УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

Математички факултет

Мастер рад:

В е р и ж н и р а з л о м ц и

-примери и примене-

Ментор: професор др Зоран Петровић

Кандидат: Јелена Видић

индекс 1041/2010

САДРЖАЈ

I УВОД

Верижни разломци постоје већ стотинама година. Сваки коначан запис верижног разломка одговара рационалном броју, док бесконачан одговара ирационалном.

Верижни разломци су повезани са Еуклидовим алгоритмом, имају своју примену у календару, записивању броја π и броја e у облику разломка, користе се код налажења решења Пелове једначине.

Велики број научника се бавио проучавањем верижних разломака: Ојлер, Бомбели, Волис, Хајгенс итд.

Модерна теорија верижних разломака почела је са математичарем Рафаелом Бомбелијем, који је показао (1572) у својој *Алгебри* да је

$$\sqrt{13} = 3 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \ldots}}}$$

Волис је први користио термин „continued fraction“ у делу *Arithmetica infinitorum* из 1653.

II ЕУКЛИДОВ АЛГОРИТАМ И ВЕРИЖНИ РАЗЛОМЦИ

У основи мерења величина је упоређивање величина исте врсте. Утврђујемо тачан однос преношењем једне величине на другу. У том преношењу не упоређујемо само дате величине међусобно, већ их упоређујемо са једном одређеном и називамо је јединичном.

Одређивање заједничке мере двају самерљивих дужи у Еуклидовим *Елементима* изводи се Еуклидовим[1] алгоритмом који се састоји у следећем.

Нека су AB и CD две неједнаке дужи. Уколико се мања дуж CD садржи у већој дужи AB цео број пута, онда је дуж CD заједничка мера дужи AB и CD. У супротном, пренесимо дуж CD толико пута док не преостане дуж KD која је мања од дужи CD. Ако се дуж KD садржи цео број пута у дужи CD, онда је дуж KD заједничка мера дужи AB и CD. У супротном, пренесимо дуж KD на дуж CD толико пута док не преостане дуж LD која је мања од дужи KD. Уколико једног тренутка дођемо до дужи која се цео број пута садржи у претходној, онда је тако добијена дуж заједничка мера дужи AB и CD. Описаним алгоритмом се добија највећа заједничка мера дужи AB и CD.

Уколико описани алгоритам не доводи до тражене дужи, тада су дужи AB и CD несамерљиве. У том случају алгоритам има бесконачно много корака. На тај начин можемо рећи да Еуклидовом алгоритму са бесконачно много корака одговара ирационалан број који је одређен односом мерних бројева посматраних величина. Да таквих дужи има показује пример квадрата код кога су страница и дијагонала несамерљиве дужи.

[1] **Еуклид** (грч. Εὐκλείδης) - **Еуклид из Александрије** је био антички математичар познат по својим делима *Елементи*, *Дата*, *Оптика* и алгоритму за израчунавање највећег заједничког делиоца (НЗД) који је по њему назван *Еуклидов алгоритам*.

Ако свакој величини исте врсте придружимо мерни број у односу на одређени систем мерења, одређивање заједничке мере величина своди се на налажење заједничког делиоца бројева. Највећи заједнички делилац два броја одређује се описаним алгоритмом.

Сваки пар $x_0 > x_1$ позитивних целих бројева одређује опадајући низ $x_0 > x_1 > x_2 > \ldots$ у скупу N. Низ једнакости је могуће записати у облику:

$$(1.1)\quad \begin{aligned} &x_0 = b_0 x_1 + x_2, \\ &x_1 = b_1 x_2 + x_3, \\ &x_2 = b_2 x_3 + x_4, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &x_{n-2} = b_{n-2} x_{n-1} + x_n, \\ &x_{n-1} = b_{n-1} x_n, \end{aligned}$$

где су $b_j \in N$, $j = 0, 1, \ldots$

Дакле x_n је највећи заједнички делилац D(x_0 , x_1) за x_0 , x_1. Да бисмо објаснили улогу коефицијената b_k у (1.1) разматраћемо (1.1) као систем линеарних алгебарских једначина са целобројним коефицијентима $b_0, b_1, b_2, \ldots$ Елиминишући непознате x_k из (1.1) постижемо

$$\frac{x_{k-1}}{x_k} = b_{k-1} + \frac{1}{\frac{x_k}{x_{k+1}}}, k=1,2,\ldots$$

Ово очигледно води развоју $\frac{x_0}{x_1}$ у коначан прост верижни разломак

$$\frac{x_0}{x_1} = b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{\ldots + \cfrac{1}{b_n}}}}$$

Пример 1:

Број 1071 > 462 и низ једнакости можемо записати у следећем облику

$1071 = 2 \cdot 462 + 147$

$462 = 3 \cdot 147 + 21$

$147 = 7 \cdot 21$

D(1071, 462) = 21

Запис у облику верижног разломка био би :

$$\frac{1071}{462} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{7}}$$

Ради уштеде простора Роџерс [2](Rogers) (1907) је предложио следеће означавање, у коме ће се верижни разломци писати у линијском облику

$b_0 \in Z, b_k \in N, k \geq 1$:

$$(1.2) \quad \frac{x_0}{x_1} = b_0 + \frac{1}{b_1 +} \frac{1}{b_2 +} \cdots + \frac{1}{b_{n-1}}.$$

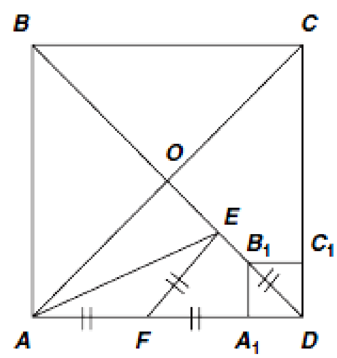
$$\frac{1071}{462} = 2 + \frac{1}{3 +} \frac{1}{7}$$

[2] **Leonard James Rogers** (1862- 1933) - први британски математичар који је открио постојање Роџерс-Рамануџановог идентитета и који је увео Роџерсове полиноме. Радио је као професор математике на Јоркширском колеџу.

III ХИПАС ИЗ МЕТАПОНТУМА

Алгебарска конструкција верижних разломака има корене у важном геометријском проблему решеном од стране питагорејца Хипаса из Метапонтума[3] из петог века пре нове ере. Овај проблем је повезан са појмом ортогоналности, то јест ако је задато да $AB \perp AD$, $x_1 = |AB| = |AD|$, доказати да BD, $|BD| = x_0$ и AD немају заједничку јединицу мере. Геометријска конструкција је слична конструкцији верижних разломака (слика 1.1.). Прво $x_0 > x_1 > x_2 = |ED|$, где је E дефинисано као $|AB|=|BE|$.

$EF \perp BD$



Слика 1.1. Хипасова конструкција за $x_1 = 2x_2 + x_3$

[3] **Hippasus of Metapontum** (Ἵππασος, *Híppasos*; 5. п.н.е.) - откриће чињенице да су $\sqrt{2}$ и број 1 несразмерни се приписује Хипасу, Питагорином ученику. За питагорејце је ова чињеница била толико шокантна да се термин ирационалан, чији првобитни превод значи несразмеран, који се не може приказати у облику количника (лат. *ratio*) и данас користи за нешто неразумљиво, страно промишљању.

Рачунања са угловима у ΔABE, ΔAEF и ΔFED показују да

$|AF| = |FE| = |ED|$. Дакле

$|BD| = |AB| + |ED|$ и $EF \perp BD$

$|AB| = 2|ED| + |A_1D|$

$$x_0 = x_1 + x_2$$
$$x_1 = 2x_2 + x_3$$
$$|A_1D| = x_3 < x_2$$

Из посматрања да $\Delta ABD \sim \Delta EFD$ добијамо $x_2 = 2x_3 + x_4$. Резултат је да $\frac{x_0}{x_1}$ може бити

представљен верижним разломком:

$$(1.3)\quad \frac{x_0}{x_1} = 1 + \frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+\cdots}\,.$$

Како су рационални бројеви вредности коначних верижних разломака и развој у верижни разломак је јединствен, то показује да је

$\sqrt{2} = \frac{|BD|}{|AD|}$ ирационалан број.

IV ВЕРИЖНИ РАЗЛОМЦИ

Лако је уочити да коначан верижни разломак представља рационалан број. Да бисмо нашли рационалан број који одговара верижном разломку

$$2+\frac{1}{3}\,\frac{}{+}\,\frac{1}{2}\,\frac{}{+}\,\frac{1}{1}\,\frac{}{+}\,\frac{1}{4}\,\frac{}{+}\,\frac{1}{2}\,\frac{}{+}\,\frac{1}{3}$$

ми ћемо га опет записати, почевши од леве стране горњег израза у облику верижног разломка

$2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}}}}}$ који у неколико корака елементарних аритметичких

операција даје $\frac{825}{359}$.

Верижним разломцима можемо представити и ирационалне бројеве и приметићемо да није коначан запис. Коришћењем Волфрамовог[4] програма можемо добити следеће:

$\pi \approx 3.14159265358979323846264338327 95$

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}}}}$$

$e \approx 2.71828182845904523536028747135 27$

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\mathbf{2} + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\mathbf{4} + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}}}}$$

[4] http://demonstrations.wolfram.com/ContinuedFraction

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots\ldots\ldots}}}}}} = \frac{239}{169} \approx 1.4142011834319526627$$

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \ldots\ldots}}}}}} = \frac{97}{56} \approx 1.7321428571428571429$$

$$\sqrt{5} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \ldots.}}}}}} = \frac{12238}{5473} \approx 2.2360679700347158779$$

$$\sqrt{7} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \ldots\ldots}}}}}}}} = \frac{717}{271} \approx 2.6457564575645756458$$

V БОМБЕЛИЈЕВ МЕТОД

У *Алгебри* Р.Бомбелија[5] разматран је метод израчунавања квадратних корена $\sqrt{N}$, где је N позитивна целобројна вредност која није потпуни квадрат. Нека је a највећа позитивна целобројна вредност која задовољава $a^2 < N$. Тада $N = a^2 + r$ са $r > 0$ и

$$\sqrt{a^2 + r} = a + x \Leftrightarrow a^2 + r = a^2 + 2ax + x^2 \Leftrightarrow r = 2ax + x^2 \Leftrightarrow x = \frac{r}{2a + x}$$

повлачи да

$$\sqrt{N} = a + \frac{r}{2a +} \frac{r}{2a +} \frac{r}{2a + \cdots}.$$

За N = 13 добијамо

$$\sqrt{3^2 + 4} = 3 + x \Leftrightarrow 9 + 4 = 9 + 6x + x^2 \Leftrightarrow x = \frac{4}{6 + x}$$

$$\sqrt{13} \approx 3.605551275463989$$

$$\sqrt{13} = 3 + \frac{4}{6 +} \frac{4}{6 +} \frac{4}{6 + \cdots}$$

[5] **Rafael Bombelli** (1526 -1572 - Болоња) - италијански математичар. Био је централна фигура у разумевању имагинарних бројева. Увео је реторику која је претходила симболима +i и -i и описао је како оба функционишу.

VI ХАЈГЕНСОВ МЕТОД

Теорија верижних разломака има корене у практичном проблему апроксимације несводљивих разломака у којима бројиоци и имениоци имају много цифара, разломцима који имају бројиоце и имениоце са много мање цифара. Први пут је тај проблем разматран систематски од стране Хајгенса[6] (1698). У овој књизи Хајгенс је проучавао проблем планетаријума. Да би планетаријум радио прецизно треба уредити да однос зупчаника буде $\frac{77708431}{2640858}$

Како је било немогуће остварити овај количник у пракси, Хајгенс је развио количник у верижни разломак

$$29+\frac{1}{2}\,\frac{1}{+2}\,\frac{1}{+1}\,\frac{1}{+5}\,\frac{1}{+1}\,\frac{1}{+4}\,\frac{1}{+1}\,\frac{1}{+1}\,\frac{1}{+2}\,\frac{1}{+1}\,\frac{1}{+6}\,\frac{1}{+1}\,\frac{1}{+10}\,\frac{1}{+2}\,\frac{1}{+2}\,\frac{1}{+3},$$

и проучио је сукцесивне апроксимације:

[6] **Christiaan Huygens** (1629 –1695) –холандски математичар, астроном и теоријски физичар. Открио је тајну Сатурновог прстена, открио је тачно трајање револуције Титана, закључио је да земљини меридијани морају бити елиптични, спљоштени на половима, пронашао је законе судара тела, поставио закон центрифугалне силе и формирао таласну теорију светлости .

$$\frac{P_{-1}}{Q_{-1}} = \frac{1}{0} = +\infty,$$

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{29}{1} = 29,$$

$$\frac{P_1}{Q_1} = 29 + \frac{1}{2} = \frac{59}{2} = 29.5,$$

$$\frac{P_2}{Q_2} = 29 + \frac{1}{2+}\,\frac{1}{2} = \frac{147}{5} = 29.4,$$

$$\frac{P_3}{Q_3} = 29 + \frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{1} = \frac{206}{7} = 29.428\,571\,43\ldots,$$

$$\frac{P_4}{Q_4} = 29 + \frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{5} = \frac{1177}{40} = 29.425,$$

$$\frac{P_5}{Q_5} = 29 + \frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{5+}\,\frac{1}{1} = \frac{1383}{47} = 29.425\,531\,91\ldots,$$

$$\frac{P_6}{Q_6} = 29 + \frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{5+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{4} = \frac{6709}{228} = 29.425\,438\,60\ldots$$

Анализирање

$$(1.2) \quad \frac{x_0}{x_1} \quad = \quad b_0 + \frac{1}{b_1+}\,\frac{1}{b_2+}\cdots\frac{1}{+\,b_{n-1}}.$$

показује да вредност верижног разломка лежи између његових узастопних конвергената P_k/Q_k. Дакле, да би проценили грешку треба пронаћи следеће разлике:

$$\frac{59}{2}-\frac{29}{1}=\frac{1}{2\times 1},\ \frac{59}{2}-\frac{147}{5}=\frac{1}{2\times 5},$$

$$\frac{206}{7}-\frac{147}{5}=\frac{1}{7\times 147},\ \frac{206}{7}-\frac{1177}{40}=\frac{1}{7\times 40},$$

$$\frac{1383}{47}-\frac{1177}{40}=\frac{1}{47\times 40},\ \frac{1383}{47}-\frac{6709}{228}=\frac{1}{47\times 228}=\frac{1}{10716}.$$

Чињеница да су све разлике аликвотни разломци, дакле разломци са јединичним бројиоцем и целобројним имениоцем не могу бити случајност. У основи овај проблем води ка доброј рационалној апроксимацији $\frac{6709}{228}$, Хајгенсовог разломка.

VII ВЕРИЖНИ РАЗЛОМЦИ И ГРЕГОРИЈАНСКИ КАЛЕНДАР

По угледу на Ојлера[7] (1748), разматрамо примену верижних разломака на проблем календара.

Прецизна астрономска проучавања показују да једна година траје *365d5h48m55s. Пронаћи календар који неће акумулирати приметну грешку за већи временски интервал.*

Претпоставка да једна година траје 365 дана води ка грешци од 5 сати по години. Грешка се акумулира прилично брзо и за 100 година резултира приметним померањем годишњих доба. Ако претпоставимо да једна година траје 366 дана неслагање са годишњим добима ће бити уочено много раније. Да би решили овај проблем прво изражавамо трајање године у данима:

$$1 \text{ година} = 365 + \frac{5}{24} + \frac{48}{60} \times \frac{1}{24} + \frac{55}{60} \times \frac{1}{60} \times \frac{1}{24} \text{ дана} = 365 + \frac{20935}{86400} \text{ дана}$$

Ово је наравно апроксимативно трајање, али грешка је тако мала да неће бити приметна за више од 10 000 година. Да би пронашли добру апроксимацију за 20 935/86 400 морамо развити овај рационални број у верижни разломак. Јасно је да су бројеви 20 935 и 86 400 дељиви са 5, тако да је

$$\frac{20935}{86400} = \frac{4187}{17280}$$

Лако се може доказати да је последњи разломак несводљив. Заиста

[7] **Leonhard Euler** (1707 –1783)) - швајцарски математичар и физичар. Живео је и радио у Берлину и Санкт Петербургу. Ојлер је дошао до великих открића у потпуно различитим областима као што су математичка анализа и теорија графова. Увео је у употребу велики број термина који се користе у савременој математици и унапредио математичку нотацију, посебно у оквиру анализе.

20 935 =5×53×79, такође 86400=2^7×3^3×5^2, што повлачи да је 5 највећи заједнички делилац. Имамо:

$$\frac{4187}{17\,280}=\frac{1}{4+}\frac{532}{4187}=\frac{1}{4+}\frac{1}{7+}\frac{463}{532}=\frac{1}{4+}\frac{1}{7+}\frac{1}{1+}\frac{69}{463}$$
$$=\frac{1}{4+}\frac{1}{7+}\frac{1}{1+}\frac{1}{6+}\frac{49}{69}=\frac{1}{4+}\frac{1}{7+}\frac{1}{1+}\frac{1}{6+}\frac{1}{1+}\frac{20}{49}$$
$$=\frac{1}{4+}\frac{1}{7+}\frac{1}{1+}\frac{1}{6+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{2}{9}$$
$$=\frac{1}{4+}\frac{1}{7+}\frac{1}{1+}\frac{1}{6+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{4+}\frac{1}{2}.$$

Конвергенти ових верижних разломака могу бити приказани следећом табелом:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & 4 & 7 & 1 & 6 & 1 & 2 & 2 & \cdots \\
\frac{1}{0} & \frac{0}{1}^{l} & \frac{1}{4}^{g} & \frac{7}{29}^{l} & \frac{8}{33}^{g} & \frac{55}{227}^{l} & \frac{63}{260}^{g} & \frac{181}{747}^{l} & \cdots
\end{array}$$

*

Први ред ове табеле садржи парцијалне имениоце верижних разломака. Други ред се састоји од одговарајућих конвергената, померених удесно за 1.

Индекс *l* значи да је конвергент мањи од вредности верижног разломка. Индекс g значи да је конвергент већи од ове вредности. Одатле следи да се сваке четири године додаје нешто мање од једног дана више. Ово даје предност јулијанском календару, који додаје један дан више (29. фебруар) сваке преступне године (свака година која је дељива са 4).

Сваке 33 године придодаје мало мање од осам дана.

Како је $100 = 3 \times 33 + 1$, постижемо да сваке 400 = 4×3×33+4 године придодају мало мање од 4×3×8+1 = 97 дана више. Да би средили одговарајућу компензацију, грегоријански календар конвертује 3 = 100−97 преступне године у интервалу од 400 година у обичне године. Одатле следи да су 1700, 1800, 1900 биле обичне године (одбити три дана више по јулијанском календару). Ипак, 1600 и 2000 су биле преступне године. Како је

$$\frac{97}{400} - \frac{4187}{17280} = 0.000197456.....$$

То значи да грегоријански календар додаје око два дана више сваких

10 000 година.

Папа Грегорије је увео грегоријански календар 1582. До тог времена разлика између календара је већ била 10 дана. Нови календар уведен је 5.10.1582. и да би се компензовала разлика од 10 дана тај дан је проглашен 15.10. Занимљиво је да иако је календар био у вези са верижним разломцима, чиме се Волис бавио, предложио је британским властима да га не прихвате.

VIII ПРОБЛЕМ КВАДРАТУРЕ КРУГА

Јединична кружница T је граница јединичног круга D са центром у нули. Површина круга D је означена са π. Уведена од стране В. Џонса[8] у (1706), запис π је постао стандардан после издавања Ојлерове монографије (1748) .

Проблем квадратуре: Пронаћи добру рационалну апроксимацију дужине кружнице $T = 2\pi$

Квадратура круга је била један од најтежих старих математичких проблема. Покушаји да се реши резултирали су значајним прогресом у математичкој анализи и посебно у теорији верижних разломака. Значење овог проблема је мењано у математици временом. У време Архимеда[9] практична страна проблема је била да се помоћу лењира и шестара конструише страница квадрата површине π. Теоретска страна проблема је била или да се докаже да $\pi \in Q$ или бар наћи добру рационалну апроксимацију за π. Сада са Волфрамовим математичким програмом свако може наћи хиљаде цифара децимала броја π:

$$\pi \approx 3.14159265358979323846264338327 95$$

Оригинални прорачун тачних децималних места броја π је био тежак проблем. Први важан допринос квадратурном проблему је био од стране Архимеда који је развио метод уписивања и описивања правилних n- тостраних полигона са n = 6, 12, 24, 48, 96,...,3×2^k. На пример , разматрање правилног шестоугла уписаног у круг показује да је $3 < \pi$.

[8] **William Jones** (1675 –1749) - велшки математичар. Најзапаженији је по увођењу симбола π које представља количник обима круга и његовог пречника. Био је близак пријатељ са Њутном. Године 1711. постао је члан Краљевског друштва, а касније је постао и његов потпредседник.

[9] **Архимед** (Αρχιμηδης, 287. п. н. е. — 212. п. н. е.) - грчки математичар, физичар и астроном из Сиракузе на Сицилији. Први је рачунао број π, пронашао закон полуге, закон потиска (Архимедов закон, Архимедова вага) и др.

Први алгебарски алгоритам за рачунање произвољног броја децимала за π је предложен од стране Бронкера[10] 1656. Иако су Бронкерове једноставне калкулације остале непримећене , много компликованији прорачуни Хајгенса су резултирали значајним напретком у рационалној апроксимацији π. Било је показано да

$$\pi = 3 + \frac{1}{7+}\,\frac{1}{15+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{292+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{14+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{1+}\cdots$$

Конвергенти верижних разломака броја π могу бити сређени у табели:

$$\begin{array}{ccccccc} 3 & 7 & 15 & 1 & 292 & 1 & \ldots \\ \frac{1}{0}^{g} & \frac{3}{1}^{l} & \frac{22}{7}^{g} & \frac{333}{106}^{l} & \frac{355}{113}^{g} & \frac{103\,993}{33\,102}^{l} & \ldots \end{array}$$

**

Апроксимација 355/113 је названа Метјусова апроксимација. Грешка у Метјусовој апроксимацији је мања од

$$\begin{aligned} 0 < \frac{355}{113} - \pi < \frac{355}{113} - \frac{103\,993}{33\,102} &= \frac{11\,751\,210 - 11\,751\,209}{113 \times 33\,102} \\ &= \frac{1}{113 \times 33\,102} = \frac{1}{3\,740\,526} \\ &= 0.000\,000\,267\ldots \end{aligned}$$

[10] **William Brouncker** (1620 – 1684) - енглески математичар. Био је први Европљанин који је решио једначину која се сада назива Пелова једначина. Први је у Енглеској који се занимао верижним разломцима и пратећи рад Џона Волиса написао је верижни разломак за π.

IX ОЈЛЕР-ВОЛИСОВЕ ФОРМУЛЕ

ОЈЛЕРОВ ПРИМЕР (1744)

У следећем примеру Ојлер је израчунао конвергенте Хипасових верижних разломака (1.3) сваки померен за један. За даљу сврху набрајамо конвергенте за $\sqrt{2}$:

$$(1.4)\quad \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & \ldots \\ \frac{1}{0} & \frac{1}{1} & \frac{3}{2} & \frac{7}{5} & \frac{17}{12} & \frac{41}{29} & \frac{99}{70} & \frac{239}{169} & \ldots \end{array}$$

***

Следи да су парни конвергенти мањи од непарних. Одатле

239/169 < $\sqrt{2}$ < 99/70 и грешка у представљању $\sqrt{2}$ од стране петог конвергента 99/70 не може премашити

$$\frac{99}{70}-\frac{239}{169}=\frac{169\times 99-70\times 239}{70\times 169}=\frac{16731-16730}{11830}<10^{-4}.$$

Израчунавања сада показују да

$$\sqrt{2}=1.41421356237......$$

$$1+\frac{29}{70}=1.41428571428...$$

Идентитет 169×99−70×239 = 1 је објашњен Ојлеровом теоријом која следи.

Замењујући јединице које множе x_{j+1} на десној страни (1.1) коефицијентима који су различити од нуле a_j и дозвољавајући да број једначина буде неограничен добијамо:

$$
\begin{aligned}
x_0 &= b_0x_1 + a_1x_2, \\
x_1 &= b_1x_2 + a_2x_3, \\
x_2 &= b_2x_3 + a_3x_4, \\
&. \\
&.
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

Елиминишући непознате x_k, добијамо општи облик верижног разломка

$$
b_0 + \frac{a_1}{b_1} \, \frac{a_2}{+ \, b_2} \, + \cdots = b_0 + \underset{k=1}{\overset{\infty}{\mathrm{K}}} \left(\frac{a_k}{b_k} \right). \tag{1.6}
$$

$$
= b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cfrac{a_4}{b_4 + \ldots}}}}
$$

Бројеви a_k су названи k - *тим парцијалним бројиоцима, а* b_k су названи k - *тим парцијалним имениоцима* у (1.6). Посматраћемо (1.6) као један алгоритам за добијање рационалних апроксимација. Прецизније, за сваки позитивни целобројни n можемо зауставити процес у (1.6) на члану a_n/b_n и извести све алгебарске операције.

[11] **John Wallis** (1616 – 1703) - енглески математичар који је један од зачетника развоја математичке анализе. Увео је ознаку ∞ за бесконачно. Поред математичких радова објавио је и радове из области филозофије, граматике, теологије и логике.

Тада је

$$(1.7) \qquad \frac{P_n}{Q_n} \equiv b_0 + \underset{k=1}{\overset{n}{\mathrm{K}}} \left(\frac{a_k}{b_k}\right)$$

назван *n- тим конвергентом* верижног разломка (1.6). По (1.10) која је наведена ниже, P_n и Q_n не могу оба бити једнака нули, па му се увек може увек доделити вредност коначна или бесконачна за (1.7). Ово је разлог за услов $a_k \neq 0$.

Теорема 1: (Бронкер: Ојлер 1748 и Волис 1656)

Нека

$$(1.8) \qquad \xi = b_0 + \underset{k=1}{\overset{\infty}{\mathrm{K}}} \left(\frac{a_k}{b_k}\right) = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} + \frac{a_{n+1}}{\xi_{n+1}}$$

буде општи верижни разломак са конвергентима $\{P_n/Q_n\}_{n\geq 1}$. Нека

$$\begin{aligned} P_{-1} &= 1, & P_0 &= b_0, \\ Q_{-1} &= 0, & Q_0 &= 1 \end{aligned}$$

Тада $\{P_n\}_{n\geq 0}$ и $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ задовољава Ојлер-Волисове формуле

$$(1.9) \qquad \begin{aligned} P_n &= b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2}, \\ Q_n &= b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2}, \end{aligned}$$

$$(1.10) \qquad P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = (-1)^{n-1} a_1 \cdots a_n,$$

$$(1.11) \qquad \xi = \frac{\xi_{n+1} P_n + a_{n+1} P_{n-1}}{\xi_{n+1} Q_n + a_{n+1} Q_{n-1}}.$$

Доказ: Имамо

$$P_0/Q_0 = b_0, \; b_0 + a_1/b_1 = (b_0 b_1 + a_1)/b_1 = P_1/Q_1,$$

што по дефиницији имплицира да

$$P_1 = b_0 b_1 + a_1 = b_1 P_0 + a_1 P_{-1}, \qquad Q_1 = b_1 = b_1 Q_0 + a_1 Q_{-1}.$$

Другим речима (1.9) важи за $n = 1$. Доказ се сада завршава индукцијом. Претпоставимо да (1.9) важи за дато n за сваки верижни разломак и доказаћемо да то важи за $n+1$.

Ако $b_{n+1} = 0$, тада је

$$\cdots + \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} + \frac{a_n}{b_n} + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} + \; = \; \cdots + \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}},$$

Дакле $P_{n+1} = a_{n+1} P_{n-1}$ и $Q_{n+1} = a_{n+1} Q_{n-1}$, је у потпуној сагласности са (1.9).

Ако $b_{n+1} \neq 0$ тада, посматрајући да

$$\frac{a_n}{b_n + a_{n+1}/b_{n+1}} = \frac{a_n b_{n+1}}{b_n b_{n+1} + a_{n+1}},$$

стављамо $a'_n = a_n b_{n+1}$, $b'_n = b_n b_{n+1} + a_{n+1}$ и разматрамо помоћни верижни разломак са n чланова:

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} + \frac{a'_n}{b'_n}.$$

Дефиницијом P_{n+1} и индукцијом постижемо:

$$\begin{aligned} P_{n+1} = P'_n &= b'_n P_{n-1} + a'_n P_{n-2} \\ &= b_n b_{n+1} P_{n-1} + a_{n+1} P_{n-1} + b_{n+1} a_n P_{n-2} \\ &= b_{n+1}(b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2}) + a_{n+1} P_{n-1} \\ &= b_{n+1} P_n + a_{n+1} P_{n-1}. \end{aligned}$$

Ово повлачи (1.9) за P_{n+1}. Слично, (1.9) важи за Q_{n+1}.

Да би доказали (1.10) посматрамо $P_1 Q_0 - P_0 Q_1 = a_1$. Претпоставимо да (1.10) важи за n, примењујемо (1.9) да покажемо да

$$\begin{aligned} P_{n+1} Q_n - P_n Q_{n+1} &= (b_{n+1} P_n + a_{n+1} P_{n-1}) Q_n \\ &\quad - P_n (b_{n+1} Q_n + a_{n+1} Q_{n-1}) \\ &= - a_{n+1} (P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n), \end{aligned}$$

што комплетира доказ за (1.10).

Да би доказали (1.11) стављамо $a'_{n+1} = a_{n+1}$, $b'_{n+1} = \xi_{n+1}$ и уочавамо да по (1.9)

$$\begin{aligned} P'_{n+1} &= (\xi_{n+1}) P_n + a_{n+1} P_{n-1}, \\ Q'_{n+1} &= (\xi_{n+1}) Q_n + a_{n+1} Q_{n-1}, \end{aligned}$$

што доказује (1.11) пошто је $\xi = P'_{n+1}/Q'_{n+1}$.

□

Прича о овим формулама датира од Бронкера. Важна формула (1.11) је Ојлерова. Ојлер је био тај који је систематски применио ове формуле и поврх тога их установио експлицитно (1748).

Избор првих конвергената 1/0 и $b_0/1$ је такође Ојлерова заслуга. Теорема 1 је веома корисна у претварању конвергената верижних разломака у несводљиве разломке. Како смо видели, Ојлер је пронашао (Ојлер 1744) згодан начин да представи прорачуне конвергената у табелама *, **, ***. Ојлерова идеја је добро приказана у **:

$$\frac{333+292\times 355}{106+292\times 113}=\frac{103993}{33102}.$$

Теорема 2: Бројиоци P_n и имениоци Q_n у (1.7) задовољавају:

$$\frac{P_n}{P_{n-1}}=b_n+\frac{a_n}{b_{n-1}}\,{}_{+}\,\frac{a_{n-1}}{b_{n-2}}\,{}_{+}\cdots{}_{+}\,\frac{a_1}{b_0}, \tag{1.12}$$
$$\frac{Q_n}{Q_{n-1}}=b_n+\frac{a_n}{b_{n-1}}\,{}_{+}\,\frac{a_{n-1}}{b_{n-2}}\,{}_{+}\cdots{}_{+}\,\frac{a_2}{b_1}.$$

Доказ: Применити (1.9) на леву страну (1.12) итеративно.

Последица 1: Низ позитивних целобројних вредности $\{b_n\}_{n\geq 0}$ задовољава, за $k\geq 2$,

$$\{b_1,b_2,\ldots b_k\}=\{b_k,b_{k-1},\ldots b_1\} \tag{1.13}$$

ако и само ако $P_k=Q_{k-1}$, где су $\{P_n/Q_n\}_{n\geq 0}$ конвергенти за $\underset{n\geq 1}{\mathrm{K}}\left(\frac{1}{b_n}\right)$.

Доказ: Из (1.12) и из јединствености записа верижних разломака

$$\frac{Q_{k-1}}{Q_k}=\frac{1}{b_k}\,{}_{+}\,\frac{1}{b_{k-1}}\,{}_{+}\cdots\,\frac{1}{b_1}$$

је конвергент P_k/Q_k ако и само ако (1.13) важи.

□

Теорема 3: (Бронкер 1655) Нека

$$b_0 + \mathbf{K}_{k=1}^{\infty}(a_k/b_k)$$

буде општи верижни разломак са позитивним члановима. Тада

$$(1.14) \qquad \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}a_1 \cdots a_n}{Q_n Q_{n-1}}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

$$(1.15) \qquad \frac{P_0}{Q_0} < \cdots < \frac{P_{2k}}{Q_{2k}} < \cdots < \frac{P_{2k+1}}{Q_{2k+1}} < \cdots < \frac{P_1}{Q_1} < \frac{P_{-1}}{Q_{-1}} = +\infty.$$

Доказ*:* Да би добили (1.14) делимо обе стране (1.10) са Q_nQ_{n-1}. Сабирајући формуле (1.14) за узастопне вредности n, постижемо

$$(1.16) \qquad \begin{aligned} \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}} &= \frac{(-1)^{n-1}a_1 \cdots a_n}{Q_n Q_{n-1}} + \frac{(-1)^{n-2}a_1 \cdots a_{n-1}}{Q_{n-1} Q_{n-2}} \\ &= \frac{(-1)^n a_1 \cdots a_{n-1}}{Q_{n-1}} \left(\frac{1}{Q_{n-2}} - \frac{a_n}{Q_n} \right) \\ &= \frac{(-1)^n a_1 \cdots a_{n-1}}{Q_{n-1}} \frac{Q_n - a_n Q_{n-2}}{Q_{n-2} Q_n} = \frac{(-1)^n a_1 \cdots a_{n-1} b_n}{Q_n Q_{n-2}}, \end{aligned}$$

пошто је $Q_n - a_nQ_{n-2} = b_nQ_{n-1}$ по (1.9). Следи да парни конвергенти расту док непарни опадају. Стављајући $n = 2k+1$ у (1.14) резултира у

$$\frac{P_{2k+1}}{Q_{2k+1}} - \frac{P_{2k}}{Q_{2k}} = \frac{1}{Q_{2k+1} Q_{2k}},$$

Што повлачи да је $2k+1$- ви конвергент увек већи од $2k$-тог конвергента и стога већи од сваког парног.

□

X ПЕЛОВА ЈЕДНАЧИНА

Међу Диофантовим једначинама за које постоји алгоритам за њихово решавање својом занимљивошћу истиче се једначина облика

$$x^2 = 1 + y^2D,$$

где је D природан број који није квадрат ниједног целог броја. Једначина облика

$x^2 = 1 + y^2D$ се најчешће назива Пелова[12] једначина, али некада и Фермаова једначина[13]. Познато је да су се њоме бавили и Архимед, Диофант, Лагранж, Волис, Ојлер, Гаус, ...

Услов да D није потпуни квадрат је неопходан јер у супротном једначина, сем тривијалног $(x_0,y_0) = (1,0)$ нема других решења.

[12] **John Pell** (1610-1685) – енглески математичар. Током своје универзитетске каријере постао је признати лингвиста и пре него што је дипломирао дописивао се са Бригсом и другим математичарима. Бавио се и проучавањем педагогије и у математици се концентрисао на теорију једначина и бавио се математичким табелама.

[13] **Pierre de Fermat** (1601-1665) - француски математичар и правник у тулуском парламенту. Студирао је на универзитетима у Тулузу, Орлеану и Бордоу и завршио право. Бавио се истраживањима теорије бројева. Значајни су његови доприноси аналитичкој геометрији и вероватноћи. Познат је по Великој Фермаовој теореми.

Џон Волисова *Arithmetica Infinitorum* 1657 је дошла до Пјера де Ферма у Тулузу, Италија. Ферма, заинтересован за теорију бројева, адресирао је Волису изазов за решавање Диофантове једначине

$$(1.17) \quad x^2 = 1 + y^2D$$

за позитивне целе бројеве x и y. Овде је D позитиван цео број који није квадрат. Ако би D био савршени квадрат тада ова једначина не би имала позитивна целобројна решења. Уопштено квадратни чланови за D могу бити укључени у y^2.
Наравно Бронкер је испитао прво најједноставнији случај $D = 2$ и нашао следећа решења:

$$(1.18) \quad \begin{array}{llll} x = & 3 & 17 & 99 \\ y = & 2 & 12 & 70 \end{array}.$$

Прича о Волисовом резултату, показује да је Бронкер, као велики експерт у верижним разломцима тог времена, развио теорију о позитивним верижним разломцима, коју је успешно применио на квадратурни проблем .

Дакле, он је сигурно морао знати да се у (1.4) коефицијенти x/y из (1.18) појављују се на непарним местима. Користећи формуле (1.9) Бронкер је лако могао наћи следећи пар у (1.4):

$$x = 2 \times 239 + 99 = 577$$
$$y = 2 \times 169 + 70 = 408.$$

Сада рачунањем добијамо

$$1 + 2 \times 408^2 = 332929 = 577^2$$

Једини закључак који може проистећи из овога је да су решења за (1.17) дата са бројиоцима и имениоцима непарних конвергената за $\sqrt{D}$, бар за $D = 2$.

Не постоји директан доказ да је Бронкер расправљао на овај начин. Ипак, форма у којој је послао своје решење Волису показује да је да га је вероватно пронашао коришћењем верижних разломака:

$$(1.19) \qquad 2 \times Q: \quad 2 \times 5\frac{1}{1} = 12, \quad 12 \times 5\frac{5}{6} = 70, \quad 70 \times 5\frac{29}{35} = 408 \cdots,$$

$$(1.20) \qquad 2 \times Q: \quad 2 \times 5\frac{1}{1} \times 5\frac{5}{6} \times 5\frac{29}{35} \times 5\frac{169}{204} \times \cdots$$

Да бисмо пронашли правило за (1.20) нека Q_n буде именилац n – тог конвергента за $\sqrt{2}$.

Тада $Q_1 = 2$, $Q_3 = 12$, $Q_5 = 70$ ... Јасно је да (1.19) повезује Q_n *и* Q_{n+2}. Тада (1.20) представља решења ***y*** као делимичне резултате бесконачног Волисовог записа

$$Q_1 \frac{Q_3}{Q_1} \frac{Q_5}{Q_3} \frac{Q_7}{Q_5} \frac{Q_9}{Q_7} \ldots$$

Константа 5 у (1.20) је објашњена лемом.

Лема 1: Рекурентна формула $Q_{n+2} = 6Q_n - Q_{n-2}$ важи за n ≥ 1.

Доказ: Разматрамо

$$(1.21) \qquad \begin{aligned} Q_{n+2} &= 2Q_{n+1} + Q_n, \\ 2Q_{n+1} &= 4Q_n + 2Q_{n-1}, \\ -Q_n &= -2Q_{n-1} - Q_{n-2}. \end{aligned}$$

Доказ следи троструком применом (1.9) на (1.21).

□

Сабирање прве две једначине у (1.21) резултира са $Q_{n+2}=5Q_n+2Q_{n-1}$, који заједно са лемом 1 повлачи да $5< Q_{n+2}/Q_n < 6$, као што је јасно из (1.20). Сада лема 1 наговештава да

$$\frac{Q_{n+2}}{Q_n} = 6 - \frac{1}{6\,-}\,\frac{1}{6\,-}\,\frac{1}{6\,-}\,\frac{1}{6\,-\cdots} \longrightarrow a,$$

где је $a \in (5, 6)$ решење квадратне једначине

$$X = 6 - \frac{1}{X} \Longrightarrow X = 3 + 2\sqrt{2} = 5.828\ 427\ 124\ 746\ 19\ldots$$

Приметимо да $x = 3$ и $y = 2$ је минимално решење за (1.17) са $D = 2$, док су децималне вредности разломака у (1.20)

$$\frac{5}{6} = 0.83\ldots, \qquad \frac{29}{35} = 0.828\ 57\ldots, \qquad \frac{169}{204} = 0.828\ 431\ldots$$

Можемо бити сигурни да ове чињенице нису промакле Бронкеру.

Примењујући лему 1 сада можемо доказати да непарни конвергенти за $\sqrt{2}$ дају решења за једначину (1.17) са $D = 2$. Претпоставимо да је ово тачно за индексе $2k-1$ за $k \leq n$. Тада по леми 1

$$\begin{aligned} P_{2n+1}^2 - 2Q_{2n+1}^2 &= (6P_{2n-1} - P_{2n-3})^2 - 2(6Q_{2n-1} - Q_{2n-3})^2 \\ &= 1 + 36 - 12(P_{2n-1}P_{2n-3} - 2Q_{2n-1}Q_{2n-3}). \end{aligned}$$

За првих неколико вредности за n комбинација у загради је

$$(1.22) \quad P_{2n-1}P_{2n-3} - 2Q_{2n-1}Q_{2n-3} = 3.$$

Можемо укључити (1.22) у индукцијску претпоставку и добијамо да

$$
\begin{aligned}
&P_{2n+1}P_{2n-1} - 2Q_{2n+1}Q_{2n-1} \\
&\quad = (6P_{2n-1} - P_{2n-3})P_{2n-1} - 2(6Q_{2n-1} - Q_{2n-3})Q_{2n-1} \\
&\quad = 6 - (P_{2n-1}P_{2n-3} - 2Q_{2n-1}Q_{2n-3}) = 3,
\end{aligned}
$$

што комплетира Бронкерову конструкцију.

За $D = 3$ Бронкер даје следећа решења:

$$3 \times Q: \quad 1 \times 3\frac{1}{1} \times 3\frac{3}{4} \times 3\frac{11}{15} \times 3\frac{41}{56} \times \cdots$$

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{1} {}_{+} \frac{1}{2} {}_{+} \frac{1}{1} {}_{+} \frac{1}{2} {}_{+} \frac{1}{1} {}_{+} \frac{1}{2} {}_{+} \cdots,$$

и конвергенти са непарним индексима

$$
(1.23) \qquad \begin{array}{lrrrr}
x = & 2 & 7 & 26 & 97, \\
y = & 1 & 4 & 15 & 56,
\end{array}
$$

опет задовољавају једначину $x^2 - y^2 3 = 1$. У овом случају

$$\frac{Q_n}{Q_{n-2}} = 4 - \frac{1}{4} {}_{-} \frac{1}{4} {}_{-} \cdots \longrightarrow 2 + 1\sqrt{3} = 3.732\ 050\ 807\ 568\ 877\ldots$$

и

$$3\frac{3}{4} = 3.75, \qquad 3\frac{11}{15} = 3.733\ldots, \qquad 3\frac{41}{56} = 3.732\,142\,857\,14\ldots,$$

пошто

$$Q_{n+2} = 4Q_n - Q_{n-2}.$$

За $D = 7$ овај закон мора бити модификован јер $x/y = 3/1 = P_1/Q_1$ није решење за $x^2 - y^2 D = 1$. Ипак , $P_3/Q_3 = x/y = 8/3$ је решење. Ако су x_1, y_1 решења једначине (1.17) тада су x_n и y_n у

$$(1.24) \quad x_n + y_n\sqrt{D} = (x_1 + y_1\sqrt{D})^n$$

такође решења. Заиста, како је $\sqrt{D}$ ирационално, (1.24) је важеће и када + заменимо са −. Ово се може постићи применом Галуаовог[14] аутоморфизма за $Q(\sqrt{D})$ на (1.24). Тада

$$x_n^2 - y_n^2 D = (x_1 + y_1\sqrt{D})^n (x_1 - y_1\sqrt{D})^n = (x_1^2 - y_1^2 D)^n = 1.$$

Стављамо $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, што је такође решење за (1.17).

Теорема 2 (Бронкер 1657) Решења $\{(x_n, y_n)\}_{n\geq 1}$ једначине (1.17) задовољавају

$$(1.25) \quad \begin{aligned} x_{n+1} &= (2x_1)x_n - x_{n-1},\ x_0 = 1, \\ y_{n+1} &= (2x_1)y_n - y_{n-1},\ y_0 = 0. \end{aligned}$$

и разломци $\{y_n/x_n\}_{n\geq 0}$ су конвергенти верижним разломцима

$$(1.26) \quad \frac{1}{\sqrt{D}} = \frac{y_1}{x_1 -} \frac{1}{2x_1 -} \frac{1}{2x_1 -} \frac{1}{2x_1 - \cdots}.$$

Доказ: По (1.24) за $n = 0, 1, \ldots,$

$$x_{n+1} = x_1 x_n + y_1 D y_n, \qquad y_{n+1} = y_1 x_n + x_1 y_n.$$

Добијамо

[14] **Еварист Галуа** (*Évariste Galois*; 1811 — 1832) - француски математичар. Био је први који је користио термин – група. Његов рад је био основа за Галуаову теорију и теорију група.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_1x_n + y_1^2Dx_{n-1} + x_1y_1y_{n-1}D \\ &= x_1x_n + x_1^2x_{n-1} + x_1y_1y_{n-1}D - x_{n-1} \\ &= x_1x_n + x_1(x_1x_{n-1} + y_1Dy_{n-1}) - x_{n-1} \\ &= (2x_1)x_n - x_{n-1}, \end{aligned}$$

што доказује идентитет у (1.25). Сличним калкулацијама се доказује и друга. Сада (1.25) имплицира да су y_n/x_n конвергенти верижним разломцима (1.26), који конвергира $1/\sqrt{D}$ према

$$\frac{1}{\sqrt{D}} - \frac{y_n}{x_n} = \frac{1}{x_n\sqrt{D}\left(x_n + y_n\sqrt{D}\right)} = \frac{1}{x_n\sqrt{D}(x_1 + y_1\sqrt{D})^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

□

Теорема 2 показује да Бронкеров метод функционише не само за одређене вредности D као што су $D = 2, 3, 7$ већ за било које D. Заиста, можемо записати, према Бронкеру,

$$D \times Q: \quad y_1 \times \frac{y_2}{y_1} \times \frac{y_3}{y_2} \times \frac{y_4}{y_3} \times \frac{y_5}{y_4} \times \cdots$$

Пошто је $y_{n+1} = x_1y_n + y_1x_n$, што имплицира да

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = x_1 + y_1\frac{x_n}{y_n} \longrightarrow x_1 + y_1\sqrt{D}.$$

Применом (1.25), као у случају $D = 2$, добијамо исти закључак. Бронкерове формуле (1.25) погодно дају бесконачно много решења која добијамо ако је једно познато. По (1.26) y_1 дели свако y_n. Ипак, остаје питање да ли овај алгоритам даје сва позитивна решења.

Базирајући свој рад на Бронкеровим наговештајима Волис је пронашао сопствено решење за Фермаов проблем који се сада назива енглески метод .

Чињеница да је Бронкер записао сва могућа позитивна решења једначине (1.17) може бити закључена из следеће Лагранжове теореме и из Ојлеровог метода који ће бити тема неког другог рада.

(Лагранж 1789) *Нека је D позитиван цео број који није потпуни квадрат и нека је L цео број који задовољава* $|L| < \sqrt{D}$*. Тада свако позитивно решење x, y*

$$(1.27)\quad x^2 - y^2D = L$$

одређује непаран конвергент x/y верижног разломка за $\sqrt{D}$ *ако* $L > 0$ *и један паран конвергент ако* $L<0$.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Orthogonal Polynomials and Continued Fractions – Sergey Khrushev
2. Еуклидов алгоритам - Радослав Димитријевић – број 1, свеска 1-2, novembar 2008. - *operator.pmf.ni.ac.rs/www/pmf/publikacije*
3. Verižni razlomci i problem kalendara - Andrej Dujella – Математика и школа - Часопис за наставу математике
4. Математички симболи и термини – Љиљана Петковић
5. Диофантове једначине http://www.diofant.org/
6. Sloane's A001203 : Continued fraction for Pi, *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*.
7. http://demonstrations.wolfram.com/ContinuedFractions/