



Univerzitet u Beogradu
Matematički fakultet

Master rad

Krive nastale kotrljanjem

Mentor:
prof. dr Srđan Vukmirović

Student:
Anja Ranisavljević

Beograd, 2019.

Sadržaj

1 Krive nastale kotrljanjem kruga	3
1.1 Klasifikacija	3
1.2 Parametarske jednačine	6
1.2.1 Parametarska jednačina trohoide	6
1.2.2 Parametarska jednačina cikloide	7
1.2.3 Parametarska jednačina epitrohoide	8
1.2.4 Parametarska jednačina epicikloide	9
1.2.5 Parametarska jednačina hipotrohoide	10
1.2.6 Parametarska jednačina hypocikloide	11
1.3 Dužina luka i površina	12
1.3.1 Dužina luka i površina cikloide	12
1.3.2 Grinova teorema	14
1.3.3 Dužina luka i površina epicikloide	15
1.3.4 Dužina luka i površina hypocikloide	19
1.4 Specijalni slučajevi	23
1.4.1 Krug kao specijalan slučaj epitrohoide	23
1.4.2 Elipsa kao specijalan slučaj hipotrohoide	23
1.4.3 Duž kao specijalan slučaj hypocikloide	24
1.4.4 Kardioida kao specijalan slučaj epicikloide	25
1.4.5 Nefroida kao specijalan slučaj epicikloide	26
1.4.6 Ranunkuloida kao specijalan slučaj epicikloide	27
1.4.7 Primeri epicikloida sa racionalnim ili iracionalnim q	28
1.4.8 Deltoida kao specijalan slučaj hypocikloide	31
1.4.9 Astroida kao specijalan slučaj hypocikloide	32
1.4.10 Primeri hypocikloida sa racionalnim ili iracionalnim q	33
2 Istoriski osvrt	36
2.1 "Helena geometričara"	36
2.2 Problem brahistohrone	37
2.3 Problem tautohrone	40
3 Krive nastale kotrljanjem poligona	42
3.1 Klasifikacija	42
3.2 Kotrljanje nepravilnog poligona po pravoj liniji	45
3.3 Suma kvadrata rastojanja	46
3.4 Površina	47
3.4.1 Površina trohogona	47
3.4.2 Površina epitrohogona i hipotrohogona	49
3.5 Dužina luka i površina	53
3.6 Suma rastojanja	53
3.7 Dužina luka	55
3.7.1 Dužina luka ciklogona	55
3.7.2 Dužina luka epiciklogona i hypociklogona	56
3.8 Klasični primeri i granični slučajevi	57

Uvod

Za prosečnu osobu, reč rulet vezuje se za igre na sreću. U geometriji, **rulet** predstavlja krivu koju opisuje fiksirana tačka ravni krive koja se kotrlja oko druge fiksirane krive. Iznenadujuće broj klasičnih krivih može biti generisan kao rulet.

Krive nastale kotrljanjem imaju široku primenu u prirodnim naukama, industriji, mašinstvu, arhitekturi, umetnosti i sportu. Inženjeri i dizajneri ih koriste pri konstrukciji raznih rotacionih mašina i mehaničkih zupčanika. Arhitektura Kimbel muzeja umetnosti u Texasu ima cikloidni dizajn. Pregibi nekih violina i hafpajpova¹ modelirani su po ovim krivama. Brahistohrona je korisna za dizajn roler kostera zbog postizanja određene brzine u najkraćem mogućem vremenu. U svemu navedenom ogleda se njihova važna uloga u svakodnevnom životu.

Ovaj rad sastoje se iz tri poglavlja.

Na početku prvog poglavlja definišu se krive nastale kotrljanjem kruga - trohoide, epitrohoide i hipotrohoide. Sledi izvođenje njihovih parametarskih jednačina. Govori se o tome kako izgled krive zavisi od odnosa poluprečnika fiksiranog i pokretnog kruga. Nakon toga računaju se izvesne dužine lukova i površine pomoću diferencijalnog računa, uz formulaciju Grinove teoreme koja pomaže u određenim izračunavanjima. Na kraju poglavlja prezentovan je pregled najpoznatijih predstavnika krivih.

U drugom poglavlju govori se o cikloidi kao Heleni² geometričara, ne samo zbog njenih zadivljujućih osobina, već i zbog konflikata koje je izazvala među naučnicima tokom istorije. Zatim su izloženi klasični problemi brahistohrone i tautohrone.

Na početku trećeg poglavlja definišu se krive nastale kotrljanjem poligona - trohogoni, epitrohogoni i hipotrohogoni. Uvod u teoriju koja sledi ilustrovani je opštim primerom kotrljanja nepravilnog poligona. Formuliše se teorema o sumi kvadrata rastojanja, koja zatim pomaže pri izračunavanjima određenih površina. Slično, formuliše se i teorema o sumi rastojanja, koja kasnije olakšava izračunavanja određenih dužina lukova. Podvlači se činjenica da se rezultati dobijeni u prvom poglavlju mogu dobiti kao granični slučajevi rezultata iz ovog poglavlja.

Slike koje predstavljaju vizuelizaciju ovog rada izradila sam pomoću programskog paketa *GeoGebra*. Ovo je bio važan alat za eksperimentisanje i razumevanje gradiva. Odgovarajući apleti mogu se pronaći na *GeoGebra* sajtu.

Neka izvođenja i izračunavanja u radu izvedena su samostalno, pa su prikazana su detaljno, u cilju boljeg praćenja za čitaoca.

Posebno se zahvaljujem svom mentoru, prof. dr Srđanu Vukmiroviću, za savete, primedbe i sugestije koje su pomogle pri realizaciji ovog rada i postizanju što boljeg njegovog kvaliteta, kao i članovima komisije, prof. dr Miroslavi Antić i dr Ivanu Dimitrijeviću.

¹Hafpajp je struktura koja se koristi kao podloga za određene ekstremne sportove, kao što su skejtboarding, snoubording, itd.

²Helena je bila žena iz grčke mitologije, Zevsova čerka i supruga kralja Sparte, koju je oteo trojanski princ i zbog koje je počeo rat između antičke Grčke i Troje, poznatiji kao Trojanski rat.

1 Krive nastale kotrljanjem kruga

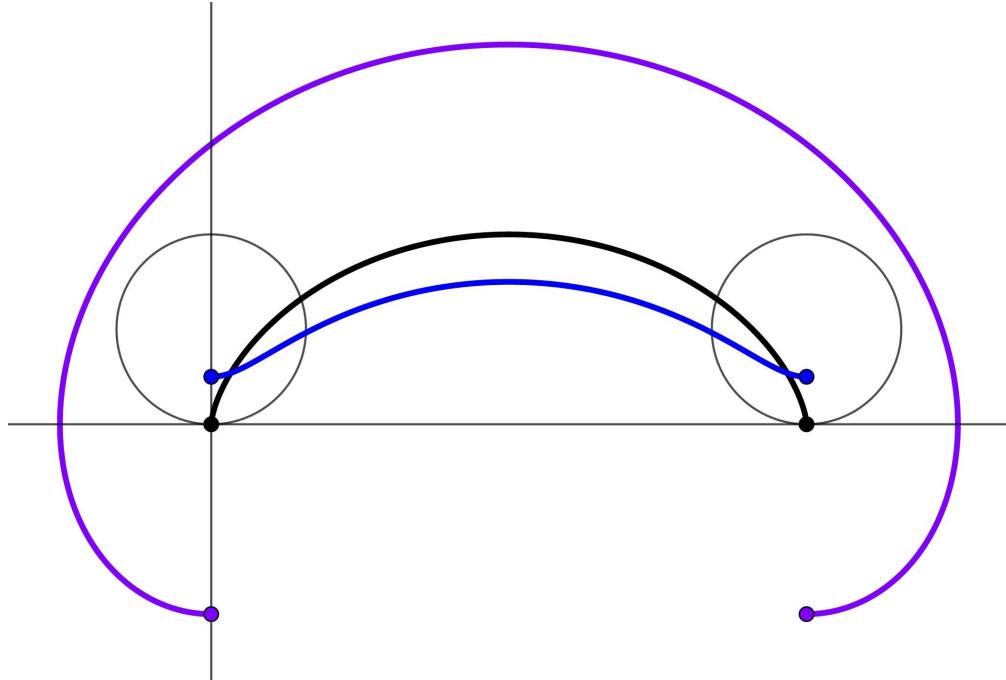
1.1 Klasifikacija

U zavisnosti od toga da li je kriva koja se kotrlja krug, a fiksirana kriva prava linija ili drugi krug, i toga da li se kotrljanje po krugu vrši sa spoljašnje ili unutrašnje strane, rulet se naziva trohoida, epitrohoida ili hipotrohoida (na grčkom "točak" - " $\tau\rho\chi\acute{\zeta}$ ").

Kotrljanje kruga oko nekog objekta je vrsta kretanja koje kombinuje rotaciju kruga oko svog centra i njegovu translaciju (bez klizanja), tako da on uvek dodiruje dati objekat.

Definicija 1. *Trohoida je kriva koju opisuje fiksirana tačka kruga,³ poluprečnika r , koji se kotrlja po pravoj liniji. Neka je ta tačka na rastojanju s od centra kruga. Ako je:*

- $s = r$, trohoida se naziva **cikloida**;
- $0 < s < r$, trohoida se naziva **skraćena cikloida**;
- $s > r$, trohoida se naziva **produžena cikloida**.



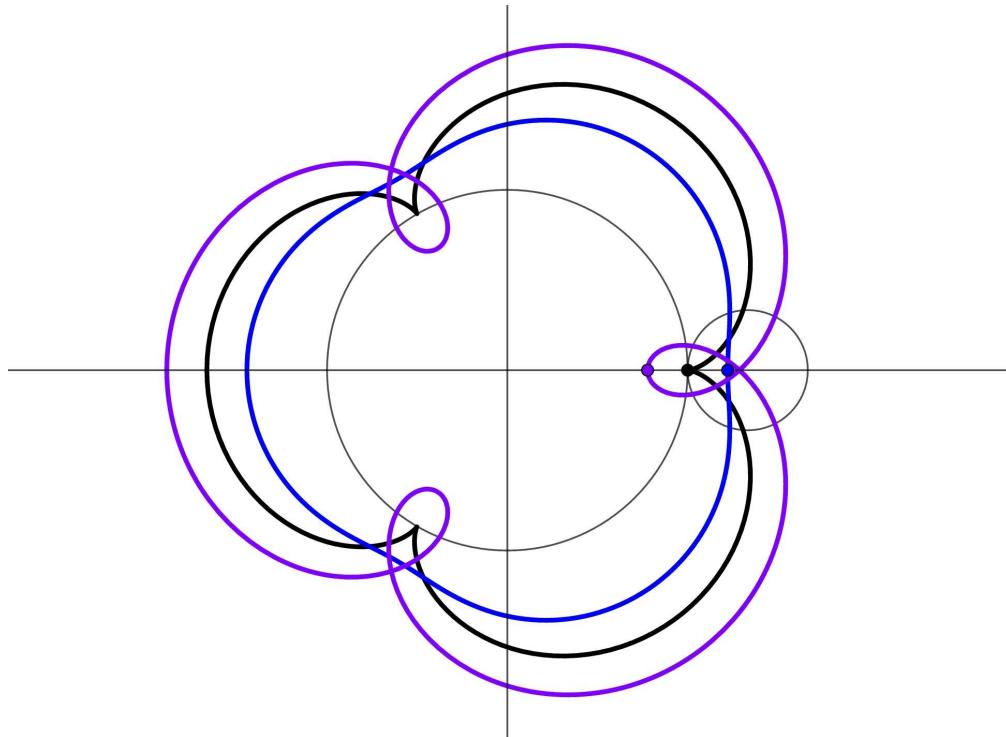
Slika 1: Tri trohoide koje opisuju tri fiksirane tačke kruga⁴

³Pod fiksiranom tačkom kruga podrazumeva se fiksirana tačka ravni kruga; preciznije, data tačka može se nalaziti unutar kruga, izvan kruga ili na kružnici kruga.

⁴Tačka unutar kruga opisuje skraćenu cikloidu, tačka izvan kruga opisuje produženu cikloidu, a tačka na kružnici kruga opisuje cikloidu.

Definicija 2. *Epitrohoida* je kriva koju opisuje fiksirana tačka kruga, poluprečnika r , koji se kotrlja oko drugog fiksiranog kruga, poluprečnika r_1 , sa spoljašnje strane. Neka je ta tačka na rastojanju s od centra pokretnog kruga. Ako je:

- $s = r$, epitrohoida se naziva **epicikloida**;
- $0 < s < r$, epitrohoida se naziva **skraćena epicikloida**;
- $s > r$, epitrohoida se naziva **produžena epicikloida**.

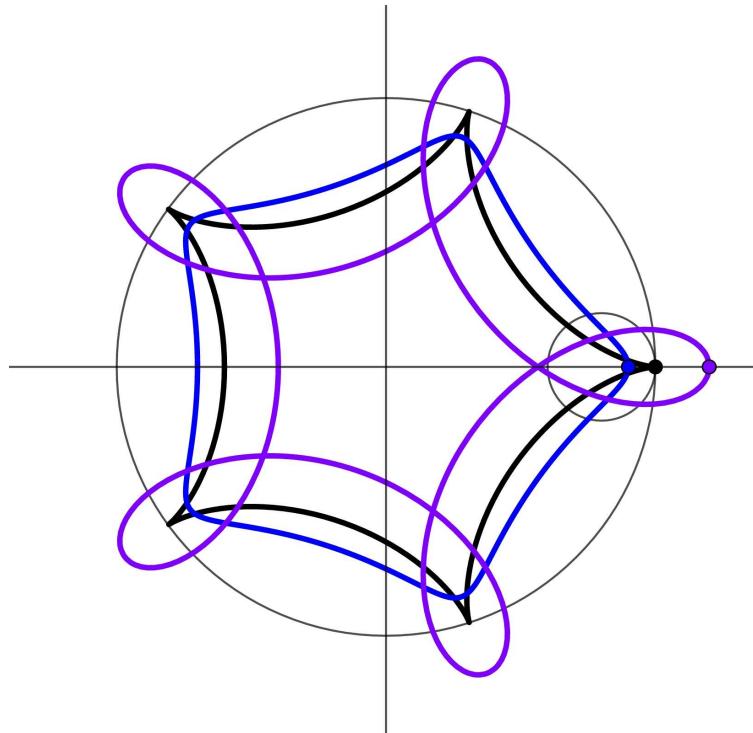


Slika 2: Tri epitrohoide koje opisuju tri fiksirane tačke pokretnog kruga⁵

⁵Tačka unutar pokretnog kruga opisuje skraćenu epicikloidu, tačka izvan pokretnog kruga opisuje produženu epicikloidu, a tačka na kružnici pokretnog kruga opisuje epicikloidu.

Definicija 3. *Hipotrohoida* je kriva koju opisuje fiksirana tačka kruga, poluprečnika r , koji se kotrlja oko drugog fiksiranog kruga, poluprečnika r_1 , sa unutrašnje strane. Neka je ta tačka na rastojanju s od centra pokretnog kruga. Ako je:

- $s = r$, hipotrohoida se naziva **hipocikloida**;
- $0 < s < r$, hipotrohoida se naziva **skraćena hypocikloida**;
- $s > r$, hipotrohoida se naziva **produžena hypocikloida**.

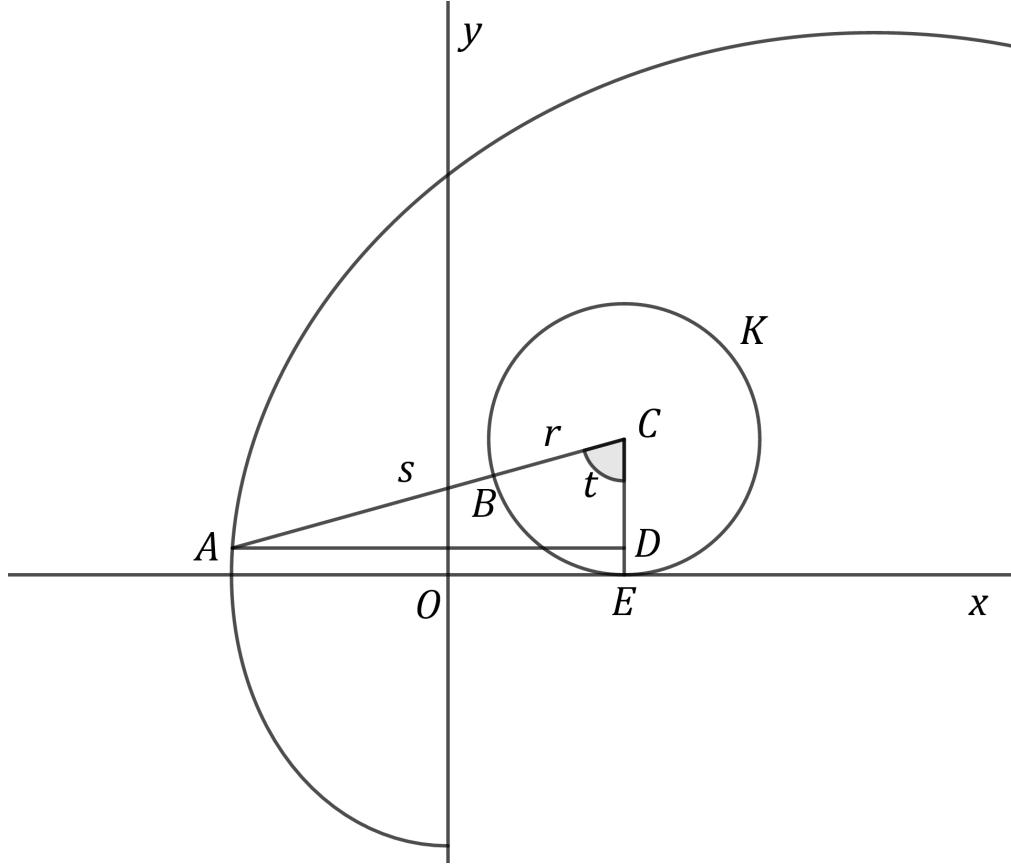


Slika 3: Tri hipotrohoide koje opisuju tri fiksirane tačke pokretnog kruga⁶

⁶Tačka unutar pokretnog kruga opisuje skraćenu hypocikloidu, tačka izvan pokretnog kruga opisuje produženu hypocikloidu, a tačka na kružnici pokretnog kruga opisuje hypocikloidu.

1.2 Parametarske jednačine

1.2.1 Parametarska jednačina trohoide



Slika 4: Parametarska jednačina trohoide

Neka je u pravouglom Dekartovom koordinatnom sistemu Oxy data trohoida (Slika 4) koju opisuje fiksirana tačka $A(x, y)$ kruga K , poluprečnika r , koji se kotrlja po osi Ox . Neka je A na rastojanju s od centra C kruga K .

Neka je, zatim, tačka $B = AC \cap K$, tačka E podnožje normale iz tačke C na osu Ox , tačka D podnožje normale iz tačke A na duž EC i uvedimo oznaku $\angle DCA = t$.

Neka je početni položaj kruga bio takav da su se tačke O i B poklapale i da je u njima krug K dodirivao Ox osu.

Kako za $t = 0$ važi $O = B$, zaključujemo da su dužine kružnog luka \widehat{EB} i duži OE jednake. Pošto je $\widehat{EB} = rt$, dobijamo $OE = rt$. Primećujemo sledeće:

$$\sin t = \frac{AD}{AC}, \quad \cos t = \frac{CD}{AC}.$$

Koordinate tačke A su:

$$\begin{aligned}x &= OE - AD = rt - AC \sin t = rt - s \sin t, \\y &= CE - CD = r - AC \cos t = r - s \cos t.\end{aligned}$$

Na osnovu toga, parametarska jednačina trohoide sa parametrima r i s je:

$$trohoida [r, s] (t) = (x(t), y(t)),$$

gde je:

$$\begin{aligned}x(t) &= rt - s \sin t, \\y(t) &= r - s \cos t.\end{aligned}$$

1.2.2 Parametarska jednačina cikloide

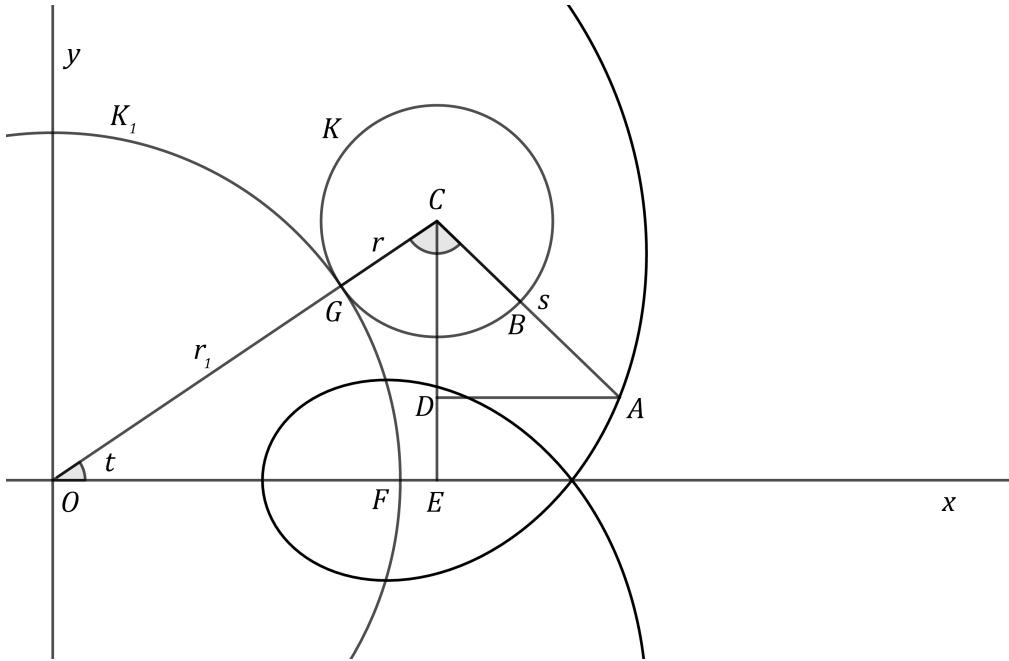
Znamo da se za $s = r$ u prethodnom slučaju dobija cikloida koju opisuje tačka $A(x, y)$ sa kružnice kruga K , poluprečnika r , koji se kotrlja po osi Ox . Uzimajući r za s u prethodnoj jednačini, zaključujemo da je parametarska jednačina cikloide sa parametrom r :

$$cikloida [r] (t) = (x(t), y(t)),$$

gde je:

$$\begin{aligned}x(t) &= r(t - \sin t), \\y(t) &= r(1 - \cos t).\end{aligned}$$

1.2.3 Parametarska jednačina epitrohoide



Slika 5: Parametarska jednačina epitrohoide

Neka je u pravouglom Dekartovom koordinatnom sistemu Oxy data epitrohoida (Slika 5) koju opisuje fiksirana tačka $A(x, y)$ kruga K , poluprečnika r , koji se kotrlja sa spoljašnje strane po krugu K_1 čiji je centar O , a poluprečnik r_1 . Neka je A na rastojanju s od centra C kruga K .

Neka je, zatim, tačka $B = AC \cap K$, $F = Ox \cap K_1$, $G = K \cap K_1$, tačka E podnožje normale iz tačke C na osu Ox , tačka D podnožje normale iz tačke A na duž EC i uvedimo oznaku $\angle FOG = t$.

Neka je početni položaj kruga bio takav da su se tačke F i B poklapale i da je u njima krug K dodirivao spolja krug K_1 .

Kako za $t = 0$ važi $F = B$, zaključujemo da su dužine kružnih lukova \widehat{BG} i \widehat{FG} jednake. Pošto je:

$$\widehat{BG} = r\angle BCG \quad \text{i} \quad \widehat{FG} = r_1t,$$

dobijamo:

$$r_1t = r\angle BCG.$$

Primećujemo sledeće:

$$\cos t = \frac{OE}{r+r_1}, \quad \sin t = \frac{CE}{r+r_1}, \quad \sin \angle DCB = \frac{DA}{s}, \quad \cos \angle DCB = \frac{CD}{s}.$$

S obzirom da je:

$$\angle DCB = \angle BCG - \angle GCD = \frac{r_1t}{r} - \left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \frac{r+r_1}{r}t - \frac{\pi}{2},$$

koristeći adicione formule, dolazimo do:

$$\sin \angle DCB = \sin \left(\frac{r+r_1}{r}t - \frac{\pi}{2} \right) = -\cos \left(\frac{r+r_1}{r}t \right),$$

$$\cos \angle DCB = \cos \left(\frac{r+r_1}{r}t - \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left(\frac{r+r_1}{r}t \right).$$

Koordinate tačke A su:

$$x = OE + DA = (r + r_1) \cos t + s \sin \angle DCB = (r + r_1) \cos t - s \cos \left(\frac{r+r_1}{r}t \right),$$

$$y = CE - CD = (r + r_1) \sin t - s \cos \angle DCB = (r + r_1) \sin t - s \sin \left(\frac{r+r_1}{r}t \right).$$

Na osnovu toga, parametarska jednačina epitrohoide sa parametrima r , r_1 i s je:

$$\text{epitrohoida } [r, r_1, s] (t) = (x(t), y(t)),$$

gde je:

$$x(t) = (r + r_1) \cos t - s \cos \left(\frac{r+r_1}{r}t \right),$$

$$y(t) = (r + r_1) \sin t - s \sin \left(\frac{r+r_1}{r}t \right).$$

1.2.4 Parametarska jednačina epicikloide

Znamo da se za $s = r$ u prethodnom slučaju dobija epicikloida koju opisuje tačka $A(x, y)$ sa kružnice kruga K , poluprečnika r , koji se kotrlja sa spoljašnje strane po krugu K_1 čiji je centar O , a poluprečnik r_1 . Uzimajući r za s u prethodnoj jednačini, zaključujemo da je parametarska jednačina epicikloide sa parametrima r i r_1 :

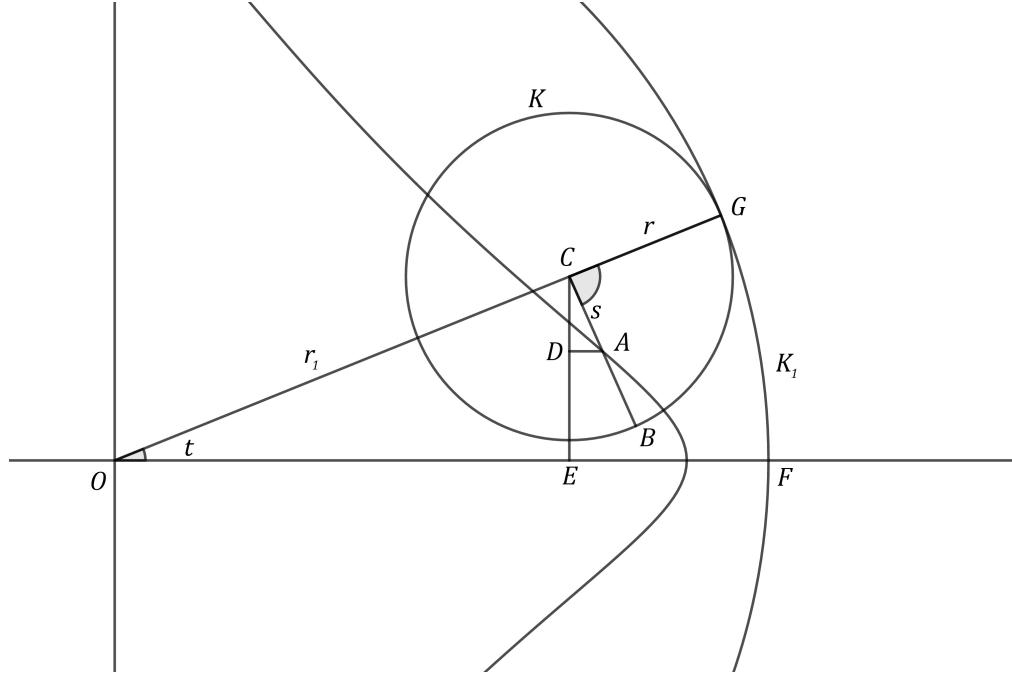
$$\text{epicikloida } [r, r_1] (t) = (x(t), y(t)),$$

gde je:

$$x(t) = (r + r_1) \cos t - r \cos \left(\frac{r+r_1}{r}t \right),$$

$$y(t) = (r + r_1) \sin t - r \sin \left(\frac{r+r_1}{r}t \right).$$

1.2.5 Parametarska jednačina hipotrohoide



Slika 6: Parametarska jednačina hipotrohoide

Neka je u pravougлом Dekartovom koordinatnom sistemu Oxy data hipotrohoida (Slika 6) koju opisuje fiksirana tačka $A(x, y)$ kruga K , poluprečnik r , koji se kotrlja sa unutrašnje strane po krugu K_1 čiji je centar O , a poluprečnik r_1 (pri čemu je $r < r_1$). Neka je A na rastojanju s od centra C kruga K .

Neka je, zatim, tačka $B = AC \cap K$, $F = Ox \cap K_1$, $G = K \cap K_1$, tačka E podnožje normale iz tačke C na osu Ox , tačka D podnožje normale iz tačke A na duž EC i uvedimo oznaku $\angle FOG = t$.

Neka je početni položaj kruga bio takav da su se tačke F i B poklapale i da je u njima krug K dodirivao iznutra krug K_1 .

Kako za $t = 0$ važi $F = B$, zaključujemo da su dužine kružnih lukova \widehat{BG} i \widehat{FG} jednake. Pošto je:

$$\widehat{BG} = r\angle BCG \quad \text{i} \quad \widehat{FG} = r_1t,$$

dobijamo:

$$r_1t = r\angle BCG.$$

Primećujemo sledeće:

$$\cos t = \frac{OE}{r_1 - r}, \quad \sin t = \frac{CE}{r_1 - r}, \quad \sin \angle DCB = \frac{DA}{s}, \quad \cos \angle DCB = \frac{CD}{s}.$$

S obzirom da je:

$$\angle DCB = \angle GCD - \angle BCG = \left(\pi - \left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right) - \frac{r_1t}{r} = \frac{r - r_1}{r}t + \frac{\pi}{2},$$

koristeći adicione formule, dolazimo do:

$$\sin \angle DCB = \sin \left(\frac{r - r_1}{r} t + \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left(\frac{r - r_1}{r} t \right) = \cos \left(\frac{r_1 - r}{r} t \right),$$

$$\cos \angle DCB = \cos \left(\frac{r - r_1}{r} t + \frac{\pi}{2} \right) = -\sin \left(\frac{r - r_1}{r} t \right) = \sin \left(\frac{r_1 - r}{r} t \right).$$

Koordinate tačke A su:

$$x = OE + DA = (r_1 - r) \cos t + s \sin \angle DCB = (r_1 - r) \cos t + s \cos \left(\frac{r_1 - r}{r} t \right),$$

$$y = CE - CD = (r_1 - r) \sin t - s \cos \angle DCB = (r_1 - r) \sin t - s \sin \left(\frac{r_1 - r}{r} t \right).$$

Na osnovu toga, parametarska jednačina hipotrohoide sa parametrima r , r_1 i s je:

$$\text{hipotrohoida } [r, r_1, s] (t) = (x(t), y(t)),$$

gde je:

$$x(t) = (r_1 - r) \cos t + s \cos \left(\frac{r_1 - r}{r} t \right),$$

$$y(t) = (r_1 - r) \sin t - s \sin \left(\frac{r_1 - r}{r} t \right).$$

1.2.6 Parametarska jednačina hypocikloide

Znamo da se za $s = r$ u prethodnom slučaju dobija hypocikloida koju opisuje tačka $A(x, y)$ sa kružnice kruga K , poluprečnika r , koji se kotrlja sa unutrašnje strane po krugu K_1 čiji je centar O , a poluprečnik r_1 . Uzimajući r za s u prethodnoj jednačini, zaključujemo da je parametarska jednačina hypocikloide sa parametrima r i r_1 :

$$\text{hypocikloida } [r, r_1] (t) = (x(t), y(t)),$$

gde je:

$$x(t) = (r_1 - r) \cos t + r \cos \left(\frac{r_1 - r}{r} t \right),$$

$$y(t) = (r_1 - r) \sin t - r \sin \left(\frac{r_1 - r}{r} t \right).$$

1.3 Dužina luka i površina

Bitno je naglasiti činjenicu da je epicikloida ili hipocikloida zatvorena kriva ako se pokretni krug nakon obilaženja fiksiranog kruga vrati u početni položaj. Ovo se dešava kada je $q = \frac{r_1}{r}$ racionalan broj. Ako je q racionalan broj takav da je $q = \frac{m}{n}$, gde su m i n celi i uzajamno prosti, kriva ima m špiceva i zatvara se nakon što pokretni krug n puta obide fiksirani. Dakle, ako je q ceo broj, kriva ima q špiceva i zatvara se nakon što pokretni krug jedanput obide fiksirani.

Ako je, sa druge strane, q iracionalan broj, kriva se ne zatvara nikada, već popunjava kružni prsten kada $t \in [0, \infty)$ i predstavlja skup koji je svuda gust. Epicikloida formira kružni prsten između fiksiranog i kruga sa centrom u $(0, 0)$, poluprečnika $r_1 + 2r$. Hipocikloida formira kružni prsten između fiksiranog i kruga sa centrom u $(0, 0)$, poluprečnika $r_1 - 2r$.

Jedan svod cikloide, epicikloide ili hipocikloide predstavlja krivu opisanu nakon jednog obrtaja pokretnog kruga. U ovom delu izračunaćemo dužinu luka jednog svoda cikloide i površinu figure koja je ograničena njim i Ox osom, kao i dužinu luka i površinu epicikloide i hipocikloide (u slučaju kada je q ceo broj, jer tada ima smisla uopšte govoriti o njima). U izračunavanjima će učestvovati dobro poznata Grinova teorema.

1.3.1 Dužina luka i površina cikloide

Teorema 1. *Dužina luka jednog svoda cikloide jednaka je:*

$$L = 8r,$$

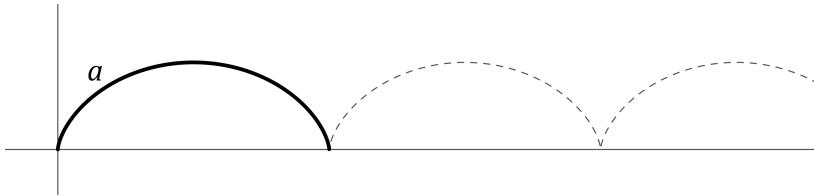
a površina figure koja je ograničena lukom jednog svoda cikloide i Ox osom jednaka je:

$$P = 3r^2\pi,$$

gde je r poluprečnik kruga.

Dokaz. Neka je data parametarska jednačina cikloide:

$$\alpha(t) = (r(t - \sin t), r(1 - \cos t)).$$



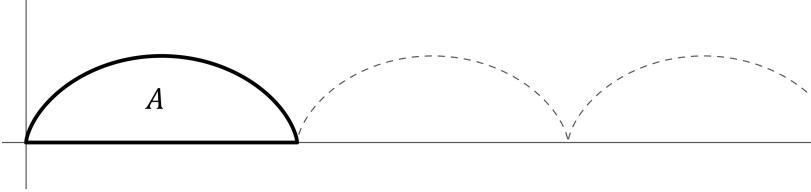
Slika 7: Svod a cikloide

Uvedimo oznaku a za jedan svod cikloide (Slika 7). Zato a predstavlja krivu $\alpha(t)$ za $t \in [0, 2\pi]$. Odатле je dužina luka jednog svoda cikloide jednaka:

$$L(a) = \int_0^{2\pi} \|\alpha'(t)\| dt,$$

pa računamo:

$$\begin{aligned}
x'(t) &= r(1 - \cos t), \\
y'(t) &= r \sin t, \\
x'^2(t) + y'^2(t) &= r^2(1 - 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t) \\
&= 2r^2(1 - \cos t) \\
&= 4r^2 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right), \\
\|\alpha'(t)\| &= \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} \\
&= \sqrt{4r^2 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} \\
&= 2r \left| \sin\left(\frac{t}{2}\right) \right|, \\
L(a) &= 2r \int_0^{2\pi} \left| \sin\left(\frac{t}{2}\right) \right| dt \\
&= 2r \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt \\
&= 2r \left(-2 \cos\left(\frac{t}{2}\right) \Big|_0^{2\pi} \right) \\
&= 8r.
\end{aligned}$$



Slika 8: Deo A cikloide ispod jednog njenog svoda

Neka je sa A označen deo cikloide ispod jednog njenog svoda (Slika 8). Tačnije, A je figura koju ograničavaju jedan svod a cikloide i Ox osa. Primetimo da za krajnje tačke prvog svoda važi $x = 0$ i $x = 2r\pi$, a odgovarajuće vrednosti za parametar t biće $t = 0$ i $t = 2\pi$.

Odavde je površina dela cikloide ispod jednog njenog svoda jednaka:

$$P(A) = \int_0^{2r\pi} y dx = \int_0^{2\pi} x'(t) y(t) dt,$$

pa imamo:

$$\begin{aligned}
x'(t) y(t) &= r^2(1 - 2 \cos t + \cos^2 t) \\
&= r^2 \left(\frac{3}{2} - 2 \cos t + \frac{\cos(2t)}{2} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(A) &= r^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2 \cos t + \frac{\cos(2t)}{2} \right) dt \\
&= r^2 \left(\frac{3}{2}t - 2 \sin t + \frac{1}{4} \sin(2t) \Big|_0^{2\pi} \right) \\
&= 3r^2\pi.
\end{aligned}$$

Primetimo da smo ovime dokazali da je površina figure koja je ograničena lukom jednog svoda cikloide i Ox osom tri puta veća od površine kruga.

1.3.2 Grinova teorema

Grinova teorema daje vezu između krivolinijskog integrala oko proste zatvorene krive C i dvostrukog integrala nad oblasti D koja je ograničena krivom C .

Teorema 2. *Neka je C pozitivno orijentisana, deo po deo glatka, prosta i zatvorena kriva u ravni koja ograničava oblast D . Ako preslikavanja L i M imaju neprekidne parcijalne izvode na otvorenoj oblasti koja sadrži D , onda važi:*

$$\int_C L(x, y) dx + M(x, y) dy = \iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \right) dx dy.$$

Uzmememo li da je $L(x, y) = -y$ i $M(x, y) = x$, primenom Grinove teoreme dolazimo do:

$$\int_C -y dx + x dy = \iint_D (1 - (-1)) dx dy = 2 \iint_D dx dy.$$

S obzirom na to da $\iint_D dx dy$ predstavlja površinu oblasti D (u oznaci $P(D)$), zaključujemo da je:

$$P(D) = \frac{1}{2} \int_C -y dx + x dy.$$

Lema 1. *Ako je data prava $p : y = kx$, za neko $k \in \mathbb{R}$, onda važi:*

$$\int_p -y dx + x dy = 0.$$

Dokaz.

$$\int_p -y dx + x dy = \int_p -(kx) dx + x(kdx) = 0.$$

1.3.3 Dužina luka i površina epicikloide

Teorema 3. *Dužina luka epicikloide jednaka je:*

$$L = 8(r + r_1),$$

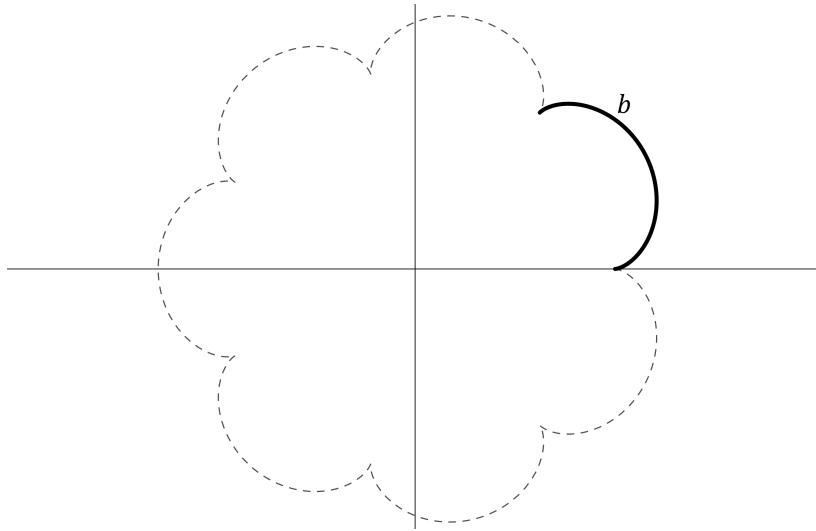
a površina epicikloide jednaka je:

$$P = (r + r_1)(2r + r_1)\pi,$$

gde je r poluprečnik pokretnog, a r_1 poluprečnik fiksiranog kruga.

Dokaz. Neka je data parametarska jednačina epicikloide:

$$\beta(t) = \left((r + r_1) \cos t - r \cos \left(\frac{r + r_1}{r} t \right), (r + r_1) \sin t - r \sin \left(\frac{r + r_1}{r} t \right) \right).$$



Slika 9: Svod b epicikloide za $q = 7$

Uvedimo označku b za jedan svod epicikloide (Slika 9). Napomenuli smo da izračunavanja vršimo za slučajeve kada je $q = \frac{r_1}{r}$ ceo broj, pa sledi da kriva ima q špiceva (ujedno i q svodova) i zatvara se nakon što pokretni krug jedanput obide fiksirani, to jest za vrednosti parametra $t \in [0, 2\pi]$. Zato b predstavlja krivu $\beta(t)$ za $t \in \left[0, 2\frac{r}{r_1}\pi\right]$.

Odatle je dužina luka jednog svoda epicikloide jednaka:

$$L(b) = \int_0^{2\frac{r}{r_1}\pi} \|\beta'(t)\| dt,$$

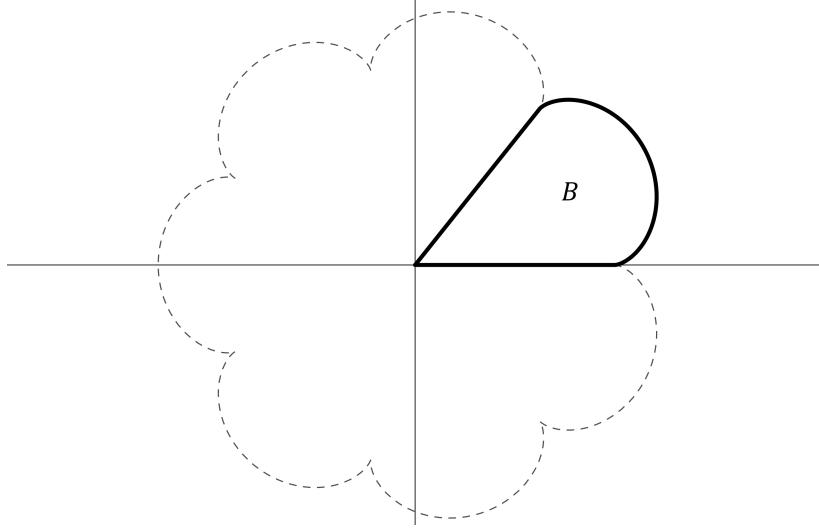
pa računamo:

$$x'(t) = (r + r_1) \left(-\sin t + \sin \left(\frac{r + r_1}{r} t \right) \right),$$

$$\begin{aligned}
y'(t) &= (r + r_1) \left(\cos t - \cos \left(\frac{r + r_1}{r} t \right) \right), \\
x'^2(t) + y'^2(t) &= (r + r_1)^2 \left(\sin^2 t - 2 \sin t \sin \left(\frac{r + r_1}{r} t \right) + \sin^2 \left(\frac{r + r_1}{r} t \right) \right. \\
&\quad \left. + \cos^2 t - 2 \cos t \cos \left(\frac{r + r_1}{r} t \right) + \cos^2 \left(\frac{r + r_1}{r} t \right) \right) \\
&= (r + r_1)^2 \left(2 - 2 \left(\sin t \sin \left(\frac{r + r_1}{r} t \right) + \cos t \cos \left(\frac{r + r_1}{r} t \right) \right) \right) \\
&= 2(r + r_1)^2 \left(1 - \cos \left(-\frac{r_1}{r} t \right) \right) \\
&= 4(r + r_1)^2 \sin^2 \left(\frac{r_1}{2r} t \right), \\
\|\beta'(t)\| &= \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} \\
&= \sqrt{4(r + r_1)^2 \sin^2 \left(\frac{r_1}{2r} t \right)} \\
&= 2(r + r_1) \left| \sin \left(\frac{r_1}{2r} t \right) \right|, \\
L(b) &= 2(r + r_1) \int_0^{2\frac{r}{r_1}\pi} \left| \sin \left(\frac{r_1}{2r} t \right) \right| dt \\
&= 2(r + r_1) \int_0^{2\frac{r}{r_1}\pi} \sin \left(\frac{r_1}{2r} t \right) dt \\
&= 2(r + r_1) \left(-\frac{2r}{r_1} \cos \left(\frac{r_1}{2r} t \right) \Big|_0^{2\frac{r}{r_1}\pi} \right) \\
&= \frac{8r}{r_1} (r + r_1).
\end{aligned}$$

Dužina luka epicikloide jednaka je dužini luka q svodova:

$$L(\beta) = qL(b) = 8(r + r_1).$$



Slika 10: Deo B epicikloide ispod jednog njenog svoda

Neka je sa B označen deo epicikloide ispod jednog njenog svoda (Slika 10). Tačnije, B je figura koju ograničavaju jedan svod b epicikloide, duž b_1 odredena jednom krajnjom tačkom svoda b i koordinatnim početkom i duž b_2 određena drugom krajnjom tačkom svoda b i koordinatnim početkom.

Iz primene Grinove teoreme zaključujemo da je:

$$P(B) = \frac{1}{2} \int_{\beta \cup b_1 \cup b_2} -ydx + xdy.$$

Na osnovu Leme 1 imamo:

$$\int_{b_1} -ydx + xdy = \int_{b_2} -ydx + xdy = 0.$$

Odavde je površina dela epicikloide ispod jednog njenog svoda jednaka:

$$P(B) = \frac{1}{2} \int_{\beta} -ydx + xdy = \frac{1}{2} \int_0^{2\frac{r}{r_1}\pi} (x(t)y'(t) - y(t)x'(t)) dt,$$

pa imamo:

$$x(t)y'(t) = (r + r_1) \left((r + r_1) \cos^2 t - (2r + r_1) \cos t \cos \left(\frac{r + r_1}{r} t \right) + r \cos^2 \left(\frac{r + r_1}{r} t \right) \right),$$

$$y(t)x'(t) = (r + r_1) \left(-(r + r_1) \sin^2 t + (2r + r_1) \sin t \sin \left(\frac{r + r_1}{r} t \right) - r \sin^2 \left(\frac{r + r_1}{r} t \right) \right),$$

$$\begin{aligned}
x(t)y'(t) - y(t)x'(t) &= (r + r_1) \left((r + r_1)(\cos^2 t + \sin^2 t) \right. \\
&\quad \left. - (2r + r_1) \left(\cos t \cos \left(\frac{r+r_1}{r} t \right) + \sin t \sin \left(\frac{r+r_1}{r} t \right) \right) \right. \\
&\quad \left. + r \left(\cos^2 \left(\frac{r+r_1}{r} t \right) + \sin^2 \left(\frac{r+r_1}{r} t \right) \right) \right) \\
&= (r + r_1) \left(r + r_1 - (2r + r_1) \cos \left(t - \frac{r+r_1}{r} t \right) + r \right) \\
&= (r + r_1) (2r + r_1) \left(1 - \cos \left(\frac{r_1}{r} t \right) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(B) &= \frac{1}{2} (r + r_1) (2r + r_1) \int_0^{2\frac{r_1}{r_1}\pi} \left(1 - \cos \left(\frac{r_1}{r} t \right) \right) dt \\
&= \frac{1}{2} (r + r_1) (2r + r_1) \left(t - \frac{r}{r_1} \sin \left(\frac{r_1}{r} t \right) \Big|_0^{2\frac{r_1}{r_1}\pi} \right) \\
&= \frac{r}{r_1} (r + r_1) (2r + r_1) \pi.
\end{aligned}$$

Površina epicikloide jednaka je površini q delova ispod jednog njenog svoda:

$$P(\beta) = qP(B) = (r + r_1) (2r + r_1) \pi.$$

1.3.4 Dužina luka i površina hipocikloide

Teorema 4. *Dužina luka hipocikloide jednaka je:*

$$L = 8(r_1 - r),$$

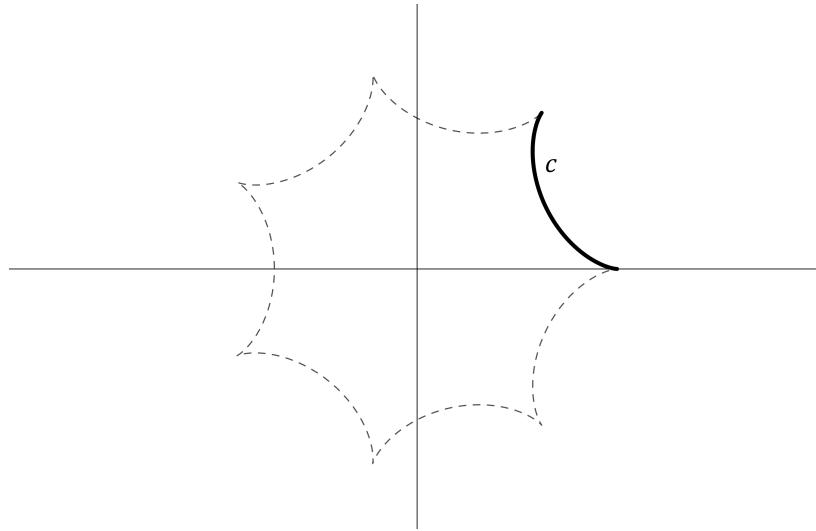
a površina hipocikloide jednaka je:

$$P = (r_1 - r)(r_1 - 2r)\pi,$$

gde je r poluprečnik pokretnog, a r_1 poluprečnik fiksiranog kruga.

Dokaz. Neka je data parametarska jednačina hipocikloide:

$$\gamma(t) = \left((r_1 - r) \cos t + r \cos \left(\frac{r_1 - r}{r} t \right), (r_1 - r) \sin t - r \sin \left(\frac{r_1 - r}{r} t \right) \right).$$



Slika 11: Svod c hipocikloide za $q = 7$

Uvedimo oznaku c za jedan svod hipocikloide (Slika 11). Napomenuli smo da izračunavanja vršimo za slučajeve kada je $q = \frac{r_1}{r}$ ceo broj, pa sledi da kriva ima q špiceva (ujedno i q svodova) i zatvara se nakon što pokretni krug jedanput obide fiksirani, to jest za vrednosti parametra $t \in [0, 2\pi]$. Zato c predstavlja krivu $\gamma(t)$ za $t \in \left[0, 2\frac{r}{r_1}\pi\right]$.

Odatle je dužina luka jednog svoda hipocikloide jednaka:

$$L(c) = \int_0^{2\frac{r}{r_1}\pi} \|\gamma'(t)\| dt,$$

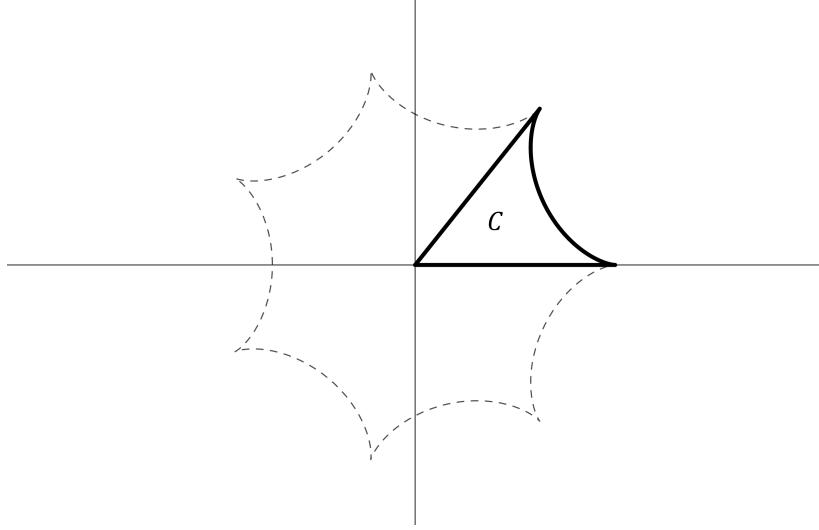
pa računamo:

$$x'(t) = -(r_1 - r) \left(\sin t + \sin \left(\frac{r_1 - r}{r} t \right) \right),$$

$$\begin{aligned}
y'(t) &= (r_1 - r) \left(\cos t - \cos \left(\frac{r_1 - r}{r} t \right) \right), \\
x'^2(t) + y'^2(t) &= (r_1 - r)^2 \left(\sin^2 t + 2 \sin t \sin \left(\frac{r_1 - r}{r} t \right) + \sin^2 \left(\frac{r_1 - r}{r} t \right) \right. \\
&\quad \left. + \cos^2 t - 2 \cos t \cos \left(\frac{r_1 - r}{r} t \right) + \cos^2 \left(\frac{r_1 - r}{r} t \right) \right) \\
&= (r_1 - r)^2 \left(2 - 2 \left(-\sin t \sin \left(\frac{r_1 - r}{r} t \right) + \cos t \cos \left(\frac{r_1 - r}{r} t \right) \right) \right) \\
&= 2(r_1 - r)^2 \left(1 - \cos \left(\frac{r_1}{r} t \right) \right) \\
&= 4(r_1 - r)^2 \sin^2 \left(\frac{r_1}{2r} t \right), \\
\|\gamma'(t)\| &= \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} \\
&= \sqrt{4(r_1 - r)^2 \sin^2 \left(\frac{r_1}{2r} t \right)} \\
&= 2(r_1 - r) \left| \sin \left(\frac{r_1}{2r} t \right) \right|, \\
L(c) &= 2(r_1 - r) \int_0^{2\frac{r}{r_1}\pi} \left| \sin \left(\frac{r_1}{2r} t \right) \right| dt \\
&= 2(r_1 - r) \int_0^{2\frac{r}{r_1}\pi} \sin \left(\frac{r_1}{2r} t \right) dt \\
&= 2(r_1 - r) \left(-\frac{2r}{r_1} \cos \left(\frac{r_1}{2r} t \right) \Big|_0^{2\frac{r}{r_1}\pi} \right) \\
&= \frac{8r}{r_1} (r_1 - r).
\end{aligned}$$

Dužina luka hipocikloide jednaka je dužini luka q svodova:

$$L(\gamma) = qL(c) = 8(r_1 - r).$$



Slika 12: Deo C hipocikloide ispod jednog njenog svoda

Neka je sa C označen deo hipocikloide ispod jednog njenog svoda (Slika 12). Tačnije, C je figura koju ograničavaju jedan svod c hipocikloide, duž c_1 određena jednom krajnjom tačkom svoda c i koordinatnim početkom i duž c_2 određena drugom krajnjom tačkom svoda c i koordinatnim početkom.

Iz primene Grinove teoreme zaključujemo da je:

$$P(C) = \frac{1}{2} \int_{\gamma \cup c_1 \cup c_2} -ydx + xdy.$$

Na osnovu Leme 1 imamo:

$$\int_{c_1} -ydx + xdy = \int_{c_2} -ydx + xdy = 0.$$

Odavde je površina dela hipocikloide ispod jednog njenog svoda jednaka:

$$P(C) = \frac{1}{2} \int_{\gamma} -ydx + xdy = \frac{1}{2} \int_0^{2\frac{r}{r_1}\pi} (x(t)y'(t) - y(t)x'(t)) dt,$$

pa imamo:

$$x(t)y'(t) = (r_1 - r) \left((r_1 - r) \cos^2 t - (r_1 - 2r) \cos t \cos \left(\frac{r_1 - r}{r} t \right) - r \cos^2 \left(\frac{r_1 - r}{r} t \right) \right),$$

$$y(t)x'(t) = - (r_1 - r) \left((r_1 - r) \sin^2 t + (r_1 - 2r) \sin t \sin \left(\frac{r_1 - r}{r} t \right) - r \sin^2 \left(\frac{r_1 - r}{r} t \right) \right),$$

$$\begin{aligned}
x(t)y'(t) - y(t)x'(t) &= (r_1 - r) \left((r_1 - r)(\cos^2 t + \sin^2 t) \right. \\
&\quad \left. - (r_1 - 2r) \left(\cos t \cos \left(\frac{r_1 - r}{r} t \right) - \sin t \sin \left(\frac{r_1 - r}{r} t \right) \right) \right. \\
&\quad \left. - r \left(\cos^2 \left(\frac{r_1 - r}{r} t \right) + \sin^2 \left(\frac{r_1 - r}{r} t \right) \right) \right) \\
&= (r_1 - r) \left(r_1 - r - (r_1 - 2r) \cos \left(t + \frac{r_1 - r}{r} t \right) - r \right) \\
&= (r_1 - r)(r_1 - 2r) \left(1 - \cos \left(\frac{r_1}{r} t \right) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(C) &= \frac{1}{2} (r_1 - r)(r_1 - 2r) \int_0^{2\frac{r_1}{r_1}\pi} \left(1 - \cos \left(\frac{r_1}{r} t \right) \right) dt \\
&= \frac{1}{2} (r_1 - r)(r_1 - 2r) \left(t - \frac{r}{r_1} \sin \left(\frac{r_1}{r} t \right) \Big|_0^{2\frac{r_1}{r_1}\pi} \right) \\
&= \frac{r}{r_1} (r_1 - r)(r_1 - 2r) \pi.
\end{aligned}$$

Površina hipocikloide jednaka je površini q delova ispod jednog njenog svoda:

$$P(\gamma) = qP(C) = (r_1 - r)(r_1 - 2r)\pi.$$

1.4 Specijalni slučajevi

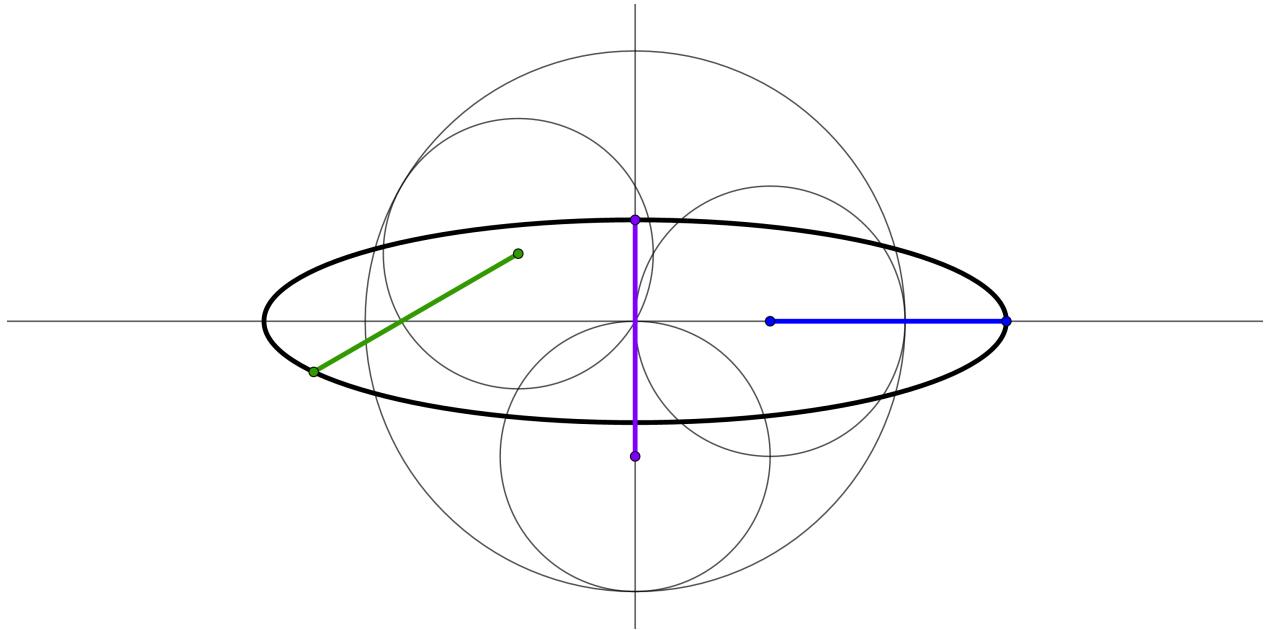
1.4.1 Krug kao specijalan slučaj epitrohoide

Epitrohoida za koju važi da je $r_1 = 0$, ima parametarsku jednačinu:

$$\text{epitrohoida } [r, 0, s] (t) = ((r - s) \cos t, (r - s) \sin t).$$

Dakle, ta kriva je krug sa centrom u $(0, 0)$ i poluprečnikom dužine $|r - s|$.

1.4.2 Elipsa kao specijalan slučaj hipotrohoide



Slika 13: Elipsa nastala kotrljanjem kruga unutar duplo većeg kruga

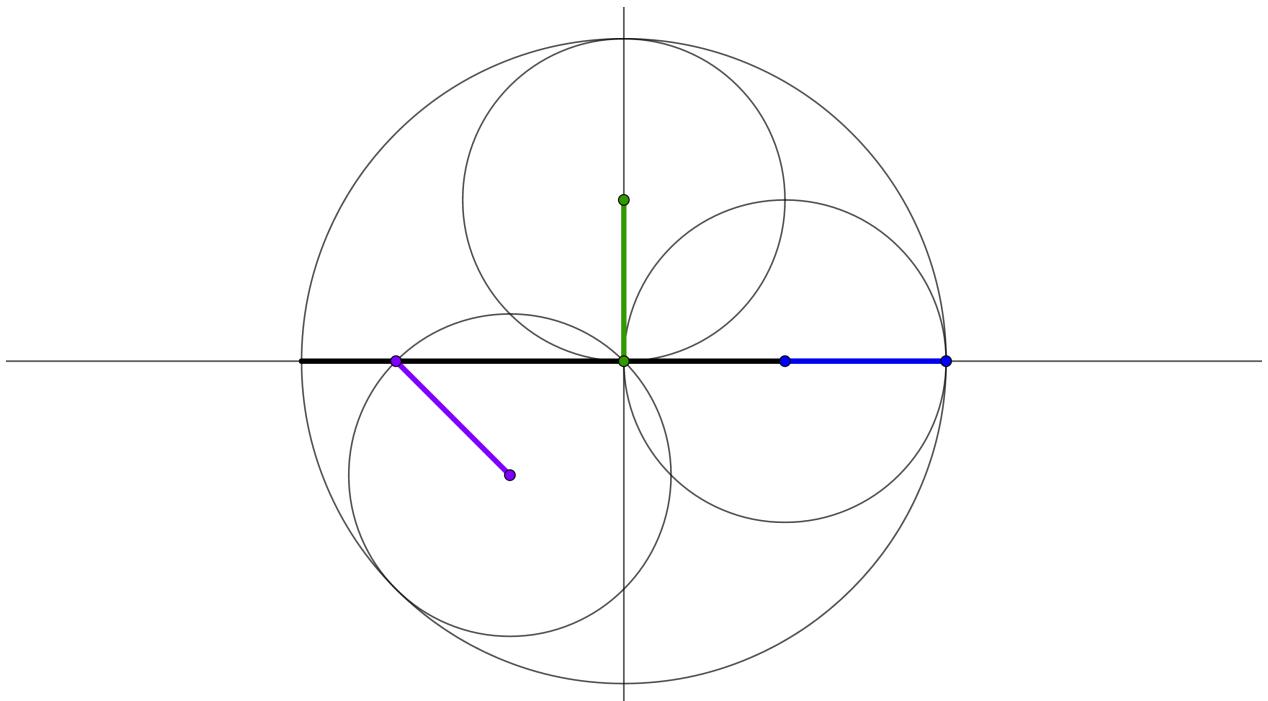
Hipotrohoida za koju važi da je $r_1 = 2r$, ima parametarsku jednačinu:

$$\text{hipotrohoida } [r, 2r, s] (t) = ((r + s) \cos t, (r - s) \sin t).$$

Dakle, ta kriva je elipsa sa centrom u $(0, 0)$, velikom poluosom dužine $r + s$ i malom poluosom dužine $|r - s|$.

Na Slici 13 su prikazana tri položaja pokretnog kruga, za vrednosti $t = 0$, $t = \frac{5\pi}{6}$ i $t = \frac{3\pi}{2}$.

1.4.3 Duž kao specijalan slučaj hipocikloide



Slika 14: Duž nastala kotrljanjem

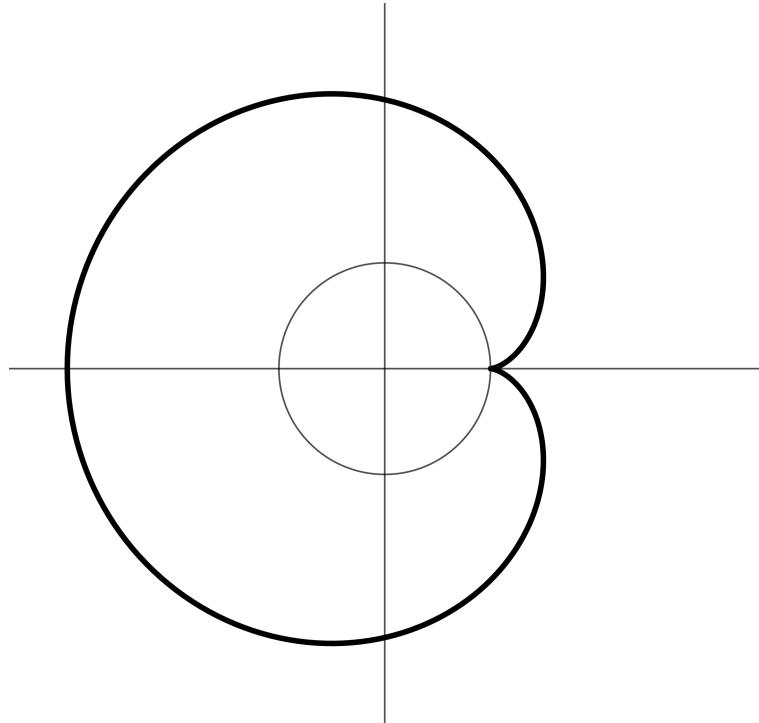
Hipocikloida za koju važi da je $q = 2 \Leftrightarrow r_1 = 2r$, ima parametarsku jednačinu:

$$\text{hipocikloida } [r, 2r] (t) = (2r \cos t, 0).$$

Dakle, ta kriva je duž čije su krajnje tačke preseka fiksiranog kruga i Ox ose, to jest tačke koje imaju koordinate $(-2r, 0)$ i $(2r, 0)$.

Na Slici 14 su prikazana tri položaja pokretnog kruga, za vrednosti $t = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$ i $t = \frac{5\pi}{4}$.

1.4.4 Kardioida kao specijalan slučaj epicikloide



Slika 15: Kardioida

Kardioida je epicikloida za koju važi da je $q = 1 \Leftrightarrow r_1 = r$ (Slika 15).

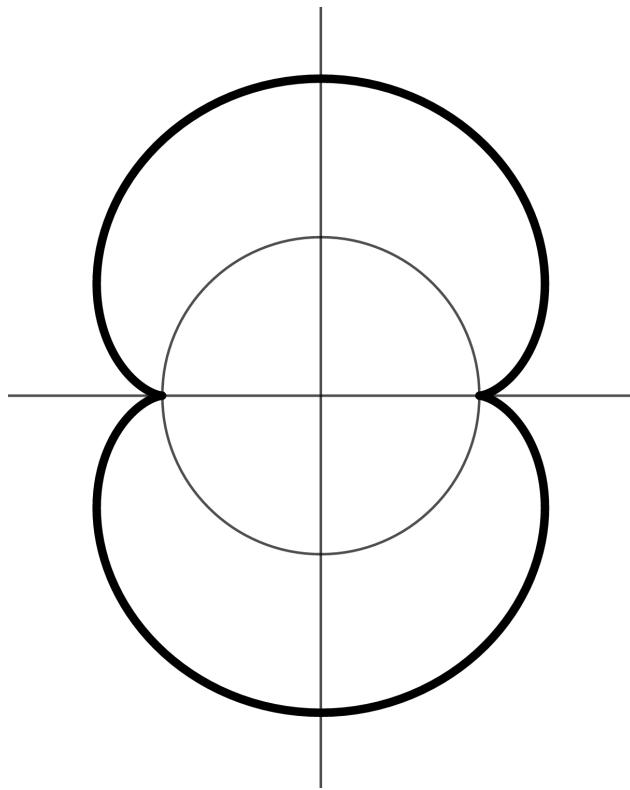
Njena parametarska jednačina je:

$$\text{epicikloida } [r, r] (t) = (2r \cos t - r \cos(2t), 2r \sin t - r \sin(2t)).$$

Iz činjenice da je $q = 1$, sledi da kriva ima jedan špic i zatvara se nakon što pokretni krug jedanput obide fiksirani, to jest za vrednosti parametra $t \in [0, 2\pi)$.

Kardioida je naziv dobila po grčkoj reči za simbol srca, na koga podseća svojim oblikom.

1.4.5 Nefroida kao specijalan slučaj epicikloide



Slika 16: Nefroida

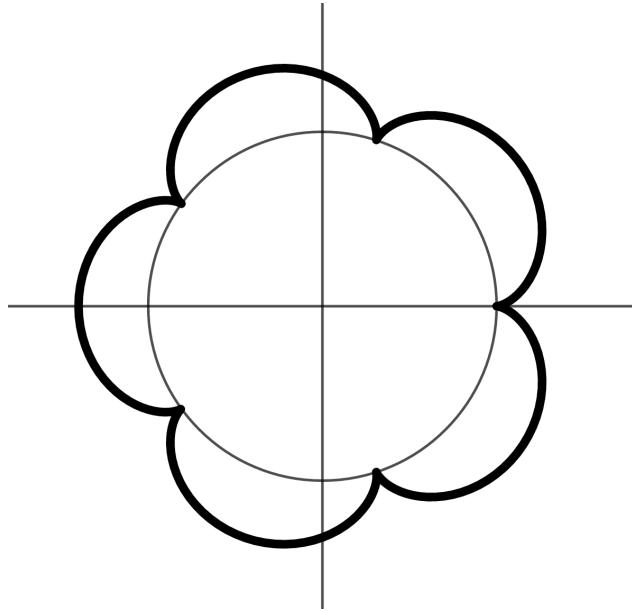
Nefroida je epicikloida za koju važi da je $q = 2 \Leftrightarrow r_1 = 2r$ (Slika 16).
Njena parametarska jednačina je:

$$\text{epicikloida } [r, 2r] (t) = (3r \cos t - r \cos(3t), 3r \sin t - r \sin(3t)).$$

Iz činjenice da je $q = 2$, sledi da kriva ima dva špica i zatvara se nakon što pokretni krug jedanput obide fiksirani, to jest za vrednosti parametra $t \in [0, 2\pi)$.

Nefroida je naziv dobila po grčkoj reči za organ bubreg, na koga podseća svojim oblikom.

1.4.6 Ranunkuloida kao specijalan slučaj epicikloide



Slika 17: Ranunkuloida

Ranunkuloida je epicikloida za koju važi da je $q = 5 \Leftrightarrow r_1 = 5r$ (Slika 17).
Njena parametarska jednačina je:

$$\text{epicikloida } [r, 5r] (t) = (6r \cos t - r \cos(6t), 6r \sin t - r \sin(6t)).$$

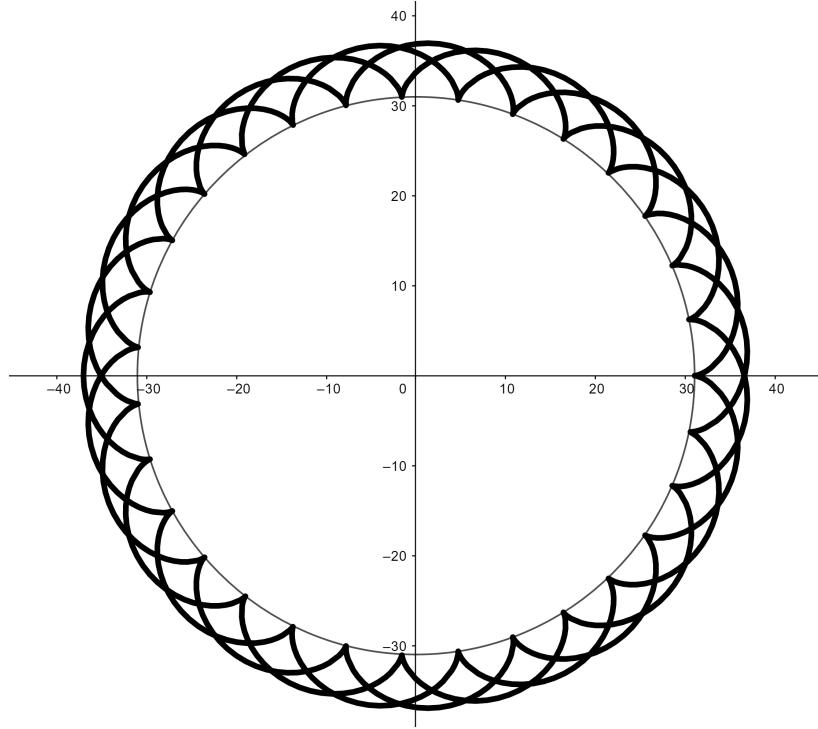
Iz činjenice da je $q = 5$, sledi da kriva ima pet špiceva i zatvara se nakon što pokretni krug jedanput obide fiksirani, to jest za vrednosti parametra $t \in [0, 2\pi)$.

Ranunkuloida je naziv dobila po latinskom nazivu jednog cveta sa pet latica, na koga podseća svojim oblikom (Slika 18).



Slika 18: Biljka iz roda *Ranunculus*

1.4.7 Primeri epicikloida sa racionalnim ili iracionalnim q

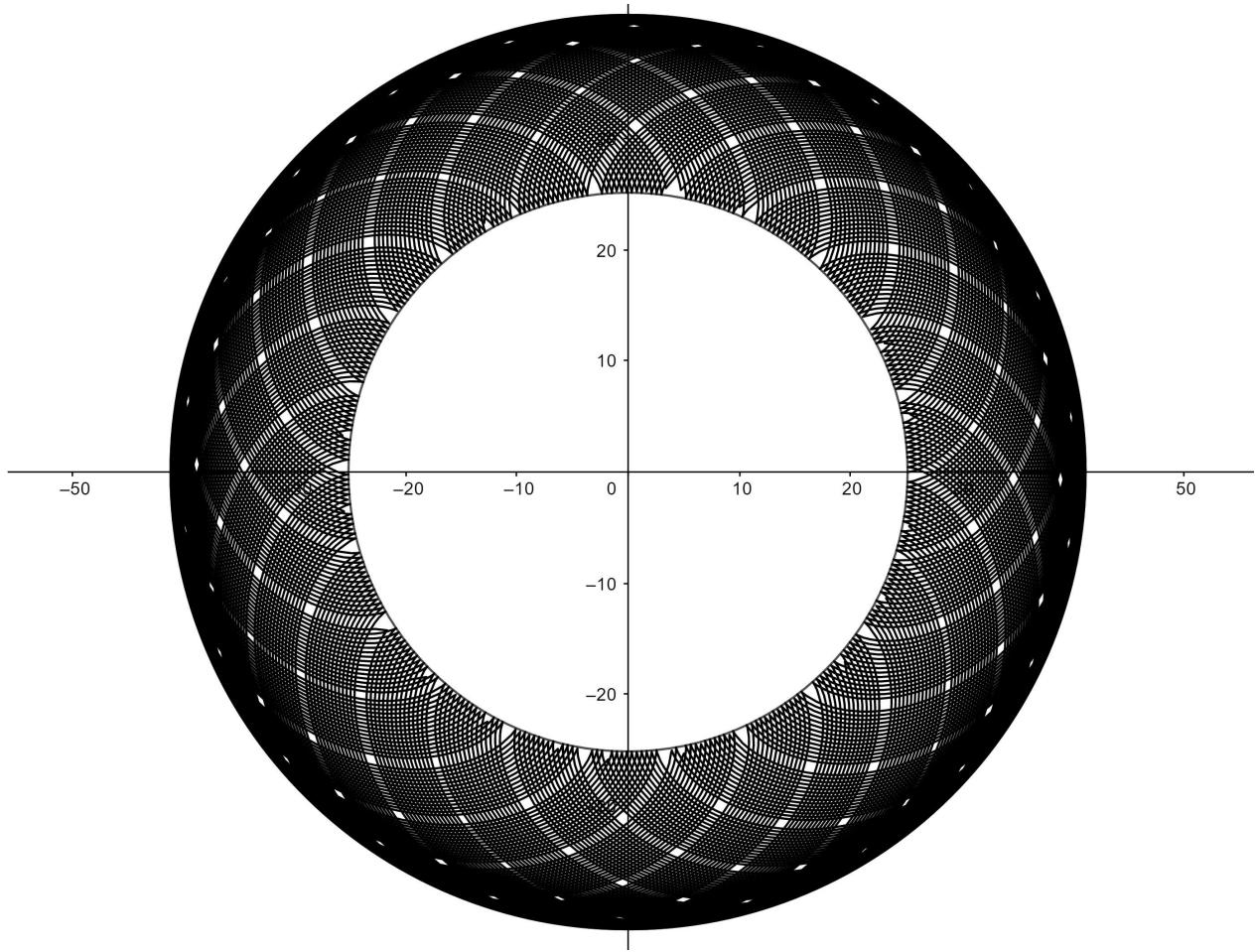


Slika 19: Epicikloida takva da je $q = \frac{31}{3}$

Epicikloida za koju važi da je, na primer, $r_1 = 31$ i $r = 3$ (Slika 19), ima parametarsku jednačinu:

$$\text{epicikloida } [3, 31] (t) = \left(34 \cos t - 3 \cos \left(\frac{34}{3}t \right), 34 \sin t - 3 \sin \left(\frac{34}{3}t \right) \right).$$

Iz činjenice da je $q = \frac{31}{3}$, sledi da kriva ima 31 špic i zatvara se nakon što pokretni krug 3 puta obide fiksirani, to jest za vrednosti parametra $t \in [0, 6\pi)$.



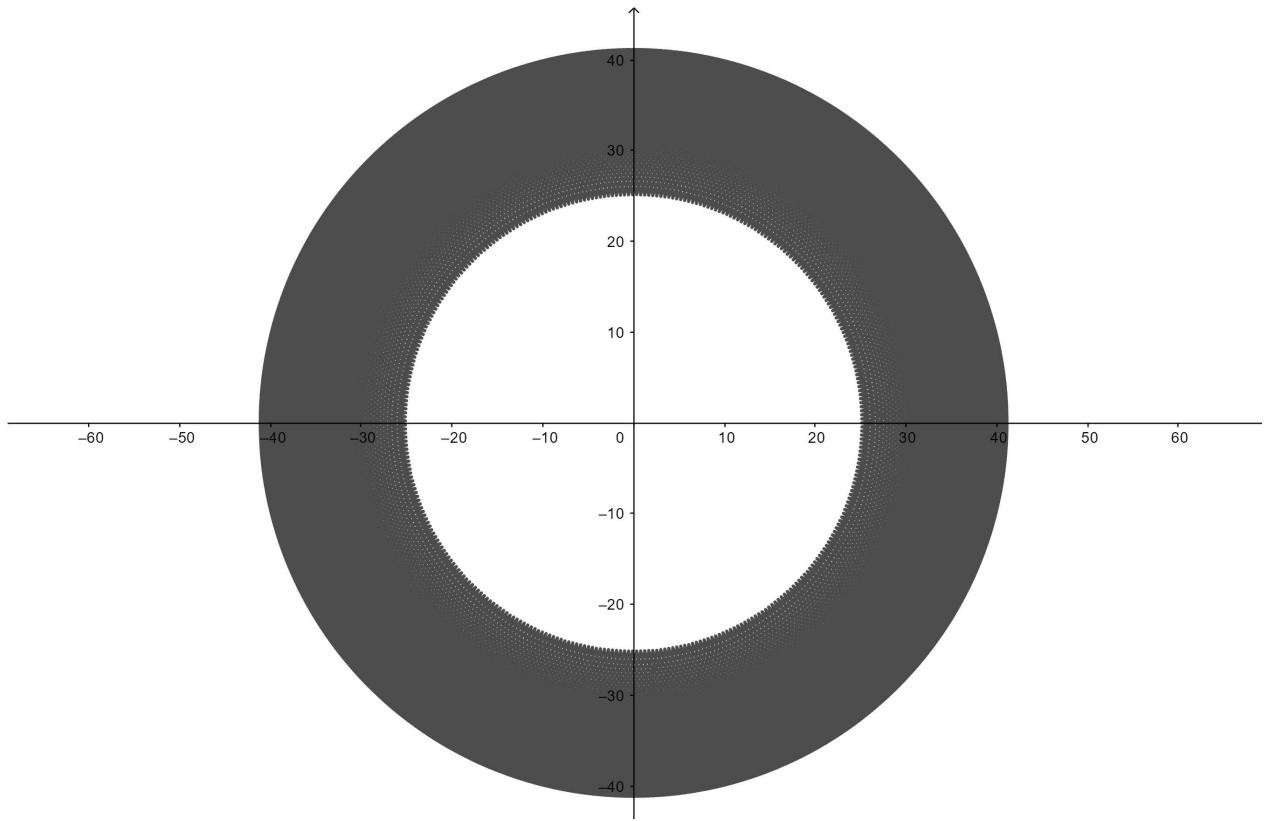
Slika 20: Epicikloida takva da je $q = \pi$

Epicikloida za koju važi da je, na primer, $r_1 = 8\pi$ i $r = 8$, ima parametarsku jednačinu:

$$\begin{aligned} \text{epicikloida } [8, 8\pi](t) &= (8(\pi + 1)\cos t - 8\cos((\pi + 1)t), \\ &\quad 8(\pi + 1)\sin t - 8\sin((\pi + 1)t)). \end{aligned}$$

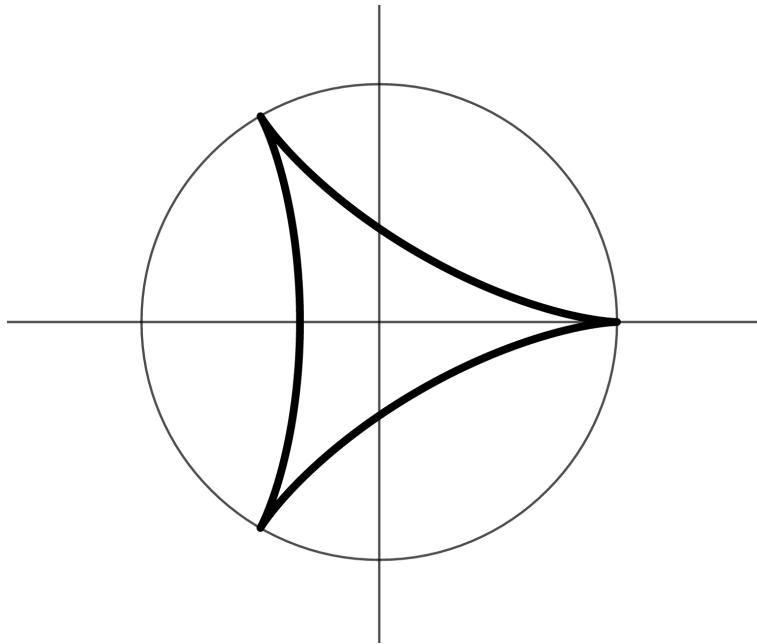
Iz činjenice da je $q = \pi$ sledi da se kriva ne zatvara nikada, već formira kružni prsten između fiksiranog i kruga sa centrom u $(0,0)$, poluprečnika $8(\pi + 2)$, kada $t \in [0, \infty)$.

Na Slici 20 je prikazana kriva za vrednosti parametra $t \in [0, 200\pi]$, kao i pomenuti krugovi koji ograničavaju odgovarajući kružni prsten; na Slici 21 prikazana je kriva za vrednosti parametra $t \in [0, 1000\pi]$.



Slika 21: Epicikloida takva da je $q = \pi$

1.4.8 Deltoida kao specijalan slučaj hipocikloide



Slika 22: Deltoida

Deltoida je hipocikloida za koju važi da je $q = 3 \Leftrightarrow r_1 = 3r$ (Slika 22).

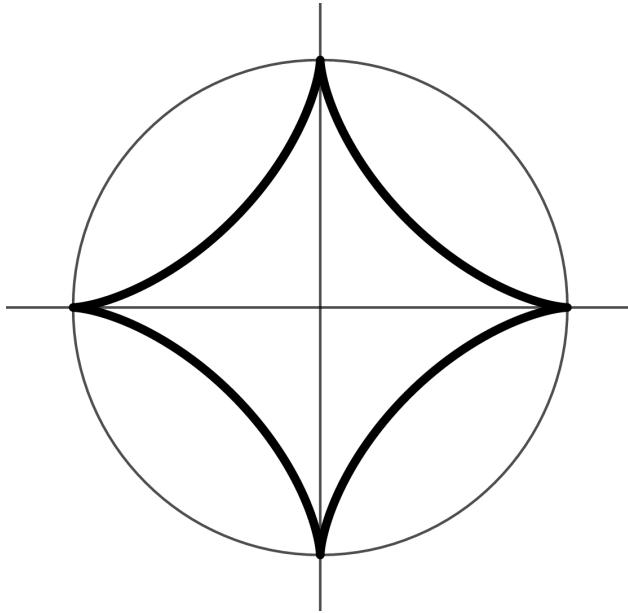
Njena parametarska jednačina je:

$$\text{hipocikloida } [r, 3r] (t) = (2r \cos t + r \cos(2t), 2r \sin t - r \sin(2t)).$$

Iz činjenice da je $q = 3$, sledi da kriva ima tri špica i zatvara se nakon što pokretni krug jedanput obide fiksirani, to jest za vrednosti parametra $t \in [0, 2\pi)$.

Deltoida je naziv dobila po simbolu za grčko slovo delta, na koga podseća svojim oblikom.

1.4.9 Astroida kao specijalan slučaj hypocikloide



Slika 23: Astroida

Astroida je hypocikloida za koju važi da je $q = 4 \Leftrightarrow r_1 = 4r$ (Slika 23).

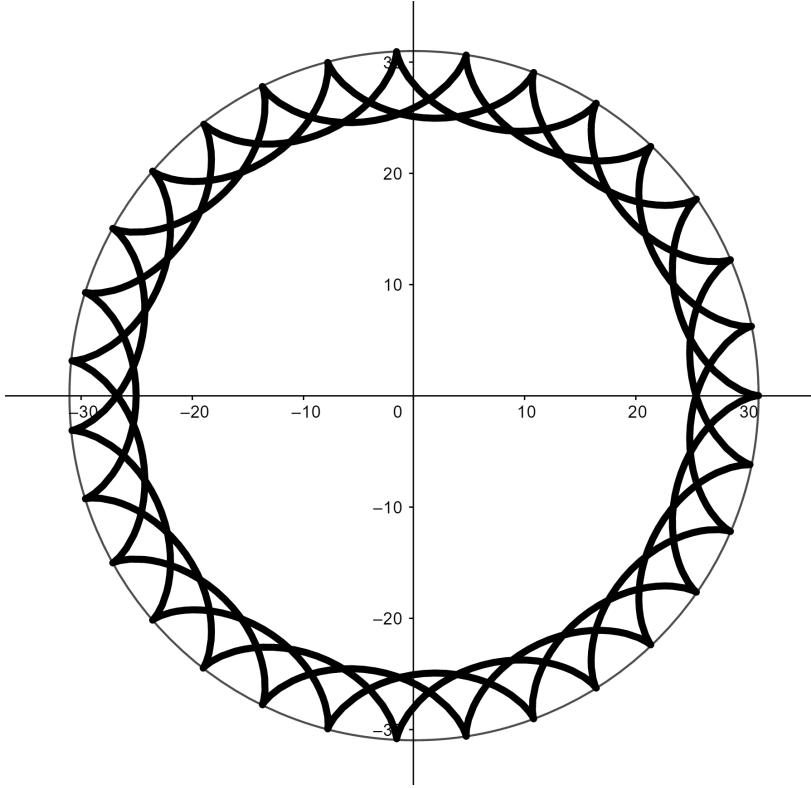
Njena parametarska jednačina je:

$$\text{hypocikloida } [r, 4r] (t) = (3r \cos t + r \cos (3t), 3r \sin t - r \sin (3t)).$$

Iz činjenice da je $q = 4$, sledi da kriva ima četiri špica i zatvara se nakon što pokretni krug jedanput obide fiksirani, to jest za vrednosti parametra $t \in [0, 2\pi)$.

Astroida je naziv dobila po grčkoj reči za simbol zvezde, na koga podseća svojim oblikom.

1.4.10 Primeri hipocikloida sa racionalnim ili iracionalnim q

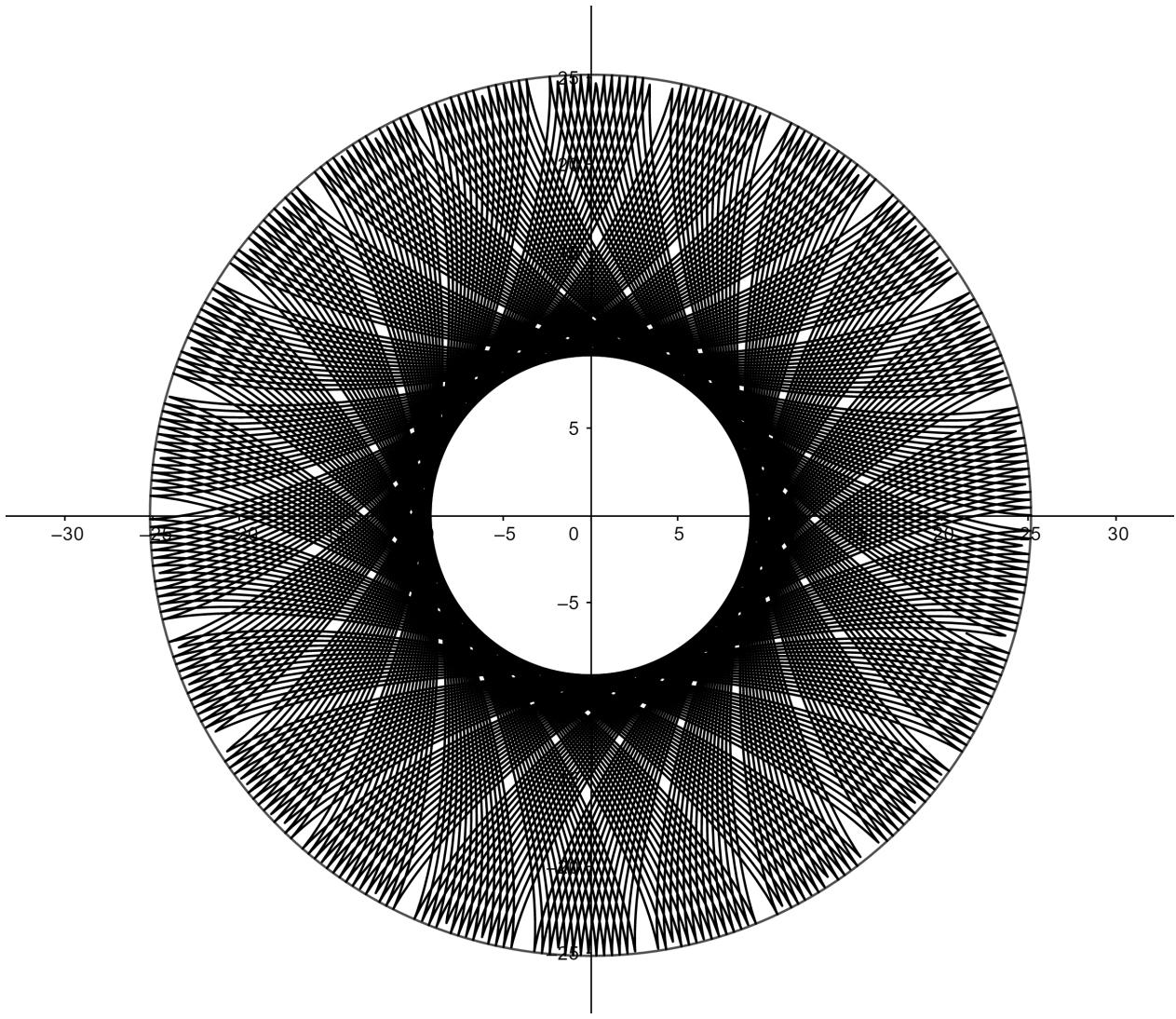


Slika 24: Hipocikloida takva da je $q = \frac{31}{3}$

Hipocikloida za koju važi da je, na primer, $r_1 = 31$ i $r = 3$ (Slika 24), ima parametarsku jednačinu:

$$\text{hipocikloida } [3, 31] (t) = \left(28 \cos t + 3 \cos \left(\frac{28}{3}t \right), 28 \sin t - 3 \sin \left(\frac{28}{3}t \right) \right).$$

Iz činjenice da je $q = \frac{31}{3}$, sledi da kriva ima 31 špic i zatvara se nakon što pokretni krug 3 puta obide fiksirani, to jest za vrednosti parametra $t \in [0, 6\pi)$.



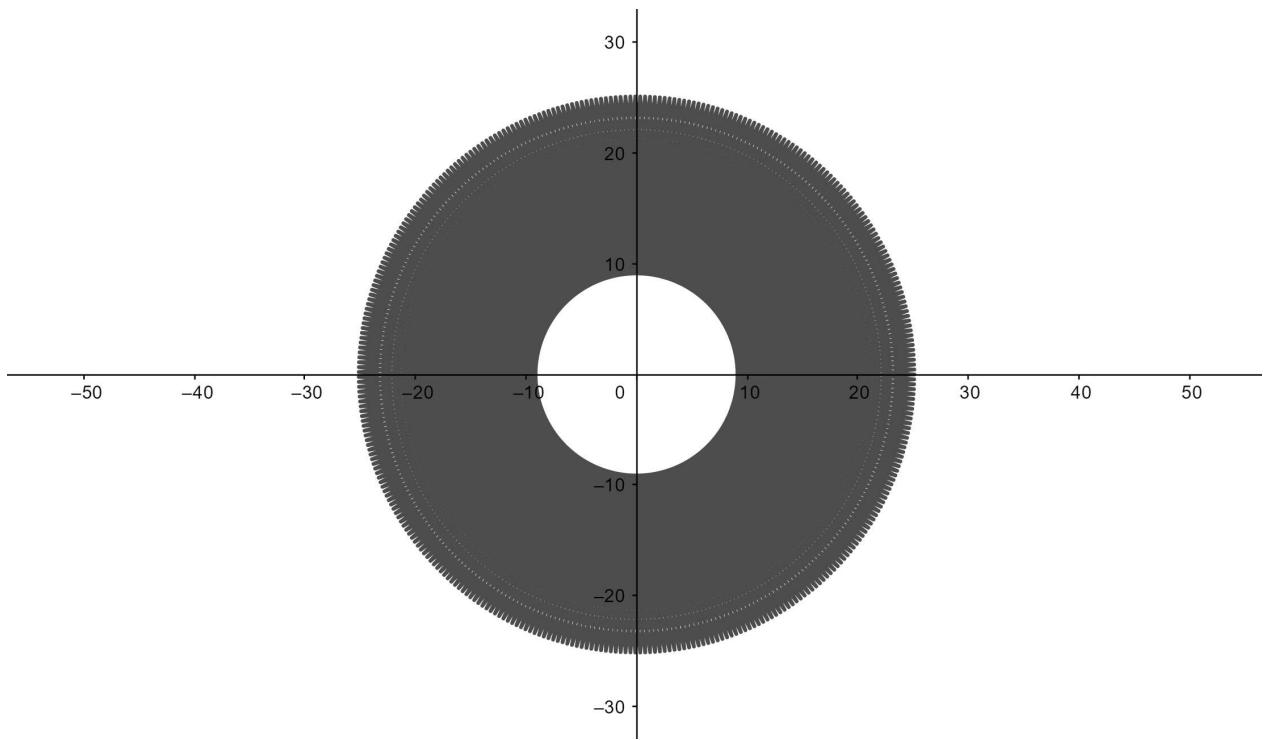
Slika 25: Hipocikloida takva da je $q = \pi$

Hipocikloida za koju važi da je, na primer, $r_1 = 8\pi$ i $r = 8$, ima parametarsku jednačinu:

$$\begin{aligned} \text{hipocikloida } [8, 8\pi](t) &= (8(\pi - 1) \cos t + 8 \cos((\pi - 1)t), \\ &\quad 8(\pi - 1) \sin t - 8 \sin((\pi - 1)t)). \end{aligned}$$

Iz činjenice da je $q = \pi$ sledi da se kriva ne zatvara nikada, već formira kružni prsten između fiksiranog i kružnog sa centrom u $(0,0)$, poluprečnika $8(\pi - 2)$, kada $t \in [0, \infty)$.

Na Slici 25 je prikazana kriva za vrednosti parametra $t \in [0, 200\pi]$, kao i pomenuti kružni prsten; na Slici 26 prikazana je kriva za vrednosti parametra $t \in [0, 1000\pi]$.



Slika 26: Hipocikloida takva da je $q = \pi$

2 Istorijski osvrt

2.1 "Helena geometričara"

Sedamnaesti vek jedan je od najbitnijih perioda u istoriji matematike. Prvu polovinu ovog veka obeležio je pronalazak analitičke geometrije i otkrivanje novih metoda za izračunavanje površina, zapremina i jednačina tangenti. Ovi rezultati postavili su binu za dalji razvoj diferencijalnog računa. Jedna kriva igrala je centralnu ulogu u ovim dešavanjima i bila je korišćena od strane skoro svakog matematičara tog vremena, za demonstriranje novih tehnika. Ta kriva bila je cikloida, a tokom istorije, dobila je ime "Helena geometričara". Dejvid Smit, u svojoj knjizi *History of Mathematics*, pruža sledeći kratak istorijski pregled cikloide: "Ova kriva, ponekad neispravno povezana sa Nikolasom Kuzanskim (1450), bila je prvo proučavana od strane Čarlsa de Bovelja (1501). Kasnije je privukla pažnju Galilea (1599), Mersena (1628) i Robervala (1634). Paskal (1659) je bio taj koji je rešio problem njene kvadrature, i pronašao centar gravitacije duži odsečene pravom paralelnoj bazi. Johan i Jakob Bernuli pokazali su da je kriva brahistohrona, a Hajgens (1673) je pružio dokaz da njene osobine tautochronizma mogu biti primenjene na klatno".

Iako pasus iznad, objavljen 1925. godine, i dalje prezentuje tačan sled dogadaja u istoriji proučavanja cikloide, još nekolicina poznatih imena i interesantnih detalja može se dodati na listu. Iako su stari Grci bili svesni slične pojave kotrljanja koju su nazivali "dvostrukim kretanjem", ipak ne postoji dokaz da su znali, niti proučavali, cikloidu. Za Kuzanskog je rečeno da je otkrio krivu u pismu Džona Volisa 1679. Međutim, mnogo naučnika, uključujući Kantora, nisu pronašli dokaz tog otkrića, ostavivši pravog pronalazača krive izgubljenog negde u istoriji. Francuski matematičar Čarls de Bovelj proučavao je krivu, ali pogrešno tvrdio da je ona samo deo većeg kruga, sa poluprečnikom dužine pet četvrtina dužine poluprečnika generišućeg kruga.

Ovo nas dovodi do Galilea, koji je, prema Kantorovom mišljenju, popularizovao krivu i dao joj ime. Jedan od njegovih učenika napisao je da je on bio prvi koji je pokušao da izvrši kvadraturu cikloide u 1599. Pojam "kvadratura figure" predstavlja konstrukciju kvadrata koji ima istu površinu kao data figura. Kvadratura kruga je jedan od antičkih problema matematike, i odavno je dokazano da je nemoguća. Da bi izračunao površinu figure između luka jednog svoda cikloide i prave linije po kojoj se kotrlja krug, Galileo je izrezao komad metalu u obliku pomenute figure i uporedio njegovu težinu sa težinom komada metalu izrezanog u obliku generišućeg kruga odgovarajuće cikloide. Svi pokušaji eksperimenta rezultirali su skoro istim odnosom, 3 prema 1, pre nego što je Galileo odustao od proučavanja verujući (pogrešno) da traženi odnos mora biti iracionalan broj. Setimo se da smo u prethodnom delu ovog rada dokazali da je površina pomenute figure zaista tri puta veća od površine generišućeg kruga (Teorema 1). Oštrouman prilaz problemu – korišćenje težine za određivanje površine empirijski, i dalje je pečat koji opisuje Galileov pristup nauci. Mersenu, koji se takođe ponekad naziva pronalazačem cikloide, zapravo se može pripisati samo činjenica da je bio prvi koji je pružio preciznu matematičku definiciju krive. Ipak, Mersen je bio taj koji je prezentovao problem kvadrature ciklode i konstrukcije tangente u tački na krivoj, trojici veoma značajnih matematičara: Robervalu, Dekartu i Fermau. Iako su svi oni odgovorili sopstvenim konstrukcijama, samo je Roberval bio taj koji je uspeo da savlada problem izračunavanja površine, pomoću novog načina izračunavanja površine ispod krivih, otkrivenog od strane Galileovog studenta. Ime tog studenta bilo je Bonaventura Kavalijeri, koji je poznat kao otac Kavalijerijevog principa.

2.2 Problem brahistohrone

Problem brahistohrone (na grčkom "najkraći" - " $\beta\rho\alpha\chi\iota\sigma\tau\omega\zeta$ " i "vreme" - " $\chi\rho\omega\upsilon\omega\zeta$ ") definiše se na sledeći način: "Kojom krivom treba da se kreće telo od više do niže tačke, u gravitacionom polju, tako da put pređe za najkraće vreme?"

Godine 1696. Johan Bernuli postavio je izazov matematičkoj zajednici problemom brahistohrone. Rešenje su pružili on, njegov stariji brat Jakob, Lajbnic, Njutn, Lopital i Erenfrid Valter fon Čirnhaus.

Vreme t potrebno telu da stigne od tačke P_1 do tačke P_2 dato je integralom:

$$t = \int_{P_1}^{P_2} \frac{ds}{v},$$

gde je ds rastojanje između dva tačaka a v brzina kretanja tela.

Brzina u bilo kojoj tački dobija se jednostavnom primenom zakona očuvanja energije koji izjednačava kinetičku sa gravitacionom potencijalnom energijom:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh,$$

što daje:

$$v = \sqrt{2gh},$$

gde je h razlika visina tela u početnoj i krajnjoj tački. Dakle, brzina na kraju ne zavisi od krive kojom se telo spušta (već samo od visine), ali vreme zavisi, pa se može reći da je to služilo kao inspiracija za postavljanje problema brahistohrone.

Zamenjujući ovo u odgovarajuću podintegralnu funkciju, zajedno sa jednakošću:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

dolazi se do:

$$t = \int_{P_1}^{P_2} \frac{ds}{v} = \int_{P_1}^{P_2} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx = \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}} dx.$$

Uvedimo oznaku:

$$f = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}}.$$

Korišćenjem varijacionog računa (koji se javio baš u vreme kada je problem brahistohrone bio aktuelan i koji je bio jedan od načina za njegovo rešavanje), to jest jednačine Ojler-Lagranža, dobijamo:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0,$$

a kako se u funkciji $f(y, y')$ ne pojavljuje eksplisitno x , sledi da je $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, i možemo da upotrebimo Beltramijevu jednakost:

$$f - y' \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = C,$$

gde je C konstanta. Kako je:

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2} \sqrt{2gy}},$$

imamo da je:

$$\begin{aligned}
f - y' \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) &= \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}} - \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}\sqrt{2gy}} \\
&= \frac{1+y'^2}{\sqrt{1+y'^2}\sqrt{2gy}} - \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}\sqrt{2gy}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}\sqrt{2gy}}.
\end{aligned}$$

Primenjujući Beltramijevu jednakost, dobijamo:

$$\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}\sqrt{2gy}} = C,$$

što nakon kvadriranja i sređivanja postaje:

$$y \left(1+y'^2 \right) = \frac{1}{2gC^2} = k^2,$$

gde je je k^2 nova pozitivna konstanta. Rešenje diferencijalne jednačine:

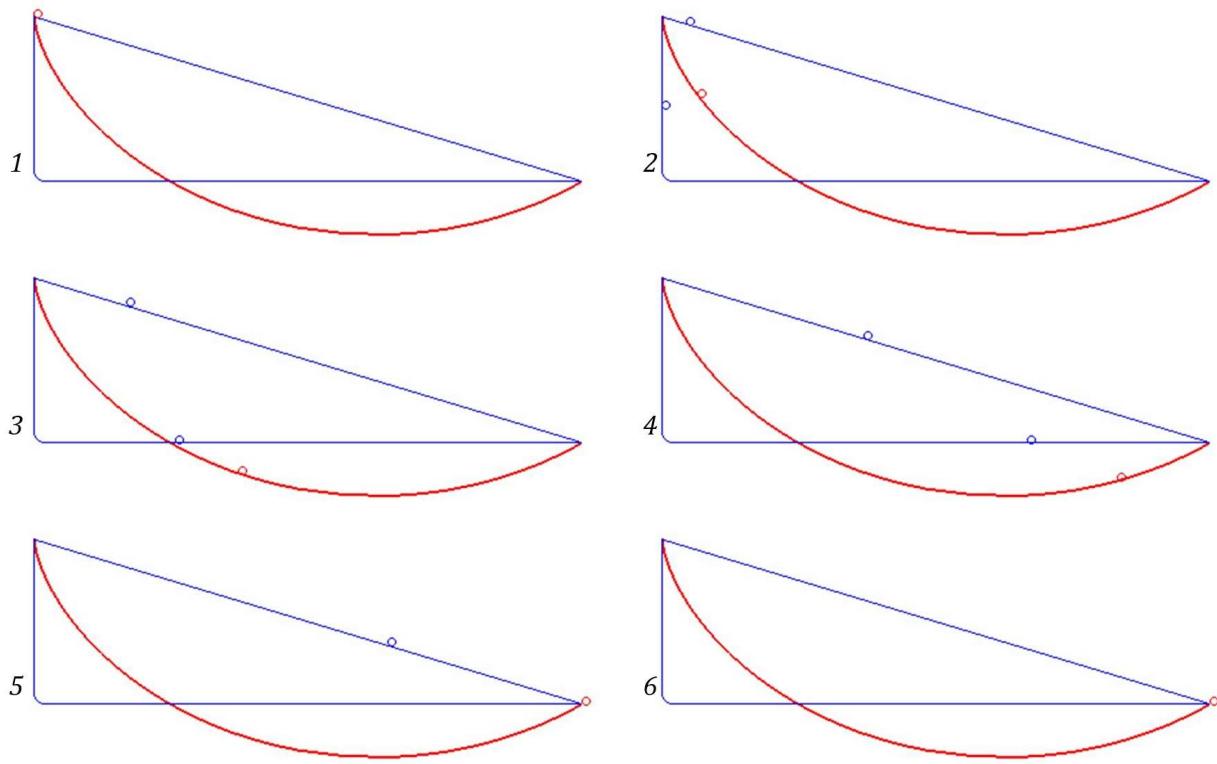
$$y \left(1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right) = k^2,$$

dato je sa:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{2}k^2(t - \sin t), \\
y(t) &= \frac{1}{2}k^2(1 - \cos t),
\end{aligned}$$

što zapravo predstavlja parametarsku jednačinu cikloide, gde je krug koji se kotrlja poluprečnika $\frac{1}{2}k^2$.

Na slici 27 prikazana su tri tela koja počinju spuštanje iz više tačke niz tri različita puta, a do niže tačke najbrže stiže telo koje se kreće po cikloidu.



Slika 27: Problem brahistohrone

2.3 Problem tautohrone

Problem tautohrone (na grčkom "jednako" - " $\tau\alpha\acute{\nu}\tau\acute{o}$ " i "vreme" - " $\chi\rho\acute{o}vo\zeta$ ") definiše se na sledeći način: "Kojom krivom treba da se kreće telo od više do njene najniže tačke, u gravitacionom polju, tako da da je vreme potrebno da pređe ovaj put nezavisno od položaja više tačke?" Tražena kriva je cikloida.

Rešenje problema tautohrone otkrio je 1659. Hajgens i objavio geometrijski dokaz u svojoj knjizi *Horologium oscillatorium* 1673. Hajgens je pronalazač časovnika sa klatnom, iako je bio svestan teorijske mane takvog časovnika. Naime, on je konstruisao prvi ovakav časovnik sa spravom koja je osiguravala da klatno bude tautohrono tako što je činila da osciluje krećući se po cikloidu. Nažalost, frikcija duž svodova uzrokuje grešku koja ne može biti otklonjena cikloidnom putanjom.

Neka je data parametarska jednačina cikloide:

$$\alpha(t) = (r(t - \sin t), r(1 - \cos t)).$$

Slično kao u prethodnom poglavlju, zaključujemo da je vreme t potrebno telu da stigne od najviše do najniže tačke cikloide dano integralom:

$$t = \int_0^\pi \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{2gy}},$$

pa ako zamenimo:

$$x'^2(t) + y'^2(t) = 2r^2(1 - \cos t),$$

dobijamo:

$$t = \int_0^\pi \sqrt{\frac{2r^2(1 - \cos t)}{2rg(1 - \cos t)}} dt = \sqrt{\frac{r}{g}}\pi.$$

Zatim, da bismo izračunali vreme t_1 potrebno telu da stigne od tačke (x_0, y_0) do najniže tačke cikloide, koristimo:

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2g(y - y_0)}.$$

Zato je:

$$t_1 = \int_{t_0}^\pi \sqrt{\frac{2r^2(1 - \cos t)}{2rg(\cos t_0 - \cos t)}} dt.$$

Koristeći trigonometrijske formule dobijamo:

$$1 - \cos t = 2 \sin^2 \frac{t}{2},$$

$$\cos t_0 - \cos t = 2 \cos^2 \frac{t_0}{2} - 1 - \left(2 \cos^2 \frac{t}{2} - 1\right) = 2 \left(\cos^2 \frac{t_0}{2} - \cos^2 \frac{t}{2}\right),$$

pa je:

$$t_1 = \sqrt{\frac{r}{g}} \int_{t_0}^\pi \frac{\sin \frac{t}{2}}{\sqrt{\cos^2 \frac{t_0}{2} - \cos^2 \frac{t}{2}}} dt.$$

Ako uvedemo smenu:

$$u = \frac{\cos \frac{t}{2}}{\cos \frac{t_0}{2}},$$

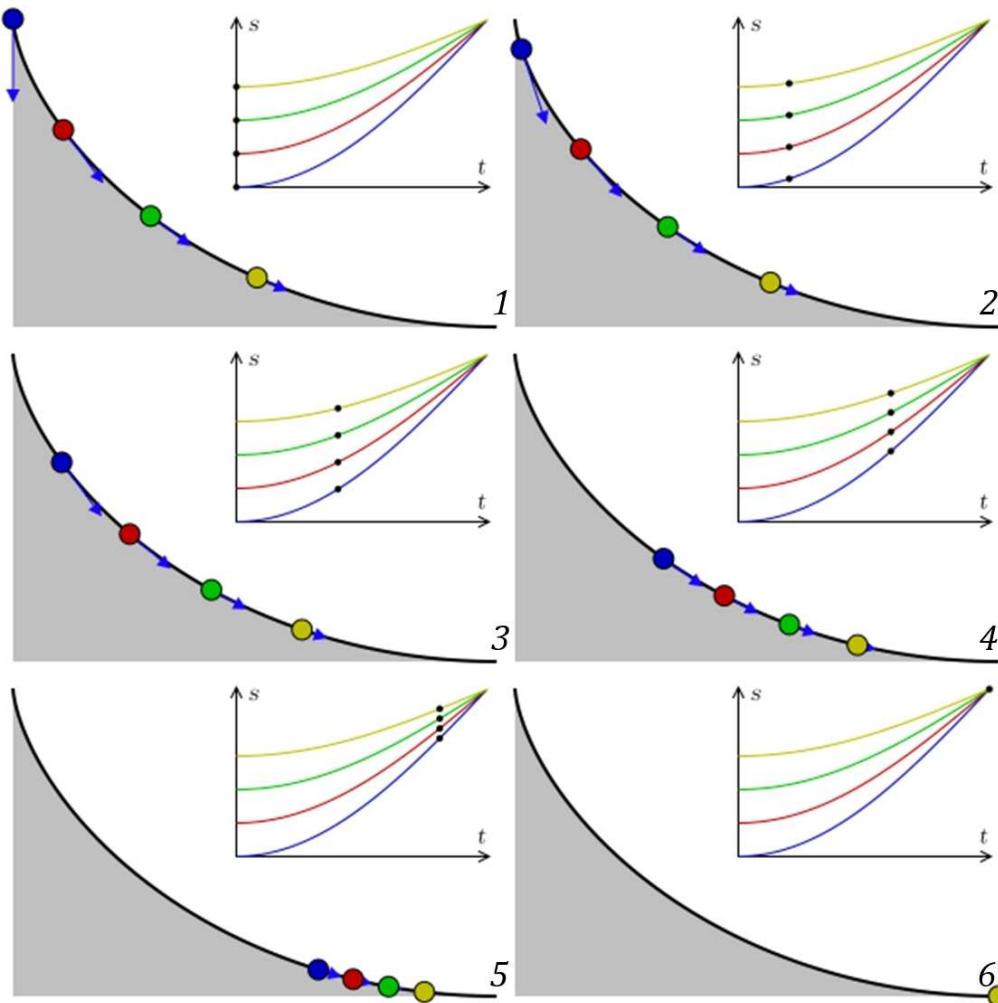
$$du = -\frac{1}{2} \frac{\sin \frac{t}{2}}{\cos \frac{t_0}{2}} dt,$$

prethodni integral postaje:

$$t_1 = 2\sqrt{\frac{r}{g}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = 2\sqrt{\frac{r}{g}} \arcsin u \Big|_0^1 = \sqrt{\frac{r}{g}}\pi,$$

pa je $t = t_1$.

Na Slici 28 prikazana su četiri tela koja počinju spuštanje niz cikloidu iz različitih položaja, a stižu do njene najniže tačke u isto vreme.



Slika 28: Problem tautochrone

3 Krive nastale kotrljanjem poligona

3.1 Klasifikacija

Kotrljanje n -tougla⁷ po pravoj liniji čine njegove rotacije u pozitivnom smeru (ili negativnom) oko svakog njegovog temena redom tako da je smer obilaženja temena negativan (ili pozitivan), počev od temena koje sadrži data prava linija, za spoljašnji ugao kod temena koje je trenutno centar rotacije.

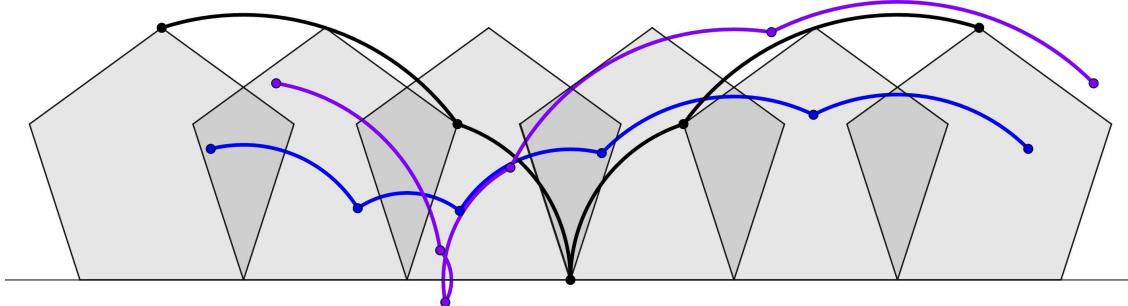
Kotrljanje pravilnog n -tougla oko pravilnog m -tougla, čije su dužine stranica iste, sa spoljašnje strane, čine rotacije n -tougla u pozitivnom smeru (ili negativnom) oko svakog njegovog temena redom tako da je smer obilaženja temena negativan (ili pozitivan), počev od jednog zajedničkog temena, za ugao koji predstavlja zbir spoljašnjeg ugla n -tougla i spoljašnjeg ugla m -tougla.

Kotrljanje pravilnog n -tougla oko pravilnog m -tougla, čije su dužine stranica iste, sa unutrašnje strane, čine rotacije n -tougla u pozitivnom smeru (ili negativnom) oko svakog njegovog temena redom tako da je smer obilaženja temena negativan (ili pozitivan), počev od jednog zajedničkog temena, za ugao koji predstavlja razliku spoljašnjeg ugla n -tougla i spoljašnjeg ugla m -tougla.

Početni položaj n -tougla je takav da sa m -tougloom gradi zajedničku stranicu. U slučaju kada se kotrljanje vrši sa spoljašnje strane, početni položaj n -tougla je takav da mu je presek sa m -tougloom samo ta zajednička stranica. U slučaju kada se kotrljanje vrši sa unutrašnje strane, početni položaj n -tougla je takav da je presek n -tougla i m -tougla n -tougao.

Definicija 4. *Trohagon je kriva koju opisuje fiksirana tačka pravilnog n -tougla,⁸ koji se kotrlja po pravoj liniji. Ako je ta fiksirana tačka:*

- teme n -tougla, trohagon se naziva **ciklogen**;
- unutar n -tougla, trohagon se naziva **skraćeni ciklogen**;
- izvan n -tougla, trohagon se naziva **produženi ciklogen**.



Slika 29: Tri trohogona koja opisuju tri fiksirane tačke n -tougla⁹

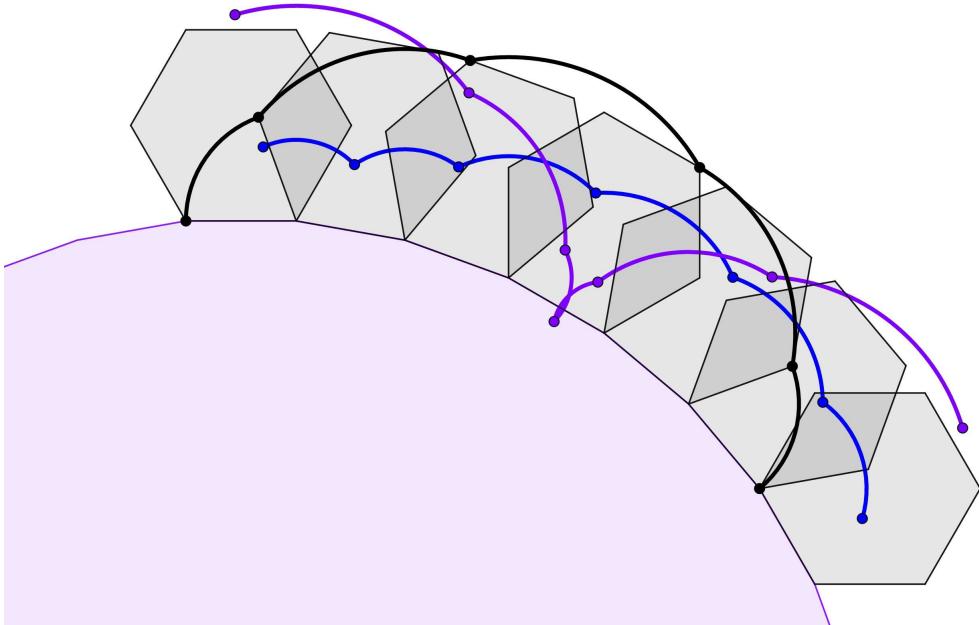
⁷Pojam n -tougao nadalje će se odnositi na konveksan poligon sa n temena.

⁸Pod fiksiranom tačkom n -tougla podrazumeva se fiksirana tačka ravni n -tougla; preciznije, data tačka može se nalaziti unutar n -tougla, izvan n -tougla ili se poklapati sa temenom n -tougla.

⁹Tačka unutar n -tougla opisuje skraćeni ciklogen, tačka izvan n -tougla opisuje produženi ciklogen, a teme n -tougla opisuje

Definicija 5. *Epitrohogon* je kriva koju opisuje fiksirana tačka pravilnog n -tougla koji se kotrlja oko pravilnog m -tougla sa spoljašnje strane, uz uslov da su dužine stranica n -tougla i m -tougla jednake. Ako je ta fiksirana tačka:

- teme n -tougla, epitrohogon se naziva *epiciklogon*;
- unutar n -tougla, epitrohogon se naziva *skraćeni epiciklogon*;
- izvan n -tougla, epitrohogon se naziva *produženi epiciklogon*.



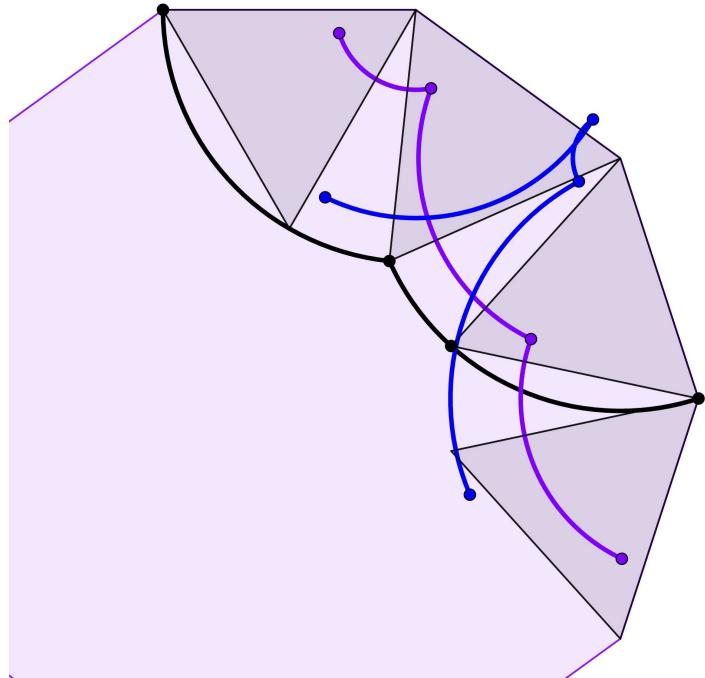
Slika 30: Tri epitrohogona koja opisuju tri fiksirane tačke n -tougla¹⁰

ciklogen.

¹⁰Tačka unutar n -tougla opisuje skraćeni epiciklogon, tačka izvan n -tougla opisuje produženi epiciklogon, a teme n -tougla opisuje epiciklogon.

Definicija 6. *Hipotrohogon* je kriva koju opisuje fiksirana tačka pravilnog n -tougla koji se kotrlja oko pravilnog m -tougla sa unutrašnje strane, uz uslov da su dužine stranica n -tougla i m -tougla jednake. Ako je ta fiksirana tačka:

- teme n -tougla, hipotrohogon se naziva **hipociklogen**;
- unutar n -tougla, hipotrohogon se naziva **skraćeni hypociklogen**;
- izvan n -tougla, hipotrohogon se naziva **produženi hypociklogen**.



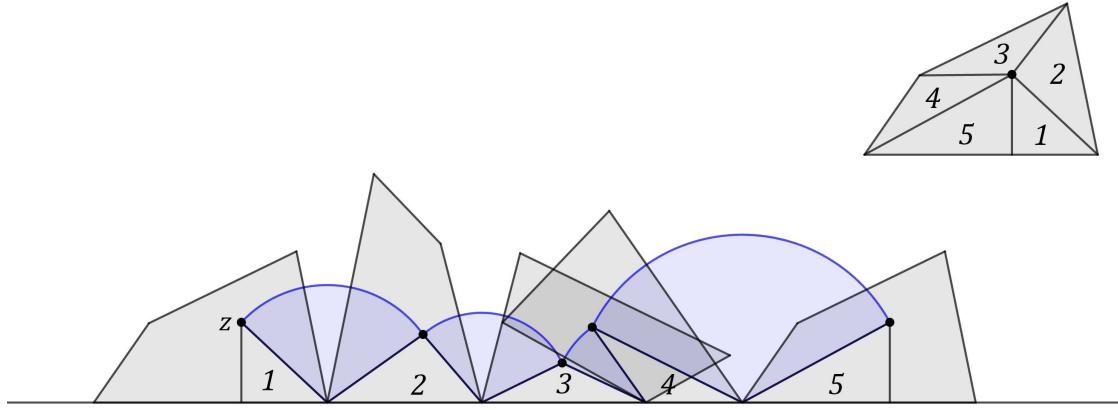
Slika 31: Tri hipotrohogona koja opisuju tri fiksirane tačke n -tougla¹¹

U svakom od ovih slučajeva fiksirana tačka nakon jednog obrtaja n -tougla opiše jedan svod krive koja se sastoji iz n kružnih lukova, koja se, daljim kotrljanjem, nastavlja periodično.

¹¹Tačka unutar n -tougla opisuje skraćeni hypociklogen, tačka izvan n -tougla opisuje produženi hypociklogen, a teme n -tougla opisuje hypociklogen.

3.2 Kotrljanje nepravilnog poligona po pravoj liniji

Neka je dat konveksan n -tougao (ne striktno pravilan) koji se kotrlja po pravoj liniji. Posmatrajmo, na primer, četvorougao prikazan na Slici 32, koji poseduje sve osobine nepravilnog n -touglja. U ovom slučaju, tačka z koja opisuje trohogon nalazi se unutar četvorougla, i tokom jednog njegovog obrtaja, opiše 4 kružna luka - jedan svod trohogona. Figura između jednog svoda trohogona i prave linije po kojoj se kotrlja četvorougao sastoji se iz 4 kružna isečaka i skupa od 5 trouglova koji predstavljaju disekciju četvorougla.



Slika 32: Kotrljanje nepravilnog četvorougla po pravoj liniji

Dakle, u uopštenom slučaju, nakon što n -tougao izvrši jedan obrtaj po pravoj liniji, figura između jednog svoda trohogona i prave linije po kojoj se kotrlja n -tougao sastoji se iz n kružnih isečaka i skupa od $n + 1$ trouglova koji predstavljaju disekciju n -touglja. Zato je površina P ove figure jednak zbiru površina n kružnih isečaka i površine N n -touglja.

Neka su r_1, \dots, r_n poluprečnici, a $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ uglovi odgovarajućih isečaka. k -ti kružni isečak ima površinu $\frac{1}{2}\alpha_k r_k^2$, $1 \leq k \leq n$. Sledi da je:

$$P = N + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \alpha_k r_k^2.$$

Dužina luka L jednog svoda trohogona jednak je zbiru dužina n kružnih lukova. Dužina k -tog kružnog luka jednak je $\alpha_k r_k$, $1 \leq k \leq n$. Odатле je:

$$L = \sum_{k=1}^n \alpha_k r_k.$$

Primetimo da je r_k rastojanje izmedju z i k -tog temena n -touglja, a α_k spoljašnji ugao n -touglja kod k -tog temena.

Ove dve sume ne mogu se dalje uprostiti dok ne bude pristupačno više informacija o pomenutim uglovima i poluprečnicima. Zato ćemo se nadalje baviti samo slučajevima u kojima učestvuju pravilni poligoni. Sada

ćemo napraviti blagu digresiju da bismo dokazali tvrđenja koja će nam takođe pomoći da bliže odredimo ove izraze.

3.3 Suma kvadrata rastojanja

Kriva koju opisuje tačka koja se kreće u ravni tako da je zbir njenih rastojanja od dve fiksirane tačke te ravni konstantan, jeste elipsa čije su žiže pomenute fiksirane tačke.

Koju krivu opisuje tačka koja se kreće u ravni tako da je zbir kvadrata njenih rastojanja od dve fiksirane tačke te ravni konstantan? Jednostavnim računom može se doći do odgovora da opisuje kružnicu čiji se centar nalazi na polovini duži određene tim dvema fiksiranim tačkama.

Kada postavimo isto pitanje za n fiksiranih tačaka u ravni, dolazimo do iznenadujućeg rezultata.

Teorema 5. *Tačka koja se kreće u ravni tako da je zbir kvadrata njenih rastojanja od n fiksiranih tačaka te ravni konstantan opisuje kružnicu čiji je centar težište tih fiksiranih tačaka.*

Dokaz. Neka je dato n proizvoljnih tačaka ravni, i neka je T njihovo težište. Ako postavimo T tako da bude koordinatni početak kompleksne ravni, i označimo n tačaka kompleksnim brojevima z_1, \dots, z_n , onda po formuli za težište:

$$T = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n z_k,$$

i dobijamo:

$$\sum_{k=1}^n z_k = 0.$$

Neka je z proizvoljna tačka te ravni. Suma kvadrata njenih rastojanja od tačaka z_1, \dots, z_n data je sa:

$$\sum_{k=1}^n |z - z_k|^2.$$

k -ti član ove sume je:

$$|z - z_k|^2 = (z - z_k)(\bar{z} - \bar{z}_k) = |z|^2 + |z_k|^2 - z\bar{z}_k - \bar{z}z_k,$$

pa sumiranjem i korišćenjem činjenice da je $\sum_{k=1}^n z_k = 0$, dobijamo:

$$\sum_{k=1}^n |z - z_k|^2 = n|z|^2 + \sum_{k=1}^n |z_k|^2 - z \sum_{k=1}^n \bar{z}_k - \bar{z} \sum_{k=1}^n z_k = n|z|^2 + \sum_{k=1}^n |z_k|^2.$$

Sledi da je suma kvadrata rastojanja tačke z od tačaka z_1, \dots, z_n konstantna ako i samo ako je $n|z|^2 + \sum_{k=1}^n |z_k|^2$ konstanta. Skup svih z koji to zadovoljavaju je kružnica čiji je centar T (uz pretpostavku da su prazan skup i jedna tačka degenerisani slučajevi kružnice).

Primetimo da, specijalno, ako se z_1, \dots, z_n nalaze na kružnici poluprečnika r čiji je centar njihovo težište T , poslednja jednakost daje nam:

$$\sum_{k=1}^n |z - z_k|^2 = n(|z|^2 + r^2),$$

a obratimo pažnju da ovo naravno važi i kada su, specijalno, z_1, \dots, z_n temena pravilnog n -tougla. Ako se još i z nalazi na toj kružnici, dobijamo:

$$\sum_{k=1}^n |z - z_k|^2 = 2nr^2,$$

što predstavlja uopštenje Pitagorine teoreme, koja je specijalan slučaj za $n = 2$.

Jedan interesantan specijalan slučaj dešava se kada je z jedno od temena z_1, \dots, z_n . Tada jedan član poslednje sume nestaje i usvaja se sledeće:

Teorema 6. *Suma kvadrata dužina $n - 1$ duži koje spajaju jedno teme pravilnog n -tougla sa ostalih $n - 1$ temena jednaka je $2nr^2$, gde je r poluprečnik opisanog kruga oko tog n -tougla.*

3.4 Površina

3.4.1 Površina trohogona

Teorema 7. *Površina figure između jednog svoda trohogona i prave linije po kojoj se kotrlja n -tougao, jednaka je:*

$$P = N + K + K_z,$$

gde je N površina n -tougla, K površina kruga opisanog oko n -tougla, a K_z površina kruga čiji je poluprečnik rastojanje od centra n -tougla do tačke z koja opisuje datu krivu.

Dokaz. Označimo temena n -tougla sa z_1, \dots, z_n i neka važe oznake iz dela 3.2. Podsetimo se, u tom delu utvrdili smo da je:

$$P = N + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \alpha_k r_k^2,$$

a na kraju tog dela zaključili smo da je r_k rastojanje između z i z_k , to jest:

$$r_k = |z - z_k|,$$

pa zamenjujući to u jednakost $\sum_{k=1}^n |z - z_k|^2 = n(|z|^2 + r^2)$ dobijenu u delu 3.3, gde je sa r obeležen poluprečnik kruga opisanog oko n -tougla, dobijamo:

$$\sum_{k=1}^n r_k^2 = n(|z|^2 + r^2).$$

Na kraju dela 3.2 zaključili smo i da je α_k spoljašnji ugao n -tougla kod temena z_k . S obzirom da je sada u pitanju pravilan n -tougao, čiji je spoljašnji ugao jednak $\frac{2\pi}{n}$, dobijamo:

$$\alpha_k = \frac{2\pi}{n}.$$

Konačno, formula za P postaje:

$$P = N + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \alpha_k r_k^2 = N + \frac{1}{2} \frac{2\pi}{n} n (|z|^2 + r^2) = N + \pi r^2 + \pi |z|^2 = N + K + K_z,$$

gde smo sa K obeležili površinu kruga opisanog oko n -tougla, a sa K_z površinu kruga čiji je poluprečnik rastojanje od centra n -tougla do tačke z . Dobili smo elegantan rezultat:

$$P = N + K + K_z.$$

Naravno, kada je tačka z teme n -tougla, trohagon je ciklogen, $K = K_z$, i formula postaje:

$$P = N + 2K.$$

U graničnom slučaju, kada $n \rightarrow \infty$, n -tougao se izjednačava sa krugom koji ga opisuje, trohagon postaje trohoida, $N = K$ i kada uvrstimo tu jednakost u formulu $P = N + K + K_z$, dobijamo površinu između jednog svoda trohoide i odgovarajuće prave linije:

$$P = 2K + K_z,$$

a ako je uz to još i tačka z teme n -tougla, trohoida postaje cikloida, i dobijamo dobro poznati rezultat:

$$P = 3K.$$

Setimo se da smo u prvoj glavi izračunali korišćenjem integrala da je površina figure koja je ograničena lukom jednog svoda cikloide i pravom linijom po kojoj se kotrlja krug, tri puta veća od površine kruga (Teorema 1).

3.4.2 Površina epitrohogona i hipotrohogona

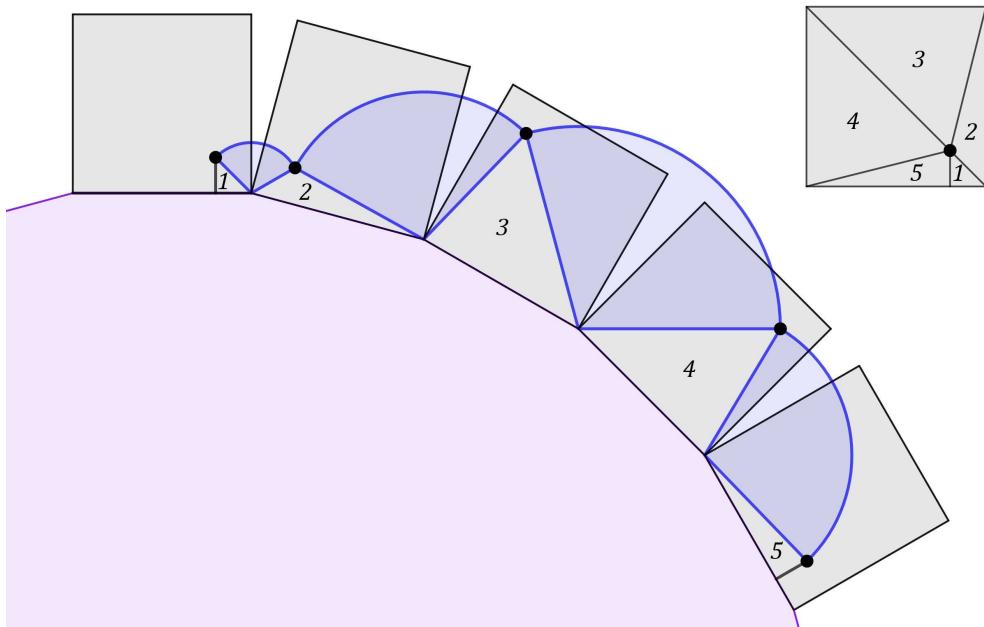
Sada ćemo formulu prethodne teoreme dedukovati kao granični slučaj sledećeg rezultata.

Teorema 8. *Površina figure između jednog svoda epitrohogona ili hipotrohogona i odgovarajućeg dela fiksiranog m-tougla jednak je:*

$$P = N + \left(1 \pm \frac{n}{m}\right) (K + K_z),$$

gde je N površina pokretnog n -tougla, K površina kruga opisanog oko n -tougla, a K_z površina kruga čiji je poluprečnik rastojanje od centra n -tougla do tačke z koja opisuje datu krivu, pri čemu se koristi $+$ za epitrohogon i $-$ za hipotrohogon.

Dokaz. Označimo temena n -tougla sa z_1, \dots, z_n , njegovu površinu sa N i njegovu fiksiranu tačku koja opisuje epitrohogon ili hipotrohogon sa z . Neka je P površina figure između jednog svoda epitrohogona ili hipotrohogona koji nastaje kotrljanjem n -tougla i odgovarajućeg dela fiksiranog m -tougla.



Slika 33: Epitrohogon za $n = 4$ i $m = 24$

Posmatrajmo prvo epitrohogon dobijen za vrednosti, na primer, $n = 4$, $m = 24$ (Slika 33) i neka je tačka z koja ga opisuje unutar pravilnog četvorougla (kvadrata). Ovaj epitrohogon poseduje sve osobine jednog epitrohogona koji opisuje fiksirana tačka pravilnog n -tougla koji se kotrlja oko pravilnog m -tougla sa spoljašnje strane, uz uslov da su dužine stranica n -tougla i m -tougla jednake. Figura između jednog svoda epitrohogona i m -tougla sastoji se iz 4 kružna isečka i 5 trouglova, koji predstavljaju disekciju kvadrata. Zato je P jednak zbiru površine kvadrata i površina 4 kružna isečka.

Dakle, u uopštenom slučaju, sledi da je površina P jednaka zbiru površina n kružnih isečaka i površine N n -tougla. k -ti kružni isečak ima površinu $\frac{1}{2}\alpha r_k^2$, gde su r_1, \dots, r_n poluprečnici, a α ugao odgovarajućih isečaka, pa je:

$$P = N + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \alpha r_k^2.$$

Primetimo da je i sada r_k rastojanje izmedju z i k -og temena n -tougla, a α zbir spoljašnjeg ugla n -tougla (koji je jednak $\frac{2\pi}{n}$, jer je n -tougao pravilan) i spoljašnjeg ugla m -tougla (koji je jednak $\frac{2\pi}{m}$, jer je m -tougao pravilan), tačnije:

$$\alpha = \frac{2\pi}{n} + \frac{2\pi}{m} = 2\frac{\pi}{n} \left(1 + \frac{n}{m}\right).$$

Sledi da je:

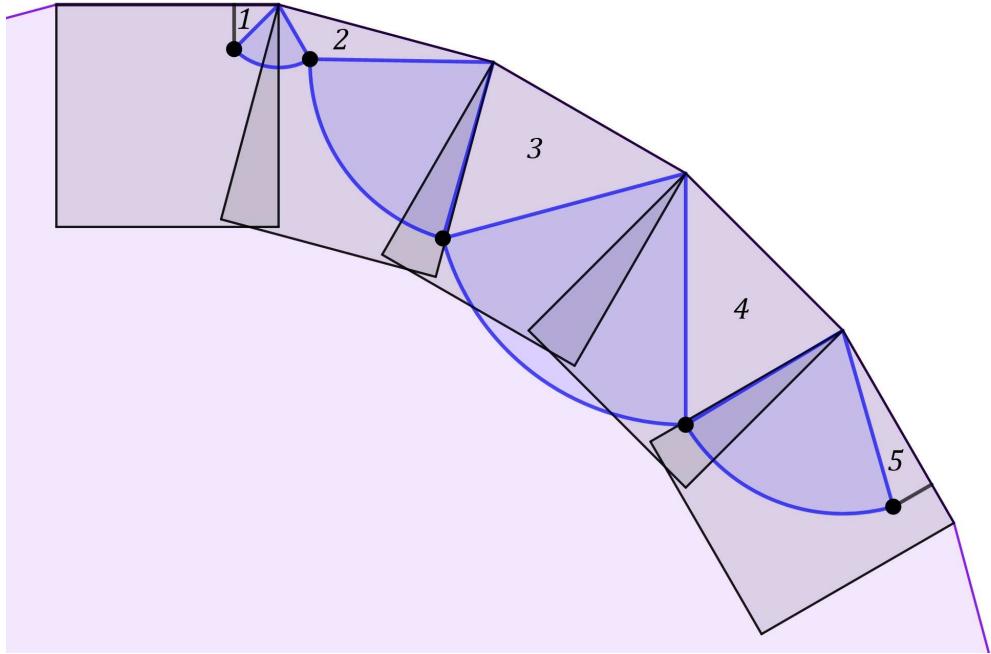
$$P = N + \left(1 + \frac{n}{m}\right) \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n r_k^2.$$

Slično kao u prethodnom poglavlju, imamo:

$$\frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n r_k^2 = \pi r^2 + \pi |z|^2 = K + K_z,$$

gde smo sa K obeležili površinu kruga opisanog oko n -tougla, a sa K_z površinu kruga čiji je poluprečnik rastojanje od centra n -tougla do tačke z . Sada dobijamo formulu:

$$P = N + \left(1 + \frac{n}{m}\right) (K + K_z).$$



Slika 34: Hipotrohogon za $n = 4$ i $m = 24$

Sličnim postupkom dobija se formula za hipotrohogon (Slika 34), s tim da je u tom slučaju:

$$\alpha = \frac{2\pi}{n} - \frac{2\pi}{m} = 2\frac{\pi}{n} \left(1 - \frac{n}{m}\right),$$

pa je zato:

$$P = N + \left(1 - \frac{n}{m}\right) (K + K_z),$$

što se može zapisati kao:

$$P = N + \left(1 \pm \frac{n}{m}\right) (K + K_z),$$

pri čemu se koristi $+$ za epitrohogon i $-$ za hipotrohogon. Konačno, kada $m \rightarrow \infty$, pravilan m -tougao postaje prava linija, dobijamo već izvedenu formulu iz Teoreme 7:

$$P = N + K + K_z.$$

Naravno, kada je tačka z teme n -tougla, epitrohogon je epiciklogen ili hipotrohogon je hypociklogen, $K = K_z$, i formula $P = N + \left(1 \pm \frac{n}{m}\right) (K + K_z)$ postaje:

$$P = N + 2K \left(1 \pm \frac{n}{m}\right).$$

U graničnom slučaju, kada $n \rightarrow \infty$ i $m \rightarrow \infty$ tako da njihov odnos $\frac{n}{m} \rightarrow \frac{r}{r_1}$, dobijamo:

$$P = K + \left(1 \pm \frac{r}{r_1}\right) (K + K_z),$$

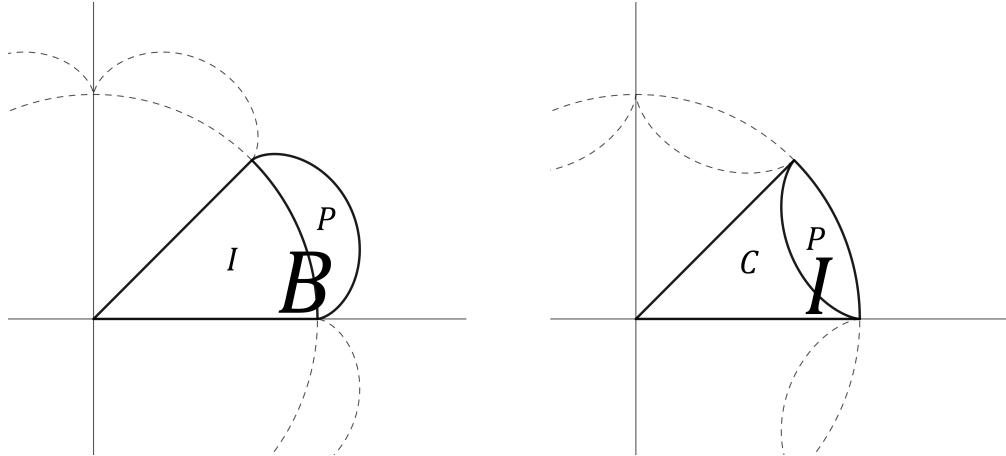
što je površina figure između jednog svoda epitrohoide ili hipotrohoide i odgovarajućeg dela fiksiranog kruga, gde je r poluprečnik pokretnog, a r_1 poluprečnik fiksiranog kruga, pri čemu se koristi $+$ za epitrohoиду i $-$ za hipotrohoиду.

Ako je uz to još i tačka z teme n -tougla, epitrohoida postaje epicikloida ili hipotrohoida postaje hypocikloida, pa imamo:

$$P = \left(3 \pm \frac{2r}{r_1}\right) K,$$

što je površina figure između jednog svoda epicikloide ili hypocikloide i odgovarajućeg dela fiksiranog kruga, gde je r poluprečnik pokretnog, a r_1 poluprečnik fiksiranog kruga, pri čemu se koristi $+$ za epicikloidu i $-$ za hypocikloidu.

Neka je B deo epicikloide ispod jednog njenog svoda, a C deo hypocikloide ispod jednog njenog svoda ¹² i neka je I kružni isečak fiksiranog kruga epicikloide ili hypocikloide određen jednim njenim svodom (Slika 35).



Slika 35: Epicikloida i hypocikloida za $q = 8$

Primećujemo da važi:

$$B = I + P \quad i \quad C = I - P.$$

Izračunajmo vrednost izraza $I \pm P$. Isečak I ima poluprečnik r_1 i centralni ugao $2\frac{r}{r_1}\pi$, pa on ima površinu $rr_1\pi$.

$$I \pm P = rr_1\pi \pm \left(3 \pm \frac{2r}{r_1}\right) K = rr_1\pi \pm \left(3 \pm \frac{2r}{r_1}\right) r^2\pi = \frac{r}{r_1} (r_1 \pm r) (r_1 \pm 2r) \pi,$$

a to je površina dela B epicikloide ili dela C hypocikloide ispod jednog njenog svoda, što smo izračunali u dokazima Teorema 3 i 4, pri čemu se koristi $+$ za epicikloidu i $-$ za hypocikloidu.

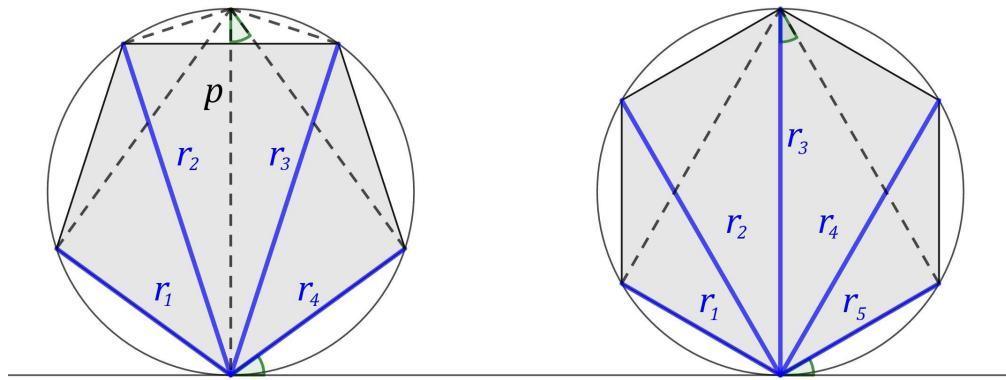
¹²U dokazima Teorema 3 i 4 bliže je objašnjeno šta tačno ograničava ove delove.

3.5 Dužina luka i površina

Nažalost, ne postoji podatak koji bi na sličan način učinio da uprostimo izraze za dužinu luka jednog svoda trohogona, epitrohogona i hipotrohogona i time dobijemo formule analogne prethodnim za površinu. To i nije začuđujuće ako uzmemu u obzir činjenicu da je obično računanje dužine luka krvih komplikovanije od računanja površina. Na primer, površina elipse može se lako izračunati sa ili bez diferencijalnog računa, ali računanje dužine luka elipse iziskuje eliptičke integrale. U narednom delu izračunaćemo dužinu luka ciklogona, epiciklogona i hipociklogona. Sada ćemo opet napraviti blagu digresiju da bismo dokazali tvrđenja koja će nam takođe pomoći da bliže odredimo ovaj izraz.

3.6 Suma rastojanja

Ovde ćemo izračunati sumu rastojanja r_1, \dots, r_{n-1} jednog temena pravilnog n -tougla od ostalih $n - 1$ temena.



Slika 36: Pravilni petougao i šestougao

Kada je n neparan broj, duži $r_1, \dots, r_{\frac{n-1}{2}}$ i $r_{n-1}, \dots, r_{\frac{n+1}{2}}$ postavljene su simetrično u odnosu na prečnik p ; kada je n paran broj, duži $r_1, \dots, r_{\frac{n}{2}-1}$ i $r_{n-1}, \dots, r_{\frac{n}{2}+1}$ postavljene su simetrično u odnosu na prečnik $r_{\frac{n}{2}}$, što je ilustrovano primerom za $n = 5$ i $n = 6$ na Slici 36. Svaka duž r_k sa prečnikom p određuje pravougli trougao upisan u krug koji opisuje n -tougao. Jedan od oštrih uglova tog pravougliog trougla jednak je:

$$k\beta = \frac{k\pi}{n},$$

pri čemu je β ugao između stranice n -tougla i tangente njegovog opisanog kruga u jednoj od krajnjih tačaka te stranice, pa je zato:

$$\sin \frac{k\pi}{n} = \frac{r_k}{p}.$$

Znamo da je suma prvih n članova geometrijskog niza z, z^2, z^3, \dots jednaka:

$$\sum_{k=1}^n z^k = z \frac{z^n - 1}{z - 1},$$

za svaki kompleksan broj $z \neq 1$. Kada ovde zamenimo $z = e^{2xi}$, dobijamo:

$$\sum_{k=1}^n e^{2kxi} = e^{2xi} \frac{e^{2nxi} - 1}{e^{2xi} - 1} = e^{2xi} \frac{e^{nxi}(e^{nxi} - e^{-nxi})}{e^{xi}(e^{xi} - e^{-xi})} = e^{(n+1)xi} \frac{\sin(nx)}{\sin x}.$$

Kada izjednačimo imaginarne delove leve i desne strane ove jednakosti dobijamo trigonometrijski identitet koji tvrdi da za svaki realan broj x , koji nije celobrojan umnožak broja π , važi:

$$\sum_{k=1}^n \sin(2kx) = \frac{\sin((n+1)x) \sin nx}{\sin x}.$$

Za $x = \frac{\pi}{2n}$, član za $k = n$ nestaje i dobijamo:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{2}\right) \sin \frac{\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2n}} = \cot \frac{\pi}{2n}.$$

Zbog toga je i:

$$\frac{1}{p} \sum_{k=1}^{n-1} r_k = \cot \frac{\pi}{2n},$$

i konačno:

$$\sum_{k=1}^{n-1} r_k = p \cot \frac{\pi}{2n} = 2r \cot \frac{\pi}{2n}.$$

3.7 Dužina luka

3.7.1 Dužina luka ciklogona

Teorema 9. *Dužina luka jednog svoda ciklogona nastalog kotrljanjem n-tougla po pravoj liniji jednaka je:*

$$L = 8r \left(\frac{\pi}{2n} \cot \frac{\pi}{2n} \right),$$

gde je r poluprečnik kruga opisanog oko n-tougla.

Dokaz. Neka važe oznake iz dela 3.2. Podsetimo se, u tom delu utvrdili smo da je:

$$L = \sum_{k=1}^n \alpha_k r_k,$$

a na kraju tog dela zaključili smo da je r_k rastojanje izmedju z i k -tog temena n -tougla, pa kako u slučaju ciklogona z predstavlja jedno od temena n -tougla, možemo iskoristiti poslednju jednakost prethodnog poglavlja za sumu rastojanja. Uz to imamo i činjenicu da je u pitanju pravilan n -tougao, njegov spoljašnji ugao je:

$$\alpha_k = \frac{2\pi}{n}.$$

Zbog toga, formula za L postaje:

$$L = \frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^n r_k = \frac{2\pi}{n} 2r \cot \frac{\pi}{2n} = 8r \left(\frac{\pi}{2n} \cot \frac{\pi}{2n} \right).$$

U graničnom slučaju, kada $n \rightarrow \infty$, $L \rightarrow 8r$ jer je:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2n} \cot \frac{\pi}{2n} = 1,$$

a setimo se da smo dokazali da je dužina jednog svoda cikloide baš $8r$ (Teorema 1).

3.7.2 Dužina luka epiciklogona i hipociklogona

Teorema 10. *Dužina luka jednog svoda epiciklogona ili hipociklogona nastalog kotrljanjem n-tougla oko m-tougla, jednaka je:*

$$L = \left(1 \pm \frac{n}{m}\right) L_0,$$

gde je L_0 dužina luka jednog svoda ciklogona nastalog kotrljanjem n-tougla po pravoj liniji, pri čemu se koristi + za epiciklogen i – za hipociklogen.

Dokaz. Neka važe oznake iz dela 3.4.2. Dužina luka L jednog svoda epiciklogona ili hipociklogona jednaka je zbiru dužina n kružnih lukova:

$$L = \sum_{k=1}^n \alpha r_k.$$

U delu 3.4.2 utvrdili smo i da je:

$$\alpha = 2 \frac{\pi}{n} \left(1 \pm \frac{n}{m}\right),$$

pri čemu se koristi + za epiciklogen i – za hipociklogen. Na sličan način kao u prethodnom poglavlju, možemo uprostiti sumu rastojanja, pa dobijamo:

$$L = 2 \frac{\pi}{n} \left(1 \pm \frac{n}{m}\right) \sum_{k=1}^n r_k = 2 \frac{\pi}{n} \left(1 \pm \frac{n}{m}\right) 2r \cot \frac{\pi}{2n} = \left(1 \pm \frac{n}{m}\right) 8r \left(\frac{\pi}{2n} \cot \frac{\pi}{2n}\right),$$

a ako sa L_0 obeležimo dužinu luka jednog svoda ciklogona koji nastaje kotrljanjem n-tougla, to jest:

$$L_0 = 8r \left(\frac{\pi}{2n} \cot \frac{\pi}{2n}\right),$$

dobijamo:

$$L = \left(1 \pm \frac{n}{m}\right) L_0,$$

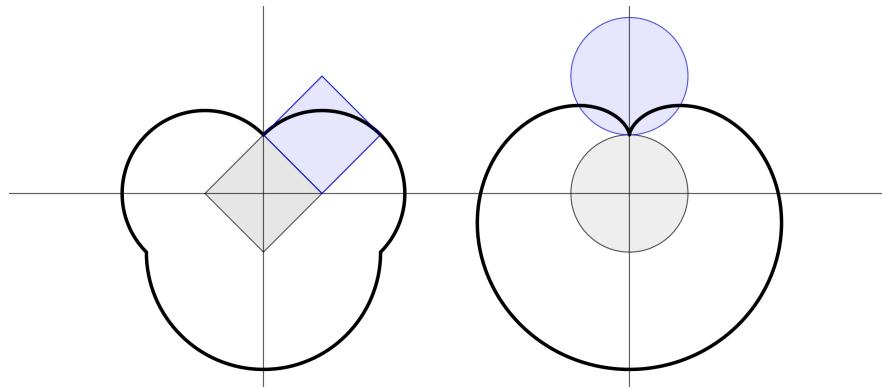
pri čemu se koristi + za epiciklogen i – za hipociklogen. Primetimo i da, kada $n \rightarrow \infty$ i $m \rightarrow \infty$ tako da njihov odnos $\frac{n}{m} \rightarrow \frac{r}{r_1}$, dobijamo:

$$L = \left(1 \pm \frac{r}{r_1}\right) 8r,$$

a to je upravo dužina luka jednog svoda b epicikloide ili jednog svoda c hipocikloide, što smo izračunali u dokazima Teorema 3 i 4, pri čemu se koristi + za epicikloidu i – za hipocikloidu.

3.8 Klasični primeri i granični slučajevi

Napomenuli smo ranije da su neke epicikloide i hypocikloide dobile imena na osnovu različitih objekata na koje podsećaju svojim oblikom. Nazivi klasičnih epiciklogona i hypociklogona odgovaraju nazivima odgovarajućih epicikloida i hypocikloida kojima oni teže u graničnim slučajevima.

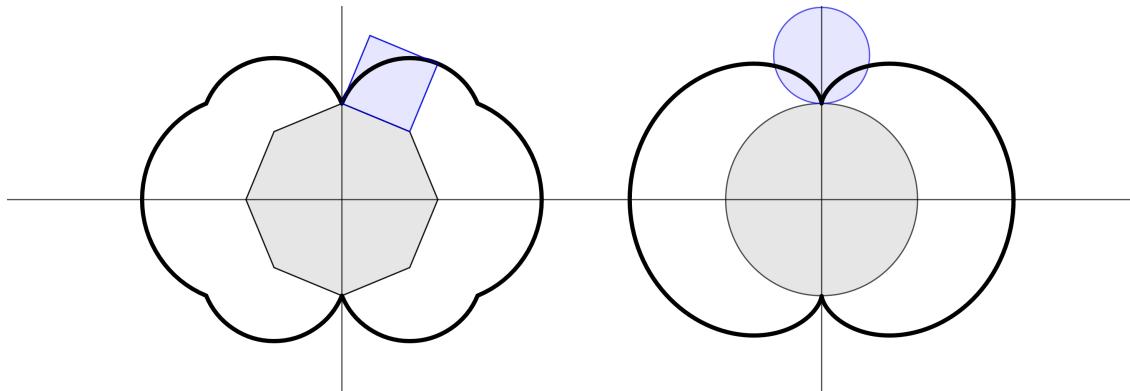


Slika 37: Kardiogon i kardioida

Kardiogon je epiciklogen za koji važi da je $n = m$.

Na Slici 37 prikazan je kardiogon za $n = 4$.

Kada $n \rightarrow \infty$ i $m \rightarrow \infty$ tako da njihov odnos $\frac{n}{m} \rightarrow \frac{r}{r_1}$, kardiogon postaje kardioida.

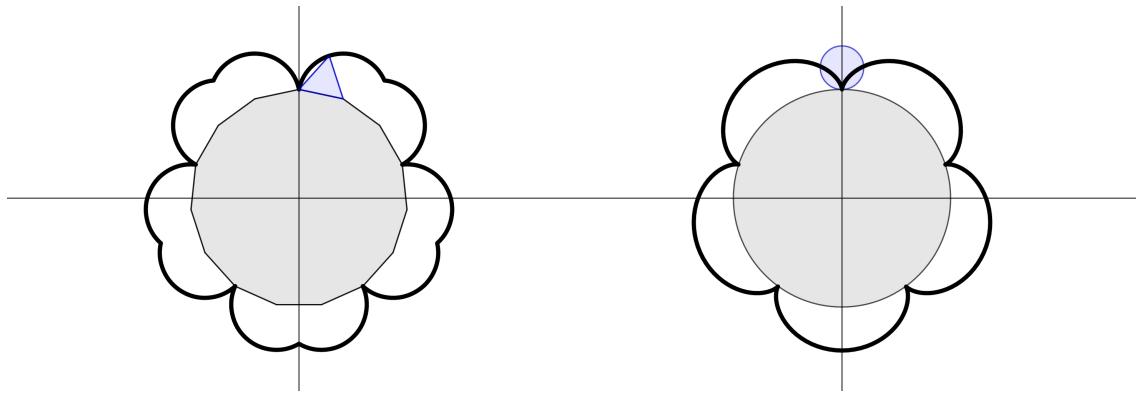


Slika 38: Nefrogon i nefroidea

Nefrogon je epiciklogen za koji važi da je $2n = m$.

Na Slici 38 prikazan je nefrogon za $n = 4$.

Kada $n \rightarrow \infty$ i $m \rightarrow \infty$ tako da njihov odnos $\frac{n}{m} \rightarrow \frac{r}{r_1}$, nefrogon postaje nefroidea.

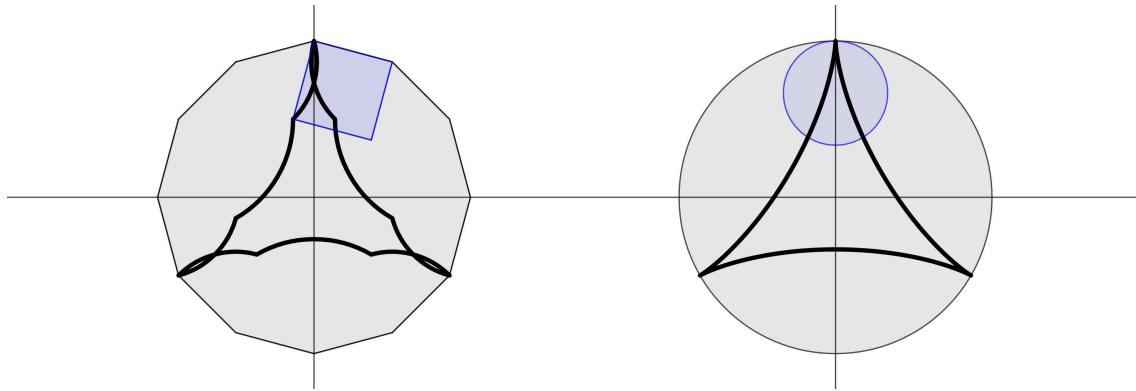


Slika 39: Ranunkulogon i ranunkuloida

Ranunkulogon je epiciklogon za koji važi da je $5n = m$.

Na Slici 39 prikazan je ranunkulogon za $n = 3$.

Kada $n \rightarrow \infty$ i $m \rightarrow \infty$ tako da njihov odnos $\frac{n}{m} \rightarrow \frac{r}{r_1}$, ranunkulogon postaje ranunkuloida.

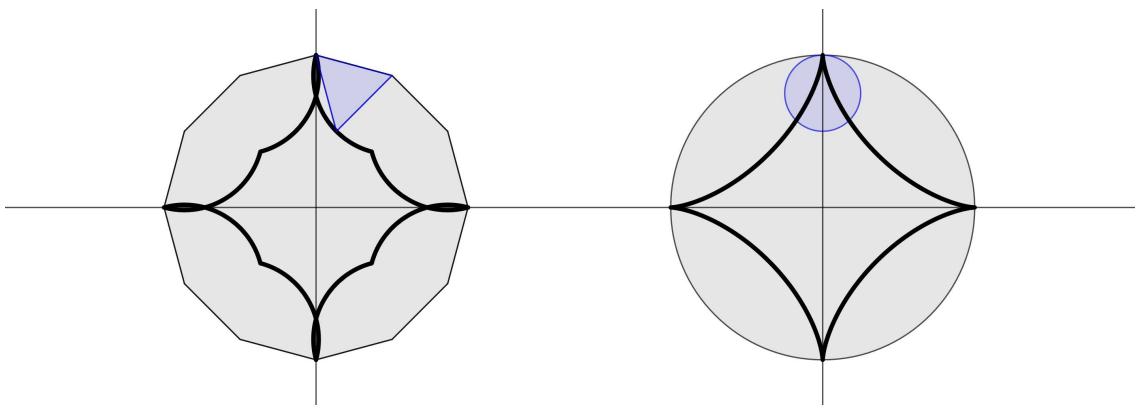


Slika 40: Deltogon i deltoida

Deltogon je hipociklogon za koji važi da je $3n = m$.

Na Slici 40 prikazan je deltigon za $n = 4$.

Kada $n \rightarrow \infty$ i $m \rightarrow \infty$ tako da njihov odnos $\frac{n}{m} \rightarrow \frac{r}{r_1}$, deltigon postaje deltoida.



Slika 41: Astrogon i astroida

Astrogon je hipociklogon za koji važi da je $4n = m$.

Na Slici 41 prikazan je astrogon za $n = 3$.

Kada $n \rightarrow \infty$ i $m \rightarrow \infty$ tako da njihov odnos $\frac{n}{m} \rightarrow \frac{r}{r_1}$, astrogon postaje astroida.

Literatura

- [1] Apostol M. Tom, Mnatsakanian A. Mamikon, *New horizons in geometry*, The Mathematical Association of America, 2012.
- [2] Lockwood E. H., *A book of curves*, Cambridge University Press, 1961.
- [3] Yates C. Robert, *A handbook on curves and their properties*, Edwards Brothers, 1947.
- [4] Simmons F. George, *Calculus gems: brief lives and memorable mathematics*, McGraw-Hill, 1992.
- [5] Tacon David, *The cycloid: "The Helen of geometers"*, Parabola Volume 29, Issue 3, 1993.
- [6] <http://mathworld.wolfram.com>
- [7] Link ka mojoj *GeoGebra* knjizi: <https://www.geogebra.org/m/skkmvbwg>
- [8] Slika 18: fotografija cveta, autor: Laura Brolis, izvor: <https://en.wikipedia.org/wiki/Ranunculus>
- [9] Slika 27: frejmovi gif animacije, autor: Robert Ferreol, izvor: https://en.wikipedia.org/wiki/Brachistochrone_curve
- [10] Slika 28: frejmovi gif animacije, autor: Claudio Rocchini, izvor: https://en.wikipedia.org/wiki/Tautochrone_curve