UNIVERZITET U BEOGRADU

MATEMATIČKI FAKULTET

INVERZIJA U ODNOSU NA ELIPSU

MASTER RAD

Autor
Bojana Pavlović

Mentor
dr Miroslava Antić

Beograd
2019.

Sadržaj

Uvod

Inverzije zbog više njihovih osobina možemo smatrati svojevrsnom generalizacijom refleksija. U ovom radu biće definisana inverzija u odnosu na krug i elipsu, sa naglaskom na elipsu.

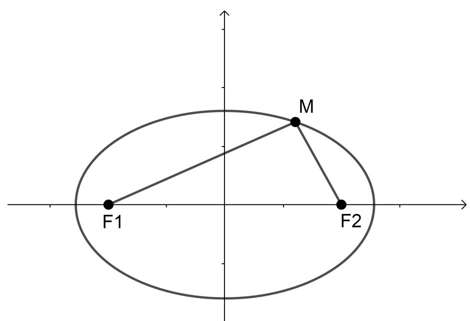
Najpre ćemo definisati inverziju u odnosu na krug. Pokazaćemo da inverzija tačke unutar kruga slika u tačke van kruga i obratno. Navešćemo teoremu koja govori o efektu inverzije na prave i krugove. Predstavićemo sliku prave i kruga u zavisnosti od njihovog položaja sa krugom inverzije. Dokazaćemo teoremu koja tvrdi da inverzija čuva uglove između krivih. U nastavku ćemo se baviti inverzijom u odnosu na elipsu.

U poslednjem poglavlju predstavićemo inverziju u odnosu na elipsu, njene osobine, kao i invarijante ovog preslikavanja. Takođe će u radu biti prikazane slike nekih ravanskih geometrijskih likova pri inverziji u odnosu na elipsu. Sve slike su uradjene u programskom paketu Geogebra.

1 Elipsa

Definicija 1.1 Pod elipsom podrazumevamo skup svih tačaka u ravni, takvih da je za svaku od njih zbir rastojanja od dveju datih tačaka konstantan.

Označićemo date tačke sa F_1 i F_2 i zvaćemo ih **žižama elipse**. Neka je rastojanje između tačaka F_1 i F_2 jednako $2c$ $(c \geqslant 0)$. Za $c = 0$, tj. ako je $F_1 \equiv F_2$, dobijamo slučaj kružnice. Uzmimo, dalje, da žiže F_1 i F_2 pripadaju $x-$ osi i da su simetrične u odnosu na koordinatni početak, tj. uzmimo da je $F_1(-c, 0)$ i $F_2(c, 0)$. Označimo sa $2a$ $(a > 0)$ zbir rastojanja proizvoljne tačke elipse od žiža F_1 i F_2, koji je prema definiciji elipse konstantan.



Sl. 1.1

Neka je M proizvoljna tačka elipse. Kako je, prema pretpostavci, $F_1M + F_2M = 2a$, onda po nejednakosti trougla važi $2a = F_1M + F_2M \geqslant F_1F_2 = 2c$, te je $a \geqslant c$. Za $a = c$ imamo jednakost $F_1M + F_2M = F_1F_2$. Taj ekstremni slučaj ćemo isključiti jer tada tačka M pripada duži F_1F_2. Ubuduće ćemo uzimati uvek da je $a > c$.

Odnos $\frac{c}{a}$ nazivamo **ekscentricitetom elipse** i označavamo sa e, tj. $e = \frac{c}{a}$. Taj broj je, prema prethodnom, uvek manji od 1. Za $c = 0$, tj. u slučaju kružnice, dobija se da je $e = 0$.

Odredimo sada jednačinu elipse. Neka je $M(x, y)$ proizvoljna tačka, koja pripada elipsi. Rastojanje tačke M od žiža F_1 i F_2 označimo, redom, sa r_1 i r_2. Tada je:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Pošto tačka $M(x, y)$ pripada elipsi, to je:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a,\\
&\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2},\\
&(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2,\\
&2xc=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}-2xc,\\
&a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-xc,\\
&a^2(x^2-2cx+c^2)+a^2y^2=a^4-2xca^2+x^2c^2,\\
&(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2),
\end{aligned}$$

odakle dobijamo jednačinu elipse:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{1}$$

gde je $b=\sqrt{a^2-c^2}$.

Oblik (1) je **kanonski oblik jednačine elipse**.

Stav 1.1 Jednačina tangente elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ tački dodira $T(x_0, y_0)$ je prava čija je jednačina: $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$.

Dokaz: Ako je jednačina prave oblika

$$y=kx+n, \tag{2}$$

tada zajedničke tačke imaju $x-$koordinatu koja je rešenja odgovarajućeg sistema.

$$\begin{aligned}
&b^2x^2+a^2(kx+n)^2=a^2b^2,\\
&(a^2k^2+b^2)x^2+2kna^2x+a^2(n^2-b^2)=0. \qquad (3)
\end{aligned}$$

Prava je tangentna na elipsu ako imaju tačno jednu zajedničku tačku, odnosno ako je diskriminanta jednaka nuli. Stoga:

$$\begin{aligned}
&a^4k^2n^2=(b^2+a^2k^2)a^2(n^2-b^2),\\
&n^2-b^2-a^2k^2=0.
\end{aligned}$$

Ako prava ima jednačinu $x=c$, onda se na sličan način može pokazati da je ona tangentna u slučaju $c=\pm a$ i to u tački $(\pm a, 0)$, respektivno. Zato, nadalje posmatramo prave čije su jednačine oblika (2). Ako ta prava sadrži tačku (x_0, y_0) ravni, onda važi $y_0=kx_0+n$, odakle je $n=y_0-kx_0$. Dakle:

$$\begin{aligned}
&(y_0-kx_0)^2=b^2+a^2k^2,\\
&y_0^2-2kx_0y_0+k^2x_0^2=b^2+a^2k^2,\\
&k^2(x_0^2-a^2)-2x_0y_0k+(y_0^2-b^2)=0,\\
&k_{1,2}=\frac{x_0y_0\pm\sqrt{x_0^2b^2+a^2y_0^2-a^2b^2}}{x_0^2-a^2},\quad x_0^2\neq a^2.
\end{aligned}$$

Ako tačka pripada elipsi, onda je $b^2x_0^2 + a^2y_0 = a^2b^2$, odakle je $k_1 = k_2 = \frac{x_0y_0}{x_0^2-a^2} = k$ (tada postoji tačno jedna tangenta). Sada je:

$$y - y_0 = \frac{x_0y_0}{x_0^2 - a^2}(x - x_0).$$

Pritom, iz jednačine elipse sledi:

$$\frac{x_0^2}{a^2} - 1 = -\frac{y_0^2}{b^2},$$
$$x_0^2 - a^2 = -\frac{y_0^2a^2}{b^2}.$$

Jednačina tangente je:

$$\begin{aligned} &y - y_0 = -x_0y_0\frac{b^2}{a^2y_0^2}(x - x_0), \\ &yy_0a^2 + xx_0b^2 = x_0^2b^2 + y_0^2a^2 = a^2b^2, \\ &\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1. \end{aligned} \tag{4}$$

Uočimo da za $x_0^2 = a^2$ važi $y_0^2 = 0$, te ne postoji prava sa jednačinom oblika $y = kx + n$, koja sadrži tačku (x_0, y_0) elipse i tangentna je na nju, ali je tada prava $x = x_0$ tangentna na elipsu $\mathcal{E}$ i pritom je njena jednačina, takođe oblika (4).

□

Definicija 1.2 Neka su A, B, C, D četiri različite koplanarne tačke. Dvorazmera je broj $(AB, CD) = \frac{AC\cdot BD}{AD\cdot BC}$, gde AB predstavlja rastojanje od A do B. Ukoliko su tačke A, B, C i D kolinearne, tada su i vektori $\overrightarrow{CA}$ i $\overrightarrow{CB}$ kolinearni, pa postoji broj λ takav da je $\overrightarrow{CA} = \lambda \cdot \overrightarrow{CB}$. Možemo još pisati i $\lambda = \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}}$.
Sada možemo definisati i označenu dvorazmeru za četvorku kolinearnih tačaka:

$$[AB; CD] = \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} : \frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DB}}$$

Uočimo da ona može biti i pozitiva i negativna. S obzirom da su tačke razne, ne može biti jednaka 0 ili 1. Specijalno, kada je $[AB; CD] = -1$, kažemo da su tačke konjugovane ili harmonijski spregnute i pišemo $\mathcal{H}(A, B, C, D)$.

Definicija 1.3 Neka su M, N i $\mathcal{E}$ dve tačke i elipsa u jednoj ravni. Ako prava MN seče elipsu u tačkama P i Q i ako vači $\mathcal{H}(M, N, P, Q)$, onda su M i N harmonijski konjugovane u odnosu na elipsu $\mathcal{E}$.

Teorema 1.2 Neka je N tačka koja ne pripada elipsi $\mathcal{E}$: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Skup tačaka harmonijski konjugovanih sa N u odnosu na $\mathcal{E}$ pripadaju jednoj pravoj.

Dokaz: Neka su (x_0, y_0) koordinate tačke N i $y = kx + n$ prava koja sadrži tu tačku, tj. $n = y_0 - kx_0$. Tada je $x-$ koordinata preseka prave i elipse rešenje jednačine (3). Neka su preseci tačke sa koordinatama (x_1, y_1) i (x_2, y_2). Nađimo koordinate tačke $M(x, y)$ harmonijski spregnute sa N. S obzirom da su tačke kolinearne i ne pripadaju pravoj paralelnoj sa $y-$ osom, dovoljno je posmatrati odnos njihovih $x-$ koordinata. S obzirom da su harmonijski spregnute, važi:

$$\frac{x - x_1}{x - x_2} = -\frac{x_0 - x_1}{x_0 - x_2},$$

odakle je

$$x = \frac{x_0(x_1 + x_2) - 2x_1x_2}{2x_0 - (x_1 + x_2)}. \tag{5}$$

Na osnovu Vijetovih formula iz (3) sledi da je:

$$x_1 + x_2 = -\frac{2a^2kn}{b^2 + a^2k^2}, \quad x_1x_2 = \frac{a^2(n^2 - b^2)}{b^2 + a^2k^2}.$$

Zato je:

$$x = \frac{x_0 \cdot (-\frac{2a^2kn}{b^2+a^2k^2}) - 2 \cdot \frac{a^2(n^2-b^2)}{b^2+a^2k^2}}{2x_0 + \frac{2a^2kn}{b^2+a^2k^2}} = \frac{-a^2knx_0 - a^2n^2 + a^2b^2}{x_0b^2 + x_0a^2k^2 + 2a^2kn}.$$

Ako u prethodnoj relaciji uvrstimo da je $n = y_0 - kx_0$, važiće:

$$x = -\frac{a^2k(y_0 - kx_0) + a^2b^2 - a^2(k^2x_0^2 - 2kx_0y_0 + y_0^2)}{x_0b^2 + x_0a^2k^2 + a^2k(kx_0 - y_0)} = \frac{a^2b^2 - a^2y_0^2 + a^2kx_0}{x_0b^2 + a^2ky_0}.$$

Sa druge strane, $y = kx + n$. Stoga će važiti:

$$y = \frac{b^2}{x_0b^2 + a^2ky_0}(ka^2 + x_0y_0 - kx_0^2).$$

Uočimo da je sada:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = \frac{1}{x_0b^2 + a^2ky_0}(b^2x_0 + kx_0^2y_0 - x_0y_0^2 + ka^2y_0 + x_0y_0^2 - kx_0^2y_0) = 1.$$

Dakle, tačke pripadaju pravoj:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1. \tag{6}$$

Ukoliko je jednačina prave kroz tačku (x_0, y_0) oblika $x = c$, tj. $x = x_0$, slično se može pokazati da tačka spregnuta sa N te prave takođe pripada pravoj (6). $\square$

Definicija 1.4 Pravu (6) nazivamo polarom tačke N u odnosu na elipsu $\mathcal{E}$.

Uočimo da smo u dokazu teoreme koristli Vijetove formule, koje važe i ukoliko su rešenja odgovarajuće kvadratne jednačine konjugovano-kompleksni brojevi.

Zato za svaku tačku M polare možemo smatrati da je harmonijski spregnuta sa N u odnosu na $\mathcal{E}$. U slučaju da MN ne seče $\mathcal{E}$ u realnim tačkama, dobijamo kompleksna rešenja, koja formalno zadovoljavaju uslov harmonijske spregnutosti.

Slično, ako prava MN ima tačno jednu zajedničku tačku sa elipsom $\mathcal{E}$ tada je u (5) $x_1 = x_2$, te je $x = x_1$. U tom slučaju možemo formalno smatrati da je $\mathcal{H}(N, M, M, M)$.

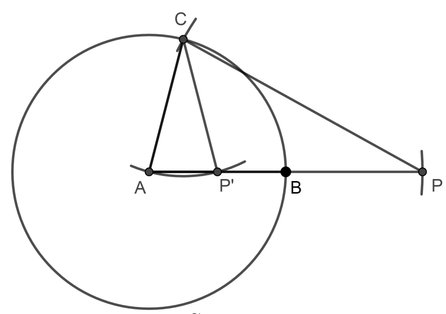
Ako polara (6) seče elipsu u tačkama A i B, tada su A i N spregnute u odnosu na $\mathcal{E}$. Ako bi prava NA imala još jednu zajedničku tačku, A_1, sa $\mathcal{E}$, td. je $A_1 \neq A$, onda bi tačka prave AN spregnute sa N u odnosu na $\mathcal{E}$ bila različita od A. Zato NA i $\mathcal{E}$ imaju tačno jednu zajedničku tačku, pa je AN tangentna na $\mathcal{E}$. Slično važi i za BN.

2 Inverzija u odnosu na krug

Na početku ćemo predstaviti koncept inverzije jednostavnim primerom.

Primer: Neka je p prava određena tačkama A i B. Nađimo središte duži AB koristeći isključivo šestar.

Konstruišimo kružnicu k_1 sa centrom A i poluprečnikom AB, a zatim odredimo tačku P, takvu da je B središte duži AP. Sada konstruišemo kružnicu sa centrom P i poluprečnikom AP, koja seče kružnicu $k_1(A, AB)$ u tački C. Konačno, konstruišemo kružnicu $k(C, AC)$, koja seče pravu AP u tački P'. Tada je P' središte duži AB.



Sl. 2.1

Da bismo se uverili da je P' središte duži AB, primetimo da su trouglovi $\triangle AP'C$ i $\triangle ACP$ slični, kao jednakokraki trouglovi sa istim uglom na osnovici. Odatle sledi:

$\frac{AP'}{AC} = \frac{AC}{AP}$, što povlači da je $\frac{AP'}{r} = \frac{r}{2r}$, odakle sledi $AP'= \frac{r}{2} = \frac{AB}{2}$.

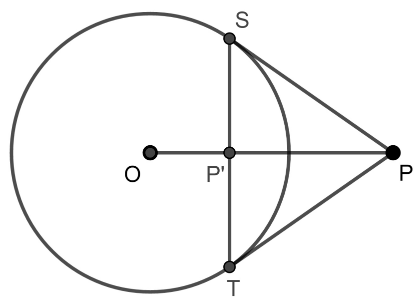
Primetimo da iz $AP = 2r$ i $AP' = \frac{r}{2}$ sledi: $AP \cdot AP' = r^2$.

Ova veza između P i P' zove se **inverzija**.

Definicija 2.1 (**Inverz tačke**) Neka je $C(O, r)$ krug i neka je P tačka različita od O. Tačka P' poluprave OP je inverz tačke P ako je $OP \cdot OP' = r^2$.

Inverziju u odnosu na krug $C(O, r)$, označavaćemo sa $I(O, r^2)$. Krug $C(O, r)$ zovemo **krugom inverzije**, tačku O **centrom inverzije**, r **radijusom inverzije**.

Neka je P tačka ravni kruga $C(O, r)$. Nađimo tačku P' njoj inverznu u odnosu na krug. Pretpostavimo da tačka P pripada spoljašnjosti kruga. Konstruišimo duž OP i tangente PS i PT na krug (slika 2.2). Neka je $\{P'\} = ST \cap OP$. Tada je P' inverz od P .



Sl. 2.2

Da bismo ovo dokazali uočimo da su trouglovi $\triangle OPS$ i $\triangle OSP'$ slični (kao pravougli trouglovi sa istim uglom kod temena O), odakle imamo relaciju: $\frac{OP'}{OS} = \frac{OS}{OP}$, odakle je $OP' \cdot OP = r^2$.

Napomena: Primetimo da bismo mogli sličnim postupkom da konstruišemo inverz tačke koja pripada unutrašnjosti kruga inverzije. Konstruisali bismo normalu na OP u tački P. Ona seče krug $C(O,r)$ u tačkama S i T. Zatim konstruišemo tangente na krug $C(O,r)$ u tačkama S i T, čiji presek je P'.

2.1 Inverzivna ravan

Neka je $C(O,r)$ krug. Svaka tačka ravni kruga C ima inverznu tačku u odnosu na krug C, osim centra kruga C. Tačka O nema inverz i ona nije inverz nijedne tačke.
Da bi se prevazišao ovaj nedostatak, dodaćemo ravni kruga beskonačno daleku tačku W. Sada inverzija slika tačku O u W i obratno. Euklidska ravan zajedno sa beskonačno dalekom tačkom zove se **inverzivna** ili **proširena** ravan. Tačke koje nisu beskonačno daleke zvaćemo **obične tačke**.
Dve euklidski paralelne prave u proširenoj ravni imaju tačno jednu zajedničku tačku, beskonačno daleku, a dve prave u euklidskoj ravni koje se seku u nekoj tački M, u proširenoj ravni imaju tačno dve zajedničke tačke, M i beskonačno daleku.

Sledeće činjenice su direktna posledica definicije inverzije u odnosu na $C(O,r)$:

Teorema 2.1
(1) Tačka P' je inverz tačke P ako i samo ako je P inverz od P', odnosno inverzija je involutivno preslikavanje.
(2) Ako je $OP = kr$, onda je $OP' = \frac{1}{k}r$, gde je $k \in \mathbb{R}^+$.
(3) Inverzija slika svaku tačku van kruga u tačku unutar kruga i obratno.
(4) Svaka tačka kruga slika se u sebe.

Stav 2.2 Neka su P i Q tačke iste poluprave sa temenom O. Neka su P' i Q' inverzi tačaka P i Q pri inverziji u odnosu na krug $C(O, r)$, redom. Pokažimo da, ako je $OQ = k \cdot OP$, tada je $OP' = k \cdot OQ'$.
Dokaz: Neka je r radijus inverzije. Tada je $OP \cdot OP' = r^2$ i $OQ \cdot OQ' = r^2$. Množeći obe strane jednakosti $OQ = k \cdot OP$ sa $OP' \cdot OQ'$ dobijamo sledeće:

$$OP' \cdot OQ' \cdot OQ = OP' \cdot OQ' \cdot k \cdot OP,$$

što povlači da je $OP' = k \cdot OQ'$. □

2.2 Efekat inverzije na euklidske osobine

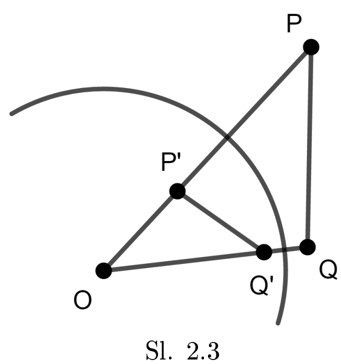
Euklidske osobine su osobine koje se čuvaju pri izometrijskim transformacijama euklidske ravni.

Euklidske osobine čuvaju rastojanje, oblik i veličinu. Napomenimo da je inverz figure G skup tačaka inverznih tačkama te figure.

Prave i krugovi

Najpre ćemo navesti jednu pomoćnu lemu.

Lema 2.3 Neka se pri inverziji $I(O, r^2)$ tačke P i Q slikaju u tačke P' i Q', redom. Tada je $\triangle OPQ \sim \triangle OQ'P'$.
Dokaz: Imamo da je $OP \cdot OP' = r^2 = OQ \cdot OQ'$, što povlači da je $\frac{OP}{OQ} = \frac{OQ'}{OP'}$. Pošto je $\measuredangle POQ = \measuredangle Q'OP'$, tada je $\triangle OPQ \sim \triangle OQ'P'$ (kao trouglovi koji imaju proporcionalne duzine odgovarajućih stranica i jednake uglove zahvaćene njima).



Sl. 2.3

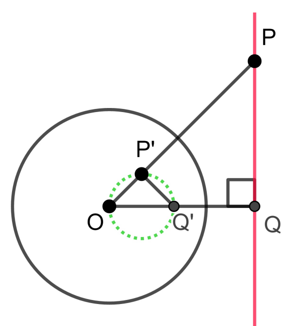
□

Napomena: Primetimo da u sličnim trouglovima iznad važi $\measuredangle OP'Q' = \measuredangle OQP$ i $\measuredangle OQ'P' = \measuredangle OPQ$.

Napomenimo takođe da se i orijentacija prethodnih uglova promenila pri inverziji: $m(\measuredangle OP'Q') = -m(\measuredangle OQP)$ i $m(\measuredangle OQ'P') = -m(\measuredangle OPQ)$ gde je m mera označenog ugla.

Sada ćemo navesti teoremu koja govori o efektu inverzije na prave i krugove.

Teorema 2.4 Pri inverziji $I(O, r^2)$ prave i krugovi se slikaju na sledeći način:
(1) Slika prave kroz O je sama ta prava;
(2) Slika prave koja ne sadrži O je krug koji prolazi kroz O.
(3) Slika kruga koji sadrži O je prava koja ne sadrži O.
(4) Slika kruga koji ne sadrži O je krug koji ne sadrži O.
Dokaz: (1) Sledi iz činjenice da se svaka tačka sa prave kroz O slika u drugu tačku sa iste te prave, izuzev tačaka gde ta prava seče krug, koje se slikaju u sebe.
(2) Neka je p proizvoljna prava koja ne sadrži tačku O. Neka je Q podnožje iz tačke O na pravu p i neka je Q' inverz od Q. Neka je P bilo koja druga tačka sa prave p, različita od Q, i P' inverz od P, kao što je prikazano na slici 2.4. Iz leme 2.3 sledi da je $\triangle OP'Q' \sim \triangle OQP$ i, odatle, $\measuredangle OP'Q' = \measuredangle OQP = 90°$. Stoga, P' je na krugu ω nad prečnikom OQ'. Na sličan način, svaka tačka X sa ω je inverz neke tačke X' sa prave.



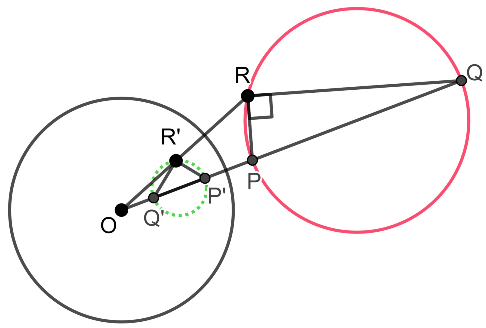
Sl. 2.4

(3) Ovo tvrđenje sledi iz činjenice da se prava koja ne sadrži O slika u krug koji sadrži O. Stoga se i krug koji sadrži O slika u pravu koja ne sadrži O.

(4) Na slici 2.5, krug α je krug nad prečnikom PQ. Prema lemi 2.3, važi $\triangle OR'P' \sim \triangle OPR$ i $\triangle OR'Q' \sim \triangle OQR$.

Stoga, $\measuredangle OR'P' = \measuredangle OPR$ i $\measuredangle OR'Q' = \measuredangle OQR$. Sada je $\measuredangle Q'R'P' = \measuredangle OR'P' - \measuredangle OR'Q'$, tako da $\measuredangle Q'R'P' = \measuredangle OPR - \measuredangle OQR$. Imamo i sledeću relaciju: $\measuredangle OPR - \measuredangle OQR = \measuredangle PRQ$ (jer je spoljašnji ugao trougla jednak zbiru dva unutrašnja nesusedna ugla).

Sa druge strane, imamo i $\measuredangle PRQ = 90°$ (periferni ugao nad prečnikom je prav). Stoga je i $\measuredangle Q'R'P' = 90°$. Odatle možemo da zaključimo da je R' na krugu β sa prečnikom $Q'P'$. Slično, svaka tačka na krugu β je inverz neke tačke sa kruga α.



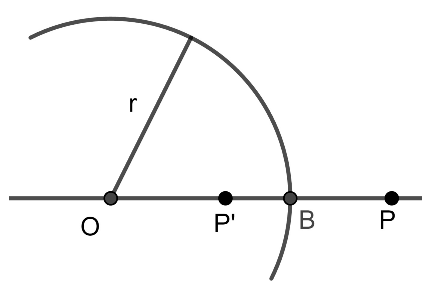
Sl. 2.5

□

Inverzija i rastojanje

Teorema 2.5 Neka su P i P' inverzne tačke, gde je P van kruga inverzije i neka je B tačka u kojoj duž PP' seče krug inverzije, kao na slici 2.6. Tada:

$$BP' = \frac{BP}{1 + BP/r}, \quad BP = \frac{BP'}{1 - BP'/r}.$$



Sl. 2.6

Dokaz: $BP' = r - OP' = \ r - \frac{OP' \cdot OP}{OP} = r - \frac{r^2}{r+BP} = \frac{r \cdot BP}{r+BP} = \frac{BP}{1+BP/r}$.

Dokaz da je $BP = \frac{BP'}{1-BP'/r}$ je sličan. □

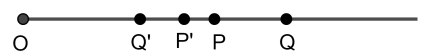
Teorema 2.6 Ako su P' i Q' inverzi tačaka P i Q, redom, pri inverziji $I(O, r^2)$, tada važi: $P'Q' = \ \frac{PQ}{OP \cdot OQ} r^2$.

Dokaz: Razlikujemo slučajeve:

Slučaj 1: Neka O, P i Q nisu kolinearne tačke. Prema lemi 2.3 $\triangle OP'Q' \sim \triangle OQP$, tako da $\frac{P'Q'}{PQ} = \frac{OQ'}{OP}$, što povlači da je:

$$P'Q' = \frac{PQ \cdot OQ'}{OP} = \frac{PQ \cdot OQ' \cdot OQ}{OP \cdot OQ} = \frac{PQ}{OP \cdot OQ} \cdot r^2.$$

Slučaj 2: O, P i Q su kolinearne tačke, gde O nije između P i Q. Možemo da pretpostavimo da je $OP < OQ$, kao što je na slici 2.7.



Sl. 2.7

To implicira da je $OQ' < OP'$. Sada je:
$P'Q' = OP' - OQ' = \frac{r^2}{OP} - \frac{r^2}{OQ} = \frac{OQ - OP}{OP \cdot OQ} \cdot r^2 = \frac{PQ}{OP \cdot OQ} \cdot r^2$, što je i trebalo dokazati.

Slično se može razmotriti i raspored $P - O - Q$. $\square$

Inverzija i uglovi

Neka je $\gamma(x, f(x))$, $x \in (a, b)$ glatka kriva (f je diferencijabilna funkcija) u ravni. Tada je tangenta na krivu γ u tački $(x_0, f(x_0))$ prava, čija je jednačina: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Napomena: Može se pokazati da je definicija tangente na elipsu (samim tim i na krug) u saglasnosti sa ovom definicijom.

Definicija 2.2 Neka se dve krive $(x, f_1(x))$ i $(x, f_2(x))$ seku u tački (x_0, y_0) i $y_0 = f_1(x_0) = f_2(x_0)$. Tada je ugao između njih u tački preseka ugao između njihovih tangenti. Ako dve krive u zajedničkoj tački imaju istu tangentu, onda se one dodiruju.

Teorema 2.7 Inverzija preslikava dve krive koje se dodiruju u tački A, različitoj od centra inverzije I u dve krive, koje se dodiruju u tački $I(A)$.
Dokaz: Neka je $(x_1, F(x_1))$ slika krive $(x, f(x))$ pri inverziji:

$$I : x_1 = \frac{r^2}{x^2 + f(x)^2} \cdot x, \ \ y_1 = \frac{r^2}{x^2 + f(x)^2} \cdot y$$

Ovde smo uzeli da je centar inverzije koordinatni početak jer uvek možemo translirati Dekartov pravougli koordinatni sistem tako da to važi. Pritom, osobina da se krive dodiruju ne zavisi od izbora datog sistema. Nađimo jednačinu tangente na krivu u tački $(x_1, F(x_1))$. Ona je oblika $y - y_1 = k(x - x_1)$, gde je $k = \frac{dF}{dx_1}(x_1)$. S obzirom da je:

$$\frac{dx_1}{dx} = r^2 \cdot \frac{-x^2 + f(x)^2 - 2xf(x)f'(x)}{(x^2 + f(x)^2)^2},$$
$$\frac{dF}{dx} = r^2 \cdot \frac{-f'(x)f(x)^2 + f'(x)x^2 - 2xf(x)}{(x^2 + f(x)^2)^2},$$

sledi da je:

$$k = \frac{dF}{dx} \cdot \frac{dx}{dx_1} = -\frac{f'(x)(f(x)^2 - x^2) + 2xf(x)}{f(x)^2 - x^2 - 2xf(x)f'(x)}, \tag{7}$$

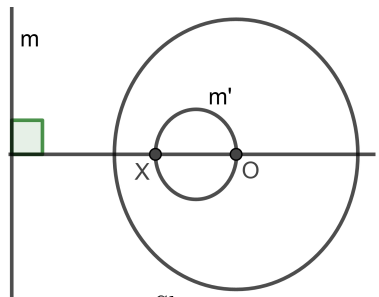
gde je x prva koordinata tačke $I(x_1, F(x_1)) = (x, f(x))$. Sada, ako se dve krive $\gamma_1 : (x, f_1(x))$ i $\gamma_2 : (x, f_2(x))$ dodiruju u tački (x, y), $y = f_1(x) = f_2(x)$, onda je i $f_1'(x) = f_2'(x)$, te za njihove slike $(x_1, F_1(x_1))$ i $(x_2, F_2(x_2))$ važi iz (7) $F_1'(x_1) = F_2'(x_2)$. Zato se tangente na njihove slike poklapaju. $\square$

Teorema 2.8 Inverzija I slika dve krive koje se seku u tački $A \neq O$ u krive koje se seku u tački $I(A) = A'$ pod istim uglom, ali suprotno orijentisanim.
Dokaz: Napomenimo prvo da bismo ovo tvrđenje mogli dokazati i direktnim računom koristeći formulu (7) koja određuje pravac tangente na krivu. Pokazaćemo da tvrđenje važi na jednostavniji način.

Neka se dve krive γ_1 i γ_2 seku u tački $A \neq O$ i neka su redom tangente na njih u A prave m i n. Inverzijom u odnosu na krug prave m i n se slikaju u prave ili krugove koji imaju zajedničku tačku A' i koje možemo označiti sa m' i n'. Na osnovu prethodne teoreme, s obzirom da se γ_1 i m dodiruju u A, onda se i njihove slike γ_1' i m' dodiruju u A'. Ako je, pritom, m' prava, onda je ona baš tangentna na γ_1' u A', a ukoliko je m' krug, onda m' i γ_1' imaju istu tangentu u A'. Dakle, ugao između γ_1' i γ_2' je ugao između m' i n' u tački A'.

Pokažimo tvrđenje u slučaju da su m' i n' krugovi uz napomenu da se tvrđenje slično može dokazati i u ostalim slučajevima.

Ako je m' krug, onda to znači da centar inverzije ne pripada pravoj m. Videli smo da je tada m' krug nad prečnikom OX, gde je prava OX normalna na m (slika 2.8). Uočimo da je tada tangenta na krug m' u tački O paralelna pravoj m. Dakle, krugovi m' i n' se seku u tačkama O i A' i pritom su njihove tangente u tački O paralelne pravama m i n, te određuju isti ugao kao m i n i to iste orijentacije. Zato je ugao između krugova m' i n' u drugoj presečnoj tački A' podudaran datom uglu, ali suprotne orijentacije.

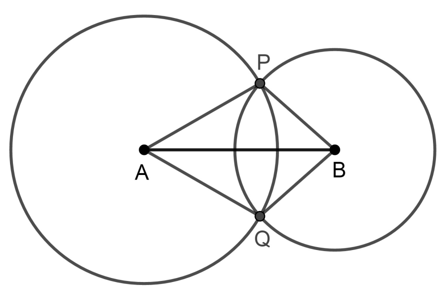


Sl. 2.8

□

Ortogonalni krugovi

Teorema 2.9 Ako se dva kruga seku u tačkama P i Q, tada je veličina uglova između tih krugova ista u tačkama P i Q, ali su uglovi suprotne orijentacije.
Dokaz: Uočimo da je $\triangle APB \equiv \triangle AQB$ po stavu stranica-stranica-stranica, tako da je $\measuredangle APB = \measuredangle AQB$. Pošto su tangente na krugove u tački P ortogonalne na radijuse AP i BP, sledi da je ugao između tangenti u tački P isti po veličini kao i $\measuredangle APB$ (rotacijom za $90°$ poluprečnici se poklapaju sa odgovarajućim tangentama). Na sličan način, ugao između tangenti u Q je jednak sa $\measuredangle AQB$, pa je jednak uglu između tangenti u tački P. Uglovi su suprotne orijentacije jer su osno-simetrični u odnosu na pravu koja prolazi kroz centre krugova.

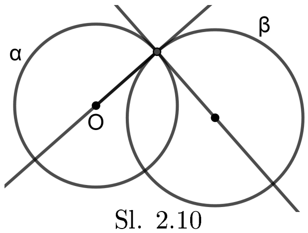


Sl. 2.9

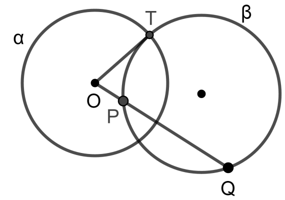
□

Definicija 2.3 Za dva kruga α i β koji se seku, kažemo da su ortogonalni ako je ugao između njih $90°$.

Teorema 2.10 Ako su dva kruga α i β ortogonalna, tada:
a) Obe tangente u tačkama preseka krugova prolaze kroz centar drugog kruga.
b) Svaki krug se slika u sebe pri inverziji u odnosu na drugi krug.



Sl. 2.10

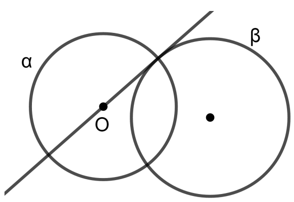


Sl. 2.11

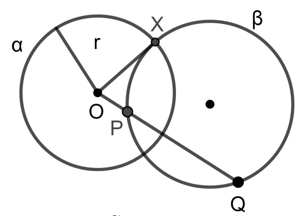
Dokaz: a)Pošto su krugovi ortogonalni, tangente su ortogonalne u presečnoj tački. Prava koja je u dodirnoj tački tangente na krug normalna na tu tangentu sadrži centar kruga, što je trebalo pokazati.

b) Neka je P tačka sa kruga β. Neka su O i r centar i poluprečnik kruga α. Neka je Q druga tačka gde prava OP preseca β. Neka je T jedna tačka preseka ova dva kruga. Tada je prava OT tangentna na β. Sada je $OP \cdot OQ = OT^2$, što sledi iz potencije tačke u odnosu na krug, i $OT = r^2$. Dakle $OP \cdot OQ = r^2$, što pokazuje da je inverz svake tačke sa kruga β druga tačka sa kruga β. $\square$

Teorema 2.11 Dva kruga α i β su ortogonalna ako je bilo koji od narednih uslova ispunjen:
a) Tangenta na jedan krug u tački preseka krugova prolazi kroz centar drugog kruga.
b) Jedan od krugova prolazi kroz dve tačke koje su inverzne jedna drugoj u odnosu na drugi krug.



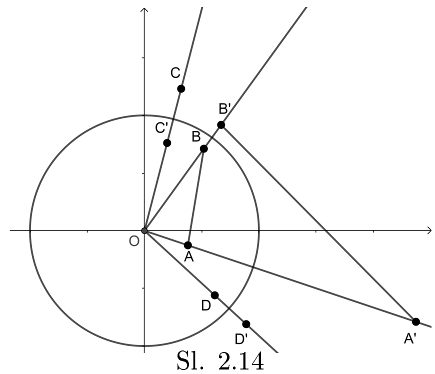
Sl. 2.12



Sl. 2.13

Dokaz: a) Važi jer su tangente u tački preseka međusobno normalne.
(b) Pretpostavimo da krug β prolazi kroz tačke P i Q, koje su inverzne jedna drugoj u odnosu na α. Neka je O centar kruga α i neka je OX tangenta na β u tački X, kao što je prikazano na slici 2.13. Tada imamo $OP \cdot OQ = OX^2$, što dobijamo iz potencije tačke O u odnosu na krug β i $OP \cdot OQ = r^2$. Odavde sledi da je $OX = r^2$, tako da X mora da bude i na krugu α, tj. X je tačka preseka krugova α i β i tangenta na krug β u ovoj tački prolazi kroz centar kruga α. Stoga, ovi krugovi moraju biti ortogonalni. $\square$

Stav 2.12 Dvorazmera je invarijantna pri inverziji u odnosu na krug čiji centar nije nijedna od tačaka A, B, C, D.



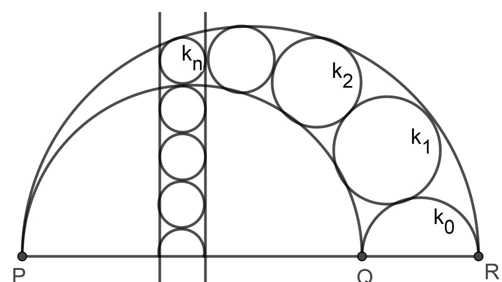
Sl. 2.14

Dokaz: Uočimo da je $\triangle OAB \sim \triangle OB'A'$. Stoga, imamo $\frac{AB}{A'B'} = \frac{OB}{OA'} = \frac{OB \cdot OA}{OA' \cdot OA} = \frac{OB \cdot OA}{r^2}$. Odatle je: $AB = A'B' \cdot \frac{OB \cdot OA}{r^2}$. Sada je:

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{C'A' \cdot \frac{OC \cdot OA}{r^2}}{C'B' \cdot \frac{OC \cdot OB}{r^2}} : \frac{D'A' \cdot \frac{OD \cdot OA}{r^2}}{D'B' \cdot \frac{OD \cdot OB}{r^2}} = \frac{C'A'}{C'B'} : \frac{D'A'}{D'B'}.$$

□

Teorema 2.13 Paposova teorema Pretpostavimo da su P, Q i R tri različite kolinearne tačke i C, D i k_0 polukrugovi nad PQ,PR i QR, redom. Neka su k_1, k_2 ... krugovi koji dodiruju C i D, tako da k_1 dodiruje k_0, k_2 dodiruje k_1 itd. Označimo sa h_n rastojanje centra kruga k_n od duži PR i neka je r_n radijus od k_n. Tada je $h_n = 2nr_n$.



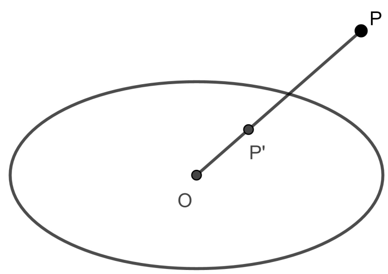
Sl. 2.15

Dokaz: Konstruišimo krug k sa centrom u tački P, koji je ortogonalan na krug k_n. Inverzijom u odnosu na krug k krug k_n se slika u sebe zato što je ortogonalan na krug inverzije. Polukrug C slika se na pravu l. Polukrug D se slika na pravu m paralelnu sa l jer polukrugovi C i D imaju samo jednu zajedničku tačku, pri čemu je ta tačka centar inverzije, koja se slika u beskonačno daleku tačku. Polukrug k_0 se slika u polukrug k_0', tangentan na l i m, zato što inverzija čuva tangentnost. Krug k_i se slika u krug k_i' koji je tangentan na l i m. Stoga, svi polukrugovi k'_i imaju isti poluprečnik, nazvan r_n, pri čemu k'_i dodiruje k'_{i-1} i k'_{i+1} , odakle sledi teorema. $\square$

3 Inverzija u odnosu na elipsu

U ovom poglavlju proučavaćemo inverziju u odnosu na elipsu, koja je uopštenje klasične inverzije u odnosu na krug i neke njene osobine. Takođe ćemo predstaviti slike pravih, elipsi i još nekih ravanskih krivih pri inverziji u odnosu na elipsu. Na kraju, uopštićemo Paposovu teoremu na elipse.

Definicija 3.1 Neka je $\mathcal{E}$ elipsa sa centrom u tački O i žižama F_1 i F_2 u $\mathbb{R}^2$. Inverzija u odnosu na $\mathcal{E}$ je preslikavanje $\psi: \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ definisano sa $\psi(P) = P'$, gde P' leži na polupravoj OP i $OP \cdot OP' = OQ^2$, gde je Q tačka preseka poluprave OP i elipse $\mathcal{E}$.



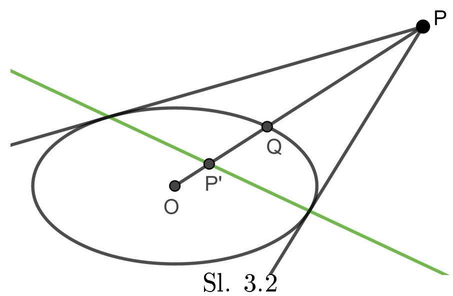
Sl. 3.1

Tačku P' zovemo inverzom tačke P u odnosu na elipsu $\mathcal{E}$. Elipsu $\mathcal{E}$ zovemo elipsom inverzije, O centrom inverzije, a broj $\omega := OQ$, radijusom inverzije. Radijus inverzije nije konstantan. Jasno je da je ψ involucija jer je $\psi(\psi(P)) = P$ za svako $P \neq O$. Fiksne tačke su tačke sa elipse $\mathcal{E}$. Primetimo da tačka P pripada spoljašnjosti od $\mathcal{E}$ ako i samo ako tačka P' pripada unutrašnjosti od $\mathcal{E}$.

3.1 Osnovne osobine

Teorema 3.1 Inverz tačke P u odnosu na elipsu $\mathcal{E}$ je presek prave OP i polare tačke P u odnosu na elipsu $\mathcal{E}$. Preciznije, ako je $\mathcal{E}$ elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, tada je inverz tačke (u, v) u odnosu na elipsu $\mathcal{E}$ tačka sa koordinatama:

$$x = \frac{a^2 b^2 u}{b^2 u^2 + a^2 v^2}, \ \ y = \frac{a^2 b^2 v}{b^2 u^2 + a^2 v^2}.$$



Sl. 3.2

Dokaz:

Neka je $P=(u,v)$ proizvoljna tačka. Polupravа OP seče elipsu $\mathcal{E}$ u tački $Q=(tu,tv), t>0$. Odatle imamo jednakost $t^2\cdot\left(\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}\right)=1$. Polara tačke P data je jednačinom $\frac{ux}{a^2}+\frac{vy}{b^2}=1$. Ona seče pravu OP (koja ima jednačinu $vx-uy=0$) u tački $(u',v')=(ku,kv)$. Pošto tačka (u',v') pripada polari,imamo sledeću relaciju: $k\cdot\left(\frac{u^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)=1$. Uočavamo da je $k=t^2$. Stoga je $OP\cdot OP'=OQ^2$, tj. (u',v') je tačka inverzna tački P u odnosu na elipsu $\mathcal{E}$. Eksplicitno:

$$u'=\frac{a^2b^2u}{b^2u^2+a^2v^2},\quad v'=\frac{a^2b^2v}{b^2u^2+a^2v^2}.$$

$\square$

Teorema 3.2

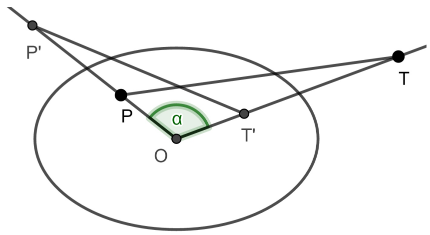
Neka su P i T različite tačke i neka su ω i u radijusi inverzije, redom. Ako su tačke P' i T' inverzi tačaka P i T u odnosu na elipsu $\mathcal{E}$ onda važi:

$$P'T'=\begin{cases}\frac{\omega^2\cdot TP}{OP\cdot OT}, \text{ kada su O,P i T kolinearne}\\ \frac{\sqrt{(\omega^2-u^2)(\omega^2\cdot OT^2-u^2\cdot OP^2)+\omega^2\cdot u^2\cdot PT^2}}{OP\cdot OT}, \text{ inače.}\end{cases}$$

Dokaz: 1) Ako su O, P i T kolinearne, tada prava koja ih sadrži, takođe sadrži P', T' i Q, gde je Q tačka preseka elipse $\mathcal{E}$ i poluprave OP. Jasno:

$$P'T'=|OT'-OP'|=\left|\frac{OQ^2}{OT}-\frac{OQ^2}{OP}\right|=\left|\frac{OP\cdot OQ^2-OT\cdot OQ^2}{OP\cdot OT}\right|=$$
$$\left|\frac{\omega^2\cdot(OP-OT)}{OP\cdot OT}\right|=\frac{\omega^2\cdot TP}{OP\cdot OT}.$$

2) Pretpostavimo da O,P i T nisu kolinearne. Onda nisu kolinearne ni tačke O, P' i T'. Definišimo ugao α na sledeći način: $\alpha=\measuredangle P'OT'$. Primenićemo



Sl. 3.3

kosinusnu teoremu na $\triangle POT$ a zatim i na $\triangle P'OT'$.

Iz trougla $\triangle POT$ imamo: $\cos\alpha = \frac{OP^2+OT^2-PT^2}{2\cdot OP\cdot OT}$, a iz trougla $\triangle P'OT'$ imamo: $P'T'^2 = OP'^2 + OT'^2 - 2\cdot OP'\cdot OT'\cdot\cos\alpha$.

Sada je:

$$P'T'^2 = \frac{\omega^4}{OP^2} + \frac{u^4}{OT^2} - \frac{\omega^2\cdot u^2\cdot(OP^2+OT^2-PT^2)}{OP^2\cdot OT^2}$$

$$= \frac{\omega^4\cdot OT^2+u^4\cdot OP^2-\omega^2\cdot u^2\cdot OP^2-\omega^2\cdot u^2\cdot OT^2+\omega^2\cdot u^2\cdot PT^2}{OP^2\cdot OT^2}$$

$$= \frac{(\omega^2-u^2)(\omega^2\cdot OT^2-u^2\cdot OP^2)+\omega^2\cdot u^2\cdot PT^2}{OP^2\cdot OT^2}.$$

Odavde sledi rezultat.

□

3.2 Dvorazmera i harmonijska konjugovanost

Videli smo da inverzija u odnosu na krug čuva dvorazmeru. Pokažimo da inverzija u odnosu na elipsu nema tu osobinu. Posmatrajmo elipsu $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ i tačke $A(1,0), B(2,0), C(0,1), D(0,\frac{1}{2})$. Sada je $(AB,CD) = 1.1578$, dok je $(A'B',C'D') = 1.1645$.
Ipak, važi sledeća teorema.

Teorema 3.3 Neka je $\mathcal{E}$ elipsa sa centrom O i Q_1Q_2 dijametar od $\mathcal{E}$. Dve tačke prave Q_1Q_2 su harmonijski konjugovane sa Q_1 i Q_2, redom, ako i samo ako su one inverzne jedna drugoj u odnosu na elipsu $\mathcal{E}$.
Dokaz: Neka su P i P' dve tačke prave Q_1Q_2. Sada je:

$$Q_1P\cdot Q_2P' = (Q_1O+OP)(Q_2O+OP') = (\omega+OP)(-\omega+OP') =$$

$$= -\omega^2 - \omega(OP-OP') + OP\cdot OP',$$

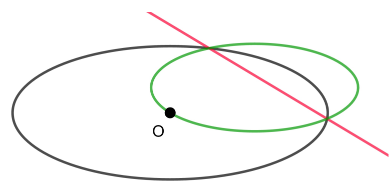
$$Q_1P' \cdot Q_2P = -\omega^2 + \omega(OP - OP') + OP \cdot OP'.$$

Tačke P i P' su harmonijski konjugovane tačkama Q_1 i Q_2, redom, ako i samo ako je $OP \cdot OP' = \omega^2$. $\square$

3.3 Slike krivih pri inverziji u odnosu na elipsu

U rezultatima ovog poglavlja koristimo elipsu $\mathcal{E}$:$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

Teorema 3.4 Neka je ψ inverzija u odnosu na elipsu sa centrom u tački O.
a) Svaka prava koja sadrži O je invarijantna pri inverziji;
b) Slika prave koja ne sadrži O je elipsa koja sadrži O i homotetična je elipsi $\mathcal{E}$.



Sl. 3.4

Dokaz: a) Tvrdjenje sledi iz definicije.
b) Prava koja ne sadrži O data je jednačinom $px+qy+r=0$, pri čemu je $r \neq 0$. Slika prave l pri inverziji u odnosu na elipsu $\mathcal{E}$ je data sledećom jednačinom:

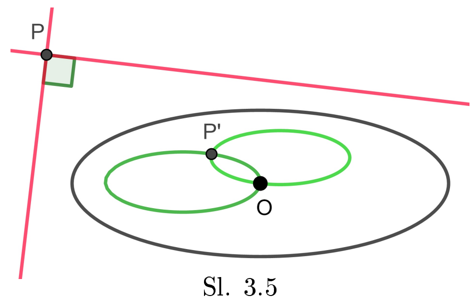
$$\begin{aligned}
&p \cdot \frac{a^2 \cdot b^2 \cdot x}{b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2} + q \cdot \frac{a^2 \cdot b^2 \cdot y}{b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2} + r = 0, \\
&pa^2b^2x + qa^2b^2y + rb^2x^2 + ra^2y^2 = 0, \\
&a^2b^2(px+qy) + r(b^2x^2 + a^2y^2) = 0, \qquad (8) \\
&\frac{\left(x + \frac{a^2p}{2r}\right)^2}{a^2} + \frac{\left(y + \frac{b^2q}{2r}\right)^2}{b^2} = \frac{a^2p^2 + b^2q^2}{4r^2}.
\end{aligned}$$

Primećujemo da je dobijena jednačina elipse sa centrom $\left(-\frac{a^2p}{2r}, -\frac{b^2q}{2r}\right)$, koja je pritom homotetična elipsi $\mathcal{E}$ sa koeficijentom $\frac{2r}{\sqrt{a^2p^2+b^2q^2}}$.

$\square$

Posledica 3.5 Neka su l_1 i l_2 dve normalne prave koje se seku u tački P.
a) Ako je $P = O$, tada su $\psi(l_1)$ i $\psi(l_2)$ normalne prave;
b) Ako $O \notin l_1$, ali $O \in l_2$, onda je $\psi(l_1)$ elipsa kroz O ortogonalna na $\psi(l_2) = l_2$

u tački O.
c) Ako nijedna od l_1 i l_2 ne sadrži O, onda su $\psi(l_1)$ i $\psi(l_2)$ elipse koje sadrže P' i O i ortogonalne su u tački O.



Sl. 3.5

Dokaz:

a) Ovo tvrđenje sledi iz činjenice da su prave l_1 i l_2 invarijantne.

b) Prava l_1 je data jednačinom: $l_1 : px + qy + r = 0, r \neq 0$. Njena slika pri inverziji je elipsa data jednačinom (8). Prava l_2 ima jednačinu: $qx - py = 0$. Prava l_2 normalna je na sliku prave l_1 zato što je prava $p : px + qy = 0$ tangenta elipse $\mathcal{E}$ u tački O.

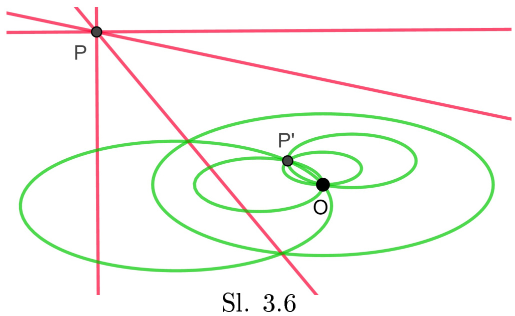
c) Neka su l_1 i l_2 ortogonalne prave:

$$l_1 : p(x-h) + q(y-k) = 0, \;\; l_2 : q(x-h) - p(y-k) = 0.$$

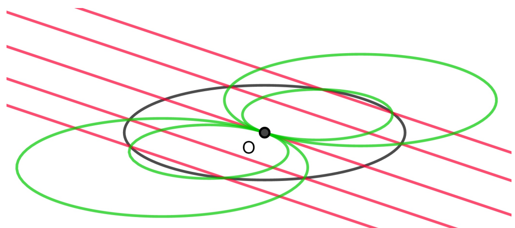
One se seku u tački $P = (h, k) \neq O$. Njihova slike pri inverziji u odnosu na elipsu $\mathcal{E}$ su elipse koje se seku u tačkama O i P'. Prema delu pod b), tangente u tački O su ortogonalne prave $px + qy = 0$ i $qx - py = 0$.

$\square$

Posledica 3.6 a) Ako je $P \neq O$, slika pramena pravih koje se seku u tački P su koaksijalne elipse kroz tačke O i P'.
b) Slika pramena pravih paralelnih sa l_0, gde $O \in l_0$ su elipse homotetične elipsi $\mathcal{E}$ i tangentne na l_0 u tački O.



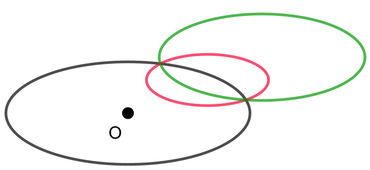
Sl. 3.6



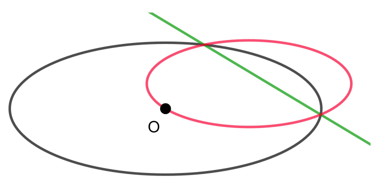
Sl. 3.7

Dokaz: a) Prave koje ne sadrže centar elipse slikaju se u elipse koje sadrže centar. Sve prave datog pramena sadrže tačku P, koja se inverzijom slika u tačku P'. Dakle, te elipse moraju da sadrže i tačku P'.
b) Prava l_0 je invarijantna pri inverziji. Preostale prave se slikaju u elipse koje sadrže tačku O zato što svaka od tih pravih sadrži beskonačno daleku tačku, koja se pri inverziji slika u centar elipse. $\square$

Teorema 3.7 Neka je $\mathcal{E}$ elipsa inverzije sa centrom u O i $\mathcal{E}'$ elipsa homotetična sa $\mathcal{E}$. Slika od $\mathcal{E}'$ je:
a) elipsa koja je homotetična sa $\mathcal{E}$ ako $O \notin \mathcal{E}'$;
b) prava ako $O \in \mathcal{E}'$.



Sl. 3.8



Sl. 3.9

Dokaz: Elipsa $\mathcal{E}'$ homotetična sa $\mathcal{E}$ ima jednačinu:
$\mathcal{E}'$: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + px + qy + r = 0$. Elipsa $\mathcal{E}'$ prolazi kroz O ako i samo ako je $r = 0$.

a) Pošto elipsa $\mathcal{E}'$ ne prolazi kroz O, tada je $r \neq 0$. Inverzna slika se sastoji od tačaka $P(x, y)$ za koje P' leži na sledećoj elipsi:

$$\frac{\left(\frac{a^2b^2x}{b^2x^2+a^2y^2}\right)^2}{a^2}+\frac{\left(\frac{a^2b^2y}{b^2x^2+a^2y^2}\right)^2}{b^2}+p\frac{a^2b^2x}{b^2x^2+a^2y^2}+q\frac{a^2b^2y}{b^2x^2+a^2y^2}+r=0. \quad (9)$$

Sređivanjem prethodnog izraza dobijamo

$$(b^2x^2+a^2y^2)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+x\cdot\frac{p}{r}+y\cdot\frac{q}{r}+\frac{1}{r}\right)=0.$$

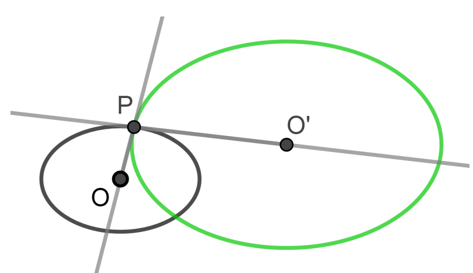
Pošto je $b^2x^2+a^2y^2\neq 0$, sledi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+x\cdot\frac{p}{r}+y\cdot\frac{q}{r}+\frac{1}{r}=0.$$

Prethodna elipsa je homotetična sa $\mathcal{E}$.

b) Ako $\mathcal{E}'$ prolazi kroz O, tada je $r=0$. Jednačina (9) se tada svodi na $px+qy+1=0$. $\square$

Posledica 3.8 Neka je $\mathcal{E}'$ elipsa sa centrom u O' homotetična elipsi $\mathcal{E}$, čiji je centar tačka O. Ako je $\mathcal{E}'$ invarijantna pri inverziji u odnosu na $\mathcal{E}$ i p je zajednička tačka ove dve elipse, tada su $O'P$ i OP tangente na $\mathcal{E}$ i $\mathcal{E}'$, redom.
Dokaz:



Sl. 3.10

Neka je $\mathcal{E}'$ elipsa koja je invarijantna. Prema prethodnoj teoremi, elipsa $\mathcal{E}$ je invarijantna ako i samo ako je njena jednačina oblika:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+px+qy+1=0.$$

Primetimo da centar O' elipse $\mathcal{E}'$ ima koordinate $\left(-\frac{pa^2}{2},-\frac{qb^2}{2}\right)$.
Neka je $P(x_0,y_0)$ zajednička tačka ove dve elipse. Jasno je da za tačku P važe sledeće relacije :

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1,$$

$$px_0 + qy_0 + 2 = 0.$$

Tangente na elipse $\mathcal{E}$ i $\mathcal{E}'$ u tački (x_0, y_0) su prave t i t':

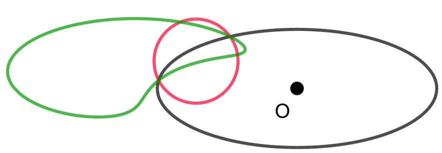
$$t : \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} - 1 = 0,$$

$$t' : \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{1}{2}p(x + x_0) + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{1}{2}p(x + x_0) + 1 = 0.$$

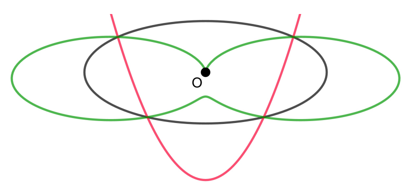
Direktnom proverom vidimo da $O' \in t$ i da $O \in t'$. $\square$

Teorema 3.9 Neka je $\mathcal{E}$ elipsa sa centrom u O. Slika krive drugog stepena Γ koja nije homotetiča sa $\mathcal{E}$ je:
a) Kriva trećeg stepena ako Γ prolazi kroz O;
b) Kriva četvrtog stepena ako Γ ne prolazi kroz O.

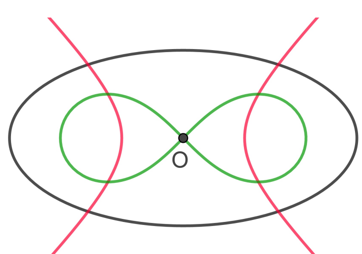
Na slikama 3.11, 3.12 i 3.13 prikazane su slike kruga, parabole i hiperbole pri inverziji u odnosu na elipsu. Dobijene krive su četvrtog stepena. Centar inverzije pripada slici parabole i hiperbole zato što parabola i hiperbola sadrže beskonačno daleku tačku.



Sl. 3.11

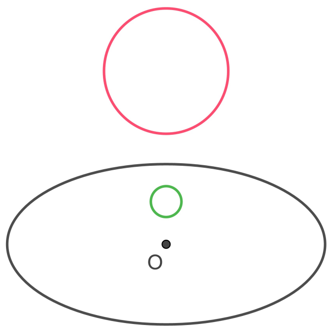


Sl. 3.12

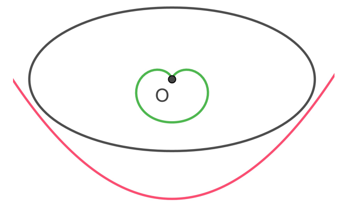


Sl. 3.13

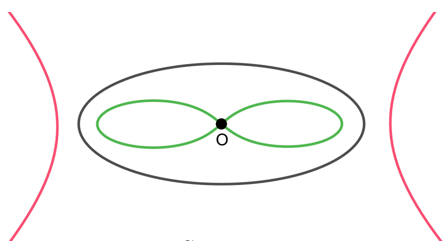
Na prethodnim slikama sve krive su sekle elipsu inverzije. Posmatrajmo sada slike krivih koja ne seku elipsu inverzije.



Sl. 3.14



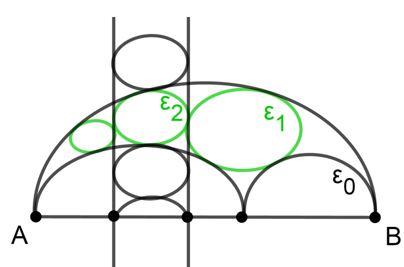
Sl. 3.15



Sl. 3.16

Pokažimo da važi i uopštenje Paposove teoreme.

Teorema 3.10 Neka je $\mathcal{E}$ poluelipsa sa glavnim dijametrom AB i $\mathcal{E}'$, $\mathcal{E}_0$ poluelipse sa iste strane AB sa glavnim dijametrima AC i CB, redom, obe homotetične sa $\mathcal{E}$. Neka je sada $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$... niz elipsi tangentnih na $\mathcal{E}$ i $\mathcal{E}'$, takvih da je $\mathcal{E}_n$ tangentna na $\mathcal{E}_{n-1}$ i $\mathcal{E}_{n+1}$ za sve $n \geqslant 1$. Ako je r_n manja poluosa od $\mathcal{E}_n$ i h_n rastojanje centra elipse $\mathcal{E}_n$ od AB, onda je $h_n = 2nr_n$.



Sl. 3.17

Dokaz: Neka je ψ_i inverzija u odnosu na elipsu $\mathcal{E}_i$. Prema teoremi 7 $\psi_i(\mathcal{E})$ i $\psi_i(\mathcal{E}_0)$ su prave normalne na AB i tangentne na elipsu $\mathcal{E}_i$. Stoga, slike elipse

$\psi_i(\mathcal{E}_1)$, $\psi_i(\mathcal{E}_2)$,... biće elipse tangentne na prave koje su slike elipsi $\mathcal{E}$ i $\mathcal{E}_0$ pri inverziji u odnosu na elipsu $\mathcal{E}_i$. Stoga, $h_i = 2ir_i$. $\square$

3.4 Inverzija parametarskih krivih u odnosu na elipsu

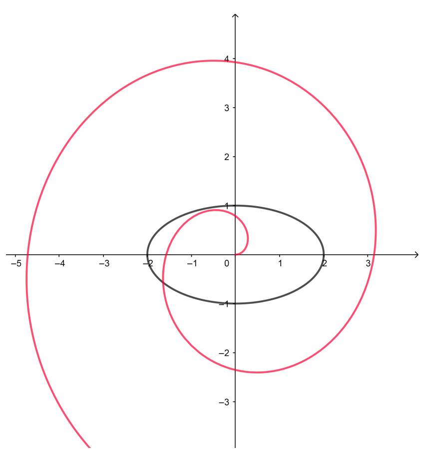
Primetimo da je slika tačke $P = (f(t), g(t))$ pri inverziji u odnosu na elipsu $\mathcal{E}_{a,b}$ tačka sa koordinatama:

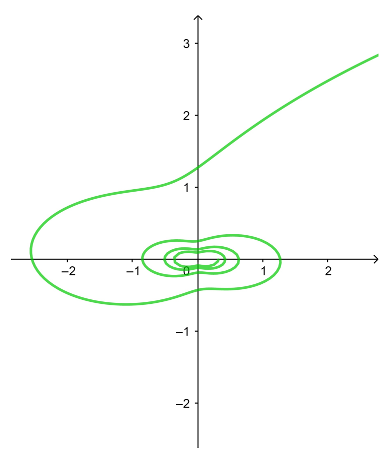
$$x = \frac{a^2b^2f(t)}{b^2f(t) + a^2g(t)}, \quad y = \frac{a^2b^2g(t)}{b^2f(t) + a^2g(t)}.$$

U nastavku ćemo prikazati neke primere parametarskih krivih i njihovih slika pri inverziji u odnosu na elipsu $\mathcal{E} : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

Primer: Arhimedova spirala

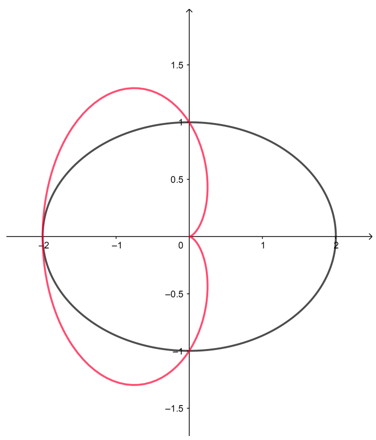
$$\Omega = \begin{cases} x = t\cos(2t) \\ y = t\sin(2t) \end{cases} \qquad \psi(\Omega) = \left(\frac{4\cos(2t)}{\cos(2t)+4\sin(2t)}, \frac{4\sin(2t)}{\cos(2t)+4\sin(2t)}\right)$$

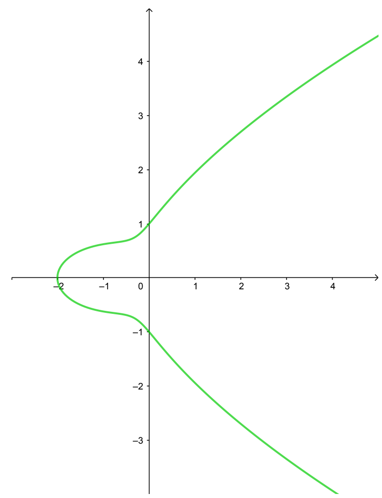




Primer: Kardioda

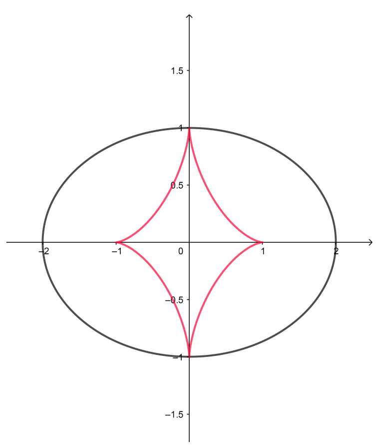
$$\Omega = \begin{cases} x = \cos t(1 - \cos t) \\ y = \sin t(1 - \cos t) \end{cases} \qquad \psi(\Omega) = \left(\tfrac{4\cos t}{\cos t + 4\sin t}, \tfrac{4\sin t}{\cos t + 4\sin t}\right)$$

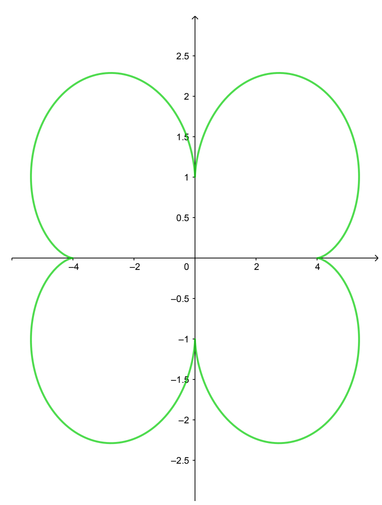




Primer: Astroida

$$\Omega = \begin{cases} x = \cos^3(t) \\ y = \sin^3(t) \end{cases} \qquad \psi(\Omega) = \left(\tfrac{4\cos^3(t)}{\cos^3(t) + 4\sin^3(t)}, \tfrac{4\sin^3(t)}{\cos^3(t) + 4\sin^3(t)}\right)$$





Primer:

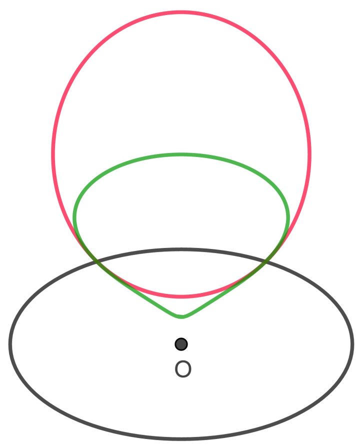
Nadjimo sada sliku kruga:

$$\begin{cases} x = 1.5\cos(t) \\ y = 2 + 1.5\sin(t) \end{cases}$$

gde $t \in [0, 2\pi]$.

Slika će biti sledeća parametarska kriva:

$$f(t) = \Big(\frac{6\cos(t)}{4\cdot(1.5\sin(t)+2)^2 + 2.25\cdot(\cos(t))^2}, \frac{4(1.5\sin(t)+2)}{4(1.5\sin(t)+2)^2 + 2.25\cdot(\cos(t))^2}\Big).$$



Sl. 3.18

Zaključak

U ovom radu prvo smo predstavili koncept inverzije u odnosu na krug. Obrazložili smo postupak kojim možemo naći inverz neke tačke u odnosu na dati krug. Zatim smo uočili da su prave koje prolaze kroz centar inverzije i krugovi koji su ortogonalni na krug inverzije invarijante ovog preslikavanja. Dokazali smo Papasovu teoremu, a kasnije i njeno uopštenje na elipsu. Dokazali smo da inverzija u odnosu na krug čuva dvorazmeru, dok inverzija u odnosu na elipsu nema tu osobinu, što smo pokazali kontraprimerom.

U poglavlju o elipsi smo malo više pažnje posvetili nalaženju slika nekih ravanskih krivih pri inverziji. Primetili smo da slika elipse homotetične elipsi inverzije može biti prava ili elipsa homotetična elipsi inverzije. Predstavli smo slike kruga, parabole i hiperbole u zavisnosti od njihovog polozaja sa elipsom inverzije. Na kraju smo prikazali i slike poznatih parametarskih krivih, kao što su Arhimedova spirala, kardioda i astroida.

Literatura

[1] N. Blažić, N. Bokan, Z. Lučić, Z. Rakić, *Analitička geometrija*, Matematički fakultet, Beograd, 2003.

[2] I. E. Leonard, J. E. Lewis, A. C. F. Liu, G. W. Tokarsky, *Classical Geometry*, John Wiley & Sons, 2014.

[3] A. F. Ramirez, *Elliptic inversion of two-dimensional objects*, International journal of geometry, No.1, 2014.

[4] A. F. Ramirez, *Inversion in an ellipse*, Forum geometricorum, Volume 14, 2014.