

МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

Мастер рад

Нестандардни задаци о кретању

Ментор: др Тијана Шукиловић

Студент: Марина Рајчетић

Чланови комисије:

- Проф. др Мирослава Антић
- Проф. др Срђан Вукмировић

Београд 2019

Садржај

1. Увод	3
2. Значај квалитета основног математичког образовања	4
2.1 Нестандардни задаци	4
2.2 Решавање проблемских задатака.....	5
3. Кретање	7
3.1 Механичко кретање без убрзања.....	8
3.2 Праволинијско кретање.....	9
3.3 Криволинијско кретање	10
3.4 Примери кретања без убрзања.....	11
4. Кретање са убрзањем.....	26
4.1 Појам убрзања.....	27
4.2 Примери кретања са убрзањем.....	29
5. Кретање тела под утицајем Земљине теже	37
5.1 Слободан пад.....	39
5.2 Вертикални хитац наниже	39
5.3 Хитац навише.....	40
5.4 Хоризонтални хитац.....	42
5.5 Коси хитац.....	43
5.6 Примери кретања под утицајем Земљине теже.....	47
6. Закључак.....	59

1. Увод

XIX и XX век познати су по убрзаном развоју природних наука. У том периоду дошло је до открића која су допринела великом помаку у нашем разумевању околине, а нарочито природе.

Ови векови остаће обележени и по томе што су научна открића врло брзо налазила практичну примену, што је проузроковало брзе и велике промене у нашој свакодневници. У наше домове унети су бројни уређаји без којих нам је данас живот незамислив. Поменимо радио, телефон, телевизију, класичне и ласерске аудио-уређаје, копир-апарате, уређаје за штампање, компјутере, рендгене, скенере и све остало што користи електричну, соларну, нуклеарну и друге изворе енергије. Без различитих превозних средстава као што су авиони, возови, бродови, аутомобили, незамислив је и живот појединаца и живот сваке цивилизоване друштвене заједнице.

Да бисмо у данашње време могли да користимо савремену технику и технологију, морамо знати шта су кубни и квадратни метри, брзина и убрзање, температура и притисак, електрична струја и електрични напон, вати и ампери, батерије и пуњачи, звук и ултразвук, ласери и скенери, итд. Не може се бити човек данашњице, нити разумети свет у коме се данас живи, а да се не поседују потребна знања из физике.

Физика као фундаментална наука има примену у великом броју других наука. Знања из разних научних области се узајамно преплићу. Физика је у основи свих научних и техничких делатности које се баве било којим процесом у природи, почевши од најмањих (честица), па до највећих (космоса). То једнако важи и за живе системе, почевши од најпримитивнијих, па све до човека. Ипак, постоји једна наука – математика, са којом је физика тако дубоко повезана, као ни са једном другом науком. Опште је познато да физика, посебно теоријска физика, много дугује математици. Да није математике, били бисмо ускраћени за многа сазнања до којих је физика дошла. Међутим, мање је познато да и математика много дугује физици. Многе области савремене математике зачете су и делимично или потпуно развијене у физици. Поменућемо само диференцијални и интегрални рачун, чији је зачетник велики физичар Исак Њутн. Математика је заправо језик физике и начин на који физика описује природу кроз законе и принципе. Формуле у физици су математичке везе између физичких величина.

У раду ће бити представљени детаљно решени нестандартни задаци о кретању. Са овом темом ученици се срећу на часовима физике од шестог разреда основне школе и постоји велики број задатака везаних за ову тему. Коришћењем појмова и формула физичких величина и закона приликом решавања задатака, повећава се и трајност знања. Циљ одабира задатака је да допринесе успостављању складнијег односа између теоријске интерпретације, математичког решавања задатака и да укаже на широку примену физичких појмова и закона у свакодневном животу.

Примене математичких садржаја у оквиру редовних школских часова најчешће се своди на решавање карактеристичних и устаљених задатака чији је једини циљ увежбавање рутине тих примера. Циљ увођења нестандартних задатака је да подстиче развој креативности, логичког мишљења и самосталног истраживања ученика. Зато је улога савремене методике наставе математике веома битна.

2. Значај квалитета основног математичког образовања

Математика је један од темељних општеобразовних предмета у основним школама Србије са бројним образовним и функционалним задацима. Ова занимљива наука је пуна изазова и налази се свуда око нас! Поред тога што помаже да се боље анализирају поједине животне ситуације, математика позитивно утиче на логичко посматрање света око нас. Учење математике има велики утицај на начин аналитичког размишљања и доживљавања света на другачији начин. Свака животна ситуација која треба да се реши је као једначина, која има своје познате и непознате. Као и свака једначина, проблеми ће се боље решити ако дете има способност да предузме логичке кораке. При решавању математичких задатака ученици треба сами да траже путеве до решења, а не слепо да следе одређени шаблон или алгоритам.

Већина ученика има негативни став према математици, зато циљ сваког професора треба да буде да на занимљиви начин пренесе своје знање. Настава треба да буде креативна, са задацима и примерима из стварности. Добра комуникација са ученицима и одабир метода решавања одређених математичких проблема веома су значајни у настави.

При учењу математике ученик усваја рачунске операције, практичне вештине и основе математичке комуникације. Учење математике развија навике тражења података, анализирања, процењивања резултата, рашчлањивања већег проблема на мање задатке. Овладавање математичким способностима потребно је за схватање и решавање проблемских ситуација. Решавање задатака је прилика да се теоријско знање понови, утврди, продуби и провери.

2.1 Нестандардни задаци

Да би данашње образовање удовољило потребама савременог човека и креирало услове за савремену комуникацију, оно треба да развија функционална знања, мотивацију за учење, ставове и вредности, да оспособи за даље школовање и активан живот у савременом друштву.

Решавањем проблемских задатака ученици кроз конкретне примере примењују одређене знања из математике. Задаци се решавају применом одговарајућих математичких формула и за одређивање непознатих физичких величина употребљавају се осмишљене математичке операције. Због тога је потребно да се у редовној настави, и у домаћим задацима, разним видовима индивидуализације унесу проблемски садржаји који ће од ученика захтевати већу ангажованост у тражењу скривених веза између наученог и проблема са којим се срећу. Задатке са таквим проблемима обично зовемо **нестандардним**. Висок мотивациони карактер посебно поседују текстуални нестандартни задаци о кретању, због њихове повезаности са реалним проблемима и учењем физике.

2.2 Решавање проблемских задатака

Текстуални задатак треба најпре пажљиво прочитати и извршити његову анализу. Најпре се врши семантичка анализа текста која подразумева његово разумевање. Демонстрацију семантичко-логичке анализе приказаћемо на конкретном примеру.

Пример: На ауто-путу, у суседним тракама, крећу се два аутомобила у истом смеру. Брзина првог је 90 km/h , а другог 120 km/h .

- а) Коликом брзином се креће други аутомобил у односу на први?
- б) Колико ће метара одмаћи други аутомобил у односу на први 20 минута после претицања?
- в) Колика би била брзина једног аутомобила у односу на други ако би се кретали један другом у сусрет на различитим странама ауто-пута?

Након пажљивог читања треба уочити везу између термина на основу граматичке конструкције и изабрати најзначајније информације о појмовима које они представљају.

1. Услови задатка

Елементи сваког задатка су познате или непознате величине. Услови описују и указују на везу између датих и непознатих величина, а њихово уочавање доприноси разумевању задатка. Из услова утврђујемо да ли су наведени сви подаци неопходни за његово решавање.

2. Циљ

Циљ задатка је проналажење резултата, тј. одређивање непознатих величина, својства и веза међу њима.

3. Теоријска основа

Теоријска основа представља потребна знања за решавање било ког задатка. То су оне теоријске чињенице који су у најужој вези са условима и циљем задатка. Проучавањем услова, њиховим рашчлањивањем на делове и применом теоријских чињеница сазнају се и успостављају односи међу датим и непознатим величинама. На тај начин открива се пут решавања задатка. Након тога треба записати податке.

Пре почетка решавања задатка јасно и издвојено, на почетку простора за решавање, записати дате и тражене величине. Посебно пажљиво, из услова задатка, одредити и записати оне величине које нису дати ни бројно ни у општим ознакама, али се њихове вредности могу одредити, или оценити из текста задатка.

Када год је то могуће, скицирати један или више цртежа који илуструју суштину задатка.

Пошто овај задатак има више питања, решаваћемо га корак по корак. Дакле, познати су нам брзине првог и другог аутомобила у односу на тло.

$$v_1 = 90 \text{ km/h} \text{ (брзина првог аутомобила у односу на тло),}$$

$$v_2 = 120 \text{ km/h} \text{ (брзина другог аутомобила у односу на тло).}$$

Даље настављамо са логичком анализом која подразумева правилно изражавање величина из текста задатака одговарајућим алгебарским изразима и њихово постављање у одговарајуће релације. На тај начин добијамо једначине или неједначине или њихове системе као модел датог проблема.

а) $v = ?$ (брзина другог аутомобила у односу на први).

Претпоставимо да се аутомобили крећу једнаким брзинама у истом смеру. Путник из једног од аутомобила не би приметио да се други креће да му на то не указују предмети из околине. Растојање међу аутомобилима не би се мењало, из чега закључујемо да они мирују један у односу на други.

Размотримо сада наш пример. Пошто се други аутомобил креће већом брзином у односу на први, ако означимо релативну брзину са v_r , можемо да израчунамо:

$$v_r = v_2 - v_1,$$

Уносимо бројчане вредности и израчунавамо тражену величину:

$$120 \frac{km}{h} - 90 \frac{km}{h} = 30 \frac{km}{h}.$$

Имаћемо исту ситуацију као да први мирује, а други се креће брзином од 30 km/h .

б) $t = 20 \text{ min}$ (усклађујемо мерне јединице).

Веома битно да мерне јединице буду усклађени, зато што могу сабирати или одузимати само вредности истородних величина и оне које су изражене истим мерним јединицама. На пример, могу да се сабирају или одузимају две вредности дужине ако су обе изражене у метрима. Ако су те вредности изражене у различитим мерним јединицама, рецимо, једна у метрима, а друга у километрима, онда треба усагласити те мерне јединице. Не могу се сабирати (одузимати) разнородне величине – на пример, дужина и површина, запремина и време, маса тела и његова брзина... Коначан резултат може да се провери посредством одговарајућих мерних јединица и димензија. На пример, резултат је изражен у јединицама брзине $[v] = 1 \text{ km/h}$, што и одговара условима задатка. Ако се уместо тога добије резултат као неименовани број или резултат изражен у другим мерним јединицама, то говори о неправилностима у поступку решавања задатка.

У нашем примеру потребно је минуте претворити у часове:

$$20 \text{ min} = \frac{20}{60} h = \frac{1}{3} h.$$

Израчунамо растојање s другог аутомобила у односу на први 20 минута после претицања.

Већ смо поменули да ово кретање посматрамо као да први аутомобил мирује, а други се креће брзином од 30 km/h . На основу тога, тражени пут је:

$$s = v \cdot t = 30 \frac{km}{h} \cdot \frac{1}{3} h = 10 \text{ km}.$$

в) Нека је са v_r означена релативна брзина аутомобила када се крећу један другом у сусрет на различитим странама ауто-пута.

Можемо поново претпоставити да први аутомобил мирује, а други му се приближава брзином од 120 km/h . Међутим, ако се и први аутомобил приближава другом одређеном брзином, повећава се брзина њиховог приближавања. То значи да је брзина једног аутомобила у односу на други једнака збиру њихових брзина:

$$v_r = v_1 + v_2 = 90 \frac{\text{km}}{\text{h}} + 120 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 210 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Анализирамо решење и изводимо закључак.

Брзина аутомобила који нам долази у сусрет знатно већа од брзине аутомобила који нас претиче. Записујемо одговор.

Одговор: Брзина првог аутомобила у односу на други је једнака 30 km/h , након 20 min после претицања други аутомобил ће одмаћи 10 km , брзина једног аутомобила у односу на други, ако би се кретали један другом у сусрет на различитим странама ауто-пута, била би једнака 210 km/h .

3. Кретање

Кретање се непрекидно одвија у простору и времену. Област физике која проучава најједноставније облике кретања назива се **механика**. Најједноставнији облик кретања је механичко кретање. Класична механика проучава механичко кретање укључујући и узроке (силе) које до њега доводе. **Кинематика** се бави проучавањем кретања механичких објеката, не узимајући у обзир њихову материјалност као ни узроке који условљавају та кретања. Као засебан део механике, кинематика се издвојила тек у првој половини XIX века и то као део механике који проучава геометријска својства кретања тела. Најближа наука кинематици је геометрија, јер се она бави проучавањем простора, а кинематика поред простора узима у обзир и време као физичку величину. Сва проучавања у кинематици заснивају се на геометријским аксиомама (не уводе се додатне аксиоме), па се често кинематика назива и геометрија кретања.

Основна кинематичка подела кретања тела заснива се на кинематичким карактеристикама као што су брзина и убрзање. Кретање може бити равномерно и неравномерно.

3.1 Механичко кретање без убрзања

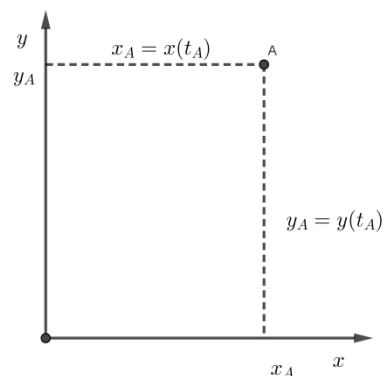
Постоје следећи типови кретања:

1. *Равномерно* – код кога је интензитет брзине сталан;
2. *Неравномерно* – код кога је интензитет брзине променљив;
3. *Праволинијско* – код кога је правац вектора брзине сталан;
4. *Криволинијско* – код кога је правац вектора брзине променљив.

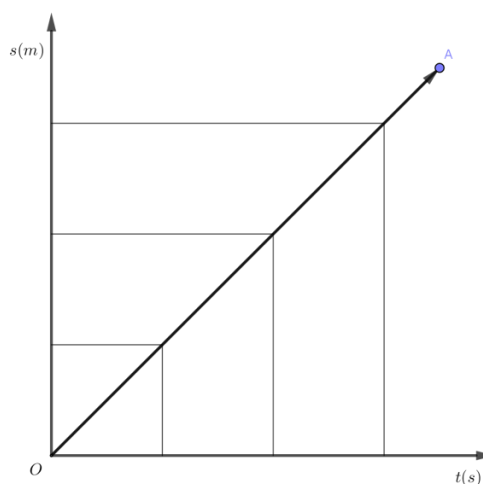
Свако реално транслаторно кретање тела настаје као комбинација два од предходно четири наведена кретања, при чему се комбинује неко од прва два са неким од друга два кретања. Транслаторно кретање је облик кретања при којем се све тачке тела крећу на исти начин. Дуж која спаја било које тачке тела помера се паралелно самој себи. Транслаторно се крећу, на пример, возови, бродови, санке.

Механичко кретање је промена положаја једног тела током времена у односу на неко друго тело. Да би се говорило о кретању потребно је да постоји бар два тела, једно које се креће и друго у односу на које се кретање обавља. Не постоји апсолутни положај, него само положај у односу на неко унапред одабрано, **референтно тело**. Положај сваког физичког објекта се одређује релативно, то јест у односу на унапред изабрано референтно тело, за који се везује координатни систем. Координатни систем у чијем се почетку налази референтно тело назива се референтни систем. На Слици 1 приказан је равански (x, y, t) референтни систем. Положај тела у тренутку t_A одређен је вредностима његових координата у том тренутку. Линија по којој се тело креће, односно скуп узастопних положаја кроз које тело прође у току кретања зове се **путања тела**. Тело занемарљивих димензија коме придружимо масу је **материјална тачка**.

Према геометријским карактеристикама путање кретања се деле на **праволинијска** и **криволинијска**. Тело које слободно пада на Земљину површину креће се праволинијски, а фудбалска лопта коју је шутнуо голман креће се криволинијски. На Слици 2 приказан је график зависности пређеног пута од времена код равномерног праволинијског кретања.



Слика 1. Равански референтни систем



Слика 2. График зависности пређеног пута од времена код равномерног праволинијског кретања

3.2 Праволинијско кретање

Код праволинијског кретања путања је права линија, односно дуж која је ограничена почетним и коначним положајем тела. Током кретања тело не мења правац, али може мењати смер кретања. Према кинематичким својствима кретања се деле на **равномерна** (једнолика) и **неравномерна** (убрзана). Кретање при којем тело (материјална тачка) у једнаким временским интервалима прелази једнаке путеве, назива се **равномерно** кретање. Кретање је неравномерно ако тело у једнаким временским интервалима прелази различите путеве. Ако је при томе путања права линија, реч је о **равномерном праволинијском кретању**. Једна од основних карактеристика кретања је **брзина** тела. Интензитет брзине при равномерном праволинијском кретању тела (v) израчунава се тако што се пређени пут (s) подели временом (t) кретања тела:

$$v = \frac{s}{t},$$

Полазећи од израза за брзину можемо да израчунамо пређени пут и време кретања:

$$s = v \cdot t, \quad t = \frac{s}{v}.$$

Кретање је неравномерно (променљиво) ако тело у једнаким временским интервалима прелази различите путеве, то јест ако мења брзину.

За брзину кажемо да је релативна ако њен интензитет, правац и смер зависе од избора референтног тела. Ако се тела крећу у истом смеру, релативна брзина једног тела у односу на друго добија се сабирањем њихових брзина, док је код кретања у супротним смеровима релативна брзина једнака разлици брзина.

Средња брзина је просечна брзина неравномерног кретања. Једнака је оној брзини при којој би тело за исто време прешло исти пут крећући се равномерно. Средња брзина променљивог праволинијског кретања израчунава се тако што се **укупни пређени пут** (s_u) подели са **укупним временом** (t_u) проведеним у путу:

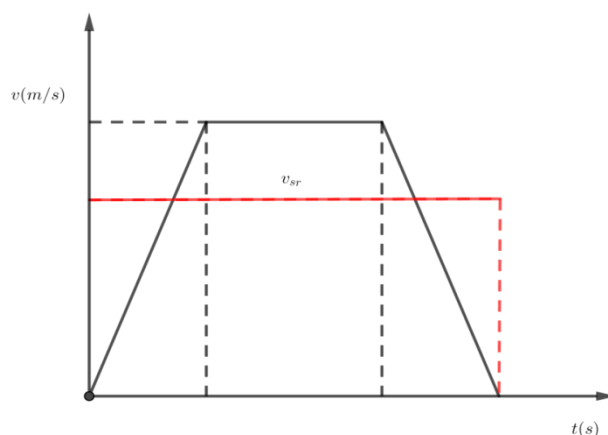
$$v_{sr} = \frac{s_u}{t_u}.$$

Укупан пут и укупно време израчунавају се по формулама:

$$s_u = s_1 + s_2 + \dots + s_n, \quad t_u = t_1 + t_2 + \dots + t_n.$$

Заменом у израз за средњу брзину добија се:

$$v_{sr} = \frac{s_u}{t_u} = \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{t_1 + t_2 + \dots + t_n}. \quad 3.2.1$$



Слика 3. График брзине код неравномерног кретања

3.3 Криволинијско кретање

У природи се ретко срећемо са до сада описиваним кретањем дуж праве линије. Много су чешћа кретања по кривим линијама. Кретање тела на некој равној површи (билијарска лопта на столу, клизање тела по леду), лист који пада са дрвета, деца на путу до школе, иду криволинијски.

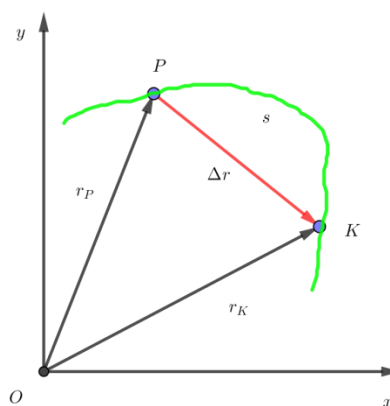
Тело се креће транслаторно ако свака права линија, везана за то тело, остаје при кретању паралелна свом почетном положају. Основне кинематичке величине у транслацији су:

Путања – линија коју као свој траг оставља за собом материјална тачка која се креће. Путања може бити праволинијска и криволинијска. Пређени пут је скаларна величина.

Пређени пут s (m), пут је део путање које тело пређе за одређено време.

На Слици 4 приказан је пут s као део криволинијске путање, ограничен тачкама P и K . Положај ових тачака одређен је у односу на референтну тачку O , векторима положаја $\vec{r}_P$ и $\vec{r}_K$. Вектор помераја тада представља векторску разлику вектора положаја крајње и почетне тачке тако одређеног пута:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_K - \vec{r}_P.$$



Слика 4. Део криволинијске путање

Померај је вектор који спаја почетну и крајњу тачку пута.

Време t (s) у кинематици појављује се у облику временских координата $t_1, t_2, \dots$ и временског интервала Δt . Временске координате одређују почетак или завршетак неког догађаја у оквиру стандардног мерења времена. Временски интервал одређује трајање датог догађаја.

Брзина јесте векторска величина, па је дефинисана својим интензитетом, правцем и смером. Интензитет брзине одређује колики пут тело пређе у јединици времена. Правац и смер вектора брзине се различито одређују у зависности од облика путање. Ако је кретање праволинијско, тада је правац вектора брзине одређен путањом, док је смер вектора брзине једнак смеру кретања тела. Ако је кретање криволинијско, тада је правац вектора брзине тела, које се налази у датој тачки путање, одређен тангентом на криволинијску путању у тој тачки. Смер вектора брзине је и тада једнак смеру кретања тела.

3.4 Примери кретања без убрзања

У овом поглављу разматрају се задаци, који се односе на градиво шестог, седмог, осмог разреда основне школе и прве године средње школе. Подељени су у категорије према тежини и наводе се поступно, од лакших ка тежим.

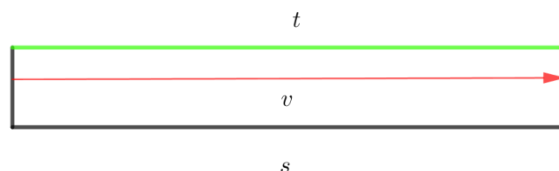
Задатак 1. (основни ниво)

Авион лети током 2 h и 15 min сталном брзином од 840 km/h . Колико ће растојање при том прелетети?

Поступак решавања задатка:

$$t = 2\text{ h } 15\text{ min (време лета авиона),}$$

$$v = 840\text{ km/h (брзина авиона).}$$



Слика 5.

$$s = ? \text{ (растојање које ће прелетети)}$$

Будући да је брзина дата у km/h , најједноставније је да време изразимо у сатима, тако да ћемо пут добити у километрима.

$$15\text{ min} = \frac{15}{60}\text{ h} = \frac{1}{4}\text{ h} = 0,25\text{ h},$$

$$\text{Дакле, } t = 2\text{ h} + 0,25\text{ h} = 2,25\text{ h}.$$

Применом формуле за пређени пут: $s = v \cdot t$ добијамо:

$$s = 840 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 2,25\text{ h} = 1890\text{ km}.$$

Одговор: Авион је прелетео растојање од 1890 *km*.

Задатак 2. (основни ниво)

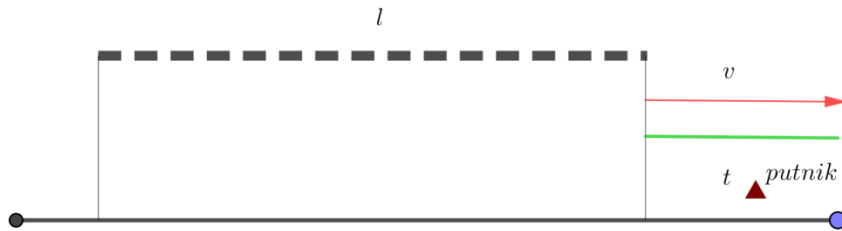
Воз од 15 вагона се креће равномерно и пролази поред путника на станици за 18 *s*. Којом брзином ће воз да прође поред путника ако је дужина једног вагона 20 *m*?

Поступак решавања задатка:

$t = 18 \text{ s}$ (време за које воз пролази поред путника),

$d = 20 \text{ m}$ (дужина једног вагона).

$v = ?$ (брзина са којом прође воз поред путника).



Слика 6.

Означимо са l дужину воза.

Пошто композиција састоји од укупно 15 вагона, дужина целог воза је:

$$l = d \cdot 15,$$

$$l = 20 \text{ m} \cdot 15 = 300 \text{ m}.$$

Пут који ће прође воз поред путника једнак је дужини воза:

$$s = l = v \cdot t,$$

Из формуле за пут можемо изразити брзину:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{l}{t},$$

$$v = \frac{300 \text{ m}}{18 \text{ s}} \approx 16,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Одговор: Воз ће да прође поред путника брзином 16,7 *m/s*.

Задатак 3. (средњи ниво)

- а) Тело се прва два сата кретало брзином 4 km/h , следећа три сата брзином 6 km/h , одредити средњу брзину кретања тела.

Поступак решавања задатка:

$$t_1 = 2 \text{ h (време кретања брзином } v_1 = 4 \text{ km/h),}$$

$$t_2 = 3 \text{ h (време кретања брзином } v_2 = 6 \text{ km/h).}$$

$$v_{sr} = ?$$

$$\text{Укупновреме кретања је: } t = t_1 + t_2 = 2 \text{ h} + 3 \text{ h} = 5 \text{ h.}$$

$$\text{Први део пута означимо са } s_1, \text{ тада је: } s_1 = v_1 \cdot t_1 = 2 \text{ h} \cdot 4 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 8 \text{ km.}$$

$$\text{Други део пута означимо са } s_2, \text{ тада је: } s_2 = v_2 \cdot t_2 = 3 \text{ h} \cdot 6 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 18 \text{ km.}$$

$$\text{Укупан пут је: } s = s_1 + s_2.$$

$$v_{sr} = \frac{s}{t} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} = \frac{v_1 \cdot t_1 + v_2 \cdot t_2}{t_1 + t_2}.$$

$$v_{sr} = \frac{8 \text{ km} + 18 \text{ km}}{5 \text{ h}} = \frac{26 \text{ km}}{5 \text{ h}} = 5,2 \text{ km/h.}$$

Када су дата времена, као у овом примеру, онда се ради о **аритметичкој средини**. Аритметичка средина, или просек се рачуна за скуп бројева као количник збира чланова и броја чланова скупа. Просећну брзину можемо да израчунамо помоћу формуле:

$$v_{sr} = \frac{v_1 + v_1 + v_2 + v_2 + v_2}{5}.$$

$$v_{sr} = \frac{4 \frac{\text{km}}{\text{h}} + 4 \frac{\text{km}}{\text{h}} + 6 \frac{\text{km}}{\text{h}} + 6 \frac{\text{km}}{\text{h}} + 6 \frac{\text{km}}{\text{h}}}{5} = 5,2 \text{ km/h.}$$

- б) Аутомобил прву половину пута се кретао брзином 100 km/h , а другу половину пута брзином 60 km/h . Која је средња брзина кретања?

Поступак решавања задатка:

$$v_1 = 100 \text{ km/h (брзина аутомобила на првој половини пута),}$$

$$v_2 = 60 \text{ km/h (брзина аутомобила на другој половини пута).}$$

$$v_{sr} = ?$$

Нека је s –пређени пут: $s = s_1 + s_2$.

$$s_1 = \frac{s}{2}, \quad t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{\frac{s}{2}}{v_1} = \frac{s}{2v_1},$$

$$s_2 = \frac{s}{2}, \quad t_2 = \frac{s_2}{v_2} = \frac{\frac{s}{2}}{v_2} = \frac{s}{2v_2},$$

$$v_{sr} = \frac{s}{t} = \frac{s}{t_1 + t_2} = \frac{s}{\frac{s}{2v_1} + \frac{s}{2v_2}} = \frac{s}{\frac{s}{2} \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \right)} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}.$$

Када су дати путеви, као у овом примеру, половину пута се кретао већом брзином, а остатак пута мањом брзином, онда се ради о **хармонијској средини**. Хармонијска средина је реципрочна вредност аритметичке средине реципрочних вредности скупа елемената.

$$v_{sr} = \frac{2}{\frac{1}{100} \frac{km}{h} + \frac{1}{60} \frac{km}{h}} = \frac{2}{\frac{3}{300} \frac{km}{h}} \approx 74 \text{ km/h}.$$

Одговор: а) Средња брзина тела је $5,2 \text{ km/h}$.

б) Средња брзина аутомобила је 74 km/h .

Задатак 4. (средњи ниво)

Ана и Милена се налазе на бициклистичкој стази на међусобној удаљености од 3 km . Истовремено крећу једна другој у сусрет. Ана је на ролерима и креће се брзином од 13 km/h , а Милена вози бицикл брзином од 17 km/h . После колико времена ће се срести? Колике путеве ће прећи?

Поступак решавања задатка:

Анино и Миленино време кретања (t) је једнако.

$s = 3 \text{ km}$ (почетна удаљеност Ане и Милене),

$v_1 = 13 \text{ km/h}$ (Анина брзина),

$v_2 = 17 \text{ km/h}$ (Миленина брзина).



Слика 7.

$t = ?$

$s_1 = ?$ (Пут који пређе Ана),

$s_2 = ?$ (Пут који пређе Милена).

На Слици 7 приказани су путеви које пређу Ана и Милена, тачке из којих крећу и тачка сусрета (S). Видимо да је:

$$s = s_1 + s_2. \quad (3.1)$$

Ана ће пут s_1 прећи за време t крећући се брзином v_1 :

$$v_1 = \frac{s_1}{t} \Rightarrow s_1 = v_1 \cdot t. \quad (3.2)$$

Милена ће пут s_2 прећи за време t крећући се брзином v_2 :

$$v_2 = \frac{s_2}{t} \Rightarrow s_2 = v_2 \cdot t. \quad (3.3)$$

Примећујемо да у свакој од ових формула имамо по две непознате величине, дакле, не можемо их директно израчунати. Зато ћемо у формули (3.1) заменити изразе за s_1 и s_2 (формуле (3.2) и (3.3)). Тако ћемо добити: $s = s_1 + s_2 = v_1 \cdot t + v_2 \cdot t$. Време као заједнички члан у оба сабирка можемо записати испред заграда: $s = t \cdot (v_1 + v_2)$. Одавде можемо одредити време:

$$t = \frac{s}{v_1 + v_2}. \quad (3.4)$$

Сад можемо унети бројчане вредности и израчунати време:

$$t = \frac{3 \text{ km}}{13 \frac{\text{km}}{\text{h}} + 17 \frac{\text{km}}{\text{h}}} = 0,1 \text{ h}.$$

Ово време можемо претворити у минуте: $t = 0,1 \text{ h} = 0,1 \cdot 60 \text{ min} = 6 \text{ min}$.

Уношењем вредности за време у формулама (3.2) и (3.3) добићемо:

$$s_1 = 13 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 0,1 \text{ h} = 1,3 \text{ km}, \quad s_2 = 17 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 0,1 \text{ h} = 1,7 \text{ km}.$$

Одговор: Ана и Милена ће се срести након 6 min. Ана је прешла 1,3 km, а Милена 1,7 km до места сусрета.

Задатак 5. (средњи ниво)

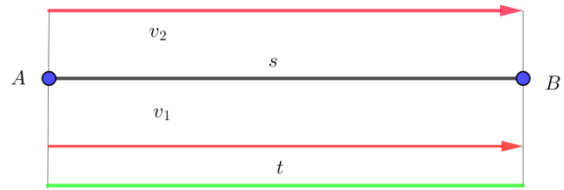
Раздаљину између градова брзи воз брзином 90 km/h пролази за 1,5 сат брже него теретни воз, који се креће брзином 60 km/h. Израчунати растојање између градова?

Поступак решавања задатка:

$v_1 = 90 \text{ km/h}$ (брзина брзог воза),

$v_2 = 60 \text{ km/h}$ (брзина теретног воза),

$\Delta t = 1,5 \text{ h}$ (време за које растојање између градова брзи воз пролази брже у односу на теретни воз).



Слика 8.

$s = ?$ (растојање између градова).

Нека је s растојање између градова. Из формуле $s = v \cdot t$, изразимо време и добијамо:

$$t = \frac{s}{v}.$$

Одавде време брзог воза је $t_1 = \frac{s}{90}$, а време теретног воза је $t_2 = \frac{s}{60}$.

Из услова задатка познато је да је брзом возу потребно $1,5 \text{ h}$ мање времена. Одавде следи:

$$\frac{s \text{ km}}{60 \frac{\text{km}}{\text{h}}} - \frac{s \text{ km}}{90 \frac{\text{km}}{\text{h}}} = 1,5 \text{ h},$$

Решавамо једначину:

$$\frac{90 \cdot s - 60 \cdot s}{5400} = 1,5,$$

$$\frac{30 \cdot s}{5400} = 1,5 \Rightarrow 3 \cdot s = 540 \cdot 1,5 \Rightarrow 3 \cdot s = 810 \Rightarrow s = 810 : 3.$$

Коначно: $s = 270 \text{ km}$.

Одговор: Растојање између градова је једнако 270 km .

Задатак 6. (напредни ниво)

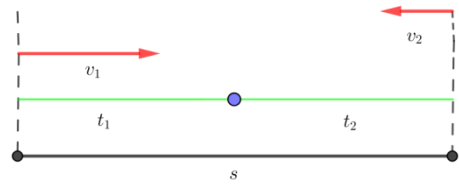
По излазку из свог гнезда, веверица донесе орах са дрвета у гнездо за 20 s . Одредите колико је удаљено стабло ораха од гнезда ако се зна да је веверица прелазила без ораха 5 m/s , а са орахом 3 m/s . (За узимање ораха није губила време нити се успут задржавала.)

Поступак решавања задатка:

$$t = 20 \text{ s},$$

$v_1 = 5 \text{ m/s}$ (брзина кретања веверице без ораха),

$v_2 = 3 \text{ m/s}$ (брзина кретања веверице са орахом),



Слика 9.

$$s = ?$$

Обележимо време одласка веверице од гнезда до стабла ораха са t_1 , а време повратка веверице (са орахом) од стабла до гнезда са t_2 . Тада је:

$$t = t_1 + t_2. \quad (4.1)$$

Такође је:

$$s = v_1 \cdot t_1 \quad \text{и} \quad s = v_2 \cdot t_2. \quad (4.2)$$

Из формула (4.2) добијамо $v_1 \cdot t_1 = v_2 \cdot t_2$, одакле следи:

$$t_2 = t_1 \cdot \frac{v_1}{v_2}.$$

Ако предходни израз заменимо у формулу (4.1), добијамо: $t = t_1 + t_1 \cdot \frac{v_1}{v_2}$.

Одатле је:

$$t_1 = \frac{t}{1 + \frac{v_1}{v_2}},$$

$$t_1 = \frac{20 \text{ s}}{1 + \frac{5 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{3 \frac{\text{m}}{\text{s}}}} = 7,5 \text{ s}.$$

Дакле, удаљеност стабла ораха од гнезда је:

$$s = v_1 \cdot t_1.$$

Сад можемо унети бројчане вредности:

$$s = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 7,5 \text{ s} = 37,5 \text{ m}.$$

Одговор: Удаљеност стабла ораха од гнезда је $37,5 \text{ m}$.

Задатак 7. (напредни ниво)

Путник је из села пошао ка железничкој станици. Првих сат времена се кретао брзином од 3 km/h , али се тада досетио да би, крећући се и даље истом брзином, закаснио на воз 40 min . Зато је остали део пута прешао брзином од 4 km/h и дошао на станицу 45 min пре поласка воза. Колико је растојање од села до железничке станице?

Поступак решавања задатка:

$t_1 = 1 \text{ h}$ (време кретања на првом делу пута),

$v_1 = 3 \text{ km/h}$ (брзина кретања путника током првог часа).

Означимо време за које би закаснио путник, ако би се кретао почетном брзином са $\Delta t_1 = 40 \text{ min} = \frac{40}{60} \text{ h} = \frac{2}{3} \text{ h}$. Након тога путник је повећао брзину:

$v_2 = 4 \text{ km/h}$ (брзина кретања путника на преосталом путу до станице),

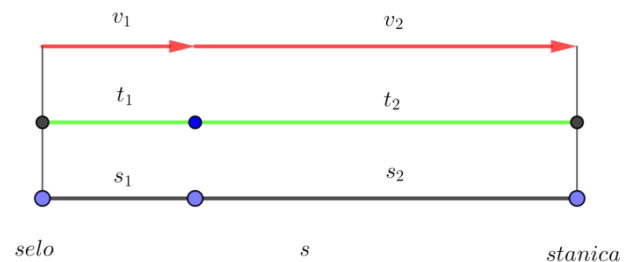
Пошто је путник променио почетну брзину, дошао је на станицу 45 min раније, пре поласка воза, то време означимо са:

$$\Delta t_2 = 45 \text{ min} = \frac{45}{60} \text{ h} = \frac{3}{4} \text{ h}.$$

$s = ?$ (растојање од села до станице).

Током првог часа путник пређе пут:

$$s_1 = v_1 \cdot t_1 = 3 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 1 \text{ h} = 3 \text{ km}.$$



Слика 10.

Обележићемо преостали део пута са s_2 , а време за које је путник прешао тај део пута са t_2 , тада је: $s = s_1 + s_2$ и

$$t_2 = \frac{s_2}{v_2}. \quad (6.1)$$

Да је путник наставио да се креће истом брзином као током првог часа, други део пута прешао би за време које ћемо означити са t_3 :

$$t_3 = \frac{s_2}{v_1}. \quad (6.2)$$

Из услова задатка сада следи: $t_3 - t_2 = \Delta t_1 + \Delta t_2$.

Даље заменом t_3 и t_2 са (6.1) и (6.2) добијамо:

$$\frac{s_2}{v_1} - \frac{s_2}{v_2} = \Delta t_1 + \Delta t_2.$$

Из претходне формуле налазимо:

$$\frac{s_2}{v_1} - \frac{s_2}{v_2} = \Delta t_1 + \Delta t_2 \Rightarrow \frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} = \frac{\Delta t_1 + \Delta t_2}{s_2}.$$

Коначно:

$$s_2 = \frac{\Delta t_1 + \Delta t_2}{\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2}}.$$

Израчунавамо:

$$s_2 = \frac{\frac{2}{3}h + \frac{3}{4}h}{\frac{1}{3\frac{km}{h}} - \frac{1}{4\frac{km}{h}}} = \frac{\frac{17}{12}h}{\frac{1}{12\frac{km}{h}}} = 17\text{ km},$$

$$s = 3\text{ km} + 17\text{ km} = 20\text{ km}.$$

Одговор: Растојање од села до железничке станице је 20 km.

Задатак 8. (напредни ниво)

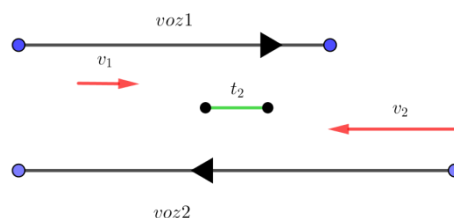
Два воза крећу се на паралелним колосецима у супротним смеровима. Брзина једног воза износи 200 km/h, а другог 250 km/h. Спорији воз је за четвртину своје дужине краћи од бржег. Путник из споријег воза измерио је да је бржи воз прошао поред њега за 2 секунде. За колико секунди је прошао спорији воз поред путника који је седео у бржем возу?

Поступак решавања задатка:

$v_1 = 200\text{ km/h}$ (брзина споријег воза),

$v_2 = 250\text{ km/h}$ (брзина бржег воза),

$t_2 = 2\text{ s}$ (време за које пролази бржи воз).



Слика 11.

$t_1 = ?$

Означимо дужину споријег воза са d_1 , дужину бржег воза са d_2 , притом из услова задатка важи да је:

$$d_1 = d_2 - \frac{d_1}{4} \Rightarrow 4d_1 = 4d_2 - d_1 \Rightarrow 4d_1 + d_1 = 4d_2 \Rightarrow 5d_1 = 4d_2 \Rightarrow d_1 = \frac{4d_2}{5}.$$

Како се возови крећу истим правцем, али супротним смеровима, њихова релативна брзина износи:

$$v = v_1 + v_2 = 200 \frac{km}{h} + 250 \frac{km}{h} = 450 \frac{km}{h}.$$

Поред путника из споријег воза, бржи воз пролази за $t_2 = 2 \text{ s} = \frac{1}{1800} \text{ h}$, одакле је његова дужина:

$$d_2 = v \cdot t_2 = 450 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1}{1800} \text{ h} = 0,525 \text{ km} = 525 \text{ m}.$$

Сад можемо да израчунамо дужину споријег воза:

$$d_1 = \frac{4 \cdot 525 \text{ m}}{5} = 420 \text{ m}.$$

Време проласка споријег воза поред путника у бржем износи:

$$t_1 = \frac{d_1}{v} = \frac{d_1}{d_2} \cdot t_2 = \frac{420 \text{ m}}{525 \text{ m}} \cdot 2 \text{ s} = 1,6 \text{ s}.$$

Одговор: Време проласка споријег воза поред путника у бржем износи 1,6 s.

Задатак 9. (напредни ниво)

Тело се на првој трећини пута кретало брзином од 20 m/s . Да би прешло остатак пута било му је потребно четири пута више времена него на првој трећини пута. Израчунај средњу брзину тела на целом путу.

Поступак решавања задатка:

У овом примеру нису дате бројчане вредности физичких величина, већ њихови односи. Те односе треба правилно записати и касније уврстити у одговарајуће формуле.

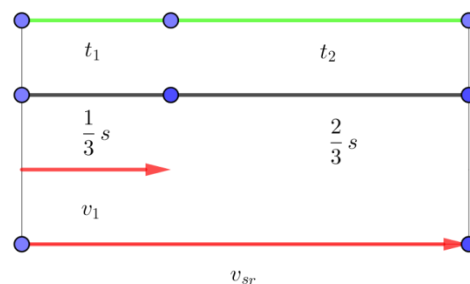
Означићемо први део пређеног пута са s_1 , брзину на том делу пута са v_1 , одговарајуће време са t_1 . Ознаке које се односе на остатак пута имаће индекс 2. Сада можемо записати податке и наследећи начин:

Укупан пут: $s_u = s_1 + s_2$,

$$s_1 = \frac{s_u}{3}, \quad s_2 = \frac{2s_u}{3},$$

$$t_u = t_1 + t_2, \quad t_2 = 4 \cdot t_1,$$

$$v_1 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$



Слика 12.

$$v_{sr} = ?$$

Формула за средњу брзину гласи:

$$v_{sr} = \frac{s_u}{t_u}.$$

Ниједну од ових величина не можемо директно израчунати. Да бисмо смањили број непознатих величина, t_u ћемо изразити преко t_1 , заменом t_2 са $4t_1$: $t_u = t_1 + 4t_1 = 5t_1$. Укупан пут : $s_u = 3s_1$.

Ако ове изразе унесемо за формулу за средњу брзину и узмемо у обзир то да је:

$$v_1 = \frac{s_1}{t_1},$$

добитоћемо:

$$v_{sr} = \frac{s_u}{t_u} = \frac{3s_1}{5t_1} = \frac{3}{5} \cdot v_1 = \frac{3}{5} \cdot 20 \frac{m}{s} = 12 \frac{m}{s}.$$

Одговор: Средња брзина је 12 m/s .

Задатак 10. (напредни ниво)

Средња брзина бициклисте на читавој стази износи 16 km/h . Бициклиста прелази прву четвртину стазе за време од 20 min . За које време ће прећи преостали део стазе, уколико преостало растојање до циља износи 9 km ? Уколико се бициклиста на преосталом делу стазе креће константном брзином, одредити средњу брзину на првој половини читаве стазе.

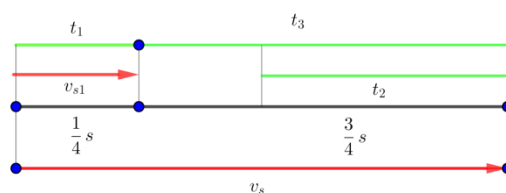
Поступак решавања задатка:

$v_s = 16 \text{ km/h}$ (средња брзина бициклисте на читавој стази),

$t_1 = 20 \text{ min}$ (време кретања на првој четвртини стазе),

$s_2 = 9 \text{ km}$ (преостало растојање до циља).

$v_{s1} = ?$ (средња брзина на првој половини читаве стазе).



Слика 13.

Средња брзина на читавом путу износи:

$$v_s = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2}. \quad (9.1)$$

Прва четвртина пута је $s_1 = \frac{1}{4}s$, а друга је $s_2 = \frac{3}{4}s = 9 \text{ km}$.

Укупна дужина стазе износи: $s = 9 \text{ km} : \frac{3}{4} = 12 \text{ km}$,

$$s = s_1 + s_2, \quad s_1 = s - s_2,$$

$$s_1 = 12 \text{ km} - 9 \text{ km} = 3 \text{ km}.$$

Из формуле (9.1) можемо да одредимо време кретања на другој половини читавог пута t_2 :

$$t_2 = \frac{s}{v_s} - t_1.$$

Ускладимо физичке величине: $t_1 = 20 \text{ min} = \frac{1}{3} \text{ h}$;

$$t_2 = \frac{12 \text{ km}}{16 \frac{\text{km}}{\text{h}}} - \frac{1}{3} \text{ h} = \frac{5}{12} \text{ h}.$$

Означимо t_3 време за које бициклиста пређе другу четвртину читаве стазе.

Тада, средња брзина на првој половини пута износи:

$$v_{s1} = \frac{s}{2(t_1 + t_3)}.$$

Како је брзина бициклисте на преосталом делу стазе:

$$v_2 = \frac{s_2}{t_2} = \frac{9 \text{ km}}{\frac{5}{12} \text{ h}} = 21 \frac{3 \text{ km}}{5 \text{ h}}.$$

Добија се да је:

$$t_3 = \frac{s}{4v_2} = \frac{12 \text{ km}}{4 \cdot 21 \frac{3 \text{ km}}{5 \text{ h}}} = \frac{12 \text{ km}}{4 \cdot \frac{108}{5} \frac{\text{km}}{\text{h}}} = \frac{12 \text{ km}}{\frac{432}{5} \frac{\text{km}}{\text{h}}} = \frac{12 \cdot 5}{432} \text{ h} = \frac{60}{432} \text{ h} = \frac{5}{36} \text{ h}.$$

Израчунамо:

$$v_{s1} = \frac{12 \text{ km}}{2 \cdot \left(\frac{1}{3} \text{ h} + \frac{5}{36} \text{ h} \right)} = \frac{12 \text{ km}}{2 \cdot \left(\frac{12}{36} \text{ h} + \frac{5}{36} \text{ h} \right)} = \frac{12 \text{ km}}{2 \cdot \frac{17}{36} \text{ h}} = \frac{12 \text{ km}}{\frac{17}{18} \text{ h}} = \frac{12 \cdot 18}{17} \frac{\text{km}}{\text{h}} \approx 12 \frac{12}{17} \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Одговор: Средња брзина на првој половини читаве стазе је приближно $12 \frac{12}{17} \text{ km/h}$.

Задатак 11. (напредни ниво)

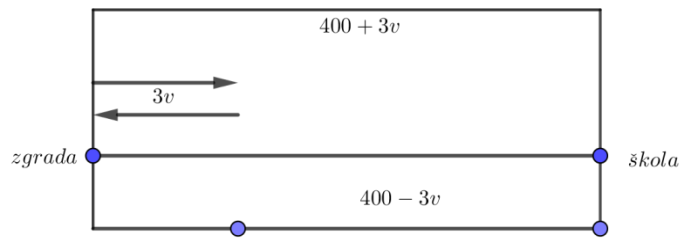
Два ученика су кренула истовремено у школу заједно из исте зграде једнаким брзинама. После 3 минута један ученик се сетио да је код куће заборавио свеску, те се вратио по њу брзином која је већа од полазне за 60 m/min . Узевши свеску вратио се према школи истом брзином и сустигао другара који је управо улазио у школу. Ако је растојање од зграде до школе 400 m одредити првобитну брзину кретања ученика.

Поступак решавања задатка:

$t = 3 \text{ min}$ (време након ког први ученик се вратио у зграду),

$v_1 = v + 60 \text{ m/min}$ (брзина са којом се вратио ученик, која је већа од полазне),

$s = 400 \text{ m}$ (растојање од зграде до школе).



Слика 14.

Нека је почетна брзина ученика v .

Тада је укупан пут од момента када су се два дечака растала једнак:

$$s + s_1 = 400 + 3v.$$

Брзином:

$$v_1 = v + 60.$$

Други ученик за исто време прешао пут:

$$s - s_1 = 400 - 3v,$$

са почетном брзином v . Када изразимо ово време из формуле $s = v \cdot t \Rightarrow t = \frac{s}{v}$ на два начина добијамо једначину:

$$\frac{400 + 3v}{v + 60} = \frac{400 - 3v}{v},$$

$$(v + 60) \cdot (400 - 3v) = (400 + 3v) \cdot v,$$

$$400v + 24000 - 180v - 3v^2 = 400v + 3v^2,$$

$$400v + 24000 - 180v - 3v^2 - 400v - 3v^2 = 0$$

$$-6v^2 - 180v + 24000 = 0$$

$$v^2 + 30v - 4000 = 0$$

$$v_1 = \frac{-30 + \sqrt{900 + 16000}}{2} = \frac{-30 + \sqrt{16900}}{2} = \frac{-30 + 130}{2} = 50 \frac{\text{m}}{\text{min}},$$

$$v_2 = \frac{-30 - \sqrt{16900}}{2} = \frac{-30 - 130}{2} = -80.$$

У задацима из физике, од поменутих два решења квадратне једначине, по правилу, физички смисао има само једно. У нашем примеру $v = 50 \text{ m/min}$, друго, математички исправно решење, даје најчешће физички бесмислен резултат. Правац брзине се поклапа са правцем пута и смер брзине је исти као и смер кретања, у датом примеру вектор почетне брзине усмерен је у позитивном смеру, зато негативан одговор нема физички смисао. Битно је у таквим задацима обратити пажњу на избор решења које има физички смисао.

Ускладимо јединице : $50 \text{ m} = 0,05 \text{ km}$, $1 \text{ min} = \frac{1}{60} \text{ h}$,

$$\frac{5}{100} \text{ km} : \frac{1}{60} \text{ h} = \frac{5}{100} \text{ km} \cdot \frac{60}{1} \text{ h} = \frac{300 \text{ km}}{100 \text{ h}} = 3 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Одговор: Почетна брзина ученика је једнака 50 m/min .

Задатак 12. (напредни ниво)

Са старта кружне стазе креће бициклиста. Након 40 минута, пре него што је обишао пун круг, за њим креће мотоциклиста. Он сустиже бициклисту први пут након 20 минута, а други пут 40 минута касније. Ако је дужина кружне стазе 50 километара, израчунати брзину бициклисте. Одговор изразити у km/h .

Поступак решавања задатка:

$t = 40 \text{ min}$ (време кретања мотоциклисте после бициклисте),

$t_1 = 20 \text{ min}$ (време сусрета први пут),

$t_3 = 40 \text{ min}$ (време сусрета други пут),

$s = 50 \text{ km}$ (дужина кружне стазе).

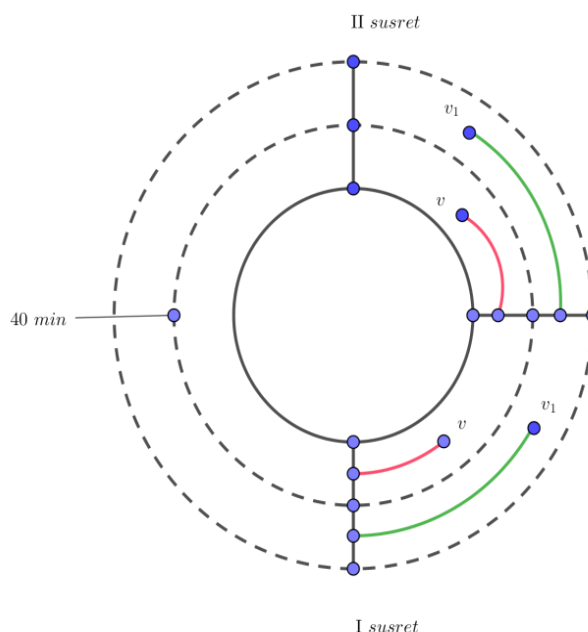
$v = ?$ (брзина бициклисте)

Нека је брзина бициклисте v , а мотоциклисте v_1 . Време које био је у путу бициклиста до тренутка првог сусрета означимо са t_4 :

$$t_4 = t + t_1,$$

$$t_3 = 40 \text{ min} + 20 \text{ min} = 60 \text{ min}.$$

Мотоциклиста до првог сусрета



Слика 15.

био је у путу $t_1 = 20 \text{ min}$. За то време прошли су једнаке путеве:

$$t \cdot v = t_1 \cdot v_1 \Leftrightarrow 60v = 20v_1. \quad (1.11)$$

Између сусрета бициклиста прошао је пут $t_3 \cdot v = 40v$, а мотоциклиста $t_3 \cdot v_1 = 40v_1$, али мотоциклиста прошао тачно један круг више, што је приказано на Слици 15, наравно на слици у изгледу спирале приказан је кружни пут само ради прегледности, јер они неколико пута пролазе исте тачке пута.

Одавде следи:

$$t_3 \cdot v + s = t_3 \cdot v_1 \Leftrightarrow 40v + 50 = 40v_1. \quad (2.11)$$

Саставимо систем једначина:

$$\begin{cases} 60v = 20v_1 \\ 40v + 50 = 40v_1 \end{cases}, \quad \begin{cases} v_1 = 3v \\ 4v + 5 = 4v_1 \end{cases}$$

$$4v + 5 = 12v,$$

$$12v - 4v = 5,$$

$$v = \frac{5}{8} = 0,625 \frac{\text{km}}{\text{min}} \cdot 60 = 37,5 \text{ km/h}.$$

Одговор: Брзина бициклисте је једнака $37,5 \text{ km/h}$.

Задатак 13. (напредни ниво)

Покретне степенице у подземном пролазу имају нагиб 30° (према хоризонтали). Њихова брзина је 60 cm/s . Човек који стоји на степеницама попне се њима до врха за 1 min . Одредити хоризонталну и вертикалну компоненту брзине степеница и дубину на којој се налази подземни пролаз.

Поступак решавања задатка:

$$v = 60 \text{ cm/s} \text{ (брзина степеница),}$$

$$\alpha = 30^\circ \text{ (угао нагиба степеница према хоризонтали),}$$

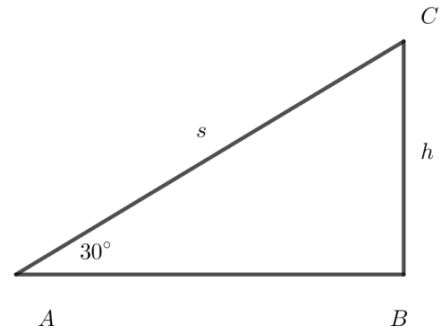
$$t = 1 \text{ min} \text{ (време за које човек попне се њима до врха).}$$

$$v_H = ? \text{ (хоризонтална компонента брзине),}$$

$$v_V = ? \text{ (вертикална компонента брзине),}$$

$$h = ? \text{ (дубина на којој се налази пролаз).}$$

Скицирајмо цртеже који илуструју суштину задатка. На Слици 17 видимо да, допуњавањем правоуглог троугла ABC , представљеног на Слици 16, до једнокостраничног, уочавамо да је хоризонтална компонента брзине v_H , једнака висини троугла, а вертикална v_V половини стране једнакостраничног троугла стране v (зато што лежи наспрам угла од 30° у правоуглом троуглу).



Слика 16.

Дакле,

$$v_H = \frac{v\sqrt{3}}{2} = \frac{60 \frac{cm}{s} \cdot 1,73}{2} \approx 51,9 \frac{cm}{s},$$

$$v_V = 60 \frac{cm}{s} : 2 = 30 \frac{cm}{s}.$$

Нека је дужина степеништа $s = vt$:

$$1 \text{ min} = 60 \text{ s},$$

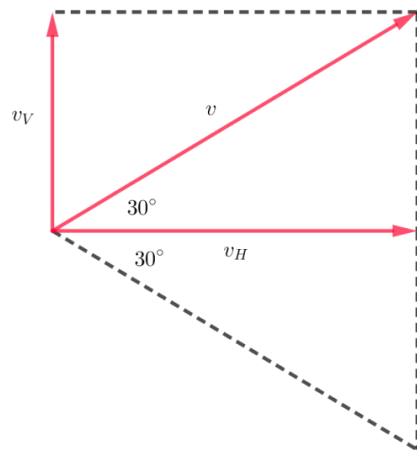
$$s = 60 \frac{cm}{s} \cdot 60 \text{ s} = 3600 \text{ cm} = 36 \text{ m}.$$

Висина степеништа је:

$$h = \frac{1}{2}s = \frac{1}{2}vt.$$

Према томе, дубина на којој се налази пролаз је :

$$h = \frac{1}{2}vt = \frac{1}{2} \cdot 60 \frac{cm}{s} \cdot 60 \text{ s} = 1800 \text{ cm} = 18 \text{ m}.$$



Слика 17.

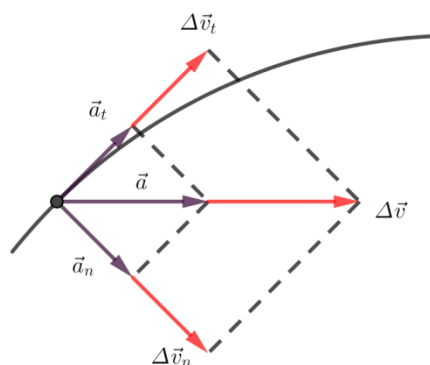
Одговор: Хоризонтална компонента брзине је једнака $51,9 \text{ m/s}$, вертикална компонента брзине је једнака 30 m/s , дубина на којој се налази подземни пролаз је 18 m .

4. Кретање са убрзањем

У свакодневном животу, за свако тело чија брзина расте кажемо да се креће убрзано. Авион на писти убрзава да би постигао довољно велику брзину и потом узлетео. На почетку трке ролера возачи покушавају да повећају своју брзину за што је могуће краће време, односно да што више убрзају.

4.1 Појам убрзања

Код неравномерног кретања брзина може мењати интензитет, правац и смер. Разликујемо две врсте брзине: средњу и тренутну брзину. Формула за средњу брзину је приказана у једном од претходних поглавља, формула (3.2.1).



Слика 18. Тангенцијално и нормално убрзање

Да би се дефинисала тренутна брзина, треба размотрити шта је то тренутак времена. Ако би смо узели ма коју конкретну вредност времена, ма колико она била мала, увек бисмо могли да задамо и неку мању вредност времена, која би тада била ближа појму тренутка. Зато се у физици под појмом тренутка подразумева бесконачно мали интервал времена, што се обележава са $\Delta t \rightarrow 0$. Ако је $\Delta s \rightarrow 0$ (бесконачно мали) пут који је пређен за време $\Delta t \rightarrow 0$, онда тренутна брзина је једнака средњој брзини, али измереној у бесконачно малом интервалу времена:

$$v_{tr} = v_{sr}, \quad (\Delta t \rightarrow 0),$$

$$v_{tr} = \frac{\Delta s}{\Delta t}, \quad (\Delta t \rightarrow 0).$$

Да би се описале ове промене код неравномерног кретања, уводи се физичка величина **убрзање**.

Убрзање a јединица је (m/s^2) је векторска величина, па је зато дефинисано својим интензитетом, правцем и смером. Интензитет убрзања одређује колика је промена брзине у јединици времена:

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t},$$

где је Δv - промена брзине, Δt - интервал времена у коме долази до промене брзине. Ако је кретање тела успорено убрзање има негативну бројну вредност која одређује за колико се смањи брзина сваке секунде. Дакле, убрзање се може очекивати код оних кретања код којих промена брзине постоји, а то су сва неравномерна и сва криволинијска кретања. Из истог разлога убрзања нема код кретања код којих је брзина стална, а то су равномерна и равномерно праволинијска кретања. Компликације са убрзањем настају зато што је брзина вектор, па јој се може мењати бројна вредност - код неравномерних кретања, али и правац - код криволинијских кретања. Ове две промене брзине су разнородне, па их не може одређивати исто убрзање. Зато у кинематици постоје две врсте убрзања: **тангенцијално** убрзање $\vec{a}_t$ и **нормално** убрзање $\vec{a}_n$.

Тангенцијално убрзање одређује промену бројне вредности брзине, па се зато јавља код свих неравномерних кретања. Нормално убрзање одређује промену правца

брзине, па се зато јавља код свих криволинијских кретања. Укупно убрзање тела је једнако векторском збиру тангенцијалног и нормалног убрзања:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n.$$

Претпоставимо да је убрзање константно и да је кретање праволинијско. Нека тело у почетном тренутку $t = 0$ има брзину v_0 (почетна брзина). У каснијем тренутку t тренутну брзину тела означимо са v . Промена брзине за време t износи $v - v_0$, тако да убрзање једнако:

$$a = \frac{v - v_0}{t - 0} = \frac{v - v_0}{t}.$$

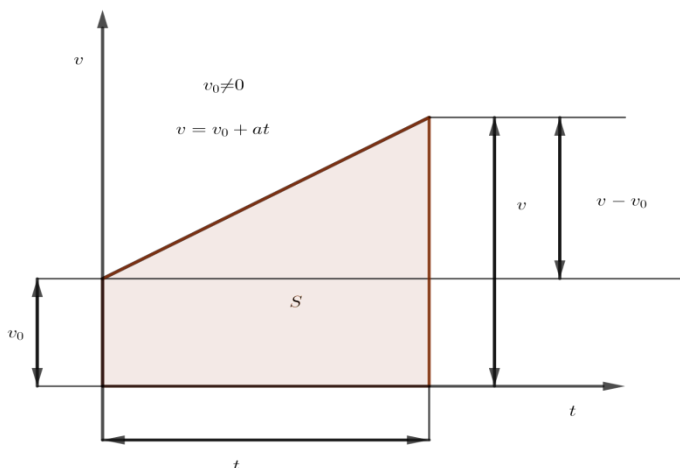
Тренутна брзина тела у тренутку t , које се креће праволинијски, равномерно убрзано, с почетном брзином је једнака:

$$v = v_0 + at.$$

Тренутна брзина код равномерно успореног кретања:

$$v = v_0 - at.$$

Кад тело започне своје кретање, има брзину v_0 . Како време пролази, брзина расте. Кретање са константним убрзањем или успорењем назива се равномерно променљиво или равномерно убрзано. Ако посматрамо кретање до тренутка t , брзина ће бити највећа на крају кретања. Брзина се равномерно мења, па закључујемо да је повећање брзине једнако у првој и у другој половини пута. То значи да је средња вредност брзине код равномерно убрзаног кретања за време t једнака тренутној брзини на половини времена, тј. када је време једнако $\frac{t}{2}$. Због тога је средња брзина код праволинијског, равномерно убрзаног кретања:



Слика 19. График зависности брзине од времена

$$v_s = v_0 + \frac{1}{2}at.$$

Укупан пут s који тело пређе за време t повезан са средњом брзином формулом $s = v_s t$. Пошто знамо чему је једнака средња брзина код равномерно променљивог кретања, можемо да нађемо временску зависност пређеног пута од времена за ову врсту кретања. Потребно је само да у изразу за пут уврстимо одговарајућу зависност средње брзине од времена и добијамо да је пређени пут код равномерно убрзаног кретања је: $s = v_0 t +$

$\frac{1}{2}at^2$, односно успореног кретања је: $s = v_0t - \frac{1}{2}at^2$. На Слици 19 пут је једнак површини трапеца.

Брзина тела које се креће праволинијски и убрзано без почетне брзине је:

$$v = at.$$

За време t , такво тело пређе пут:

$$s = \frac{1}{2}at^2.$$

Да бисмо добили везу између пута и брзине потребно је, из формуле за брзину изразити време: $t = \frac{v}{a}$ и уврстити у формулу за пут, тада добијамо:

$$s = \frac{1}{2}a \cdot \frac{v^2}{a^2} = \frac{v^2}{2a},$$

$$v^2 = 2as \Rightarrow v = \sqrt{2as}.$$

У случају убрзаног кретања са почетном брзином извођење формуле је слично:

$$v = v_0 + at,$$

$$at = v - v_0,$$

$$t = \frac{v - v_0}{a},$$

$$s = v_0 \cdot \frac{v - v_0}{a} + \frac{1}{2}a \left(\frac{v - v_0}{a} \right)^2 = \frac{v - v_0}{a} \cdot \left(v_0 + \frac{a}{2} \cdot \frac{v - v_0}{a} \right),$$

$$s = \frac{v - v_0}{a} \cdot \left(\frac{2v_0 + v - v_0}{2} \right) = \frac{v - v_0}{a} \cdot \frac{v + v_0}{2},$$

$$s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a},$$

$$v^2 - v_0^2 = 2as,$$

$$v^2 = v_0^2 + 2as \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + 2as}.$$

4.2 Примери кретања са убрзањем

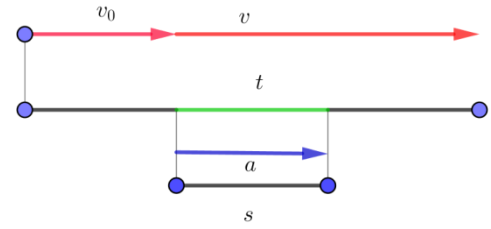
Задатак 1. (основни ниво)

Тркачу који се креће из мировања потребне су четири секунде да достигне брзину од осам метара у секунди. Колико је убрзање тог тркача?

Поступак решавања задатка:

$\Delta v = 8 \text{ m/s}$ (промена брзине тркача),
 $t = 4 \text{ s}$ (време потребно за ту промену).

$a = ?$ (убрзање тркача)



Слика 20.

Убрзање на одређеном путу јесте количник промене брзине и времена потребног за ту промену. Дакле:

$$a = \frac{\Delta v}{t},$$

$$a = \frac{8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{4 \text{ s}} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

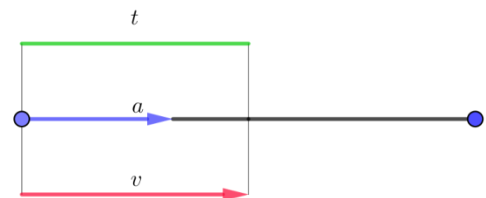
Одговор: Убрзање тркача је једнако $2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Задатак 2. (основни ниво)

Коњ се креће по правом путу брзином 4 m/s . У једном тренутку почне да се креће равномерно променљиво и за време од четири секунде достиже брзину 12 m/s . Колико је убрзање коња? Нађи пут који коњ прешао за време убрзавања. Колики пут би прешао коњ да није убрзао?

Поступак решавања задатка:

$v_0 = 4 \text{ m/s}$ (почетна брзина коња),
 $t = 4 \text{ s}$ (време повећавања брзине),
 $v = 12 \text{ m/s}$ (брзина коња након убрзавања),



Слика 21.

$s = ?$ (пут који је коњ прешао за време убрзавања),

$s_1 = ?$ (пут који би прешао коњ да није убрзао).

Убрзање је једнако:

$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{12 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{4 \text{ s}} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Пошто је убрзање познато, можемо да нађемо пут који коњ прешао и он износи:

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2,$$

$$s = 4 \frac{m}{s} \cdot 4 s + \frac{1}{2} \cdot 2 \frac{m}{s^2} \cdot 4^2 s^2 = 32 m.$$

Да није убрзао коњ би се кретао константном брзином $v_0 = 4 m/s$ и за четири секунде прешао пут:

$$s_1 = v_0 t = 4 \frac{m}{s} \cdot 4 s = 16 m.$$

Одговор: Пут који је коњ прешао за време убрзавања је једнак $32 m$, а да није убрзао коњ би прешао упола мање $16 m$.

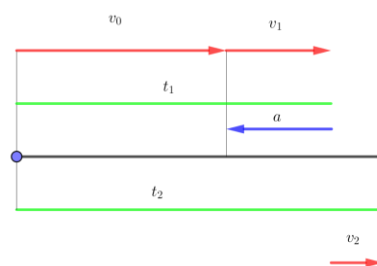
Задатак 3. (средњи ниво)

Аутобус се креће праволинијски равномерно променљиво и након 10 секунди има брзину $14 m/s$, док је 30 секунди од почетка кретања његова брзина $10 m/s$. Колика је почетна брзина аутобуса?

Поступак решавања задатка:

$v_1 = 14 m/s$ (тренутна брзина у тренутку $t_1 = 10 s$),

$v_2 = 10 m/s$ (тренутна брзина у тренутку $t_2 = 30 s$).



Слика 22.

$v_0 = ?$ (почетна брзина аутобуса).

Тренутне брзине аутобуса у тренуцима t_1 и t_2 су:

$$v_1 = v_0 + a t_1, \quad (3.1)$$

$$v_2 = v_0 + a t_2. \quad (3.2)$$

Овде су непознате величине почетна брзина v_0 и убрзање a аутобуса, одузимањем једначина (3.2) и (3.1) добијамо:

$$v_2 - v_1 = v_0 + a t_2 - (v_0 + a t_1),$$

$$v_2 - v_1 = v_0 + a t_2 - v_0 - a t_1,$$

$$v_2 - v_1 = a t_2 - a t_1,$$

$$v_2 - v_1 = a(t_2 - t_1),$$

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1},$$

$$a = \frac{10 \frac{m}{s} - 14 \frac{m}{s}}{30 s - 10 s} = \frac{-4 \frac{m}{s}}{20 s} = -0,2 \frac{m}{s^2}.$$

Добили смо негативно убрзање, јер се брзина аутобуса смањује.

Сад из формуле (3.1) добијамо: $v_0 = v_1 - at_1$,

$$v_0 = 14 \frac{m}{s} - 0,2 \frac{m}{s^2} \cdot 10 s = 14 \frac{m}{s} + 2 \frac{m}{s} = 16 \frac{m}{s}.$$

Одговор: Почетна брзина аутобуса је једнака $16 m/s$.

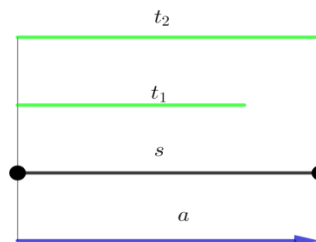
Задатак 4. (средњи ниво)

Колица се крећу са убрзањем $0,5 m/s^2$ без почетне брзине. Колики пут она пређу у четвртој секунди кретања?

Поступак решавања задатка:

$t_2 = 4 s$ (тренутак кретања колица),

$a = 0,5 m/s^2$ (убрзање колица).



Слика 23.

$s = ?$ (пут који пређе колица у тренутку $t_2 = 4 s$).

Нека је $t_1 = 3 s$ предходни тренутак кретања колица. Тада колица пређу пут:

$s_1 = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$, пошто се колица крећу без почетне брзине, $v_0 = 0$, па одавде:

$$s_1 = \frac{1}{2} at_1^2.$$

За време $t_2 = 4 s$ пређени пут је:

$$s_2 = \frac{1}{2} at_2^2.$$

У току четврте секунде колица пређу пут:

$$s = s_2 - s_1 = \frac{1}{2} at_2^2 - \frac{1}{2} at_1^2 = \frac{1}{2} a(t_2^2 - t_1^2).$$

Израчунајмо:

$$s = \frac{1}{2} \cdot 0,5 \frac{m}{s^2} (16 s^2 - 9 s^2) = 0,25 \frac{m}{s^2} \cdot 7 s = 1,75 m.$$

Одговор: Пут који колица пређу у четвртој секунди кретања је једнак $1,75 \text{ m}$.

Задатак 5. (средњи ниво)

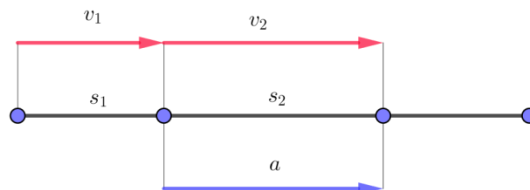
Воз полази са станице и креће се равномерно убрзано. У једном тренутку он има брзину 30 m/s , а 160 m даље брзина му је 50 m/s . Колико је убрзање воза и колики је пут он прешао пре него што је достигао брзину 30 m/s ?

Поступак решавања задатка:

$v_1 = 30 \text{ m/s}$ (брзине на другом делу пута),

$v_2 = 50 \text{ m/s}$ (брзина након убрзања),

$s_2 = 160 \text{ m}$ (други део пута).



Слика 24.

$a = ?$ (убрзање воза),

$s_1 = ?$ (пут који прешао воз пре убрзања).

У случају убрзаног кретања са почетном брзином формула за брзину је: $v^2 = v_0^2 + 2as$, формула за брзину на другом делу пута је:

$$v_2^2 = v_1^2 + 2as_2.$$

Одавде можемо да изразимо убрзање:

$$2as_2 = v_2^2 - v_1^2,$$

$$a = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2s_2}.$$

На почетку кретања брзина је:

$$v_1^2 = 2as_1,$$

па је пут једнак:

$$s_1 = \frac{v_1^2}{2a}.$$

Унесемо бројчане вредности и израчунавамо:

$$a = \frac{50^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} - 30^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{2 \cdot 160 \text{ m}} = \frac{2500 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} - 900 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{320 \text{ m}} = \frac{1600 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{320 \text{ m}} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$s_1 = \frac{30^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{2 \cdot 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \frac{900 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 90 \text{ m}.$$

Одговор: Убрзање воза је једнако 5 m/s^2 , пут који је он прешао пре него што је достигао брзину 30 m/s је 90 m .

Задатак 6. (напредни ниво)

Пошавши из мировања, аутомобил се по праволинијском путу једно време креће константним убрзањем $a_1 = 5 \text{ m/s}^2$, затим се неко време креће равномерно, а потом до заустављања константним успорењем од $a_2 = 5 \text{ m/s}^2$. Познато је да је укупно време кретања $t = 25 \text{ s}$, као и да је средња брзина аутомобила $v_{sr} = 72 \text{ km/h}$.

а) Колико се времена аутомобил кретао равномерно?

б) Приказати графички зависност убрзања и брзине од времена.

Поступак решавања задатка:

$a_1 = 5 \text{ m/s}^2$ (убрзање аутомобила на почетку пута),

$a_2 = 5 \text{ m/s}^2$ (успоравање аутомобила при заустављању),

$t = 25 \text{ s}$ (укупно време кретања),

$v_{sr} = 72 \text{ km/h}$ (средња брзина аутомобила).

$t_2 = ?$ (време за које се аутомобил кретао равномерно)

Укупан пут аутомобила може се одредити из средње брзине:

$$s = v_{sr} t. \quad (5.1)$$

Усклађујемо величине: $72 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 72 \cdot \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$,

$$s = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 25 \text{ s} = 500 \text{ m}.$$

Означићемо са s_1, s_2 и s_3 делове пута на којима се аутомобил креће убрзано, равномерно и успорено, а са t_1, t_2 и t_3 одговарајућа времена. Са a_1, a_2 означимо убрзање на првом, односно успоравање на трећем делу пута. За равномерно убрзано кретање на првом делу пута без почетне брзине, може се писати:

$$s_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 \quad (5.2)$$

$$v_1 = a_1 t_1 \quad (5.3)$$

где је v_1 брзина на крају првог дела пута. То је и брзина равномерног кретања на другом делу пута, који износи:

$$s_2 = v_1 t_2 = a_1 t_1 t_2. \quad (5.4)$$

Истовремено је то и почетна брзина равномерно успореног кретања на трећем делу пута. Пошто се аутомобил на крају зауставља, за овај део пута може се писати:

$$s_3 = v_1 t_3 - \frac{1}{2} a_2 t_3^2. \quad (5.5)$$

Пошто аутомобил на трећем делу пута се зауставља:

$$v_3 = v_1 - a_2 t_3 = 0. \quad (5.6)$$

Из формуле (5.3) следи:

$$a_2 t_3 = v_1 = a_1 t_1. \quad (5.7)$$

Из формуле (5.7) добијамо:

$$t_3 = \frac{v_1}{a_2}, t_1 = \frac{v_1}{a_1}.$$

Пошто $a_1 = a_2 = a = 5 \frac{m}{s^2}$ следи:

$$t_3 = t_1. \quad (5.8)$$

Укупно време кретања је:

$$\begin{aligned} t &= t_1 + t_2 + t_3 = 2t_1 + t_2, \\ t &= 2t_1 + t_2, \\ 2t_1 &= t - t_2, \\ t_1 &= \frac{t - t_2}{2}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Укупан пређени пут аутомобила износи:

$$\begin{aligned} s &= v_{sr} t = s_1 + s_2 + s_3, \\ s &= \frac{1}{2} a t_1^2 + a t_1 t_2 + \frac{1}{2} a t_1^2 = a t_1^2 + a t_1 t_2, \\ s &= a t_1^2 + a t_1 t_2, \\ v_{sr} t &= a t_1^2 + a t_1 t_2. \end{aligned}$$

Елиминацијом t_1 из формуле (5.9) добија се квадратна једначина:

$$\begin{aligned} v_{sr} t &= a \left(\frac{t - t_2}{2} \right)^2 + a \left(\frac{t - t_2}{2} \right) t_2, \\ v_{sr} t &= a \left(\frac{t - t_2}{2} \right) \left(\frac{t - t_2}{2} + t_2 \right) = a \left(\frac{t - t_2}{2} \right) \cdot \left(\frac{t - t_2 + 2t_2}{2} \right), \\ v_{sr} t &= a \left(\frac{t - t_2}{2} \right) \cdot \left(\frac{t + t_2}{2} \right) = a \left(\frac{(t - t_2) \cdot (t + t_2)}{2 \cdot 2} \right), \end{aligned}$$

$$v_{sr}t = a \left(\frac{t^2 - t_2^2}{4} \right),$$

$$\frac{t^2 - t_2^2}{4} = \frac{v_{sr}t}{a},$$

$$t^2 - t_2^2 = \frac{4v_{sr}t}{a},$$

$$t_2^2 = t^2 - \frac{4v_{sr}t}{a},$$

Једначина има два решења, само позитивно решење има физички смисао, па тражено време равномерног кретања износи:

$$t_2 = \sqrt{t^2 - \frac{4v_{sr}t}{a}} = \sqrt{25^2 s^2 - \frac{4 \cdot 20 \frac{m}{s} \cdot 25 s}{5 \frac{m}{s^2}}} = \sqrt{625 s^2 - 400 s^2} = \sqrt{225 s^2} = 15 s.$$

Из једначина (5.7) и (5.8) могу се одредити и времена трајања убрзаног и успореног кретања које износе:

$$t_1 = t_3 = \frac{t - t_2}{2} = \frac{25 s - 15 s}{2} = 5 s.$$

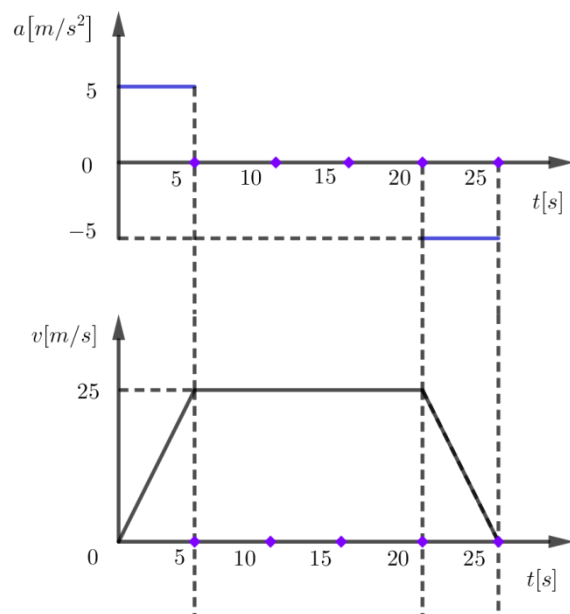
Уврштавањем ових времена у формуле (5.2), (5.3), (5.4) и (5.5) могу се добити величине потребне за цртање тражених графика:

$$s_1 = \frac{1}{2} \cdot 5 \frac{m}{s^2} \cdot 5^2 s^2 = 62,5 m,$$

$$v_1 = 5 \frac{m}{s^2} \cdot 5 s = 25 \frac{m}{s},$$

$$s_2 = 25 \frac{m}{s} \cdot 15 s = 375 m,$$

$$s_3 = 25 \frac{m}{s} \cdot 5 s - \frac{1}{2} \cdot 5 \frac{m}{s^2} \cdot 5^2 s^2 = 62,5 m.$$



Слика 25.

Зависности убрзања и брзине пређеног пута од времена приказане су графицима на Слици 25. Пређени пут је једнак површини испод криве.

Одговор: Аутомобил се кретао равномерно 15 s.

5. Кретање тела под утицајем Земљине теже

Свако тело велике масе привлачи друга тела гравитационом силом. Ова сила делује између небеских тела и доводи до тога да се планете окрећу око Сунца. И Земља је велико небеско тело, те привлачи Месец који због тога кружи око ње.

Гравитациона сила Земље делује и на сва тела која се налазе у њеној близини. Пошто је та сила уобичајена, добила је посебан назив – **сила теже**. Због ње тела које се пуне падају надолу. Сва тела падају са истим убрзањем, без обзира на то колика им је маса. Ако истовремено пустимо перо и гвоздену куглу са исте висине, знамо да ће перо пасти на земљу након гвоздене кугле. Међутим, кретање ова два тела је одређено деловањем различитих сила. На перо делује две силе: сила теже, усмерена наниже, и сила отпора ваздуха, која успорава његово падање. С друге стране, отпор ваздуха који делује на гвоздену куглу је занемарљиво мали. Дакле, кугла пада са убрзањем g и зато се она пре нађе на Земљи. Са друге стране, ако би се посматрало падање пера и кугле у посуди из које је уклоњен ваздух, када нема отпора средине, видели бисмо да оба тела падају на исти начин и са истим убрзањем g .

У простору око Земље (као и свих других тела) постоји гравитационо поље. Посредством тог поља Земља привлачи тела, која се у њему налазе. Јачина гравитационог поља $\vec{G}$ је векторска величина. Интензитет гравитационог поља бројно је једнак интензитету силе којом Земља делује на тело јединичне масе. Правци вектора гравитационог поља у било којој тачки поклапају се са правцем који пролази кроз центар Земље. Смер вектора гравитационог поља је ка центру Земље. Гравитационо поље Земље у било којој тачки постоји, без обзира на то да ли се у тој тачки налази или не налази неко друго тело. Интензитет гравитационог поља не зависи од тога колика је маса стављена у дату тачку поља.

Мерна јединица интензитета вектора јачине гравитационог поља је:

$$[\vec{G}] = \frac{[F]}{[m]} = \frac{N}{kg} = \frac{kg \frac{m}{s^2}}{kg} = \frac{m}{s^2},$$
$$\vec{G} = 9,81 \frac{N}{kg} = 9,81 \frac{m}{s^2}.$$

Подударност ове јединице са јединицом за убрзање можемо објаснити помоћу другог Њутновог закона. Ако се у неку тачку поља постави тело масе $[m]$, онда ће на то тело деловати сила гравитације:

$$\vec{F} = m\vec{G},$$

која има исти правац и смер као и гравитационо поље у тој тачки.

Земља је мало спљоштена на половима па јачина Земљине теже већа на половима него на екватору. Према другом Њутновом закону сила која делује на тело је једнака производу масе и убрзања:

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

То значи да је интензитет гравитационог поља Земље бројно једнак убрзању које тело добија услед привлачне силе Земље. То се убрзање назива **убрзање Земљине теже** и најчешће се обележава са **g** .

Убрзање Земљине теже, као и интензитет гравитационог поља, различито је на различитим удаљеностима половима и екватору од центра Земље, али не зависи од масе тела на том месту. На пример, на половима и екватору вредности гравитационог убрзања су:

$$g_{pol} = 9,83 \frac{m}{s^2} \qquad g_{ekv} = 9,78 \frac{m}{s^2}.$$

Интензитет убрзања тела које слободно пада на Земљу на географској ширини од 45° , приближно износи:

$$g = 9,81 \frac{m}{s^2}.$$

Дакле, на свако тело на Земљиној површини и у њеној близини, Земља делује са сталним убрзањем $\vec{g}$, усмереним вертикално наниже. Иако је $\vec{g}$ усмерено ка центру Земље, ми на малим растојањима сматрамо да је Земља равна и да су линије убрзања паралелне. Зато све посматрамо у Декартовом, а не у сферном координатном систему. И зато на малим растојањима коси хитац парабола, а на већим (то се онда зову балистички пројекти) би био у принципу елипса.

Постоји неколико начина кретања тела у близини Земљине површине који су условљени различитим почетним брзинама и положајима:

- *Слободан пад;*
- *Вертикални хитац навише;*
- *Вертикални хитац наниже ;*
- *Хоризонтални хитац;*
- *Коси хитац.*

Пошто су сва ова кретања равномерно убрзана или равномерно успорена, користићемо једначине кретања из поглавља (4.1). Сва кретања посматраћемо у равномском (x, y, t) систему. Прва три кретања су неравномерно праволинијска кретања, а у нашем случају ће бити кретања дуж координатне y -осе. Преостала два кретања су раванска. Разложићемо их тако да су кретања дуж y -осе равномерно променљива праволинијска, а кретања дуж x -осе равномерно праволинијска. Основне формуле су:

$\Delta v = \pm a \Delta t$, односно $v = v_0 \pm a(t - t_0)$ – најопштији запис формуле за пут код равномерно убрзаног и успореног праволинијског кретања;

$x = x_0 + v_0(t - t_0) \pm \frac{1}{2} a(t - t_0)^2$ – најопштији запис формуле за пут код равномерно убрзаног и успореног праволинијског кретања;

$v = \sqrt{v_0^2 \pm 2a\Delta x}$, односно $v = \sqrt{v_0^2 \pm 2a(x - x_0)}$ – најопштији запис формуле која повезује брзину и пут код равномерно убрзаног праволинијског кретања.

Овде је a убрзање, x_0 – почетни положај тела, v_0 – почетна брзина тела, а t_0 је почетни тренутак од ког се мери време.

5.1 Слободан пад

Слободан пад је праволинијско неравномерно кретање тела вертикално наниже без почетне брзине са висине h , мерене од Земљине површине. Кретање је неравномерно, јер се тело креће убрзано са убрзањем једнаким g . На пример, слободно пада јабука са стабла, скакач у воду или падобранац, док не отвори падобран.

За њих је карактеристично да им је брзина у почетном тренутку нула и да током пада расте. Пошто је убрзање слободног пада g , након времена t брзина тела које слободно пада ће бити:

$$v_y = gt.$$

Уколико пређени пут тела које слободно пада означимо са s , ($\Delta y = s$) по истеку времена t имаћемо да је:

$$s = \frac{1}{2}gt^2.$$

За слободан пад имамо још једну важну формулу која повезује брзину с пређеним путем:

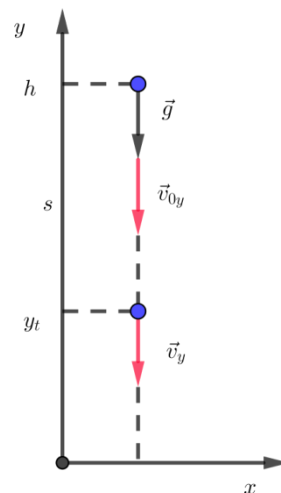
$$v^2 = 2gs.$$

Ако тело пада с висине h , у тренутку удара у подлогу пређени пут s је једнак висини h . Време падања тела с висине h се може израчунати на основу формуле $h = \frac{1}{2}gt^2$ и износи :

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Брзина тела у тренутку удара у подлогу је једнака:

$$v_y = \sqrt{2gh}.$$



Слика 26. Слободан пад

5.2 Хитац наниже

Вертикални хитац наниже је неравномерно праволинијско кретање тела избаченог са висине h вертикално наниже са почетном брзином v_0 . Ако је предмет испуштен вертикално на доле (нема почетну брзину), на њега делује гравитационо убрзање (g) и то у смеру кретања, у том случају тело слободно пада. Вертикални хитац наниже је, слично слободном паду, али са почетном брзином. Ако је предмет бачен

вертикално на доле (има почетну брзину (v_0) са одређене висине (h), на њега делује гравитационо убрзање (g) и то у смеру кретања, па због тога предмет убрзава и достиже неку нову брзину (v_y).

Пример овог кретања је бацање камена наниже с моста у реку или кретање кошаркашке лопте док путује између руке и терена. Тада тело има убрзање g и почетну брзину v_0 , која је усмерена наниже, исто као и убрзање. Брзина тела код хица наниже се повећава како време одмиче:

$$\begin{cases} v = v_0 + a(t - t_0) \\ v_0 = v_{0y}, a = g, t_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_y = v_{0y} + gt.$$

Ако је пређено y_t растојање $\Delta y = h - y_t = s$ до произвољног тренутка t где је v_t положај тела на y -оси у том тренутку, једнак је:

$$\begin{cases} y_t = y_0 - v_0(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 \\ a = g, v_0 = v_{0y}, y_0 = h, t_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow s = v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2.$$

За брзину у датом положају добијамо:

$$\begin{cases} v = \sqrt{v_0^2 + 2a(y - y_0)} \\ y_0 = h, y = y_0, v_0 = v_{0y}, a = g \end{cases} \Rightarrow v_y = \sqrt{v_{0y}^2 + 2gs},$$

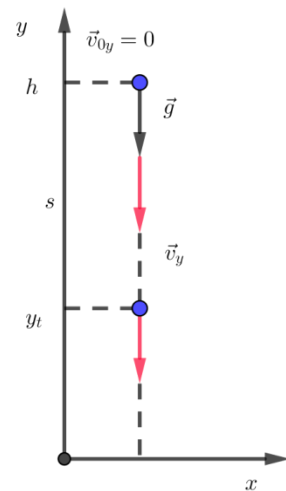
где је $\Delta y = s$ пут који је тело прешло до тренутка t .

У тренутку када тело удари о подлогу, пређени пут је једнак висини h с које је бачено, па време падања задовољава једнакост:

$$h = v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2,$$

док је брзина v којом тело удари о подлогу:

$$v = \sqrt{v_{0y}^2 + 2gh}.$$



Слика 27. Хитац наниже

5.3 Вертикални хитац навише

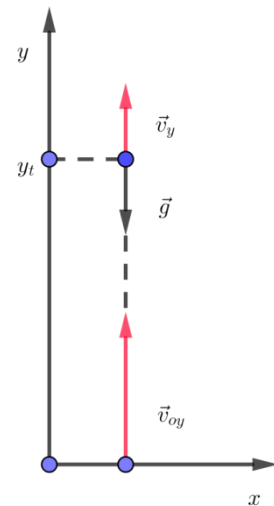
На почетку кошаркашке утакмице, судија баца лопту увис. Такво кретање називамо **вертикални хитац навише** или **хитац увис**, јер се телу даје почетна брзина

усмерена вертикално према горе. Почетна брзина v_0 је усмерена супротно од смера убрзања силе теже, које је усмерено наниже. Зато тело након што се баци најпре успорава и његова брзина се смањује. Брзина тела код хица навише је:

$$\begin{cases} v = v_0 - a(t - t_0) \\ v_0 = v_{0y}, a = g, t_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_y = v_0 - gt.$$

Пређени пут до тренутка t једнак је:

$$\begin{cases} y_t = y_0 + v_0(t - t_0) - \frac{1}{2}gt(t - t_0)^2 \\ a = g, v_0 = v_{0y}, y_0 = 0, t_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow y_t = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2.$$



Ако са h означимо висину хица навише у односу на тачку из које је бачено, у тренутку t је:

$$h = v_0t - \frac{1}{2}gt^2,$$

док је формула која повезује брзину и висину тела код хица навише:

$$\begin{cases} v = \sqrt{v_0^2 - 2a(y - y_1)} \\ y_0 = 0, v_0 = v_{0y}, a = g \end{cases} \Rightarrow v_y = \sqrt{v_{0y}^2 - 2gy_t}.$$

Брзина тела које је бачено навише се у почетку смањује, време t_h за које тело достиже максималну висину једнако је времену заустављања, па се одређује из услова $v_y = 0$:

$$\begin{cases} v_y = v_{0y} - gt \\ v_y(t_h) = 0 \end{cases} \Rightarrow t_h = \frac{v_{0y}}{g}.$$

Од тог тренутка, тело почиње да пада слободно, максималну висину $y_{max} = h$ коју постигне тело једнака је пређеном путу до заустављања, односно за време t_h .

$$\begin{cases} v_y = \sqrt{v_{0y}^2 - 2gy_t} \\ t_h = \frac{v_{0y}}{g} \end{cases} \Rightarrow$$

$$y_{max} = h = v_{0y} \cdot \frac{v_{0y}}{g} - \frac{1}{2}g \cdot \left(\frac{v_{0y}}{g}\right)^2 = \frac{v_{0y}^2}{g} - \frac{g}{2} \cdot \frac{v_{0y}^2}{g^2} = \frac{v_{0y}^2}{g} - \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{2v_{0y}^2 - v_{0y}^2}{2g},$$

$$h = \frac{v_{0y}^2}{2g}.$$

Слика 28.
**Вертикални хитац
навише**

5.4 Хоризонтални хитац

Кретање тела, које је избачено у хоризонталном правцу, неком почетном брзином v_0 назива се **хоризонтални хитац**. Хоризонтални хитац је кретање тела при коме је почетни вектор брзине хоризонталан.

Хоризонтални хитац је кретање у равни које се може разложити на два независна кретања: вертикално и хоризонтално, а то су кретања дуж координатних оса x и y . Кретање тела у хоризонталном правцу дуж x -осе је равномерно праволинијско. Брзина је стална и једнака почетној брзини избачаја (брзина v_{0x}). Кретање у вертикалном правцу (дуж y -осе) јесте равномерно променљиво и праволинијско са сталним убрзањем g и усмерено је наниже, насупрот смеру y -осе.

За кретање у хоризонталном правцу следи да је:

$$\begin{cases} x = x_0 + v(t - t_0) \\ x_0 = 0, v = v_{0x}, t_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = v_{0x}t.$$

Брзина у вертикалном правцу (слободан пад) у тренутку t једнака је:

$$v_y = gt,$$

Брзина на висини y_t једнака је:

$$v_y = \sqrt{2g(h - y_t)},$$

где је $h - y_t = \Delta y$ - промена висине до тренутка t и једнака је:

$$h - y_t = \frac{1}{2} gt^2.$$

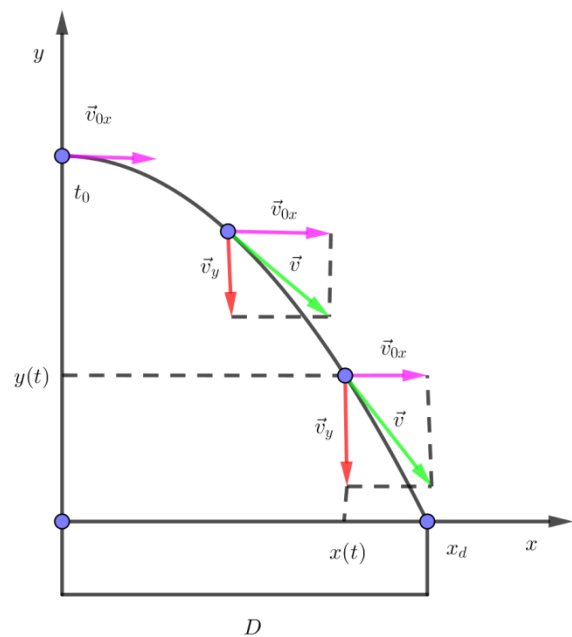
Интензитет вектора брзине је једнак:

$$v = \sqrt{v_{0x}^2 + v_y^2} = \sqrt{v_{0x}^2 + (gt)^2}.$$

Укупно време кретања t_u , које је једнако и времену падања, одређујемо из ове једначине, узимајући да $y_t = 0$ за $t = t_u$. Дакле:

$$\begin{cases} h - y_t = \frac{1}{2} gt_u^2 \\ t = t_u, y_{t_u} = 0 \end{cases} \Rightarrow h = \frac{1}{2} gt_u^2 \Rightarrow t_u = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Домет D хоризонталног хица је растојање места пада (x_D) тела на хоризонталну од полазне (x_0) координате у правцу x -осе и једнак путу Δx , који тело прелази за време t_u крећући се брзином v_{0x} :



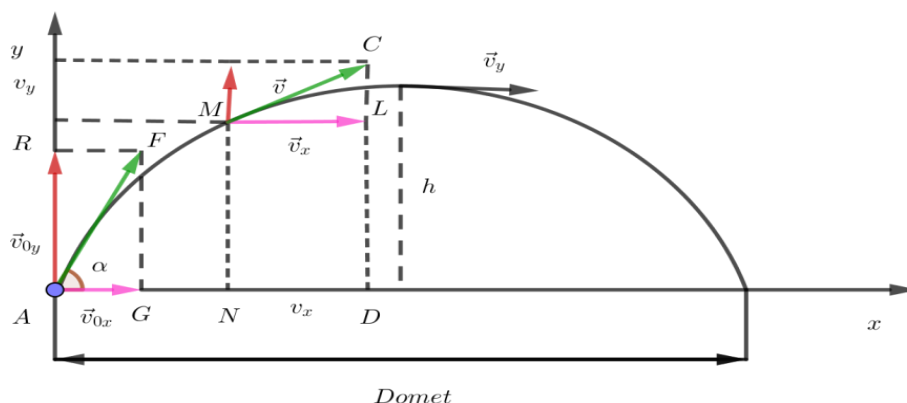
Слика 29. Хоризонтални хитац

$$D = x_D - x_0 = x(t_u) = v_{0x}t_u = v_{0x}\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

5.5 Коси хитац

Када се тело креће кроз ваздух неком почетном брзином v_0 , која заклапа угао α у односу на хоризонталу и само под утицајем гравитације, каже се да се креће као **коси хитац**. Опис косог хица сличан је опису хоризонталног хица после достизања максималне висине h .

Типичан пример оваквог кретања је кретање лопте, након шутирања из слободног ударца у фудбалу, лет скијаша при скоку чија путања је, до њиховог пада на Земљу, карактеристична крива линија.

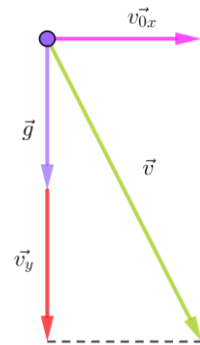


Слика 30. Коси хитац

Анализираћемо ово кретање бирајући координатне осе у Декартовом правоуглом координатном систему xOy . Хоризонталну осу означимо као x , а вертикалну као y . Претпоставимо да је у тренутку $t = 0$ тело избачено из координатног почетка ($x_0 = y_0 = 0$), брзином v_0 , као што је приказано на Слици 30.

Разложити раванско кретање значи разложити векторе брзине, помераја и убрзања, као на Слици 31. Раванским сматраћемо свако праволинијско и криволинијско кретање код кога се тело не креће дуж неке од координатних оса. Разлагањем раванског кретања његова графичка и математичка анализа своди се на једноставнију анализу два праволинијска кретања, дуж двеју координатних оса у линијским просторно-временским системима (x, t) и (y, t) .

- Кретање тела у хоризонталном правцу (дуж x -осе) јесте равномерно праволинијско. Брзина је стална и једнака x -компоненти почетне брзине.
- Кретање у вертикалном правцу (дуж y -осе) јесте равномерно променљиво и праволинијско са сталним убрзањем g , које је усмерено наниже, насупротив смеру y -осе.



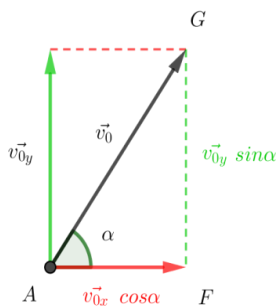
Слика 31. Разлагање вектора брзине

Компоненте убрзања при оваквом кретању су, $a_x = 0$ и $a_y = -g = -9,81 \text{ m/s}^2$. Компоненте помераја дуж тих оса означимо са x и y . Компоненте брзине $\vec{v}$ су $v_x = v \cos \alpha$ и $v_y = v \sin \alpha$, где је v интензитет вектора брзине, а α је угао који он заклапа са x осом. На Сlici 32 из правоуглог троугла AGF интензитет почетне брзине v_{0x} – хоризонтална брзина у правцу x -осе, v_{0y} – вертикална брзина у правцу y -осе. Дакле, компоненте почетне брзине су:

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha. \quad (5.4.1)$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \alpha. \quad (5.4.2)$$

Вектор брзине се мења и по правцу и по интензитету што је резултат постојања убрзања усмереног у негативном смеру y осе. За то време x компонента брзине остаје константна у времену јер дуж те осе нема никаквог убрзања.



Слика 32. Компоненте почетне брзине

Ако у једној произвољној тачки M путање конструишемо вектор брзине $\vec{v}$, онда ће његова пројекција на x -осу и y -осу бити $\vec{v}_x$ и $\vec{v}_y$ као на Сlici 30.

Интензитет брзине хоризонталне компоненте $\vec{v}_x$ једнак је интензитету хоризонталне компоненте почетне брзине $v_x = v_{0x}$, па ће према једначини (5.4.1) бити:

$$v_x = v_0 \cos \alpha. \quad (5.4.3)$$

На основу тога при конструкцији тангенте из тачке M , треба имати у виду да је $AG = ND = ML$. Успонска компонента почетне брзине v_{0y} уствари је почетна брзина вертикалног хица, јер се под њеним утицајем тело креће вертикално навише при истовременом деловању Земљине теже у супротном смеру. Према томе интензитет вертикалне компоненте брзине v_y у ма којој тачки путање има вредност:

$$v_y = v_{0y} - gt,$$

а на основу једначине (5.4.2) биће:

$$v_y = v_0 \sin \alpha - gt. \quad (5.4.4)$$

Ова компонента је променљива и мења своју вредност у току времена. Пошто је gt на десној страни једначине (5.4.4) позитиван и расте са временом t , следи да интензитет успонске компоненте стално опада, уколико је време t дуже, може бити и негативан. Пошто је коси хитац сложено кретање треба одредити хоризонталну и вертикалну компоненту кретања. Хоризонтална компонента x јесте пут који тело пређе у времену t константном брзином v_x , дакле једноликим кретањем.

Кинематичке једначине за хоризонталну компоненту кретања ($a_x = 0$) су према томе:

$$\begin{aligned}x &= x_0 + v_x(t - t_0), \\v_x &= v_{0x} = \text{const}, x_0 = 0, t_0 = 0, \\x &= v_x t = v_0 \cos \alpha t, \\x &= v_0 t \cos \alpha.\end{aligned}\tag{5.4.5}$$

Вредност компоненте пута дуж y -осе, за вертикалну компоненту кретања је ($a_y = -g$):

$$\begin{aligned}v_y &= v_{0y} - gt, \\y &= y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2, y_0 = 0, \\y &= v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2, \\y &= v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2.\end{aligned}\tag{5.4.6}$$

Једначине (5.4.5) и (5.4.6) представљају једначину путање косог хица у такозваном параметарском облику (параметар је време t). За сваку вредност t добијамо одређене вредности x и y , који нам одређују координате тачке у којој се тело налази у посматраном тренутку. Да би смо добили како y зависи од x из њих треба елиминисати време. Како је из прве једначине :

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha},$$

друга постаје:

$$\begin{aligned}y &= v_0 \sin \alpha \cdot \frac{x}{v_0 \cos \alpha} - \frac{1}{2}g \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)^2, \\y &= x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}.\end{aligned}$$

Добијамо једначину параболе која пролази кроз координатни почетак, што значи да путања тела има облик параболе.

Када је реч о одређивању максималне висине коју достиже тело које се креће као коси хитац, то се може урадити одређивањем времена пењања у ту тачку (у њој је компонента брзине $v_y = 0$). Претпоставимо да се максимална висина достигне у тренутку t_1 , тада је:

$$v_y = v_0 \sin \alpha - gt_1 = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Када добијено време уврстимо у једначину (2) та висина износи:

$$h_{max} = v_0 t_1 \sin \alpha - \frac{gt_1^2}{2},$$

$$h_{max} = v_0 \sin \alpha \cdot \frac{v_0 \sin \alpha}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right)^2 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2},$$

$$h_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Нађимо домет тела, то јест удаљеност места пада тела на земљу од координатног почетка. Претпоставимо да камен пада на земљу у тренутку t_2 , тада су координате:
 $y = 0, x = D,$

где је D – домет.

Из $y = 0$, у тренутку t_2 следи:

$$0 = v_0 t_2 \sin \alpha - \frac{gt_2^2}{2},$$

$$v_0 t_2 \sin \alpha = \frac{gt_2^2}{2} \quad | : t_2, \quad t_2 \neq 0,$$

$$v_0 \sin \alpha = \frac{gt_2}{2},$$

$$t_2 = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = 2t_1.$$

Дакле, у првој половини времена се тело пење до максималне висине, а у другој пада.

Брзина у тренутку пада по y оси:

$$v_y = v_0 \sin \alpha - gt_2,$$

$$v_y = -v_0 \sin \alpha = -v_y.$$

Тада је домет из формуле (5.4.5) једнак:

$$D = x = v_0 \cos \alpha \cdot t_2,$$

$$D = v_0 \cos \alpha \cdot \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Пошто из тригонометрије знамо да је $2\cos \alpha \sin \alpha = \sin 2\alpha$, добијамо једначину

$$D = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

За ма коју дату брзину v_0 највећи домет, ако је $\alpha = 45^\circ$.

Интензитет вектора брзине је:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + (v_0 \sin \alpha - gt)^2}.$$

Веза између угла и вектора брзине је:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{v_y}{v_x}.$$

5.6 Примери кретања под утицајем Земљине теже

Задаци разматрани у овом поглављу се односе на градиво седмог и осмог разреда основне школе и прве године средње школе.

Ради лакшег рачуна, у задацима за убрзање слободног пада узимамо вредност $g = 10 \text{ m/s}^2$, а отпор ваздуха се занемарује, осим ако у услови задатка није другачије наглашено.

Задатак 1. (основни ниво)

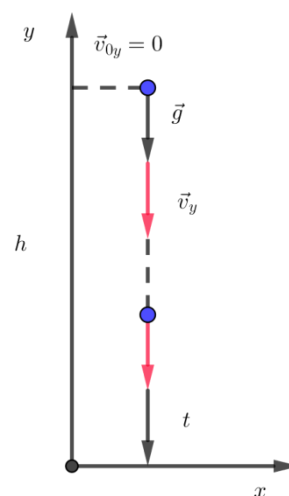
Камен, пуштен да пада с врха стене, ударио је у земљу након 5,8 s. Колика је висина стене?

Поступак решавања задатка :

$t = 5,8 \text{ s}$ (време падања камена),

$g = 10 \text{ m/s}^2$

$h = ?$ (висина стене).



Слика 33.

Висина стене је једнака путу који је камен прешао при слободном паду:

$$h = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot 5,8^2 s^2 = 168 m.$$

Одговор: Стена је висока 168 m.

Задатак 2. (основни ниво)

Кишне капи падају с висине од 1500 m. Када не би било отпора ваздуха, колика би била брзина капи при паду на земљу?

Поступак решавања задатка :

$$h = 1500 m \text{ (висина с које капи падају),}$$

$$g = 10 m/s^2$$

$$v = ? \text{ (брзина капи на крају падања).}$$

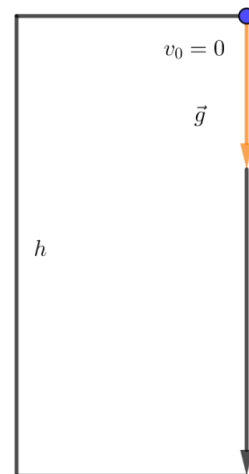
Ако занемаримо отпор ваздуха, једино убрзање које делује на капи је убрзање Земљине теже, па брзину капи можемо да нађемо из формуле:

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot 1500m} = 172 \frac{m}{s}.$$

Одговор: Брзина капи је једнака 172 m/s. То је веома велика брзина. Капи падају са знатно мањом брзином, јер на њих делује и сила отпора ваздуха, која их успорава. Када не би било отпора ваздуха, капи би биле опасне, попут метака. Иначе брзина кишних капи на површини Земље је 10 – 15 m/s. То је експериментална чињеница која зависи од величине капи, брзине ветра...

Задатак 3. (средњи ниво)

Сестра стоји на тераси висине 3 m, а брат је испред зграде. Истовремено, сестра испусти кључеве, а брат баци лопту, са земље, увис почетном брзином $v_0 = 8,1 m/s$. Нађи тренутак када су кључеви и лопта на истој удаљености од земље. Одреди брзину лопте када се она нађе на висини с које су спуштени кључеви.



Слика 34.

Поступак решавања задатка :

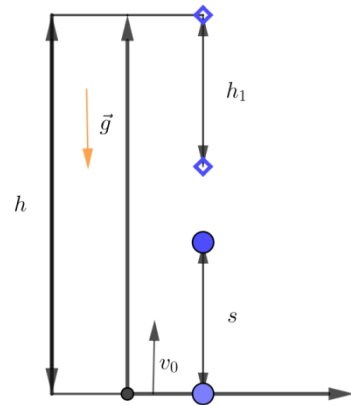
$h = 3 \text{ m}$ (висина терасе),

$v_0 = 8,1 \text{ m/s}$ (почетна брзина лопте).

$t_s = ?$ (тренутак када су кључеви и лопта на истој висини),

$v_h = ?$ (брзина лопте на висини h).

Кључеви слободно падају а лопта се креће као хитац навише. Нека је s —пут који пређу кључеви, а h_1 висина на којој се налази лопта. У тренутку t , овде две величине су:



Слика 35.

$$s = \frac{1}{2}gt^2 \text{ и } h_1 = v_0t - \frac{1}{2}gt^2.$$

У тренутку t_s кључеви и лопта су на истој удаљености од земље. Тада је :

$$s + h_1 = h \Rightarrow \frac{1}{2}gt_h^2 + v_0t_h - \frac{1}{2}gt_h^2 = h,$$

$$v_0t_h = h.$$

Из чега се добија да је тражени тренутак:

$$t_h = \frac{h}{v_0} = \frac{3 \text{ m}}{8,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 0,37 \text{ s}.$$

Брзина лопте на висини h је:

$$v_h = \sqrt{v_0^2 - 2gh} = \sqrt{8,1^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} - 2 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 3\text{m}} = 2,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Одговор: Тренутак времена кад су кључеви и лопта на истој удаљености од земље је једнак 0,37 s. Брзина лопте на висини терасе је једнака 2,4 m/s.

Задатак 4. (напредни ниво)

Млаз воде из црева излази брзином 50 m/s под углом 30° према земљи. Израчунајте домет млаза воде ка земљи и максималну висину млаза воде.

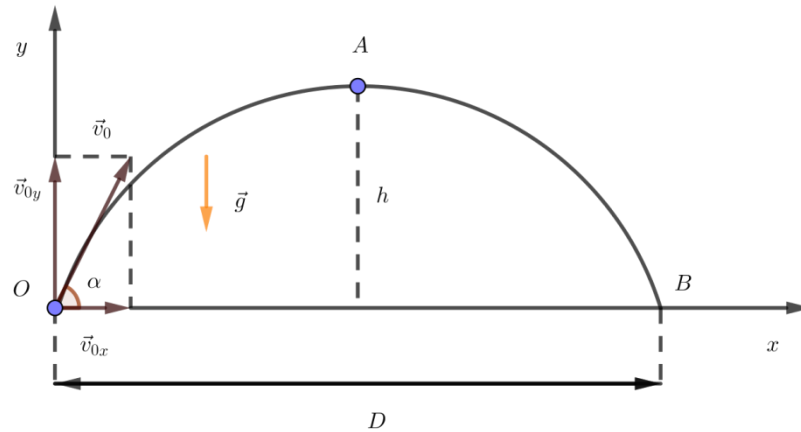
Поступак решавања задатка :

$v_0 = 50 \text{ m/s}$ (почетна брзина млаза воде),

$\alpha = 30^\circ$ (угао према земљи).

$D = ?$ (домет млаза воде),

$h = ?$ (максимална висина млаза воде).



Слика 36.

Изаберимо правоугаони координатни систем xOy са почетком у тачки O где излази млаз воде како приказано на Слици 36. У смеру осе Ox кретање је равномерно праволинијско, пошто на млаз делује само сила гравитације усмерена вертикално наниже. Нагласимо, да у овом случају занемарујемо отпор ваздуха. У смеру осе Oy млаз воде креће се равномерно успоравајуће до највише тачке путања млаза воде (тачки A), а доле – равномерно убрзавајући, због слободног пада, у вертикалном правцу према доле у свакој тачки путања. С обзиром на то, у почетном тренутку координате кретања млаза воде имају облик:

$$x = v_{0x}t, \quad y = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}.$$

Брзина кретања млаза по оси Oy до тачке A (врх параболе) варира у складу са законом:

$$v_y = v_{0y} - gt, \quad \text{где } v_{0y} = v_0 \sin \alpha.$$

За тачку A : $v_y = 0$; $y = h_{\max}$; $t = t_1$, где t_1 - време кретања у тачки максималне висине.

Тада формула добија облик:

$$0 = v_{0y} - gt_1, \quad \text{одатле } v_{0y} = gt_1 \text{ или } v_0 \sin \alpha = gt_1.$$

Одавде следи:

$$t_1 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Пронађимо висину дизања млаза:

$$h = v_{0y}t_1 - \frac{gt_1^2}{2} = v_0 \sin \alpha \frac{v_0 \sin \alpha}{g} - \frac{g v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g^2} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g},$$

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

За тачку где водени млаз (тачка В) пада на земљу:

$$t = t_1, y = 0, x = 1,$$

Сходно томе, једначина координата има облик:

$$0 = v_{0y}t_2 - \frac{gt_2^2}{2},$$

$$v_{0y}t_2 = \frac{gt_2^2}{2}.$$

Одавде време лета млаза :

$$t_2 = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Пронађемо домет лета млаза воде D :

$$D = v_{0x}t_2, v_{0x} = v_0 \cos \alpha,$$

$$D = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Нађимо бројевне вредности висине и домета млаза воде:

$$h = \frac{50^2 m/s \cdot \sin^2 30^\circ}{2 \cdot 10 m/s^2} = \frac{2500 m^2/s^2 \cdot 0,5^2}{20 m/s^2} \approx 31,3 m,$$

$$D = \frac{50^2 m^2/s^2 \cdot \sin 60^\circ}{10 m/s^2} \approx 218 m.$$

Одговор: Домет млаза воде је једнак 218 m, максимална висина млаза је 31,3 m.

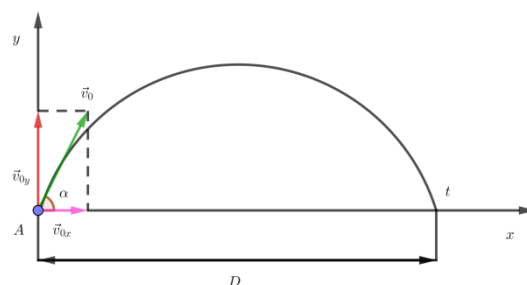
Задатак 5. (напредни ниво)

Камером је утврђено да је играч фудбала шутнуо лопту тако да је за 3,6 s прелетела раздаљину од 38,4 m. Одредите почетну брзину лопте и угао α под којим је била шутнута лопта.

Поступак решавања задатка :

$$D = x = 38,4 \text{ m (домет лопте),}$$

$$t = 3,6 \text{ s (време лета лопте).}$$



Слика 37.

$$v_0 = ? \text{ (почетна брзина лопте),}$$

$$\alpha = ? \text{ (угао под којим је била шутнута лопта).}$$

Коришћењем формуле косог хица са почетним условима добијамо:

$$x = x_0 + v_{0x}t,$$

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{gt^2}{2},$$

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0.$$

$$\text{Израчунамо : } 38,4 = 0 + v_{0x}t \Rightarrow v_{0x} = \frac{38,4 \text{ m}}{3,6 \text{ s}} = 10,7 \text{ m/s}$$

$$0 = 0 + v_{0y} \cdot 3,6 \text{ s} - \frac{1}{2} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 3,6^2 \text{ s}^2 \Rightarrow v_{0y} = \frac{5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 3,6^2 \text{ s}^2}{3,6 \text{ s}} = 18 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} = \sqrt{10,7^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} + 18^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} \approx 21 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{tg} \alpha = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} = \frac{18 \text{ m/s}}{10,7 \text{ m/s}} = 1,682.$$

Одговор: Лопта је била шутнута почетном брзином 20,6 m/s под углом $\alpha = 59,3^\circ$.

Задатак 6. (напредни ниво)

Дечак је хоризонтално бацио лопту са прозора који је на висини 15 m од земље. Колико времена је летела лопта до земље и којом брзином је била бачена ако је пала на растојању 5,3 m од темеља зграде.

Поступак решавања задатка :

$h = 15 \text{ m}$ (висина, са које је бачена лопта),

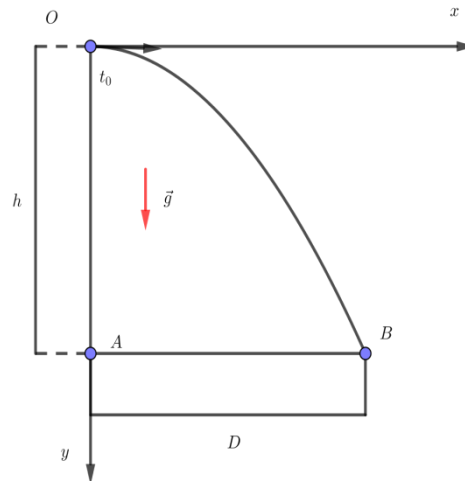
$D = 5,3 \text{ m}$ (домет лопте),

$g = 10 \text{ m/s}^2$ (убрзање).

$v_0 = ?$ (почетна брзина лопте),

$t = ?$ (време пада лопте).

За описивање кретања изабери правоугаони координатни систем xOy , осу y усмеримо вертикално на доле. За координатни почетак O сматрамо тачку бацања лопте.



Слика 38.

Једначине кретања лопте су:

$$x = v_{0x}t,$$

$$y = v_{0y}t + \frac{gt^2}{2}.$$

По услову задатка: $v_{0y} = 0$; $v_{0x} = v_0$,

$$x = v_0t,$$

$$y = \frac{gt^2}{2}.$$

У моменту пада лопте: $y = h$; $x = D$.

Израчунамо време лета и почетну брзину лопте:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}, \quad v_0 = \frac{D}{t},$$

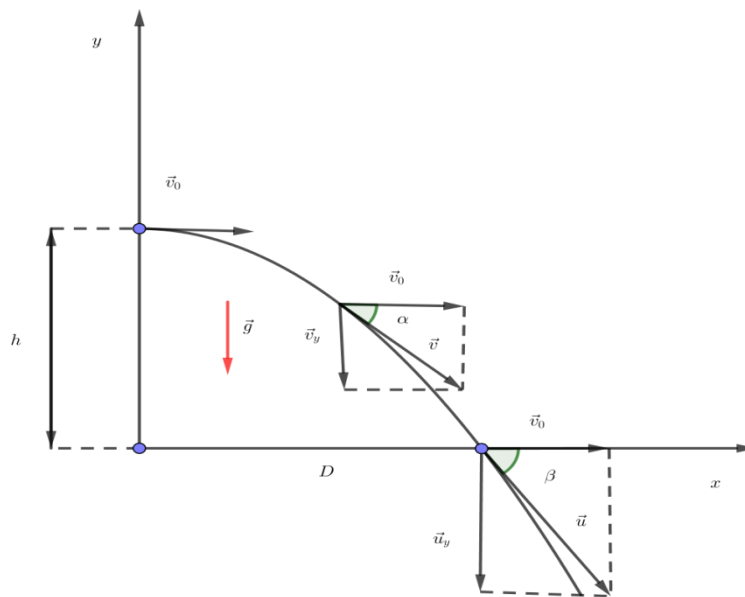
$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 15 \text{ m}}{10 \text{ m/s}^2}} = \sqrt{\frac{30 \text{ m}}{10 \text{ m/s}^2}} \approx 1,7 \text{ s}.$$

$$v_0 = \frac{D\sqrt{g}}{\sqrt{2h}} = \frac{5,3 \text{ m} \cdot \sqrt{10 \text{ m/s}^2}}{\sqrt{2 \cdot 15 \text{ m}}} \approx 3 \text{ m/s}.$$

Одговор: Лопта избачена је почетном брзином 3 m/s за време једнако $1,7 \text{ s}$ пала је на земљу.

Задатак 7. (напредни ниво)

Из хеликоптера који се креће хоризонтално брзином 40 m/s , на висини 500 m , бачен је терет без почетне брзине у односу на хеликоптер. На ком растојању од места бацања ће да падне терет? Колико износи време пада? Којом брзином и под којим углом према хоризонту ће терет да падне на Земљу? За које ће време угао између вектора брзине и хоризонта бити 45° ? Занемарујемо отпор ваздуха, а терет посматрамо као материјалну тачку.



Слика 39.

Поступак решавања задатка :

$v_0 = 40 \text{ m/s}$ (почетна брзина хеликоптера),

$h = 500 \text{ m}$ (максимална висина),

$\alpha = 45^\circ$ (угао између вектора брзине и хоризонта).

$D = ?$ (растојање, где ће да падне терет од места бацања),

$t = ?$ (време пада терета),

$v = ?$ (брзина пада терета),

$\beta = ?$ (угао пада терета према хоризонту),

$t_1 = ?$ (време за које угао између вектора брзине и хоризонтом биће 45°).

У овом примеру, пошто хеликоптер се креће хоризонтално, ради се о хоризонталном хицу. Хоризонтална компонента брзине је константна, другима речима терет је летео прво у хеликоптеру, а после су га избацили и оно наставља да лети са истом брзином, само још почиње да пада. Низ вертикалу растојање између терета и хеликоптера расте, при томе терет је испод хеликоптера, само са сваком наредном секундом све више надоле. Тако да растојање у моменту пада између терета и хеликоптера једнако $h = 500 \text{ m}$.

Коришћењем формуле косог хица са почетним условима добијамо:

$$x = x_0 + v_0 t,$$

$$y = y_0 - \frac{gt^2}{2},$$

$$\text{где } x_0 = 0, y_0 = h, \text{ тада } x = v_0 t, y = h - \frac{gt^2}{2}.$$

У моменту пада терета на земљу је $y = 0$; тада из једначине за координату у израчунавамо време пада терета t :

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 500 \text{ m}}{10 \text{ m/s}^2}} = 10 \text{ s}.$$

Тражени домет лета терета D у хоризонталном правцу израчунавамо из једначине за координату x :

$$D = x = v_0 t = 40 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 10 \text{ s} = 400 \text{ m}.$$

Брзина пада терета је једнака:

$$u = \sqrt{v_0^2 + u_y^2}, \text{ где } u_y = \sqrt{2gh}, \text{ одавде:}$$

$$u = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 108 \text{ m/s}.$$

Угао пада терета према хоризонту β израчунавамо по формули :

$$tg\beta = \frac{u_y}{v_0} = \frac{\sqrt{2gh}}{v_0}; \quad \beta = \arctg \frac{\sqrt{2gh}}{v_0} \approx 68^\circ.$$

Израчунамо време t_1 , за које угао α између правца брзине v и хоризонтом биће једнак 45° .

$$tg\alpha = \frac{v_y}{v_0} = 1.$$

$$\text{Одавде следи } v_y = v_0, \text{ али } v_y = gt_1 \Rightarrow v_0 = gt_1,$$

$$t_1 = \frac{v_0}{g} = \frac{40 \text{ m/s}}{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 4 \text{ s}.$$

Одговор: Терет је пао за време једнако 10 s , брзином 108 m/s , на растојање једнако 400 m , угао пада терета према хоризонту је једнак 68° , угао између вектора брзине и хоризонтом биће 45° за 4 s .

Задатак 8. (напредни ниво)

Спортиста масе 65 kg скаче у базен без почетне брзине са скакаонице висине 10 m . После колико времена и са којом брзином је спортиста ударио о површину воде?

а) Израчунати вредности, кад занемаримо отпор ваздуха.

б) Израчунати вредности, ако за отпор ваздуха узмемо $F_{ot} = 100 \text{ N}$, где је F_{ot} - сила отпора ваздуха.

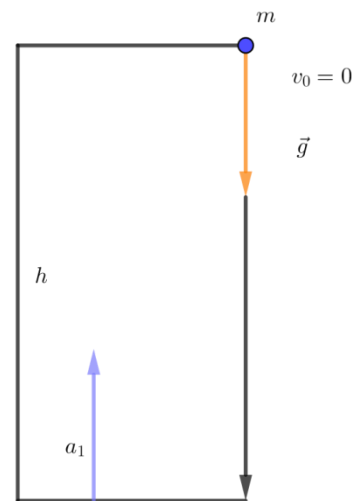
Поступак решавања задатка :

$h = 10 \text{ m}$ (висина скакаонице),

$m = 65 \text{ kg}$ (маса спортисте),

$F_{ot} = 100 \text{ N}$ (сила отпора ваздуха),

$g = 10 \text{ m/s}^2$ (убрзање слободног пада).



Слика 40.

$t = ?$ (време за које ће спортиста дотакне површину воде, ако се занемари отпор ваздуха),

$v = ?$ (брзина пада спортисте у тренутку додира са водом, без отпора ваздуха),

$t_1 = ?$ (време за које ће спортиста дотакне површину воде, ако се урачуна отпор ваздуха),

$v_1 = ?$ (брзина пада спортисте у тренутку додира са водом, са урачунатим отпором ваздуха).

Тело вертикално пада са одређене висине вертикално доле услед деловања силе Земљине теже. Ако занемаримо силу отпора ваздуха, сва тела без обзира на њихову масу, крећу се једнаким убрзањем $g = 10 \text{ m/s}^2$. Слободно падање је, дакле, убрзано кретање тела ка Земљиној површини без почетне брзине.

Израчунајмо брзину у тренутку додира спортисте са водом.

Брзина при слободном паду мења се по закону:

$$v = gt \Rightarrow t = \frac{v}{g}.$$

Пређени пут дат је изразом:

$$s = \frac{gt^2}{2}.$$

При слободном паду тело се креће равномерно убрзано (убрзањем g) и прелази пут s , у нашем примеру спортиста ће ударити о воду, када $s = h$:

$$h = \frac{gt^2}{2}.$$

Из дате формуле заменом $t = \frac{v}{g}$, добијамо:

$$h = \frac{g \frac{v^2}{g^2}}{2} = \frac{v^2}{2g} \Rightarrow v = \sqrt{2gh}.$$

Заменом одговарајућих бројних вредности добијамо:

$$v = \sqrt{2 \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot 10m} \approx 14 \frac{m}{s},$$

$$t = \frac{14 \frac{m}{s}}{10 \frac{m}{s^2}} \approx 1,4s.$$

Према другом Њутовом закону убрзање које при кретању добија једно тело, сразмерно је интезитету силе која на њега делује, а обрнуто сразмерно маси тог тела. Насупрот кретању спортисте делује сила отпора ваздуха, која даје успорење спортисти a_1 :

$$F_{ot} = ma_1 \Rightarrow a_1 = \frac{F_{ot}}{m}.$$

Убрзање које има спортиста који слободно пада је:

$$a = g - a_1.$$

Формула за пређени пут имаће облик:

$$h = \frac{at_1^2}{2} \Rightarrow at^2 = 2h \Rightarrow t_1^2 = \frac{2h}{a},$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{a}}.$$

Формула за брзину је:

$$v = \sqrt{2ah}.$$

Заменом одговарајућих бројних вредности добијамо:

$$a_1 = \frac{100 \text{ N}}{65 \text{ kg}} \approx 1,54 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$a = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 1,54 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 8,46 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \text{ m}}{8,46 \text{ m/s}^2}} \approx 2,4 \text{ s},$$

,

$$v_1 = \sqrt{2 \cdot 8,46 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10 \text{ m}} \approx 13 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Одговор: Време пада спортисте до површине воде, када занемаримо отпор ваздуха је $1,4 \text{ s}$ и мање је од времена $2,4 \text{ s}$, када се урачунава отпор ваздуха. Брзина спортисте је 14 m/s , ако занемаримо отпор ваздуха. Отпор ваздуха успорава спортисту, па је брзина једнака 13 m/s , ако се урачуна сила отпора ваздуха.

6. Закључак

У савремено доба много стручњака се бави проблемом наставе и посвећују пажњу садржајима који се обрађују у основним и средњим школама. У најширем садржају се подразумева целокупно људско искуство, које би требало пренети будућим генерацијама, самим тим покушати оспособити и заинтересовати ученике за даље унапређивање стечених знања.

Велику количину искуства је немогуће комплетно пренети на припаднике нове генерације, па се сваки наставни процес организује на основу тих искустава, која представљају основни и званични документ на основу којег се даље састављају наставни програм и пишу наставни уџбеници. На тај начин сваки наставни предмет има одређено место, обим, фонд часова и одређени редослед по разредима. Како ће се развијати интересовање ученика зависи од квалитета наставе, а успех у настави зависи од избора садржаја. При избору садржаја веома је битно обратити пажњу на способности и могућности ученика.

У настави математике наставницима се допушта, да из понуђених школских програма и материјала одаберу оне који ће бити очигледни и занимљиви ученицима. Ту је велика прилика за наставнике математике да пробуде радозналост код ученика дајући њима задатке који су прилагођени њиховом знању и да помогну различитим питањима да се развија у њима склоност за самосталним мишљењем. Усвојити знања из математике – то значи не само довољно јасно савладати обрађено градиво, већ је веома битно да ученици науче да примене та знања на проблеме из свакодневног живота.

Значајно место у обучавању практичне примене знања има решавање задатака. Основни циљ при решавању задатака јесте да ученици дубље схвате обрађено градиво на часовима и науче да их примењују у различитим животним ситуацијама. Посебно решавање нестандартних задатака из математике је добро средство за развијање мишљења, интелигенције, расуђивања и самосталности ученика.

Литература:

1. Антун Балаж, Душко Латас, Физика 7, Уџбеник са збирком задатака и лабораторијским вежбама за 7. разред основне школе, 4. издање, Нови Логос, Београд, 2012.
2. Галкин Е. В., Нестандартные задачи по математике. Алгебра: Учебное пособие для учащихся 7-11 классов.-Челябинск: «Взгляд», 2004.
3. Милан Живановић, Нестандартни задаци о кретању, Настава математике, LX_1-2, (53-56), Друштво математичара Србије, Београд, 2015.
4. Мирослав Кука, Настава физике – структурирање задатака и нормирање оцењивања, -Београд, 2007.
5. Мићо М. Митровић, Збирка задатака везаних за такмичења из физике (1990-1995) за 1. разред, друго издање, Београд, 1999.
6. Мякишев Г. Я., Буховцев Б. Б., Сотский Н. Н., Физика 10 класс, Учебник для общеобразовательных учреждений: базовый и профильный уровни, 19. Издание.- Москва: Просвещение, 2010.
7. Норма, часопис за теорију и праксу васпитања и образовања, бр. 2/2012, Н. Петровић, М. Мрђа, Б. Лазић, прегледни чланак: Математичко образовање и методика наставе, Сомбор, 2013.
8. Норма, часопис за теорију и праксу васпитања и образовања, бр. 2/2012, П. Ковачевић, стручни чланак: Комуникација и интеракција у настави математике, Сомбор, 2013. 4. Марина Радојевић, Физика 6: уџбеник за шести разред основне школе, 5. издање.- Београд: Klett, 2017.
9. Марина Радојевић, Физика 6: уџбеник за шести разред основне школе, 5. издање.- Београд: Klett, 2017.
10. Марина Радојевић, Физика 6: збирка задатака са лабораторијским вежбама за 6. разред основне школе, 6. издање- Београд: Klett, 2018.ж
11. Љубо Ристовски, Физика 1, уџбеник за први разред гимназије, 1. издање.- Београд: Klett, 2015.
12. Наташа Чалуковић, Физика 1, збирка задатака и тестова за 1. разред гимназије, 7. издање.-Београд: Круг, 2010.
13. Јован П. Шетрајић, Милан О. Распоповић, Бранислав Цветковић, Физика 6, збирка задатака са лабораторијским вежбама за 6. разред основне школе, 3. издање.- Београд: Завод за уџбенике и наставна средства, 2006.
14. Тијана Шукиловић, Срђан Вукмировић, Геометрија за информатичаре, Математички факултет, Београд, 2015.

15. Pta-fiz.jimdo.com By Galina Emelyanova: Набор задач с решениями по теме „Движение тела, брошенного под углом к горизонту.“

16. George Polya , Kako ћу решити математички задатак, 2. издање, Школска књига, Загреб, 1966.

17. Млади физичар, такмичења из физике, http://takmicenja.ipb.ac.rs/?page_id=476

18. <http://tesla.pmf.ni.ac.rs/people/nesiclj/predavanja/mehanikasaTR/2013/meh.pdf>

19. <https://www.tehnikum.edu.rs/predmeti/0003/Predavanje02.pdf>

20. <https://youclever.org/book/zadachi-na-dvizhenie-1>

21. <http://tesla.pmf.ni.ac.rs/people/nesiclj/predavanja/mehanikasaTR/2013/meh.pdf>