Univerzitet u Beogradu

Matematički fakultet

Master rad

Unapređenje nastave matematike u 3. razredu srednje škole korišćenjem softverskog paketa GeoGebra

Mentor: dr Miroslav Marić

Kandidat: Miloš Miletić

Beograd, 2012.

Predgovor

Uvek sam smatrao da je nastava, naročito matematike, kreativan posao, i da bi mi, kao profesori, trebali sami da odlučimo kako ce izgledati naši časovi, držeći se okvirno nastavnog plana i programa. Nastavu treba izlagati u obliku priče, matematički korektne, koja će u đacima izazvati veću pažnju i interesovanje.

Ideja da se bavim ovom temom proistekla je iz problema sa kojim se većina učenika susreće tokom svog školovanja, a to je problem da se zamisli geometriska figura koja je predmet zadatka i proučavanja. A to je upravo i njihov glavni zadatak, predstaviti sebi figuru, razumeti je, a ono sto im preostaje je jednostavna primena formula i izračunavanje. Samim tim, učenici se u startu uplaše i demorališu, misleći da je to nešto što ne može da se nauči i savlada. Njihovo pitanje je uvek bilo na koji način mogu da im što slikovitije pojasnim kako izgleda "to" što oni treba da zamisle.

Pitao sam se kako bi sve ovo mogao da povežem sa svojim master radom. Podstrek i ideju kako to da realizujem dao mi je mentor Miroslav Marić, spomenuvši mi softverski paket *Geogebra*, i objasnivši njegovu funkconalnost. Ovom prilikom mu se zahvaljujem na pruženoj podršci i savetima koje mi je dao i time pomogao da oblikujem svoju početnu zamisao.

U Beogradu, Miloš Miletić
29. januar 2013.

SADRŽAJ

1. Uvod ... 4
2. Nastava matematike u 3. razredu srednje škole ... 5
  2.1. Način ostvarivanja nastave ... 5
  2.2. Sadržaj programa ... 5
  2.3. Problemi u radu ... 7
3. Aktivno učenje ... 8
  3.1. Motiv aktivnog učenja ... 8
  3.2. Aktivno učenje i nastavnik ... 9
4. Programirana nastava ... 10
  4.1. Ideja programirane nastave ... 10
  4.2. Metod programirane nastave ... 10
  4.3. Vrste programirane nastave ... 11
  4.4. Mogućnosti primene ... 12
5. Softverski paket GeoGebra ... 12
  5.1. Šta je GeoGebra? ... 13
  5.2. Uvod u GeoGebru ... 13
  5.3. Neke osnovne konstrukcije ... 16
    5.3.1. Konstrukcija pravougaonika ... 17
    5.3.2. Konstrukcija jednakostraničnog trougla ... 18
    5.3.3. Konstrukcija kvadrata ... 20
    5.3.4. Konstrukcija pravilnog šestougla ... 21
    5.3.5. Konstrukcija opisanog kruga oko trougla ... 23
  5.4. Unošenje algebarskih izraza
      Osnovne algebarske komande i funkcije ... 24
6. GeoGebra i nastavne jedinice koje možemo unaprediti korišćenjem ovog softvera ... 31
  6.1. Poliedri ... 31
    6.1.1. Prizma ... 33
    6.1.2. Piramida ... 38
  6.2. Obrtna tela ... 43
    6.2.1. Cilindrična površ i valjak ... 43
    6.2.2. Konusna površ i kupa ... 46
    6.2.3. Obrtna površ, sfera i lopta ... 48
  6.3 Vektori u koordinatnom sistemu ... 52
    6.3.1. Pojam vektora ... 52
    6.3.2. Operacije sa vektorima ... 52
  6.4. Analitička geometrija u ravni ... 55
    6.4.1. Duž i prava ... 56
    6.4.2. Kružna linija ... 58
    6.4.3. Krive drugog reda ... 62
7. Zaključak ... 65
8. Literatura ... 66

1. Uvod

U ovom radu je opisano unapređenje, priprema i održavanja nastave matematike u trećem razredu srednje škole, i opisani su načini na koje je moguće prevazići neke nedostatke tradicionalnog pristupa. Izvršena je implementacija softverskog paketa Geogebra, i opis funkcionisanja na samom času, ali i van škole. Ovakva nastava učenicima otvara još jednu mogućnost, a to je da pored papira, olovke, šestara i lenjira mogu koristiti i kompjuter kao pomoćno sredstvo pri učenju matematike.

U glavi dva opisan je način ostvarivanja nastave i nastavni sadržaj matematike u 3. razredu srednje škole. Data je i tabela na kojoj se može videti nastavni plan i program sa brojem časova za svaku oblast posebno.

U glavu tri opisano je aktivno učenje, motivi aktivnog učenja i uloga nastavnika kao nezamenljive figure u obarazovnom procesu.

U četvrtom poglavlju opisana je programirana nastava, ideje, mogućnosti njene primene, kao i vrste programirane nastave.

U petom poglavlju opisan je softverski paket GeoGebra, osnovni pojmovi, od instalacije do nekih osnovnih konstrukcija, sa njihovim slikama i izvođenjem.

U šestom poglavlju opisan je način kako možemo unaprediti nastavu matematike korišćenjem GeoGebre. Obrađene su nastavne jedinice u kojima korišćenje GeoGebre ima smisla. Poglavlje sadrži dosta slika različitih konstrukcija, kao i uputstva kako ih možemo izvesti.

Na samom kraju izveden je zaključak i navedena literatura koja je korišćena pri izradi ovog master rada.

2. Nastava matematike u 3. razredu srednje škole

2.1. Način ostvarivanja nastave

U skladu sa savremenim tendencijama tehničko-tehnološog razvoja, pored elementarne, pojavila se potreba i za još jednim, informatičkim, oblikom pismenosti. Pored toga što osnovna znanja i veštine iz ovog oblika pismenosti đaci stiču učeći predmet Informatika i računarstvo, potrebno im je pokazati kako neke od softverskih rešenja mogu primeniti kao pomagalo pri učenju matematike.

Od tehničke opreme u učionici treba da se nalazi jedan računar za profesora, sa osnovnim komponentama, i projektor. Pored ovoga, ne bi bilo na odmet imati i štampač, skener, zvučnike i pristup internetu. Bilo bi najbolje kada bi bilo više računara u učionici koje bi koristili đaci, da bi mogli na času i sami da probaju kako funkcioniše ovaj softver. Ali, zbog loše materijalne situacije u kojoj se većina škola nalazi, to je teško ostvarivo.

Programski sadržaj treba da se ostvaruje prvenstveno kroz vežbe i praktičan rad učenika, uz što više korišćenja ovog softvera. To će im otvoriti jedna nova vrata, i zainteresovati ih da u budućnosti i sami potraže sličan softver, a i učenje matematike će im postati zanimljivije.

2.2. Sadržaj programa

U trećem razredu srednje škole nastavni plan i program se sastoji od šest velikih oblasti. Broj časova matematike varira i zavisi od tipa škole. Na primer, u gimnazijama opšteg tipa (program M1) broj časova nedeljno je četiri (4), a broj časova godišnje je sto četrdeset četiri (144), dok na prirodno-matematičkom smeru gimnazije (program M3) broj časova nedeljno je pet (5), a broj časova godišnje je sto osamdeset (180) (videti [1]).

U trećem razredu obrađuju se sledeće velike poglavlja:

Tabela 1. Nastavni plan i program za treći razred gimnazije prirodno-matematičkog smera

	Poliedri (25 časova)	Obrtna tela (20 časova)	Vektori (15 časova)	Analitička geometrija u ravni (50 časova)	Matematička indukcija. Nizovi (38 časova)	Kompleksni brojevi i polinomi (20 časova)
1	Rogalj, triedar	Cilindrična i konusna površ, obrtna površ	Pravougli koordinatni sistem u prostoru	Rastojanje dve tačke	Matematička indukcija i njene primene	Pojam i primeri algebarskih struktura (grupa, prsten, polje)
2	Poliedar, Ojlerova teorema, Pravilan poliedar	Prav valjak, prava kupa i zarubljena prava kupa	Projekcije vektora	Podela duži u datoj razmeri. Površina trougla	Elementarne teorija brojeva (deljivost, prosti brojevi, kongruencije)	Polje kompleksnih brojeva
3	Prizma i piramida, Ravni preseci prizme i piramide	Površina i zapremina pravog kružnog valjka, prave kružne kupe i zarubljene kružne kupe	Koordinate vektora	Prava, razni oblici jednačine prave; ugao između dve prave; rastojanje između tačke i prave	Osnovni pojmovi o nizovima (definicija, zadavanje, operacije)	Trigonometriski oblik kompleksnog broja, Moavrova formula; Neke primene kompleksnih brojeva
4	Zapremina poliedara; Zapremina kvadra, Kavalijerijev princip	Sfera i lopta, ravni preseci sfere i lopte	Skalarni, vektorski i mešoviti proizvod vektora	Sistemi linearnih jednačina, Gausov postupak	Aritmetički niz; Geometriski niz; primene	Polinomi nad poljem kompleksnih brojeva
5	Zapremina prizme, piramide i zarubljene kupe	Površina lopte, sferne kalote i pojasa	Deterninante drugog i trećeg reda	Sistemi linearnih nejednačina sa dve nepoznate i grafička interpretacija	Jednostavnije diferencne jednačine	Osnovna teorema algebre i neke njene posledice, Vietove formule
6		Zapremina lopte	Neke primene vektora	Pojam linearnog programiranja	Granične vrednost niza; broj e	Sistemi algebarskih jednačina
7		Upisana i opisana sfera poliedra, pravog valjka i kupe		Krive linije drugog reda: kružnica, elipsa, hiperbola parabola		

2.3. Problemi u radu

Problemi u izvođenju nastave matematike uz pomoć računara mogu biti razni. Dok se mnogi slažu da je potrebno povezati časove matematike sa računarima, to može predstavljati problem, naročito u početku primene ovakvog vida nastave. Matematika je sama po sebi teška, pa postoji bojazan da bi uvođenje ovakve nastave dodatno otežalo učenicima ionako zahtevan predmet. Postepeno usvajanje ovakve nastave moglo bi da reši ovaj problem.

Tehnički problemi mogu biti velika prepreka ovakvom obliku nastave. Od učionice do učionice, problemi su slični. Mnoge škole, naročito one u unutrašnjosti, slabo su tehnički opremljene, nemaju dovoljan broj računara, nadostaje im pomoćna oprema, a radi se sa velikim grupama učenika. Dok je god teška materijalna situacija u celoj državi, biće i u školama, pa je potrebno vreme da bi sve ovo profunkcionisalo i počelo da daje prave rezultate.

3. Aktivno učenje

3.1. Motiv aktivnog učenja

U redovnoj nastavi dominira tradicionalni oblik rada: predavanje-ispitivanje-ocenjivanje uspešnosti repodukcije. Međutim, zahtevi i očekivanja koja pred učenike postavlja realan, savremen život u potpunom su raskoraku sa onim kako ih za taj život spremamo. Realan život nikako nije niz viđenih, prođenih situacija, već upravo suprotno - situacije i okolnosti uvek su novi i jedinstveni, a kako ćemo se u njima snaći zavisi upravo od toga šta smo poneli iz prethodnih iskustava, šta smo naučili od drugih i na koji način smo sposobni da to objedinimo.

Dobra škola bi trebalo da na odeđeni način, i u određenoj meri, imitira realan život. Dobra škola treba da osposobi decu i za život van škole, time što će, kroz različite školske aktivnosti, podsticati celokupan dečiji razvoj i davati mogućnosti za ispoljavanje i unapređenje bogatog repertoara sposobnosti.

Aktivno učenje, dakle, ima dva osnovna cilja:

- poboljšanje kvaliteta znanja i umeća koje deca stiču u školi,
- promena položaja deteta u školi od uloge receptora (prijemnika znanja) ka ulozi aktivnog konstuktora vlastitog znanja (videti [5]).

Deci se mora pokazati kako se uči, kako se pretražuje literatura, kako se pronalaze ključne reči u tekstu, kako se pravi pregled gradiva, kako se povezuju informacije, kako se pronalaze one koje nisu unapred date.

Načini prezentovanja nastavnog sadržaja u školi morali bi biti zasnovani na ovim principima. Samostalnost i efikasnost deteta u učenju moguće je ostvariti preko ovih parametara, dakle, savladavanjem ovih veština i umenja. Oni su univerzalni alat koji omogućava baratanje vrlo različitim sadržajima.

3.2. Aktivno učenje i nastavnik

Direktno od nastavnika zavisi izbor kako će sa razredom raditi na nekom nastavnom sadržaju. Nastavnik je nezamenljiva figura obrazovnog procesa, ali njegova uloga bitno se menja u novim, savremenim uslovima života i školovanja. Evaluacija nastavničkog rada postaje tako važna karika obrazovnog procesa, ali i više, postaje ocena odgovornosti nastavnika prema samom sebi, prema ličnom radu i odnosu prema poslu. Ona treba da bude podsticaj i motivacija, treba da predstavlja lepotu poziva i da kostantno poziva na usavršavanje. Jer, jedini način da učenici budu konstruktori vlastitog znanja, a ne akumulatori činjenica, jeste da oni aktivno rade na sticanju svog znaja i da im je nastavnik vodič i saradnik.

4. Programirana nastava

4.1. Ideja programirane nastave

Osnovna slabost predavačke nastave je izostajanje povratne informacije, a krajnja posledica toga su niska efikasnost, neracionalnost i druge mane ove nastave. U svakom sistemu, a nastavni proces jeste sistem, upravljač treba da ima neprekidnu informaciju o ostvarivanju postavljenih ciljeva. To znači da nastavnik, kao upravljač, treba da, u svakom trenutku, zna kako i koliko je shvaćeno njegovo predavanje, jer je to sredstvo kojim se podstiče i usmerava njihov razvoj. Povratna informacija se dobija propitivanjem, proveravanjem, kontrolnim zadacima.

4.2. Metod programirane nastave

Američki psiholog Berhus Frederik Skiner 1950.-tih godina razvio je svoju teoriju učenja u kojoj programirana nastava ima ključnu ulogu. Skiner polazi od rezultata laboratorijskih proučavanja procesa učenja, u kojima je pokazao da grupe sa pozitivnim potkrepljenjem postižu znatno bolje razultate, nego grupe koje rade pod uticajem negativnih posticaja. Zbog toga Skiner smatra da u savremenoj nastavi pozitivnu stimulaciju treba povećati na račun negativne.

Skiner deli vrlo složen program jednog predmeta na niz sitnih jedinica (etapa). Ove celine su logičke i povezane i mogu se usvajati isključivo potpuno, a ne delimično. U nastavnom gradivu, prema tome, zadržava se samo ono što je bitno i važno, dok se suvišno odbacuje. Učenik prolazi kroz ove etape po principu od lakšeg ka težem, a po završetku programa od njega se očekuje praktična primena usvojenih znanja. On sam, takođe, ima stalnu povratnu informaciju u toku nastavnog procesa kao i potkrepljenje kroz tu informaciju. Na ovaj način, učenik samopodučavanjem prelazi put od poznatog do nepoznatog, do novih i složenijih pojmova i teorija. Skiner smatra da bi tako svi učenici mogli da nauče sve. Razlikovali bi se jedino po vremenu za koje bi savladali gradivo.

Najvažnija odlika programirane nastave je takvo logičko strukturisanje nastavne građe koje podrazumeva zadržavanje bitnih, a odstranjivanje nebitnih sadržaja i rastavljanje sadržaja na sitne deonice-osnovne elemente. Svrha redukovanja sadržaja gradiva je da se učeniku ostavi više mogućnosti za razmišljanje, da postupno ulazi u materiju, krećući se od jednostavnijih ka složenijim sadržajima, uvećavajući na taj način njihovu logičku strukturu. Mogućnost ponavljanja prethodnog znanja je, dakle, maskimalna a izvori grešaka svedeni su na mimimum.

U programiranoj nastavi sreću se pojmovi program, tema, sekvenca, članak, algoritam. Program precizno izlaže sve bitne činjenice i pojmove koje učenici treba da savladaju. Tema je jedna sadržajna logički struktuirana celina iz nastavnog programa. Sekvenca predstavlja logički strukturisani deo teme, dok je članak najmanja jedinica u programiranoj nastavi, a čini je osnovna sadržajno - logička celina koju učenik treba da savlada. Svaki korak u ovakvom vidu nastave mora da sadrži uvodne informacije kojom se učenik obaveštava o novom gradivu i daje mu se orijentaciona osnova za predstojeći zadatak; zatim, prostor za rešavanje, kao i obavezna povratna informacija, tj. rešenje problema. Algoritam je obrazac, ili precizno uputstvo, sa utvrđenim redosledom operacija koje treba obaviti da bi se problem rešio. Ovim je obrazovni proces pojednostavljen, a učenicima olakšan (videti [5]).

4.3. Vrste programirane nastave

U programiranoj nastavi mogu se koristiti tri vrste programa:

- linearni,
- razgranati,
- kombinovani.

Linearni program osmislio je Skiner 1954. godine polazeći od principa programirane nastave. Članci su poređani pravolinijski, učenici rašavanju zadatke postavljenim redosledom i svojim ritmom, a zavisno od predznanja i saznajnih mogućnosti. Učenici sami rešavaju zadatke, dakle, ne biraju između ponuđenih odgovora, što ih misaono aktivira. Dobra strana ove metode je što svako radi svojim tempom, ali je loša što se ne daje mogućnost za traženjem novih informacija, onih koje nisu uključene u zadatak. Nije moguće skretanje da bi se savladale činjenice koje su uslov da se zadatak reši, pa ko naiđe na problem, staje. Linearni program individualizuje samo ritam savladavanja, ali ne uvažava razlike u sposobnostima.

Razgranati program otklanja slabosti pravolinijskog programiranja. U njemu su članci poređani i pravolinijski, ali idu i skokovito, kao i bočno, s tim što se ti bočni članci naslanjaju na najbliži pravolinijski. U ovom programu, uz svaki zadatak, obično je dato više odgovora, a učenik bira onaj koji smatra tačnim. Prednost razgranatog programa je što omogućuje učeniku koji zna neke zadatke - članke, da ih preskače, a onoga koji ne zna neki članak upućuje da potraži dopunsku informaciju u bočnom članku. Oni učenici, koji imaju više znanja, kreću se pravolinijski, a oni čije su znanje i sposobnosti manje idu izlomljenom, cik-cak linijom. Ovim je omogućena individualizacija tempa učenja i diferencijacija nastavnih sadržaja i postupaka. U odnosu na linearni program, mana mu je ta što ostavlja manje prostora za misaonu aktivnost učenika, koji ne rešavaju zadatke, već samo biraju rešenje.

Kombinovani program je kombinacija linearnog i razgranatog programa. Svrha mu je da spoji prednosti, a izbegne slabosti i jednog i drugog. U linearni program se unose elementi razgranatog, kako bi se, donekle, diferencirali sadržaji i postupci učenja. Primenjuju se dve vrste kombinivanih programa: modifikovani linearni program, u kojem se, tehnikom preskakanja, omogućuje boljim učenicima da preskoče članke čiji sadržaji su im poznati, i linearni program sa potpravcima, koji ima dodatne sadržaje i zadatke za učenika čije su mogućnosti i ambicije veće i žele da nauče više nego što je obavezno (videti [5]).

4.4. Mogućnosti primene

Tri osnovna zahteva, koje treba da ispuni program namenjen za programiranu nastavu, jesu: razumljivost, određenost i rezultativnost. Uspeh ovakvog načina prezentovanja nastave presudno je uslovljen kvalitetom programa koji se priprema za ovu svrhu. Taj operativni dokument stvara širok stručni tim u kojem učestvuju pedagog, psiholog i matematičar. Sadržaji svih nastavnih predmeta mogu se programirati za programiranu nastavu, jer nema predmeta u kojima građa nije uzročno posledična. Naglasak je na sadržajima, a ne na nastavnim predmetima u celini.

U tom smislu, Matematika je prvi i pravi kandidat za sprovođenje programirane nastave. Ne samo sto se nastavni sadržaji ovog predmeta mogu lako programirati i sto je nastavna građa takva da je programirana nastava najbolja za njeno prezentovanje, već i zbog toga što iskustva iz ove oblasti zaista mogu biti od izuzetne koristi za unapređenja kvaliteta nastave i drugih predmeta.

5. Softverski paket GeoGebra

5.1. Šta je GeoGebra?

GeoGebra je dinamički, matematički softver koji povezuje geometriju, algebru i analizu. Razvio ga je Markus Hohenwarter na Florida Atlantic Univerzitetu za učenje i podučavanje matematike u školi.

U prvom slučaju, GeoGebra je dinamički geometriski sistem. Možemo izvoditi konstrukcije sa tačkama, vektorima, dužima, pravim, kao i crtati grafike funkcija, a zatim ih dinamički menjati.

U drugom slučaju, jednačine i koordinate možemo unositi direktno. Na taj način, program GeoGebra je u mogućnosti da barata sa promenljivim za brojeve, vektore i tačke, da traži izvode i integrale funkcija, kao i ponuditi nardbe kao što su *Nula* ili *Ekstrem funkcije*.

Ova dva načina su osnovna karakteristika ovog softverskog paketa: izrazima u algebarskom prozoru odgovaraju figure u geometriskom prozoru i obratno (videti [2]).

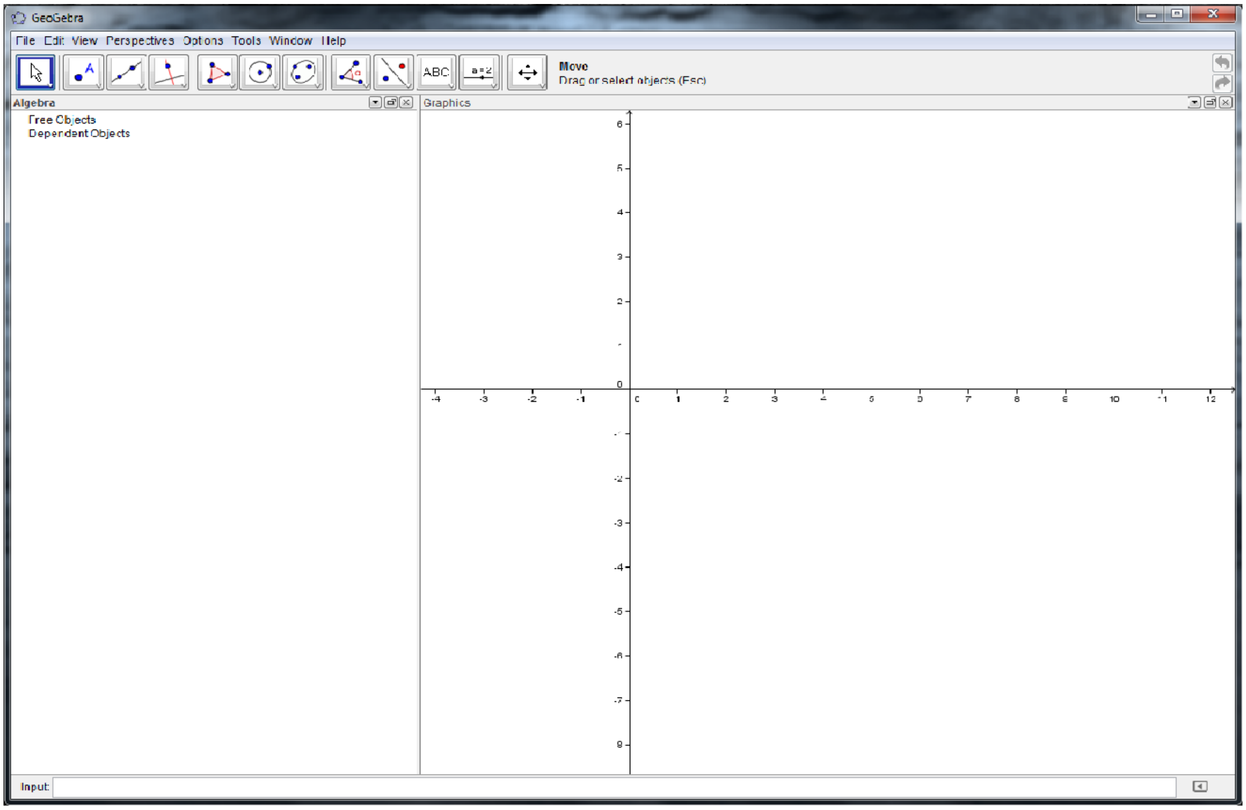
5.2. Uvod u GeoGebru

Da bismo mogli išta da radimo sa ovim softverom, prvo moramo da ga instaliramo na naš računar. Instalaciju možemo izvršiti na dva načina.

Prvi način je instalacija sa internet pristupom. Otvorimo neki od veb pregledača i u adresa baru ukucamo adresu www.geogebra.org/webstart. Sledeće što treba uraditi je da kliknemo na dugme WebStart. Nakon ovoga softver je automatski instaliran na naš kompjuter. Jedino što treba da se uradi je da se potvrde sve poruke koje se pojave jednostavnim klikom na dugmad Yes i Ok. Ovakav način instalacije ima nekoliko prednosti: ne moramo da vodimo računa o instalacionim fajlovima, ne moramo da brinemo o specijalnim korisničkim dozvolama da bi koristili GeoGebru, softver se koristi off-line itd.

Drugi način je instalacija bez internet pristupa. Softver se nalazi na nekoj vrsti uređaja za skladištenje podataka, USB-u ili CD-u. Sa njih je potrebno kopirati egzekutabilni fajl na računar, neki folder ili na desktop. Fajl obično ima naziv *GeoGebra_verzija_softvera.exe.* Duplim klikom na ovaj fajl započinjemo instalaciju i sve što ostaje je da pratimo instalacione instrukcije. Kada se instaliranje završi, možemo pokrenuti naš program (videti [6]).

Kada pokrenemo GeoGebru pojaviće nam se sledeći prozor:

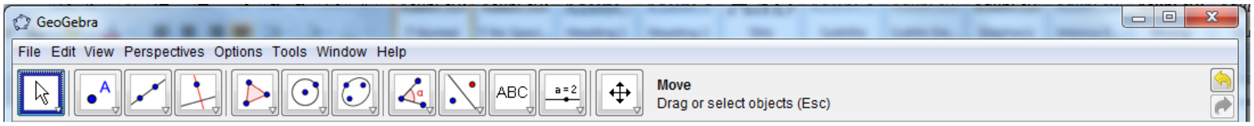


Slika 1. Izgled prozora nakon pokretanja programa

GeoGebra korisnički interfejs sastoji se od tri prikaza: grafičkog (Graphics View), algebarskog (Algebra View) i tabelarnog (Spreadsheet View). Kao što vidimo na slici, posle pokretanja programa na startu imamo dva prikaza, algebarski i grafički, dok tabelarni moramo naknadno uključiti. To ćemo uraditi na sledeći način: na baru sa alatkama (Toolbar) izaberemo View, pa u okviru njega Spreadsheet, i onda će nam se pojaviti treći prikaz (videti [3]).

U grafičkom prikazu crtamo naše geometriske likove. Koristeći konstrukcione alatke dostupne na baru sa alatkama možemo uraditi geometriske konstrukcije u grafičkom prikazu pomoću miša. Pri odabiru konstrukcionih alatki možemo koristiti i pomoć za odabranu alatku (Toolbar Help) pomoću koje možemo saznati kako da je koristimo. Svaki objekat koji smo napravili u grafičkom prikazu takođe ima svoje algebarsko predstavljanje u algebarskom prikazu.

Svaka konstrukciona alatka predstavlja i neku vrstu skupa sličnih konstrukcionih alatki, a da bismo otvorili te dodatne opcije potrebno ja da kliknemo na malu strelicu koja se nalazi u donjem desnom uglu svake od alatki. I kao što možemo da vidimo, alatke su organizovane u prirodnom poretku, od tačke, prave, poligona pa do složenijih geometriskih likova.



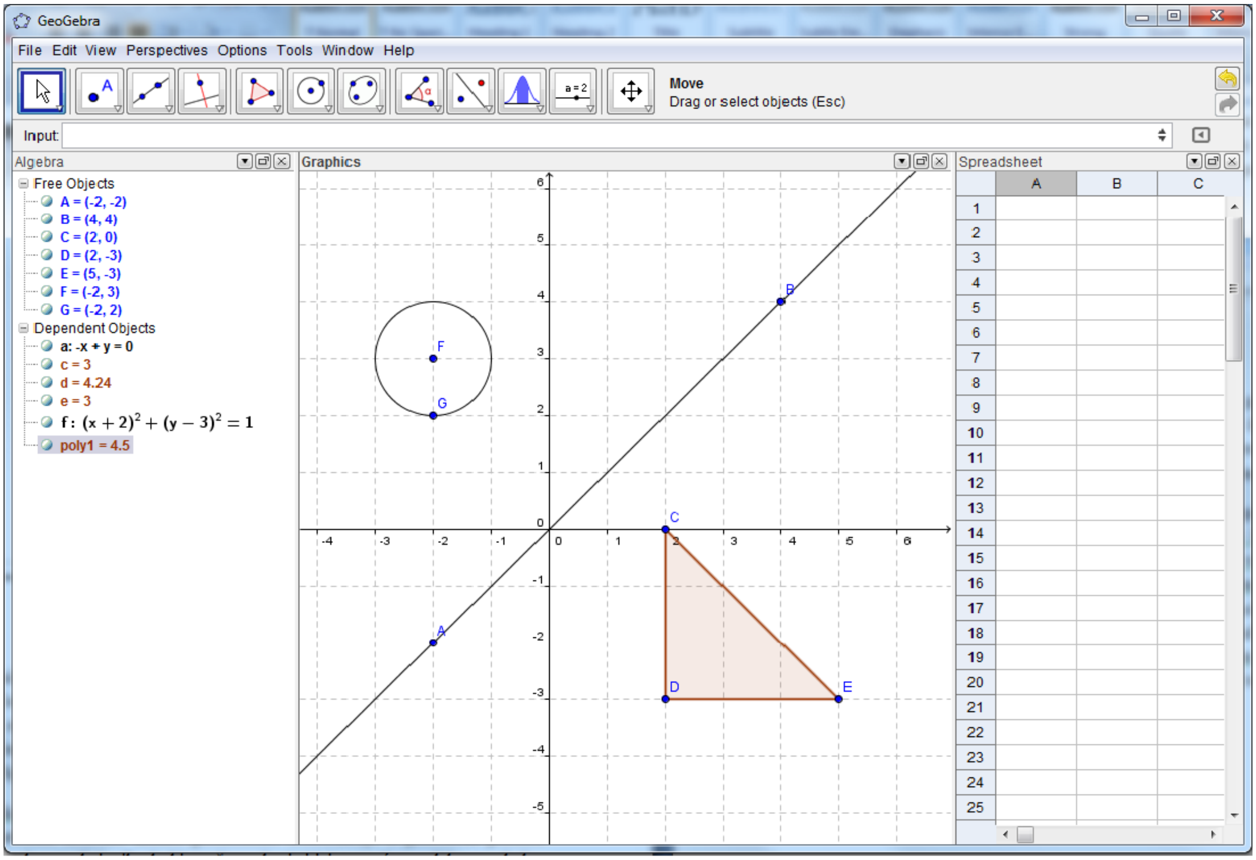
Slika 2. Bar sa alatkama

Algebarski prikaz daje nam algebarske izraze naših geometriskih konstrukcija. Ali, ne moramo samo crtati da bi smo videli te izraze. Možemo ih i sami unositi koristeći bar za unošenje (Input Bar). Kada unesemo izraz, pritisnemo taster Enter i naš algebarski unos se pojavljuje u algebarsko prikazu, dok se njegova grafička prezentacija pojavljuje u grafičkom.

U algebarskom prikazu, matematički objekti su organizovani kao slobodni (free) i zavisni (dependent) objekti. Ako napravimo objekat bez korišćenja već postojećih, on se klasifiikuje kao slobodan. Ako napravimo objekat uz pomoć već postojećih objekata, taj objekat se klasifikuje kao zavistan. Objekte u algebarskom prikazu možemo menjati. Duplim klikom na slobodan objekat otvoriće nam se okvir za tekst u kome možemo direktno menjati algebarsku prezentaciju objekta. Nakon izmene kliknemo taster Enter, i grafička prezentacija našeg objekta će se automatski prilagoditi na naše izmene. Duplim klikom na zavisne objekte otvoriće nam se dialog prozor dozvoljavajući nam da redefinišemo (Redefine) naš objekat.

U GeoGebrinom tabelarnom prikazu svaka ćelija ima posebno ime što nam omogućava da direktno adresiramo svaku ćeliju (npr. Ćelija kolone A, vrste 1 ima adresu A1). U ove ćelije možemo unositi ne samo brojeve, već i sve matematičke objekte koje podržava GeoGebra, koordinatne tačke, funkcije, komande. Ako je moguće, GeoGebra će odmah predstaviti grafičku prezentaciju objekta koji je unesen u ćeliju tabele.

Evo primera kako izgleda prozor sa uključenim tabelarnim prikazom, kao i sa nekim grafičkim elementima i njihovim algebarskim prezentacijama.



Slika 3. Izgled prozora sa uključenim tabelarnim prikazom i nekim osnovnim konstrukcijama

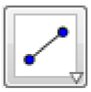
Kao što smo već rekli, korisnički interfejs možemo prilagoditi kako nama odgovara. U alatki View možemo čekirati ili odčekirati odgovarajuću stavku, sakriti ili otkriti neke delove interfejsa (tabelarni prikaz, input bar itd.). Ono što je vrlo bitno, možemo podešavati grafički prikaz u smislu da li hoćemo da nam se vide koordinatne ose (coordinate axes) i koordinatna mreža (coordinate grid), možemo menjati njihov stil, boju, razmak između njih itd. U algebarskom prikazu klikom miša na zelenu tačku pored svakog objekta, njegova geometriska prezentacija će nestati, sve dok ponovo ne kliknemo na tačku čime se objekat poovo pojavljuje u grafičkom prikazu. Takođe, možemo podešavati i bar sa alatkama dodavajući ili uklanjajući različite alatke kako bi sebi olakšali rad. Sva podešavaja se mogu sačuvati, kao i naši radovi i konstrukcije na sličan način kao i u drugim programima (videti [3]).

5.3. Neke osnovne konstrukcije

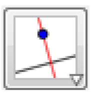
5.3.1. Konstrukcija pravougaonika

Pre svake konstrukcije, trebalo bi da sumiramo osobine onoga što konstruišemo. Kao što znamo, pravougaonik je četvorougaona figura u ravni čije su karakteristike da su mu naspramne stranice jednake i svi unutrašnji uglovi jednaki, što znači da su to uglovi od 90°, odnosno pravi. Konstrukcija bi mogla da ide sledećim koracima:

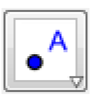
1) Unesemo duž AB. To možemo uraditi tako što ćemo na baru sa alatkama kliknuti na strelicu na alatki za crtanje prave kroz dve tačke i odabrati alatku za crtanje segmenta (Segment between two points).



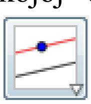
2) Kraz tačku B konstruisati pravu normalnu na duž AB To možemo uraditi tako što ćemo na baru sa alatkama odabrati alatku za konstruisanje normale (Perpendicular line), kliknuti na tačku B, a zatim i na duž AB, i onda će nam se pojaviti prava normalana na duž AB kroz tačku B.



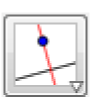
3) Na normali proizvoljno odaberimo tačku C. To možemo uraditi taki što ćemo na baru sa alatkama odabrati alatku za unošenje tačke.



4) Konstuišemo pravu kroz tačku C paralelnu duži AB. To možemo uraditi tako što ćemo na baru sa alatkama kliknuti na strlicu na alatki za crtanje normale i odabrati alatku za konstruisanje paralelne prave (Paralel line). Nakon toga sve što treba da uradimo je da kliknemo na tačku kroz koju hoćemo da nam prolazi prava, tačku C, a zatin na pravu kojoj će ona biti paralelna, duž AB. Automatski se pojavljuje paralelna prava.

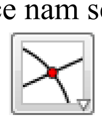


5) Kroz tačku A konstruišemo normalu na duž AB, na sličan način opisan u koraku 2).

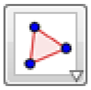


6) Poslednja tačka, tačka D, nam se nalazi u preseku normale kroz tačku A, i prave kroz tačku C. Zato ćemo na baru sa alatkama kliknuti na strelicu na alatki za konstruisanje tačke i odabrati alatku za konstruisanje preseka dva objekta (Intersect two objects).

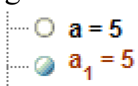
Sledeće što uradimo je da kliknemo na prave čiji presek tražimo i u njihovom preseku pojaviće nam se tačka D.



7) Sada je potrebno je da povežemo tačke koje smo dobili da bi upotpunili našu konstrukciju pravougaonika. To možemo uraditi tako što ćemo kliknuti na alatku za konstrukciju poligona (Polygon), a zatim kliknuti na svaku tačku u smeru obrnutom od kretanja kazaljke na satu. Nakon ovoga pravougaonik ABCD će nam biti potpun, i njegova površina osenčena.

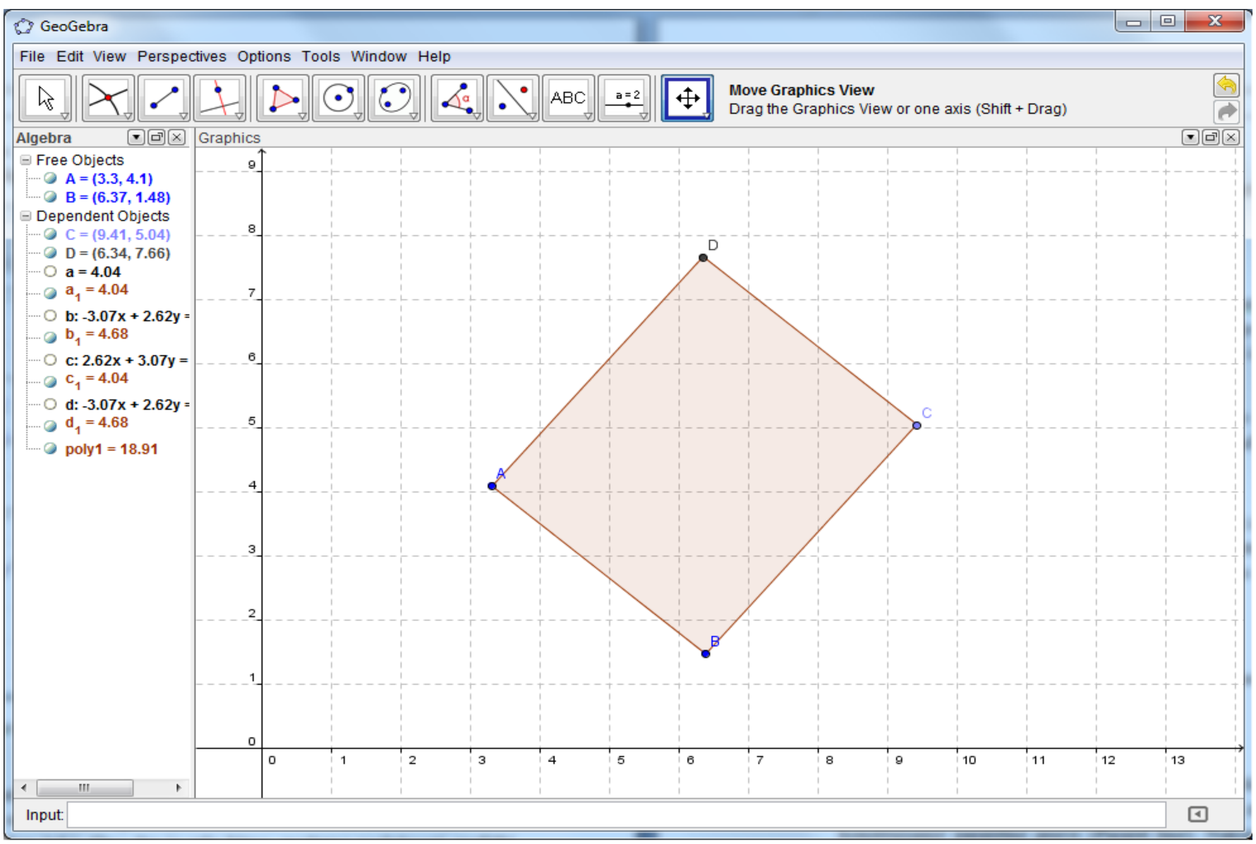


8) Na kraju, zbog jasnije slike možemo prave koje smo koristili u našoj konstrukciji učiniti nevidljivim. To možemo uraditi na način opisan u prethodnom delu, tako što ćemo u algebarskom prikazu kliknuti na zelene tačke pored algebarske prezentacije pravih.



Nakon toga prave će nestati u grafičkom priazu.

Na kraju ćemo dobiti sledeću konstrukciju:



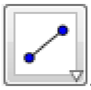
Slika 4. Konstrukcija pravougaonika

5.3.2. Konstrukcija jednakostraničnog trougla

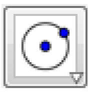
Karakteristike jednakostraničnog trougla su te da su mu sve stranice jednake dužine a unutrašnji uglovi jednaki i iznose 60˚.

Konstrukcija bi mogla da ide sledećim koracima:

1) Unesemo duž (segment) AB

.

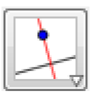
2) Konstruišemo krug sa centrom u tački A kroz tačku B. To možemo uraditi tako što ćemo na baru sa alatkama odabrati alatku za crtanje kruga sa centrom u jednoj tački kroz drugu tačku (Circel with Center through Point).

3) 

Nakon odabira kliknemo na tačku A i kursor miša vučemo do tačke B. Videćemo kako se krug koji nam se pojavio polako povećava. Kad dođemo do tačke B samo kliknemo na nju, i dobili smo naš krug.

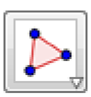
4) Konstruišemo krug sa centrom u tački B kroz tačku A, na sličan način kao u prethodnom koraku.

5) Konstruišemo presečne tačke dva kruga. Odaberemo već poznatu alatku koja daje presek dva objekta.



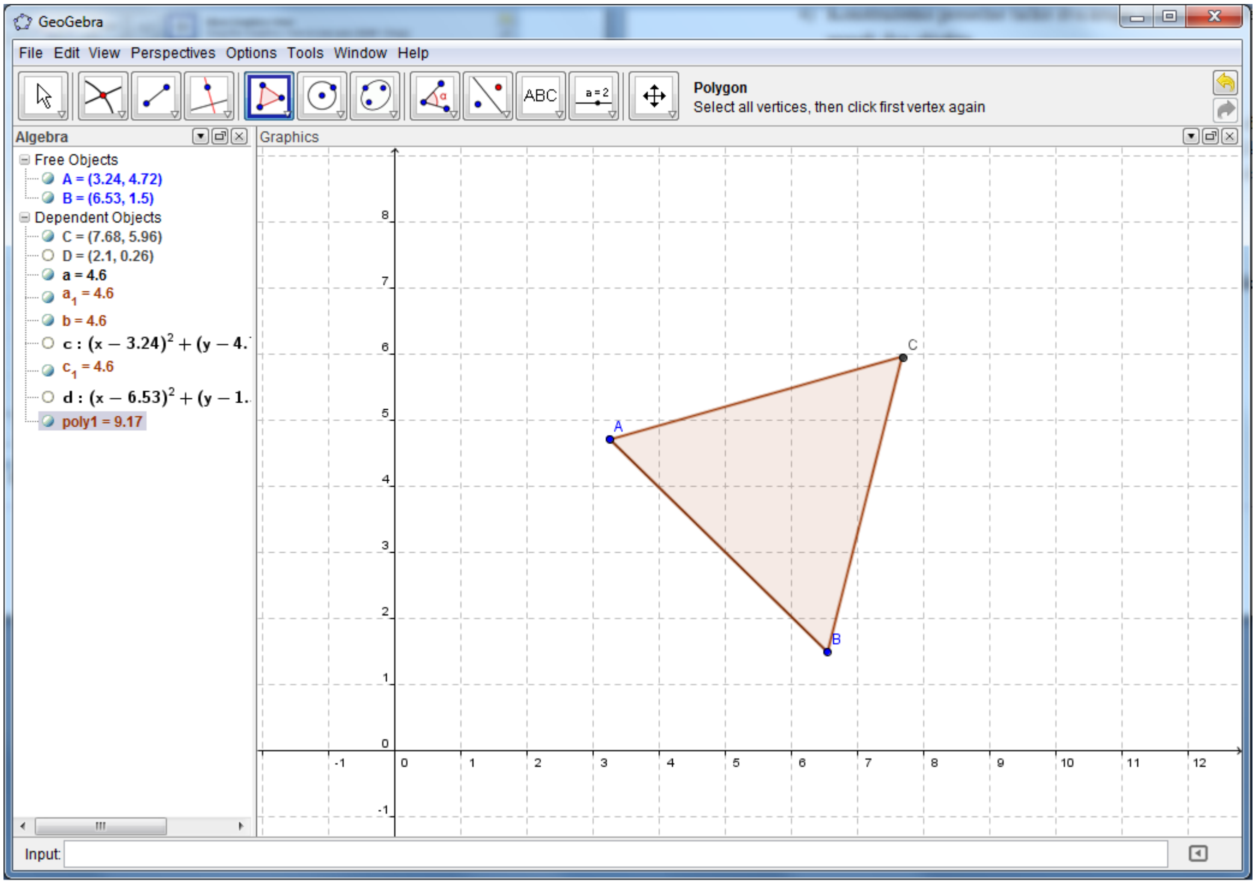
Zatim klknemo na jedan krug, pa na drugi i dobićemo dve presečne tačke, C i D.

6) Sada povečemo tačke koje smo dobili da bi upotpunili konstrukciju trougla ABC, na sličan način opisan pri konstrukciju pravougaonka, s tim što ćemo odabrati ili tačku C ili tačku D.



Ostaje nam da sakrijemo krugove i tačku D, zbog jasnije slike našeg jednakostraničnog trougla. Klikom na zelene tačke koje se nalaze pored algebarske prezentacije krugova u algebarskom prikazu one će pobeleti i krugovi u grafičkom prikazu će biti sakriveni. Isto važi i za tačku D.

Na kraju ćemo dobiti konstrukciju kao na Slici 5:



Slika 5. Konstrukcija jednakostraničnog trougla

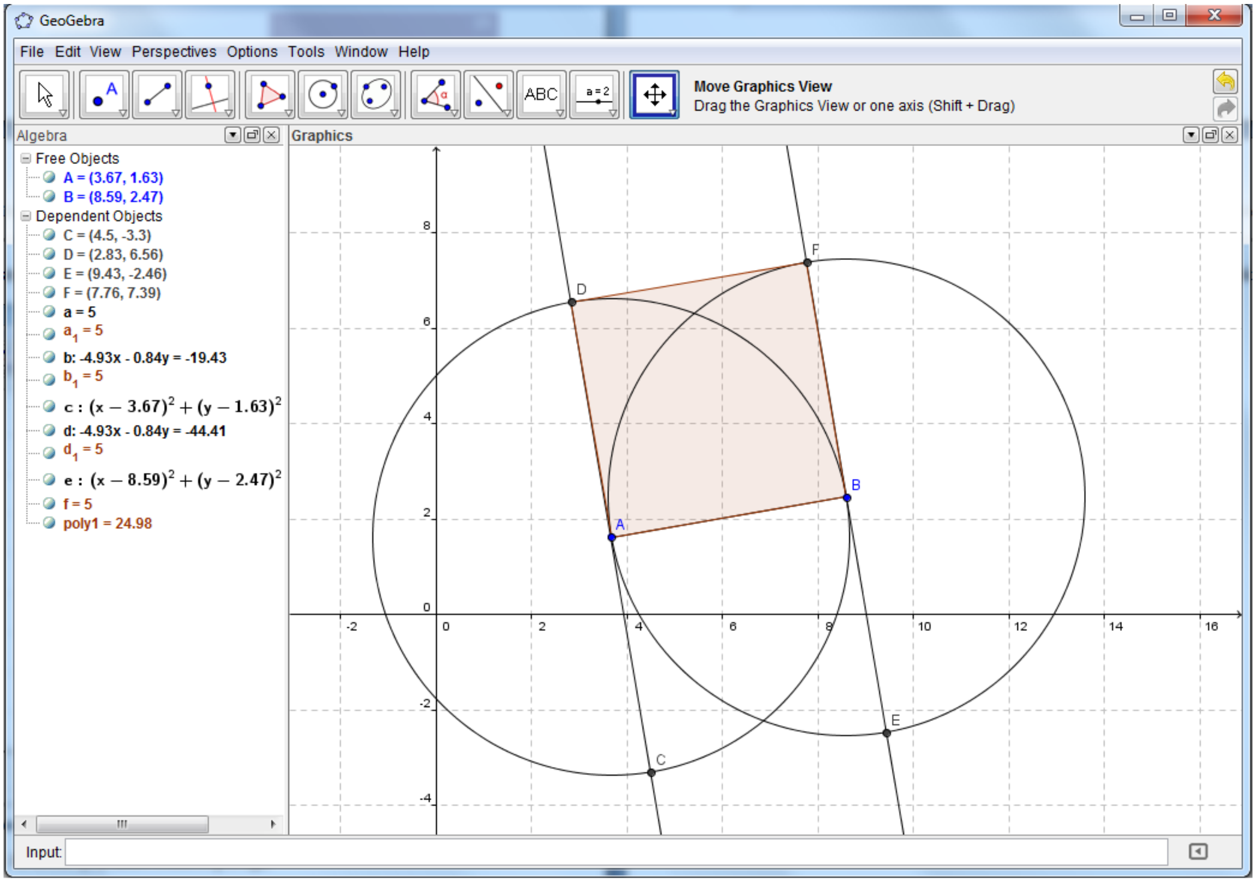
5.3.3. Konstrukcija kvadrata

Karakteristike kvadrata su dobro poznate. Sve stranice su jednake, paralelne, svi uglovi jednaki i iznose 90˚.

Konstrukcija bi mogla da ide sledećim koracima:

1) Konstruišemo duž (segment) AB.
2) Konstruišemo normalu na duž AB kroz tačku A.
3) Konstruišemo krug sa centrom u tački A kroz tačku B.
4) Konstruišemo presek te normale i kruga sa centrom u tački B i dobićemo tačke C i D.
5) Konstruišemo normalu na duž AB kroz tačku B.
6) Konstruišemo krug sa centrom u tački B kroz tačku A.
7) Konstruičemo presek te normale i kruga sa centom u tački A i dobićemo tačke E i F.
8) Sada konstruišemo poligon ABFD.

Evo kako izgleda naša konstrukcija kvadrata bez sakrivanja objekata koje smo koristili pri njenoj izradi:



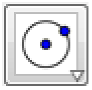
Slika 6. Konstrukcija kvadrata

5.3.4. Konstrukcija pravilnog šestougla

Glavne osobine pravilnog šestougla su: sve stranice jedanke dužine, svi unutrašnji uglovi jednaki i iznose 120˚, presek dužih dijagonala daje tačku koja je centar kruga čija kružnica sadrži sva temena... Ali kako početi ovu konstrukciju? Ne možemo je početi kao prethodne konstrukcije crtanjem duži, jer posle ovog koraka nemamo odgovarajući sledeći. Zato ćemo crtanje početi konstrukcijom kruga, i korističemo samo krugove istog poluprečnika da bi dobili šestougao (videti [4]).

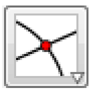
Konstrukcija ide sledećim tokom:

1) Konstruišemo krug sa centrom u tački i proizvoljnim poluprečnikom. Odaberemo alatku za crtanje kruga sa centrom kroz tačku (Circle with Center through Point).

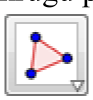
2) 

Dobićemo krug sa centrom u tački A i na kružnici ćemo dobiti tačku B.

3) Konstruišemo krug sa centrom u tački B kroz tačku A
4) Konstruičemo presek dva kruga pomoću alatke za presek dva objekta (intersect two objects).

   
   .

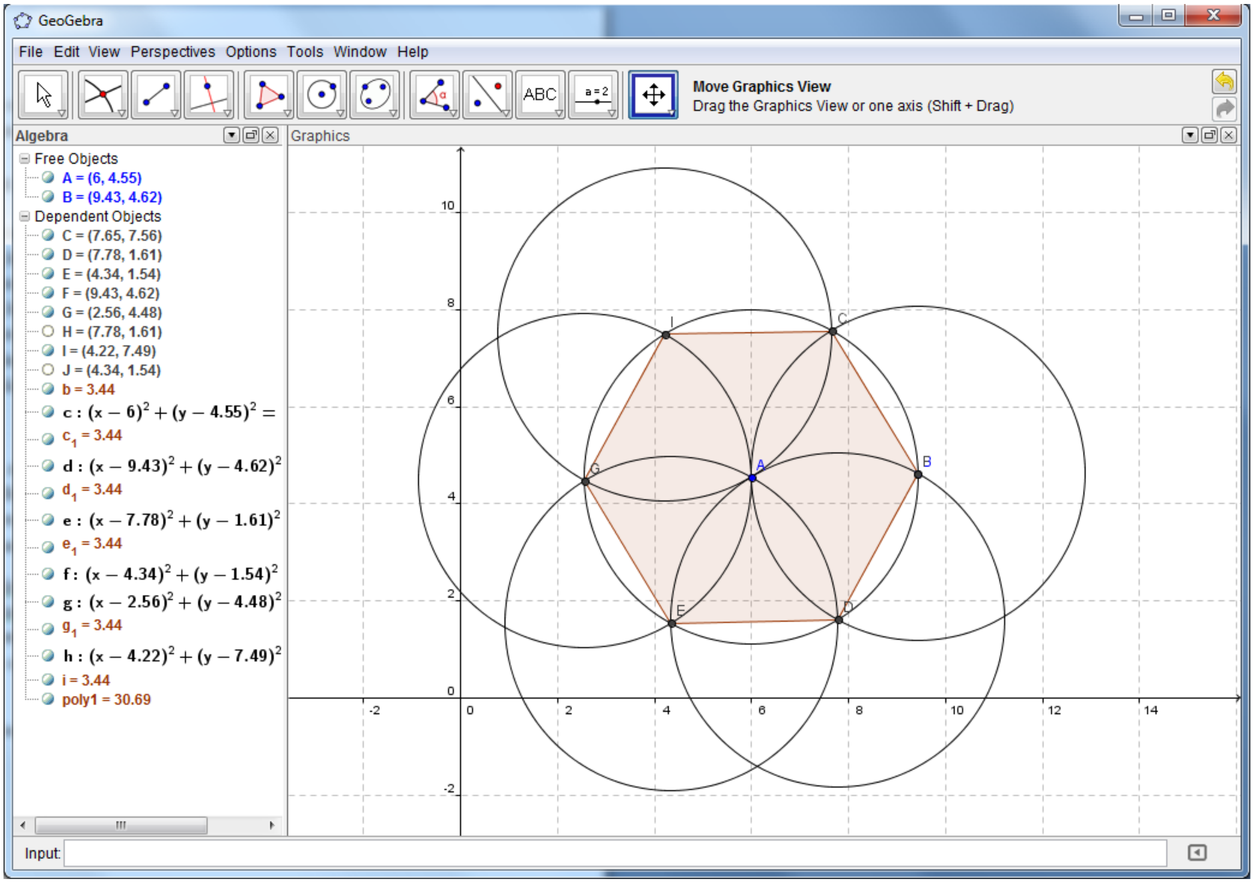
   U preseku ćemo dobiti dve tačke, C i D.
5) Konstruišemo krug sa centrom u tački D kroz tačku A. Naravno, kružnica će sadržati i tačku B.
6) Konstruičemo presek ovog kruga sa osnovnim krugom na način opisan u koraku 2). Dobićemo dve tačke E i F.
7) Konstruišemo krug sa centrom u tački E kroz tačku A. Kružnica će sadržati i tačku D.
8) Konstruišemo presek ovog kruga sa osnovnim i dobićemo dve tačke G i H.
9) Konstruišemo krug sa centrom u tački G kroz tačku A. Kružnica će sadržati i tačku E.
10) Konstruišemo presek ovog kruga i osnovnog i dobićemo tačke I i J.
11) Konstruišemo krug sa centrom u tački i kroz tačku A. Kružnica će sadržati i tačke G i C.
12) Sada možemo da konstruišemo poligon povezivanjem tačaka koje smo dobili na glavnom krugu pomoću alatke za konstrukciju poligona (Polygon).

Neke tačke se preklapaju, zato ih možemo sakriti zbog preglednosti. Preklapaju se tačke D i H, pa ćemo sakriti tačku H. Zatim, preklapaju se E i J, sakri ćemo J. Sada možemo definisati naš pravilni šestougao temenima BCIGED. Naravno, možemo sakriti i krugove, sa sve osnovim na kojem nam leže temena i sa kojim smo počeli konstrukciju.

Sada kad smo žavršili konstrukciju, shvatamo da, u stvari i nije bilo toliko teško nacrtati ovaj šestougao. Samo je bio problem kako početi konstrukciju, ostalo je bilo lako. Ali bilo bi dobro zapitati se koliko bi trebalo vremena sve ovo uraditi na tabli pomoću krede i velikog šestara sa kojim nije lako baratati, pogotovo ne učenicima. Sigurno dosta više vremena nego koristeći ovaj program.

Naša konstrukcija izgleda ovako, bez sakrivanja svih korišćenih krugova:

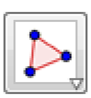


Slika 7. Konstrukcija pravilnog šestougla

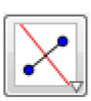
5.3.5. Konstrukcija opisanog kruga oko trougla

Konstrukciju ćemo početi crtanjem proizvoljnog trougla ABC.

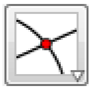
1) Pomoću alatke za crtanje poligona (Polygon) konstruišemo trougao ABC.



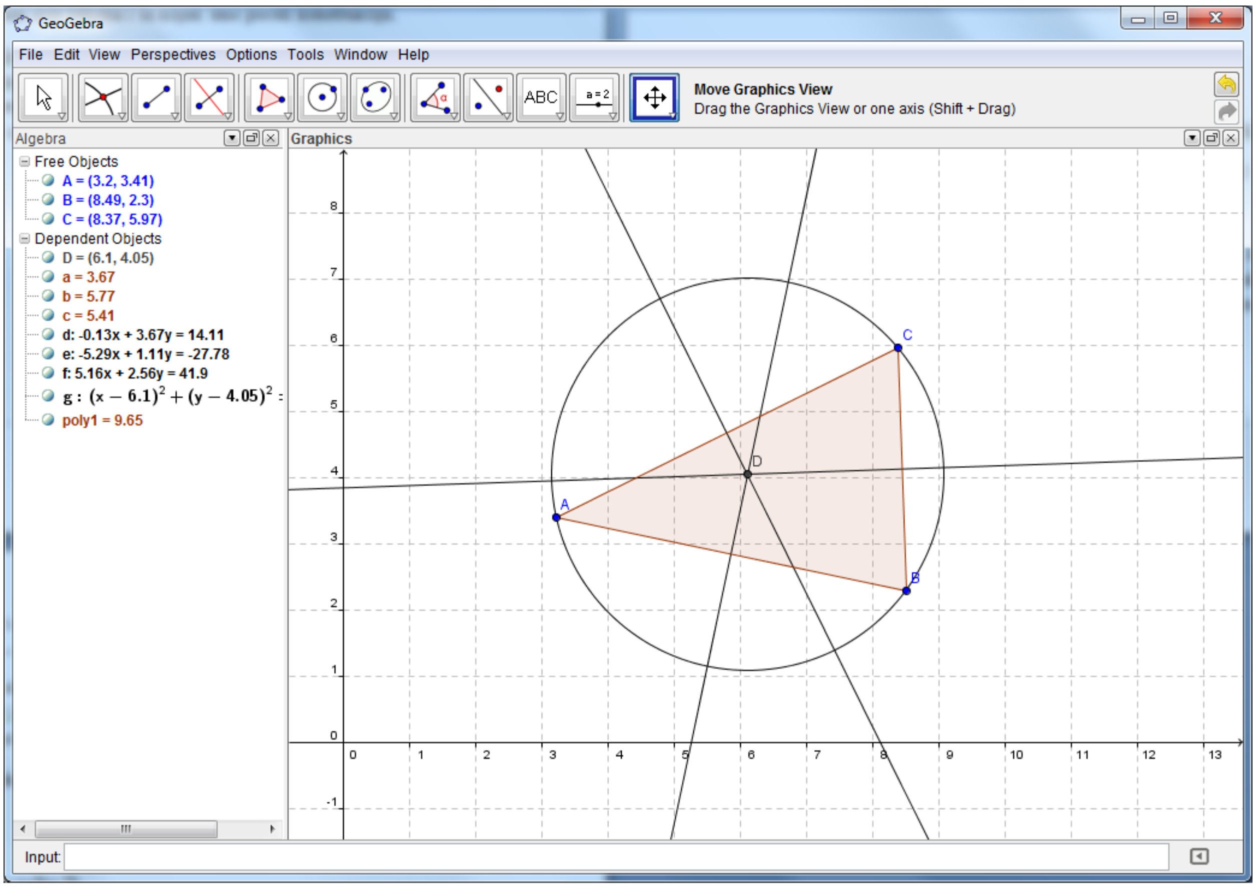
2) Konstruišemo simetrale svake stranice. U ovom koraku koristićemo jedu alatku koju do sad nismo. Kliknemo na strelicu na alatki za konstruisanje normale (Perpendicular line) i odaberemo alatku za konstrukciju simetrale (Perpendicular Bisector).



Sada odaberemo duž na čiju simetralu konstruišemo, odnosno njene dve tačke koje je ograničavaju. Odaberimo tačke B i C, i pojaviće nam se simetrala duži. Zatim odaberemo tačke A i B, pa tačke C i B. Dobićemo još dve simetrale.

3) Konstruišemo preseke bilo koje dve dobijene simetrale pomoću alatke za pesek dva objekta  i dobićemo presečnu tačku D.
4) Konstruišemo krug sa centrom u tački D kroz bilo koje teme trougla, i vidimo da kružnica sadrži i ostala dva temena.

Dobili smo krug opisan oko proizvoljnog trougla i na Slici 8. to mozemo videti:



Slika 8. Konstrukcija kruga opisanog oko trougla

5.4. Unošenje algebarskih izraza.

Osnovne algebarske komande i funkcije

Kao što je rečeno na početku poglavlja o softverskom paketu GeoGebra, algebarski prikaz daje nam algebarske izraze naših geometriskih konstrukcija. Naravno da ne moramo samo crtati da bi smo videli te izraze, već ih možemo i sami unositi koristeći bar za unošenje (Input Bar). Kada unesemo izraz, pritisnemo taster Enter i naš algebarski unos se pojavljuje u algebarskom prikazu, dok se njegova grafička prezentacija pojavljuje u grafičkom.

Kada unosimo algebarske izraze u bar za unošenje, prvo unosimo ime objekta, a zatim njegovu algebarsku prezentaciju. Na primer, ako hoćemo da unesemo tačku P to možemo uraditi tako što ćemo u baru za unošenje ukucati $P = (3, 2)$. Nakon ovoga u grafičkom prikazu će nam se pojaviti tačka P sa koordinatama 3 i 2. Ako bi smo hteli da unesemo prvu $y = x + 1$, onda baš ovo možemo da ukucamo u input bar, i u grafičkom prikazu će nam se pojaviti ovakva prava. I moramo voditi računa o sledećem: GeoGebra je osetljiva na velika i mala slova (Case Sensitive)! Na primer ako unosimo tačku, nju ćemo uvek označavati velikim slovom, dok prave i vektore označavamo malim slovima (videti [2]). Evo nekih primera:

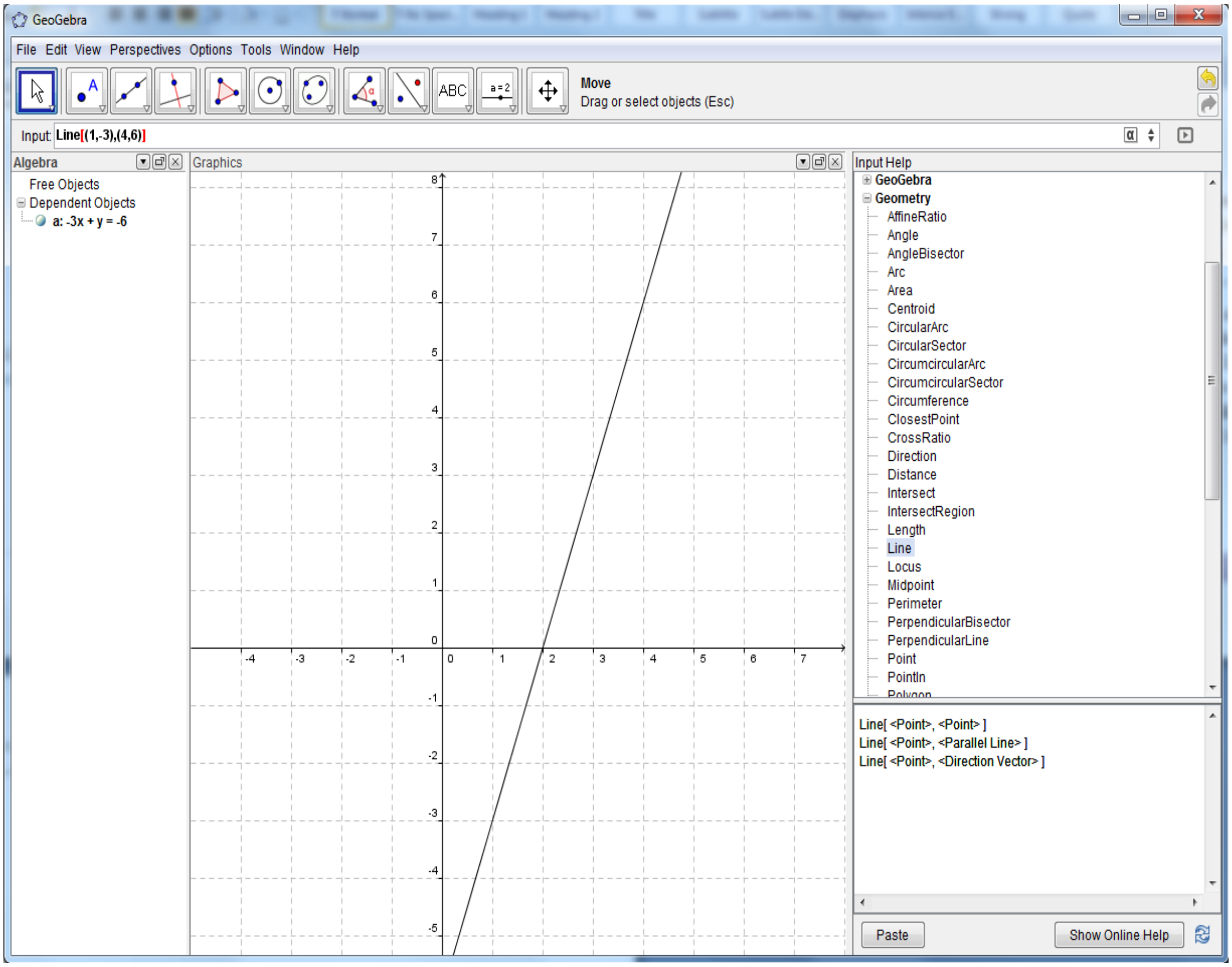
1) vektor: v = (1,3) ,
2) krug: c: (x – 2) ^ 2 + (x – 1) ^ 2 = 16 ,
3) grafik funkcije: f(x) = 3 * x + 2 (može i: y = 3 x + 2) ,
4) prava: y = m x + n (gde su m i n brojevi) .

U GeoGebri postoji i čitav skup gotovih funkcija. Pored bara za unošenje postoji i dugme za pomoć koje, kada kliknemo na njega otvara odeljak sa gotovim funkcijama (Input Help).

Slika 9. Input bar sa dugmetom za pomoćni prikaz

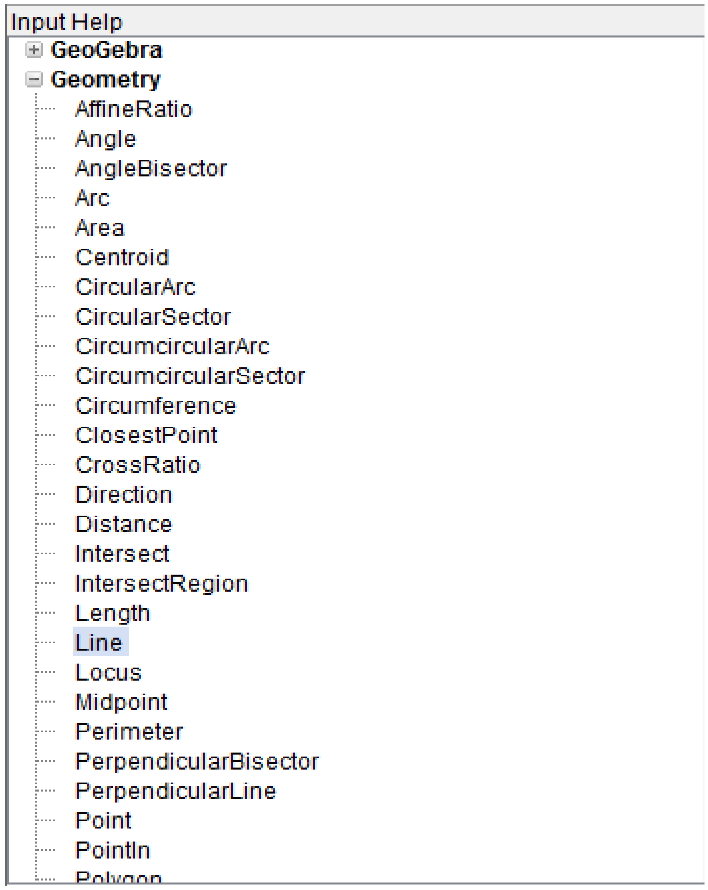
U njemu se nalaze različite komande i matematičke funkcije, koje znatno olakšavaju rad u ovom softverskom paketu, otvarajući nam mnogo različitih mogućnosti i povećavajući brzinu u radu. Pored matematičkih i algebarskih funkcija, postoje i logički operateri, komanda za rad u tabelarnom prikazu, za rad sa tekstom i razne druge.

Ovako izgleda prozor sa otvorenim odeljkom gotovih funkcija i metoda:



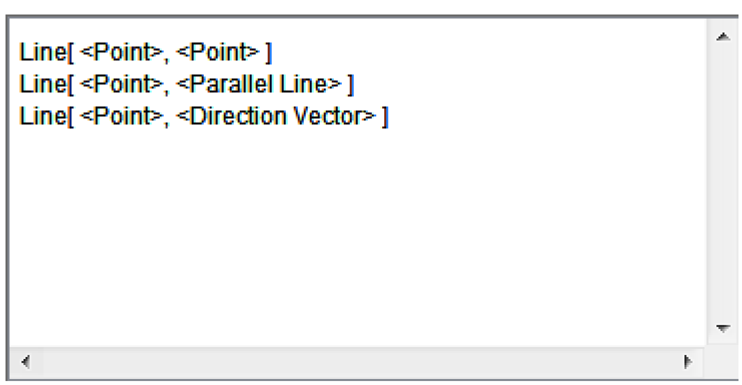
Slika 10. GeoGebra prozor sa otvorenim odeljkom gotovih funkcija

Kao sto možemo videti na Slici 9, kada otvorimo prikaz za pomoć u radu, pored liste sa metodama i funkcijama, otvoriće nam se i dodatni deo ispod njega, čija uloga će biti objašnjena u nastavku teksta. Na primer, ako bi smo hteli da konstruišemo pravu u grafičkom prikazu, potrebno je da u pomoćnom odeljku odaberemo prvo stavku sa geometriskim funkcijama (*Geometry*), a zatim kliknemo na komandu *Line*.



Slika 11. Prikaz sa pomoćnim funkcijama

Jednim klikom na nju, ispod pomoćnog odeljka će nam se u manjem prozorčiću pojaviti opis kako bi trebalo uneti kompletnu komandu za konstrukciju prave. Kao što možemo videti, nudi se više mogućnosti, da li ćemo pravu konstruisati pomoću dve tačke, ili pomoći jedne tačke i prave kojoj bi naša prava bila paralelna paralelna, ili tačke i vektora.



Slika 12. Primer za unos komande u Input baru

Dvostrukim klikom na komadu *Line*, ona će nam se pojaviti u baru za unošenje, sa tim što mi moramo uneti koordinate tačaka kroz koje ta prava prolazi unutar zagrada ove funkcije.

Slika 13. Funkcija za konstruisaje prave sa koordinatama dveju tačaka koje je određuju

Kao što je rečeno, postoji ogroman broj funkcija sličnih funkciji *Line*. Tako, na primer ako hoćemo da konstruišemo krug, pod stavkom *Conic* odaberemo funkciju *Circle* i unutar zagrada unesemo koordinate centar kruga i neke tačke na kružnici. Naravno, možemo prvo definisati dve tačke, A = (3,6) i B = (-4, -7), njihovim koordinatama i koristi ih u funkciji: *Circle*[A, B]. Slično je i sa presecima dva objekta. Možemo prvo definisati ta dva objekta, bilo da su to dve prave, dva kruga, prava i krug itd, pomoću funkcije *Intersect*, koja se nalazi pod stavkom *Geometry*, tražiti njihov presek. Dovoljno je da odaberemo ovu funkciju, unutar uglastih zagrada unesemo objekte, i funkcija će uraditi svoje.

Na sledećim tabelama možemo videti neke od osnovnih funkcija dostupnih u GeoGebri, od aritmetičkih, eksponencijalnih, logoritamskih, trigonometriskih, logičkih i raznih drugih:

1) tabela sa osnovnim operacijama:

Tabela 2. Osnovne operacije

Operacija	**Ulaz**
Sabiranje	+
Oduzimanje	-
Množenje	* ili *space* taster
Skalarni proizvod	* ili *space* taster
Dijeljenje	/
Stepen	^ ili 2
Faktorijel	!
Zagrada	( )
x-koordinata	x( )
y-koordinata	y( )
Apsolutna vrijednost	Abs( )
Znak	Sgn( )
Kvadratni korijen	qrt( )
Kubni korijen	cbrt( )
Broj između 0 i 1	random( )

2) tabela sa eksponencijalnim, logoritamskim i trigonometriskim funkcijama:

Tabela 3. Eksponencijalne, logoritamske i trigonometriske operacije

Operacija	**Ulaz**
Eksponencijalna funkcija	`exp( )` ili e^x
Logaritam (prirodni, od *e*)	`ln( )` ili `log( )`
Logaritam od 2	`ld( )`
Logaritam od 10	`lg( )`
Kosinus	`cos( )`
Sinus	`sin( )`
Tangens	`tan( )`
Arkus kosinus	`acos( )`
Arkus sinus	`asin( )`
Arkus tangens	`atan( )`
Hiperbolični kosinus	`cosh( )`
Hiperbolični sinus	`sinh( )`
Hiperbolični tangens	`tanh( )`

3) tabela sa logičkim funkcijama:

Tabela 4. Logičke operacije

	Operacija	**Primjer**	**Tipovi**
Jednako	$\stackrel{?}{=}$ ili ==	a $\stackrel{?}{=}$ b ili a == b	brojevi, tačke, prave, konike *a*,b
Nejednako	≠ ili !=	a ≠ b ili a != b	brojevi, tačke, prave, konike *a*,*b*
Manje od	<	a < b	brojevi *a*, *b*
Veće od	>	a > b	brojevi *a*, *b*
Manje ili jednako	≤ ili <=	a ≤ b ili a <= b	brojevi *a*, *b*
Veće ili jednako	≥ ili >=	a ≥ b ili a >= b	brojevi *a*, *b*
i	∧	a ∧ b	Boolean-ovi iskazi *a*, *b*
ili	∨	a ∨ b	Boolean-ovi iskazi *a*, *b*
Negacija	¬ ili !	¬a ili !a	Boolean-ovi iskazi *a*, *b*
Paraleno	∥	a ∥ b	prave *a*, *b*
Normalno	⊥	a ⊥ b	prave *a*, *b*

Kao što možemo videti, GeoGebra je prilično bogata funkcijama koje možemo koristiti u našem radu, ali ovo su samo neke od njih. Postoji još sijaset drugih funkcija koje u različitim trenucima mogu biti od koristi. Za veliki broj njih biće nam potrebno vremena da shvatimo kako rade i čemu služe. Da bi taj problem bio sto blaži, GeoGebra nam nudi pomoć na svojoj web stranicu (online help). Da bismo pristupili toj pomoći potrebno je da u GeoGebra prozoru, na osnovnom baru sa alatkama kliknemo na *Help*, i odaberemo neku od opcija za pomoć u radu. Nude nam se opcije Help, Tutorial, GeoGebra Forum i GeoGebra Tube. Kada kliknemo na neku od njih, naš internet veb pregledač će nam otvoriti web stranicu gde možemo pronaći ono što nam je potrebno. Naravno, možemo i u adresa baru našeg veb pregledača ukucati adresu www.geogebra.org i na poćetnoj strani odabrati Help i tu naći sve što nam je potrebno da bi pojasnili značenje različitih funkcija i metoda.

6. GeoGebra i nastavne jedinice koje možemo unaprediti korišćenjem ovog softvera

Cilj ovog rada je da predstavi način na koji bi GeoGebra mogla da se iskoristi da bi se unapredila nastava matematike. U trećem razredu srednjih škola, sadržaj nastave matematike je takav da postoji dosta prostora za ovakav način unapređenja. Profesori i učenici mnogo vremena provode skicirajući geometriska tela i koordinatne sisteme na tabli, pa bi upotreba GeoGebre na časovima dovela i do uštede vremena, što bi ostavilo više prostora za dodatno vežbanje i proveru znanja.

Kao što je već rečeno, postoji dosta oblasti gde bi GeoGebra mogla da pripomogne. Poliedri, obrtna tela, vektori, analitička geometrija u ravni samo su neke od nastavnih jedinica gde korisno možemo upotrebiti ovaj softver. Uglavnom bi ga koristili za crtanje geometriskih figura (prizmi, piramida, valjaka, kupa, zarubljenih figura..), koordinatnih sistema i u njemu vektora, pravih, figura u ravni…

6.1. Poliedri

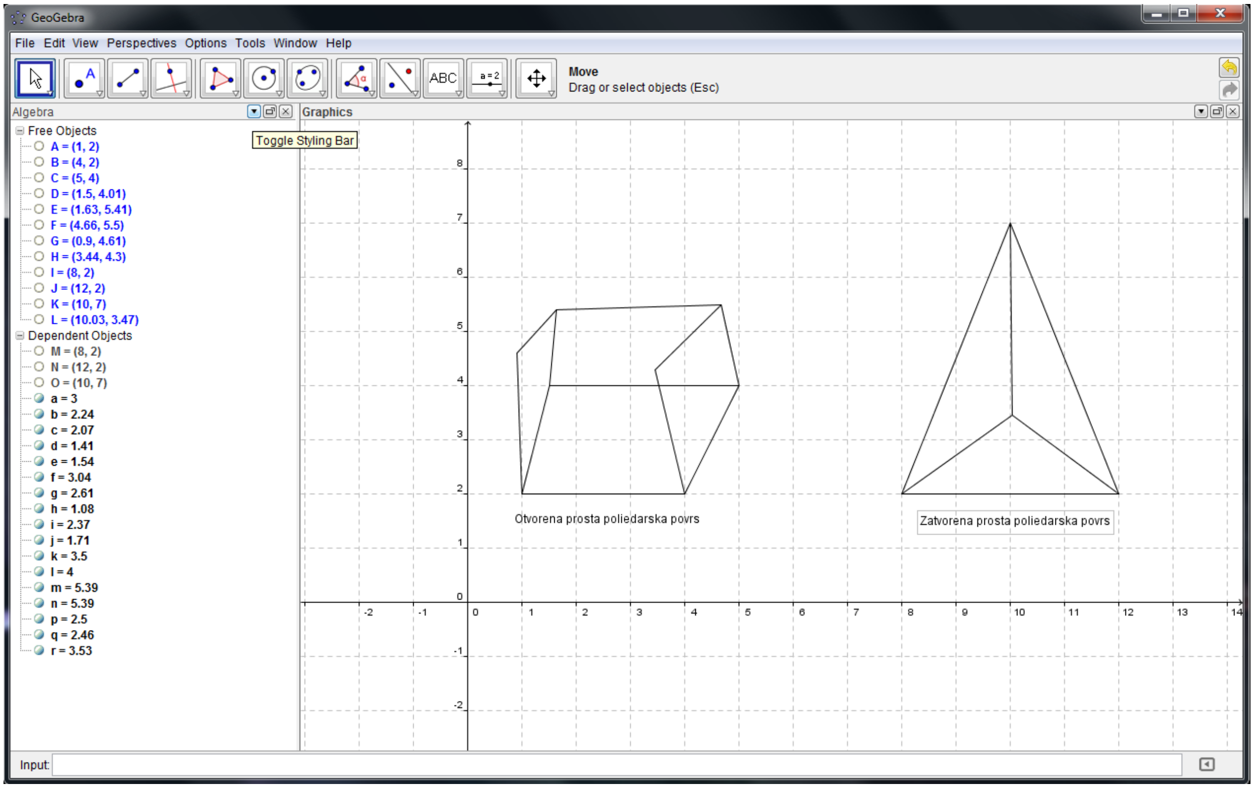
Ne možemo početi nijednu priču o *poliedrima* a da prvo ne definišemo šta su oni. Da bi smo ih definisali, prvo moramo objasniti pojam *proste poliedarske površi. Prosta poliedarska površ* je unija konačnog broja mnogouglova, pri čemu su zadovoljeni sledeći uslovi:

a) svaka stranica bilo kog mnogougla je stranica samo te površi ili samo još jedne, njoj susedne površi,
b) svaka dva nesusedna mnogougla pripadaju dvema različitim ravnima,
c) svaka dva nesusedna mnogougla mogu se povezati nizom mnogouglova iz tog skupa, tako da svaka dva uzastopna člana tog niza budu susedne površi.

Ako sve stranice mnogouglova pripadaju po dvema površima, tada je poliedarska površ zatvorena.

Poliedar je unija proste zatvorene poliedarske površi i njene unutrašnjosti.

Primer kako bi nacrtali otvorenu i zatvorenu prostu poliedarsku površ u GeoGebri, možemo videti na sledećoj slici. Jednostavno, koristeći alatku za konstrukciju duži i redom spajajući odgovarajuće tačke da bi dobili površ koja nam je potrebna. Na kraju je dovoljno u algebarskom prikazu sakriti oznake tačaka i dobićemo konstrukcije kao na Slici 13.



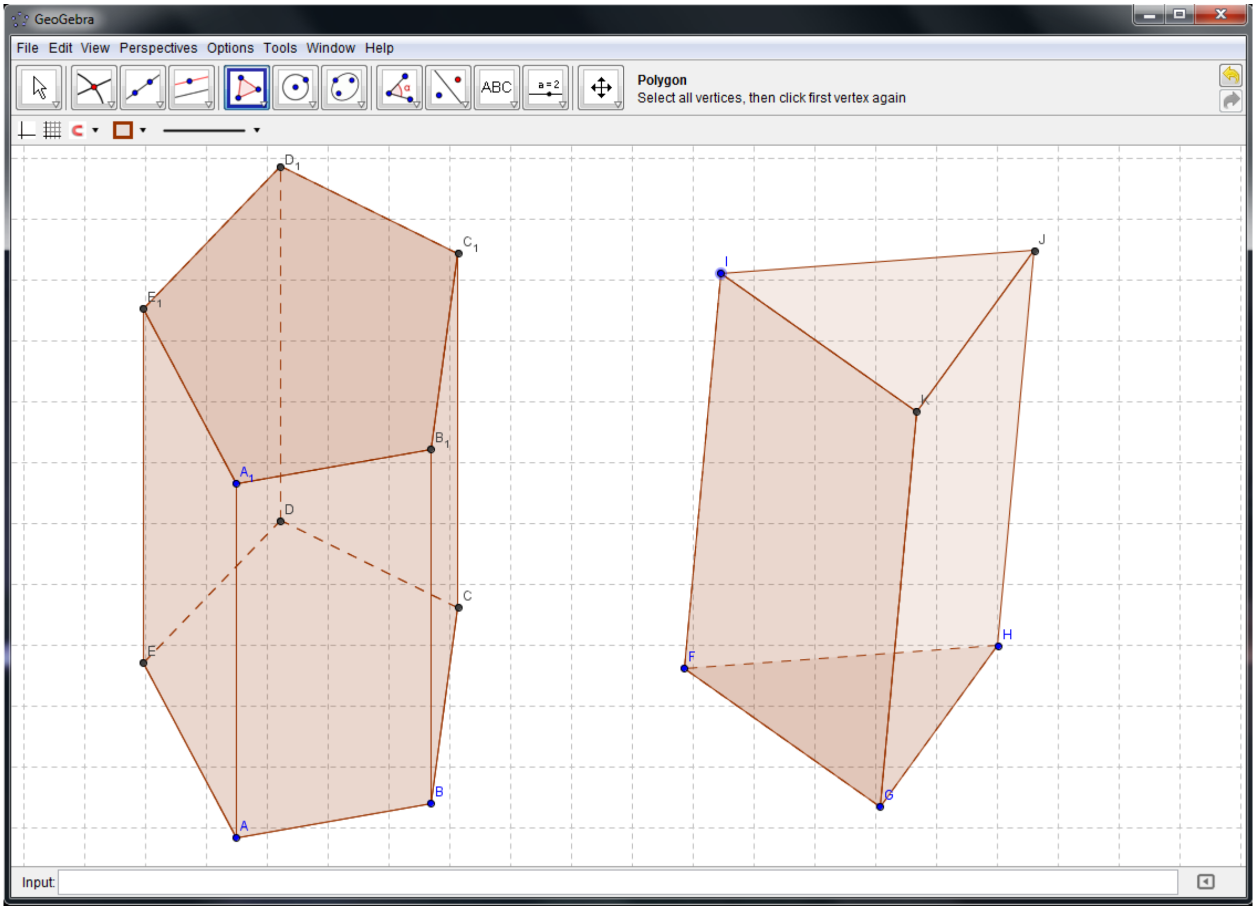
Slika 13. Konstrukcija otvorene i zatvorene proste poliedarske povrsi

Odmah ćemo preći na neke od specijalnih poliedara koji se i najvise obrađuju iz ove oblast u nastavi matematike, kao što su prizme i piramide. Zadaci koje ucenici rešavaju uglavnom se sastoje od izračunavanja površine i zapremine ovih poliedara, stoga im GeoGebra služi da bi što lakše predstavili telo koje je predmet zadatka.

6.1.1. Prizma

Prvo ćemo objasniti šta je prizma. Neka je $n \geq 3$ prirodan broj. Poliedar koji ima $n + 2$ strane, od kojih su dve n – tougaone i sadržane u dvema paralelnim ravnima dok su sve ostale paralelogrami, naziva se *n – tostrana prizma*.

Na Slici 14. prikazane su petostrana i trostrana prizma.



Slika 14. Konstrukcija petostrane i trostrane prizme

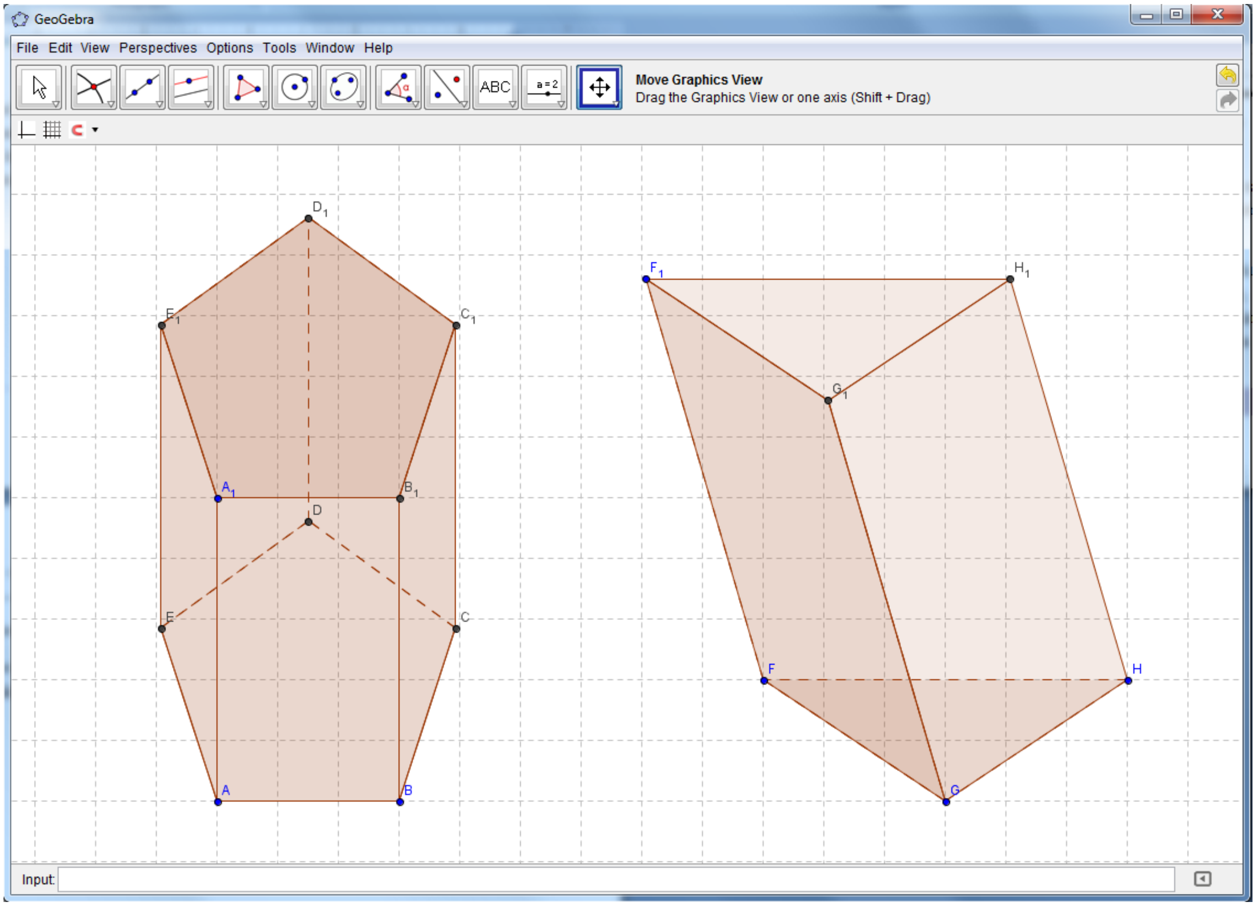
Dve n – tougaone strane prizme, koje su sadržane u paralelnim ravnima, nazivaju se *osnove* prizme i one su podudarne. Ostale (paralelogramske) strane prizme nazivaju se bočne strane i njihova unija je *omotač* prizme.

Na Slici 14. *osnove* petostrane prizme su petouglovi $ABCDE$ i $A_1B_1C_1D_1E_1$, paralelogrami ABB_1A_1, BCC_1B_1, CDD_1C_1, DEE_1D_1, EAA_1E_1 su bočne strane prizme, a unija ovih pet paralelograma je *omotač* prizme. *Temena* prizme su temena osnove prizme, dok su stranice n – tougaonih osnova prizme *osnovne ivice* prizme, a stranice bočnih strana su *bočne ivice* prizme.

Slično važi i za trostranu prizmu.

Razlikujemo prave i kose prizme. Prizme čije su bočne ivice normalne na ravni osnova zovu se *prave* prizme, a ako bočne ivice nisu normalne na ravni osnove, prizma je *kosa*.

Na Slici 15. imamo primer prave petostrane prizme i kose trostrane prizme.

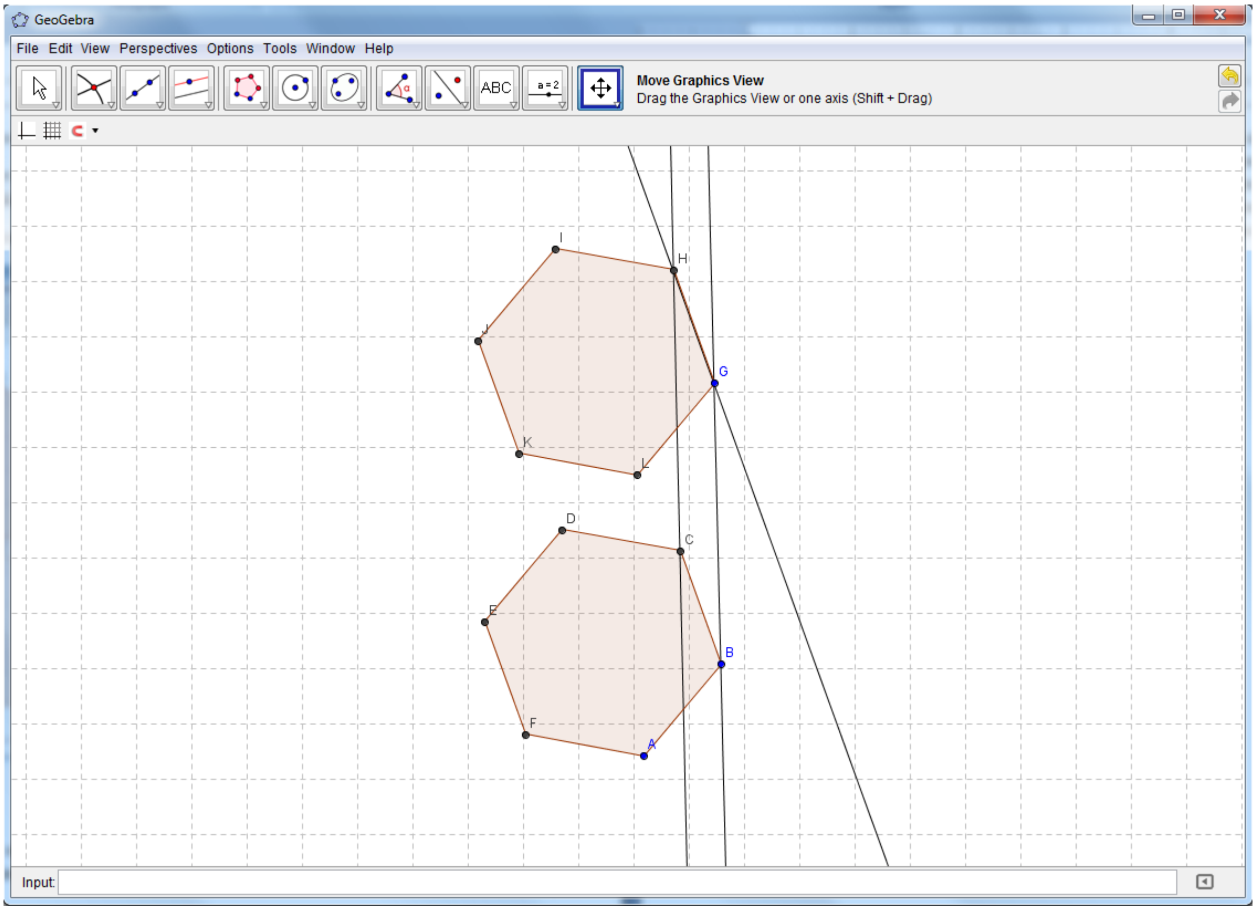


Slika 15. Prava petostrana i kosa trostrana prizma

Prava prizma čije su osnove pravilni n – touglovi naziva se pravilna n – tostrana prizma. Na Slici 15. petostrana prizma je pravilna jer za osnovu ima pravilni petougao, dok trostrana to nije.

U GeoGebri pravilnu prizmu možemo konstruisati na vrlo jednostavan način. Na baru sa alatkama postoji opcija za konstrukciju pravilnih n – touglova. Klikom na alatku *Regular Polygon* i nakon jednostavnog unošenja dva temena mnogougla, pojaviće nam se prozorčić koji će nas pitati koliko temena zelimo da ima naš mnogougao. Nakon unosa broja temena pojaviće nam se mnogougao. Ovo dosta ubrzava proces konstrukcije osnova naših prizmi i piramida.

Nakon toga, kroz neko od temena konstruišemo pravu pomoću alatke *Line trough Two Points*, i nakon toga na toj pravoj ćemo dobiti jedno od temena druge osnove prizme. Pomoću ovog temena, konstruisaćemo još jedno koje nam je dovoljno za konstrukciju druge osnove prizme. Pomoću alatki *Parallel Line* i *Intersect Two Objects*, konstruišemo drugo teme i onda pomoću alatke *Regular Polygon*, klikom na ova dva temena i unošenjem broja temena, kao i kod konstrukcije prve osnove, dobićemo drugu osnovu. Na Slici 16. imamo primer kako sve to izgleda nakon ovih koraka.

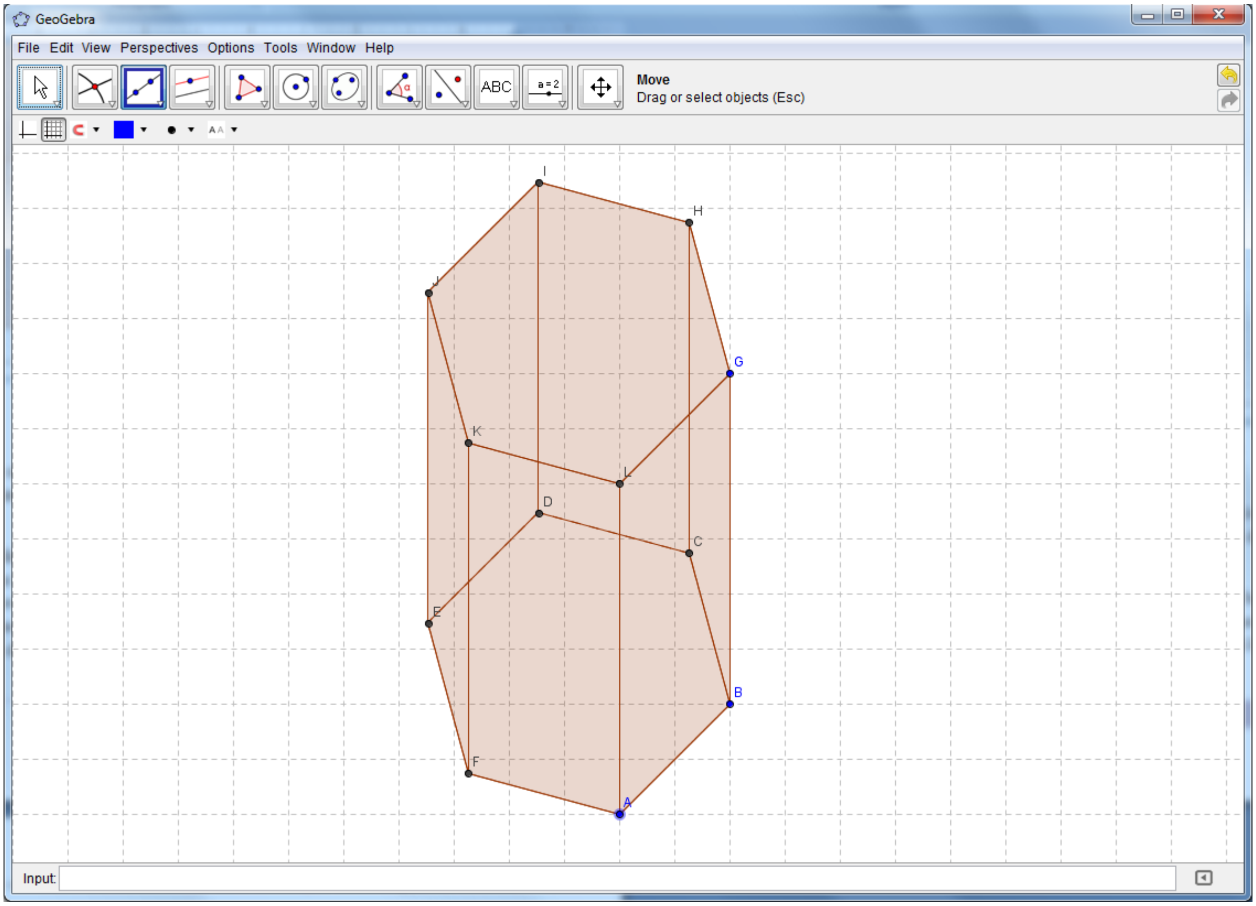


Slika 16. Konstrukcija osnova pravilne šestostrane prizme

Pri konstrukciji druge osnove, ne moramo paziti da li su bočne ivice normalne na osnovu. Tačke koje su plave boje pripadaju nezavisnim objektima, što znači da ih možemo pomerati po potrebi. Kosu prizmu možemo ispraviti da bude prava i obratno.

Omotač prizme možemo konstruisati tao što ćemo konstruisati bočne strane, jednu po jednu, npr. Koristeći alatku *Polygon*. Prave koje smo koristili kao pomoć u konstrukciji temena druge osnove možemo sakriti da bi slika bila preglednija.

Na Slici 17. možemo videti kako izgleda pravilna prava šestostrana prizma.

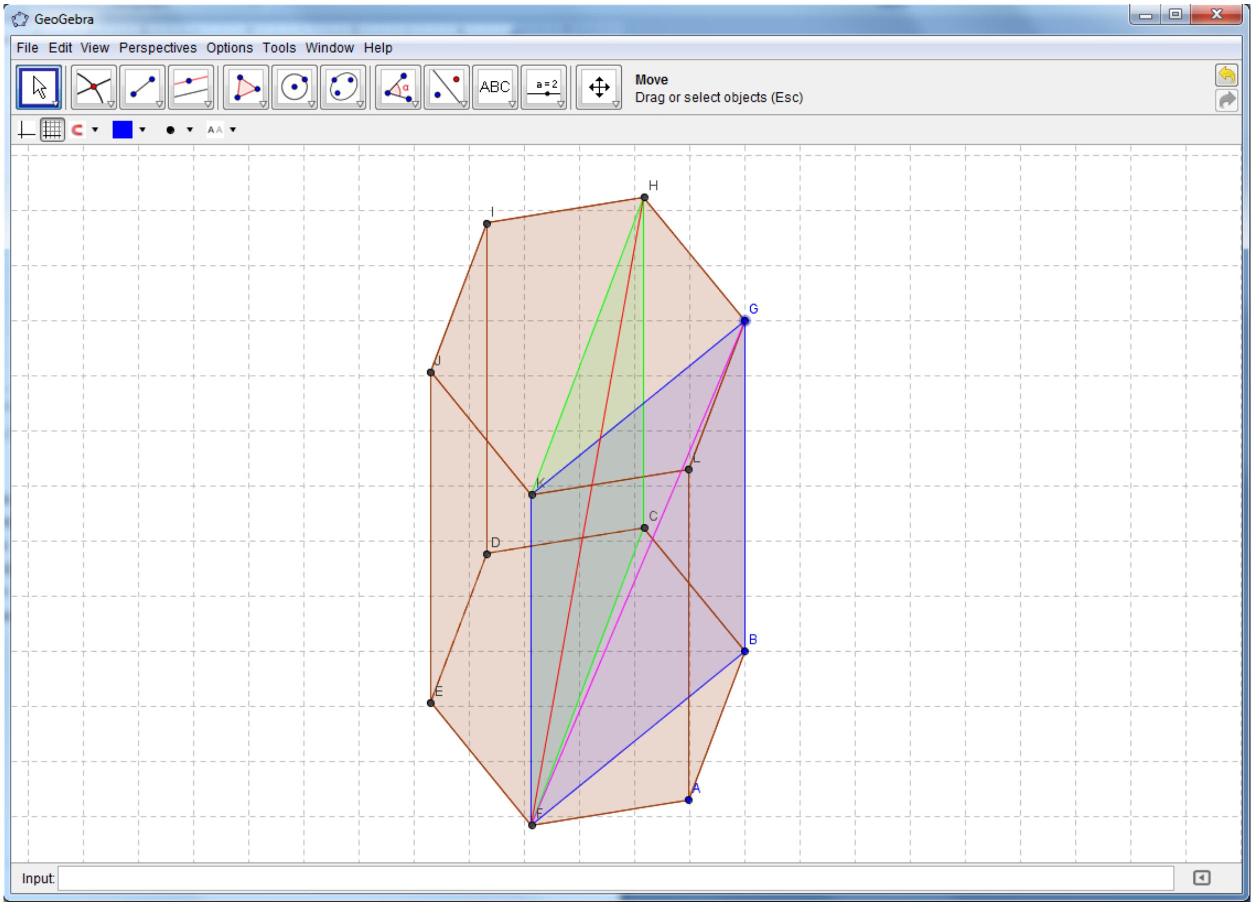


Slika 17. Završena konstrukcija pravilne prave šestostrane prizme

Pri konstrukcijama u GeoGebri različite površine možemo obojiti u različite boje, tako da nam slika tela izgleda preglednije i lakše je objasniti učenicima šta je šta. Na primer, šestostrana prizma ima dva različita dijagonalna preseka, mali i veliki, odnosno dve različita dijagonale, malu i veliku, koje su ujedno i dijagonale dijagonalnh preseka. Svaku od njih, dijagonale i dijagonalne preseke, smo obojili različitim bojama.

Podsetimo se da se dijagonalni presek dobija u preseku prizme i ravni koja sadrži dve bočne ivice prizme koje ne pripadaju istoj strani.

Na Slici 18. prikazana je pravilna šestostrana prizma, sa dijagonalnim presecima i dijagonalama.



Slika 18. Šestostrana prizma i njeni dijagonalni preseci

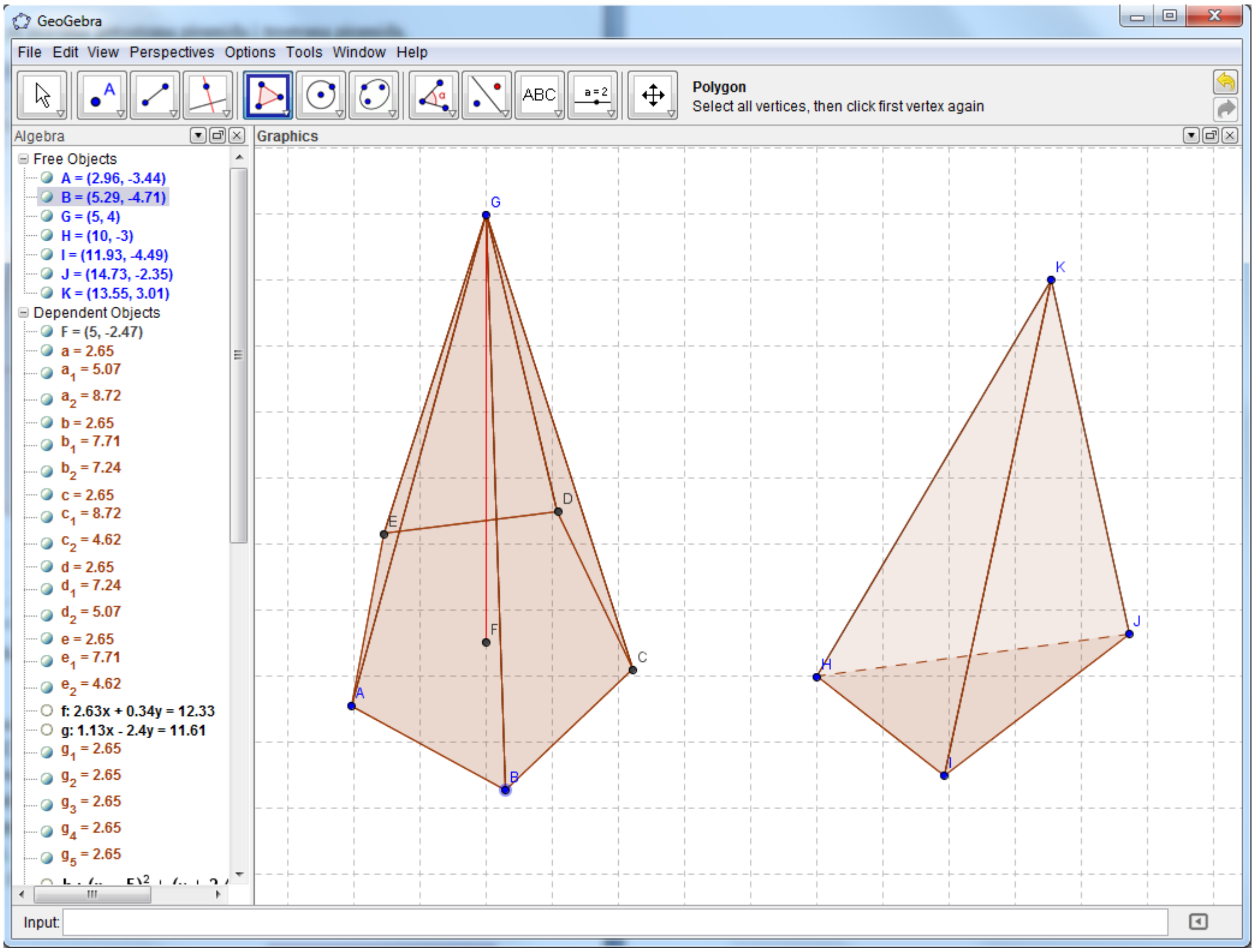
Kao što vidimo na Slici 18, veliki dijagonalni presek je zelene boje, a dijagonala koja mu pripada je crvene. Mali dijagonalni presek je plave boje, a dijagonala koja mu pripada je roze (pink) boje. Takođe, možemo videti i veliku i malu dijagonalu osnove, koje redom pripadaju velikom i malom dijagonalnom preseku prizme.

Ovo je vrlo korisno jer se u zadacima često traži da se izračuna dužina dijagonale prizme, kod četvorostrane, velike i male kod šestostrane prizme, visina prizme, površina dijagonalnog preseka itd, pa je ovakvim pristupom učenicima lakše da razumeju šta se traži i kako da dođu do rešenja.

6.1.2. Piramida

Prvo ćemo dati definicuju piramide. Neka je n ≥ 3 prirodan broj. Poliedar koji ima n + 1 strana, od kojih je jedna n – tougaona a sve ostale su trouglovi, naziva se *n – tostrana piramida*.

Na Slici 19. prikazane su pravilna petostrana piramida i trostrana piramida.



Slika 19. Konstrukcija petostrane i trostrane piramide

Slično kao kod prizmi važi i za piramide, samo što piramide imaju jednu *osnovu*, odnosno n – tougaonu površ, ABCDE, a *omotač* čini unija bočnih strana a to je unija trouglova ABG, BCG, CDG, DEG i EAG. *Osnovne ivice* su stranice osnove piramide, a strance bočnih strana su *bočne ivice* piramide i sve one imaju jednu zajedničku tačku koja se naziva *vrh* piramide (na Slici 19. to je tačka G). Razlikujemo prave i kose piramide. Ako su sve bočne ivice jednakih dužina piramida je *prava*, inače je *kosa*. Ako je piramida prava, onda je i visina piramide normalna na ravan osnove (na Slici 19. visina je duž FG). Ako je osnova piramide pravilan mnogougao, piramida je *pravilna*. Na Slici 19. petostrana piramida je i prava i pravilna, dok trostrana nije ni jedno ni drugo.

Konstrukciju petostrane piramide sa Slike 19. možemo izvesti na sledeći način. Osnova piramide je pravilan petougao. Njega nije lako konstruisati korak po korak kao pravilan trougao, cetvorougao ili šestougao. Zato ćemo iskoristiti alatku *Regular Polygon*. Nakon toga treba da odredimo centar opisanog kruga oko osnove. To možemo uraditi pomoću alatke *Perpendicular Line*, koja nam konstruise normalu na pravu iz neke tačke. Odaberemo dva temena, konstruišemo normale na naspramne stranice, i u preseku tih normala dobijamo centar kruga. Da li je to stvarno centar kruga opisanog oko petougla možemo proveriti pomoću alatke *Circle with Center through Point*. Neka nam centar bude dobijena tačka, a jedno od temena neka bude tačka kroz koju prolazi kružnica. Vidimo da kružnica sadrži i ostala temena osnove. Nakon toga, konstruišemo visinu piramide. Pomoću alatke *Segment between Two Points*, konstruišemo duž iz tačke koja je centar osnove. To neka bude početna tačka duži, a poslednja će nam biti vrh piramide. Nakon konstrukcije vidimo da nam je tačka koju smo dobili za vrh piramide nezavistan objekat, ona nije fiksan, pa je možemo pomerati po potrebi. Kada smo dobili vrh piramide, ostaje nam da konstruišemo bočne strane i bočne ivice piramide. Nakon ovoga naša piramida je kompletna. Naravno, konstrukcija može da se izvede i na druge načine, a to je stvar ideje i kreativnosti (videti [7]).

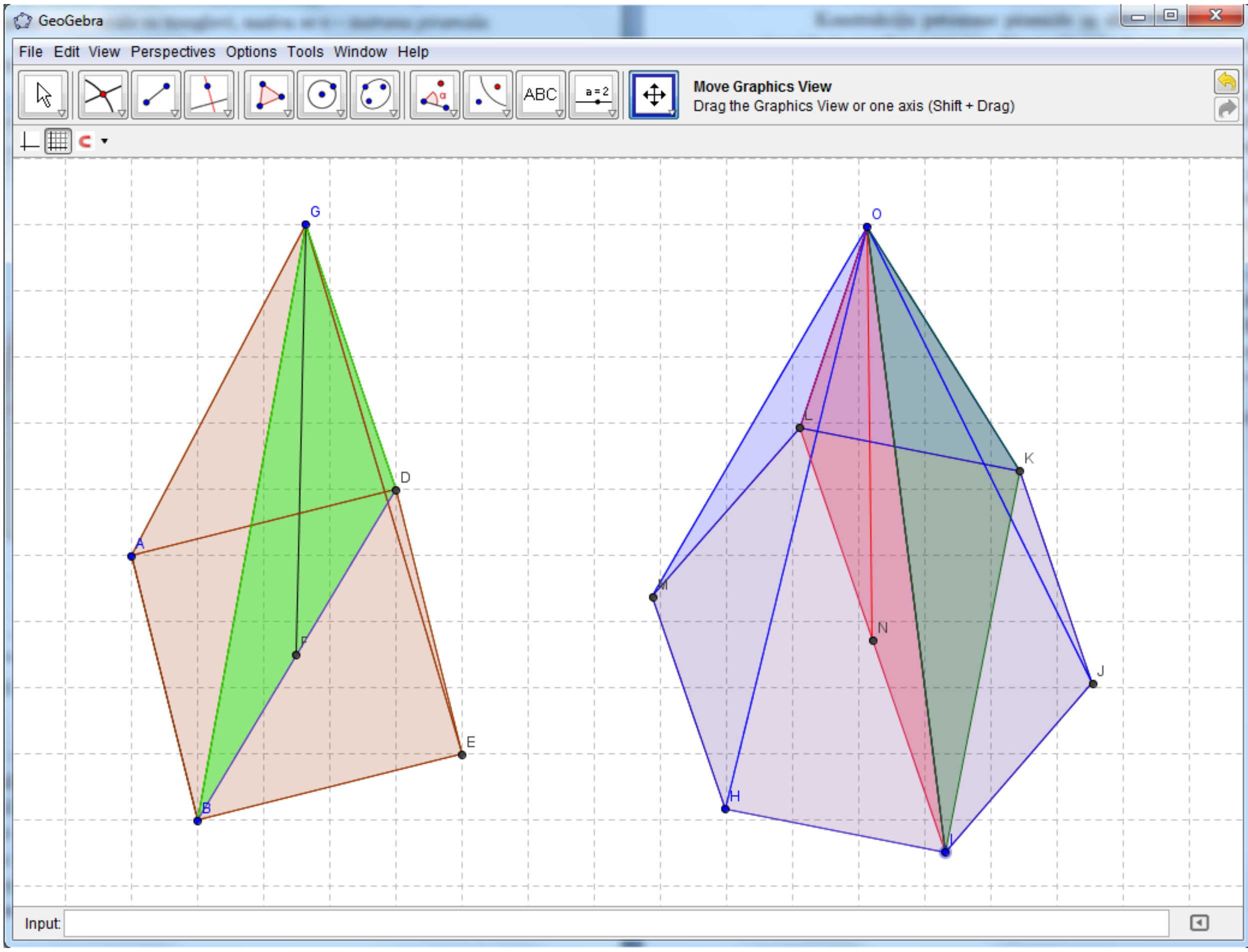
Slično kao i u odeljku gde smo uradili konstrukciju šestostrane prizme sa njenim dijagonalnim presecima, uradićemo i za piramide. Svaki od dijagonalnih preseka obojićemo drugim bojama, kao i dijagonale osnove. Kada su u pitanju piramide, dijagonalni presek je trougao. Ako je piramida prava, onda je dijagonalni presek jednakokraki trougao, jer su bočne ivice piramide krakovi trougla, o one su sve jednakih dužina, a dijagonala osnove je ujedno i osnova trougla.

Dijagonalni presek pravilne prave četvorostrane piramide je obojen zelenom bojom, i to je jednakokraki trougao, čiji su krakovi bočne ivice, a osnovica dijagonala osnove.

Šestostrana piramida, kao i šestostrana prizma, ima dva dijagonalna preseka, veliki i mali. U oba sličaja su to trouglovi, a ako je piramida prava i pravilna, to su jednakokraki trouglovi, čiji su krakovi bočne ivice piramide, a osnovice su velika i mala dijagonala osnove. Veliki dijagonalni presek je obojen rozom (pink) bojom dok je manji obojen tamno zelenom bojom.

Ove pojmove je veoma bitno razlikovati jer se u zadacima vrlo često traži da se, kao i kod prizmi, izračuna površina dijagonalnog preseka, visina piramide, dužina bočne ivice itd, pa će učenicima biti lakše da razumeju problem.

Na Slici 20. imamo primer četvorostrane i šestostrane prizme, sa njihovim dijagonalnim presecima.



Slika 20. Dijagonalni preseci četvorostrane i šestostrane prizme

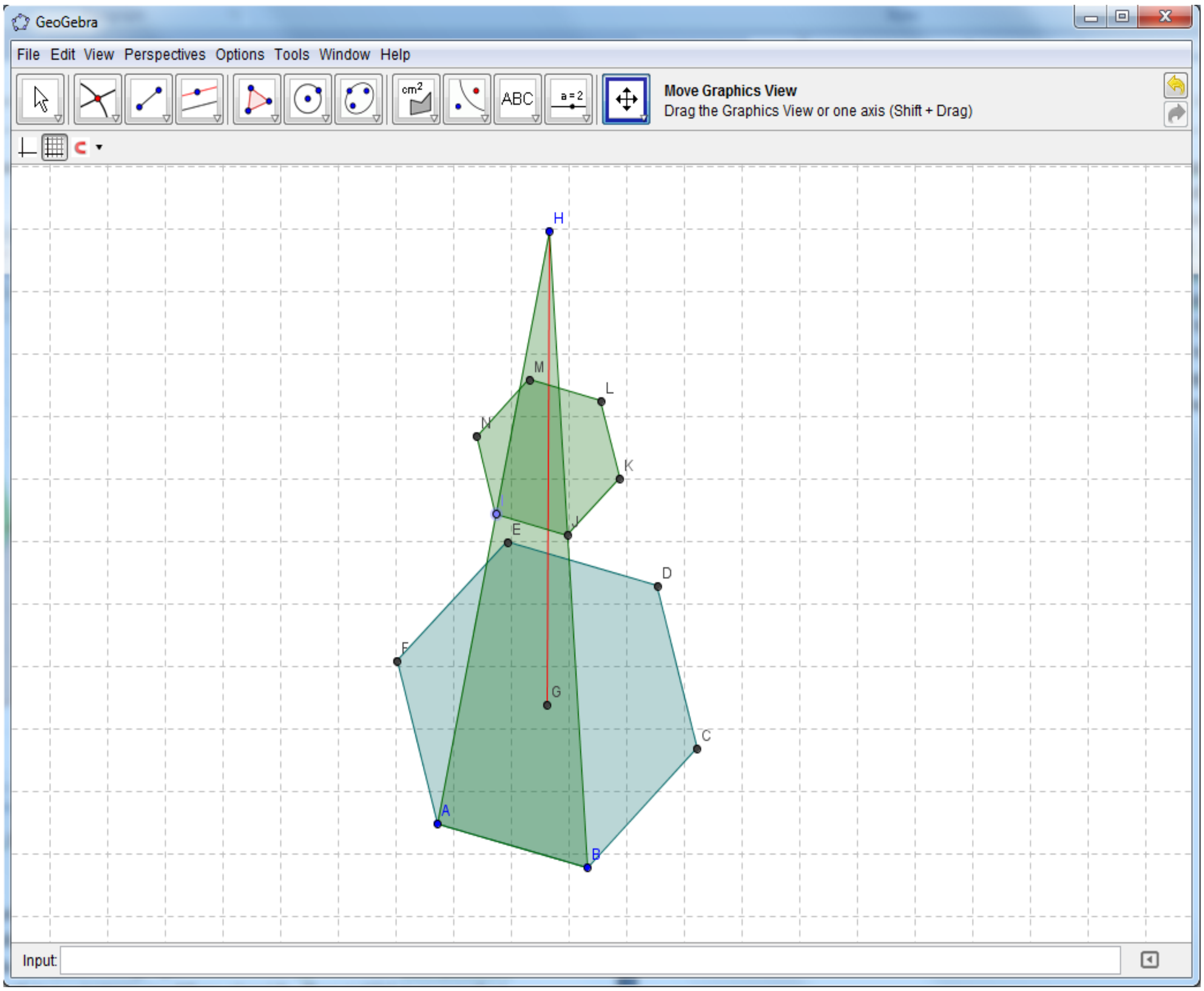
Pored svega ovoga, još jedan vrlo bitan pojam kada su u pitanju piramide je *zarubljena piramida*. Zarubljenu piramidu dobijamo tako što se obična piramida preseče sa ravni koja je paralelna ravni osnove. Tada dobijamo mnogougao homotetičan sa osnovom. Deo piramide između tih homotetičnih površi je n – tostrana zarubljena piramida. Homotetični monogouglovi nazivaju se osnove zarubljene piramide, dok njen omotač čini unija bočnih strana, odnosno trapeza.

Zarubljena piramida je prava ako je nastala od prave piramide, a pravilna ako je nastala od pravilne. Osnove pravilne piramide su pravilni mnogouglovi pa sledi da su bočne strane jednakokraki trapezi.

Konstrukciju pravilne šestostrane zarubljene piramide započećemo tako što ćemo konstruisati pravilan šestougao ABCDEF. To možemo uraditi kao što je opisano u poglavlju 5.3.4 gde je opisana konstrukcija pravilnog šestougla ili korišćenjem alatke *Regular Polygon*. Nakon toga odredićemo centar osnove, tačku G, odnosno centar opisanog kruga oko sestougla. Kroz tu tačku ćemo konstruisati visinu piramide i odrediti joj vrh, tačku H. Zatim, pomoću alatke

Polygon, konstruičemo bočnu stranu ABH. Na bočnoj ivici konstruišemo proizvoljnu tačku I. Kroz tačku I, pomoću alatke *Parallel Line*, konstruišemo pravu paralelnu duži AB. U preseku te prave i duži BH, a pomoću alatke *Intersect Two Objects*, dobijamo tačku J. Sada, opet pomoću alatke *Regular Polygon*, obeležimo tačke I i J, i unesemo broj temena šestougla. Dobićemo šestougao IJKLMN koji je homotetičan šestouglu ABCDEF.

Na Slici 21. možemo videti kako izgleda konstrukcija posle svih ovih koraka.

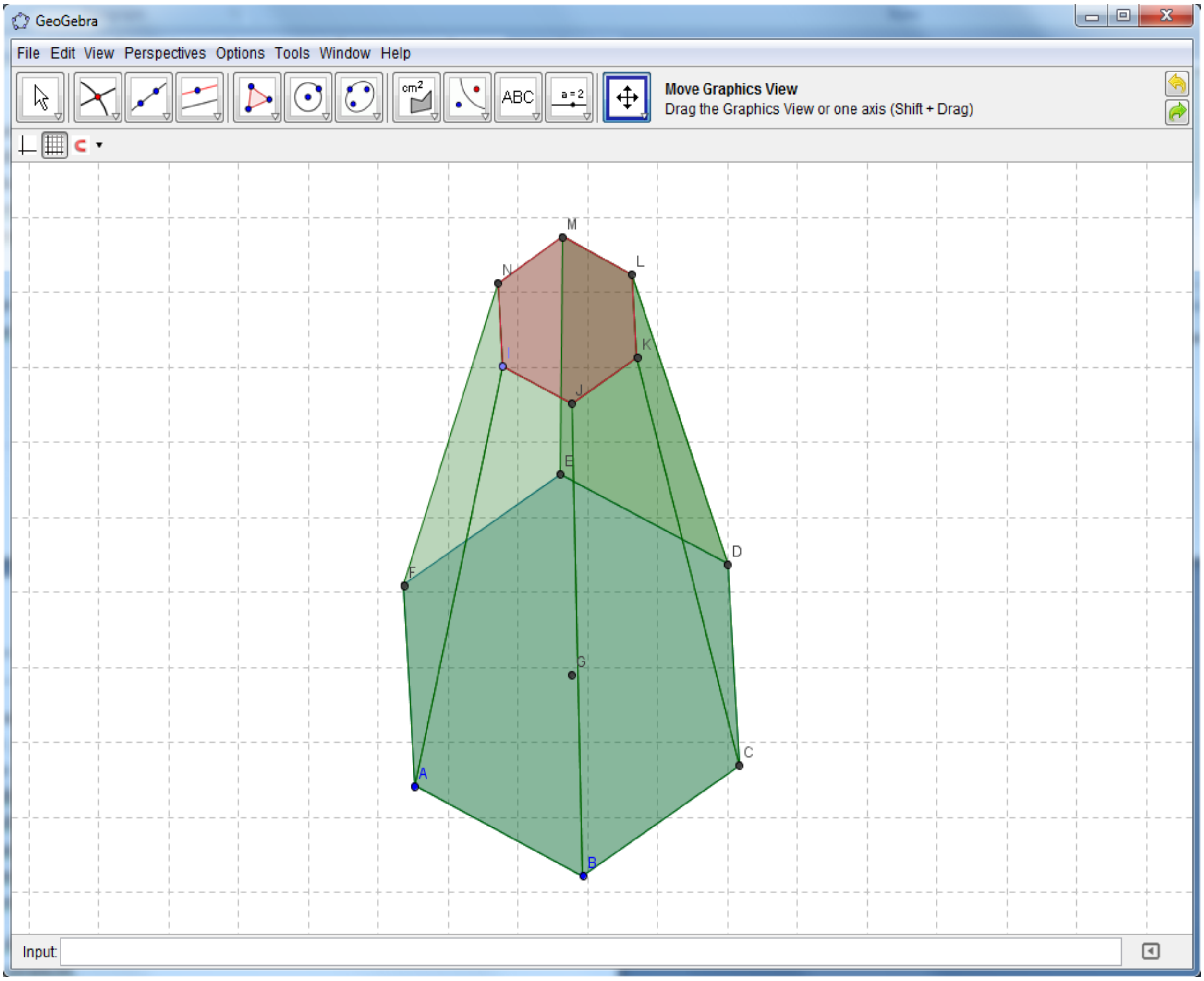


Slika 21. Konstrukcija osnova zarubljene šestosrane piramide

Konstrukciju nastavljamo tako što ćemo prvo proveriti da li bočne ivice sadrže temena osnova i vrh piramide. To možemo uraditi pomoću alatke *Line through Two Points*, tako što ćemo obeležiti dve tačke, nakon čega će nam se pojaviti prava koja ih sadrži. Ako prava sadrži i treću tačku onda nam je kostrukcija dobra. Na primer, prava kroz tačke H i N sadrži i tačku F. Sada možemo sakriti prave, duži i ostalo što smo koristili u našoj dosadašnjoj konstrukciji.

Koristeći alatku *Polygon* konstruišemo sve bočne strane zarubljene piramide, a zatim i gornju osnovu koju možemo obojiti drugom bojom zbog preglednosti.

Na Slici 22. možemo videti kako izgleda gotova konstrukcija pravilne zarubljene šestostrane piramide.



Slika 22. Pravilna šestostrana zarubljena piramida

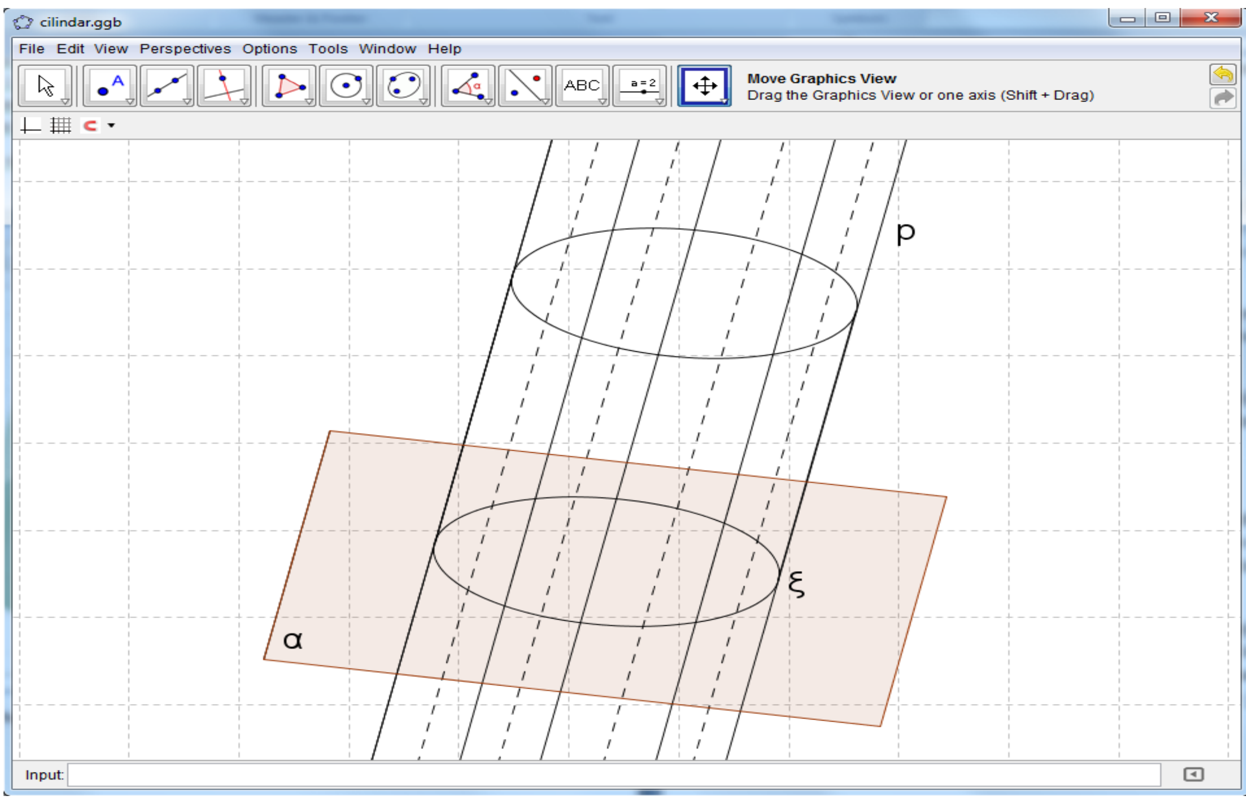
6.2. Obrtna tela

U ovoj glavi upoznaćemo se sa geometriskim telima koja su ograničena, ne mnogougaonim, već kružnim površima.

6.2.1. Cilindrična površ i valjak

Neka je ξ proizvoljna linija ravni α i neka je p prava koja prodire tu ravan. Skup tačaka svih pravih koje seku liniju ξ a paralelne su sa pravom p naziva se *cilindrična površ*. Linija ξ je *vodilja* (direktrisa), a prave koje seku ξ i paralelne su sa p su *izvodnice* (generatrise) cilindrične površi.

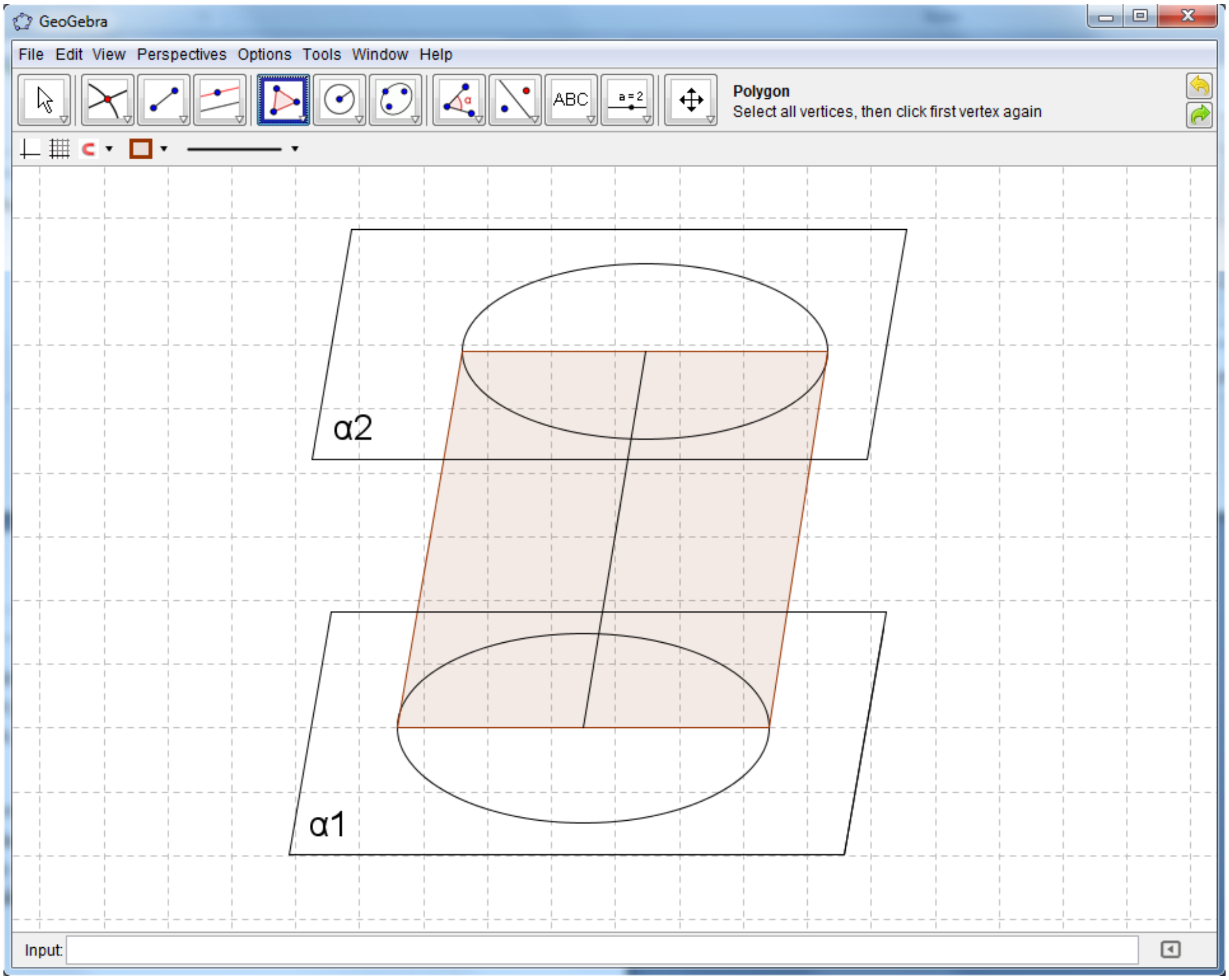
Ako je vodilja ξ prosta linija (ne seče samu sebe), i odgovarajuća cilindrična površ je *prost*, inače je *složena*. Cilindrična površ je *otvorena* ako je vodilja ξ otvorena linija, inače je *zatvorena*.Ako je vodilja cilindrične površi kružna linija, tada se za cilindričnu površ kaže da je *kružna* (Slika 23.). Sve ravni paralelne sa ravni vodilje kružne linije cilindrične površi seku tu površ po podudarnim kružnim linijama.



Slika 23. Cilindrična površ

Deo prostora ograničen kružnom cilindričnom površi i dvema podudarnim kružnim površima (koje nastaju kada se cilindrična površ preseče sa dve paralelne ravni α1 i α2) naziva se ***valjak*** (Slika 24.). Kružne površi su *osnove* valjka, a deo cilindrične površi između osnova je *omotač* valjka.

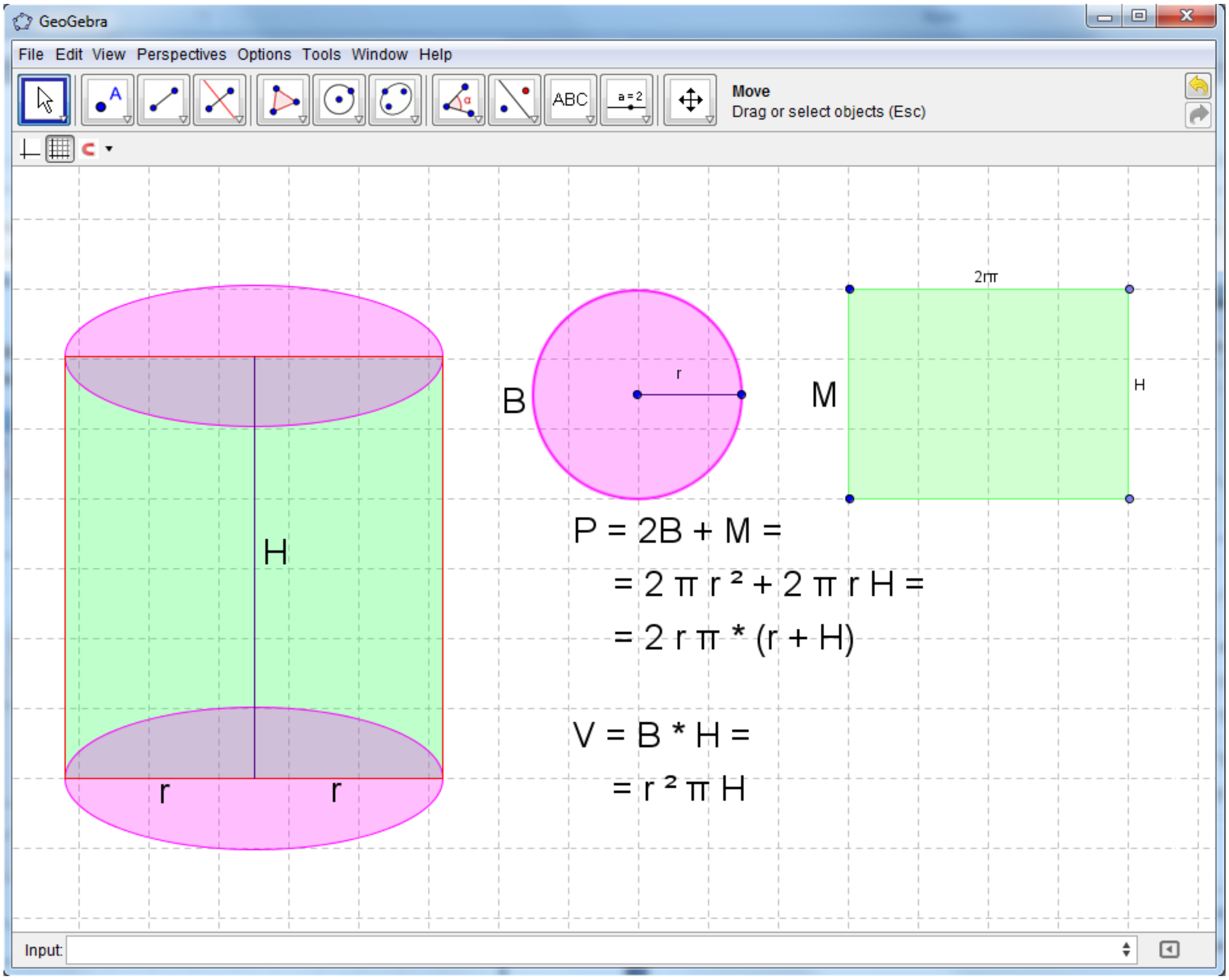
Na Slici 24. imamo primer valjka, koji je ništa drugo do deo prostora ograničen kružnom cilindričnom površi i dvema podudarnim kružnim površima



Slika 24. Valjak

Izvodnice cilindrične površi koje pripadaju omotaču valjka zovu se *izvodnice* valjka. One su sve paralelne i jednake. Rastojanje između osnova valjka naziva se *visina* valjka, a duž koja spaja središta osnova valjka naziva se *osa* valjka. Ako je osa valjka normalna na ravni osnova, valjak je *prav*, inače je *kos*. U pravom valjku osa je u isto vreme i visina.

Na Slici 25. imamo primer pravog valjka, sa formulama za izračunavanje njegove površine i zapremine.



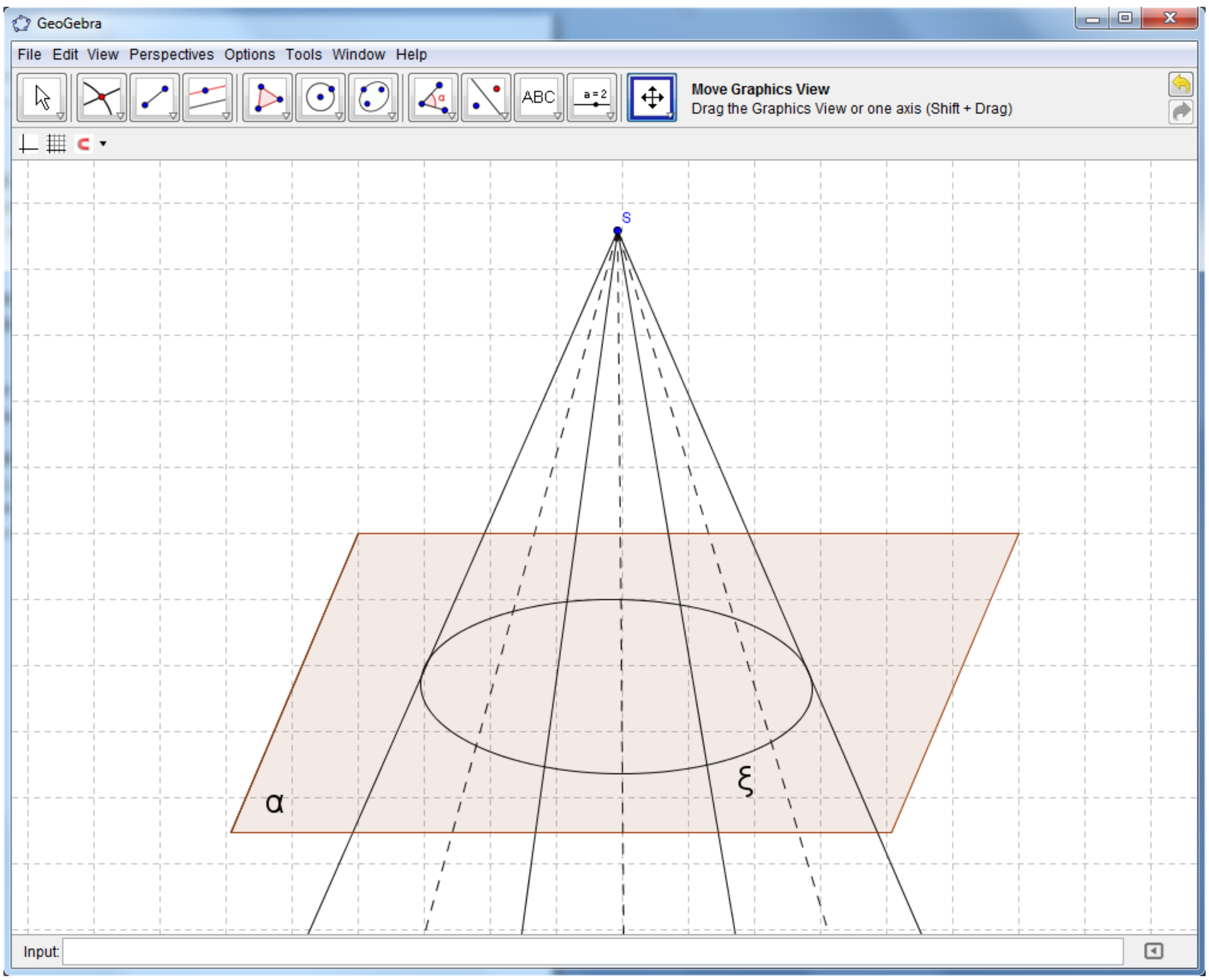
Slika 25. Prav valjak i formule za izračunavanje površine i zapremine

Svaku od ovih konstrukcija izveli smo na sličan način. Konkretno, na Slici 24, prvo smo konstruisali dve podudarne elipse pomoću alatke *Ellipse* koja služi za njihovu konstrukciju. Zatim smo konstruisali zajednicke tangente pomoću alatke *Tangents*. Nakon toga odredimo dodirne tačke tangenti i elipsi i u njima konstruišemo poligon, koji će ujedno biti i ravan presek valjka. Visinu konstruišemo tako što ćemo prvo odrediti središta prečnika osnova pomoću alatke *Perpendicular Line*, i povezati ih pomoću alatke *Segment between Two Points*. Oznake unosimo pomoću alatke *Insert Text*, kao i formule koje vidimo na slici. Pored slike valjka vidimo i krug, označe sa B, koji je u stvari osnova valjka, a pored vidimo omotač valjka označen sa M. Sa P smo označili površinu valjka, dok je sa V označena njegova zapremina.

6.2.2. Konusna površ i kupa

Neka je ξ proizvoljna linija ravni α i neka je S tačka koja ne pripada toj ravni. Skup tačaka svih pravih koje sadrže tačku S i seku liniju ξ naziva se *konusna površ*. Linija ξ je *vodilja* (direktrisa) konusne površi, a prave koje sadrže tačku S i seku vodilju su *izvodnice* (generatrise). Tačka S je *vrh* konusne površi.

Proste, otvorene i zatvorene konusne površi definišu se analogno prostim, otvorenim i zatvorenim cilindričnim površima. Specijalno, ako je vodilja konusne površi kružna linija, takva konusna površ je *kružna* (Slika 26.).

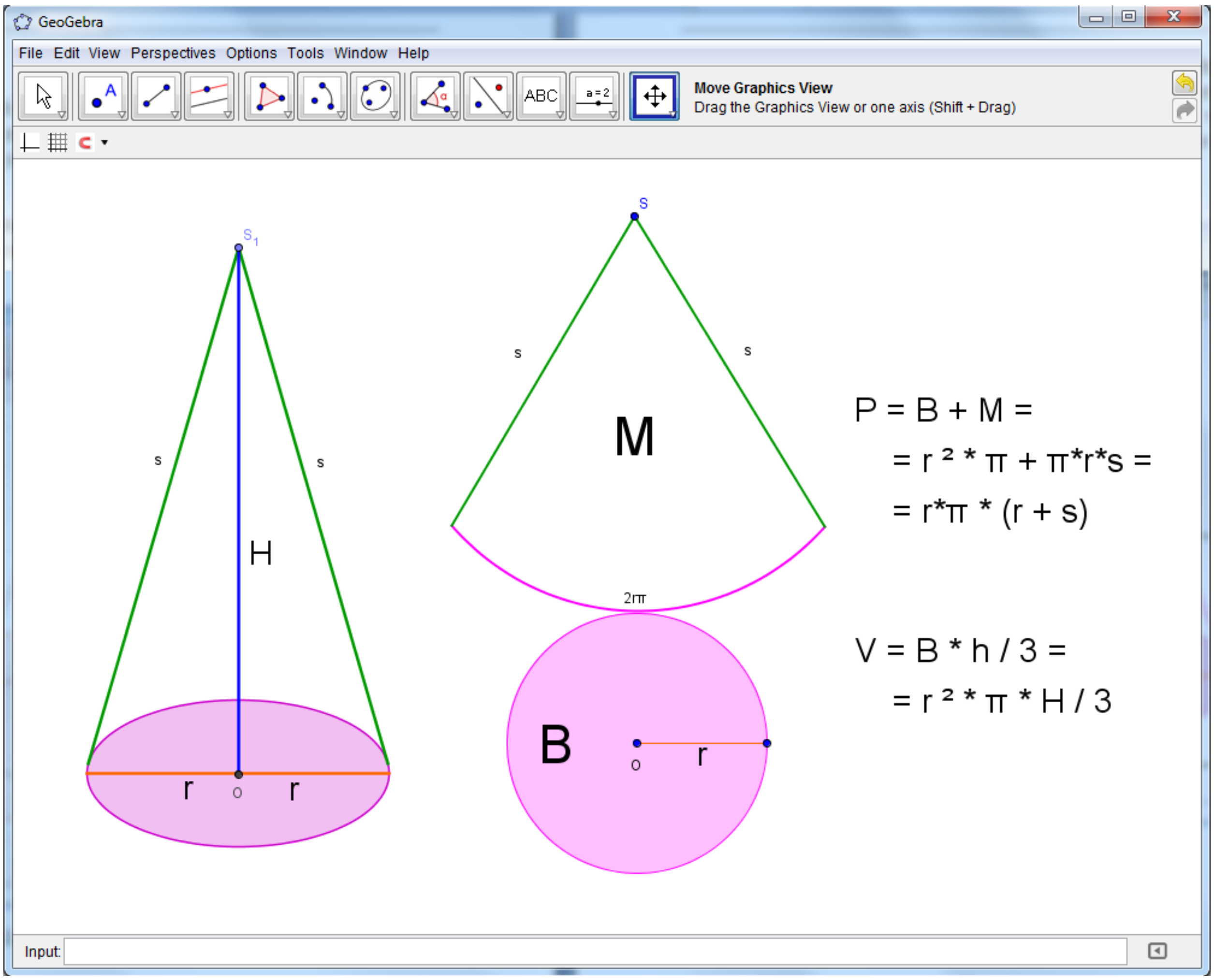


Slika 26. Kružna konusna površ

Krug (određen vodiljom konusne površi) i deo konusne površi koji se nalazi između te vodilje i vrha ograničavaju deo prostora koji se naziva *kružna kupa* ili samo ***kupa***.

Taj krug je *osnova* kupe, a konusna površ između vrha i osnove je *omotač* kupe. Izvodnice konusne površi koje pripadaju omotaču kupe nazivaju se *izvodncama* kupe. Rastojanje između vrha i ravni osnove kupe je *visina* kupe, a duž koja spaja vrh sa središtem osnove je *osa* kupe. Kupa je *prava* ako je osa normalna na ravan osnove, inače je *kosa*. Osa prave kupe ujedno je i njena visina.

Na Slici 27. možemo videti pravu kupu, posebno izdvojen njen omotač M i osnovu B, kao i formule za izračunavanje njene površine P i zapremine V.

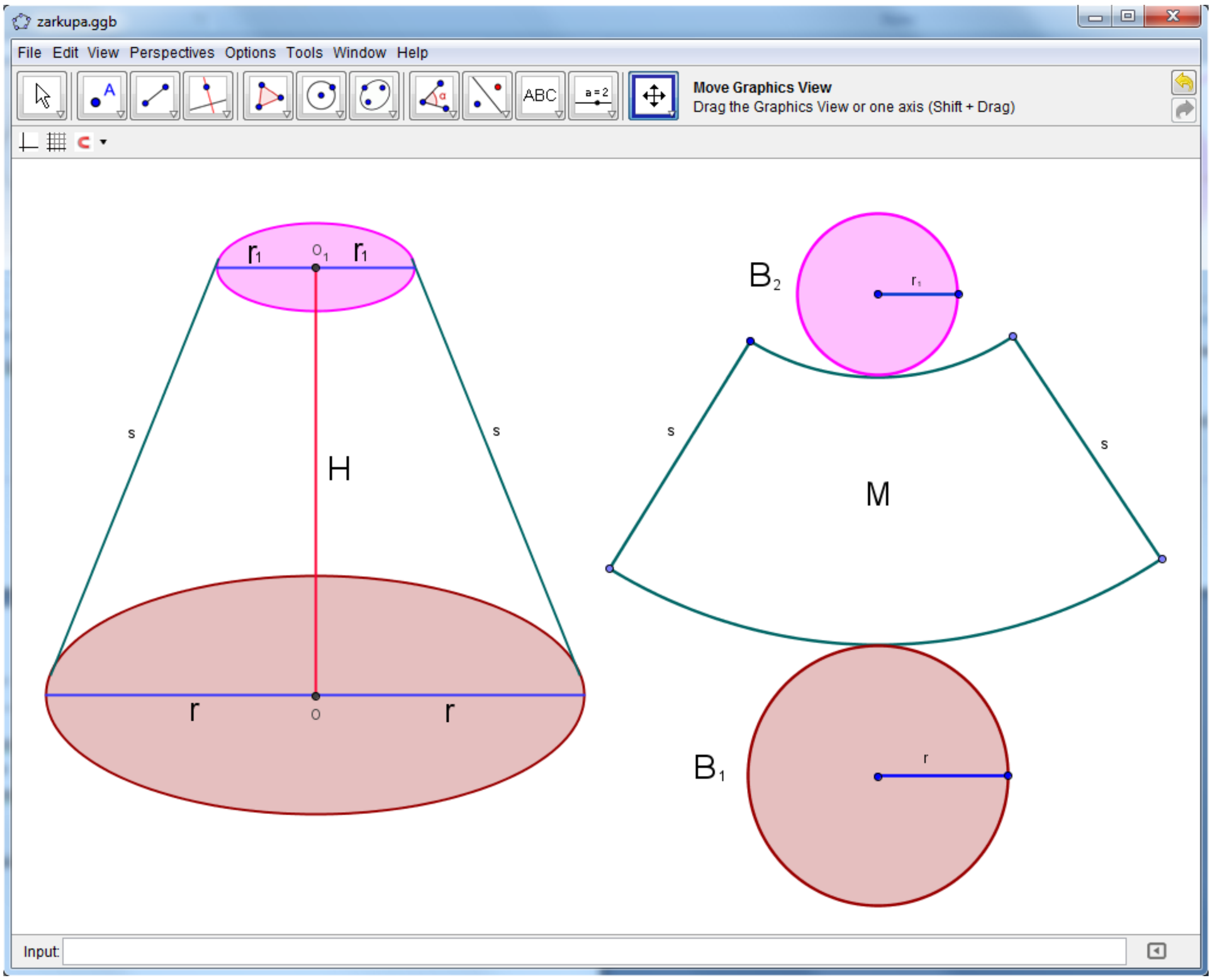


Slika 27. Prvava kupa, omotač i osnova i formule za izračunavanje površine i zapremine

Konstrukcije smo izveli na sličan način i koristeći uglavnom iste alatke kao i za konstrukciju valjka.

Još jedna interesantna figura je i *zarubljena kupa*. Ako kupu presečemo sa ravni koja je paralelna ravni osnove, dobijamo krug. Deo kupe između osnove i tog kruga nazivamo zarubljena kupa (Slika27.). Ona je ograničena dvema kružnim površima, osnovama, i delom konusne površi između njih.

Pojmovi kao što su izvodnica, osa, visina, zatim prava zarubljena kupa definišu se na uobičajen način.



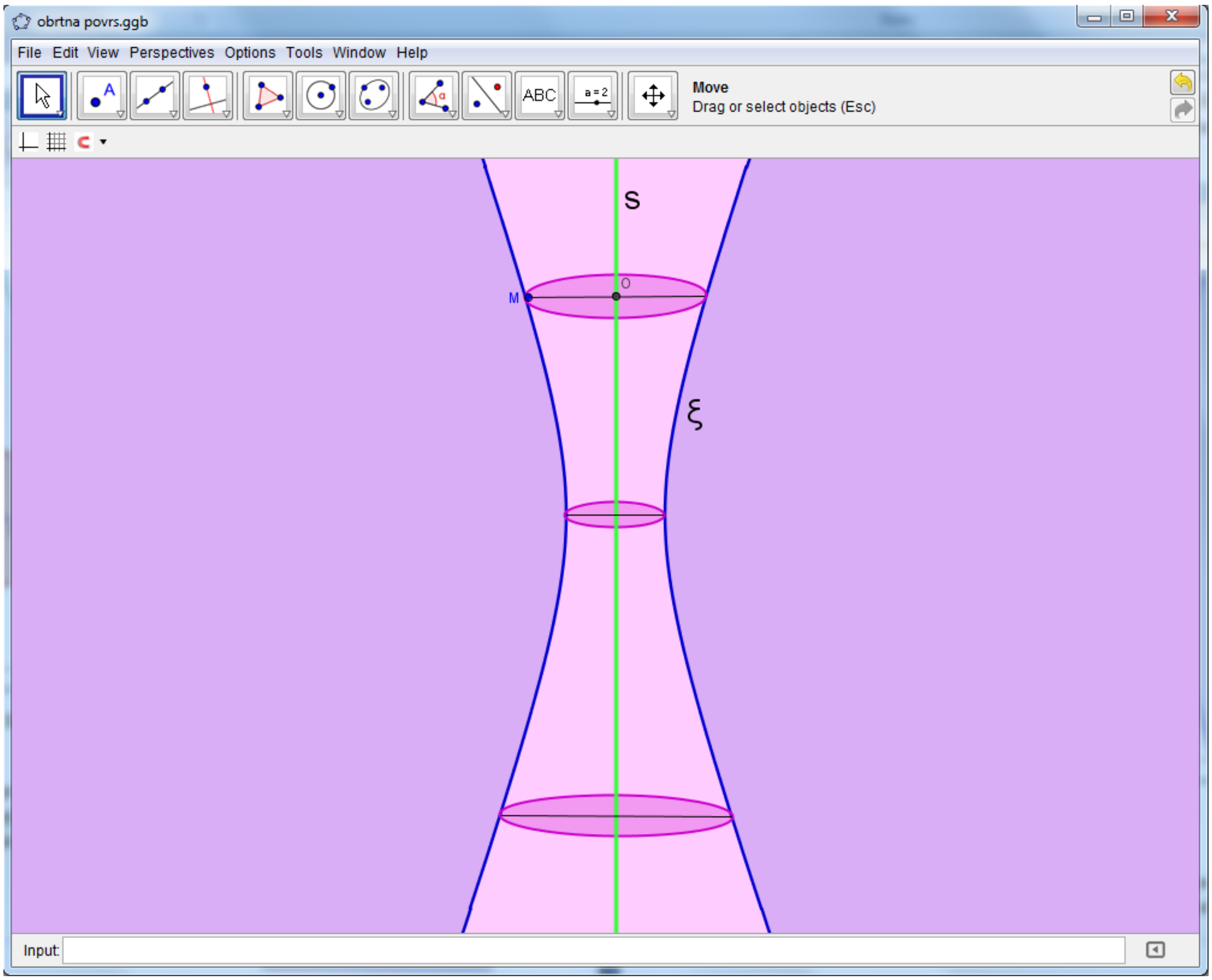
Slika 28. Prava zarubljena kupa

Konstrukciju zarubljene kupe smo izveli na sličan način i koristeći slične alatke kao i za konstrukciju obične prave kupe. Jedino što je novo je to što smo konstruisali gornju osnovu, tj. elipsu koja je slična već konstruisanoj donjoj osnovi, tj. elipsi, i na kraju gornji deo kupe odstranimo.

6.2.3. Obrtna površ, sfera i lopta

Neka je data prava s i tačka m koja joj ne pripada. Neka je α ravan koja sadrži tačku M i normalna je na s. U ravni α posmatrajmo kružnu liniju k sa centrom O = s ∩ α i poluprečnikom OM. Kružna linija k je dobijena rotacijom tačke M oko ose s za pun ugao.

Neka je s proizvoljna prava i α ravan koja je sadrži i neka je ξ proizvoljna linija ravni α. Ako se ravan α obrće oko prave s za pun ugao, tada svaka tačka M koja pripada liniji ξ opisuje kružnu liniju koja pripada ravni normalnoj na pravu s, a čiji je centar u tački O koja pripada pravoj s. Unija svih takvih kružnih linija, dobijenih obrtanjem svih tačaka linje ξ, obrazuje *obrtnu* ili *rotacionu površ* (Slika 29.).



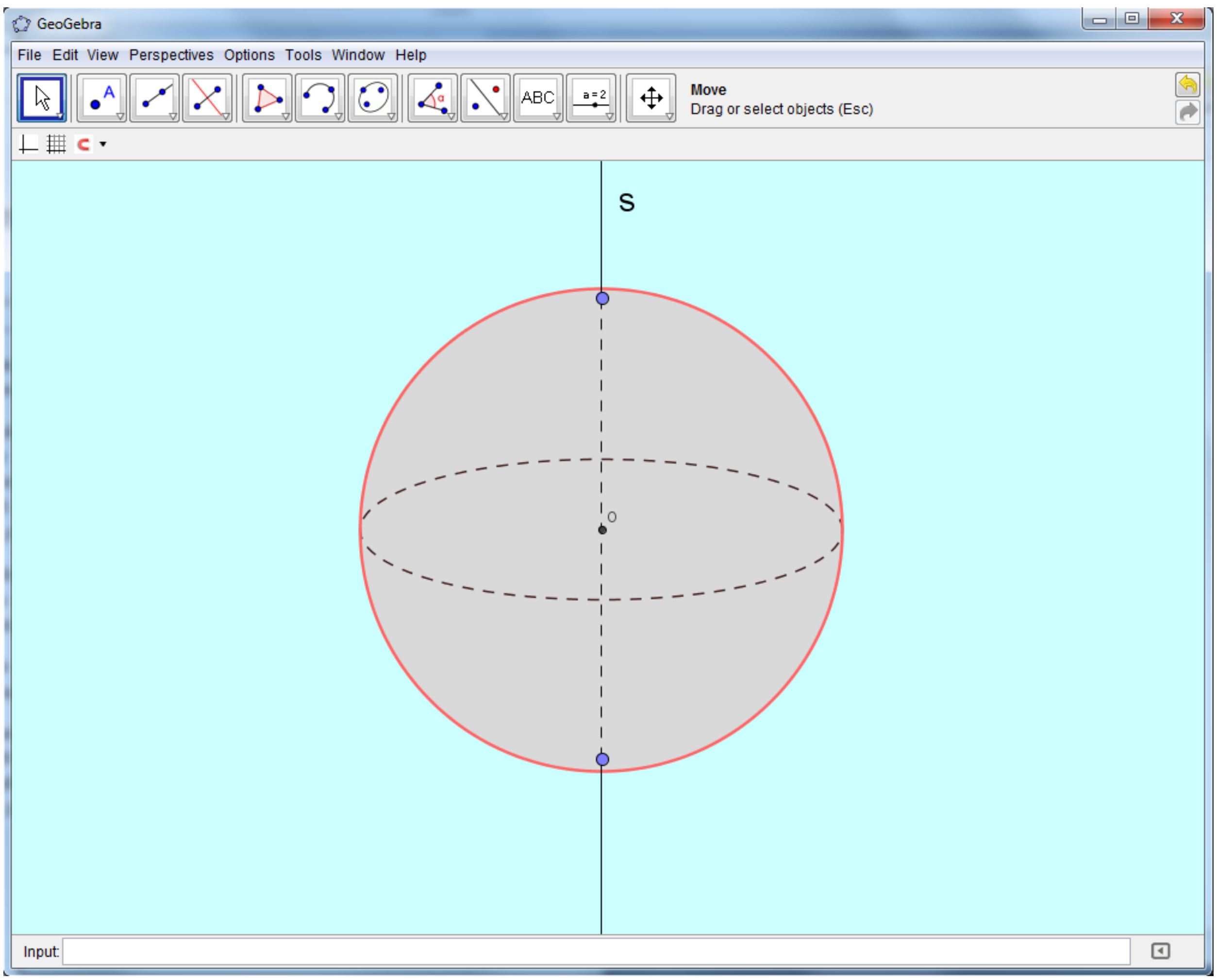
Slika 29. Rotaciona površ

Ako se za liniju ξ uzme prava koja sa pravom s nema zajedničkih tačaka, tj. paralelna joj je, dobijena obrtna površ je prava kružna cilindrična površ, odnosno *obrtna cilindrična površ*.

Ako se za liniju ξ uzme prava koja seče pravu s, dobijena obrtna površ je pravav kružna konusna površ, odnosno *obrtna konusna kupa*.

Obrtanjem kružne linije ξ oko ose koja sadrži njen prečnik dobija se obrtna površ koja se naziva ***sfera*** (Slika 30.). Sfera se jos može definisati i kao skup tačaka u prostoru koje se nalaze na jednakom rastojanju od jedne utvrđene tačke, koja je *centar* sfere. Rastojanje ma koje tačke od centra sfere naziva se *poluprečnik*. Duž koja spaja dve tačke sfere naziva se *tetiva*. Tetiva koja prolazi kroz centar sfere naziva se *prečnik*.

Sfera deli prostor na dva dela - na svoju unutrašnju oblast, koju sačinjavaju sve one tačke čija su rastojanja od centra manja od poluprečnika, i na svoju spoljašnost, koju sačinjavaju sve one tačke čija su rastojanja od centra veća od poluprečnika sfere.



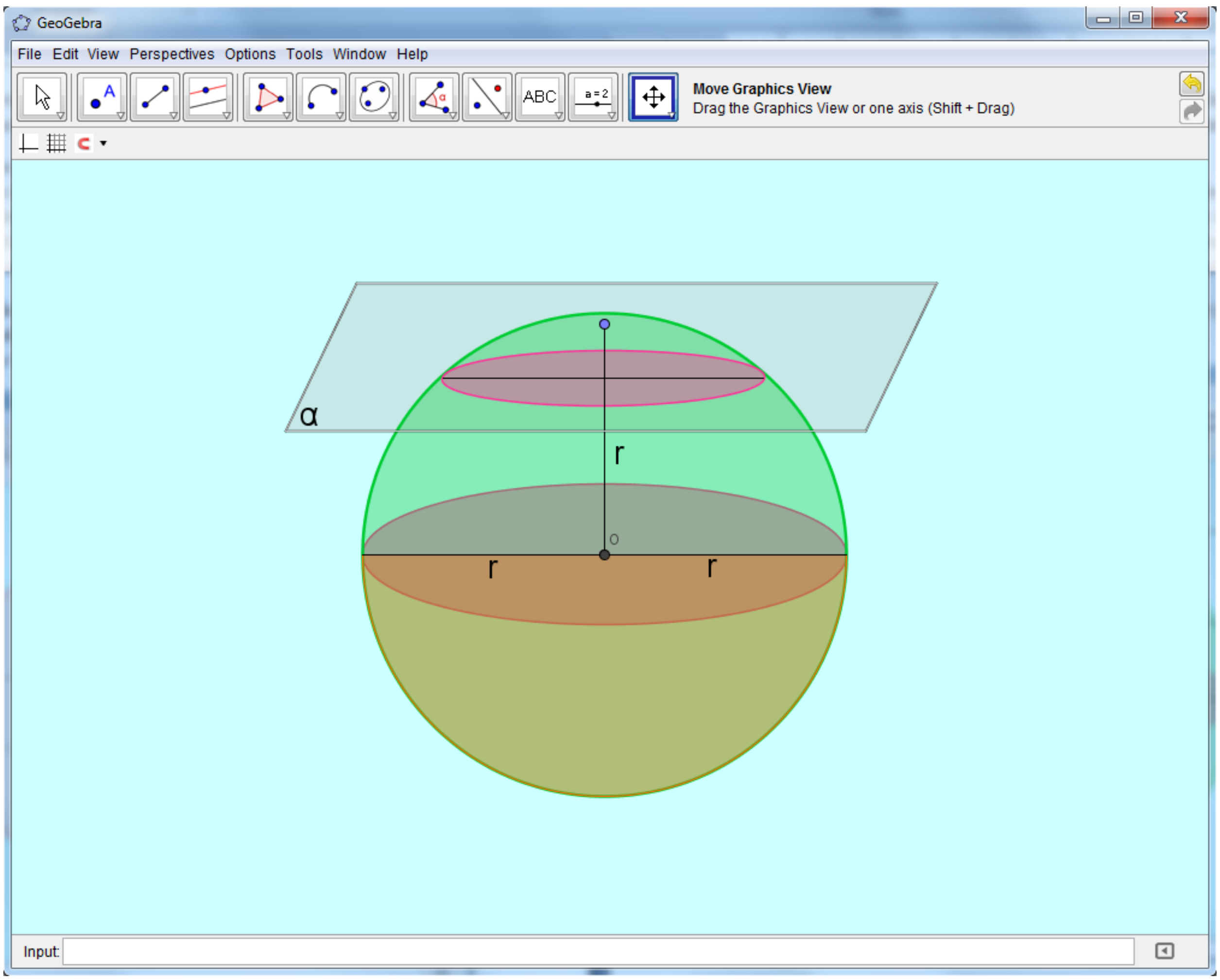
Slika 30. Sfera

Konstrukciju na Slici 30. izveli smo tako što prvo konstruišemo elipsu (*Ellipse*), zatim normalnu simetralu (*Perpendicular Bisector)* na duž koju čine ose, zatim presek bisektrise i te duži, i presek elipse i prave koja prolazi kroz ose. Ono što dobijemo su centar kruga i dve tačke na kružnici koje ćemo iskoristit za njegovu konstrukciju. Slično i za Sliku 30.

Sfera, zajedno sa svojom unutrašnjom oblasti, sačinjava ***loptu*** (Slika 31.). Centar, poluprečnik, prečnik i tetiva lopte su redom centar, poluprečnik, prečnik i tetiva odgovarajuće sfere.

Ravan α koja sadrži jednu unutrašnju tačku sfere je seče po kružnoj liniji i deli je na dve *kalote*, a odgovarajuću loptu na dva *loptina odsečka*. Ako se sfera preseče sa ravni koja sadrži njen centar dobijaju se dve *polusfere*, a presek je *velika kružna linija* čiji je poluprečnik jednak poluprečniku sfere. Slično važi i za loptu, s tim što je presek *veliki krug* (Slika 30.).

Sve ove pojmove možemo videti na sledećoj slici, gde je svaki od njih obojen različitom bojom, zbog lakšeg prepoznavanja npr. šta je donja polusfera, velika křižna linija…



Slika 31. Lopta i njeni preseci

6.3 Vektori u koordinatnom sistemu

Svakodnevno se susrećemo sa veličinama za čije je određivanje potreban samo jedan broj, na primer udaljenost, površina, zapremina, temperatura… Njih zovemo *skalarnim* veličinama, tj. ***skalarima***. Međutim, postoje veličine koje ne možemo potpuno odrediti brojem, već je potrebno zadati i njhov pravac, smer i intenzitet. Njih zovemo *vektorskim veličinama* – ***vektorima***.

6.3.1. Pojam vektora

Neka su date dve tačke u ravni A i B koje određuju duž AB. Neka je A početna tačka duži a B krajnja. Ovako smo uveli orjentaciju duži AB. Uređeni par (A,B) zove se orjentisana duž i označava se sa $\overrightarrow{AB}$. Rastojanje tačke A od tačke B zove se intenzitet vektora i označava se sa $\overrightarrow{|AB|}$.

6.3.2. Operacije sa vektorima

Sabiranje i oduzimanje vektora

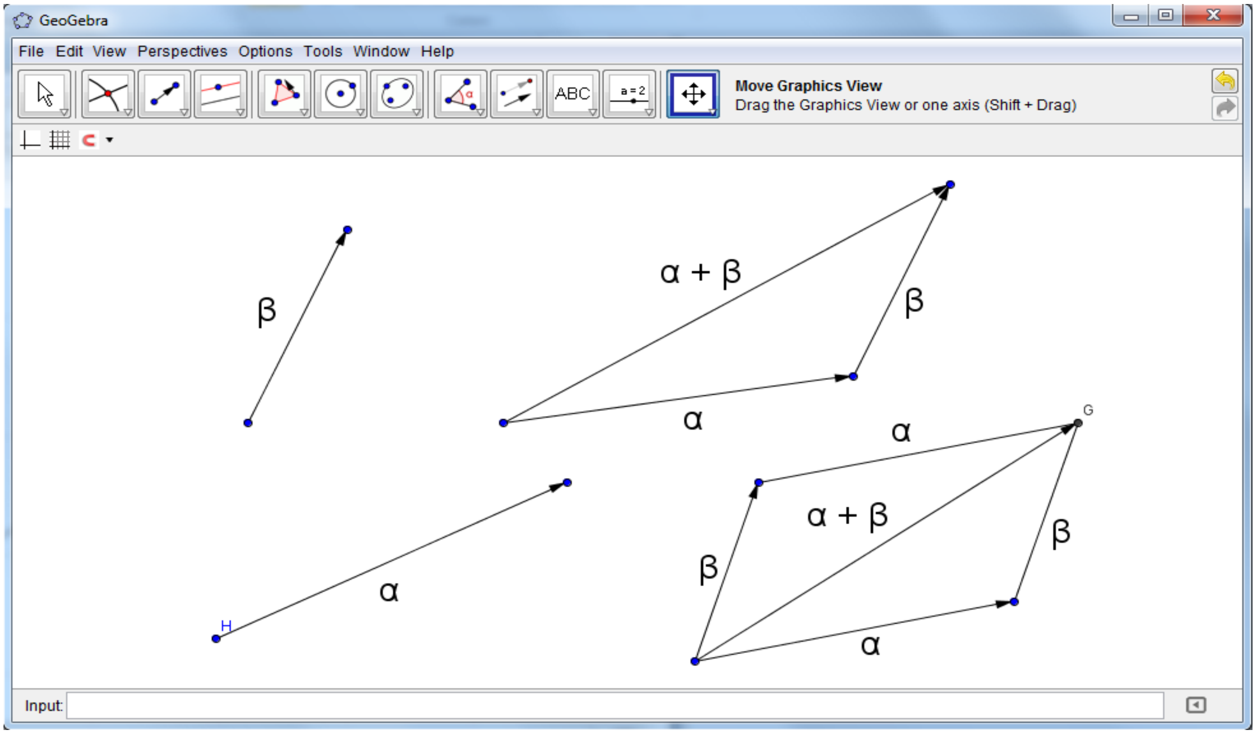
Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ vektori. Sabiranje vektora vrši se po pravilu trougla i pravilu paralelograma. Svojstva operacije sabiranja:

a) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$,
b) $\vec{a} + 0 = 0 + \vec{a} = \vec{a}$,
c) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \overrightarrow{(-a)} + \vec{a} = \vec{0}$,
d) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

Oduzimanje vektora se definiše kao operacija sabiranja sa suprotnim vektorom:

$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Na Slici 32. imamo primer sabiranja vektora $\vec{\alpha}$ i $\vec{\beta}$. Vektore konstruišemo pomoću alatke *Vector between Two Points*.



Slika 32. Sabiranje vektora

Množenje vektora skalarom (brojem)

Neka je $\vec{a}$ vektor i λ realan broj. Množenje vektora skalarom je funkcija koja paru (λ,$\vec{a}$) pridružuje vektor λ$\vec{a}$.

Za vektor λ$\vec{a}$ važi:

1) $\vec{a}$ i λ$\vec{a}$ su kolinearni (imaju isti ili paralelan nosač)
2) $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| * |\vec{a}|$,
3) $\lambda > 0$ $\vec{a}$ i λ$\vec{a}$ su isto orjentisani ,
   $\lambda < 0 \Rightarrow \vec{a}$ i λ$\vec{a}$ su suprotno orjentisani.
   Svojstva operacije množenja skalarom:

a) $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$,
b) $(\lambda + \mu)\,\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$,
c) $(\lambda\mu)\,\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a}) = \lambda\mu\vec{a}$,
d) $1 * \vec{a} = \vec{a}$, $(-1) * \vec{a} = -\vec{a}$, $0 * \vec{a} = \vec{0}$.

Skalarni prozvod dva vektora

Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dva vektora, i φ ugao između njih. *Skalarni proizvod* vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, u oznaci $\vec{a} * \vec{b}$, definiše se pomoću jednakosti:

$$\vec{a} * \vec{b} = |\vec{a}| * |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}| * |\vec{b}| \cos \varphi \ .$$

S obzirom da je cos 90 ° = 0, na osnovu definicije skalarnog proizvoda sledi: ako su dva vektora međusobno ortogonalna, tada je njihov skalarni proizvod jednak nuli, tj.

$$\vec{a} \perp \vec{b} <=> \vec{a} * \vec{b} = 0 \ .$$

Osobine skalarnog proizvoda:

a) $\vec{a} * \vec{b} = \vec{b} * \vec{a}$,
b) $\vec{a} * (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} * \vec{b} + \vec{a} * \vec{c}$,
c) $\lambda*(\vec{a} * \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) * \vec{b} = \vec{a} * (\lambda\vec{b})$,
d) $\vec{a} * (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} * \vec{b} + \vec{a} * \vec{c}$,
e) $\vec{0} * \vec{a} = \vec{0}$.

Vektorski proizvod vektora

Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dva vektora i φ ugao između njih. *Vektorski proizvod* dva nekolinearna vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, u oznaci $\vec{a} \times \vec{b}$, je vektor čiji je:

a) intenzitet $\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin \varphi$,
b) pravac normalan na ravan određenu vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$,
c) smer takav da tri vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ tim redom čine desni sistem vektora.

Osobine vektorskog proizvoda:

a) $\vec{a} \times \vec{a} = 0$,
b) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$,
c) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$,
d) $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda\, (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a}\, (\lambda\vec{b})$.

Mešoviti proizvod

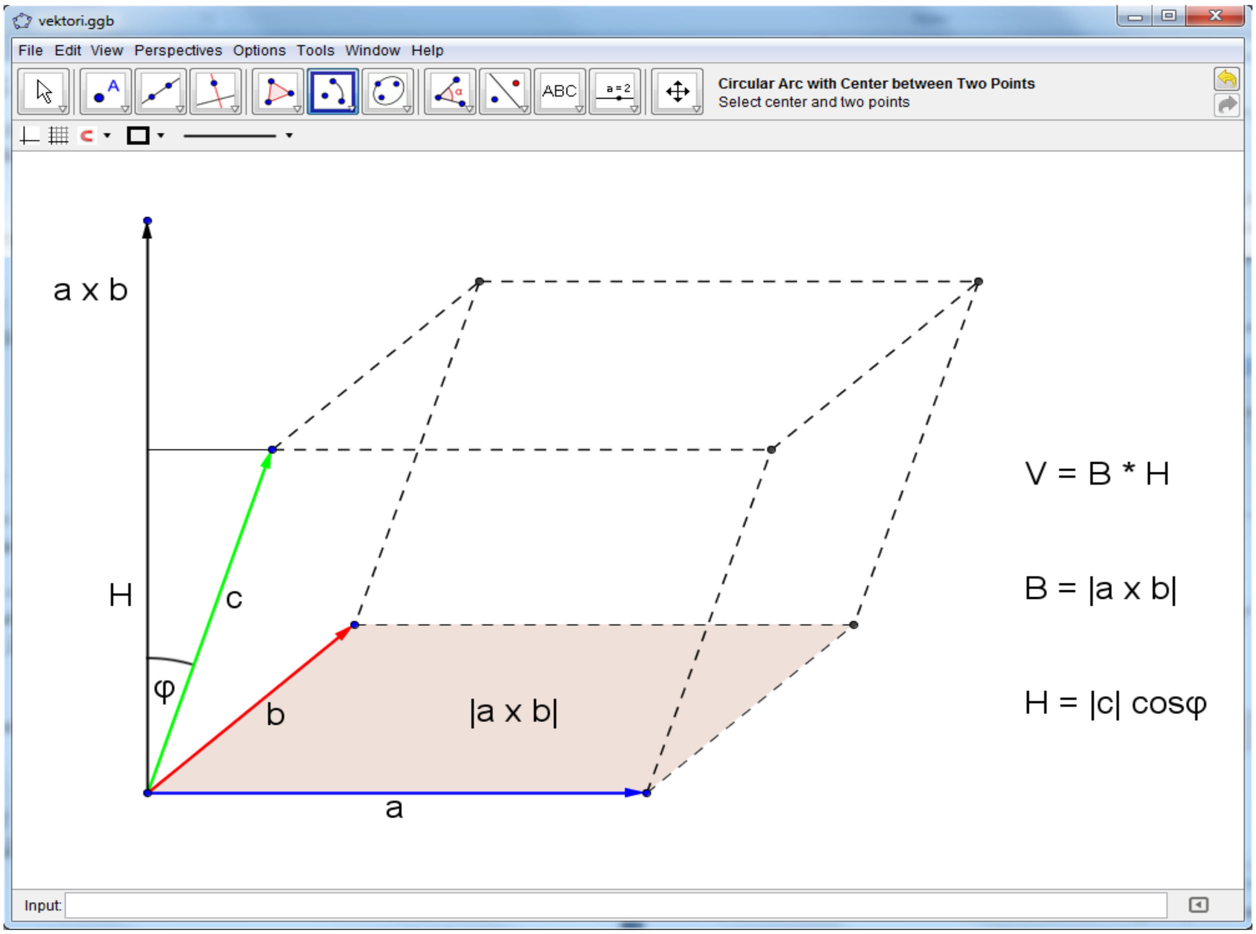
Neka su data tri vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$. Ako prvo vektorski pomnožimo vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, odnosno odredimo vektor $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$, a zatim tako dobijeni vektor pomnožimo skalarno sa vektorom $\vec{c}$, dobijamo *mešoviti proizvod* tri vektora:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) * \vec{c} \ .$$

Geometriska interpretacija mešovitog proizvoda

Neka su $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ zadati nekomplanarni (ne pripadaju istoj ravni) vektori i $\varphi = \angle(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})$ ugao između vektora $(\vec{a} \times \vec{b})$ i $\vec{c}$. Na osnovu definicije vektorskog proizvoda vektora, vidimo da je površina osnove $B = |\vec{a} \times \vec{b}|$, dok se sa Slike 33. vidi da je visina $H = |\vec{c}| \cos \varphi$, gde je φ ugao koji vektor $\vec{c}$ zaklapa sa vektorom $\vec{a} \times \vec{b}$. Odatle sledi da je:

$$V = B * H = |\vec{a} \times \vec{b}| * |\vec{c}| \cos \varphi = |(\vec{a} \times \vec{b}) * \vec{c}| \ .$$



Slika 33. Geometriska interpretacija mešovitog proizvoda

6.4. Analitička geometrija u ravni

Predmet ove nastavne jedinice je analitička geometrija u ravni i ona se u srednjim skolama izlaže klasično. Njoj se pristupa pomoću koordinata što omogućuje da se razni likovi opišu algebarskim jednačinama, nejednačinama ili sistemom jednačina i nejednačina i dovodi do svojevrsne sinteze geometrije i algebre. Kada se radi analitička geometrija u prostoru, izvođenja su komplikovanija, dok su izvođenja u ravni sasvim jednostavna. Već nakon ovog uvoda i prethodog dela ovog rada možemo pretpostaviti koliko se može upotrebiti GeoGebra i unaprediti nastava.

Kao što znamo, u GeoGebri imamo dva osnovna prikaza, algebarski i grafički. Grafički nam služi da konstruišemo i crtamo različite geometriske likove, dok algebarski služi za algebarsku prezentaciju tih likova, odnosno njihovih jednačina. U daljem tekstu govorićemo o pravima, kružnim linijama, krivama drugog reda i njihovim uzajamnim odnosima, kao i o njihovim konstrukcijama u GeoGebri.

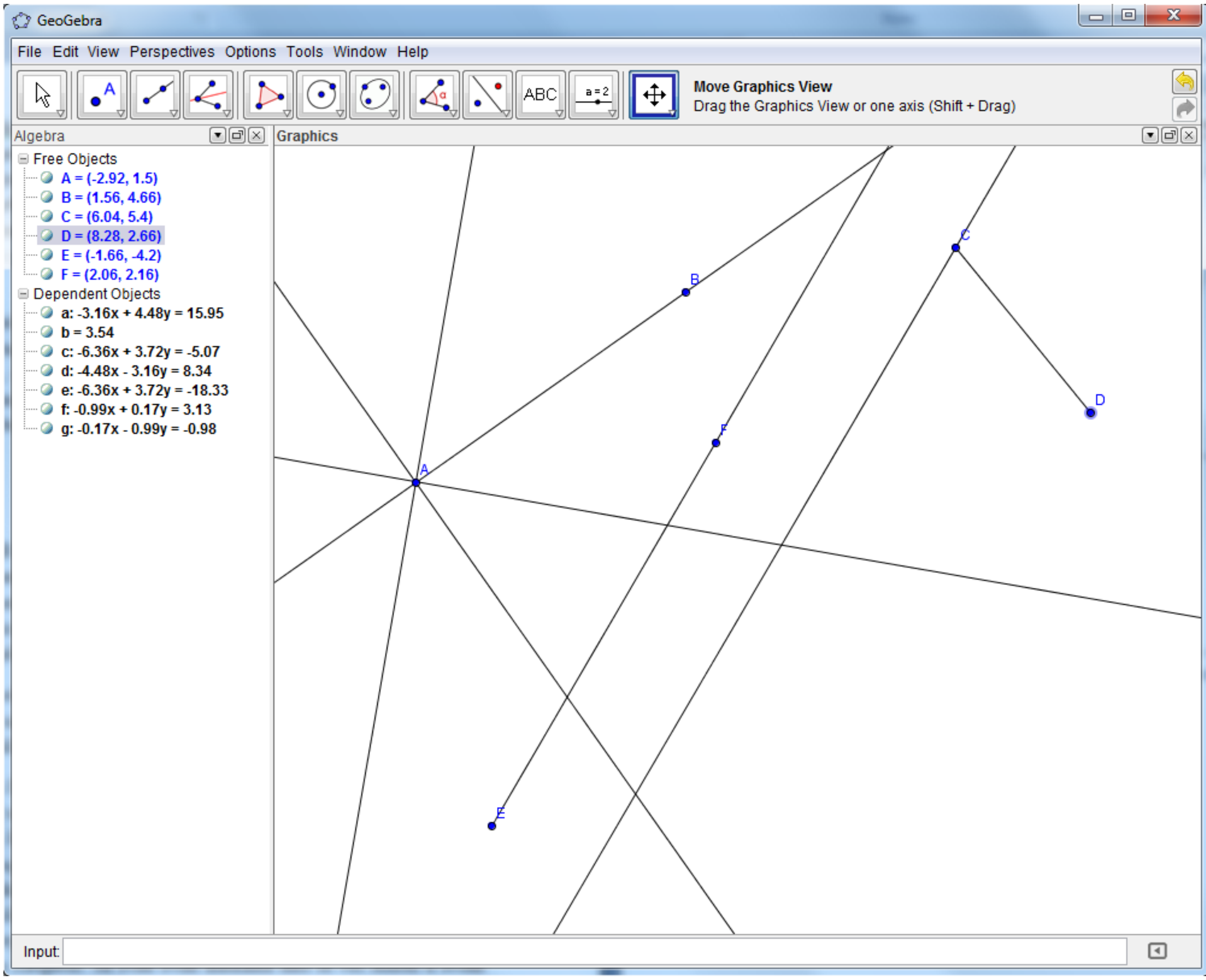
6.4.1. Duž i prava

Kao što je poznato, duž AB definiše se kao skup svih tačaka između datih tačaka A i B, uključujući i njih. U ovom radu smo se već susreli i sa alatkom za konstrukciju duži *Segment between Two Points* koju smo često koristili. Pored ove alatke postoji i alatka *Segment with Given Length from Point* koja funkcioniše tako što unesemo jednu tačku i nakon toga će nam se otvoriti prozorčić u koji treba da upišemo dužinu duži.

Pojam prave je jedan od osnovnih pojmova elementarne geometrije. U nekim zasnivanjima geometrije prava se uzima kao pojam koji se ne definiše, a u nekim se definiše pomoću pojmova *tačka* i *između*. Ali u srednjim školama o tome nema puno govora.

Neka su date dve tačke A i B u koordinatnom sistemu. Tim tačkama potpuno je određena prava AB. Slično kao i kad je duž u pitanju, i sa konstrukcijom prave smo se dosta puta susreli u ovom radu. Za njenu konstrukciju koristimo alatku *Line through Two Points*. Postoji i alatka za konstrukciju poluprave *Ray through Two Points*, koja funkcioniše slično kao i alatka za konstrukciju prave. Pored ovih alatki postoje i druge za konstrukciju pravih, kao što su alatka za konstrukciju paralelne prave *Parallel Line*, alatka za konstrukciju normale *Perpendicular Line*, za konstrukciju bisektrise duži *Perpendicular Bisector*, bisektrise ugla *Angle Bisector*, tangenti na kružne linije i krive drugog reda *Tangents*. Sa svim ovim alatkama smo se već susreli u ovom radu i objasnili kako koja funkcioniše, tako da ovde nećemo ponovo pisati o njima.

Naravno, sve ove prave možemo unositi i njihovim jednačinama, koje bismo pisali u *Input Bar*-u, a njihova konstrukcija bi nam se pojavila u grafičkom prikazu. I o ovome je bilo reči u ovom radu, u delu o softverskom paketu GeoGebra.



Slika 34. Neke konstrukcije pravih i njihove jedančine

Kao što smo već rekli, pri konstrukcijama različitih likova, pojavljuju nam se objekti, u ovom slučaju tačke, koji mogu biti zavisni (*Free Objects*) i nezavisni (*dependent Objects*). Nezavisni objekti su obično plave boje i njih možemo pomerati po površini za crtanje. Uzajamno sa njima pomeraće se i drugi objekti koji od njih zavise. Na primer, ako pomeramo neku pravu, automatski će se pomerati i prava koja je njoj paralelna i slično.

Znamo da jednačina prave ima oblik:

$$\boldsymbol{ax + by + c = 0},$$

i ovo je *opšti oblik* jednačine prave. Pored ovog oblika postoji i eksplicitni oblik jednačine prave i on izgleda ovako:

$$y = kx + n\ .$$

Ako bi smo umesto a i b, odnosno k i n, upisali bilo koje realne brojeve i takvu jednačinu upisali u bar za unošenje, u grafičkom prikazu će nam se pojaviti odgovarajuća prava, a u algebarskom će se pojaviti jednačina te prave.

Naravno, pored ovih oblika jednačine prave postoje i drugi oblici (*segmentni, normalni*...) ali ova dva su nam sasvim dovoljna za konstrukciju pravih u GeoGebri.

6.4.2. Kružna linija

Kao što je poznato, **kružna linija** (kružnica) je skup tačaka u ravni sa osobinom da su sve tačke tog skupa na jednakom rastojanju *r* od jedne stalne tačke te ravni C, koja se naziva *centar* (središte) kružne linije. Kružna linja je određena centrom i pozitivnim brojem (poluprečnikom).

Poslednja rečenica u prethodnom pasusu opisuje jednu od alatki koja služi za konstrukciju kruga, a to je *Circle with Center and Radius*. Unesemo tačku i u prozorčić koji nam se pojavi upišemo dužinu poluprečnika. Sledeća je *Circel with Center through Point*, koju smo do sad više puta koristili u prethodnim poglavljima ovog rada. Vidimo da u nazivima ovih alatki piše reč Circle, što znači krug, ali to ne bi trebalo da zbuni korisnike GeoGebre jer kada konstruišemo kružnicu, u isto vreme konstruišemo i krug. Ako imamo date tri tačke i želimo da konstruišemo kružnicu koja prolazi kroz sve njih, koristimo alatku *Circle through Three Points*. Imamo alatku za konstrukciju polukružne linije koja sadrži dve tačke, *Semicircle through Two Points*, kružni luk, *Circuar Arc with Center through Two Points*.

Neka je *0xy* koordinatni sistem u ravni i neka je u tom sistemu data tačka C = (p, q) i broj r $>$ 0. Jednostavno ćemo izvesti jednačinu kružnice čiji je centar tačka C, a poluprečnik je jednak r. Neka je M = (x, y) tačka koja pripada ravni tako da je | CM | = r, tj.

$$\sqrt{(x-p)^2 + (y-q)^2} = r,$$

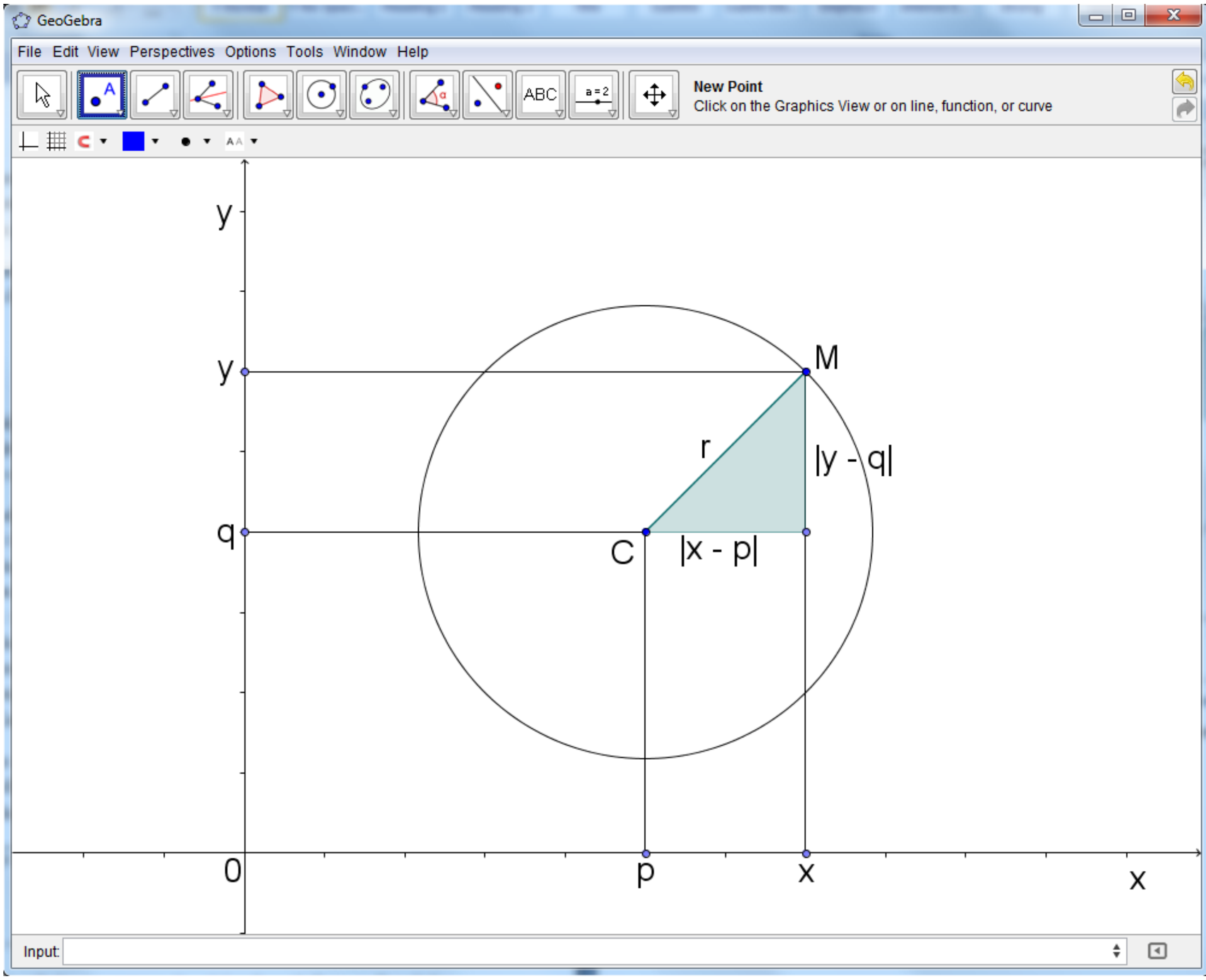
odakle se posle kvadriranja dobija:

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2.$$

Poslednja jednačina je jednačina kružne linije sa centrom (p, q) i poluprečnikom r. Specijalno, ako je p = q = 0, tada je koordinatni početak centar kružnice i jednačina ima oblik:

$$x^2 + y^2 = r^2 .$$

Na Slici 35. možemo videti kružnicu opisanu u prethodnom delu teksta:



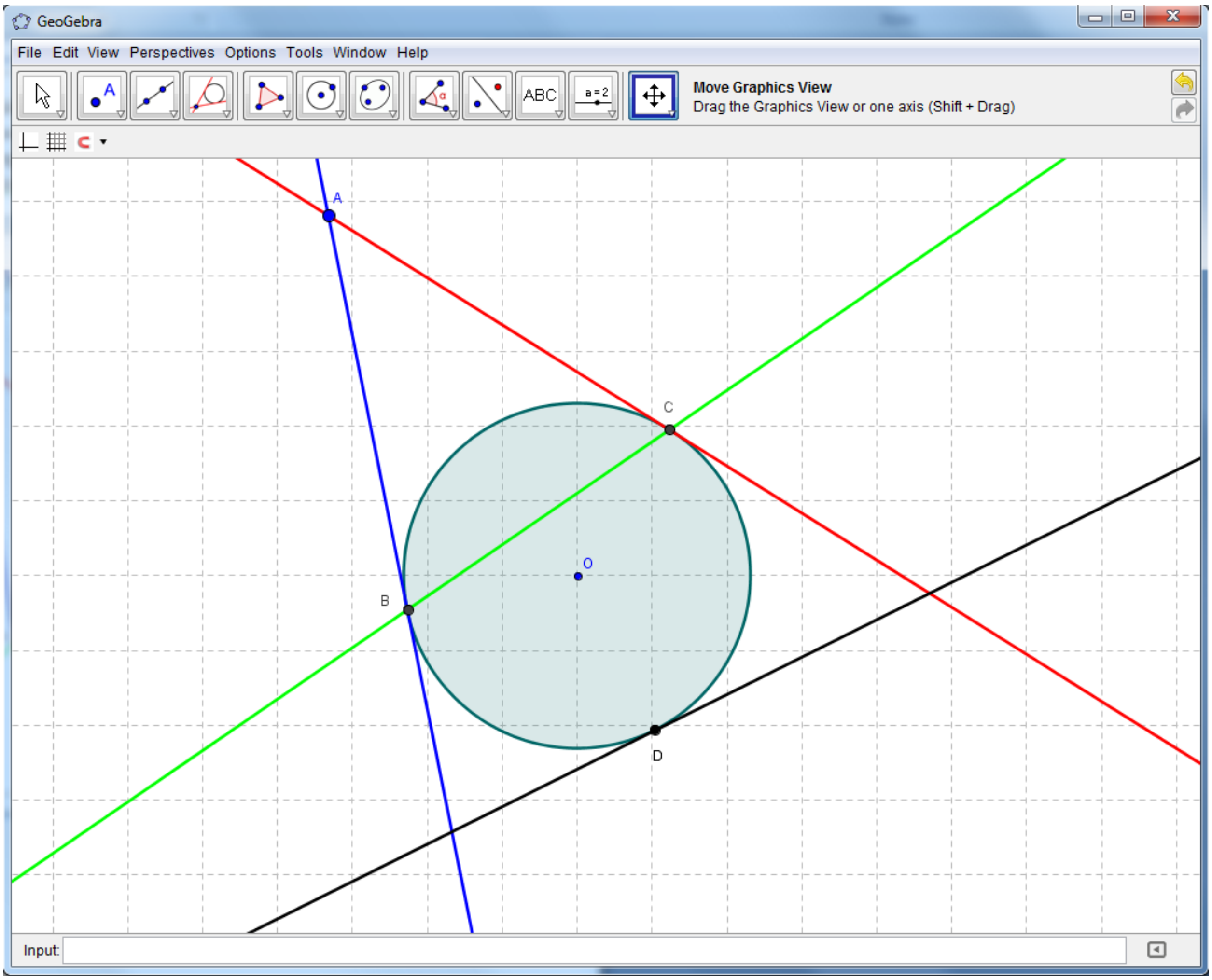
Slika 35. Kružnica sa centrom u (p, q) i poluprečnikom r

Razmotrićemo i odnos **kružne linije i prave**. Poznato je iz elementarne geometrije da za uzajamni položaj prave i kružnice u ravni postoje tri mogućnosti:

a) prava i kružnica imaju dve zajedničke tačke; ovaj slučaj imamo kada je rastojanje od centra kružne linije do prave manje od njenog poluprečnika,
b) prava i kružna linja nemaju zajedničkih tačaka; ovaj slučaj imamo kada je rastojanje od centra kružne linije do prave veće od njenog poluprečnika,
c) prava i kružnica imaju jednu zajedničku tačku; ovaj slučaj imamo kada je rastojanje od centra kružnice do prave jednak njenom poluprečniku.
U poslednjem od ova tri slučaja kažemo da je prava ***tangenta*** kružne linije.

Kada u GeoGebri konstruišemo uzajamne odnose prave i kružnice koristimo uglavnom alatke koje smo več opisali u prethodnom delu rada. Kada hoćemo da konstruišemo tangentu na kružnu liniju, koristimo alatku *Tangents*. Tagente možemo da konstruišemo iz tačke koja je van kružne linije i u tački dodira. Korišćenje ove alatke je vrlo jednostavno.

Na Slici 36. možemo videti tangente na kružnu liniju iz tačke van nje i kroz tačku na njoj, kao presek kružne linije i prave koja prolazi kroz tačke dodira tangenti i kružnice.



Slika 36. Tangente na kružnu liniju

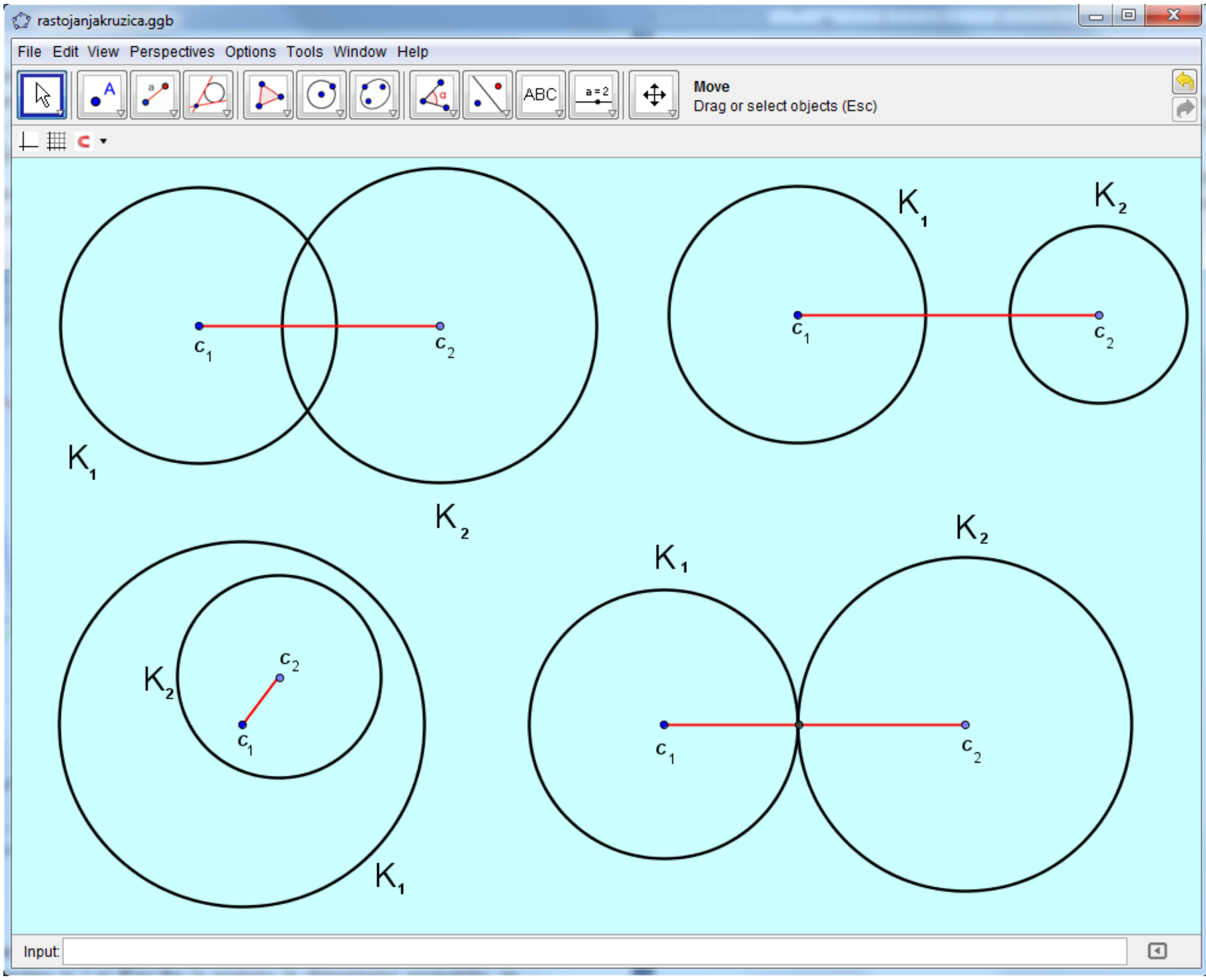
Ostaje nam još da razmotrimo odnos **dve kružne** linije. Neka su K_1 i K_2 dve kružnice sa centrima C_1 i C_2, i poluprečnicima r_1 i r_2. Kao što je poznato iz elementarne geometrije, za uzajamni položaj tih linija postoje sledeće mogućnosti:

a) kružne linije K_1 i K_2 imaju dve zajedničke tačke. Ovaj slučaj imamo kada je rastojanje između centara C_1 i C_2 a veće od njihove ralike,
b) kružne linije K_1 i K_2 nemaju zajedničkih tačaka. Ovaj slučaj imamo kada je jedna kružna linija zvan druge, tj. rastojanje između centara C_1 i C_2 veće između zbira dva

poluprečnika r_1 i r_2, ili kada je jedna kružna linja unutar druge, tj. rastojanje između centara manje od raylike dva poluprečnika,

c) kružne linije K_1 i K_2 imaju samo samo jednu zajedničku tačku. Ovaj slučaj imamo ako se kružne linije dodiruju spolja, tj. rastojanje između centara C_1 i C_2 je jednako zbiru poluprečnika r_1 i r_2, ili ako se dodiruju iznutra, tj. rastojanje između centara je jednako razlici dva poluprečnika.

Na Slici 37. možemo videti neke uzajamne položaje kružnih linija.

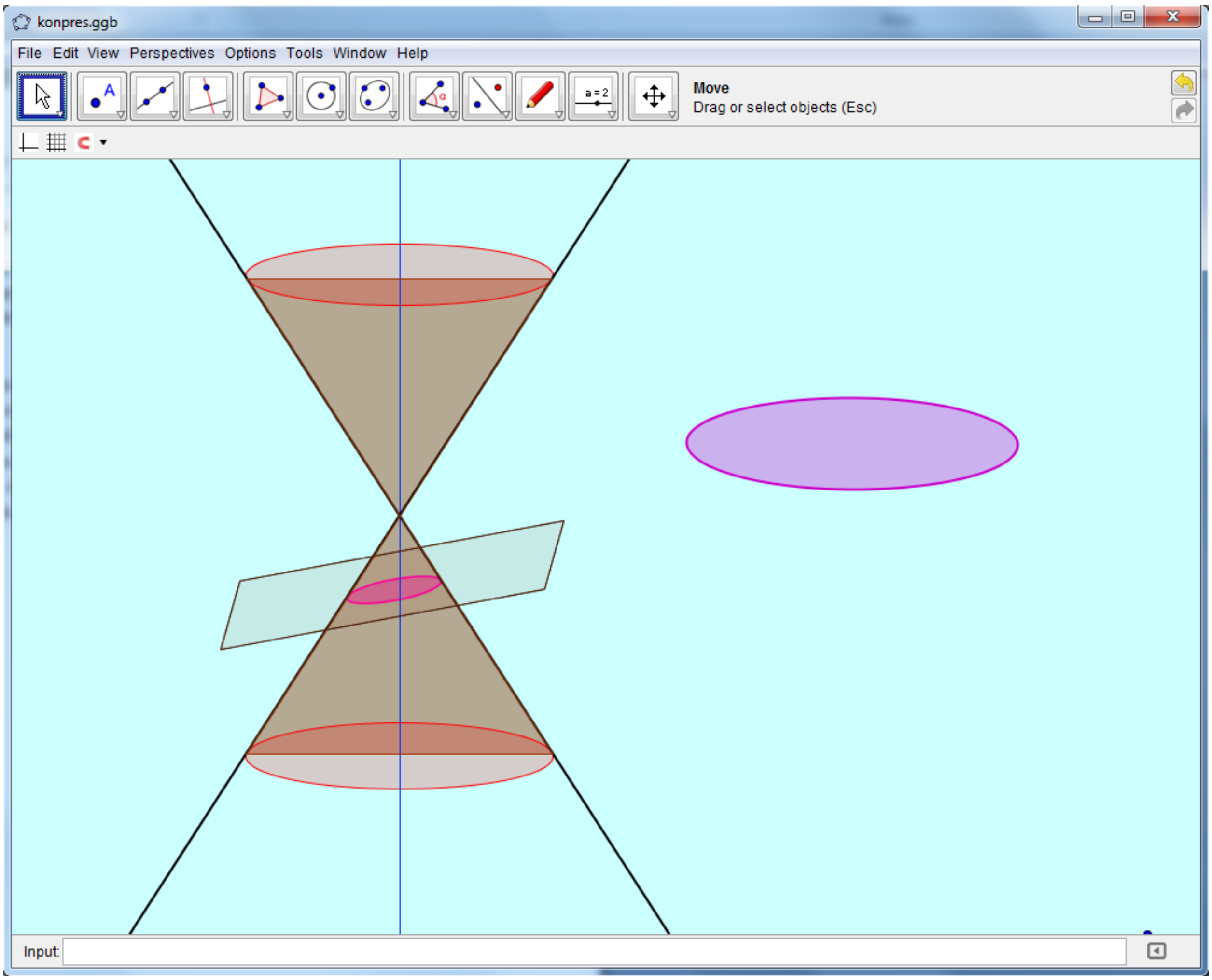


Slika 37. Uzajamni položaj kružnica

6.4.3. Krive drugog reda

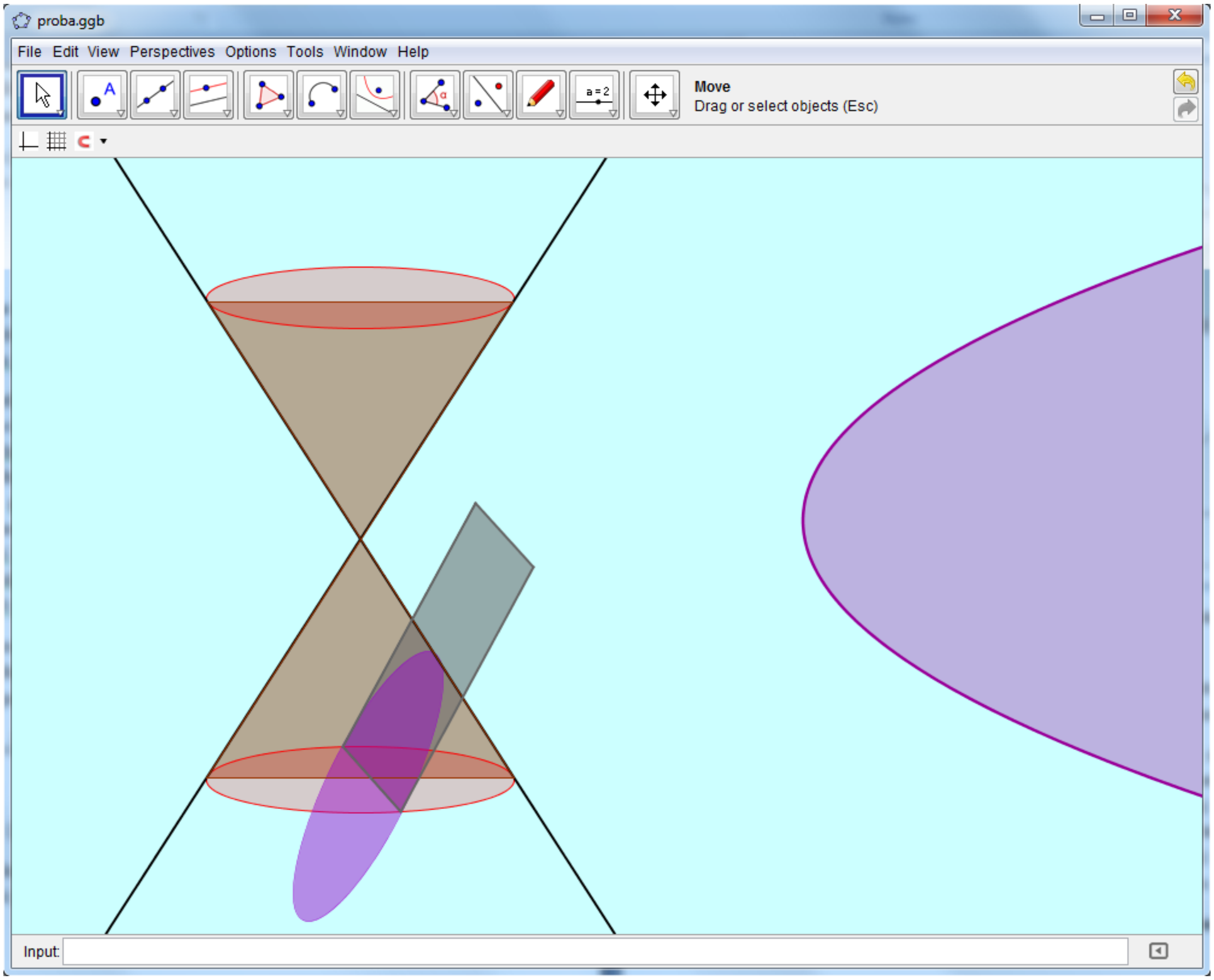
U ovom radu, u poglavlju o obrtnim telima, smo već govorili o konusnim površima. Sada ćemo reći nešto o ***konusnim presecima***. Opšte ime konusni presek potiče od toga što se ti skupovi tačaka (te krive linije) mogu dobiti kao preseci neke ravni i konusne površi. Imamo sledeće činjenice:

a) ako ravan seče sve izvodnice konusa i nije normalna na njegovu osu, odgovarajući presek je elipsa (Slika 38.). Specijalno, ako je ravan normalna na osu konusa, presek je kružna linija,



Slika 38. Ravan seče sve izvodnice konusne površi - elipsa

b) ako je ravan paralelna sa jednom izvodnicom konusa, presek je parabola (Slika 39.). Specijalno, ako ravan sadrži tačno jednu izvodnicu konusa, presek je prava.



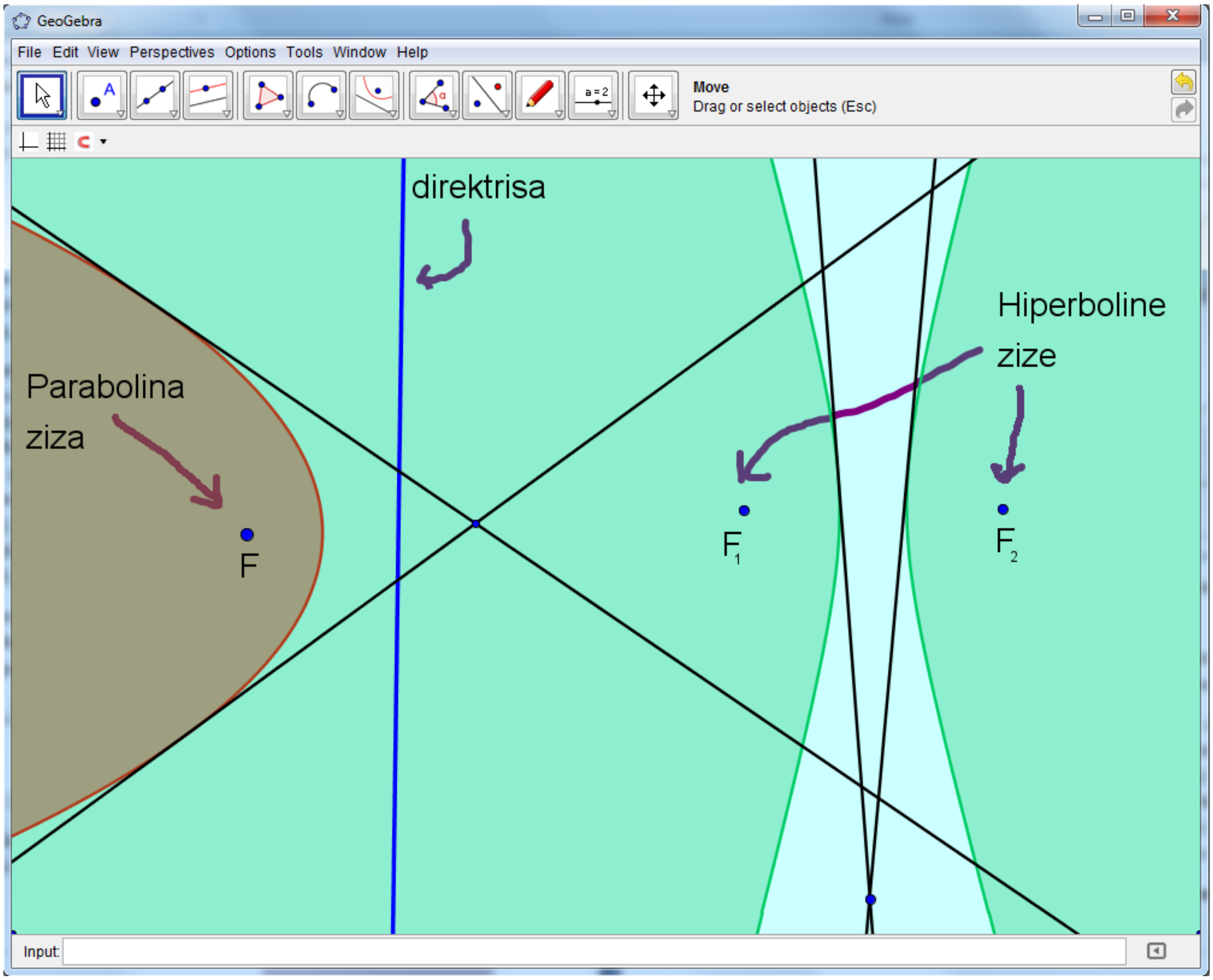
Slika 39. Ravan je paralelna sa jednom izvodnicom konusa - parabola

c) ako je ravan paralelna sa dve izvodnice konusa, presek je hiperbola. Specijalno, ako ravan sadrži dve izvodnice konusa, presek su dve prave.

Za konstrukcije krivih drugog reda imamo tri alatke: *Ellipse*, *Parabola* i *Hyperbola*. Kada konstruišemo elipsu, prvo unesemo dve žiže (fokuse) a zatim tačku na elipsi. Za konstrukciju parabole potrebno je prvo da konstruišemo direktrisu, odnosno neku pravu, u odnosu na koju ćemo konstruisati parabolu. Prvo kliknemo na tu pravu, a zatim bilo gde na radnoj površini izvan nje i pojaviće se parabola. Kada konstruišemo hiperbolu, koristimo sličan postupak kao i pri konstrukciji elipse, samo što će nam se umesto elipse pojaviti hiperbola.

Kao i u slučaju kružne linije, ispitivanje uzajamnog položaja prave i krivih drugog reda svodimo na to da li postoje zajedničke tačke tih linija. Naravno, opet imamo tri slučaja: kada prava i kriva drugog reda nemaju zajedničkih tačaka, kada prava seče krivu drugog reda u dvema različitim tačkama, i kad prava i kriva drugog reda imaju tačno jednu zajedničku tačku. U poslednjem slučaju ovakvu pravu zovemo ***tangenta***. Sve ove konstrukcije izvodimo slično kao i konstukcije vezane za uzajamni položaj kružne linje i prave. Koristimo alatku *Tangents*, prvo kliknemo negde van krive drugog reda da odredimo tačku kroz koju nam prolazi tangenta a zatim na krivu drugog reda i pojaviće nam se tangente.

Na Slici 40. možemo videti primer konstrukcije tangenti na parabolu i hiperbolu.



Slika 40. Tangente na krive drugog reda

Naravno, pomerajući nezavisne objekte (u ovom slučaju plave tačke), možemo videti razne položaje ovih krivih, kao i preseke između njih.

7. Zaključak

Matematika svakako jeste jedan od najtežih predmeta u osnovnim i srednjim školama, i predmet kojeg se učenici najviše plaše. Zbog toga bi posebnu pažnju trebalo posvetiti razbijanju tog straha, jer će se učenici osećati slobodnije i prijatnije na samom času, što bi omogućilo bolju komunikaciju između njih i nastavnika. Samim tim, učenici će biti znatiželjniji i neće im biti problem da pitaju stvari koje im nisu jasne što će uticati da njihovo znanje bude sve bolje.

Uvođenje GeoGebre u škole i unapređivanje nastave je jedan od bitnijih koraka u učenju matematike. Klasičan način predavanja većini učenika ne privlači pažnju. Kako vreme prolazi, zbog tehnoloških inovacija i sveprisutnijih kompjuterskih tehnologija, deca se sve više navikavaju na korišćenje računara, pa sami tim očekuju da njihovo prisustvo u školama bude veće. Zato bi korišćenje GeoGebre na časovima na neki način rešilo ovaj problem i izazvalo bi veće interesovanje i podsticalo učenje. Razne konstrukcije i grafičke animacije koje bi se izvodile, navele bi decu na pomisao da i oni to urade. Zadavanje domaćih zadataka čije bi slike morali da obrade u Geogebri, povećalo bi broj učenika koji bi ih radili.

Što veća upotreba ovog softvera bila bi od velike koristi, jer GeoGebra nudi odličan način predstavljanja, što ubrzava objašnjavanje učenicima i olakšava nastavu. Još jedan veliki plus pri ovakvom načinu prezentacije gradiva je i to što će učenicima biti zanimljivije da prate nastavu, a samim tim će i više naučiti na časovima, što je veoma bitno u nastavi svakog predmeta a posebno matematike.

8. Literatura

[1] Jovan D. Kečkić, Matematika sa zbirkom zadataka za 3. razred srednje škole, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 2001.

[2] Markus Hohenwarter i Judith Preiner, GeoGebra Pomoć, Standardni priručnik 3.0, www.geogebra.org, 2007

[3] Markus Hohenwarter i Judith Hohenwarter, GeoGebra Help, Official manual 3.2, www.geogebra.org, 2009

[4] Judith and Markus Hohenwarter, Introduction to GeoGebra4, www.geogebra.org, 2011

[5] Dušan Đorđević, Pedagoška psihologija, Đečije novine, Gornji Milanovac, 1982.

[6] http://wiki.geogebra.org

[7] http://www.geogebra.matf.bg.ac.rs