UNIVERZITET U BEOGRADU

MATEMATIČKI FAKULTET

Master rad

OCENJIVANJE VEROVATNOĆE PREŽIVLJAVANJA U ŽIVOTNOM OSIGURANJU

Student:

Pavle Reljić 1056/2017

Mentor:

Doc. dr Jelena Jocković

Beograd, 2019.

SADRŽAJ:

UVOD

Istorija životnog osiguranja je starija od hrišćanstva. Njeni koreni se nalaze u formiranju klubova za sahranu u drevnom Rimu, koji su funkcionisali na principima uzajamnosti. Naime, da ne bi bili sahranjeni u jamama van zidina gradova zvanim putikuli (lat. *puticuli*), koje su sadržale mešavinu ljudskih i životinjskih lešina, đubreta i ekskreta, Rimljani su se učlanjivali u klubove za sahranu. Nakon smrti člana kluba, preostali članovi su plaćali troškove sahrane [1].

Iako su rani oblici životnog osiguranja otkriveni u vremenskom razdoblju pre nove ere, naučna osnova osiguranja života, koja se zasniva na teoriji verovatnoće, je postavljena tek primenom prvih tablica smrtnosti engleskog astronoma Edmunda Haleja (1693) i Bernulijevog zakona velikih brojeva (1713).

Najranije studije o mortalitetu sadržale su tablice smrtnosti, koje su napravili Džon Grant ili Edmund Halej . Naime, koristeći podatke o smrtnosti u Londonu s početka sedamnaestog veka, Grant je pretpostavio, na primer, da će svako novorođenče imati verovatnoću od 40% da će doživeti šesnaestu godinu života i verovatnoću od 1% da će doživeti sedamdeset i šestu godinu, dok je Edmund Halej koristeći podatke smrtnosti današnjeg Vroclava[1], istorijske prestonice Šleske, na kraju sedamnaestog veka konstruisao tablice smrtnosti koje su veoma slične današnjim tablicama [2].

Za životna osiguranja koja su specifični oblici štednje [3], važnu ulogu ima verovatnoća preživljavanja. Cilj ovog master rada je ocenjivanje verovatnoće preživljavanja metodama matematičke statistike.

[1] raniji naziv za Vroclav bio je Breslau

U prvom poglavlju rada, pored pojma životnog osiguranja, obrađene su osnovne vrste životnog osiguranja, prema riziku obuhvaćenom osiguranjem.

Osnovni elementi teorije verovatnoće i matematičke statistike neophodne za izračunavanje verovatnoće preživljavanja su objašnjeni u drugom poglavlju.

U trećem poglavlju, pored opisa kako su nastale prve tablice smrtnosti, predstavljene su tri hipoteze kojima se pojednostavljuje rešavanje problema određivanja raspodele preostalog životnog veka korišćenjem podataka iz tablica smrtnosti.

U četvrtom poglavlju, prvo su Leksisovim dijagramom opisani nekompletni statistički podaci, koje koristimo za određivanje verovatnoće preživljavanja, a zatim su obrađene metode matematičke statistike za ocenjivanje verovatnoće preživljavanja.

1. ŽIVOTNO OSIGURANJE

1.1 Pojam životnog osiguranja

Životno osiguranje obuhvata osiguranje života i osiguranje od posledica nesrećnog slučaja.

Osiguranje života se sprovodi zaključivanjem ugovora po kome se osiguravač obavezuje da će osiguraniku ili licu koje odredi osiguranik isplatiti za **osiguran slučaj**[1], **ugovorenu osiguranu sumu**[2], na osnovu **premija**[3]**,** koju je osiguranik (ugovarač osiguranja) pod ugovorenim uslovima, platio osiguravaču. Ovakav ugovor osiguranja predstavlja najraniji tip osiguranja [2]. Danas, međutim, postoji i osiguranje života kao specijalan vid štednje, poznat kao osiguranje za slučaj doživljenja, kada se osigurana suma isplaćuje osiguraniku ukoliko on doživi ugovorom preciziranu starost. Dok, kombinacijom osiguranja od rizika i štednjom u mešovitom životnom osiguranju obezbeđuju sredstva za starost, u slučaju doživljenja ili pak za vanredne izdatke, u slučaju smrti [3].

Osnovne vrste životnog osiguranja, prema riziku obuhvaćenim osiguranjem, su:

- Osiguranje za slučaj smrti:
  - osiguranje u slučaju smrti (eng. *whole life insurance*) – koje podrazumeva isplatu sume osiguranja korisniku osiguranja od strane osiguravača nakon nastupanja smrti osiguranika. Najređi je oblik životnog osiguranja
  - privremeno osiguranje (eng. *term insurance*) – koje podrazumeva isplatu sume osiguranja od strane osiguravača samo ukoliko smrt osiguranika nastupi u

[1] doživljenje ili smrt

[2] unapred određen, najveći mogući, iznos odštete osiguranog slučaja

[3] cena rizika, koju uplaćuje osiguranik

predviđenom roku od n godina, navedenom u ugovoru. Najjednostavniji je oblik životnog osiguranja.

- Osiguranje za slučaj doživljenja u trajanju od n godina (eng. *pure endowment*) – koje podrazumeva isplatu sume osiguranja osiguraniku, samo u slučaju kada je osiguranik doživeo određen broj n godina, koji je naveden u ugovoru.
- Mešovito osiguranje za slučaj smrti i doživljenja (eng. *endowment*) - koje predstavlja kombinaciju prethodna dva tipa osiguranja. Najčešći je oblik životnih osiguranja i podrazumeva isplatu sume osiguranja ukoliko smrt osiguranika nastupi u toku n godina od sklapanja ugovora (osigurana suma za slučaj smrti). Međutim, u slučaju da osiguranik doživi n godina njemu se u tom trenutku isplaćuje suma osiguranja za slučaj doživljenja.

2 OSNOVNI ELEMENTI VEROVATNOĆE I MATEMATIČKE STATISTIKE U ŽIVOTNOM OSIGURANJU

U momentu zaključivanja polise životnog osiguranja, trenutak smrti osiguranika nije poznat, tako da osiguravač ne zna tačno kada će isplatiti osiguranu sumu za slučaj smrti. Da bi procenio vreme u kojem će se isplati osigurana suma, osiguravaču su potrebni statistički podaci, kao što je vreme preostale dužine života, na osnovu kojih se mogu izračunati verovatnoće preživljavanja za određenu starost [2].

2.1 Model preostale dužine života kao slučajno promenljive

Ugovorima o osiguranju se smanjuju negativni uticaji nekog rizičnog događaja. Rizični događaji, koji su obuhvaćeni ugovorima o životnom osiguranju, zavise od preostale dužine života osiguranika.

Ako posmatramo osobu staru x godina, gde je $x \geq 0$, onda preostalu dužinu života osobe, čija je trenutna starost (x) obeležavamo sa $T(x)$, tako da je $x + T$ starost osobe u trenutku smrti [4].

U daljem tekstu, preostalu dužinu života obeležavaćemo sa T umesto $T(x)$.

Preostala dužina života T je neprekidna slučajna veličina sa funkcijom raspodele $F(t)$ u tački t:

$$F(t) = P(T \leq t), t > 0 \tag{2.1.1}$$

Za funkciju $F(t)$, odnosno ${}_tq_x$(2.1.3), koja predstavlja verovatnoću da će osoba starosti x umreti u narednih t godina, se pretpostavlja da je poznata i neprekidna. Pošto je preostala dužina života T neprekidna slučajna veličina, njena gustina raspodele verovatnoća je:

$$f(t)dt = P(t < T < t + dt), \text{ za beskonačno malo } dt. \tag{2.1.2}$$

$${}_tq_x = F(t), \tag{2.1.3}$$

$${}_tq_x = P(T \leq t), t > 0 \tag{2.1.4}$$

Dok je ${}_tp_x$ verovatnoća da će osoba starosti x doživeti više od t godina, gde je $t \geq 0$:

$${}_tp_x = 1 - F(t), \tag{2.1.5}$$

$${}_tp_x = P(T \geq t), t > 0 \tag{2.1.6}$$

Verovatnoća obeležena simbolom ${}_{s|t}q_x$, poznata kao verovatnoća odložene smrti (eng. *deferred mortality probability*) [2], je verovatnoća da će osoba starosti x preživeti narednih s godina, a potom umreti u sledećih t godina:

$${}_{s|t}q_x = P(s < T \leq s + t) = F(s + t) - F(s) = {}_{s+t}q_x - {}_sq_x \tag{2.1.7}$$

Uslovna verovatnoća da osoba starosti x koja je doživela $x+s$ godina doživi još t godina se obeležava sa ${}_tp_{x+s}$. (2.1.8), dok je uslovna verovatnoća ${}_tq_{x+s}$ verovatnoća da će osoba starosti x umreti u narednih t godina, s obzirom da je doživela $x+s$ godina data izrazom (2.1.9).

$$ {}_tp_{x+s} = P(T > s + t \,|\mathrm{T} > s) = \frac{1-F(s+t)}{1-F(s)} \tag{2.1.8} $$

$$ {}_tq_{x+s} = P(T \leq s + t \,|\mathrm{T} > s) = \frac{F(s+t)-F(s)}{1-F(s)} \tag{2.1.9} $$

Za $t = 1$, u oznakama ${}_tp_x$, ${}_tq_x$ i ${}_{s|t}q_x$ indeks t se obično izostavlja, tako da je onda q_x verovatnoća umiranja u toku naredne godine, dok je ${}_{s|}q_x$ je verovatnoća da će osoba umreti u toku naredne godine, nakon preživljavanja perioda od s godina.

2.2 Intenzitet smrtnosti

Intenzitet smrtnosti (eng. *force of mortality*) predstavlja stopu smrtnosti na godišnjem nivou [5] i definiše se za osobu starosti x u trenutku $x+t$ kao:

$$ \mu_{x+t} = \frac{f(t)}{1-F(t)} = -\frac{d}{dt}\ln[1-F(t)] \tag{2.2.1} $$

Korišćenjem izraza (2.1.2) i (2.1.4), verovatnoću preživljavanja u intervalu između x i $x+t$, izražavamo kao:

$$ P(t < T < t+dt) = {}_tp_x\, \mu_{x+t}\, dt. \tag{2.2.2} $$

Intenzitet smrtnosti i prethodno definisanu verovatnoću doživljenja narednih t godina, osobe starosti x godina, povezuje relacija [4]:

$$ \mu_{x+t} = -\frac{d}{dt}\ln {}_tp_x. \tag{2.2.3} $$

Integracijom prethodne jednakosti, dobijamo za ${}_tp_x$:

$$ {}_tp_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds} \tag{2.2.4}$$

2.3 Celobrojni životni vek

Celobrojna preostala dužina života $K = [T]$ je zaokružena preostala dužina života osobe starosti (x) (eng. *curtate future lifetime*). Raspodela verovatnoće celobrojne vrednosti K, za $k = 0,1,2 \dots$ je data sa:

$$P(K = k) = P(k \leq T < k + 1) = {}_kp_x q_{x+k}. \tag{2.3.1}$$

Očekivana vrednost K, takozvana očekivana celobrojna dužina života osobe starosti (x) se obeležava sa e_x:

$$e_x = \sum_{k=1}^{\infty} P(K \geq k) = \sum_{k=1}^{\infty} {}_kp_x \tag{2.3.2}$$

Prethodna formula ima praktičnu upotrebu jer za određivanje očekivane celobrojne dužine života e_x dovoljno je poznavati samo raspodelu K.

Druga slučajna veličina S je deo godine tokom kog je osoba starosti (x) živa u godini smrti, tako da je:

$$T = K + S \tag{2.3.3}$$

Slučajno veličina S ima neprekidnu raspodelu između 0 i 1.

Aproksimacijom njene očekivane vrednosti sa $\frac{1}{2}$, dobijamo i aproksimaciju za očekivani životni vek $\dot{e}_x$, koja je praktična za primenu u praksi:

$$\dot{e}_x = e_x + \frac{1}{2} \tag{2.3.4}$$

Primer: Koliko iznosi očekivani životni vek osobe stare 36 godina? [6]

Rešenje:

Ako obeležimo sa $l_x, l_{x+1}, l_{x+2}, \dots, l_{x+n}$ broj članova populacije strarosti $x, x+1, x+2 \dots x+n$ godina, korišćenjem izraza (2.3.4) dobijamo da je očekivan životni vek:

$$\dot{e}_{36} = \frac{l_{36} + l_{37} + \cdots + l_{l99}}{l_{36}} + \frac{1}{2}$$

Iz tablica smrtnosti broj osoba starih 36 godina iznosi $l_{36} = 81814$, dok je zbir $l_{36} + l_{37} + \cdots + l_{l99}$ iz tablica smrtnosti 2426087.

$$\dot{e}_{36} = \frac{2426087}{81814} + \frac{1}{2}$$
$$\dot{e}_{36} = 30.15$$

Očekivani životni vek za osobu staru 36 godina iznosi 30,15 godina.

Ukoliko pretpostavimo da su K i S nezavisne slučajne veličine, onda uslovna raspodela slučajne veličine S, za poznato $K = k$, je nezavisna od K:

$$P(S \leq u \,|K = k) = \frac{{}_u q_{x+k}}{q_{x+k}} \tag{2.3.5}$$

kako ne bi trebalo da zavisi od k, možemo napisati za $k = 1,2 \dots$, $0 \leq u \leq 1$ i neku funkciju $H(u)$, sledeću jednakost:

$${}_u q_{x+k} = H(u) q_{x+k} \tag{2.3.6}$$

U specijalnom slučaju, kada je $H(u) = u$, aproksimacija za očekivani životni vek (2.3.4) je tačna.

Takođe, ukoliko pretpostavimo da su K i S nezavisne slučajne veličine, iz (2.3.3) sledi:

$$DT = DK + DS \tag{2.3.7}$$

Ako pretpostavimo da $S \in U(0,1)$, tada je:

$$DT = DK + \frac{1}{12} \tag{2.3.8}$$

Po definiciji, diskretna slučajna veličina $S^{(m)}$, za pozitivan ceo broj m je:

$$S^{(m)} = \frac{1}{m}[mS + 1] \tag{2.3.9}$$

Znači, $S^{(m)}$ izvodimo iz S zaokruživanjem na sledeći veći razlomak od S, koji za imenilac ima m.

Kada je $0 \leq S < 1$, tada raspodela $S^{(m)}$ uzima vrednosti na $\frac{1}{m}$, $\frac{2}{m}$, ...1. Iz pretpostavljene nezavisnosti između slučajnih veličina K i S, proističe i da su slučajne veličine K i $S^{(m)}$ nezavisne. Štaviše, ako slučajna veličina S ima ravnomernu raspodelu između 0 i 1, tada slučajna veličina $S^{(m)}$ ima diskretnu ravnomernu raspodelu [4].

3. TABLICE SMRTNOSTI U ŽIVOTNOM OSIGURANJU

Računarske osnove za izradu premija u životnom osiguranju čine: tablice smrtnosti, obračunska kamatna stopa i troškovi sprovođenja osiguranja. Koristeći tablice smrtnosti, osiguravač određuje veličinu fonda za osiguranje neophodnu za isplate osiguranih suma u određenim rokovima [7].

Tablice smrtnosti su statističke tabele koje sadrže niz pokazatelja od kojih je najvažniji verovatnoća preživljavanja, odnosno kolika je verovatnoća da osoba koja pripada određenoj kategoriji neće doživeti određenu starost. Kategorije se formiraju na osnovu različitih kriterijuma, kao što su: pol, vrsta posla, rasa itd.

Postoje dve metode izrade tablica smrtnosti: direktna i indirektna metoda.

U direktnoj metodi se posmatra određeni broj novorođenih (generacija) tokom njihovog života kako bi se utvrdilo koliko ih je ostalo živih u prvoj godini života, zatim u sledećoj, sve do smrti poslednje osobe iz generacije. Ova metoda je često teško izvodljiva iz tehničkih razloga, pa je zato više u upotrebi indirektna metoda za formiranje tablica smrtnosti.

Statistički podaci u indirektnoj metodi se dobijaju istovremenim posmatranjem više generacija, odnosno grupa lica različite starosti, kako bi se utvrdila verovatnoća preživljavanja za pojedine klase starosti. Zatim se, pomoću proizvoljno odabranog velikog broja lica, računskim putem određuje broj živih za pojedine starosne grupe. Potom, da bismo po indirektnoj metodi sačinili jednu tablicu smrtnosti za određene godine starosti, potrebno je da iz datog statističkog materijala za svaku godinu starosti izračunamo verovatnoću preživljavanja.

Da bi dobijena vrednost verovatnoće preživljavanja za jednu grupu starosti od x godina, bila slobodna od individualnih uticaja, potrebno je posmatrati dovoljno veliku grupu lica odgovarajuće starosti. Na kraju, potrebno je broj realizovanih smrtnih slučajeva grupe lica iste starosti u toku jedne posmatrane godine izraziti prema celokupnom broju lica koja sačinjavaju grupu [8].

3.1 Tablice smrtnosti Edmunda Haleja

Edmund Halej (1656-1742), izuzetan naučnik, dao je ogroman doprinos astronomiji, matematici, fizici, i finansijskoj ekonomiji [9].

Za životno osiguranje, Halejev fundamentalni doprinos su prve tablice smrtnosti bazirane na demografskim podacima sadašnjeg poljskog grada Vroclava. Naime, krajem sedamnaestog veka, u Vroclavu vođeni su detaljni zapisi o rođenima, umrlima i starosti ljudi kada su umrli. Podatke od 1687-1691 godine, Edmund Halej je analizirao i objavio u Filozofskim transakcijama[1]. Podaci iz Vroclava su ukazivali da je populacija Vroclava stacionarna jer je godišnji broj novorođenih bio približno jednak broju umrlih (razlika između broja rođenih i umrlih godišnje je iznosila 64), migracija u grad ili van grada je bila neznatna, a stope smrtnosti specifične za starost (eng. *age specific death rates*) bile su približno konstantne, za razliku od podataka iz Londona, koje je koristio Grant, gde je migracija bila veoma izražena. Nakon nekoliko zaokruživanja podataka, Halej je napravio tablicu smrtnosti (Tabela 1) [9].

Da bismo objasnili podatke iz tabele 1, sa l_x ćemo označiti broj članova populacije starosti $x = 0,1,2 \dots \omega$ dok sa $L_x = (l_x + l_{x+1})/2$ srednji broj živih osoba starih između x i $x + 1$. Analizom podataka, Edmund Halej je utvrdio da je u Vroclavu bilo približno oko 34.000 stanovnika. Iako iz tabele vidimo da je koren 1000, obradom sirovih podataka dobijen je $L_x = 1064$ jer su $l_0 = 1238$ i $l_1 = 890$, što ukazuje da je on zaokružio broj 1064 na $L_{x-1} = 1000$ za $x = 1$. U svom radu, Edmund Halej je izveo sedam zapažanja i tabela mu koristila za prikaz primera neophodnih za obrazloženje tih zapažanja [9].

[1] Halley E. An Estimate of the Degrees of Mortality of Mankind, Drawn from the Curious Tables of the Births and Funerals at the City of Breslaw, with an Attempt to Ascertain the Price of Annuities upon Lives. Philosophical Transactions. 1693. Volumen 17, pp. 596-610

Tabela 1. Tablice smrtnosti Edmunda Haleja

x	L_{x-1}	x	L_{x-1}	x	L_{x-1}	x	L_{x-1}
1	1000	23	579	45	397	67	172
2	855	24	573	46	387	68	162
3	798	25	567	47	377	69	152
4	760	26	560	48	367	70	142
5	732	27	553	49	357	71	131
6	710	28	546	50	346	72	120
7	692	29	539	51	335	73	109
8	680	30	531	52	324	74	98
9	670	31	523	53	313	75	88
10	661	32	515	54	302	76	78
11	653	33	507	55	292	77	68
12	646	34	499	56	282	78	58
13	640	35	490	57	272	79	49
14	634	36	481	58	262	80	41
15	628	37	472	59	252	81	34
16	622	38	463	60	242	82	28
17	616	39	454	61	232	83	23
18	610	40	445	62	222	84	20
19	601	41	436	63	212		
20	598	42	427	64	202	85-100	107
21	592	43	417	65	192		
22	586	44	407	66	182	Ukupno	34000

Posmatrajući tablicu sa vojnog aspekta, Halej je, prvo, izračunao „procenat muškaraca koji mogu da nose oružje“. Taj broj je izračunao tako što je broj ljudi uzrasta od 18 i 56 godina, podelio sa dva da bi procenio broj muškaraca, a zatim dobijeni broj je izrazio kao deo ukupnog stanovništva Vroclava (oko „9/34“ odnosno 0.26 stanovništva).

Halej je, potom, izračunao šansu preživljavanja (eng. *survival odds*) između uzrasta koristeći $L_{x+t}/(L_x - L_{x+t})$. U svom radu naveo je primer: „377 prema 68 odnosno 5.5 prema 1“ za muškarca od 40 godina da doživi četrdeset sedmu godinu [9].

U trećem razmatranju Halej je izračunao verovatno trajanje života kao „sredinu dodatnih godina života“ (eng. *median additional years of life*)[5]. Kao primer je naveo da se „sredina dodatnih godina“ za tridesetogodišnjaka nalazi između 27 i 28 godina [9]. Naime, u tabeli za 30-o godište se nalaze 531 osoba, dok se polovina od njih, koja je preživela, nalazi između 57 i 58 godine (vidi Tabelu 1).

Takođe, Halej je u svom radu naveo da cenu doživotnog osiguranja „treba regulisati“, i da je cena životnog osiguranja povezana sa šansama preživljavanja. Istakao je da su šanse za preživljavanje jedne godine za osobu staru 20 godina: 100 prema 1, dok je taj odnos za pedesetogodišnjaka: 38 prema 1 [9]. Iz tablice se izračunavanjem za osobu staru 50 godina dobija da su šanse preživljavanja približno 30 prema 1, pa se pretpostavlja da je broj 38 u Halejevom radu štamparska greška (vidi Tabelu 1).

Na kraju, Cieka je zaključio da iako je napravljena pre 300 godina, Halejeva tablica smrtnosti je veoma slična današnjim tablicama smrtnosti i da glavna razlika između Halejeve i današnjih tablica u tome što Halej koristio srednji broj živih osoba L_x starih između x i $x+1$ u svojoj tablici a ne broj živih osoba l_x starosti $x = 0,1,2 \dots \omega$ [9].

3.2 Tablice smrtnosti

Tablica smrtnosti je tabela jednogodišnjih verovatnoća preživljavanja q_x, kojom je kompletno definisana distribucija slučajne promenljive K[4].

Tablice smrtnosti su zasnovane na statističkim podacima i mogu biti formirane za određene kategorije osoba, razvrstane na osnovu faktora kao što su: pol, rasa, vrste posla ili tip životnog osiguranja.

U tabeli 2. je prikazan deo tablice smrtnosti koju koriste danski osiguravači za opis smrtnosti muških osiguranika svoje zemlje [10].

Tabela 2. Tablice smrtnosti muškaraca Danske

x:	0	25	50	60	70	80	90
ℓ_x:	100 000	98 083	91 119	82 339	65 024	37 167	9 783
d_x:	58	119	617	1 275	2 345	3 111	1 845
q_x:	.000579	.001206	.006774	.015484	.036069	.083711	.188617
p_x:	.999421	.998794	.993226	.984516	.963931	.916289	.811383

(Preuzeto iz: Norberg R. Basic Life Insurance Mathematics, 2002.)

U tablici 2. l_x predstavlja broj članova u populaciji koji imaju x godina. Dok $d_x = l_x - l_{x+1}$ prestavlja broj lica u populaciji koja su doživela x godina, ali ne i x+1 godinu.

Iz tabele 2. se može videti da je broj smrtnih slučajeva najveći oko osamdesete godine, ali po tome ne možemo zaključiti da je osamdeseta godina ”najopasnije doba”. Da bismo odredili koje je ”najopasnije doba” potrebna nam je verovatnoća preživljavanja q_x koju računamo na sledeći način:

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} \tag{3.2.1}$$

Ova verovatnoća se povećava sa godinama, i iz tabele 2. možemo videti da je najveća oko devedesete godine [10].

U tablicama smrtnosti koje se koriste za životno osiguranje, početna starost osobe x može da ima veoma značajan uticaj. Naime, očekuje se da će osoba koja je upravo kupila osiguranje biti zdravija od osobe koja je osiguranje kupila pre nekoliko godina iako su istih godina, jer osiguranik mora da zadovolji određene zahteve standarda osiguranja (eng. *underwriting standards*) da bi mogao da kupi osiguranje [5]. Zahtevima standarda osiguranja se vrši selekcija tj. odabir osoba koje mogu da kupe životno osiguranje. Pojavu da osoba koja je upravo kupila osiguranje ima manju verovatnoću preživljavanja od osobe istih godina koja je kupila ranije osiguranje, uzimaju u obzir takozvane selekcione tablice smrtnosti (eng. *select life tables*) [4]. Takođe, na verovatnoću preživljavanja u grupi osiguranih osoba utiče i dužina vremena od kupovine osiguranja [5]. Na primer, grupa osiguranika stara 30 godina, koja je upravo kupila osiguranje, imaće manju verovatnoću da će umreti u sledećoj godini od druge grupe osiguranika iste starosti, koja se osigurala godinu dana ranije, takođe će i verovatnoća preživljavanja u obe ove grupe biti manja od verovatnoće preživljavanja osiguranika iz treće grupe, koja se osigurala u 28-oj godini života. Matematički, ovu tendenciju možemo izraziti nizom nejednakosti:

$$q_{[x]} < q_{[x-1]+1} < q_{[x-2]+2} \cdots \tag{3.2.2}$$

gde je $q_{[x]+t}$ verovatnoća da će osoba koja trenutno ima $x+t$ umreti u sledećih godinu dana ako je osiguranje kupila kada je imala x godina.

Uticaj selekcije na verovatnoću preživljavanja će se smanjivati i nestati nakon *r* godina od kupovine osiguranja:

$$q_{[x-r]+r} = q_{[x-r-1]+r+1} = q_{[x-r-2]+r+2} = \cdots = q_x \tag{3.2.3}$$

Period r se naziva periodom odabira. Ako je osoba kupila osiguranje kada je imala x godina, sa periodom odabira od 3 godine, sledeće verovatnoće preživljavanja su nam potrebne da bi odredili raspodelu slučajne veličine *K:*

$$q_{[x]}, q_{[x]+1}, q_{[x]+2}, q_{x+3}, q_{x+4}, q_{x+5} \dots [4] \tag{3.2.4}$$

3.3 Određivanje raspodele preostalog životnog veka

Zbog pogodnosti pri prikupljanja podataka, tako i zbog tradicionalnog oblika njihovog predstavljanja u tablicama smrtnosti, statistički podaci su diskretni. Shodno tome, javlja se problem određivanja raspodele neprekidne veličine T, koji se rešava interpolacijom [4].

Raspodela slučajne veličine K se može izračunati iz tablica smrtnosti:

$$ {}_kp_x = p_x p_{x+1} p_{x+2} \dots p_{x+k-1}, \qquad k = 1,2,3 \dots \qquad (3.3.1)$$

Da bi jednostavnije odredili raspodelu slučajne veličine T interpolacijom, koristimo sledeće pretpostavke:

- pretpostavka a: ${}_uq_x$ je linearna funkcija po u,
- pretpostavka b: μ_{x+u} je konstantna,
- pretpostavka c: ${}_{1-u}q_{x+u}$ je linearna funkcija po $1-u$,

kada je x ceo broj i $0 < u < 1$.

3.3.1 Pretpostavka a: ${}_uq_x$ je linearna funkcija po u

Kako je najjednostavnija interpolacija linearnom funkcijom, pretpostavimo da je ${}_uq_x$ je linearna funkcija po u i interpolacijom između $u = 0$ i $u = 1$, dobijamo:

$$ {}_uq_x = uq_x \qquad (3.3.1.1)$$

Kako ovo važi u slučaju kada se promenljive veličine K i S nezavisne i kada promenljiva S ima ravnomernu raspodelu između 0 i 1, onda je:

$$ {}_up_x = 1 - uq_x \qquad (3.3.1.2)$$

Korišćenjem prethodne jednakosti i (2.2.3) za intenzitet smrtnosti dobijamo:

$$\mu_{x+u} = \frac{q_x}{1 - uq_x} \tag{3.3.1.3}$$

3.3.2 Pretpostavka b: μ_{x+u} je konstantna

U drugoj pretpostavci, pretpostavljamo da je intenzitet smrtnosti u toku jedne godine konstantan. Ako obeležimo konstantnu vrednost intenziteta smrtnosti μ_{x+u}, za $0 < u < 1$ sa $\mu_{x+\frac{1}{2}}$, zamenom konstantne vrednosti intenziteta smrtnosti u (2.2.3), dobijamo:

$$\mu_{x+\frac{1}{2}} = -\ln p_x \tag{3.3.2.1}$$

Dalje, iz prethodne jednakosti sledi:

$${}_u p_x = e^{-u\mu_{x+\frac{1}{2}}} = (p_x)^u \tag{3.3.2.2}$$

Dok, iz (2.3.5) izvodimo:

$$P(S \leq u \mid K = k) = \frac{1 - p_{x+k}^u}{1 - p_{x+k}} \tag{3.3.2.3}$$

Uslovna raspodela slučajne veličine *S*, za *K* = *k*, zavisi od *k*, odnosno slučajne veličine S i K u ovom slučaju nisu nezavisne.

3.3.3 Pretpostavka c: ${}_{1-u}q_{x+u}$ je linearna funkcija po $1 - u$

Iz treće pretpostavke, poznate kao Baldučijeva hipoteza, koja je data sledećom jednakošću:

$${}_{1-u}q_{x+u} = (1 - u)q_x \tag{3.3.3.1}$$

izvodimo:

$$ {}_{u}p_x = \frac{p_x}{{}_{1-u}p_{x+u}} = \frac{1-q_x}{1-(1-u)q_x} \tag{3.3.3.2} $$

Iz (3.3.3.1) i (2.2.3) dobijamo:

$$ \mu_{x+u} = \frac{1-q_x}{1-(1-u)q_x} \tag{3.3.3.3} $$

I na kraju, iz (2.3.5) izvodimo:

$$ P(S \leq u \mid K = k) = \frac{u}{1-(1-u)q_{x+k}} \tag{3.3.3.4} $$

kojom pokazujemo da slučajne veličine K i S, u Baldučijevoj hipotezi nisu nezavisne.

U svakoj od ove tri pretpostavke, intenzitet smrtnosti je prekidan u celim brojevima, štaviše u Baldučijevoj hipotezi intenzitet smrtnosti opada između uzastopnih celih brojeva.

Za $q_{x+k} \to 0$, i (3.3.2.3) i (3.3.3.4) konvergira ka u. Dakle, ako je verovatnoća preživljavanja mala, raspodela slučajne veličine S je „približno“ ravnomerna i nezavisna od K [4].

4. OCENJIVANJE VEROVATNOĆE PREŽIVLJAVANJA

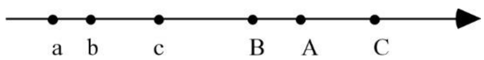
Iz statističkih podataka, koje smo dobili posmatranjem određene grupe osiguranika, u jednom određenom vremenom periodu, takozvanom periodu posmatranja (eng. *observation period*) ocenjujemo jednogodišnje verovatnoće preživljavanja q_x. Oznaka za ocenu jednogodišnje verovatnoće preživljavanja je $\hat{q}_x$.

Ocenjivanje verovatnoće preživljavanja je jednostavno kada su statistički podaci kompletni, odnosno kada su sve osobe opservirane od starosti x do starosti $x+1$ ili do smrti. Međutim, retko imamo kompletne statističke podatke. U realnom životu, češće imamo situaciju, koju ćemo prikazati takozvanim Leksisovim dijagramom [4].

4.1 Leksisov dijagram

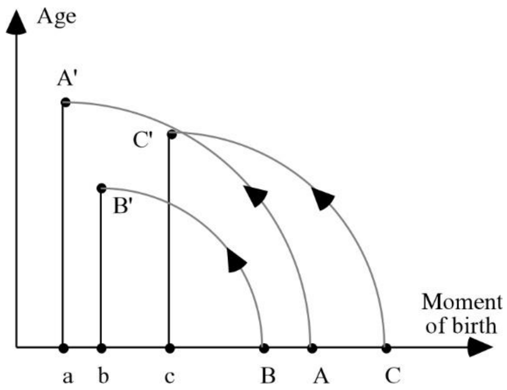
Oko 1870 godine, u Nemačkoj, pojavila se potreba za jednostavnim grafikonom, kojim bi bila prikazana dinamika populacije. Naime, bilo je potrebno u jednoj ravni sa tri koordinate (datumom rođenja, datumom smrti i godinama starosti kada je osoba umrla) pregledno prikazati broj umrlih osoba [11].

Na početku, Leksis je prikazao broj umrlih, sa jednom vremenskom osom (slika 1.), na kojoj je datume rođenja osoba obeležio tačkama a, b, c,..., dok je datume njihove smrti obeležio sa istim ali velikim slovom A, B, C,.... Dužinu života osobe je predstavljala duž između tačka obeležene sa istim malim i velikim slovom.



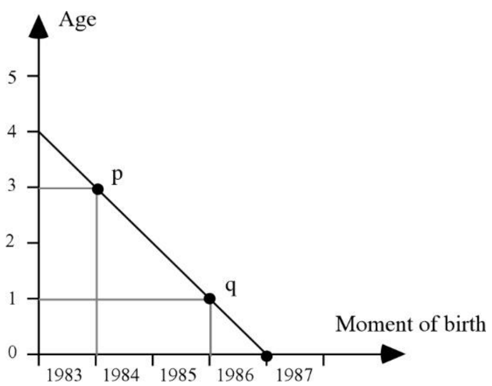
Slika 1. Osa vremena
(Preuzeto iz: Demographic research: The Lexis diagram, a misnomer, 2001.)

Međutim, kako je ovakav grafikon nepregledan za prikaz velikog broja umrlih, da bi rešio taj problem, Leksis je predložio da se duži koje predstavljanju dužinu života, rotiraju vertikalno (Slika 2.), tako da je horizontalna osa označavala datume rođenja, dok je vertikalna osa predstavljala godine starosti kada je osoba umrla.



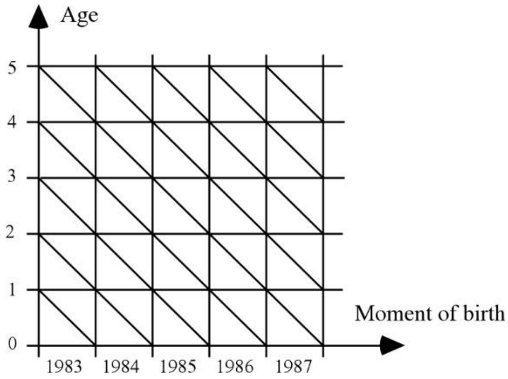
Slika 2. Rotacija dužine životnog veka
(Preuzeto iz: Demographic research: The Lexis diagram, a misnomer, 2001.)

Koristeći takvu konstrukciju, svi događaji koji su se desili u jednom preciznom trenutku vremena se nalaze na kosoj liniji „izohronoj" (eng. „isochrone"). I taj precizan trenutak je označan presekom kose linije sa horizontalnom osom što na slici 3. odgovara 1. januaru 1987. godine. Na taj dan, osoba rođena 1. januara 1984. godine je napunila tri godine (tačka obeležena sa p), dok druga osoba rođena 1. januara 1986. godine napunila jednu godinu (tačka obeležena sa q) (slika 3.)



Slika 3. „Izohrona" linija
(Preuzeto iz: Demographic research: The Lexis diagram, a misnomer, 2001.)

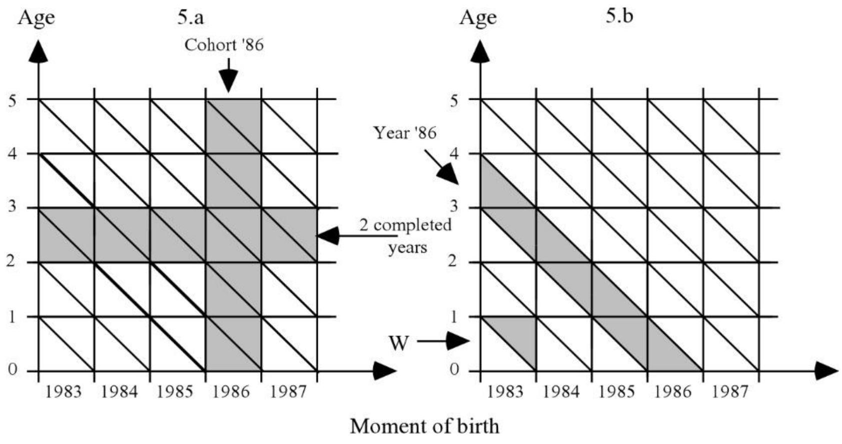
Da bi se podaci lakše „uneli" u grafikona, Leksis je napravio mrežu paralelnih linija (slika 4.)



Slika 4. Leksisova mreža paralelnih linija
(Preuzeto iz: Demographic research: The Lexis diagram, a misnomer, 2001.)

Prikaz smrtnih slučajeva u Leksisovom dijagramu:

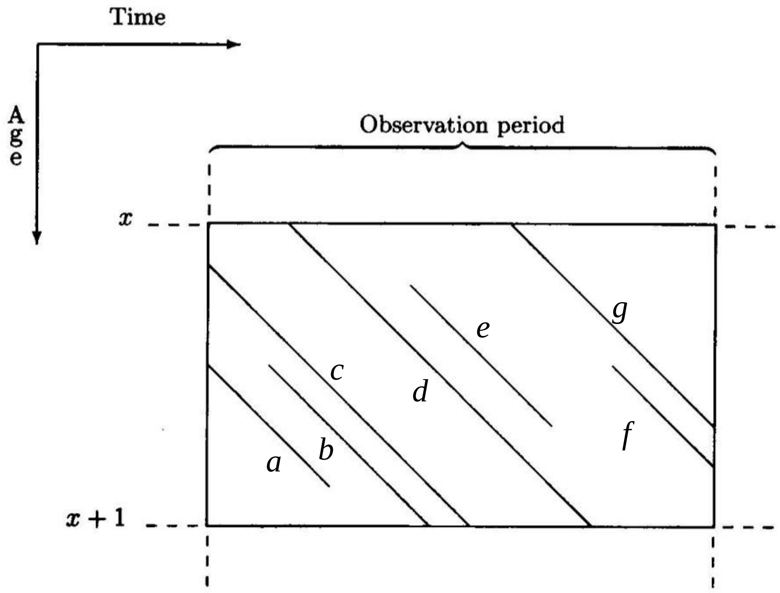
- bilo koji smrtni slučaj koji se desi za osobu između 2. i 3. godine života se nalazi u horizontalnoj traci ograničenoj sa drugom i trećom godinom (navršena starost (eng. *completed age*) je prikazan horizonatalnim koridorom) (slika 5a.),
- bilo koji smrtni slučaj osobe rođene 1986 (kohorta 1986) se nalazi u vertikalnoj traci ograničenoj sa datumima 1. januar 1986. i 1. januar 1987. godine) (slika 5a.),
- bilo koji smrtni slučaj koji se desi između 1. januara 1986. i 1. januara 1987. godine se nalazi u kosoj traci ograničenoj sa izohronama 1. januara 1986. i 1. januara 1987. godine (jedna godina je prikazana kosim koridorom) (slika 5b.) i
- bilo koji smrtni slučaj osobe koja pripada kohorti 1983, u 0. godini života za vreme 1984. godine se nalazi u trouglu „W“ (slika 5b.)



Slika 5. Lokalizacije koordinata u Leksisovom dijagramu
(Preuzeto iz: Demographic research: The Lexis diagram, a misnomer, 2001.)

4.2 Nekompletni statistički podaci prikazani Leksisovim dijagramom

Za opis nekompletnih opservacija (eng. *incomplete observations*) koristićemo jedan pravougaonik Leksisovog dijagrama. U pravougaoniku za svaku posmatranu osobu ucrtaćemo segment dijagonalne linije (eng. *diagonal line segment*) da bismo prikazali nekompletne podatake. Znači, u dijagramu svakoj osobi odgovora segment dijagonalne linije, takozvana linija života, koja predstavlja vremenski interval u kojem smo pratili tu osobu. Vertikalne linije, kojima je pravougaonik ograničen, predstavljaju početak i kraj perioda posmatranja, dok horizontalne linije čine godine starosti osoba koje posmatramo (slika 6.)



Slika 6. Linije života u Leksisovom dijagramu
(Modifikovano iz: Gerber H.U. Life Insurance Mathematics with exercises contributed by Samuel H. Cox, 1997.)

Nekompletne statističke podatke imaćemo u sledećim situacijama (slika 6.):

- za osobe koje su napunile x godina pre početka perioda posmatranja (segmenti a i c);
- za osobe koje su napunile $x+1$ posle završenog perioda opservacije (segmenti f i g);
- za osobe čija starost je bila između x i $x+1$, kada su kupile polisu osiguranja (segmenti b, e i f) i
- za osobe čija je starost je bila između x i $x+1$, u trenutku kada smo prestali da ih posmatramo zbog drugih događaja a ne smrtnog slučaja, kao što je istek polise osiguranja [4].

Da bismo ocenili verovatnoću preživljavanja pretpostavićemo da prosmatramo n osoba u jednom periodu posmatranja. Takođe, pretpostavićemo da smo osobu obeleženu sa i posmatrali, između njenih godina starosti $x + t_i$i $x + s_i$, gde je $0 \leq t_i < s \leq 1$.

Sumu:

$$E_x = (s_1 - t_1) + (s_2 - t_2) + \cdots + (s_n - t_n) \qquad (4.2.1)$$

nazivamo izloženost (eng. *exposure*) i ukupna dužina svih linija života u Leksisovom dijagramu iznosi $\sqrt{2}E_x$ [4].

Broj smrtnih slučajeva realizovanih u kvadratu Leksisovog dijagrama obeležićemo sa D_x, dok sa I obeležićemo skup posmatranja osoba i koja su se završila smrtnim ishodom, i odredićemo za $i \in I$,

$$s_i{}^{(m)} = \frac{1}{m}[ms_i + 1] \qquad (4.2.2)$$

tj. $s_i{}^{(m)}$ dobićemo zaokruživanjem s_i na sledeći m-ti deo godine [4].

4.3 Klasični metod ocene verovatnoće preživljavanja

U klasičnoj metodi se izjednačava očekivani broj umrlih sa realizovanim brojem smrtnih slučajeva da bi se dobila ocena verovatnoće preživljavanja $\hat{q}_x$.

Izraz za očekivani broj umrlih je:

$$\sum_{i=1}^{n} {}_{1-t_i}q_{x+t_i} - \sum_{i \notin I} {}_{1-s_i}q_{x+s_i} \qquad (4.3.1)$$

Pojednostavljenjem navedenog izraza pretpostavkom da je ${}_{1-u}q_{x+u}$ linearna funkcija po $1 - u$, za očekivani broj umrlih dobijamo:

$$\sum_{i=1}^{n}(1 - t_i)q_x - \sum_{i \notin I}(1 - s_i)q_x = E_x q_x + \sum_{i \in I}(1 - s_i)q_x \qquad (4.3.2)$$

Izjednačavanjem izraza za očekivani broj umrlih sa realizovanim brojem umrlih D_x, dobija se ocena klasičnom metodom:

$$\hat{q}_x = \frac{D_x}{E_x + \sum_{i \in I}(1 - s_i)} \tag{4.3.3}$$

Ova ocena je primenljiva kada imamo veliki broj podataka.

Ako pretpostavimo da će se smrtni slučajevi desiti u sredini perioda $x + \frac{1}{2}$, aproksimiranjem imenioca, ocena postaje jednostavnija:

$$\hat{q}_x = \frac{D_x}{E_x + \frac{1}{2} D_x} \tag{4.3.4}$$

Kada imamo mali broj podataka, ne možemo koristiti izraz (4.3.3) kao ocenu za verovatnoću preživljavanja, jer brojilac može biti veći od imenioca, što za posledicu ima besmislenu ocenu za q_x. Takođe, za takvu ocenu nije moguće oceniti interval poverenja.

<u>Zadatak1:</u> Posmatramo 85 polisa životnog osiguranja osoba starosti x. Dodatnih 50 polisa je izdato za osobe starosti $x + 0{,}35$. Ako smrt za tri osobe nastupi u $x + 0{,}5$, izračunati ocenu za verovatnoću preživljavanja klasičnom metodom.

<u>Rešenje:</u>

Kako su tri osobe umrle, imamo da je:

$$D_x = 3$$

Dok je izloženost svih osoba data zbirom:

$$E_x = 82 + 3 \cdot 0{,}5 + 50 \cdot 0{,}65 = 116$$

Ocenu za q_x dobijamo:

$$\hat{q}_x = \frac{D_x}{E_x + \frac{1}{2} D_x} = \frac{3}{117{,}5} \approx 0{,}025$$

4.4 Modifikacija klasične metode

U alternativnoj proceduri, m je pozitivan ceo broj, dok ćemo h definisati kao $h = 1/m$. Da bismo korišćenjem klasične metode ocenili ${}_hq_x$ pretpostavićemo da je ${}_{h-u}q_{x+u}$ linearna funkcija po u:

$$ {}_{h-u}q_{x+u} = (1 - mu)\,{}_hq_x, \quad \text{za } 0 \le u \le h. \tag{4.4.1} $$

Takođe, pretpostavićemo da je intenzitet smrtnosti između x i $x + 1$, periodična funkcija sa periodom h. Iz te pretpostavke proizilazi, za $j = 1,2,\cdots,m-1$, da je:

$$ {}_{h-u}q_{x+jh+u} = {}_{h-u}q_{x+u}, \quad \text{za } 0 \le u \le h. \tag{4.4.2} $$

Korišćenjem obe prethodne pretpostavke, dolazi se do izraza za očekivani broj smrtnih slučajeva:

$$ mE_x\,{}_hq_x + m\sum_{i\in I}\left({s_i}^{(m)} - s_i\right){}_hq_x \tag{4.4.3} $$

Izjednačavanjem izraza za očekivani broj umrlih sa realizovanim brojem umrlih, dobijamo sledeću ocenu:

$$ {}_h\hat{q}_x = \frac{hD_x}{E_x + \sum_{i\in I}({s_i}^{(m)} - s_i)} \tag{4.4.4} $$

Kako se iz pretpostavke (4.4.2) podrazumeva da je:

$$ p_x = ({}_hp_x)^m, \tag{4.4.5} $$

koristeći izraza (4.4.4) dobijamo ocenu:

$$ \hat{q}_x = 1 - (1 - {}_h\hat{q}_x)^m \tag{4.4.6} $$

Alternativni pristup postaje zanimljiv kada $m \to \infty$. Kako se granični slučajevi pretpostavke (4.4.1) i (4.4.2), podudaraju sa pretpostavkom da je intenzitet smrtnosti konstantan $\mu_{x+u} = \mu_{x+\frac{1}{2}}$, za

$0 < u < 1$, i očekivani broj smrtnih slučajeva u izrazu (4.4.3) postaje $E_x \mu_{x+\frac{1}{2}}$. Onda, možemo ocenu konstantne vrednosti intenziteta smrtnosti dobiti iz:

$$\hat{\mu}_{x+\frac{1}{2}} = \frac{D_x}{E_x} \qquad (4.4.7)$$

a verovatnoću q_x ocenjivati sa:

$$\hat{q}_x = 1 - \exp\left(-\hat{\mu}_{x+\frac{1}{2}}\right) = 1 - \exp(-\tfrac{D_x}{E_x}) \qquad (4.4.8)$$

4.5 Metod maksimalne verodostojnosti

Kritika primene metode momenta u ocenjivanju verovatnoće preživljavanja, je da koristi heuristički pristup u ocenjivanju primenom jednostavnog izjednačavanja broja očekivanih smrtnih slučajeva u izrazima (4.3.2) i (4.4.3) sa realizovanim brojem umrlih. Međutim, identične ocene dobijene za intenzitet smrtnosti i verovatnoću preživljavanja (4.4.7) i (4.4.8) su izvedeni i drugim metodama [4].

Jedna od tih metoda je i metod maksimalne verodostojnosti koji je verovatno najviše korišćen metod za ocenjivanje parametara u praksi [12]. U ocenjivanju intenziteta i verovatnoće preživljavanja, za n nezavisnih osoba koje posmatramo, funkcija verodostojnosti je:

$$\prod_{i=1}^{n} \mu_{x+s_i}\, {}_{s_i-t_i}p_{x+t_i} \prod_{i \notin I} {}_{s_i-t_i}p_{x+t_i} \qquad (4.5.1)$$

Pretpostavka da je intenzitet smrtnosti deo po deo konstantan (eng. *piecewise constant*), pojednostavljuje funkciju verodostojnosti (4.5.1):

$$\left(\mu_{x+\frac{1}{2}}\right)^{D_x} \exp(-\mu_{x+\frac{1}{2}} E_x) \qquad (4.5.2)$$

Maksimum funkcije (4.5.2) dobijamo na sledeći način:

$$\left(\left(\mu_{x+\frac{1}{2}}\right)^{D_x}\exp\left(-\mu_{x+\frac{1}{2}}E_x\right)\right)'$$

$$= \left(\left(\mu_{x+\frac{1}{2}}\right)^{D_x}\right)'\exp\left(-\mu_{x+\frac{1}{2}}E_x\right) + \left(\mu_{x+\frac{1}{2}}\right)^{D_x}\exp\left(-\mu_{x+\frac{1}{2}}E_x\right)'$$

$$= D_x\left(\mu_{x+\frac{1}{2}}\right)^{D_x-1}\exp\left(-\mu_{x+\frac{1}{2}}E_x\right) + \left(\mu_{x+\frac{1}{2}}\right)^{D_x}(-E_x)\exp\left(-\mu_{x+\frac{1}{2}}E_x\right)$$

$$= 0$$

sledi da je:

$$D_x\left(\mu_{x+\frac{1}{2}}\right)^{D_x-1}\exp\left(-\mu_{x+\frac{1}{2}}E_x\right) = \left(\mu_{x+\frac{1}{2}}\right)^{D_x}E_x\exp\left(-\mu_{x+\frac{1}{2}}E_x\right)$$

čijim daljim sređivanjem se dobija da je:

$$D_x = \mu_{x+\frac{1}{2}}E_x$$

Na kraju, iz prethodne formule izvodimo maksimum funkcije:

$$\hat{\mu}_{x+\frac{1}{2}} = \frac{D_x}{E_x}$$

Kako je maksimum izraza (4.5.2) identičan izrazu (4.4.7), zaključujemo da je izraz (4.4.7) dobijen modifikacijom klasične metode isti kao i ocena dobijena metodom maksimalne verodostojnosti (eng. *maximum likelihood estimator*).

4.6 Statističko zaključivanje

Kako svako statističko zaključivanje zahteva neke pretpostavke, koje nastaju ili generalizacijom iz realizovanih podataka ili na osnovu podataka iz sličnih događaja. Puasonova raspodela se koristi za modelovanje retkih događaja tokom određenog vremenskog perioda, npr. broj čestica koje emituje radioaktivni izvor u minuti. Odakle možemo da zaključimo da za broj smrnih slučajeva u posmatranom periodu možemo koristiti Puasonovu raspodelu. Pretpostavićemo, iako su u stvarnosti i D_x i E_x slučajne veličine, da je E_x neslučajna veličina (eng. *non-random quantity*) i da slučajna veličina D_x, ima Puasonovu raspodelu sa parametrom λ:

$$\lambda = \mu_{x+\frac{1}{2}} E_x \tag{4.6.1}$$

sa nepoznatim parametrom $\mu_{x+\frac{1}{2}}$ [4].

Verovatnoća D_x smrtnih slučajeva, osim faktora koji ne zavisi od $\mu_{x+\frac{1}{2}}$, je tada identična izrazu (4.5.2) koji smo dobili i metodom maksimalne verodostojnosti. Znači da je i statističkim zaključivanjem pokazano da su ocene za verovatnoću preživljavanja i intenzitet smrtnosti dobijene metodom momenta validne.

Isti zaključak se dobija i kada pretpostavimo da je D_x neslučajna veličina, a slučajna veličina E_x ima gama raspodelu sa parametrima $\alpha = \mu_{x+\frac{1}{2}}$ i $\beta = D_x$.

Interval poverenja za λ možemo direktno pročitati iz tablice 3. za realizovan broj smrtnih slučajeva D_x. Deljenjem granica intervala poverenja sa Ex , dobija se interval poverenja za $\mu_{x+\frac{1}{2}}$. Dok, iz intervala poverenja za $\mu_{x+\frac{1}{2}}$, zatim, dobijamo interval poverenja za q_x.

<u>Primer</u>:

Pretpostavimo da je $Dx = 17$ i $Ex = 1500$.

Iz tablice sa granicama intervala poverenja za parametar Puasonove raspodele dobijamo za 90% interval poverenja da je:

$$10{,}83 < \lambda < 25{,}50.$$

Deljenjem granica intervala poverenja sa $Ex = 1500$ dobijamo interval poverenja za $\mu_{x+\frac{1}{2}}$: $0{,}00722 < \mu_{x+\frac{1}{2}} < 0{,}017$.

Na kraju, iz intervala poverenja za $\mu_{x+\frac{1}{2}}$, zatim, dobijamo interval poverenja za q_x: $0{,}0072 < q_x < 0{,}01686$.

Tabela 3. Statističko zaključivanje
Granice poverenja za parametar Puasonove raspodele

Confidence limits for the parameter of a Poisson distribution

λ^l ($w = 0.01$)	λ^l ($w = 0.05$)	n	λ^u ($w = 0.05$)	λ^u ($w = 0.01$)
0.00	0.00	0	3.00	4.61
0.01	0.05	1	4.74	6.64
0.15	0.36	2	6.30	8.41
0.44	0.82	3	7.75	10.05
0.82	1.37	4	9.15	11.60
1.28	1.97	5	10.51	13.11
1.79	2.61	6	11.84	14.57
2.33	3.29	7	13.15	16.00
2.91	3.98	8	14.43	17.40
3.51	4.70	9	15.71	18.78
4.13	5.43	10	16.96	20.14
4.77	6.17	11	18.21	21.49
5.43	6.92	12	19.44	22.82
6.10	7.69	13	20.67	24.14
6.78	8.46	14	21.89	25.45
7.48	9.25	15	23.10	26.74
8.18	10.04	16	24.30	28.03
8.89	10.83	17	25.50	29.31
9.62	11.63	18	26.69	30.58
10.35	12.44	19	27.88	31.85
11.08	13.25	20	29.06	33.10
11.82	14.07	21	30.24	34.36
12.57	14.89	22	31.42	35.60
13.33	15.72	23	32.59	36.84
14.09	16.55	24	33.75	38.08
14.85	17.38	25	34.92	39.31
15.62	18.22	26	36.08	40.53
16.40	19.06	27	37.23	41.76
17.17	19.90	28	38.39	42.98
17.96	20.75	29	39.54	44.19
18.74	21.59	30	40.69	45.40
22.72	25.87	35	46.40	51.41
26.77	30.20	40	52.07	57.35
30.88	34.56	45	57.69	63.23
35.03	38.96	50	63.29	69.07
39.23	43.40	55	68.85	74.86
43.46	47.85	60	74.39	80.62

(Preuzeto iz: Gerber H.U. Life Insurance Mathematics with exercises contributed by Samuel H. Cox, 1997.)

Takođe, postojeće tablice smrtnosti možemo koristiti kao standard dok su intenziteti smrtnosti u posmatranoj grupi su proizvod konstante koja je nezavisna od godine starosti i intenziteta smrtnosti iz standardne tablice smrtnosti [4]. Ako obeležimo intenzitete smrtnosti iz standardne tablice sa $\mu^t{}_{x+\frac{1}{2}}$, prethodni napomena je data:

$$\mu_{x+\frac{1}{2}} = f\mu^t{}_{x+\frac{1}{2}} \tag{4.6.2}$$

gde je sada potrebno oceniti faktor *f*.

Pod pretpostavkom da broj smrtnih slučajeva D_x, koji se događaju u različitim starosnim grupama, su nezavisne slučajne veličine, tada ukupan broj smrtnih slučajeva D

$$D = \sum_x D_x \tag{4.6.3}$$

sledi Puasonovu raspodelu sa λ

$$\lambda = \sum_x \mu_{x+\frac{1}{2}} E_x = f \sum_x \mu^t{}_{x+\frac{1}{2}} E_x \tag{4.6.4}$$

Kako je $\hat{\lambda} = D$, onda je ocena za faktor *f*:

$$\hat{f} = \frac{D}{\sum_x \mu^t{}_{x+\frac{1}{2}} E_x} \tag{4.6.5}$$

Ovaj izraz se naziva stopa smrtnosti (eng. *mortality ratio*) [4].

Iz intervala poverenja za λ možemo dobiti interval poverenja za faktor f.

Zadatak 2: Imamo sledeće rezultate istraživanja za E_x i D_x za osobe stare $x \in [29,34)$:

x	E_x	D_x
29	850	4
30	870	4
31	820	6
32	950	9
33	1000	8
34	980	7

Izračunati ocenu za stopu smrtnosti $\hat{f}$ i 99% interval poverenja za f. Ilustrovanu tablicu smrtnosti (Tabela 4.) koristimo kao standard.

Rešenje:

Iz podataka u zadatku imamo da je:

$$D = \sum_{x=29}^{34} D_x = 38$$

Dok je očekivani broj smrtnih slučajeva dobijen iz standardne tablice smrtnosti:

$$\sum_{x=29}^{34} {\mu^t}_{x+\frac{1}{2}} E_x = 9{,}17$$

Odakle dobijamo da je $\hat{f}$:

$$\hat{f} = \frac{38}{9{,}16} = 4{,}14$$

Iz tabele 4.vidimo da je:

$$22{,}72 < \lambda < 51{,}41$$

Dok je interval poverenja:

$$2{,}47 < f < 5{,}6$$

Tabela 4. Statističko zaključivanje
Ilustrovana tablica smrtnosti

E.0 Illustrative Life Tables

Basic Functions and Net Single Premiums at $i = 5\%$ [1]

x	ℓ_x	d_x	$1000q_x$	$\ddot{a}_x$	$1000A_x$	$1000\,(^2A_x)$	x
0	10,000,000	204,200	20.42	19.642724	64.63	28.72	0
1	9,795,800	13,126	1.34	19.982912	48.43	11.47	1
2	9,782,674	11,935	1.22	19.958801	49.58	11.33	2
3	9,770,739	10,943	1.12	19.931058	50.90	11.28	3
4	9,759,796	10,150	1.04	19.899898	52.39	11.33	4
5	9,749,646	9,555	0.98	19.865552	54.02	11.46	5
6	9,740,091	9,058	0.93	19.828262	55.80	11.67	6
7	9,731,033	8,661	0.89	19.788078	57.71	11.95	7
8	9,722,372	8,458	0.87	19.745056	59.76	12.29	8
9	9,713,914	8,257	0.85	19.699446	61.93	12.69	9
10	9,705,657	8,250	0.85	19.651122	64.23	13.15	10
11	*9,697,407*	*8,243*	*0.85*	*19.600339*	*66.65*	*13.66*	*11*
12	9,689,164	8,333	0.86	19.546971	69.19	14.23	12
13	9,680,831	8,422	0.87	19.491083	71.85	14.84	13
14	9,672,409	8,608	0.89	19.432543	74.64	15.50	14
15	9,663,801	8,794	0.91	19.371410	77.55	16.21	15
16	9,655,007	8,979	0.93	19.307550	80.59	16.98	16
17	9,646,028	9,164	0.95	19.240821	83.77	17.81	17
18	9,636,864	9,348	0.97	19.171075	87.09	18.70	18
19	9,627,516	9,628	1.00	19.098154	90.56	19.67	19
20	9,617,888	9,906	1.03	19.022085	94.19	20.71	20
21	9,607,982	10,184	1.06	18.942699	97.97	21.82	21
22	9,597,798	10,558	1.10	18.859825	101.91	23.02	22
23	9,587,240	10,929	1.14	18.773468	106.03	24.31	23
24	9,576,311	11,300	1.18	18.683440	110.31	25.69	24
25	9,565,011	11,669	1.22	18.589547	114.78	27.17	25
26	9,553,342	12,133	1.27	18.491584	119.45	28.77	26
27	9,541,209	12,690	1.33	18.389518	124.31	30.49	27
28	9,528,519	13,245	1.39	18.283311	129.37	32.33	28
29	9,515,274	13,892	1.46	18.172737	134.63	34.30	29
30	9,501,382	14,537	1.53	18.057738	140.11	36.41	30
31	9,486,845	15,274	1.61	17.938070	145.81	38.67	31
32	9,471,571	16,102	1.70	17.813654	151.73	41.09	32
33	9,455,469	16,925	1.79	17.684401	157.89	43.68	33
34	9,438,544	17,933	1.90	17.550034	164.28	46.45	34
35	9,420,611	18,935	2.01	17.410616	170.92	49.40	35

(Preuzeto iz: Gerber H.U. Life Insurance Mathematics with exercises contributed by Samuel H. Cox, 1997.)

Zadatak3: Intenzitet smrtnosti je konstantan između x i $x+1$. U posmatranje je ušlo devet osoba sa x godina, dok su tri osobe ušle sa $x+0{,}6$. Posmatranje su napustile: dve osobe u $x+0{,}4$, jedna u $x+0{,}5$ i jedna u $x+0{,}7$. Jedna osoba umire u $x+0{,}5$. Izračunati ocenu za intenzitet smrtnosti metodom maksimalne verodostojnosti.

Rešenje:

Imamo jednu osobu koja umire, tako da je:

$$D_x = 1$$

Izloženost svih osoba je data zbirom:

$$E_x = 4 + 2 \cdot 0{,}4 + 0{,}5 + 0{,}7 + 0{,}5 + 3 \cdot 0{,}4 = 7{,}7$$

Ocena za $\mu_{x+\frac{1}{2}}$ je:

$$\hat{\mu}_{x+\frac{1}{2}} = \frac{D_x}{E_x} = \frac{1}{7{,}7} \approx 0{,}13$$

4.7 Višestruki uzroci dekrementa

Dekrement u životnom osiguranju predstavlja prestanak ugovora. Istek ugovora o osiguranju može nastati iz više različitih događaja a ne samo isključivo zbog smrti osiguranika.

4.7.1 Model višestrukog dekrementa

Posmatraćemo osobu u određenom statusu staru x godina, kod koje će taj status prestati u vremenu T zbog međusobno isključivih m uzroka dekrementa J, obeleženih sa brojevima od 1 do m [4].

U modelu višestrukog dekrementa ispitivaćemo dve slučajne veličine: preostalo vreme T do isteka (eng. *time until termination*) i uzroke dekrementa J.

Zajednička raspodela verovatnoća slučajnih veličina T i J je:

$$f_j(t)dt = P(t < T < t + dt, J = j) \qquad (4.7.1.1)$$

gde je $f_j(t)dt$ je verovatnoća da je došlo do dekrementa zbog uzroka j u beskonačno malom intervalu $(t, t+dt)$. Može se primetiti da:

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + \cdots + f_m(t) \ldots \qquad (4.7.1.2)$$

Ako se dekrement desi u vremenu t, uslovna verovatnoća da j bude uzrok dekrementa je:

$$P(J = j \mid T = t) = \frac{f_j(t)}{f(t)} \qquad (4.7.1.3)$$

Izraz za verovatnoću nastanka dekrementa zbog uzroka j do trenutka t je:

$$_tg_{j,x} = P(T < t, J = j) = \int_0^t f_j(y)dy \qquad (4.7.1.4)$$

dok, verovatnoća nastanka dekrementa zbog uzroka j do trenutka $t+s$, pod uslovom da do dekrementa nije došlo do trenutka s je:

$$_tg_{j,x+s} = P(T < s + t, J = j \mid T > s) \qquad (4.7.1.4)$$

Za razliku od modela preostale dužine života, iako je nastao njegovim uopštavanjem, model višestrukog dekrementa ima i marginalne raspodele verovatnoće.

Izraz za marginalnu verovatnoću da do dekrementa dođe zbog uzroka j bilo kada u budućnosti je:

$$_\infty g_{j,x} = \int_0^{+\infty} f_j(y)dy \qquad (4.7.1.5)$$

4.7.2 Intenzitet dekrementa

Intenzitet dekrementa za osobu starosti x u godini $x + t$, zbog uzroka dekrementa *j*:

$$\mu_{j,x+t} = \frac{f_j(t)}{1 - F(t)} = \frac{f_j(t)}{{}_t p_x} \tag{4.7.2.1}$$

Na osnovu izraza (4.7.1.1) i definicije za intenzitet smrtnosti (2.2.1) dobijamo da je zbirni intenzitet dekrementa (eng. *aggregate force of decrement*):

$$\mu_{x+t} = \mu_{1,x+t} + \cdots. + \mu_{m,x+t} \tag{4.7.2.2}$$

Alternativni izraz za zajedničku raspodelu slučajnih veličina T i J je:

$$P(t < T < t + dt, J = j) = {}_t p_x \mu_{j,x+t} dt \tag{4.7.2.3}$$

Štaviše, prema formuli za uslovnu verovatnoću dobijamo:

$$P(J = j \mid T = t) = \frac{\mu_{j,x+t}}{\mu_{x+t}} \tag{4.7.2.4}$$

4.7.3 Ocena verovatnoće preživljavanja čiji je uzrok j

Kako dekrement može biti rezultat bilo kog m uzroka, ukupan broj dekrementa obeležićemo sa D_x, dok broj smrtnih slučajeva izazvanim uzrokom j, za $j = 1,2,\cdots,m$, obeležićemo sa $D_{j,x}$. Tada je:

$$D_{1,x} + D_{2,x} + \cdots + D_{m,x} = D_x. \tag{4.7.3.1}$$

U ocenjivanju verovatnoće preživljavanja $q_{j,x}$ čiji je uzrok j, pretpostavićemo da je intenzitet dekrementa deo po deo konstantan, tj. da je:

$$\mu_{j,x} = \mu_{j,x+\frac{1}{2}} \text{ , za } 0 < u < 1. \tag{4.7.3.2}$$

Onda i za zbirni intenzitet dekrementa (4.7.2.2) važi da je deo po deo konstantan.

Ako pretpostavimo da je n života nezavisno, tada je funkcija verodostojnosti data sa:

$$\prod_{j=1}^{m} \left(\mu_{j,x+\frac{1}{2}}\right)^{Dj,x} \exp(-\mu_{j,x+\frac{1}{2}} E_x) \tag{4.7.3.3}$$

Ocena za intenzitet smrtnosti, čiji je uzrok j dobijen metodom maksimalne verodostojnosti je onda:

$$\hat{\mu}_{j,x+\frac{1}{2}} = \frac{D_{j,x}}{E_x} \, , j = 1,2, \ldots , m \tag{4.8.3.4}$$

Verovatnoća $q_{j,x}$, čiji je uzrok j je:

$$q_{j,x} = \frac{\mu_{j,x+\frac{1}{2}}}{\mu_{x+\frac{1}{2}}} g_x \tag{4.8.3.5}$$

Dok je ocena za $q_{j,x}$:

$$\hat{g}_{j,x} = \frac{D_{j,x}}{D_x} \hat{g} \tag{4.8.3.6}$$

gde je ocenjena verovatnoća $\hat{q}_x$ definisana izrazom (4.4.8)

Zadatak4: Posmatramo trostruki model dekrementa sa tri uzroka smrti u intervalu $(x, x+1]$. Intenzitet smrtnosti svakog uzorka smrti je konstantan. U posmatranje je ušlo 700 osoba starosti x. Trideset smrtnih slučajeva je nastupilo zbog prvog uzroka, 35 zbog drugog uzroka, dok je 40 smrtnih slučajeva bilo zbog trećeg uzroka. Izračunati ocenu intenziteta smrtnosti metodom maksimalne verodostojnosti.

<u>Rešenje:</u>

Imamo 30 smrtnih slučajeva zbog uzroka 1, 35 zbog uzroka 2 i 40 zbog uzroka 3, odakle sledi da je :

$$D_{1,x} = 30, D_{2,x} = 35, D_{3,x} = 40$$

$$D_x = D_{1,x} + D_{2,x} + D_{3,x}$$

$$D_x = 105$$

Ocene za q i μ dobijamo:

$$\hat{\mu} = \frac{105}{700} = 0{,}15$$

$$\hat{q} = 1 - e^{-\hat{\mu}} = 1 - 0{,}86 = 0{,}14$$

Na kraju, za svaki uzorak posebno računamo ocenu:

$$\hat{q}_1 = \frac{30}{105}\hat{q} = 0{,}04$$

$$\hat{q}_2 = \frac{35}{105}\hat{q} = 0{,}047$$

$$\hat{q}_3 = \frac{40}{105}\hat{q} = 0{,}053$$

ZAKLJUČCI

Za izradu tablica smrtnosti su neophodne verovatnoće preživljavanja, koje se izračunavaju iz statističkih podataka, koji su često nekompletni.

Usled nekompletnosti statističkih podataka potrebno je oceniti verovatnoću preživljavanja metodama matematičke statistike. Za ocenjivanje verovatnoće preživljavanja koriste se različite metode matematičke statistike, a najčešće korišćen metod je metod maksimalne verodostojnosti. Ocene verovatnoće preživljavanja dobije različitim metodama su veoma slične.

Uzroci dekrementa su brojni. Kako su uzorci dekrimenta različiti, potrebno je oceniti i verovatnoće priživljavanja različitih uzroka dektimenata.

LITERATURA

1. The Roman Empire: from Augustus to the Fall of Rome
https://guidebookstgc.snagfilms.com/3344_TheRomanEmpire.pdf

2. Dickson D.C.M., Hardy M.R., Waters H.R. Actuarial Mathematics for life contingent risks. Cambridge University Press, New York, 2009.)
https://fac.ksu.edu.sa/sites/default/files/actuarial-mathematics-for-life-contingent-risks.pdf

3. Rašeta J. Finansijska i aktuarska matematika, peto izdanje. Univerzitet Singidunum, Beograd, 2009.)
https://singipedia.singidunum.ac.rs/izdanje/40864-finansijska-i-aktuarska-matematika

4. Gerber H.U. Life Insurance Mathematics with exercises contributed by Samuel H. Cox, third edition. Springer, Berlin, 1997.
http://probability.univ.kiev.ua/userfiles/yamnenko/Gerber.pdf?fbclid=IwAR2UY5unIiDnNRfF5ntgvSbsiuzxIZHsS8vqT2vYOq_EULrU9KoPAp_RZBM

5. Jordan C.W. Jr. Society of Actuaries' Textbook on Life Contingencies, second edition. The Society of Actuaries, Chicago, Illinois, 1991.)
https://vdocuments.mx/life-contingencies-chester-wallace-jordanpdf.html

6. Šekarić M., Barjaktarović L. Finansijska matematika i aktuarstvo – skripta. Univerzitet Singidunum, Beograd, 2010.) https://singipedia.singidunum.ac.rs/izdanje/40865-finansijska-matematika-i-aktuarstvo

7. Kočović J., Rakonjac-Antić T., Rajić V. Upravljanje aktuarskim rizicima pri formiranju tarifa u osiguranju. www.vps.ns.ac.rs/Materijal/mat10418

8. Kočović J., Rajić V. Tehničke osnove osiguranje lica. Tablice smrtnosti. www.ekof.bg.ac.rs/wp-content/uploads/2014/07/Aktuarska-matematika-master.ppt

9. Ciecka J.E. Edmond Halley's Life Table and Its Uses. Journal of Legal Economics. 2008;15(1):65-74. https://www.questia.com/library/journal/edmond-halley-s-life-table-and-its-uses

10. Norberg R. Basic Life Insurance Mathematics, 2002. www.math.ku.dk/~mogens/lifebook.pdf

11. Vandeschrick C. The Lexis diagram, a misnomer. Demographic research.2001;4(3):97-124. www.demographic-research.org/Volumes/Vol4/3/4-3.pdf

12. Fernández M.M. Fundamentals on Estimation Theory – Semantic Scholar, 2004. https://pdfs.semanticscholar.org/9abc/f28d04f550cc20c30ff819c3f0b8f110b808.pdf

BIOGRAFIJA

Pavle Reljić je rođen 10.07.1993. u Kraljevu. Osnovnu školu ”Dimitrije Tucović” zavrsio je 2008.godine. Iste godine upisao je gimnaziju u Kraljevu, specijalizovani matematički smer, i završava je 2012.godine. Upisuje Matematički fakultet u Beogradu, smer Statistika, aktuarska i finansijska matematika, na kom je diplomirao 2017.godine. Posle osnovnih studija upisuje master studije. Od oktobra 2018. radi u Republičkom zavodu za statistiku.