UNIVERZITET U BEOGRADU
MATEMATIČKI FAKULTET

Tatjana Šimak

DOKAZIVANJE NEJEDNAKOSTI KOJE UKLJUČUJU HIPERBOLIČKE FUNKCIJE KORIŠĆENJEM STEPENIH REDOVA

master rad

Beograd, 2019.

Mentor:

Prof. dr Zoran Petrović, redovni profesor
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

Članovi komisije:

Prof. dr Nebojša Ikodinović, vanredni profesor
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

Prof. dr Miloš Arsenović, redovni profesor
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

Datum odbrane: 29.08.2019.

Sadržaj

Uvod

U svom master radu ću se baviti dokazivanjem nejednakosti koje uključuju hiperboličke funkcije korišćenjem stepenih redova. Glavna motivacija za izbor teme su bili glavni rezultati doktorske disertacije Milice Makragić, pod nazivom ,,O prstenu trigonometrijskih polinoma sa primenom u teoriji analitičkih nejednakosti.”

Ideja mog rada je da se pokaže da se ti rezultati, kao i drugi rezultati objavljeni u naučnim časopisima iz oblasti matematike, a koji se tiču nejednakosti koje uključuju hiperboličke funkcije, mogu dokazati razvijanjem u stepene redove. Koristimo činjenicu da su to redovi sa pozitivnim koeficijentima, pa se često dokazi pojednostavljuju svođenjem na dokazivanje nejednakosti među prirodnim brojevima, uz eventualnu dodatnu analizu.

Sve nejednakosti u svom radu sam podelila na tri kategorije.

1. **Jednostavne.** Kod ovih nejednakosti razvijamo hiperboličke funkcije u stepeni red i dobijamo koeficijent reda za koji ili je odmah jasno da je nenegativan ili je neka kvadratna funkcija.

2. **Složene.** Kod ovih nejednakosti moramo indukcijom da dokazujemo da su koeficijenti reda nenegativni.

3. **Najsloženije.** Kod ovih nejednakosti nisu svi koeficijenti reda pozitivni, nego je, recimo, samo prvi, a ostali su negativni, pa njih prebacujemo na drugu stranu nejednakosti i dokaz nastavljamo na malo drugačiji način nego kod ostalih nejednakosti.

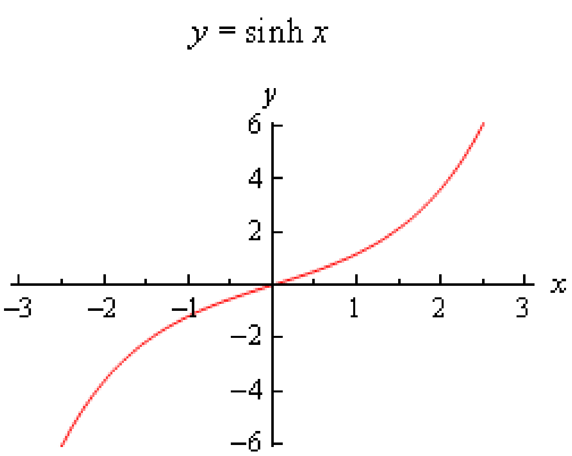
I na kraju, ali ništa manje značajno, koristim ovu priliku da se zahvalim svom mentoru, prof. dr Zoranu Petroviću, na pomoći i podršci, kao i na savetima koje mi je davao prilikom izrade ovog rada.

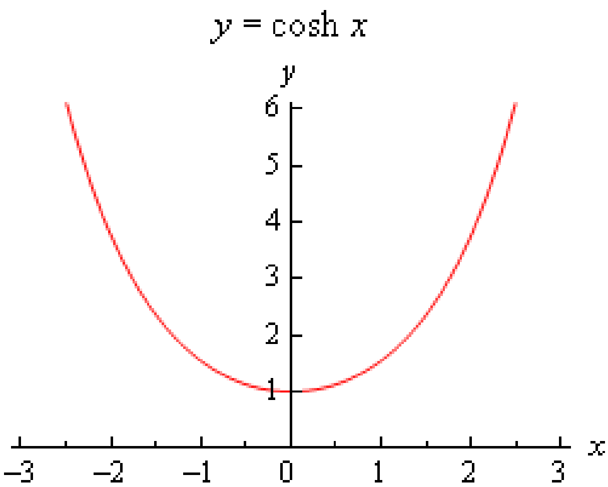
Glava 1

Sinus hiperbolični i kosinus hiperbolični

Sinus hiperbolični je neparna, monotono rastuća funkcija, čiji je domen $(-\infty, \infty)$, a skup vrednosti je $(-\infty, \infty)$.
U svoj jedini prevoj ulazi u nuli, pod uglom $\frac{\pi}{4}$. Nema asimptote.

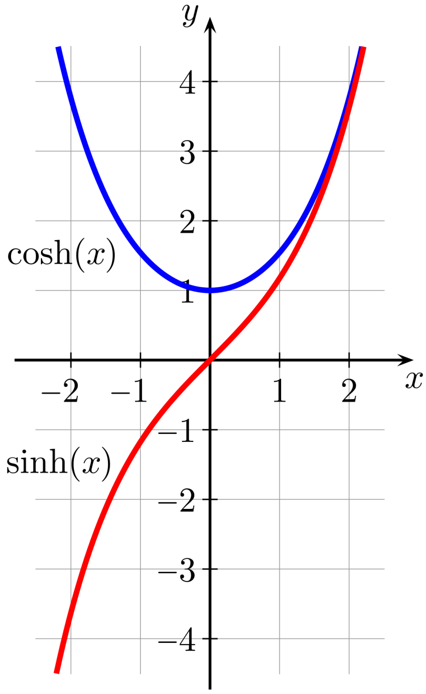
Kosinus hiperbolični je parna funkcija, čiji je domen $(-\infty, \infty)$, a skup vrednosti je $[1, \infty)$, sa minimumom u nuli.
Osa simetrije funkcije je y-osa, a asimptote nema.





$$\boxed{\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}}$$ sinus hiperbolični

$$\boxed{\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}}$$ kosinus hiperbolični



Razvojem hiperbolične funkcije u Tejlorov red dobijamo:

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

1.1 Formule

Sledeće formule se koriste u pojedinim zadacima:

- $$\begin{aligned} \operatorname{sh}^2 x &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{e^{2x} - 2e^x \cdot e^{-x} + e^{-2x}}{4} \\ &= \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{4} - \frac{2}{4} \\ &= \frac{\operatorname{ch} 2x}{2} - \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{1.1}$$

- $$\begin{aligned} \operatorname{sh}^3 x &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^3 \\ &= \frac{e^{3x} - 3e^{2x}\cdot e^{-x} + 3e^{x}\cdot e^{-2x} - e^{-3x}}{8} \\ &= \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{8} - \frac{3e^{x} - 3e^{-x}}{8} \\ &= \frac{\operatorname{sh} 3x}{4} - \frac{3\operatorname{sh} x}{4} \qquad (1.2) \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} (\operatorname{sh} 2x)^3 &= \left(\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}\right)^3 \\ &= \frac{e^{6x} - 3e^{4x}\cdot e^{-2x} + 3e^{2x}\cdot e^{-4x} - e^{-6x}}{8} \\ &= \frac{e^{6x} - e^{-6x}}{8} - \frac{3e^{2x} - 3e^{-2x}}{8} \\ &= \frac{\operatorname{sh} 6x}{4} - \frac{3\operatorname{sh} 2x}{4} \qquad (1.3) \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \operatorname{sh}^4 x &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^4 \\ &= \frac{e^{4x} - 4e^{3x}\cdot e^{-x} + 6e^{2x}\cdot e^{-2x} - 4e^{x}\cdot e^{-3x} + e^{-4x}}{16} \\ &= \frac{e^{4x} + e^{-4x}}{16} - \frac{4e^{2x} + 4e^{-2x}}{16} + \frac{6}{16} \\ &= \frac{\operatorname{ch} 4x}{8} - \frac{\operatorname{ch} 2x}{2} + \frac{3}{8} \qquad (1.4) \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \operatorname{ch}^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{e^{2x} + 2e^{x}\cdot e^{-x} + e^{-2x}}{4} \\ &= \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{4} + \frac{2}{4} \\ &= \frac{\operatorname{ch} 2x}{2} + \frac{1}{2} \qquad (1.5) \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \operatorname{ch}^3 x &= \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^3 \\ &= \frac{e^{3x}+3e^{2x}\cdot e^{-x}+3e^x\cdot e^{-2x}+e^{-3x}}{8} \\ &= \frac{e^{3x}+e^{-3x}}{8}+\frac{3e^x+3e^{-x}}{8} \\ &= \frac{\operatorname{ch} 3x}{4}+\frac{3\operatorname{ch} x}{4} \end{aligned} \tag{1.6}$$

- $$\begin{aligned} \operatorname{ch}^4 x &= \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^4 \\ &= \frac{e^{4x}+4e^{3x}\cdot e^{-x}+6e^{2x}\cdot e^{-2x}+4e^x\cdot e^{-3x}+e^{-4x}}{16} \\ &= \frac{e^{4x}+e^{-4x}}{16}+\frac{4e^{2x}+4e^{-2x}}{16}+\frac{6}{16} \\ &= \frac{\operatorname{ch} 4x}{8}+\frac{\operatorname{ch} 2x}{2}+\frac{3}{8} \end{aligned} \tag{1.7}$$

- $$\begin{aligned} \operatorname{ch}^5 x &= \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^5 \\ &= \frac{e^{5x}+5e^{4x}\cdot e^{-x}+10e^{3x}\cdot e^{-2x}+10e^{2x}\cdot e^{-3x}+5e^x\cdot e^{-4x}+e^{-5x}}{32} \\ &= \frac{e^{5x}+e^{-5x}}{32}+\frac{5e^{3x}+5e^{-3x}}{32}+\frac{10e^x+10e^{-x}}{32} \\ &= \frac{\operatorname{ch} 5x}{16}+\frac{5\operatorname{ch} 3x}{16}+\frac{5\operatorname{ch} x}{8} \end{aligned} \tag{1.8}$$

- $$\begin{aligned} \operatorname{sh} x\cdot\operatorname{ch} x &= \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\cdot\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right) \\ &= \frac{e^{2x}+e^x\cdot e^{-x}-e^{-x}\cdot e^x-e^{-2x}}{4} \\ &= \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{4} \\ &= \frac{\operatorname{sh} 2x}{2} \end{aligned} \tag{1.9}$$

- $$\operatorname{sh} 3x \cdot \operatorname{ch} x = \left(\frac{e^{3x} - e^{-3x}}{2}\right) \cdot \left(\frac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{4x} + e^{2x} - e^{-2x} - e^{-4x}}{4} \\
&= \frac{e^{4x} - e^{-4x}}{4} + \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{4} \\
&= \frac{\operatorname{sh} 4x}{2} + \frac{\operatorname{sh} 2x}{2}
\end{aligned} \tag{1.10}$$

- $$\operatorname{sh}^2 x \cdot \operatorname{ch} x = \left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{e^{2x} - 2e^{x} \cdot e^{-x} + e^{-2x}}{4}\right) \cdot \left(\frac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right) \\
&= \frac{e^{3x} + e^{x} - 2e^{x} - 2e^{-x} + e^{-x} + e^{-3x}}{8} \\
&= \frac{e^{3x} + e^{-3x}}{8} - \frac{e^{x} + e^{-x}}{8} \\
&= \frac{\operatorname{ch} 3x}{4} - \frac{\operatorname{ch} x}{4}
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Glava 2

Zadaci

Nejednakosti koje ću dokazati u svom radu su sledeće:

1. $\dfrac{\operatorname{sh} x}{x} < \dfrac{3\operatorname{ch} x + 2}{5}, \quad x \in (0,1).$
2. $\left(\operatorname{ch}\dfrac{x}{4}\right)^5 < \dfrac{\operatorname{sh} x}{x}, \quad x \in (0,1).$
3. $\dfrac{x}{\operatorname{sh} x} < \left(\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}\right)^{\frac{1}{4}}, \quad x \in (0,1).$
4. $\dfrac{\operatorname{sh} x}{x} > \dfrac{1}{\operatorname{ch}\frac{x}{3}}, \quad x \in (0,1).$
5. $\left(\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}\right)^{\frac{1}{2}} < \dfrac{x}{\operatorname{sh} x}, \quad x \in (0,1).$
6. $\left(\dfrac{\operatorname{ch} x + 1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} < \dfrac{\operatorname{sh} x}{x} < \dfrac{\operatorname{ch} x + 1}{2}, \quad x > 0.$
7. $\dfrac{3\operatorname{sh} x}{2 + \operatorname{ch} x} < x < \dfrac{\left(3 + \frac{1}{10}x^2\right)\operatorname{sh} x}{2 + \operatorname{ch} x + \frac{1}{10}x^2}, \quad x > 0.$
8. $1 < \operatorname{ch} x < \left(\dfrac{\operatorname{sh} x}{x}\right)^3, \quad x > 0.$
9. $\left(\dfrac{x}{\operatorname{sh} x}\right)^2 + \dfrac{x}{\tanh x} > 2, \quad x > 0.$
10. $\left(\dfrac{\operatorname{sh} x}{x}\right)^2 + \dfrac{\tanh x}{x} > 2 + \dfrac{8}{45}x^3 \tanh x, \quad x > 0.$
11. $(1-p)\dfrac{\operatorname{sh} x}{x} + p\dfrac{\tanh x}{x} > 1 > (1-q)\dfrac{\operatorname{sh} x}{x} + q\dfrac{\tanh x}{x},$

$$x > 0,\ p \le \frac{1}{3},\ q \ge 1.$$

12. $2\operatorname{sh} x + \tanh x > 3x, \quad x > 0.$
13. $\dfrac{\operatorname{sh} x + x}{\operatorname{sh} x - x} > \dfrac{12}{x^2}, \quad x > 0.$
14. $\operatorname{ch}^{\frac{4}{3}}\left(\dfrac{x}{2}\right) < \dfrac{\operatorname{sh} x}{x} < \operatorname{ch}^3 x, \quad x > 0.$

2.1 Jednostavni zadaci

Najpre ću dokazati najjednostavnije nejednakosti, kao što su: 1., 4., 6.(II deo), 7., 8.(I deo), 9., 11.(II deo), 13., 14.(II deo).

$\boxed{1.}$ Dokazati nejednakost: $\dfrac{\operatorname{sh} x}{x} < \dfrac{3\operatorname{ch} x + 2}{5}, \quad x \in (0,1)$ (videti [5], [6]).

Najpre ćemo obe strane nejednakosti pomnožiti sa $5x$, pri čemu je $x \in (0,1)$:

$$\frac{\operatorname{sh} x}{x} < \frac{3\operatorname{ch} x + 2}{5} \quad / \cdot 5x,$$

$$5\operatorname{sh} x < 3x\operatorname{ch} x + 2x,$$
$$3x\operatorname{ch} x + 2x - 5\operatorname{sh} x > 0.$$

Sada ćemo funkcije $\operatorname{sh} x$ i $\operatorname{ch} x$ razviti u stepeni red i na taj način nastaviti dokazivanje ove nejednakosti:

$$3x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!} + 2x - 5\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} > 0,$$
$$3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n)!} + 2x - 5\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} > 0.$$

Pre nego što sume spojimo u jednu sumu, prvo ćemo iz svake izdvojiti prvi član i brojače promeniti da kreću od $n = 1$:

$$\cancel{3x} + 3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n)!} + \cancel{2x} - \cancel{5x} - 5\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} > 0,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}(3\cdot(2n+1)-5) > 0,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{>0}(6n-2) > 0.$$

Kako je $n \geq 1$, imamo da je $6n-2 \geq 6\cdot 1 - 2 = 4 > 0$.
Pošto su oba faktora sume pozitivni brojevi, onda je i njihov proizvod pozitivan broj. Time je nejednakost dokazana.

$\boxed{4.}$ Dokazati nejednakost: $\dfrac{\operatorname{sh} x}{x} > \dfrac{1}{\operatorname{ch}\frac{x}{3}}$, $\quad x \in (0,1)$ (videti [1]).

Najpre ćemo obe strane nejednakosti pomnožiti sa $x\operatorname{ch}\dfrac{x}{3}$, pri čemu je $x \in (0,1)$:

$$\frac{\operatorname{sh} x}{x} > \frac{1}{\operatorname{ch}\frac{x}{3}} \ / \cdot x\operatorname{ch}\frac{x}{3},$$
$$\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch}\frac{x}{3} > x,$$
$$\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch}\frac{x}{3} - x > 0.$$

Sada ćemo sa $f(x)$ označiti $\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch}\dfrac{x}{3} - x$, tj. :
$$f(x) = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch}\frac{x}{3} - x, \quad x \in (0,1).$$

Definišemo funkciju $\varphi(x)$ na sledeći način:
$$\varphi(x) = f(3x) = \operatorname{sh} 3x \operatorname{ch} x - 3x, \quad x \in \left(0, \frac{1}{3}\right).$$

Koristeći formulu (1.10) dobijamo da je:
$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sh} 4x + \frac{1}{2}\operatorname{sh} 2x - 3x.$$

Dokažimo sada da je $f(x) > 0$ za $x \in (0,1)$, što je ekvivalentno sa $\varphi(x) > 0$

za $x \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$. Najpre ćemo funkciju $\operatorname{sh} x$ razviti u njen stepeni red i u sledećem koraku ćemo iz obe sume izvući prvi član i time brojače sume pomeriti da idu od $n = 1$:

$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4x)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} - 3x > 0,$$
$$\frac{4x}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4x)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{2x}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} - 3x > 0,$$
$$\cancel{3}x + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4x)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} - \cancel{3}x > 0,$$
$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{>0}(2^{2n+1}+1) > 0.$$

S obzirom da je i izraz pod zagradom pozitivan, dokaz ove nejednakosti je završen.

$\boxed{6.}$ Dokazati nejednakost: $\left(\frac{\operatorname{ch} x + 1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} < \frac{\operatorname{sh} x}{x} < \frac{\operatorname{ch} x + 1}{2}, \quad x > 0$ (videti [9]).

II:

$$\frac{\operatorname{sh} x}{x} < \frac{\operatorname{ch} x + 1}{2}$$

Najpre ćemo obe strane nejednakosti pomnožiti sa $2x$, pri čemu je $x > 0$:

$$\frac{\operatorname{sh} x}{x} < \frac{\operatorname{ch} x + 1}{2} \quad / \cdot 2x,$$
$$2\operatorname{sh} x < x\operatorname{ch} x + x,$$
$$x\operatorname{ch} x + x - 2\operatorname{sh} x > 0.$$

Sada ćemo funkcije $\operatorname{sh} x$ i $\operatorname{ch} x$ razviti u stepeni red i na taj način nastaviti dokazivanje ove nejednakosti:

$$x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}+x-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}>0,$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n)!}+x-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}>0.$$

Iz obe sume ćemo izdvojiti prvi član i brojače sume pomeriti da kreću od $n=1$:

$$\cancel{x}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n)!}+\cancel{x}-\cancel{2}x-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}>0,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n)!}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}>0,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}(2n+1-2)>0,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{>0}(2n-1)>0.$$

Kako je $n\geq 1$, imamo da je: $2n-1\geq 2-1=1>0$.
Time je nejednakost dokazana.

$\boxed{7.}$ Dokazati nejednakost: $\dfrac{3\,\mathrm{sh}\,x}{2+\mathrm{ch}\,x}<x<\dfrac{\left(3+\frac{1}{10}x^2\right)\mathrm{sh}\,x}{2+\mathrm{ch}\,x+\frac{1}{10}x^2},\quad x>0$ (videti [3]).

I:

$$\frac{3\,\mathrm{sh}\,x}{2+\mathrm{ch}\,x}<x$$

Najpre ćemo obe strane nejednakosti pomnožiti sa $2+\mathrm{ch}\,x$, pri čemu je $x>0$:

$$\frac{3\,\mathrm{sh}\,x}{2+\mathrm{ch}\,x}<x\ /\cdot(2+\mathrm{ch}\,x),$$
$$3\,\mathrm{sh}\,x<2x+x\,\mathrm{ch}\,x,$$

$2x + x \operatorname{ch} x - 3 \operatorname{sh} x > 0.$

Sada ćemo funkcije $\operatorname{sh} x$ i $\operatorname{ch} x$ razviti u stepeni red i u sledećem koraku izvući ćemo prvi član iz obe sume i brojač sume pomeriti da kreće od $n = 1$:

$$
\begin{aligned}
&2x + x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} - 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} > 0, \\
&\cancel{2}x + \cancel{x} - \cancel{3}x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n)!} - 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} > 0, \\
&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n)!} - 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} > 0, \\
&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}(2n+1-3) > 0, \\
&\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{>0} \underbrace{(2n-2)}_{\text{proveravamo}} > 0.
\end{aligned}
$$

$n = 1 : \quad 2 \cdot 1 - 2 = 2 - 2 = 0$
$n = 2 : \quad 2 \cdot 2 - 2 = 4 - 2 = 2 > 0$

Pošto je član sume za $n = 1$ jednak nuli, njega zanemarujemo, a brojač sume pomeramo da kreće od $n = 2$:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{>0}(2n-2) > 0.$$

Kako je $n \geq 2$, imamo da je $2n - 2 \geq 4 - 2 = 2 > 0$.

II:

$$x < \frac{\left(3 + \frac{1}{10}x^2\right) \operatorname{sh} x}{2 + \operatorname{ch} x + \frac{1}{10}x^2}$$

Najpre ćemo obe strane nejednakosti pomnožiti sa $2 + \operatorname{ch} x + \dfrac{1}{10}x^2$, pri čemu je $x > 0$:

$$
\begin{aligned}
&x < \frac{\left(3+\frac{1}{10}x^2\right)\operatorname{sh} x}{2+\operatorname{ch} x+\frac{1}{10}x^2} \ \Big/ \cdot \left(2+\operatorname{ch} x+\frac{1}{10}x^2\right),\\
&2x + x\operatorname{ch} x + \frac{x^3}{10} < 3\operatorname{sh} x + \frac{x^2}{10}\operatorname{sh} x,\\
&3\operatorname{sh} x + \frac{x^2}{10}\operatorname{sh} x - x\operatorname{ch} x - \frac{x^3}{10} - 2x > 0.
\end{aligned}
$$

Sada ćemo funkcije $\operatorname{sh} x$ i $\operatorname{ch} x$ razviti u stepeni red i posle uvodimo odgovarajuće smene za svaku sumu:

$$
\begin{aligned}
&3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{x^2}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!} - \frac{x^3}{10} - 2x > 0,\\
&\underbrace{3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{\text{smena: } n=m} + \frac{1}{10}\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+3}}{(2n+1)!}}_{\substack{\text{smena: } n+1=m,\\ 2n+2=2m,\\ 2n+3=2m+1,\\ 2n+1=2m-1}} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n)!}}_{\text{smena: } n=m} - \frac{x^3}{10} - 2x > 0,\\
&3\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + \frac{1}{10}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{2m+1}}{(2m-1)!} - \sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{2m+1}}{(2m)!} - \frac{x^3}{10} - 2x > 0.
\end{aligned}
$$

Da bismo ove sume spojili u jednu, izdvajamo prva dva člana iz prve i treće sume i prvi član iz druge sume:

$$
\begin{aligned}
&\cancel{3}x - \cancel{x} + \cancel{3}\frac{x^3}{6} + \cancel{\frac{x^3}{10}} - \cancel{\frac{x^3}{2}} - \cancel{\frac{x^3}{10}} - \cancel{2}x + 3\sum_{m=2}^{\infty}\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} +\\
&+\frac{1}{10}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{x^{2m+1}}{(2m-1)!} - \sum_{m=2}^{\infty}\frac{x^{2m+1}}{(2m)!} > 0,\\
&\sum_{m=2}^{\infty}\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}\left(3+\frac{2m}{10}(2m+1)-(2m+1)\right) > 0,\\
&\sum_{m=2}^{\infty}\underbrace{\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}}_{>0}\underbrace{\left(3+(2m+1)\left(\frac{m}{5}-1\right)\right)}_{\text{proveravamo}} > 0.
\end{aligned}
$$

$$
m=2: \quad 3+5\cdot\left(\frac{2}{5}-\frac{5}{5}\right) = 3+5\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) = 3-3 = 0
$$

$$m=3: \quad 3+7\cdot\left(\frac{3}{5}-\frac{5}{5}\right)=3+7\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)=\frac{15}{5}-\frac{14}{5}=\frac{1}{5}>0$$

Pošto je član sume za $m=2$ jednak nuli, njega zanemarujemo i brojač sume pomeramo da kreće od $m=3:$

$$\sum_{m=3}^{\infty}\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}\Big(3+(2m+1)(\frac{m}{5}-1)\Big)>0,$$
$$\sum_{m=3}^{\infty}\underbrace{\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}}_{>0}\Big(\frac{2}{5}m^2-\frac{9}{5}m+2\Big)>0.$$

Nule kvadratne funkcije pod zagradom nalazimo pomoću kvadratne formule:

$$m_{1,2}=\frac{\frac{9}{5}\pm\sqrt{\frac{81}{25}-4\cdot\frac{4}{5}}}{2\cdot\frac{2}{5}}=\frac{\frac{9}{5}\pm\sqrt{\frac{1}{25}}}{\frac{4}{5}}=\frac{\frac{9}{5}\pm\frac{1}{5}}{\frac{4}{5}}.$$

Dakle, nule su 2 i $\frac{5}{2}$. Između nula je funkcija negativna, a van je pozitivna. Pošto gledamo za $m\geq 3$, tamo je funkcija pozitivna.
Time je nejednakost dokazana.

$\boxed{8.}$ Dokazati nejednakost: $1<\operatorname{ch}x<\left(\frac{\operatorname{sh}x}{x}\right)^3$, $x>0$ (videti [2]).

I:

Kako je funkcija $\operatorname{ch}x$ veća od 1, za svako $x>0$, onda prvi deo nejednakosti $1<\operatorname{ch}x$ sledi.

$\boxed{9.}$ Dokazati nejednakost: $\left(\frac{x}{\operatorname{sh}x}\right)^2+\frac{x}{\tanh x}>2$, $x>0$ (videti [10]).

Najpre obe strane nejednakosti pomnožimo sa $\operatorname{sh}^2 x$, pri čemu je $x>0:$

$$\frac{x^2}{\operatorname{sh}^2 x} + \frac{x \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} > 2 \ / \cdot \operatorname{sh}^2 x,$$
$$x^2 + x \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} x > 2 \operatorname{sh}^2 x,$$
$$x^2 + x \operatorname{ch} x \operatorname{sh} x - 2 \operatorname{sh}^2 x > 0.$$

Koristeći formule (1.1) i (1.9) dobijamo da je:

$$x^2 + x \cdot \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2x - 2 \cdot \frac{1}{2} \operatorname{ch} 2x + 2 \cdot \frac{1}{2} > 0,$$
$$x^2 + \frac{x}{2} \operatorname{sh} 2x - \operatorname{ch} 2x + 1 > 0.$$

Sada funkcije $\operatorname{sh} x$ i $\operatorname{ch} x$ razvijamo u stepeni red i na taj način nastavljamo dokaz ove nejednakosti:

$$x^2 + \frac{x}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + 1 > 0,$$

$$x^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1} \cdot x^{2n+2}}{(2n+1)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + 1 > 0.$$

Da bismo uveli odgovarajuće smene za obe sume i posle mogli da ih spojimo u jednu sumu, najpre ćemo izdvojiti prvi član iz prve sume i prva dva člana iz druge sume:

$$\cancel{x^2} + \frac{\cancel{2x^2}}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1} \cdot x^{2n+2}}{(2n+1)!} - \cancel{1} - \cancel{2}x^2 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + \cancel{1} > 0,$$

$$\underbrace{\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1} \cdot x^{2n+2}}{(2n+1)!}}_{\substack{\text{smena: } n+1=m, \\ 2n+2=2m, \\ 2n+1=2m-1}} - \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}}_{\text{smena: } n=m} > 0,$$

$$\frac{1}{2} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{2^{2m-1} \cdot x^{2m}}{(2m-1)!} - \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(2x)^{2m}}{(2m)!} > 0,$$

$$\sum_{m=2}^{\infty} \frac{2^{2m-2} \cdot x^{2m}}{(2m-1)!} - \sum_{m=2}^{\infty} \frac{2^{2m} \cdot x^{2m}}{(2m)!} > 0,$$

$$\sum_{m=2}^{\infty} \frac{2^{2m} \cdot x^{2m}}{(2m)!} \Big(\frac{2m}{2^2} - 1 \Big) > 0,$$

$$\sum_{m=2}^{\infty} \underbrace{\frac{2^{2m} \cdot x^{2m}}{(2m)!}}_{>0} \underbrace{\Big(\frac{m}{2} - 1 \Big)}_{\text{proveravamo}} > 0.$$

$$m = 2 : \quad \frac{2}{2} - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$m = 3 : \quad \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} > 0$$

Pošto je član sume za $m = 2$ jednak nuli, njega zanemarujemo i brojač sume pomeramo da kreće od $m = 3$:

$$\sum_{m=3}^{\infty} \underbrace{\frac{(2x)^{2m}}{(2m)!}}_{>0} \Big(\frac{m}{2} - 1 \Big) > 0.$$

Kako je $m \geq 3$, dobijamo da je: $\dfrac{m}{2} - 1 \geq \dfrac{3}{2} - \dfrac{2}{2} = \dfrac{1}{2} > 0.$
Time je nejednakost dokazana.

$\boxed{11.}$ Dokazati nejednakost:

$$(1-p)\frac{\operatorname{sh} x}{x} + p\frac{\tanh x}{x} > 1 > (1-q)\frac{\operatorname{sh} x}{x} + q\frac{\tanh x}{x},$$

$p \leq \frac{1}{3},\ q \geq 1,\ x > 0$ (videti [12]).

II:
$$1 > (1-q)\frac{\operatorname{sh} x}{x} + q\frac{\tanh x}{x}$$

Najpre obe strane nejednakosti pomnožimo sa $x \cdot \operatorname{ch} x, \quad x > 0$:

$$1 > (1-q)\frac{\operatorname{sh} x}{x} + q\frac{\operatorname{sh} x}{x \operatorname{ch} x} \ / \cdot x \operatorname{ch} x,$$
$$x \operatorname{ch} x > (1-q) \operatorname{ch} x \operatorname{sh} x + q \operatorname{sh} x,$$
$$x \operatorname{ch} x - (1-q) \operatorname{ch} x \operatorname{sh} x - q \operatorname{sh} x > 0.$$

Koristeći formulu (1.9) dobijamo:
$$x \operatorname{ch} x - (1-q)\tfrac{1}{2} \operatorname{sh} 2x - q \operatorname{sh} x > 0.$$

Sada ćemo funkcije $\operatorname{sh} x$ i $\operatorname{ch} x$ razviti u stepeni red, a zatim sve tri sume spojiti u jednu:

$$x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!} - \frac{1-q}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} - q\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} > 0,$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n)!} - \frac{1-q}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} - q\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} > 0,$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\left(2n+1-\frac{1-q}{2}\cdot 2^{2n+1}-q\right) > 0,$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{>0}\underbrace{(2n+1+(q-1)4^{n}-q)}_{\text{proveravamo}} > 0.$$

$n=0,\ q=1: \quad 1-1=0$
$n=0,\ q>1: \quad 1+q-1-q=0$

$n=1,\ q=1: \quad 2+1-1=2>0$
$n=1,\ q>1: \quad 2+1+(q-1)4-q=3+4q-q-4=3q-1>0$

$n=2,\ q=1: \quad 4+1-1=4>0$
$n=2,\ q>1: \quad 4+1+(q-1)16-q=5+16q-16-q=15q-11>0$

Pošto je član sume za $n=0,\ q\geq 1$, jednak nuli, možemo da zanemarimo i dokaz nejednakosti nastavljamo za $n\geq 1,\ q\geq 1:$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{>0} (2n+1+4^n(q-1)-q) > 0.$$

Kako je $n \geq 1,\ q \geq 1$ imamo da je:
$2n+1+4^n(q-1)-q \geq 2\cdot 1+1+4(q-1)-q$
$= 3+4q-4-q = 3q-1 \geq 3-1 = 2 > 0$

Pošto su oba člana sume pozitivni brojevi, onda je i njihov proizvod pozitivan broj. Time je ova nejednakost dokazana.

$\boxed{13.}$ Dokazati nejednakost: $\dfrac{\operatorname{sh} x + x}{\operatorname{sh} x - x} > \dfrac{12}{x^2},\quad x > 0$ (videti [8]).

Najpre obe strane nejednakosti pomnožimo sa $x^2(\operatorname{sh} x - x)$, pri čemu je $x > 0,\ \operatorname{sh} x > x$ za $x > 0$:

$$\frac{\operatorname{sh} x + x}{\operatorname{sh} x - x} > \frac{12}{x^2}\ /\cdot x^2(\operatorname{sh} x - x),$$
$$x^2 \operatorname{sh} x + x^3 > 12 \operatorname{sh} x - 12x,$$
$$x^2 \operatorname{sh} x + x^3 - 12 \operatorname{sh} x + 12x > 0.$$

Sada ćemo funkciju $\operatorname{sh} x$ razviti u njen stepeni red:

$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^3 - 12 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + 12x > 0.$$

Da bismo uveli odgovarajuće smene za obe sume i posle mogli da ih spojimo u jednu sumu, najpre ćemo izdvojiti prvi član iz prve sume i prva dva člana iz druge sume:

$$\cancel{x^3} - \cancel{12x} - \cancel{12}\frac{x^3}{6} + \cancel{x^3} + \cancel{12x} + x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - 12 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} > 0,$$

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+3}}{(2n+1)!}}_{\substack{\text{smena: } n+1=m,\\ 2n+2=2m,\\ 2n+3=2m+1,\\ 2n+1=2m-1}} - 12 \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{\text{smena: } n=m} > 0,$$

$$\sum_{m=2}^{\infty}\frac{x^{2m+1}}{(2m-1)!}-12\sum_{m=2}^{\infty}\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}>0,$$
$$\sum_{m=2}^{\infty}\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}((2m+1)2m-12)>0,$$
$$\sum_{m=2}^{\infty}\underbrace{\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}}_{>0}(4m^2+2m-12)>0.$$

Kvadratna funkcija pod zagradom može se zapisati kao kvadrat binoma:

$$4m^2+2m-12=\left(2m+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-12=\left(2m+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{49}{4}.$$

Dalje, dobijeni izraz možemo faktorisati kao razliku kvadrata:

$$\left(2m+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{49}{4}=\left(2m+\frac{1}{2}-\frac{7}{2}\right)\cdot\left(2m+\frac{1}{2}+\frac{7}{2}\right)=(2m-3)\cdot(2m+4).$$

Dakle, nule su -2 i $\frac{3}{2}$. Između nula je funkcija negativna, a van je pozitivna. Pošto gledamo za $m\geq 2$, tamo je funkcija pozitivna.
Time je nejednakost dokazana.

$\boxed{14.}$ Dokazati nejednakost: $\operatorname{ch} x^{\frac{4}{3}}\left(\frac{x}{2}\right)<\frac{\operatorname{sh} x}{x}<\operatorname{ch}^3 x,\ \ x>0$ (videti [11]).

II:

$$\frac{\operatorname{sh} x}{x}<\operatorname{ch}^3 x$$

Najpre ćemo obe strane nejednakosti pomnožiti sa $x>0$:

$$\frac{\operatorname{sh} x}{x}<\operatorname{ch}^3 x\ /\cdot x,$$
$$\operatorname{sh} x<x\operatorname{ch}^3 x,$$
$$x\operatorname{ch}^3 x-\operatorname{sh} x>0.$$

Koristeći formulu (1.6) dobijamo da je:

$$\frac{x}{4}\operatorname{ch}3x+\frac{3}{4}x\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x>0.$$

Sada ćemo funkcije $\operatorname{sh}x$ i $\operatorname{ch}x$ razviti u stepeni red:

$$\frac{x}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3x)^{2n}}{(2n)!}+\frac{3}{4}x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}>0,$$
$$\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{2n}\cdot x^{2n+1}}{(2n)!}+\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n)!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}>0.$$

Sve tri sume možemo da spojimo u jednu, jer im brojač kreće od istog broja ($n=0$):

$$\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{>0}\underbrace{\Big(\frac{3^{2n}}{4}(2n+1)+\frac{3}{4}(2n+1)-1\Big)}_{\text{proveravamo}}>0.$$

$$n=0:\quad \frac{1}{4}\cdot 1+\frac{3}{4}\cdot 1-1=\frac{4}{4}-1=0$$
$$n=1:\quad \frac{3^2}{4}\cdot 3+\frac{3}{4}\cdot 3-1=\frac{27}{4}+\frac{9}{4}-1=9-1=8>0$$

Pošto je član sume za $n=0$ jednak nuli, njega zanemarujemo i brojač sume pomeramo da kreće od $n=1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{>0}\Big(\frac{3^{2n}}{4}(2n+1)+\frac{3}{4}(2n+1)-1\Big)>0.$$

Kako je $n\geq 1$, dobijamo da je:

$$\frac{3^{2n}}{4}(2n+1)+\frac{3}{4}(2n+1)-1\geq\frac{9}{4}\cdot 3+\frac{3}{4}\cdot 3-1=\frac{32}{4}=8>0.$$

Pošto su oba člana sume pozitivni brojevi, sledi da je i njihov proizvod pozitivan broj. Time je nejednakost dokazana.

2.2 Složeni zadaci

Sada su na redu složenije nejednakosti, kao što su: 3., 6.(I deo), 8.(II deo), 10., 11.(I deo), 12., 14.(I deo).

$\boxed{3.}$ Dokazati nejednakost: $\dfrac{x}{\operatorname{sh} x} < \left(\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}\right)^{\frac{1}{4}}, \quad x \in (0,1)$ (videti [4]).

Najpre obe strane nejednakosti stepenujemo na četvrti:

$$\frac{x}{\operatorname{sh} x} < \left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right)^{\frac{1}{4}} \ /^4,$$
$$\frac{x^4}{\operatorname{sh}^4 x} < \frac{1}{\operatorname{ch} x}.$$

Sada obe strane nejednakosti pomnožimo sa $\operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh}^4 x$, pri čemu je $x \in (0,1)$:

$$\frac{x^4}{\operatorname{sh}^4 x} < \frac{1}{\operatorname{ch} x} \ / \cdot \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh}^4 x,$$
$$x^4 \operatorname{ch} x < \operatorname{sh}^4 x,$$
$$\operatorname{sh}^4 x - x^4 \operatorname{ch} x > 0.$$

Korišćenjem formule (1.4) dobijamo:
$$\frac{3}{8} + \frac{1}{8}\operatorname{ch} 4x - \frac{1}{2}\operatorname{ch} 2x - x^4 \operatorname{ch} x > 0.$$

Sada ćemo funkciju $\operatorname{ch} x$ razviti u stepeni red, a zatim uvesti odgovarajuću smenu za svaku sumu:

$$\frac{3}{8} + \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4x)^{2n}}{(2n)!} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} - x^4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!} > 0,$$
$$\frac{3}{8} + \underbrace{\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4x)^{2n}}{(2n)!}}_{\text{smena: } n=m} - \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}}_{\text{smena: } n=m} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+4}}{(2n)!}}_{\substack{\text{smena: } n+2=m,\\ 2n+4=2m,\\ 2n=2m-4}} > 0,$$

$$\frac{3}{8}+\frac{1}{8}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(4x)^{2m}}{(2m)!}-\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2x)^{2m}}{(2m)!}-\sum_{m=2}^{\infty}\frac{x^{2m}}{(2m-4)!}>0.$$

Da bismo sve tri sume mogli da spojimo u jednu, najpre ćemo izvući prva dva člana iz prve dve sume:

$$\frac{3}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cdot\frac{16x^2}{2}+\frac{1}{8}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{(4x)^{2m}}{(2m)!}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{4x^2}{2}+$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{(2x)^{2m}}{(2m)!}-\sum_{m=2}^{\infty}\frac{x^{2m}}{(2m-4)!}>0,$$

$$\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{x^2}+\frac{1}{8}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{(4x)^{2m}}{(2m)!}-\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{x^2}-\frac{1}{2}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{(2x)^{2m}}{(2m)!}-\sum_{m=2}^{\infty}\frac{x^{2m}}{(2m-4)!}>0,$$

$$\sum_{m=2}^{\infty}\frac{x^{2m}}{(2m)!}\Big(\frac{1}{8}\cdot 4^{2m}-\frac{1}{2}\cdot 2^{2m}-2m(2m-1)(2m-2)(2m-3)\Big)>0,$$

$$\sum_{m=2}^{\infty}\frac{x^{2m}}{(2m)!}\Big(\frac{16^m}{8}-\frac{4^m}{2}-2m(2m-1)(2m-2)(2m-3)\Big)>0.$$

$$\sum_{m=2}^{\infty}\underbrace{\frac{x^{2m}}{(2m)!}}_{>0}\underbrace{\left(2^{4m-3}-2^{2m-1}-2m(2m-1)(2m-2)(2m-3)\right)}_{\text{proveravamo}}>0.$$

Najpre ćemo dokazati da je $2^{4m-3}>2^{2m}$, za $m\geq 3$. To se svodi na dokaz nejednakosti $2m>3$, što jeste tačno za $m\geq 3$.
Sada se nejednakost svodi na to da se dokaže:

$$2^{4m-3}-2^{2m}>2m(2m-1)(2m-2)(2m-3),\quad m\geq 3.$$

Dokazaćemo jači uslov: $2^{4m-3}-2^{2m}>(2m)^4$.
Ovo nije ispunjeno za $m=3$, ali proverićemo direktno da je za $m=3$ koeficijent sume pozitivan:

$$2^9-2^5-6\cdot 5\cdot 4\cdot 3=120>0.$$

Za $m\geq 4$ važi nejednakost $2^{4m-3}-2^{2m}>16m^4$. Dokazaćemo indukcijom.

B.I. $m=4$, $2^{13}-2^8>16\cdot 4^4$

$$7936>4096$$

I.H. pretpostavimo da važi za $m = k,\ k \in \mathbb{N},\ k \geq 4:$

$$2^{4k-3} - 2^{2k} > 16 \cdot k^4 \ / \ \cdot 2^4$$

$$2^{4k+1} - 2^{2k+4} > 16^2 \cdot k^4$$

I.K. dokažimo da važi za $m = k+1,\ k \in \mathbb{N},\ k \geq 4:$

$$\begin{aligned} & 2^{4(k+1)-3} - 2^{2(k+1)} = \\ & = 2^{4k+1} - 2^{2k+2} \\ & > 2^{4k+1} - 2^{2k+4} \quad (2^{2k+2} < 2^{2k+4} \Rightarrow -2^{2k+2} > -2^{2k+4}) \\ & > 16^2 \cdot k^4 \\ & > 16 \cdot (k+1)^4 \end{aligned}$$

$\boxed{6.}$ Dokazati nejednakost: $\left(\frac{\operatorname{ch} x + 1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} < \frac{\operatorname{sh} x}{x} < \frac{\operatorname{ch} x + 1}{2}, \quad x > 0$ (videti [9]).

I:

$$\left(\frac{\operatorname{ch} x + 1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} < \frac{\operatorname{sh} x}{x}$$

Najpre obe strane nejednakosti stepenujemo na treći:

$$\left(\frac{\operatorname{ch} x + 1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} < \frac{\operatorname{sh} x}{x} \ /^3,$$

$$\frac{(\operatorname{ch} x + 1)^2}{4} < \frac{\operatorname{sh}^3 x}{x^3}.$$

Sada obe strane nejednakosti pomnožimo sa $4x^3$, pri čemu je $x > 0:$

$$\frac{\operatorname{ch}^2 x + 2\operatorname{ch} x + 1}{4} < \frac{\operatorname{sh}^3 x}{x^3} \ / \cdot 4x^3,$$

$$x^3 \operatorname{ch}^2 x + 2x^3 \operatorname{ch} x + x^3 < 4 \operatorname{sh}^3 x,$$
$$4 \operatorname{sh}^3 x - x^3 \operatorname{ch}^2 x - 2x^3 \operatorname{ch} x - x^3 > 0.$$

Korišćenjem formula (1.2) i (1.5) dobijamo:

$$4\Big(\frac{1}{4}\operatorname{sh}3x-\frac{3}{4}\operatorname{sh}x\Big)-x^3\Big(\frac{1}{2}\operatorname{ch}2x+\frac{1}{2}\Big)-2x^3\operatorname{ch}x-x^3>0,$$
$$\operatorname{sh}3x-3\operatorname{sh}x-\frac{x^3}{2}\operatorname{ch}2x-\frac{x^3}{2}-2x^3\operatorname{ch}x-x^3>0.$$

Sada ćemo funkcije $\operatorname{sh}x$ i $\operatorname{ch}x$ razviti u stepeni red i u sledećem koraku uvodimo odgovarajuću smenu za svaku sumu:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!}-3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}-\frac{x^3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}-2x^3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}-\frac{3}{2}x^3>0,$$

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{\text{smena: } n=m}-3\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{\text{smena: } n=m}-\frac{1}{2}\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}\cdot x^{2n+3}}{(2n)!}}_{\substack{\text{smena: } n+1=m,\\ 2n+2=2m,\\ 2n+3=2m+1}}+$$
$$-2\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+3}}{(2n)!}}_{\substack{\text{smena: } n+1=m,\\ 2n+2=2m,\\ 2n+3=2m+1}}-\frac{3}{2}x^3>0,$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(3x)^{3m+1}}{(2m+1)!}-3\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2^{2m-2}\cdot x^{2m+1}}{(2m-2)!}+$$
$$-2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{2m+1}}{(2m-2)!}-\frac{3}{2}x^3>0.$$

Da bismo sve sume spojili u jednu, izvući ćemo prvi član iz prve i druge sume i na taj način će brojači svih suma krenuti od $m=2$:

$$\cancel{3}x-\cancel{3}x+\tfrac{(3x)^3}{6}-3\tfrac{x^3}{6}-\tfrac{1}{2}x^3-2x^3-\tfrac{3}{2}x^3+\sum_{m=2}^{\infty}\frac{(3x)^{2m+1}}{(2m+1)!}+$$
$$-3\sum_{m=2}^{\infty}\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}-\frac{1}{8}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{2^{2m}\cdot x^{2m+1}}{(2m-2)!}-2\sum_{m=2}^{\infty}\frac{x^{2m+1}}{(2m-2)!}>0,$$

$$\cancel{\tfrac{9}{2}}x^3 - \cancel{\tfrac{1}{2}}x^3 - \cancel{\tfrac{1}{2}}x^3 - \cancel{\tfrac{4}{2}}x^3 - \cancel{\tfrac{3}{2}}x^3 + \sum_{m=2}^{\infty} \underbrace{\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}}_{>0} \cdot$$

$$\cdot \underbrace{\left(3^{2m+1} - 3 - \frac{1}{8} \cdot 2^{2m}(2m+1)2m(2m-1) - 2(2m+1)2m(2m-1)\right)}_{\text{proveravamo}} > 0.$$

$m = 2: \quad 3^5 - 3 - \frac{1}{8} \cdot 2^4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 243 - 3 - 120 - 120 = 240 - 240 = 0$

$m = 3: \quad 3^7 - 3 - \frac{1}{8} \cdot 2^6 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 - 2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 =$

$$= 2187 - 1680 - 420 - 3 = 2184 - 2100 = 84 > 0$$

Pošto je član sume za $m = 2$ jednak nuli, njega možemo zanemariti, a dokaz nejednakosti nastavljamo za $m \geq 3$:

$$\sum_{m=3}^{\infty} \underbrace{\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}}_{>0} \underbrace{\left(3^{2m+1} - 3 - \frac{1}{8} \cdot 2^{2m}(2m+1)2m(2m-1) + \right.}$$

$$\underbrace{\left. - 2(2m+1)2m(2m-1)\right)}_{\text{proveravamo}} > 0.$$

$3^{2m+1} - 3 - \frac{1}{8} \cdot 2^{2m}(2m+1)2m(2m-1) - 2(2m+1)2m(2m-1) > 0$

$3^{2m+1} - 3 - 2^{2m-3}(4m^2 - 1)2m - 2(4m^2 - 1)2m > 0$

$3^{2m+1} - 3 - 2^{2m-3}(8m^3 - 2m) - 2(8m^3 - 2m) > 0$

$3^{2m+1} - 3 - 8m^3 \cdot 2^{2m-3} + 2m \cdot 2^{2m-3} - 16m^3 + 4m > 0$

$3^{2m+1} - 8m^3(2^{2m-3} + 2) + 2m(2^{2m-3} + 2) - 3 > 0$

$3 \cdot 9^m - 16m^3(2^{2m-4} + 1) + \underbrace{4m(2^{2m-4} + 1) - 3}_{>0} > 0$

Podelićemo dokaz nejednakosti na dva dela.
Očigledno je: $4m \cdot (2^{2m-4} + 1) - 3 > 0$ za $m \geq 3$.
Dokazaćemo da je i $3 \cdot 9^m - 16m^3 \cdot (2^{2m-4} + 1) > 0$ za $m \geq 3$:

$3 \cdot 9^m - 16m^3(2^{2m-4} + 1) > 0$

$3 \cdot 9^m - m^3(4^m + 16) > 0$

$9^m > \dfrac{m^3(4^m + 16)}{3}.$

Da bismo dokazali $9^m > \dfrac{m^3(4^m + 16)}{3}$, dokazaćemo jači uslov.

Kako je $4^m > 16$ za $m \geq 3$, onda je dovoljno dokazati:

$9^m > \dfrac{m^3 \cdot 2 \cdot 4^m}{3}$, odnosno:

$9^m > m^3 \cdot 4^m$

$\left(\dfrac{9}{4}\right)^m > m^3.$

S obzirom da je $\dfrac{9}{4} > 2$, sledi da je:
$2^m > m^3.$
Ovo nije tačno za $m \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, ali ćemo direktno proveriti da je za te brojeve ispunjena nejednakost $9^m > \dfrac{m^3(4^m + 16)}{3}$:

$m = 3: \quad 9^3 > \dfrac{3^3(4^3 + 16)}{3}$

$729 > 720$

$m = 4: \quad 9^4 > \dfrac{4^3(4^4 + 16)}{3}$

$6561 > 5802.67$

$m = 5: \quad 9^5 > \dfrac{5^3(4^5 + 16)}{3}$

$59049 > 43333.33$

$m = 6: \quad 9^6 > \dfrac{6^3(4^6 + 16)}{3}$

$531441 > 296064$

$m = 7: \quad 9^7 > \dfrac{7^3(4^7 + 16)}{3}$

$4782969 > 1875066.67$

$m = 8: \quad 9^8 > \dfrac{8^3(4^8 + 16)}{3}$

$43046721 > 11187541.33$

$$m = 9: \quad 9^9 > \frac{9^3(4^9 + 16)}{3}$$

$$387420489 > 63704880$$

Za $m \geq 10$ nejednakost $2^m > m^3$ jeste tačna, a to ćemo pokazati indukcijom.

B.I. $m = 10: \quad 2^{10} > 10^3$

$$1024 > 1000$$

I.H. pretpostavimo da važi za $m = k,\ k \in \mathbb{N},\ k \geq 10:$

$$2^k > k^3$$

I.K. dokažimo da važi za $m = k + 1,\ k \in \mathbb{N},\ k \geq 10:$

$$2^{k+1} > (k+1)^3$$

$2 \cdot 2^k > (k+1)^3$
$2 \cdot 2^k - (k+1)^3 >^{I.H.} 2k^3 - (k+1)^3$
$= 2k^3 - k^3 - 3k^2 - 3k - 1$
$= k^3 - 3k^2 - 3k - 1$
$> k^3 - 4k^2, \quad (\text{jer je } 4k^2 > 3k^2 + 3k + 1 \text{ za } k \geq 10)$
$= k^2(k-4) > 0.$

$\boxed{8.}$ Dokazati nejednakost: $1 < \operatorname{ch} x < \left(\frac{\operatorname{sh} x}{x}\right)^3, \quad x > 0$ (videti [2]).

II:
$\operatorname{ch} x < \left(\frac{\operatorname{sh} x}{x}\right)^3$

Najpre obe strane nejednakosti pomnožimo sa x^3, pri čemu je $x > 0$:

$\operatorname{ch} x < \left(\frac{\operatorname{sh} x}{x}\right)^3 \ / \cdot x^3,$
$x^3 \operatorname{ch} x < \operatorname{sh}^3 x,$
$\operatorname{sh}^3 x - x^3 \operatorname{ch} x > 0.$

Koristeći formulu (1.2) dobijamo da je:
$\frac{1}{4}\operatorname{sh}3x-\frac{3}{4}\operatorname{sh}x-x^3\operatorname{ch}x>0.$

Sada ćemo funkcije $\operatorname{sh}x$ i $\operatorname{ch}x$ razviti u stepeni red:

$$\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!}-\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}-x^3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}>0,$$
$$\underbrace{\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{\text{smena: } n=m}-\underbrace{\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{\text{smena: } n=m}-\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+3}}{(2n)!}}_{\substack{\text{smena: } n+1=m,\\ 2n+2=2m,\\ 2n=2m-2,\\ 2n+3=2m+1}}>0,$$

$$\frac{1}{4}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(3x)^{2m+1}}{(2m+1)!}-\frac{3}{4}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{2m+1}}{(2m-2)!}>0.$$

Posle uvođenja odgovarajuće smene za svaku sumu, izdvajamo prvi član prve i druge sume, kako bismo mogli sve tri sume da spojimo u jednu:

$$\frac{\cancel{3x}}{4}-\frac{\cancel{3x}}{4}+\frac{1}{4}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(3x)^{2m+1}}{(2m+1)!}-\frac{3}{4}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{2m+1}}{(2m-2)!}>0,$$
$$\sum_{m=1}^{\infty}\underbrace{\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}}_{>0}\Big(\underbrace{\frac{1}{4}\cdot 3^{2m+1}-\frac{3}{4}-(2m+1)2m(2m-1)}_{\text{proveravamo}}\Big)>0.$$

Najpre ćemo dokazati da je $3^{2m+1}>3^{2m}+1$. To se svodi na dokaz nejednakosti $2\cdot 3^{2m}>1$, što jeste tačno za $m\geq 3$.
Tako dobijamo da treba da dokažemo $3^{2m}>4(2m+1)2m(2m-1)$, odnosno $9^m>4(8m^3-2m)$.
Dokazaćemo jače: $9^m>32m^3$.
To ne važi za $m=3$, ali proverićemo direktno da za $m=3$ koeficijent sume jeste pozitivan:

$$\frac{1}{4}\cdot 3^7-\frac{3}{4}-7\cdot 6\cdot 5=336>0.$$

Za $m\geq 4$ važi nejednakost $9^m>32m^3$. Dokazaćemo indukcijom.

B.I. $m = 4: \quad 9^4 > 32 \cdot 4^3$

$$6561 > 2048$$

I.H. pretpostavimo da važi za $m = k,\ k \in \mathbb{N},\ k \geq 4:$

$$9^k > 32 \cdot k^3$$

I.K. dokažimo da važi za $m = k + 1,\ k \in \mathbb{N},\ k \geq 4:$

$$9^{k+1} > 32 \cdot (k+1)^3$$
$$9 \cdot 9^k > 32 \cdot (k+1)^3$$
$$9 \cdot 32k^3 > 32 \cdot (k+1) \ / \ : 32k^3$$
$$9 > \left(1 + \frac{1}{k}\right)^3$$

S obzirom da je za $k \geq 4,\ 1 + \dfrac{1}{k} \leq 1 + \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{4},$ dobijamo da je dovoljno dokazati $9 > \left(\dfrac{5}{4}\right)^3,$ a to jeste tačno, jer je $9 > 1.95.$

$\boxed{10.}$ Dokazati nejednakost: $\left(\dfrac{\operatorname{sh} x}{x}\right)^2 + \dfrac{\tanh x}{x} > 2 + \dfrac{8}{45}x^3 \tanh x, \quad x > 0$ (videti [10]).

Najpre ćemo obe strane nejednakosti pomnožiti sa $x^2 \cdot \operatorname{ch} x, \quad x > 0:$

$$\frac{\operatorname{sh}^2 x}{x^2} + \frac{\operatorname{sh} x}{x \operatorname{ch} x} > 2 + \frac{8}{45}x^3 \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \ / \cdot x^2 \operatorname{ch} x,$$
$$\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch} x + x \operatorname{sh} x > 2x^2 \operatorname{ch} x + \frac{8}{45}x^5 \operatorname{sh} x,$$
$$\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch} x + x \operatorname{sh} x - 2x^2 \operatorname{ch} x - \frac{8}{45}x^5 \operatorname{sh} x > 0.$$

Koristeći formulu (1.11) dobijamo:

$$\frac{1}{4} \operatorname{ch} 3x - \frac{1}{4} \operatorname{ch} x + x \operatorname{sh} x - 2x^2 \operatorname{ch} x - \frac{8}{45}x^5 \operatorname{sh} x > 0.$$

Sada ćemo funkcije $\operatorname{sh} x$ i $\operatorname{ch} x$ razviti u stepeni red, a onda u sledećem koraku uvesti odgovarajuće smene za svaku sumu:

$$\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3x)^{2n}}{(2n)!}-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}+x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}-2x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}+$$
$$-\frac{8}{45}x^5\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}>0,$$

$$\underbrace{\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3x)^{2n}}{(2n)!}}_{\text{smena: } n=m}-\underbrace{\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}}_{\text{smena: } n=m}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{(2n+1)!}}_{\substack{\text{smena: } n+1=m,\\ 2n+2=2m,\\ 2n+1=2m-1}}-2\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{(2n)!}}_{\substack{\text{smena: } n+1=m,\\ 2n+2=2m,\\ 2n=2m-2}}+$$
$$-\frac{8}{45}\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+6}}{(2n+1)!}}_{\substack{\text{smena: } n+3=m,\\ 2n+6=2m,\\ 2n+1=2m-5}}>0,$$

$$\frac{1}{4}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(3x)^{2m}}{(2m)!}-\frac{1}{4}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{2m}}{(2m)!}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{2m}}{(2m-1)!}-2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{2m}}{(2m-2)!}+$$
$$-\frac{8}{45}\sum_{m=3}^{\infty}\frac{x^{2m}}{(2m-5)!}>0.$$

Da bismo sve sume spojili u jednu moraju brojači suma da kreću od istog broja, zato iz prve dve sume izvlačimo prva tri člana, a iz druge dve sume prva dva člana:

$$\cancel{\frac{1}{4}}+\cancel{\frac{9x^2}{8}}+\frac{81x^4}{96}-\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{x^2}{8}}-\frac{x^4}{96}+\cancel{x^2}+\frac{x^4}{6}-\cancel{2x^2}-x^4+$$
$$+\frac{1}{4}\sum_{m=3}^{\infty}\frac{(3x)^{2m}}{(2m)!}-\frac{1}{4}\sum_{m=3}^{\infty}\frac{x^{2m}}{(2m)!}+\sum_{m=3}^{\infty}\frac{x^{2m}}{(2m-1)!}-2\sum_{m=3}^{\infty}\frac{x^{2m}}{(2m-2)!}+$$
$$-\frac{8}{45}\sum_{m=3}^{\infty}\frac{x^{2m}}{(2m-5)!}>0,$$

$$\sum_{m=3}^{\infty}\underbrace{\frac{x^{2m}}{(2m)!}}_{>0}\underbrace{\Big(\frac{1}{4}\cdot 3^{2m}-\frac{1}{4}+2m-2\cdot 2m(2m-1)-\frac{8}{45}\cdot 2m(2m-1)\cdot}$$
$$\underbrace{\cdot(2m-2)(2m-3)(2m-4)\Big)}_{\text{proveravamo}}>0.$$

$$\begin{aligned}
m=3: \quad & \frac{1}{4}\cdot 3^6-\frac{1}{4}+6-2\cdot 6\cdot 5-\frac{8}{45}\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2=\\
&=\frac{1}{4}\cdot 729-\frac{1}{4}+6-60-\frac{8}{45}\cdot 720\\
&=\frac{729}{4}-\frac{1}{4}-54-128\\
&=\frac{728}{4}-\frac{728}{4}=0\\
m=4: \quad & \frac{1}{4}\cdot 3^8-\frac{1}{4}+8-2\cdot 8\cdot 7-\frac{8}{45}\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4=\\
&=\frac{1}{4}\cdot 6561-\frac{1}{4}+8-112-\frac{8}{45}\cdot 6720\\
&=\frac{6560}{4}-104-\frac{53760}{45}\\
&=1640-104-1194.67\\
&=341.33>0\\
m=5: \quad & \frac{1}{4}\cdot 3^{10}-\frac{1}{4}+10-2\cdot 10\cdot 9-\frac{8}{45}\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6=\\
&=\frac{1}{4}\cdot 59049-\frac{1}{4}+10-180-5376\\
&=14762-170-5376\\
&=9216>0
\end{aligned}$$

Pošto je član sume za $m=3$ jednak nuli, njega zanemarujemo, a dokaz nejednakosti nastavljamo za $m\geq 4$:

$$\sum_{m=4}^{\infty}\underbrace{\frac{x^{2m}}{(2m)!}}_{>\ 0}\Big(\frac{1}{4}\cdot 3^{2m}\underbrace{-\frac{1}{4}+2m}_{>\ 0}-2\cdot 2m(2m-1)-\frac{8}{45}\cdot 2m(2m-1)\cdot$$
$$\cdot(2m-2)(2m-3)(2m-4)\Big)>0.$$

Očigledno je $2m-\dfrac{1}{4}>0, \quad m\geq 4.$
Dokazaćemo sada da je:

$$\frac{1}{4}3^{2m}-4m(2m-1)-\frac{8}{45}2m(2m-1)(2m-2)(2m-3)(2m-4)>0.$$

Da bismo to dokazali koristićemo jači uslov.
Kako je $(2m)^5 > 2m(2m-1)(2m-2)(2m-3)(2m-4)$, imamo da je dovoljno da dokažemo:

$$\frac{1}{4}3^{2m} - 4m(2m-1) - \frac{8}{45}(2m)^5 > 0,$$
$$\frac{1}{4}3^{2m} - 4m(2m-1) - \frac{256}{45}m^5 > 0.$$

Pošto je $m^5 > 4m(2m-1)$ (lako se to pokaže za $m > 3$), dobijamo da je dovoljno da dokažemo:

$$\frac{1}{4}3^{2m} - m^5 - \frac{256}{45}m^5 > 0,$$
$$\frac{1}{4}3^{2m} - \frac{301}{45}m^5 > 0,$$
$$\frac{9^m}{4} > \frac{301}{45}m^5.$$

S obzirom da je $\frac{301}{45} \cdot 4 = 26.76$, dokazaćemo da je $9^m > 30 \cdot m^5$.

Ovo nije tačno za $m = 4$ i $m = 5$, jer dobijamo:

$$6561 > 30720 \quad (m = 4)$$
$$59049 > 93750 \quad (m = 5)$$

Za te vrednosti ćemo direktno proveriti da važi tražena nejednakost:

$$m = 4: \quad 9^4 > \frac{4^3 \cdot (4^4 + 16)}{3}$$
$$6561 > 5802.67$$
$$m = 5: \quad 9^5 > \frac{5^3 \cdot (4^5 + 16)}{3}$$
$$59049 > 43333.33$$

Za $m \geq 6$ nejednakost $9^m > 30 \cdot m^5$ jeste tačna, a dokazaćemo indukcijom:

B.I. $m = 6: \quad 9^6 > 30 \cdot 6^5$

$$531441 > 233280$$

I.H, pretpostavimo da važi za $m = k,\ k \in \mathbb{N},\ k \geq 6:$

$$9^k > 30 \cdot k^5$$

I.K. dokažimo da važi za $m = k + 1,\ k \in \mathbb{N},\ k \geq 6:$

$$9^{k+1} > 30(k+1)^5.$$

Po I.H. imamo da je $9 \cdot 9^k > 9 \cdot 30k^5$.

Treba pokazati da je $9 \cdot 30k^5 > 30 \cdot (k+1)^5$, odnosno kada obe strane nejednakosti podelimo sa $30k^5$, dobijamo $9 > \left(1 + \frac{1}{k}\right)^5$.

S obzirom da je $k \geq 6$, $\quad 1 + \frac{1}{k} \leq 1 + \frac{1}{6} = \frac{7}{6}$, dobijamo da je dovoljno dokazati $9 > \left(\frac{7}{6}\right)^5$, a to jeste tačno, jer je $9 > 2.16$.

$\boxed{11.}$ Dokazati nejednakost:

$$(1-p)\frac{\operatorname{sh} x}{x} + p\frac{\tanh x}{x} > 1 > (1-q)\frac{\operatorname{sh} x}{x} + q\frac{\tanh x}{x},$$

$p \leq \frac{1}{3},\ q \geq 1,\ x > 0$ (videti [12]).

I:

$$(1-p)\frac{\operatorname{sh} x}{x} + p\frac{\tanh x}{x} > 1$$

Najpre obe strane nejednakosti pomnožimo sa $x \cdot \operatorname{ch} x, \quad x > 0:$

$$(1-p)\frac{\operatorname{sh} x}{x} + p\frac{\operatorname{sh} x}{x \operatorname{ch} x} > 1 \ / \cdot x \operatorname{ch} x,$$
$$(1-p)\operatorname{ch} x \operatorname{sh} x + p \operatorname{sh} x > x \operatorname{ch} x,$$
$$(1-p)\operatorname{ch} x \operatorname{sh} x + p \operatorname{sh} x - x \operatorname{ch} x > 0.$$

Korišćenjem formule (1.9) dobijamo:

$(1-p)\frac{1}{2}\operatorname{sh} 2x + p\operatorname{sh} x - x\operatorname{ch} x > 0.$

Sada ćemo funkcije $\operatorname{sh} x$ i $\operatorname{ch} x$ razviti u stepeni red, a u sledećem koraku izvući ćemo prvi član iz svake sume, da bismo ih posle spojili u jednu sumu:

$$\frac{1-p}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} + p\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!} > 0,$$

$$\frac{\cancel{1}-p}{2}2x + \cancel{p}x - \cancel{x} + \frac{1-p}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} + p\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} +$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n)!} > 0,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{>0}(\underbrace{4^n(1-p)+p-2n-1}_{\text{proveravamo}}) > 0.$$

$$n=1,\ p=\frac{1}{3}:\quad 4\Big(1-\frac{1}{3}\Big)+\frac{1}{3}-2-1 = 4-\frac{4}{3}+\frac{1}{3}-3 = 0$$

$$n=2,\ p\le\frac{1}{3}:\quad 16(1-p)+p-4-1 = 16-16p+p-5$$

$$= 11-15p \ge 6$$

Pošto je član sume za $n=1,\ p=\frac{1}{3}$, jednak nuli, zanemarujemo ga i dokaz nejednakosti nastavljamo za $n\ge 2$:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\underbrace{\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{>0}(\underbrace{4^n(1-p)+p-2n-1}_{\text{indukcija}}) > 0.$$

B.I. $n=2,\ \ p\le\frac{1}{3}:\quad 11-15p\ge 6$

I.H. pretpostavimo da važi za $n=k,\ k\in\mathbb{N},\ k\ge 2,\ p\le\frac{1}{3}$:

$$4^k(1-p)+p-2k-1 > 0$$

$$4^k(1-p) > 1+2k-p$$

I.K. dokažimo da važi za $n = k+1,\ k \in \mathbb{N},\ k \geq 2,\ p \leq \dfrac{1}{3}$:

$$\begin{aligned}
&4^{(k+1)}(1-p) + p - 2(k+1) - 1 = \\
&= 4 \cdot 4^k(1-p) + p - 2k - 2 - 1 \\
&> 4(1 + 2k - p) + p - 2k - 3 \\
&= 4 + 8k - 4p + p - 2k - 3 \\
&= \underbrace{6k - 3p + 1}_{\geq 12} > 0.
\end{aligned}$$

$\boxed{12.}$ Dokazati nejednakost: $2\,\mathrm{sh}\,x + \tanh x > 3x, \quad x > 0$ (videti [7]).

Najpre ćemo obe strane nejednakosti pomnožiti sa $\mathrm{ch}\,x, \quad x > 0$:

$$\begin{aligned}
&2\,\mathrm{sh}\,x + \tfrac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x} > 3x \ / \cdot \mathrm{ch}\,x, \\
&2\,\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,x + \mathrm{sh}\,x > 3x\,\mathrm{ch}\,x, \\
&2\,\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,x + \mathrm{sh}\,x - 3x\,\mathrm{ch}\,x > 0.
\end{aligned}$$

Koristeći formulu (1.9) dobijamo:

$$\begin{aligned}
&\cancel{2}\,\frac{1}{\cancel{2}}\,\mathrm{sh}\,2x + \mathrm{sh}\,x - 3x\,\mathrm{ch}\,x > 0, \\
&\mathrm{sh}\,2x + \mathrm{sh}\,x - 3x\,\mathrm{ch}\,x > 0.
\end{aligned}$$

Funkcije $\mathrm{sh}\,x$ i $\mathrm{ch}\,x$ razvićemo u stepeni red, a zatim sve tri sume spojiti u jednu:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - 3x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} > 0, \\
&\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n)!} > 0, \\
&\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{>0} (\underbrace{2^{2n+1} + 1 - 3(2n+1)}_{\text{proveravamo}}) > 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n = 0:&\quad 2 + 1 - 3 = 0 \\
n = 1:&\quad 2^3 + 1 - 3 \cdot 3 = 9 - 9 = 0 \\
n = 2:&\quad 2^5 + 1 - 3 \cdot 5 = 33 - 15 = 18 > 0
\end{aligned}$$

$n=3: \quad 2^7+1-3\cdot 7 = 129-21 = 108 > 0$

Pošto su članovi sume za $n=0$ i $n=1$ jednaki nuli, zanemarujemo ih i dokaz nejednakosti nastavljamo za $n \geq 2$:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{>0} (\underbrace{2^{2n+1}+1-3(2n+1)}_{\text{indukcija}}) > 0.$$

Dokazaćemo indukcijom da je $2^{2n+1}-3(2n+1) > 0$.

B.I. $n=2: \quad 2^5 - 3\cdot 5 = 32-15 = 17 > 0$

I.H. pretpostavimo da važi za $n=m,\ m\in\mathbb{N},\ m\geq 2$:

$$2^{2m+1}-3(2m+1) > 0$$

$$2^{2m+1} > 3(2m+1)$$

I.K. dokažimo da važi za $n=m+1,\ m\in\mathbb{N},\ m\geq 2$:

$$2^{2(m+1)+1}-3(2(m+1)+1) =$$

$= 2^2\cdot 2^{2m+1} - 3(2m+3)$
$> 4\cdot 3(2m+1) - 3(2m+3)$
$= 24m+12-6m-9$
$= 18m+3 > 0.$

$\boxed{14.}$ Dokazati nejednakost: $\operatorname{ch}^{\frac{4}{3}}\left(\frac{x}{2}\right) < \frac{\operatorname{sh} x}{x} < \operatorname{ch}^3 x, \quad x > 0$ (videti [11]).

I:

$$\operatorname{ch}^{\frac{4}{3}}\left(\frac{x}{2}\right) < \frac{\operatorname{sh} x}{x}$$

Najpre obe strane nejednakosti stepenujemo na treći:

$$\operatorname{ch}^{\frac{4}{3}}\left(\frac{x}{2}\right) < \frac{\operatorname{sh} x}{x} \ /\ ^3,$$

$\operatorname{ch}^4\left(\dfrac{x}{2}\right) < \dfrac{\operatorname{sh}^3 x}{x^3}.$

Sada obe strane nejednakosti pomnožimo sa $x^3, \quad x > 0$:

$\operatorname{ch}^4\left(\dfrac{x}{2}\right) < \dfrac{\operatorname{sh}^3 x}{x^3} \ / \ \cdot x^3,$

$x^3 \operatorname{ch}^4\left(\dfrac{x}{2}\right) < \operatorname{sh}^3 x,$

$\operatorname{sh}^3 x - x^3 \operatorname{ch}^4\left(\dfrac{x}{2}\right) > 0.$

Sada ćemo sa $f(x)$ označiti $\operatorname{sh}^3 x - x^3 \operatorname{ch}^4\left(\dfrac{x}{2}\right)$, tj. :

$f(x) = \operatorname{sh}^3 x - x^3 \operatorname{ch}^4\left(\dfrac{x}{2}\right), \quad x > 0.$

Definišimo funkciju $\varphi(x)$ na sledeći način:

$\varphi(x) = f(2x) = \operatorname{sh}^3(2x) - 8x^3 \operatorname{ch}^4 x, \quad x > 0.$

Koristeći formule (1.3) i (1.7) dobijamo:

$\varphi(x) = \dfrac{1}{4}\operatorname{sh} 6x - \dfrac{3}{4}\operatorname{sh} 2x - 8x^3\Big(\dfrac{\operatorname{ch} 4x}{8} + \dfrac{\operatorname{ch} 2x}{2} + \dfrac{3}{8}\Big).$

Dokažimo sada da je $f(x) > 0, \ x > 0$, što je ekvivalentno sa $\varphi(x) > 0, \ x > 0$:

$$\frac{1}{4}\operatorname{sh} 6x - \frac{3}{4}\operatorname{sh} 2x - x^3 \operatorname{ch} 4x - 4x^3 \operatorname{ch} 2x - 3x^3 > 0.$$

U sledećem koraku funkcije $\operatorname{sh} x$ i $\operatorname{ch} x$ razvijamo u stepeni red, a zatim uvodimo odgovarajuće smene za svaku sumu:

$$\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(6x)^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} - x^3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4x)^{2n}}{(2n)!} +$$

$$-4x^3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} - 3x^3 > 0,$$

$$\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\frac{(6x)^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{\text{smena: } n=m} - \frac{3}{4}\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{\text{smena: } n=m} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^{2n}\cdot x^{2n+3}}{(2n)!}}_{\substack{\text{smena: } n+1=m,\\ 2n+2=2m,\\ 2n+3=2m+1,\\ 2n=2m-2}} +$$

$$-4\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}\cdot x^{2n+3}}{(2n)!}}_{\substack{\text{smena: } n+1=m,\\ 2n+2=2m,\\ 2n+3=2m+1,\\ 2n=2m-2}}-3x^3>0,$$

$$\frac{1}{4}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(6x)^{2m+1}}{(2m+1)!}-\frac{3}{4}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2x)^{2m+1}}{(2m+1)!}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4^{2m-2}\cdot x^{2m+1}}{(2m-2)!}+$$
$$-4\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2^{2m-2}\cdot x^{2m+1}}{(2m-2)!}-3x^3>0.$$

Da bismo sve sume spojili u jednu, moraju brojači da kreću od $m=2$ i zato iz prve dve sume izvlačimo prva dva člana, a iz druge dve sume izvlačimo prvi član:

$$\frac{1}{4}\cdot 6x-\frac{3}{4}\cdot 2x+\frac{1}{4}\cdot\frac{(6x)^3}{6}-\frac{3}{4}\cdot\frac{(2x)^3}{6}-x^3-4x^3-3x^3+$$
$$+\frac{1}{4}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{(6x)^{2m+1}}{(2m+1)!}-\frac{3}{4}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{(2x)^{2m+1}}{(2m+1)!}-\sum_{m=2}^{\infty}\frac{4^{2m-2}\cdot x^{2m+1}}{(2m-2)!}+$$

$$-4\sum_{m=2}^{\infty}\frac{2^{2m-2}\cdot x^{2m+1}}{(2m-2)!}>0,$$

$$\cancel{\frac{3}{2}}x-\cancel{\frac{3}{2}}x+\cancel{9}x^3-\cancel{x}^3-\cancel{8}x^3+\sum_{m=2}^{\infty}\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}\Big(\frac{1}{4}\cdot 6^{2m+1}-\frac{3}{4}\cdot 2^{2m+1}+$$
$$-4^{2m-2}(2m+1)2m(2m-1)-4\cdot 2^{2m-2}(2m+1)2m(2m-1)\Big)>0,$$

$$\sum_{m=2}^{\infty}\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}\Big(\frac{3}{2}\cdot 6^{2m}-\frac{3}{2}\cdot 2^{2m}-2^{4m-4}(2m+1)2m(2m-1)+$$
$$-2^{2m}(2m+1)2m(2m-1)\Big)>0,$$

$$\sum_{m=2}^{\infty}\underbrace{\frac{2^{2m}\cdot x^{2m+1}}{(2m+1)!}}_{>0}\Big(\underbrace{\frac{3}{2}\cdot 3^{2m}-\frac{3}{2}-(2m+1)2m(2m-1)(2^{2m-4}+1)}_{\text{proveravamo}}\Big)>0.$$

$$m = 2: \quad \frac{3}{2} \cdot 3^4 - \frac{3}{2} - 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot (2^0 + 1) =$$

$$\frac{3}{2} \cdot 80 - 120 = 120 - 120 = 0$$

$$m = 3: \quad \frac{3}{2} \cdot 3^6 - \frac{3}{2} - 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot (2^2 + 1) =$$

$$\frac{3}{2} \cdot 728 - 1050 = 1092 - 1050 = 42 > 0$$

Pošto je član sume za $m = 2$ jednak nuli , zanemarujemo ga i nastavljamo dokaz nejednakosti za $m \geq 3$:

$$\sum_{m=3}^{\infty} \underbrace{\frac{2^{2m} \cdot x^{2m+1}}{(2m+1)!}}_{>0} \Big(\underbrace{\frac{3}{2} \cdot 3^{2m} - \frac{3}{2} - (2m+1)2m(2m-1)(2^{2m-4}+1)}_{\text{proveravamo}} \Big) > 0,$$

Najpre ćemo dokazati da je $3^{2m} > 3^{2m-1} + 3$, za m≥ 3.
To se svodi na dokaz nejednakosti $9^m > \frac{9}{2}$, što jeste tačno za $m \geq 3$.

Sada ćemo dokazati da je $2^{2m-4} + 1 < 2^{2m-3}$, za $m \geq 3$.
To se svodi na dokaz nejednakosti $16 < 4^m$, a to jeste tačno za $m \geq 3$.

Najzad želimo dokazati da je $\frac{3}{2} 3^{2m-1} > (2m+1)2m(2m-1)2^{2m-3}$, $m \geq 3$.
Koristeći činjenicu da je $(2m)^3 > (2m+1)2m(2m-1)$, dokazaćemo jači uslov:

$$\frac{3}{2} \cdot 3^{2m-1} > 8m^3 \cdot 2^{2m-3},$$

$$\frac{\cancel{3}}{2} \cdot \frac{9^m}{\cancel{3}} > \cancel{8} m^3 \cdot \frac{4^m}{\cancel{8}},$$

$$\frac{9^m}{4^m} > 2m^3,$$

$$\left(\frac{9}{4}\right)^m > 2m^3.$$

S obzirom da je $\frac{9}{4} > 2$, sledi da je dovoljno dokazati: $2^m > 2m^3$.
Ovo nije tačno za $m \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$, ali direktno ćemo proveriti

da su za te brojeve koeficijenti sume pozitivni:

$$m = 3: \quad \frac{3}{2}\cdot 3^6 - \frac{3}{2} - 7\cdot 6\cdot 5\cdot (2^2+1) > 0$$

$$42 > 0$$

$$m = 4: \quad \frac{3}{2}\cdot 3^8 - \frac{3}{2} - 9\cdot 8\cdot 7\cdot (2^4+1) > 0$$

$$1272 > 0$$

$$m = 5: \quad \frac{3}{2}\cdot 3^{10} - \frac{3}{2} - 11\cdot 10\cdot 9\cdot (2^6+1) > 0$$

$$24222 > 0$$

$$m = 6: \quad \frac{3}{2}\cdot 3^{12} - \frac{3}{2} - 13\cdot 12\cdot 11\cdot (2^8+1) > 0$$

$$356148 > 0$$

$$m = 7: \quad \frac{3}{2}\cdot 3^{14} - \frac{3}{2} - 15\cdot 14\cdot 13\cdot (2^{10}+1) > 0$$

$$4376202 > 0$$

$$m = 8: \quad \frac{3}{2}\cdot 3^{16} - \frac{3}{2} - 17\cdot 16\cdot 15\cdot (2^{12}+1) > 0$$

$$47854320 > 0$$

$$m = 9: \quad \frac{3}{2}\cdot 3^{18} - \frac{3}{2} - 19\cdot 18\cdot 17\cdot (2^{14}+1) > 0$$

$$485868342 > 0$$

$$m = 10: \quad \frac{3}{2}\cdot 3^{20} - \frac{3}{2} - 21\cdot 20\cdot 19\cdot (2^{16}+1) > 0$$

$$4707191340 > 0$$

$$m = 11: \quad \frac{3}{2}\cdot 3^{22} - \frac{3}{2} - 23\cdot 22\cdot 21\cdot (2^{18}+1) > 0$$

$$44286036642 > 0$$

Za $m \geq 12$ važi nejednakost $2^m > 2m^3$. Dokazaćemo indukcijom.

B.I. $m = 12: \quad 2^{12} > 2 \cdot 12^3$

$$4096 > 3456$$

I.H. pretpostavimo da važi za $m = k,\ k \in \mathbb{N},\ k \geq 12$:

$$2^k > 2k^3$$

I.K. dokažimo da važi za $m = k+1,\ k \in \mathbb{N},\ k \geq 12:$

$$2^{k+1} > 2 \cdot (k+1)^3$$

$$2 \cdot 2^k > 2 \cdot (k+1)^3$$

$$2 \cdot 2 \cdot k^3 > 2 \cdot (k+1)^3 \ / : \ 2k^3$$

$$2 > \left(1 + \frac{1}{k}\right)^3$$

S obzirom da je za $k \geq 12,\ 1 + \dfrac{1}{k} \leq 1 + \dfrac{1}{12} = \dfrac{13}{12},$ dobijamo da je dovoljno dokazati $2 > \left(\dfrac{13}{12}\right)^3,$ a to jeste tačno, jer je $2 > 1.27$.

2.3 Najsloženiji zadaci

Na kraju su ostale komplikovanije nejednakosti, kao što su 2. i 5. Ove nejednakosti dokazuju se na malo drugačiji način nego prethodne.

$\boxed{2.}$ Dokazati nejednakost: $\left(\operatorname{ch}\dfrac{x}{4}\right)^5 < \dfrac{\operatorname{sh} x}{x},\quad x \in (0,1)$ (videti [5], [6]).

Najpre obe strane nejednakosti pomnožimo sa $x > 0:$

$$\left(\operatorname{ch}\frac{x}{4}\right)^5 < \frac{\operatorname{sh} x}{x} \ / \cdot x,$$

$$x \cdot \left(\operatorname{ch}\frac{x}{4}\right)^5 < \operatorname{sh} x,$$

$$\operatorname{sh} x - x\left(\operatorname{ch}\frac{x}{4}\right)^5 > 0.$$

Sada ćemo sa $f(x)$ označiti $\operatorname{sh} x - x\Big(\operatorname{ch}\dfrac{x}{4}\Big)^5$, tj. :
$f(x) = \operatorname{sh} x - x\Big(\operatorname{ch}\dfrac{x}{4}\Big)^5, \quad x \in (0,1).$

Definišimo funkciju $\varphi(x)$ na sledeći način:
$\varphi(x) = f(4x) = \operatorname{sh} 4x - 4x \cdot \operatorname{ch}^5 x, \quad x \in \Big(0, \dfrac{1}{4}\Big).$

Koristeći formulu (1.8), dobijamo da je:
$\varphi(x) = \operatorname{sh} 4x - \dfrac{x}{4}\operatorname{ch} 5x - \dfrac{5x}{4}\operatorname{ch} 3x - \dfrac{5x}{2}\operatorname{ch} x.$

Dokažimo sada da je $f(x) > 0$ za $x \in (0,1)$, što je ekvivalentno sa $\varphi(x) > 0$ za $x \in \Big(0, \dfrac{1}{4}\Big)$. Najpre ćemo funkcije $\operatorname{sh} x$ i $\operatorname{ch} x$ razviti u stepeni red:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4x)^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{x}{4}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5x)^{2n}}{(2n)!} - \frac{5x}{4}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^{2n}}{(2n)!} - \frac{5x}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} > 0,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4x)^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^{2n} \cdot x^{2n+1}}{(2n)!} - \frac{5}{4}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n} \cdot x^{2n+1}}{(2n)!} - \frac{5}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n)!} > 0,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{>0} \underbrace{\Big(4^{2n+1} - \frac{1}{4}\cdot 5^{2n}(2n+1) - \frac{5}{4}\cdot 3^{2n}(2n+1) - \frac{5}{2}(2n+1)\Big)}_{\text{proveravamo}} > 0.$$

$$n = 0: \quad 4 - \frac{1}{4}\cdot 1 \cdot 1 - \frac{5}{4}\cdot 1 \cdot 1 - \frac{5}{2}\cdot 1 = \frac{16}{4} - \frac{6}{4} - \frac{10}{4} = \frac{16}{4} - \frac{16}{4} = 0$$

$$n = 1: \quad 4^3 - \frac{1}{4}\cdot 5^2 \cdot 3 - \frac{5}{4}\cdot 3^2 \cdot 3 - \frac{5}{2}\cdot 3$$

$$= 64 - \frac{75}{4} - \frac{135}{4} - \frac{30}{4} = 64 - 60 = 4 > 0$$

$$n = 2: \quad 4^5 - \frac{1}{4}\cdot 5^4 \cdot 5 - \frac{5}{4}\cdot 3^4 \cdot 5 - \frac{5}{2}\cdot 5$$

$$= 1024 - \frac{3125}{4} - \frac{2025}{4} - \frac{50}{4} = 1024 - 1300 = -276 < 0$$

$$n = 3: \quad 4^7 - \frac{1}{4} \cdot 5^6 \cdot 7 - \frac{5}{4} \cdot 3^6 \cdot 7 - \frac{5}{2} \cdot 7$$
$$= 16384 - \frac{109375}{4} - \frac{25515}{4} - \frac{70}{4} = 16384 - 33740 = -17356 < 0$$

Pošto je član sume za $n = 0$ jednak nuli, njega možemo da zanemarimo u nastavku dokaza. Vidimo da za $n \geq 2$ članovi sume postaju negativni, zato dokaz nejednakosti nastavljamo tako što najpre član sume za $n = 1$ izdvojimo ispred sume:

$$4 \cdot \frac{x^3}{6} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \Big(4^{2n+1} - \frac{1}{4} \cdot 5^{2n}(2n+1) - \frac{5}{4} \cdot 3^{2n}(2n+1) - \frac{5}{2}(2n+1) \Big) > 0,$$

$$\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} (4^{2n+2} - 5^{2n}(2n+1) - 5 \cdot 3^{2n}(2n+1) - 10(2n+1)) > 0,$$

$$\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} (16^{n+1} - 25^n(2n+1) - 5 \cdot 9^n(2n+1) - 10(2n+1)) > 0.$$

Sada ćemo obe strane nejednakosti pomnožiti sa -1, a u sledećem koraku obe strane nejednakosti podeliti sa x^3, pri čemu je $x \in (0, \frac{1}{4})$:

$$\frac{1}{4} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} (16^{n+1} - 25^n(2n+1) - 5 \cdot 9^n(2n+1) - 10(2n+1)) > -\frac{2}{3}x^3 \ / \cdot (-1),$$

$$\frac{1}{4} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} (25^n(2n+1) + 5 \cdot 9^n(2n+1) + 10(2n+1) - 16^{n+1}) < \frac{2}{3}x^3 \ / : x^3,$$

$$\frac{1}{4} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n-2}}{(2n+1)!} (25^n(2n+1) + 5 \cdot 9^n(2n+1) + 10(2n+1) - 16^{n+1}) < \frac{2}{3}.$$

Da bismo dokazali da je navedena suma manja od $\frac{2}{3}$, najpre ćemo indukcijom pokazati da su svi koeficijenti sume pozitivni.

Dovoljno je posmatrati prvi i poslednji član i dokazati
$25^n \cdot (2n+1) - 16^{n+1} > 0$, odnosno $\left(\frac{25}{16}\right)^n > \frac{16}{2n+1}$.

Navedena nejednakost nije tačna za $n = 2$, ali direktno ćemo proveriti da za $n = 2$ koeficijent sume jeste pozitivan:

$$25^2 \cdot 5 + 5 \cdot 9^2 \cdot 5 + 10 \cdot 5 - 16^3 = 1104 > 0.$$

Sada primenjujemo indukciju na $\left(\frac{25}{16}\right)^n > \frac{16}{2n+1}$, za $n \geq 3$.

B.I. n=3: $\left(\frac{25}{16}\right)^3 > \frac{16}{7}$

$$3.815 > 2.286$$

I.H. pretpostavimo da važi za $n = k,\ k \in \mathbb{N},\ k \geq 3:$

$$\left(\frac{25}{16}\right)^k > \frac{16}{2k+1}$$

I.K. dokažimo da važi za $n = k+1,\ k \in \mathbb{N},\ k \geq 3:$

$$\left(\frac{25}{16}\right)^{k+1} > \frac{16}{2(k+1)+1}$$

$$\frac{25}{16} \cdot \left(\frac{25}{16}\right)^k > \frac{16}{2k+3}$$

$$\frac{25}{\cancel{1}6} \cdot \frac{\cancel{1}6}{2k+1} > \frac{16}{2k+3} \quad / \cdot (2k+1) \cdot (2k+3)$$

$$25(2k+3) > 16(2k+1)$$

$$18k + 59 > 0$$

Sada ćemo izvršiti zamenu gornjom granicom, tj. pošto $x \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$, uzećemo da je $x = \frac{1}{4}$:

$$\frac{1}{4} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n-2}}{(2n+1)!} (25^n(2n+1) + 5 \cdot 9^n(2n+1) + 10(2n+1) - 16^{n+1}) \overset{x=\frac{1}{4}}{\leq}$$

$$\frac{1}{4} \cdot 16 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}}{(2n+1)!} (25^n(2n+1) + 5 \cdot 9^n(2n+1) + 10(2n+1) - 16^{n+1}) < \frac{2}{3}.$$

U nastavku ćemo dokazati da je:

$$4 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}}{(2n+1)!}(25^n \cdot (2n+1) + 5 \cdot 9^n \cdot (2n+1) + 10 \cdot (2n+1) - 16^{n+1} < \frac{2}{3},$$

a iz toga će slediti da je:

$$\frac{1}{4} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n-2}}{(2n+1)!}(25^n \cdot (2n+1) + 5 \cdot 9^n \cdot (2n+1) + 10 \cdot (2n+1) - 16^{n+1}) < \frac{2}{3}.$$

$$4 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}}{(2n+1)!}(25^n \cdot (2n+1) + 5 \cdot 9^n \cdot (2n+1) + 10 \cdot (2n+1) - 16^{n+1}) < \frac{2}{3},$$

$$4 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{16}\right)^{n} \cdot 25^n}{(2n)!} + 4 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{16}\right)^{n} \cdot 5 \cdot 9^n}{(2n)!} + 4 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{16}\right)^{n} \cdot 10}{(2n)!} +$$

$$-4 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{16}\right)^{n} \cdot 16^n \cdot 16}{(2n+1)!} < \frac{2}{3},$$

$$4 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(\frac{25}{16}\right)^{n}}{(2n)!} + 20 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(\frac{9}{16}\right)^{n}}{(2n)!} + 40 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{16}\right)^{n}}{(2n)!} - 64 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(\frac{16}{16}\right)^{n}}{(2n+1)!} < \frac{2}{3},$$

$$4 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(\frac{5}{4}\right)^{2n}}{(2n)!} + 20 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{2n}}{(2n)!} + 40 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}}{(2n)!} - 64 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} < \frac{2}{3}.$$

Da bismo dokazali navedenu nejednakost, koristićemo sledeće jednakosti:

$$\operatorname{ch} \frac{5}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{5}{4}\right)^{2n}}{(2n)!},$$

$$\operatorname{ch} \frac{3}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{2n}}{(2n)!},$$

$$\operatorname{ch}\frac{1}{4}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}}{(2n)!},$$
$$\operatorname{sh}1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}.$$

Pri čemu vodimo računa da sume u prethodnoj nejednakosti počinju od $n = 2$. Zbog toga imamo da je:

$$4\operatorname{ch}\frac{5}{4}-4-4\frac{\frac{25}{16}}{2}+20\operatorname{ch}\frac{3}{4}-20-2\frac{\frac{9}{16}}{2}+40\operatorname{ch}\frac{1}{4}-40-40\frac{\frac{1}{16}}{2}-64\operatorname{sh}1+64+\frac{64}{6}<\frac{2}{3},$$
$$4\operatorname{ch}\frac{5}{4}-\cancel{4}-2\cdot\frac{25}{16}+20\operatorname{ch}\frac{3}{4}-\cancel{20}-10\cdot\frac{9}{16}+40\operatorname{ch}\frac{1}{4}-\cancel{40}-20\cdot\frac{1}{16}+$$
$$-64\operatorname{sh}1+\cancel{64}+\frac{32}{3}<\frac{2}{3},$$
$$4\operatorname{ch}\frac{5}{4}+20\operatorname{ch}\frac{3}{4}+40\operatorname{ch}\frac{1}{4}-64\operatorname{sh}1+\frac{32}{3}-\frac{25}{8}-\frac{45}{8}-\frac{10}{8}<\frac{2}{3},$$
$$4\operatorname{ch}\frac{5}{4}+20\operatorname{ch}\frac{3}{4}+40\operatorname{ch}\frac{1}{4}-64\operatorname{sh}1+\frac{32}{3}-10<\frac{2}{3},$$
$$4\operatorname{ch}\frac{5}{4}+20\operatorname{ch}\frac{3}{4}+40\operatorname{ch}\frac{1}{4}-64\operatorname{sh}1+\cancel{\frac{2}{3}}<\cancel{\frac{2}{3}},$$
$$4\cdot\operatorname{ch}\frac{5}{4}+20\cdot\operatorname{ch}\frac{3}{4}+40\cdot\operatorname{ch}\frac{1}{4}-64\cdot\operatorname{sh}1<0.$$

Kako je:
$$\operatorname{ch}\frac{5}{4}\approx 1.88842387716$$
$$\operatorname{ch}\frac{3}{4}\approx 1.29468328468$$
$$\operatorname{ch}\frac{1}{4}\approx 1.03141309988$$
$$\operatorname{sh}1\approx 1.17520119364$$

dobijamo da je:
$$4\cdot\operatorname{ch}\frac{5}{4}+20\cdot\operatorname{ch}\frac{3}{4}+40\cdot\operatorname{ch}\frac{1}{4}-64\cdot\operatorname{sh}1<$$
$$4\cdot 1.889+20\cdot 1.295+40\cdot 1.032-64\cdot 1.174=$$
$$74.736-75.136=-0.4<0.$$

Time je nejednakost dokazana.

$\boxed{5.}$ Dokazati nejednakost: $\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right)^{\frac{1}{2}} < \frac{x}{\operatorname{sh} x}$, $x \in (0,1)$ (videti [4]).

Najpre kvadriramo obe strane nejednakosti:

$$\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right)^{\frac{1}{2}} < \frac{x}{\operatorname{sh} x} \ /^2,$$
$$\frac{1}{\operatorname{ch} x} < \frac{x^2}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

Sada obe strane nejednakosti pomnožimo sa $\operatorname{ch} x \operatorname{sh}^2 x$, pri čemu je $x \in (0,1)$:

$$\frac{1}{\operatorname{ch} x} < \frac{x^2}{\operatorname{sh}^2 x} \ / \cdot \operatorname{ch} x \operatorname{sh}^2 x,$$
$$\operatorname{sh}^2 x < x^2 \operatorname{ch} x,$$
$$x^2 \operatorname{ch} x - \operatorname{sh}^2 x > 0.$$

Koristeći formulu (1.1) dobijamo:

$$x^2 \operatorname{ch} x - \frac{1}{2} \operatorname{ch} 2x + \frac{1}{2} > 0.$$

Sada ćemo funkciju $\operatorname{ch} x$ razviti u stepeni red, a u sledećem koraku uvodimo odgovarajuću smenu za svaku sumu:

$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + \frac{1}{2} > 0,$$

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{(2n)!}}_{\substack{\text{smena: } n+1=m, \\ 2n+2=2m, \\ 2n=2m-2}} - \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}}_{\text{smena: } n=m} + \frac{1}{2} > 0,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{2m}}{(2m-2)!}-\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2x)^{2m}}{(2m)!}+\frac{1}{2}>0.$$

Da bismo obe sume spojili u jednu, moraju njihovi brojači da kreću od istog broja, zato iz druge sume izdvajamo prvi član:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{2m}}{(2m-2)!}-\cancel{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2x)^{2m}}{(2m)!}+\cancel{\frac{1}{2}}>0,$$
$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{2m}}{(2m-2)!}-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2x)^{2m}}{(2m)!}>0,$$
$$\sum_{m=1}^{\infty}\underbrace{\frac{x^{2m}}{(2m)!}}_{>0}\underbrace{(2m(2m-1)-2^{2m-1})}_{\text{proveravamo}}>0.$$

$$\begin{aligned}
m=1:&\quad 2\cdot 1\cdot(2\cdot 1-1)-2^{2\cdot 1-1}=2\cdot 1-2=0\\
m=2:&\quad 2\cdot 2\cdot(2\cdot 2-1)-2^{2\cdot 2-1}=4\cdot 3-2^3=12-8=4>0\\
m=3:&\quad 2\cdot 3\cdot(2\cdot 3-1)-2^{2\cdot 3-1}=6\cdot 5-2^5=30-32=-2<0\\
m=4:&\quad 2\cdot 4\cdot(2\cdot 4-1)-2^{2\cdot 4-1}=8\cdot 7-2^7=56-128=-72<0
\end{aligned}$$

Pošto je član sume za $m=1$ jednak nuli, njega možemo da zanemarimo u nastavku dokaza. Vidimo da za $m\geq 3$ članovi sume postaju negativni, zato dokaz nejednakosti nastavljamo tako što najpre član sume za $m=2$ izdvojimo ispred sume:

$$4\cdot\frac{x^4}{4!}+\sum_{m=3}^{\infty}\frac{x^{2m}}{(2m)!}(2m(2m-1)-2^{2m-1})>0.$$

Sada ćemo obe strane nejednakosti pomnožiti sa -1, a u sledećem koraku obe strane nejednakosti podeliti sa x^4, pri čemu je $x\in(0,1)$:

$$\sum_{m=3}^{\infty}\frac{x^{2m}}{(2m)!}(2m(2m-1)-2^{2m-1})>-\frac{4x^4}{4!}\ /\cdot(-1),$$
$$\sum_{m=3}^{\infty}\frac{x^{2m}}{(2m)!}(2^{2m-1}-2m(2m-1))<\frac{x^4}{6}\ /:x^4,$$

$$\sum_{m=3}^{\infty} \frac{x^{2m-4}}{(2m)!}(\underbrace{2^{2m-1} - 2m(2m-1)}_{\text{indukcija}}) < \frac{1}{6}.$$

Da bismo dokazali da je navedena suma manja od $\frac{1}{6}$, najpre ćemo indukcijom pokazati da su svi koeficijenti sume pozitivni:

B.I. $m = 3: \quad 2^{2\cdot 3-1} - 2\cdot 3(2\cdot 3-1) = 2^5 - 6\cdot 5 = 32 - 30 = 2 > 0$

I.H. pretpostavimo da važi za $m = k,\ k \in \mathbb{N},\ k \geq 3$:

$$2^{2k-1} - 2k\cdot(2k-1) > 0$$

$$2^{2k-1} > 2k\cdot(2k-1)$$

I.K. dokažimo da važi za $m = k+1,\ k \in \mathbb{N},\ k \geq 3:$

$$2^{2\cdot(k+1)-1} - 2\cdot(k+1)(2\cdot(k+1)-1) =$$

$$\begin{aligned}
&= 2^{2k-1}\cdot 2^2 - 2(k+1)(2k+1)\\
&> 4\cdot 2k(2k-1) - (2k+2)(2k+1)\\
&= 16k^2 - 8k - (4k^2 + 6k + 2)\\
&= 16k^2 - 8k - 4k^2 - 6k - 2\\
&= 12k^2 - 14k - 2\\
&> 12k^2 - 16k \quad (\text{jer je } 16k > 14k + 2, \text{ za } \ k \geq 3)\\
&= 4k(3k-4) > 0.
\end{aligned}$$

Sada ćemo izvršiti zamenu gornjom granicom, tj. pošto $x \in (0,1)$, uzećemo da je $x = 1:$

$$\sum_{m=3}^{\infty} \frac{x^{2m-4}}{(2m)!}(2^{2m-1} - 2m(2m-1)) \overset{x=1}{\leq} \sum_{m=3}^{\infty} \frac{1}{(2m)!}(2^{2m-1} - 2m(2m-1)) < \frac{1}{6}.$$

U nastavku ćemo dokazati da je $\sum_{m=3}^{\infty} \frac{1}{(2m)!}(2^{2m-1} - 2m(2m-1)) < \frac{1}{6}$, a iz toga će slediti da je $\sum_{m=3}^{\infty} \frac{x^{2m-4}}{(2m)!}(2^{2m-1} - 2m(2m-1)) < \frac{1}{6}$.

$$\sum_{m=3}^{\infty} \frac{1}{(2m)!}(2^{2m-1} - 2m(2m-1)) < \frac{1}{6},$$

$$\underbrace{\sum_{m=3}^{\infty}\frac{2^{2m-1}}{(2m)!}}_{\text{smena: } m=k}-\underbrace{\sum_{m=3}^{\infty}\frac{1}{(2m-2)!}}_{\substack{\text{smena: } m-1=k,\\ 2m-2=2k}}<\frac{1}{6},$$

$$\sum_{k=3}^{\infty}\frac{2^{2k-1}}{(2k)!}-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}<\frac{1}{6}.$$

Posle uvođenja odgovarajuće smene za svaku sumu, iskoristićemo sledeće jednakosti:

$$\operatorname{ch}2=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{2k}}{(2k)!},$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{ch}2=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{2k-1}}{(2k)!},$$

$$\operatorname{ch}1=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}.$$

Pri čemu vodimo računa da sume u prethodnoj nejednakosti počinju od $k=3$ i $k=2$. Zbog toga treba dokazati da je:

$$\frac{1}{2}\operatorname{ch}2-\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{1}-\frac{1}{3}-\operatorname{ch}1+\cancel{1}+\cancel{\frac{1}{2}}<\frac{1}{6},$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{ch}2-\frac{1}{3}-\operatorname{ch}1<\frac{1}{6},$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{ch}2-\operatorname{ch}1<\frac{1}{2}.$$

Kako je: $\operatorname{ch}2\approx 3.76219569108$

$\operatorname{ch}1\approx 1.54308063482$

dobijamo da je: $\dfrac{1}{2}\operatorname{ch}2-\operatorname{ch}1<\dfrac{3.763}{2}-1.542=0.3395<\dfrac{1}{2}.$

Time je nejednakost dokazana.

Bibliografija

[1] C. Barbu, L. Piscoran, Jordan type inequalities using monotony of functions, Journal of Mathematical Inequalities, 8 (2014), 83–89.

[2] B. A. Bhayo, J. Sándor, On certain old and new trigonometric and hyperbolic inequalities, Analysis Mathematica, 41 (2015), 3-15.

[3] C. P. Chen, J. Sándor, Sharp inequalities for trigonometric and hyperbolic functions, Journal of Mathematical Inequalities, 9 (2015), 203-217.

[4] R. Klén, M. Visuri and M. Vuorinen, On Jordan type inequalities for hyperbolic functions, Journal of Inequalities and Applications, 2010:362548 (2010), 14 pages.

[5] M. Makragić, A method for proving some inequalities on mixed hyperbolictrigonometric polynomial functions, Journal of Mathematical Inequalities, 11 (2017), 817-829.

[6] M. Makragić, O prstenu trigonometrijskih polinoma sa primenom u teoriji analitičkih nejednakosti, Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet, 2018.

[7] E. Neuman, J. Sándor, On some inequalities involving trigonometric and hyperbolic functions with emphasis on the Cusa-Huygens, Wilker and Huygens inequalities, Mathematical Inequalities & Applications, 13 (2010), 715-723.

[8] J. Sándor, B. A. Bhayo, On an inequality of Redheffer, Miskolc Mathematical Notes, 16 (2015), 475-482.

[9] J. Sándor, Sharp Cusa–Huygens and related inequalities, Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, 19 (2013), 50-54.

[10] S. Wu, L. Debnath, Wilker-type inequalities for hyperbolic functions, Applied Mathematics Letters, 25 (2012), 837-842.

[11] Z. H. Yang, Y. M. Chu, Jordan type inequalities for hyperbolic functions and their applications, Journal of Function Spaces, 2015:370979 (2015), 4 pages.

[12] L. Zhu, Some new inequalities of the Huygens type, Computers and Mathematics with Applications, 58 (2009), 1180–1182.

Biografija

Rođena sam u Pančevu 25.02.1990. Živim u Padini, gde sam 2005. godine završila osnovnu školu "Maršal Tito"kao nosilac Vukove diplome. Iste godine sam upisala gimnaziju "Mihajlo Pupin"u Kovačici, opšti smer na slovačkom jeziku, a 2009. sam je uspešno završila kao nosilac Vukove diplome.
Upisala sam Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, smer diplomirani profesor matematike, 2009. godine i završila sam ga 2017. godine. Iste godine sam počela da radim u osnovnoj školi "Maršal Tito"u Padini, kao profesor matematike, i upisala sam master studije na Matematičkom fakultetu u Beogradu, smer profesor matematike i računarstva.
Zaključno sa januarskim ispitnim rokom 2019. godine položila sam sve predviđene ispite sa master studija sa prosečnom ocenom 9,25.