B, C, D, E razne kolinearne tačke takve da nije $A, B//C, D$ i nije $A, B//C, E$, tada nije $A, B//D, E$ (II.6.), ako četiri konkurentne prave a, b, c, d seku dve prave s i s_0 respektivno u raznim tačkama A, B, C, D i A_0, B_0, C_0, D_0 i ako je $A, B//C, D$ tada je i $A_0, B_0//C_0, D_0$ (II.7.). Aksioma neprekidnosti: ako su sve unutrašnje tačke eliptičkog odsečka $[AB]_C$ podeljene na dve klase M i N pri čemu: klase M i N nisu prazni skupovi tačaka i za svaku tačku $P \in M$ i svaku tačku $Q \in N$ važi relacija $A, Q//P, B$; tada u nekoj od klasa M i N postoji tačka X takva da za svaku tačku $P \in M/X$ i $Q \in N/X$ važe relacije $A, X//P, B$ i $A, Q//X, B$ (III.1.) Aksioma podudarnosti: za svaku eliptičku duž AB važe relacije $AB \cong AB$ i $AB \cong BA$ (IV.1.), ako su AB i CD dve eliptičke duži takve da je $AB \cong CD$, tada je i $CD \cong AB$. (IV.2.), ako su AB, CD, EF tri eliptičke duži takve da je $AB \cong CD$ i $CD \cong EF$, tada je i $AB \cong EF$. (IV.3.), ako su AB i CD dve razne eliptičke duži takve da je $AB \cong CD$, tada nije $AB \cong CD$. (IV.4.), ako su AB i A_0B_0 dve podudarne duži i C unutrašnja tačka duži AB, tada unutar duži A_0B_0 postoji tačka C_0 takva da je $AC \cong A_0C_0$ i $CB \cong C_0B_0$ (IV.5.), komplementne duži podudarnih duži među sobom su podudarne (IV.6.), za svaku tačku A eliptičke prave p postoji na toj pravoj njoj suprotna tačka B, to je tačka za koju su komplementne duži određene tačkama A i B među sobom podudarne (IV.7.), duži određene parovima suprotnih tačaka na bilo kojim dvema pravama među sobom su podudarne. (IV.8.) Poslednjoj aksiomi podudarnosti prethodi definicija podudarnih uglova. Ako su O_1 i O_2 tačke na kracima ugla AOB koje su suprotne temenu O, tada duž O_1O_2 sadržanu u tom uglu nazivamo *karakteristicnom duži* tog ugla. Za dva ugla kažemo da su podudarna ako su im podudarne karakteristične duži. Ako su ABC i $A_0B_0C_0$ dva trougla takva da je $AB \cong A_0B_0$ i $AC \cong A_0C_0$, tada je $\angle A \cong \angle A_0$ ako i samo ako je $BC \cong B_0C_0$. (IV.9.)

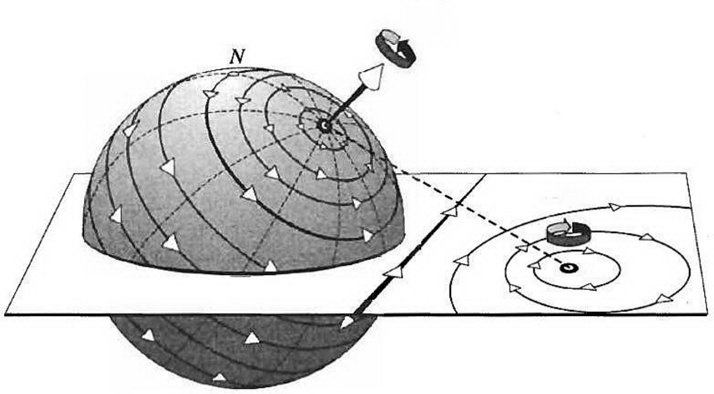
Obzirom da $\mathcal{S}$-tačku čine dve euklidske tačke, pri čemu je jedna van, a druga unutar, ili su obe suprotne na radikalnom krugu, možemo za eliptičke tačke smatrati tačke unutar njega kao i jedan njegov polukrug (bez jedne njegove krajnje tačke). Vidimo da važe aksiome incidencije za eliptičku planimetriju: krug eliptičkog snopa p koji prolazi kroz dve razne tačke A i B, prolazi i kroz tačku A' inverznu tački A u tom snopu – iz svojstva potencije centra ekvatora u odnosu na krug koji ga polovi, te je p jedinstveno određen sa te tri tačke. Kazaćemo da je na nekoj el-pravoj p par el-tačaka A i B *razdvojen* parom el-tačaka C i D ako se parovi tačaka A, B i C, D razdvajaju na krugu p. Sa tako uvedenom relacijom razdvojenosti parova el-tačaka lako se utvrđuje da važe aksiome poretka i neprekidnosti eliptičke geometrije. Dve razne tačke A i B neke el-prave p razlažu skup ostalih tačaka te prave na dva tzv. *komplementna odsečka*. Ako su A, B, C tri razne kolinearne tačke na el-pravoj p, eliptički odsečak (duž) $[AB]_C$ biće deo luka AB kruga p koji sadrži tačku C. Refleksija u odnosu na el-pravu predstavlja inverziju u njenom krugu. Svaka konačna kompozicija el-refleksija daje *el-izometriju*. Dva odsečka biće *podudarna* ako postoji el-izometrija koja slika jedan odsečak u drugi. Lako se uočava da važe i asksiome podudaranosti pri ovako datoj relaciji podudarnosti.

Time se potvrđuje i neprotivrečnost eliptičke geometrije.

Primetimo dalje neka svojstva eliptičke geometrije u ovako uvedenom modelu. Uočimo neku el-pravu QQ' (kojoj su Q i Q' krajnje tačke luka koji ona predstavlja). Sve el-prave upravne na nju su lukovi krugova koji polove l i ortogonalni na luk QQ', te pripadaju istom pramenu $el[PP']$ koji je podskup snopa $\mathcal{S}$(stav 1.7), i zato su P i P' inverzne u $\mathcal{S}$, tj. u eliptičkoj geometriji sve upravne na el-pravu prolaze kroz jednu tačku koja se zove *pol te prave.* Otuda možemo definisati dužinu d_{AB} segmenta AB el-prave QQ' kao ugao između upravnih AP i BP na QQ' kroz tačke A i B. Taj ugao je očuvan pri izometrijama eliptičke geometrije, i ako su A, B, C tri tačke na QQ', imamo da je $d_{AB} + d_{BC} = d_{AC}$. Takođe vidimo da svaka el-prava ima konačnu dužinu (jednaku uglu QPQ' – lako je pokazati da je on tup); ova činjenica predstavlja fundamentalnu razliku između eliptičke i euklidske geometrije. Kako se svaka dva kruga eliptičkog snopa seku (jer je centar njegovog radikalnog kruga unutar svakog kruga tog snopa), možemo proizvod dve refleksije u bilo koje dve el-prave p i q nazvati rotacijom. Pri njoj fiksna je presečna tačka A tih pravih, a kako se čuva rastojanje između tačaka, par tačaka A, B će se slikati u par A, B'' tako da su B i B'' el-ekvidistantne od A, a ukoliko uočimo krug kroz B ortogonalan na p i q, njemu će pripadati i B''. Odnosno svi eliptički krugovi sa centrom A (tj. skupovi tačaka el-ekvidistantnih od A) sačinjavaju hiperbolički pramen ortogonalan na pramen pq. Dakle, el-krugovi su euklidski krugovi el-ekvidistantni od neke tačke, izuzev onih koji su el-prave – kojima ta tačka predstavlja pol. Otuda i u eliptičkoj geometriji prava može biti smatrana specijalnim slučajem kruga.

Ukoliko stereografskom projekcijom iz južnog pola slikamo njen ekvatorijalni krug koji predstavlja Poenkareov disk model, na severnu hemisferu, i uzevši da h-razdvojenosti tačaka odgovara h-razdvojenost njihovih originala, dobijamo Beltramijev hemisferni model hiperboličke ravni.[18] h-prave u ovom modelu su slike h-pravih u disku, a kako stereografska projekcija čuva krugove i uglove, zaključujemo da su h-prave polukružni vertikalni delovi hemisfere.

Slično, stereografskom projekcijom opisanog eliptičkog disk-modela na sferu dobićemo sferni model eliptičke ravni. Opišimo taj zaključak detaljnije: neka je data inverzivna ravan Π, i neka je Σ sfera čiji ekvator E pripada ravni Π. Označimo sa N severni pol sfere Σ, i neka je S sfera čiji je centar N i koja sadrži ekvator E. Tada restrikcija inverzije I_S predstavlja stereografsku projekciju ST sfere Σ i ravni Π. Sferu Σ inverzivnog prostora ćemo uzeti za model eliptičkog prostora. Eliptičke prave će biti veliki krugovi sfere Σ. Ako su A i B tačke na Σ, njihovo rastojanje će biti dužina kraćeg luka određenog el-pravom AB, tj. velikog kruga kroz A i B. Pozitivna orijentacija sfere će biti u smeru suprotnom od kazaljke na satu gledano odozgo, upravno na severnu hemisferu određenu polom N. Refleksija R_l u odnosu na el-pravu l će biti restrikcija refleksije u odnosu na veliki krug određen tom el-pravom, na sferu Σ. Rotacija R_P^θ oko tačke P na sferi za ugao θ će biti kompozicija refleksija $R_P^\theta = R_{l_1} \circ R_{l_2}$ u odnosu na bilo koje dve sferne (eliptičke) prave l_1 i l_2 kroz P koje zaklapaju ugao $\theta/2$. Na osnovu rezultata odeljka "Prenošenje kružnih transformacija na sferu", dobijamo da će refleksije i rotacije modela eliptičke ravni Σ biti stereografski indukovane eliptičkim homografijama inverzivne ravni Π. Ako je R_l refleksija oko el-prave l, prema Principu simetrije imamo: $ST^{-1} \circ R_l \circ ST = I_{ST(l)}$, tj. inverzija u odnosu na krug $ST(l)$ će indukovati refleksiju u odnosu na el-pravu l. Specijalno, ako je l ekvator E, onda će se simetrične tačke u odnosu na ekvator E, slikati u suprotne tačke sfere Σ u odnosu na ravan Π. Slično, ako je $R_p^\theta = R_{l_1} \circ R_{l_2}$ rotacija, tada je $ST^{-1} \circ R_{l_1} \circ R_{l_2} \circ ST = I_{ST(l_1)} \circ I_{ST(l_2)}$, gde su $l_1' = I_{ST(l_1)}$ i $l_2' = I_{ST(l_2)}$ krugovi inverzivne ravni Π koji se seku, pa je kompozicija $I_{l_1'} \circ I_{(l_2')}$ eliptička homografija, tj. svaka rotacija eliptičke ravni Σ je zaista indukovana eliptičkom homografijom inverzivne ravni (slika 27). Pri tom, kako su P i njoj suprotna tačka fiksne pri rotaciji, to će i njihove stereografske slike biti fiksne tačke odgovarajuće eliptičke homografije.



Slika 27: Eliptička homografija inverzivne ravni i rotacija sfere se indukuju stereografskom projekcijom

7 n-Dimenzioni inverzivni prostor

7.1 Refleksije

Neka je a jedinični vektor u E^n, i t realan broj. Posmatrajmo hiperravan prostora E^n definisanu sa

$$P(a,t) = \{x \in E^n : a \cdot x = t\},$$

Primetimo da svaka tačka x na $P(a,t)$ zadovoljava jednačinu

$$a \cdot (x - ta) = 0.$$

Otuda je $P(a,t)$ hiperravan prostora E^n sa jediničnim normalnim vektorom a koji prolazi kroz tačku ta. Može se lako pokazati da je svaka hiperravan u E^n ovog oblika, i da svaka hiperravan ima tačno dve reprezentacije $P(a,t)$ i $P(-a,-t)$.

Refleksija ρ u E^n u ravni $P(a,t)$ se definiše sledećom formulom

$$\rho(x) = x + sa,$$

gde je s realni skalar takav da je $x + \frac{1}{2}sa$ u $P(a,t)$, iz čega dobijamo eksplicitnu formulu

$$\rho(x) = x + 2(t - a \cdot x)a. \tag{7.1}$$

Jednostavno se utvrđuje da važi:

Stav 7.1 *Ako je ρ refleksija E^n u ravni $P(a,t)$, onda*

1. *$\rho(x) = x$ ako i samo ako $x \in P(a,t)$*
2. *$\rho^2(x) = x$ za sve x iz E^n; i*
3. *ρ je izometrija*

Iz Euklidske geometrije preuzimamo teoremu:

Stav 7.2 *Svaka izometrija E^n je kompozicija najviše $n+1$ refleksija u hiperravnima.*

7.2 Inverzije

Neka je a tačka u E^n i neka je r pozitivan realan broj. *Sfera* u E^n *radijusa r sa centrom u a* definiše se kao skup

$$S(a,r) = \{x \in E^n : |x - a| = r\}.$$

Refleksija (ili *inverzija* σ) prostora E^n u sferi $S(a,r)$ se definiše formulom

$$\sigma(x) = a + s(x-a),$$

gde je s pozitivan skalar takav da

$$|\sigma(x) - a||x-a| = r^2.$$

Ovo vodi do ekplicitnog oblika

$$\sigma(x) = a + \left(\frac{r}{|x-a|}\right)^2 (x-a) \tag{7.2}$$

Pokažimo geometrijsku konstrukciju tačke $\sigma(x)$. Pretpostavimo prvo da je x unutar sfere $S(a,r)$. Konstruišimo tetivu od $S(a,r)$ koja prolazi kroz x i upravna je na pravu određenu sa a i x. Neka su u i v kranje tačke tetive. Onda je $\sigma(x)$ presečna tačka x' pravih tangentnih na $S(a,r)$ u tačkama u i v u ravni koja sadrži a, u i v. Primetimo da su pravougli trouglovi $T(a,x,v)$ i $T(a,x,v')$ slični. Posledično imamo

$$\frac{|x'-a|}{r} = \frac{r}{|x-a|}.$$

Otuda je $x' = \sigma(x)$ kao sto se tvrdilo.

Sada pretpostaviomo da je x u spoljašnjosti $S(a,r)$. Neka je y središnja tačka duži $[a,x]$ i neka je C krug ciji je centar u y i radijusa $|x-y|$. Onda C seče $S(a,r)$ u dve tačke u, v i $\sigma(x)$ je presečna tačka x' segmenata pravih $[a,x]$ i $[u,v]$.

Stav 7.3 *Ako je σ refleksija prostora E^n u odnosu na sferu $S(a,r)$, onda*

1. $\sigma(x) = x$ *ako i samo ako je x na sferi $S(a,r)$;*
2. $\sigma^2(x) = x$ *za sve $x \neq a$; i*
3. *za sve $x, y \neq a$,*

$$|\sigma(x) - \sigma(y)| = \frac{r^2|x-y|}{|x-a||y-a|}.$$

7.3 Stereografska projekcija

Identifikujmo E^n sa $E^n \times \{0\}$ u E^{n+1}. *Stereografska projekcija* π prostora E^n na $S^n \backslash \{e_{n+1}\}$ se definiše projektovanjem x iz E^n ka (ili od) e_{n+1} dok ne preseče sferu S^n u jedinstvenoj tački $\pi(x)$ različitoj od e_{n+1} (videti sliku 28), i stoga postoji skalar s takav da

$$\pi(x) = x + s(e_{n+1} - x).$$

Uslov $|\pi(x)|^2 = 1$ vodi ka vrednosti

$$s = \frac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + 1}$$

pa eksplicitna formula glasi

$$\pi(x) = \left(\frac{2x_1}{1 + |x|^2}, ..., \frac{2x_n}{1 + |x|^2}, \frac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + 1} \right). \tag{7.3}$$

Preslikavanje π je bijekcija prostora E^n na $S^n \backslash \{e_{n+1}\}$. Neka je σ refleksija prostora E^{n+1} u odnosu na sferu $S(e_{n+1}, \sqrt{2})$. Onda

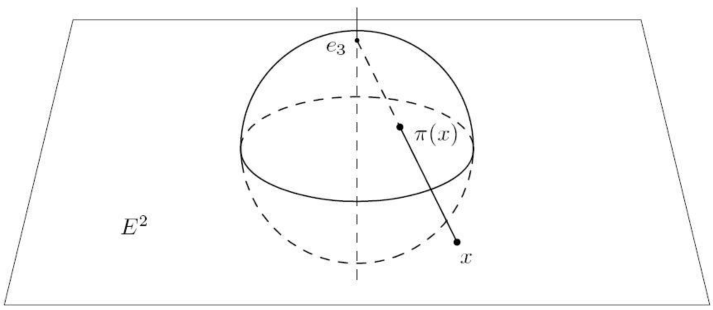
$$\sigma(x) = e_{n+1} + \frac{2(x - e_{n+1})}{|x - e_{n+1}|^2}. \tag{7.4}$$

Ako je x iz E^n, onda

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= e_{n+1} + \frac{2}{1 + |x|^2}(x_1, ..., x_n, -1) \\ &= \left(\frac{2x_1}{1 + |x|^2}, ..., \frac{2x_n}{1 + |x|^2}, \frac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + 1} \right). \end{aligned}$$

Dakle, restrikcija od σ na E^n je stereografska projekcija

$$\pi : E^n \to S^n \backslash \{e_{n+1}\}.$$



Slika 28: Stereografska projekcija π od E^2 na S^2

Neka je ∞ tačka koja nije u E^{n+1} i definišimo $\hat{E^n} = E^n \cup \{\infty\}$. Proširimo sada π do bijekcije $\hat{\pi} : \hat{E^n} \to S^n$ stavljajući $\hat{\pi}(\infty) = e_{n+1}$, i definišimo metriku d na $\hat{E^n}$ formulom

$$d(x, y) = |\hat{\pi}(x) - \hat{\pi}(y)|. \tag{7.5}$$

Ova metrika d se naziva *tetivna metrika* na $\hat{E^n}$. Po definiciji, preslikavanje $\hat{\pi}$ je izometrija iz $\hat{E^n}$, sa tetivnom metrikom, u S^n sa euklidskom metrikom. Metrička topologija na E^n određena tetivnom metrikom je ista kao euklidska topologija, obzirom da π slika E^n homeomorfno na otvoren podskup $S^n \backslash \{e_{n+1}\}$ od S^n. Metrički prostor $\hat{E^n}$ je kompaktan i dobijen iz E^n dodavanjem jedne tačke u beskonačnosti. Iz tog razloga, $\hat{E^n}$ se zove *kompaktifikacija jednom tačkom* prostora E^n. (Kompaktifikacija kompleksne ravni $\mathbb{C}$ jednom tačkom se zove *Rimanova sfera.*)

Neka je $P(a,t)$ hiperravan u E^n. Definišimo

$$\hat{P}(a,t) = P(a,t) \cup \{\infty\}.$$

Primetimo da je potprostor $\hat{P}(a,t)$ iz $\hat{E^n}$ homeomorfan S^{n-1}. Neka je ρ refleksija prostora E^n u $P(a,t)$ i neka je $\hat{\rho} : \hat{E^n} \to \hat{E^n}$ produženje od ρ dobijeno postavljanjem $\hat{\rho}(\infty) = \infty$. Tada je $\hat{\rho}(x) = x$ za sve x u $\hat{P}(a,t)$ i $\hat{\rho}^2$ identiteta. Preslikavanje $\hat{\rho}$ se zove *refleksija* prostora $\hat{E^n}$ u odnosu na proširenu hiperravan $\hat{P}(a,t)$.

Stav 7.4 *Svaka refleksija prostora $\hat{E^n}$ u proširenoj hiperravni ili sferi prostora E^n je homeomorfizam.*

7.4 Dvorazmera

Neka su u, v, x, y tačke iz $\hat{E^n}$ takve da je $u \neq v$ i $x \neq y$. *Dvorazmera* ovih tačaka se definiše kao realan broj

$$[u,v,x,y] = \frac{d(u,x)d(v,y)}{d(u,v)d(x,y)} \tag{7.6}$$

Dvorazmera je neprekidna funkcija četiri promeljive, obzirom da je metrika $d : \hat{E^n} \times \hat{E^n} \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Posledično iz definicije vidimo da važi:

Stav 7.5 *Ako su u, v, x, y tacke u E^n takve da je $u \neq v$ i $x \neq y$, onda:*

$$(1)[u,v,x,y] = \frac{|u-x||v-y|}{|u-v||x-y|}$$

$$(2)[\infty,v,x,y] = \frac{|v-y|}{|x-y|}$$

$$(3)[u,\infty,x,y] = \frac{|u-x|}{|x-y|}$$

$$(4)[u,v,x,\infty] = \frac{|u-x|}{|u-v|}$$

7.5 Sferne transformacije

Sfera Σ iz $\hat{E}^n$ se definiše da je ili euklidska sfera $S(a,r)$ ili proširena ravan $\hat{P}(a,t) = P(a,t) \cup \{\infty\}$. Primetimo da je $\hat{P}(a,t)$ topološki sfera.

Jednačina koja definiše sferu $S(a,r)$ ili $\hat{P}(a,t)$ u $\hat{E}^n$ je

$$|x|^2 - 2a \cdot x + |a|^2 - r^2 = 0 \tag{7.7}$$

ili

$$-2a \cdot x + 2t = 0, \tag{7.8}$$

redom, i one se mogu zapisati u zajedničkom obliku

$$a_0|x|^2 - 2a \cdot x + a_{n+1} = 0.$$

Ako je $a_0 \neq 0$ onda

$$\Sigma = S\left(\frac{a}{a_0}, \frac{(|a|^2 - a_0 a_{n+1})^{\frac{1}{2}}}{|a_0|}\right).$$

Ako je $a_0 = 0$, onda

$$\Sigma = \hat{P}\left(\frac{a}{|a|}, \frac{a_{n+1}}{2|a|}\right)$$

Vektor $(a_0, ..., a_{n+1})$ se zove *koeficijentni vektor* za Σ, i jedinstveno je određen sa Σ do na proizvod nenula skalarom. Izračunavanjem dokazujemo:

Stav 7.6 *Neka je ϕ refleksija ili inverzija u $\hat{E}^n$. Ako je Σ sfera u $\hat{E}^n$, onda je i $\phi(\Sigma)$ sfera u $\hat{E}^n$.*

Za sve bijekcije n-inverzivnog prostora koje čuvaju sfere u $\hat{E^n}$ kažemo da su *sferne transformacije.* Označimo sa $< S >$ afini omotač skupa tačaka S.

Stav 7.7 *Neka je $S = \{e_0, e_1, ..., e_m\}$ skup afino slobodnih tačaka prostora $\hat{E^n}, m \leq n$. Tada tačka A pripada afinom omotaču skupa S ako i samo ako pripada skupu tačaka pravih koje sadrže e_i i neku tačku afinog omotača skupa $S \setminus \{e_i\}$, gde $i = 1, 2, ...m$.*

Dokaz Uzmimo u m-ravni $< S >$ koordinatni sistem $\{e_0, e_0e_1, e_0e_2, ..., e_0e_m\}$ sa početkom u e_0, i neka je $A = (a_1, a_2, .., a_m)$ njena proizvoljna tačka. Pokažimo da postoji $i \in 0, 1, ...m$ takvo da e_iA seče $m-1$-ravan $< \{e_0, ..., e_m\} \setminus \{e_i\} >$ u nekoj tački. Ako ne bi bilo tako, iz jednačina preseka $e_0A = \{M = t(a_1, a_2, ..., a_m) | t \in R\}$ sa $m-1$-ravni $< e_1, ..., e_m >$: $x_1 + x_2 + ... + x_m = 1$, odnosno $e_iA = \{M = (ta_1, ..., 1 + t(a_i - 1), ..., ta_n) | t \in R\}$ sa $m-1$-ravni $< e_0, ..., e_m > \setminus \{e_i\} : x_i = 0$ za neko i, dobijamo redom da mora biti za svako i: $a_i = 1$, odnosno da je pritom i $a_1 + ... + a_m = 0$, što je u kontradikciji. $\square$

Stav 7.8 *Ako sferna transformacija fiksira tačku ∞ ona je sličnost.*

Dokaz Neka je $T : X \mapsto X'$ sferna transformacija tako da je $T(\infty) = \infty$. Ona čuva incidentnost, $n-1$-sfere i hiperravni, pa će čuvati i krugove. Otuda, na osnovu dokaza stava 3.2 iz dvodimenzionog slučaja, T čuva i jednakokrako-pravougle trouglove. Posmatrajmo n-simpleks S kome su temena $e_0, e_1, e_2, ..., e_n$ takav da $\{e_0, e_0e_1, e_0e_2, ..., e_0e_n\}$ čini ortonormirani kooordinatni sistem sa početkom u e_0. Tada će svaka njegova 3-pljosan sa temenom e_0 predstavljati jednakokrako pravougli trougao, pa će T slikati S u neki n-simpleks S' sa temenima koja daju opet odgovarajući ortogonalan koordinatni sistem (sa koordinatnim vektorima jednake dužine). Otud postoji sličnost Sim koja slika $e'_0, e'_1, e'_2, ..., e'_n$ u $e_0, e_1, e_2, ..., e_n$. Tada $R = Sim \circ T$ fiksira svako od temena S. Pokažimo indukcijom da je R identičko na $\hat{E^n}$. Uzmimo da je $T(m), m \geq 1$ tvrđenje: R je identička na afinom omotaču svake m-pljosni simpleksa S. $T(2)$ važi jer R fiksira svaku od pravih e_ie_j na osnovu dokaza stava 3.2. Pretpostavimo da važi $T(m), m < n$. Neka je A proizvoljna tačka neke $m+1$-pljosni (koja ne pripada afinom omotaču nijedne m-pljosni). Tada prema prethodnom stavu, postoji e_i takvo da Ae_i seče ravan neke m pljosni koja ne sadrži e_i u nekoj taćki A_x. Kako su e_i i A_x fiksne i različite, iz $T(2)$ biće i sve tačke njihove prave, pa i tačka A. Otuda je R identičko na celom $\hat{E^n}$, pa je T sličnost. $\square$

Neka je ϕ sferna transformacija prostora $\hat{E}^n$ takva da je $\phi(\infty) \neq \infty$. Neka je $a = \phi^{-1}(\infty)$ i neka je σ refleksija prostora $\hat{E}^n$ u sferi $S(a, 1)$. Tada $\phi\sigma$ fiksira ∞. Onda je $\phi\sigma$ sličnost u E^n prema stavu 7.8. Otuda, postoji tačka b u E^n, i skalar $k \geq 0$, i ortogonalna transformacija A u E^n tako da je

$$\phi(x) = b + kA\sigma(x). \tag{7.9}$$

Prema teoremi 7.3 imamo

$$|\phi(x) - \phi(y)| = \frac{k|x-y|}{|x-a||y-a|}.$$

Pretpostavimo sada da su x, y na $S(a, r)$. Onda $|\phi(x) - \phi(y)| = |x - y|$ ako i samo ako je $r = \sqrt{k}$. Dakle ϕ deluje kao izometrija na sferi $S(a, \sqrt{k})$, i $S(a, \sqrt{k})$ je jedinstvena sa ovom osobinom među svim sferama u E^n sa centrom a. Iz tog razloga, $S(a, \sqrt{k})$ se zove *izometrijska sfera* od ϕ.

Stav 7.9 *Neka je ϕ sferna transformacija u $\hat{E}^n$ t.d. $\phi(\infty) \neq \infty$. Onda postoji jedinstvena refleksija σ u euklidskoj sferi Σ i jedinstvena izometrija ψ takva da je $\phi = \psi\sigma$. Takođe, Σ je izometrijska sfera od ϕ.*

Dokaz Neka je σ refleksija u izometrijskoj sferi $S(a, r)$ od ϕ. Tada je $a = \phi^{-1}(\infty)$ i $\psi\sigma(\infty) = \infty$. Po teoremi 7.8, imamo da je $\psi\sigma$ sličnost. Neka su $x, y \in S(a, r)$. Onda je

$$|\phi\sigma(x) - \phi\sigma(y)| = |\phi(x) - \phi(y)| = |x - y|$$

Dakle $\psi = \phi\sigma$ je euklidska izometrija i $\phi = \psi\sigma$. Onda je $\phi(a) = \infty$ i ϕ deluje kao izometrija na $S(a, r)$. Dakle $S(a, r)$ je izometrijska sfera od ϕ. Kako je $\psi = \phi\sigma$, oboje σ i ψ su jedinstvene. $\square$

Dakle, možemo zaključiti da je svaka sferna transformacija prostora $\hat{E}^n$ konačna kompozicija refleksija prostora $\hat{E}^n$ u sferama. Neka je $M(\hat{E}^n)$ skup svih sfernih transformacija u $\hat{E}^n$. Onda očigledno $M(\hat{E}^n)$ formira grupu u odnosu na kompoziciju. Prema teoremi 7.2, svaka izometrija E^n se proširuje na jedinstven način do sferne transformacije u $\hat{E}^n$. Dakle, možemo smatrati grupu euklidskih izometrija $I(E^n)$ podgrupom od $M(\hat{E}^n)$.

Neka je k pozitivna konstanta i neka je $\mu_k : \hat{E}^n \to \hat{E}^n$ funkcija definisana sa $\mu_k(x) = kx$ (homotetija sa centrom O i koeficijentom k). Onda je μ_k sferna transformacija jer je kompozicija refleksije u $S(0,1)$ praćene refleksijom u $S(0,\sqrt{k})$. Kako je svaka sličnost u E^n kompozicija izometrije i μ_k za neko k, svaka sličnost u E^n se proširuje na jedinstven način do sferne transformacije u E^n. Dakle, možemo takođe posmatrati grupu euklidskih sličnosti $Sim(E^n)$ kao podgrupu od $M(\hat{E}^n)$.

Da bismo uprostili notaciju, više nećemo koristiti kapicu da bi označili produženje f-je na $\hat{E}^n$.

Lema 7.10 *Ako je σ refleksija prostora $\hat{E}^n$ u sferi $S(a,r)$ i σ_1 je refleksija u $S(0,1)$, i $\phi : \hat{E}^n \to \hat{E}^n$ je definisano sa $\phi(x) = a + rx$, onda je $\sigma = \phi\sigma_1\phi^{-1}$.*

Dokaz Uočavamo da je

$$\begin{aligned}
\sigma(x) &= a + \left(\frac{r}{|x-a|}\right)^2 (x-a) \\
&= \phi\left(\frac{r(x-a)}{|x-a|^2}\right) \\
&= \phi\sigma_1\left(\frac{x-a}{r}\right) = \phi\sigma_1\phi^{-1}(x).\square
\end{aligned}$$

Stav 7.11 *Bijekcija $\phi : \hat{E}^n \to \hat{E}^n$ je sferna transformacija ako i samo ako čuva dvorazmeru.*

Dokaz Neka je ϕ sferna transformacija. Ako je ϕ kompozicija refleksija, možemo pretpostaviti da je ϕ refleksija. Euklidska sličnost očigledno čuva dvorazmeru, pa možemo pretpostaviti prema prethodnoj lemi da je $\phi(x) = x/|x|^2$. Na osnovu stava 7.3, imamo

$$|\phi(x) - \phi(y)| = |x - y|.$$

Iz stava 7.5 zaključujemo da

$$[\phi(u), \phi(v), \phi(x), \phi(y)] = [u, v, x, y]$$

ako su u, v, x, y svi konačni i nenula. Preostali slučajevi slede iz neprekidnosti. Dakle, ϕ čuva dvorazmeru.

Obrnuto, pretpostavimo da ϕ čuva dvorazmeru. Slaganjem ϕ sa sfernom transformacijom možemo pretpostaviti da je $\phi(\infty) = \infty$. Neka su u, v, x, y tačke iz $\mathbb{E}^n$ takve da $u \neq v$, $x \neq y$ i $(u, v) \neq (x, y)$. Tada je ili $u \neq x$ ili $v \neq y$. Pretpostavimo prvo da je $u \neq x$. Kako važi $\phi(u), \infty, \phi(x), \phi(y)] = [u, \infty, x, y]$ dobijamo

$$\frac{|\phi(u) - \phi(x)|}{|\phi(x) - \phi(y)|} = \frac{|u - x|}{|x - y|}.$$

i kako je $\phi(u), \phi(v), \phi(x), \infty] = [u, v, x, \infty]$, imamo

$$\frac{|\phi(u) - \phi(x)|}{|\phi(u) - \phi(v)|} = \frac{|u - x|}{|u - v|}.$$

Stoga je

$$\frac{|\phi(u) - \phi(v)|}{|u - v|} = \frac{|\phi(u) - \phi(x)|}{|u - x|} = \frac{|\phi(x) - \phi(y)|}{|x - y|}.$$

Slično, ako je $v \neq y$, onda

$$\frac{|\phi(u) - \phi(v)|}{|u - v|} = \frac{|\phi(x) - \phi(y)|}{|x - y|}.$$

Dakle, postoji pozitivna konstanta k takva da je $|\phi(x) - \phi(y)| = k|x - y|$ za sve x, y iz $\mathbb{E}^n$, pa je ϕ euklidska sličnost, dakle i sferna transformacija. $\square$

Stav 7.12 *Prirodno dejstvo od $M(\hat{E}^n)$ na skup sfera iz $\hat{E}^n$ je tranzitivno*[27].

Dokaz Neka je Σ sfera u $\hat{E}^n$. Dovoljno je pokazati da postoji sferna transformacija ϕ takva da je $\phi(\Sigma) = \hat{E}^{n-1}$. Kako grupa euklidskih izometrija deluje tranzitivno na skup hiperravni u E^n, pretpostavimo da je Σ euklidska sfera. Kako grupa euklidskih sličnosti $S(E^n)$ deluje tranzitivno na skupu sfera u E^n, možemo pretpostaviti da je $\Sigma = S^{n-1}$. Neka je σ refleksija u sferi $S(e_m, \sqrt{2})$. Onda imamo da je $\sigma(S^{n-1}) = \hat{E}^{n-1}$ stereografskom projekcijom.

Stav 7.13 *Ako je ϕ sferna transformacija u $\hat{E}^n$ koja fiksira svaku tačku sfere Σ u $\hat{E}^n$, onda je ϕ ili identičko preslikavanje u $\hat{E}^n$ ili je refleksija u Σ.*

Dokaz Pretpostavimo najpre da je $\Sigma = \hat{E}^{n-1}$. Tada je $\phi(\infty) = \infty$. Po teoremi 7.8 imamo da je ϕ euklidska sličnost. Kako je $\phi(0) = 0$ i $\phi(e_1) = e_1$, imamo da je ϕ ortogonalna transformacija. Štaviše, kako ϕ fiksira $e_1, ..., e_{n-1}$, imamo da je $\phi(e_n) = \pm e_n$. Tako da je ϕ ili identiteta ili refleksija u $P(e_n, 0)$.

Pretpostavimo sada da je Σ proizvoljna. Po stavu 7.12, postoji sferna transformacija ϕ takva da je $\phi(\Sigma) = \hat{E}^{n-1}$. Kako $\psi\phi\psi^{-1}$ fiksira svaku tačku na $\hat{E}^{n-1}$, $\psi\phi\psi^{-1}$ je identiteta ili refleksija ρ u $\hat{E}^{n-1}$. Otuda je ϕ ili identiteta ili $\psi^{-1}\rho\psi$. Neka je σ refleksija u Σ. Kako $\psi\phi\psi^{-1}$ fiksira svaku tačku na $\hat{E}^{n-1}$, i nije identiteta, imamo da je $\psi\sigma\psi^{-1} = \rho$. Otuda $\sigma = \phi^{-1}\rho\phi$. Otuda ϕ je ili identiteta ili σ. $\square$

Ako je σ refleksija u odnosu na sferu Σ u $\hat{E}^n$, za dve tačke x i y se kaže da su *inverzne tačke* u odnosu na Σ ako je $y = \sigma(x)$.

Stav 7.14 (Princip simetrije) *Neka je ϕ sferna transformacija u $\hat{E}^n$. Ako su x i y inverzne tačke u odnosu na sferu Σ u $\hat{E}^n$, onda su $\phi(x)$ i $\phi(y)$ inverzne tačke u odnosu na $\phi(\Sigma)$.*

Dokaz Neka je σ refleksija u Σ. Tada $\phi\sigma\phi^{-1}$ fiksira svaku tačku od $\phi(\Sigma)$ i nije identičnost. Po stavu 7.13, imamo da je $\phi\sigma\phi^{-1}$ refleksija u $\phi(\Sigma)$. Kako je $\phi\sigma\phi^{-1}(\phi(x)) = \phi(y)$, imamo da su $\phi(x)$ i $\phi(y)$ inverzne tačke u odnosu na $\phi(\Sigma)$.

[27]Dejstvo grupe G na skup X je *tranzitivno* ako i samo ako za svako x, y iz X postoji g u G tako da je $gx = y$.

7.6 Konformne transformacije

Neka je U otvoren podskup od $\hat{E}^n$ i neka je $\phi : U \mapsto \hat{E}^n$ neprekidno diferencijabilna; ona tada ima i neprekidne parcijalne izvode. Neka je $\phi'(x)$ matrica parcijalnih izvoda od ψ. Za funkciju ϕ se kaže da je *konformna* ako i samo ako postoji funkcija $k : U \mapsto \mathbb{R}_+$, koja se zove *skalarni faktor* od ϕ, takva da je $k(x)^{-1}\psi'(x)$ ortogonalna matrica za svako x iz U. Primetimo da je skalarni faktor konformnog preslikavanja jedinstveno određen sa ϕ, jer je $[k(x)]^n = |det\phi'(x)|$.

Stav 7.15 *Neka je A realna matrica dimenzija $n \times n$. Onda postoji pozitivni skalar k takav da je $k^{-1}A$ ortogonalna matrica ako i samo ako A čuva uglove između nenula vektora.*

Dokaz Pretpostavimo da je $k > 0$ skalar takav da je $k^{-1}A$ ortogonalna. Onda je A regularna. Neka su x i y nenula vektori iz E^n. Tada su Ax i Ay nenula vektori, i A čuva uglove jer

$$\begin{aligned} cos\angle(Ax, Ay) &= \frac{Ax \cdot Ay}{|Ax||Ay|} \\ &= \frac{k^{-1}Ax \cdot k^{-1}Ay}{|k^{-1}Ax||k^{-1}Ay|} \\ &= \frac{x \cdot y}{|x||y|} \\ &= cos\angle(x, y). \end{aligned}$$

I obrnuto, pretpostavimo da A čuva uglove između nenula vektora, onda je A regularna. Kako je $\angle(Ae_i, Ae_j) = \angle(e_i, e_j) = \pi/2$ za sve $i \neq j$, vektori $Ae_1, ..., Ae_n$ su ortogonalni. Neka je B ortogonalna matrica takva da je $Be_i = Ae_i/|Ae_i|$ gde je c_ie_i, sa $c_i > 0$, za sve $i = 1, ..., n$. Kako je

$$\angle(A(e_i + e_j), Ae_j) = \angle(e_i + e_j, e_j),$$

za sve $i \neq j$, imamo

$$\frac{(c_ie_i + c_je_j) \cdot c_je_j}{(c_i^2 + c_j^2)^{1/2}c_j} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Otuda je $2c_j^2 = c_i^2 + c_j^2$ i zato $c_i = c_j$ za sve i i j. Stoga je zajednička vrednost za c_i pozitivan skalar k takav da je $k^{-1}A$ ortogonalna. $\square$

Neka su $\alpha, \beta : [-b, b] \mapsto E^n$ diferencijabilne krive takve da je $\alpha(0) = \beta(0)$ i $\alpha'(0) = \beta'(0)$ različiti od nule. *Ugao* između α i β u 0 se definiše kao ugao između $\alpha'(0)$ i $\beta'(0)$.

Stav 7.16 *Neka je U otvoren podskup u E^n i neka je $\phi : U \mapsto E^n$ neprekidno diferencijabilna. Tada je ϕ konformna ako i samo ako ϕ čuva uglove između diferencijabilnih krivih iz U.*

Dokaz Pretpostavimo da je preslikavanje ϕ konformno. Onda postoji funkcija $k : U \mapsto \mathbb{R}_+$, takva da je $k(x)^{-1}\phi'(x)$ ortogonalna za svako x iz U. Neka su $\alpha, \beta : [-b, b] \mapsto U$ diferencijabilne krive takve da je $\alpha(0) = \beta(0)$, i $\alpha'(0), \beta'(0)$ obe nenula. Tada po 7.15, imamo

$$\begin{aligned} \angle((\phi\alpha)'(0), (\phi\beta)'(0)) &= \angle(\phi'(\alpha(0))\alpha'(0), \phi'(\beta(0))\beta'(0)) \\ &= \angle(\alpha'(0), \beta'(0)). \end{aligned}$$

Zato je ugao između $\phi\alpha$ i $\phi\beta$ u 0 isti kao ugao između α i β u 0.

I obrnuto, pretpostavimo da ϕ čuva uglove izmedju diferencijabilnih krivih iz U. Tada matrica $\phi'(x)$ čuva uglove između nenula vektora za svako x. Po 7.15 postoji pozitivni skalar $k(x)$ tako da je $k(x)^{-1}\phi'(x)$ ortogonalna za svako x iz U. Dakle, ϕ je konformna. $\square$

Neka je U otvoren podskup iz E^n i neka je $\phi : U \mapsto E^n$ diferencijabilna funkcija. Tada kažemo da ϕ *čuva* (odnosno *menja*) *orijentaciju u tački* x iz U ako je $det\phi'(x) > 0$ (odnosno $det\phi'(x) < 0$). Kažemo da funkcija ϕ *čuva* (odnosno *menja*) *orijentaciju* ako ϕ čuva (odnosno menja) orijentaciju u svakoj tački x iz U.

Stav 7.17 *Svaka refleksija prostora E^n u hiperravni ili sferi je konformna i menja orijentaciju.*

Dokaz Neka je ρ refleksija E^n u ravni $P(a, t)$. Tada

$$\rho(x) = x + 2(t - a \cdot x)a,$$

$$\rho'(x) = (\delta_{ij} - 2a_i a_j) = I - 2A,$$

gde je A matrica $(a_i a_j)$. Kako $\rho'(x)$ ne zavisi od t, možemo pretpostaviti bez gubitka opštosti da je $t = 0$. Onda je ρ ortogonalna transformacija i

$$\rho(x) = (I - 2A)x.$$

Dakle, $I - 2A$ je ortogonalna matrica, pa je i ρ konformno preslikavanje.

Po stavu [28], postoji ortogonalna transformacija ϕ takva da je $\phi(a) = e_1$. Onda je

$$\begin{aligned} \phi\rho\phi^{-1}(x) &= \phi(\phi^{-1}(x) - 2(a \cdot \phi^{-1}(x))a) \\ &= x - 2(a \cdot \phi^{-1}(x))e_1 \\ &= x - 2(\phi(a) \cdot x)e_1 \\ &= x - 2(e_1 \cdot x)e_1. \end{aligned}$$

Stoga $\phi\rho\phi^{-1}$ predstavlja refleksiju u $p(e_1, 0)$. Po pravilu lanca,

$$det(\phi\rho\phi^{-1})'(x) = det\rho'(x).$$

[28] Za svaku dimenziju m, prirodno dejstvo od $O(n)$ - grupe ortogonalnih matrica dimenzije $n \times n$ sa matričnim proizvodom, na skup m-dimenzionalnih vektorskih potprostora od $\mathbb{R}_n$ je tranzitivno.[19, 18.str]

Da bismo izračunali determinantu od $\rho'(x)$, pretpostavimo da je $a = e_1$. Tada je

$$I - 2A = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Dakle, $det\rho'(x) = -1$, pa ρ menja orijentaciju.

Neka je σ_r refleksija E^n u sferi $S(0, r)$. Tada

$$\sigma_r(x) = \frac{r^2 x}{|x|^2},$$

pa je

$$\sigma_r'(x) = r^2\left(\frac{\delta_{ij}}{|x|^2} - \frac{2x_i x_j}{|x^4|}\right) = \frac{r^2}{|x|^2}(I - 2A),$$

gde je A matrica $(x_i x_j / |x|^2)$. Već smo pokazali da je $I - 2A$ ortogonalna, i da je σ_r konformna; štaviše σ_r menja orijentaciju, kako je

$$\begin{aligned} det\sigma_r'(x) &= \left(\frac{r}{|x|}\right)^{2n} det(I - 2A) \\ &= -\left(\frac{r}{|x|}\right)^{2n} < 0. \end{aligned}$$

Sada, neka je σ refleksija u odnosu na $sS(a, r)$ i neka je τ translacija za vektor a. Tada je $\tau'(x) = I$ i $\sigma = \tau\sigma_r\tau^{-1}$. Onda je $\sigma'(x) = \sigma_r'(x - a)$. Dakle, σ je konformna i menja orijentaciju. $\square$

8 Aksiomatsko zasnivanje inverzivne geometrije

U prethodnom izlaganju, mi smo do inverzivne geometrije došli koristeći euklidsku geometriju: euklidskoj ravni smo dodali jednu posebnu - beskonačno daleku tačku, a prave smo posmatrali kao vrstu krugova koji je sadrže, i tako dobili inverzivnu ravan u kojoj su osnovni objekti tačke i krugovi.

Za idejnog tvorca uvođenja beskonačno dalekih (idealnih) tačaka uopšte u geometriju smatra se Johannes Kepler[29], ali je Gerard Desargues[30] prvi sistematski koristio tu zamisao dodavši idealnu pravu euklidskoj ravni, u svom radu o presecima konika *Brouillon projet* objavljenom 1639, da bi dobio projektivnu ravan. Više od dva veka ovaj postupak smatrao se jedinstvenim. Prvi koji je uvideo da se takav pristup može iskoristiti za dobijanje i inverzivne ravni bio je Bôcher[31] (1914), tako što će se euklidska ravan proširiti idealnom tačkom.

Međutim, postavlja se pitanje perspektive u pomenutom zasnivanju i razmatranju inverzivne geometrije, i da li se može kao takav obrnuti njen odnos sa euklidskom. Da li se može inverzivna geometrija uspostaviti iz nekog sopstvenog, nezavisnog skupa aksioma, i potom se iz nje izvesti euklidska geometrija, a možda i neeuklidske geometrije?

Mario Pieri[32] je u svom radu "Elementarna geometrija zasnovana na pojmovima tačke i sfere"[33] predstavio elementarnu euklidsku geometriju kao hipotetičko-deduktivni sistem i pokazao da se svi njeni koncepti i postulati mogu definisati i formulisati koristeći pojam *tačke* i relacije koja govori kada su dve tačke *ekvidistantne* od treće. [16, 157.str] On je bio prvi koji je dao zadovoljavajući skup aksioma za inverzivnu geometriju 1912. godine, nakon što je prethodno isto učinio za projektivnu geometriju (Cayleyeva nacrtna geometrija) 1899. Kasniji autori su unapredili detalje, tako da se većina poznatih osobina tačaka i krugova mogu izvesti iz samo četiri aksiome:

I1) Bilo koje tri različite tačke leže na tačno jednom krugu.
I2) Postoje četiri tačke koje nisu na krugu.
I3) Ako tačka pripada krugu α, i tačka Q nije na α, postoji tačno jedan krug kroz Q čija je jedina zajednička tačka sa α tačka P.
I4) Ako svaki od cikilično susednih parova krugova ima par zajedničkih tačaka, dajući ukupno osam različitih tačaka, i ako četiri od tih tačaka, po jedna iz svakog para, leže na krugu, onda preostale četiri leže na nekom krugu.

Primetimo da se u ovom pristupu ne pominje rastojanje: jedina korišćena relacija je relacija incidencije. Vidimo da poslednja aksioma ima formulaciju Miquelove teoreme iz euklidskog modela. Stoga se ravni koje nju ne zadovoljavaju zovu *ne-Miquelove* inverzivne ravni.

Za dva kruga kažemo da se *seku, da su tangentni*, ili *disjunktni* ako imaju dve, tačno jednu ili nijednu zajedničku tačku. Za dva kruga kažemo da su *ortogonalni*

[29]nemački matematičar i astronom (1571-1630)
[30]francuski matematičar (1593-1662)
[31]Maxime Bôcher, američki matematičar (1867 - 1918)
[32]italijanski matematičar (1860-1930)
[33]*La Geometria Elementare istituita sulle nozioni di punto e sfera. Memorie di matematica e di fisica della Societ Italiana delle Scienze (series 3) 15: 345450. (1908.)*

ako jedan od njih pripada trojci međusobno tangentnih krugova koji se dodiruju u tri različite tačke A, B, C, dok je drugi krug ABC. Za bilo koju tačku P koja nije na krugu ω, *inverzna tačka* P' je druga presečna tačka bilo koja dva kruga kroz P koji su ortogonalni na ω.

Inverzija pruža jednostavan kriterijum ortogonalnosti: dva kruga su ortogonalna ako jedan od njih prolazi kroz dve tačke koje su inverzne u odnosu na drugi krug.

Bilo koji različiti krugovi, α i β određuju *pramen* krugova koji su na njih ortogonalni, koji se sastoji iz svih krugova PP_1P_2 gde je P promenljiva tačka dok su P_1 i P_2 njeni inverzi u odnosu na α i β. Ako su γ i δ dva takva kruga, pramen krugova ortogonalnih na njih uključuje α i β; to je pramen "proširen" iz α i β, pa se označava sa $\alpha\beta$. Krugovi kroz dve različite tačke L i L' formiraju *eliptički pramen*, ortogonalan na *hiperbolički pramen* kome su L i L' granične tačke (inverzi u svakom članu hiperboličkog pramena). Ako su α i β tangentni, $\alpha\beta$ je *tangentni pramen*, i ortogonalni pramen kroz dodirnu tačku daje drugi tangentni pramen. Za tri ili više krugova koji pripadaju jednom pramenu krugova se kaze da su *koaksijalni*.

Bilo koja tri nekoaksijalna kruga, α, β, γ daju *kružni snop* krugova, npr. sa oznakom $\alpha\beta\gamma$, koji se sastoji od najmanjeg skupa krugova koji uključuje α, β, γ i koji sa svaka dva od svojih članova, sadrži i ceo pramen koji oni daju. Ako α, β, γ imaju zajedničku tačku, $\alpha\beta\gamma$ se sastoji od svih krugova kroz ovu tačku; on se zove *parabolički snop*. Ako su α, β, γ svi ortogonalni na jedan krug, $\alpha\beta\gamma$ sadrži sve krugove koji su ortogonalni na taj krug; on se zove *hiperbolički snop*. Konačno, ako α, β, γ nemaju zajedničkih tačaka, niti zajednički ortogonalni krug (npr. ako su međusobno ortogonalni), $\alpha\beta\gamma$ se zove *eliptički snop*.

9 Istorijske beleške

Kao zaključno poglavlje rada, ukratko će biti izložena istorijska pozadina tema i većeg dela stavova obrađenih u njemu, a koji se mogu celovito sagledati kroz hronološki razvoj inverzivne geometrije.[34]

Istorija ove geometrije od svojih početaka bila je primetno razuđena i složena. O njenom ranom periodu preporučuje se B.C. Pattersonov članak iz 1933. *The origins of the geometric principle of inversion.* Prema restauraciji izgubljenog rada *Geometrijska mesta*[35] Apolonija iz Perge koju je sačinio Robert Simson 1749, on je sadržao, po komentarima koje je ostavio Papos, jednu od osnovnih teorema teorije inverzije: da se tim preslikavanjem prava ili krug slika u pravu ili krug.

Zna se da je François Viéte bio upućen u inverzne tačke u 16. veku. Ipak, upotreba inverzije kako bi se pojednostavilo izučavanje geometrijskih figura nastupila je znatno kasnije i nezavisno u radu više autora. Bützberger je obznanio da je Jacob Steiner pokazao poznavanje transformacije inverzije još 1824. godine, u neobjavljenom rukopisu. Međutim, iako je Steinerov rad ukazao na široku i spretnu upotrebu inverzije, nije uključivao koherentnu teoriju iza ove transformacije. Sledeće godine inverziju je opet pronašao belgijski astronom i statističar Adolphe Quetelet. Zatim su do nje nezavisno došli L. I. Magnus, u opštijoj formi, 1831, Giusto Bellavitis 1836, potom J. W. Stubbs, J. R. Ingram, Trinity College, Dublin 1842. i 1843, i ser William Thomson (Lord Kelvin) 1845. Thomson je upotrebio inverziju kako bi pružio geometrijske dokaze nekih stavova iz matematičke teorije elastičnosti, kao i za izračunavanje efekta tačkastog naelektrisanja na bliski provodnik. Godine 1847. Joseph Liouville je nazvao inverziju *transformacijom recipročnim radijusima.* Ipak, sistematski razvoj kružne inverzije prvi je priredio Julius Plücker u svom radu iz 1834: *Analytisch-geometrische Aphorismen.*

Inverzijom u odnosu na sferu bavio se Bellavitis u spisu iz 1836, *Teoria delle figure inverse, e loro uso nella geometria elementare.* Stav 7.3 je iznet u Liouvilleovom *Note au sujet de larticle précédent (de M. Thomson)* (1845).

Konformne transformacije ravni su predstavljene u Eulerovom radu iz 1770. *Considerationes de trajectoriis orthogonalibus.* U njemu je posebno tretirao linearne frakcione transformacije kompleksne ravni. Tvrđenje da je inverzija u odnosu na krug konformno preslikavanje pojavilo se u pomenutom Plückerovom radu iz 1834. Da je inverzija u sferi konformna, može se naći u Thomsonovom pismu Liouvilleu *Extrait dune lettre de M. Thomson* 1845.

Prema Thomas Heathovom delu iz 1921. *A History of Greek Mathematics*, stereografsku projekciju izložio je Ptolomej u svom spisu *Planisphaerium* iz 2. veka n.e. Zapažanje da je ona zapravo inverzija sfere na ravan dato je u već navedenom Bellavitisovom radu iz 1836. Dvorazmeru tačaka u ravni prvi je predstavio Möbius u *Ueber eine neue Verwandtschaft zwischen ebenen Figuren* (1852).

[34] Za više informacija o samim izdanjima, kao i odgovarajućim stranama publikacija čiji su rezultati navedeni u ovom odeljku, čitalac se upućuje na reference izložene u [19, 142-143. str]

[35] Puni naslov bi bio *Ravanska geometrijska mesta tačaka*, kao prevod sa grčkog $\varepsilon\pi\iota\pi\varepsilon\delta o\iota$ $\tau o\pi o\iota$, na latinskom je *De Locis Planis*

Möbiusove tranformacije ravni i sfere je proučavao Möbius u svom *Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geometrischer Darstellung* (1855). U trodimenzionom prostoru ih je razmatrao Liouville u svojim beleškama *Note au suject de l article précédent* (1847). On je dokazao i markantnu teoremu da je glatka konformna transformacija trodimenzionog prostora Möbiusova transformacija u svom *Extension au cas des trois dimensions de la question du trace geographique* (1850). Liouvilleovu teoremu je na n dimenzija, $n > 2$ proširio Marius Sophus Lie u *Uber diejenige Theorie eines Raumes mit beliebig vielen Dimensionen* (1871). Izometrijski krug linearne frakcione transformacije kompleksne ravni je predstavio Ford, u *On the foundations of the theory of discontinuous groups* (1927). Tvrđenje da inverzija u odnosu na sferu slika inverzne tačke u inverzne tačke se pojavilo u Thomsonovom pismu Liouvilleu *Extrait dune lettre de M. Thomson* iz 1845.

Klasifikacija izometrija hiperboličke ravni na tri tipa prema prirodi njihovih fiksnih tačaka se pojavila u Kleinovom radu *Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie* (1871). Izraze eliptička, parabolička i hiperbolička transformacija je definisao Klein u *Ueber die Transformation der elliptischen Functionen* (1879) i Thurston ih je primenio u izometrijama hiperboličkog n-prostora u svojim beleškama za predavanja *The Geometry and Topology of 3-Manifolds* (1979).

U zaključku, može se reći da se inverzija u svojim začecima pojavljivala i iskrsavala u nezavisnim radovima matematičara i naučnika, posebno kao interesantno preslikavanje i u primenama radi elegantnijih dokaza različitih teorema, da bi njen istorijski tok doživeo svojevrsan vrhunac temeljnom ulogom izometrija u konformnim modelima neeuklidskih prostora.

10 Samostalan doprinos radu

Samostalno napisane delove rada čine: kao formulacija i dokaz tvrđenja – leme 1.2, 1.6, 4.2, 4.6 i stavovi 1.3, 1.5, 1.7, 1.10, 4.5, 4.7, 4.8, 4.10, 4.11, kao sami dokazi stavova 1.13, 1.14, 3.6, 7.7, 7.8, i delovi dokaza stavova 1.4, 1.5, 3.2, 3.8.

Tu spadaju i slučajevi 2b, 3b razmatranja klasifikacije kružnih transformacija (37, 38. str), segment konstrukcije karakterističnog paralelograma koji koristi očuvanje uglova (42. str), stereografsko prenošenje pramenova i snopova na sferu (51. str).

Takođe, prilagođavanje rezultata kompleksne analize preuzetih iz literature i njihovo struktuiranje u sintetički pristup na kome je baziran deo rada zaključno sa trodimenzionim inverzivnim prostorom.

Literatura

[1] Bokan Neda, Vukmirović Srđan, *Projektivna geometrija*, Matematički fakultet, Beograd 2007

[2] D. A. Brannan, Matthew F. Esplen, Jeremy Gray, *Geometry*, Cambridge University Press, Cambridge, New York 1999

[3] C. Carathéodory, *The most general transformations of plane regions which transform circles into circles*, Bull. Amer. Math. Soc, New York 1937

[4] C. Carathéodory, *Conformal representation*, Mineola, N.Y. : Dover Publications, 1998.

[5] C. Carathéodory, *Theory of functions of a complex variable*, Chelsea publishing company, New York 1954

[6] H.S.M. Coxeter, F.R.S, *Introduction to Geometry, second edition*, John Wiley & Sons, INC. New York 1989

[7] H.S.M. Coxeter and S.L. Greitzer, *Geometry revisited*, New Math. Library 19, Random House, New York 1967

[8] H.S.M. Coxeter, *Inversive geometry*, Educational Studies in Mathematics, Volume 3, Numbers 3-4, Springer, 1971

[9] H. W. Eves, *College geometry*, Jones and Bartlett, Inc, Boston 1995

[10] Gojko Kalajdžić, M. Đorić, *Geometrija, materijal za studente*, Beograd, 2003

[11] K. Kozai, S. Libeskind, *Circle inversions and applications to Euclidean geometry*, University of Georgia http://jwilson.coe.uga.edu/MATH7200/InversionCompanion/inversion/inversionSupplement.pdf 2009

[12] R. A. Litherland, *Hyperbolic geometry*, Louisiana State University https://www.math.lsu.edu/ lither/7590fall08/hyperbolic.pdf 2008

[13] Dragomir Lopandić, *Geometrija*, Naučna Knjiga, Beograd, 1979.

[14] Zoran Lučić, *Euklidska i hiperbolička geometrija*, Matematički fakultet, Beograd, 1997.

[15] Zoran Lučić, *Ogledi iz istorije antičke geometrije*, Službeni glasnik, Beograd, 2009.

[16] Elena Anne Marchisotto, *Legacy of Mario Pieri in Geometry and Arithmetic*, Birkhäuser, Boston, 2007.

[17] Milan Mitrović... et al, *Geometrija: za I razred Matematičke gimnazije*, Krug, Beograd, drugo dopunjeno izdanje, 1998.

[18] Tristan Needham, *Visual complex analysis*, Oxford University Press, New York, 2004.

[19] John G. Ratcliffe, *Foundations of Hyperbolic Manifolds, Second Edition*, Springer, 2006

[20] Hans Schwerdtfeger, *Geometry of complex numbers*, Dover publications, New York 1979

[21] Ernest Stipanić, *Putevima razvitka matematike*, Vuk Karadžić, Beograd, 1988.

[22] Srđan Vukmirović, *Modeli geometrije Lobačevskog, skripta*, 2005 http://alas.matf.bg.ac.rs/ vsrdjan/files/geomlob.pdf

[23] Isaak Moiseevich Yaglom, *Geometric transformations IV: Circular transformations; Anneli Lax new mathematical library, 44*, Mathematical Association of America, Washington, 2009.