Univerzitet u Beogradu
Matematički fakultet

Kvaternionske algebre

MASTER RAD

Mentor: dr Dragana Todorić

Kandidat: Milica Vukomanović

Beograd, 2019.

Sadržaj:

Uvod

Kvaternioni predstavljaju proširenje kompleksnih brojeva. Prvi ih je opisao matematičar iz Irske, Vilijam Roan Hamilton 1843. Gaus je takođe otkrio kvaternione 1819. ali je ovaj rad objavljen tek 1900.

Algebra kvaterniona uvedena od strane Hamiltona, nastala je kao ishod pokušaja da se trodimenzioni euklidski vektorski prostor izgradi kao sistem brojeva koji bi bio analogon odnosa kompleksnih brojeva i dvodimenzionog prostora. Kako kompleksne brojeve možemo posmatrati kao tačke u ravni, tako je on tražio način kako da to isto uradi i sa tačkama u prostoru. Pokušao je da predstavi tačku sa koordinatama (a, b, c) u pravouglom Dekartovom koordinatnom sistemu brojem $u = a + bi + c\boldsymbol{j}$ i definisao je množenje takvih brojeva koje bi trebalo da predstavlja proširenje množenja kompleksnih brojeva. Ovo znači $\boldsymbol{i}^2 = -1$ i $\boldsymbol{j}^2 = -1$ (da bi se obezbedila restrikcija množenja u skupu kompleksnih brojeva za tačke $(a, b, 0)$ i $(a, 0, c)$). Godinama pre toga bio je uveo sabiranje i mnozenje u ovaj skup brojeva ali nije mogao da resi problem deljenja, nije znao kako da podeli dve tacke u prostoru.

Definisao je konjugat $\overline{u}$ od u, analogno kao skupu u C, sa $\overline{u} = a - bi - c\boldsymbol{j}$.

Odavde dobijamo da važi

$$u\overline{u} = \overline{u}u = a^2 + b^2 + c^2 + (ij + ji)bc$$

i time $ij + ji = 0$, što pod pretpostavkom da je množenje komutativno daje $ij = ji = 0$.
Hamilton je imao za cilj da definiše množenje sa osobinom da

$$(a_1 + ib_1 + jc_1)(a_2 + ib_2 + jc_2) = A + iB + jC,$$

gde je $A^2 + B^2 + C^2 = (a_1{}^2 + b_1{}^2 + c_1{}^2)(a_2{}^2 + b_2{}^2 + c_2{}^2)$ ali ovo nije slučaj kada je $ij = ji = 0$. Neophodno je izostaviti komutativnost i pisati $ij = -ji = k$, čime proizvod dobija oblik

$$(a_1 + ib_1 + jc_1)(a_2 + ib_2 + jc_2) = A + iB + jC + kD.$$

Hamilton se nadao da će k moći da identifikuje sa elementom $\alpha + i\beta + j\gamma$ kome odgovara tačka (α, β, γ) u trodimenzionom prostoru, ali je na kraju došao do zaključka da je to nemoguće i da je četvrta dimenzija neophodna da bi se k predstavio tačkom. Postigao je za četiri dimenzije ono što se nadao da će postići za tri dimenzije. Zahvaljujući ovome, danas možemo da razvijemo formalni račun algebre kvaterniona.

Rešenje problema konačno dolazi ponedeljka 16. oktobra 1843. godine u Dablinu na njegovom putu do Irske kraljevske akademije kada Hamilton dolazi do koncepta koji prethodi kvaternionima.

William Rowan Hamilton

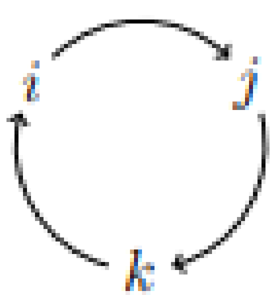
Hamilton je bio zadovoljan ovim otkrićem pa je fundamentalne formule za kvaternione $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, odmah urezao u kamen mosta kojim je prolazio. Hamilton je uređene četvorke brojeva sa ovim pravilima množenja nazvao *kvaternionima* i ostatak svog života on posvećuje njima.

Geometrijski, primer kvaterniona nalazimo pri proučavanju rotacije tela oko nepomične ose. Kada podelimo dva realna broja p i s gde je $s \neq 0$, dobijamo kao rezultat opet realan broj $q = ps^{-1}$ za koji važi $p = qs$. Po toj analogiji količnik dva vektora a i b koji u opštem slučaju nisu kolinearni bi trebalo da bude neka veličina koju možemo označiti sa Q koja treba da zadovoljava jednakost $a = Qb$.

Hamilton ovu veličinu predstavlja u obliku zbira broja A i vektora v i kao takva ona nije ni vektor ni broj. S obzirom da između vektora u prostoru i uređenih trojki realnih brojeva postoji izomorfizam, to je veličina Q određena sa četiri broja zbog čega ju je Hamilton nazvao *kvaternion*. Geometrijski, kvaternion se ne može predstaviti jer bi za tako nešto bilo potrebno imati četiri ose, jedna za broj i tri za vektor.

Kvaternioni počinju ubrzano da se koriste od kraja dvadesetog veka, primarno zbog njihove primene u opisivanju prostornih rotacija.

Kvaternioni su se takođe pokazali korisni i u teoriji brojeva zbog njihove veze sa kvadratnim formama.



1 Algebarska svojstva kvaterniona

1.1 Osobine kvaterniona i osnovne operacije

Neka je $H = \{a1 + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathrm{R}\}$ u kome važi $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. Kako elemente skupa H određujemo pomoću četiri realna broja nazivamo ih zato i *kvaternionima*. Za svaka dva elementa $q_1 = a_1 1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k$ i $q_2 = a_2 1 + b_2 i + c_2 j + d_2 k$ skupa H definišemo binarnu operaciju $+$ na sledeći način:

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &= (a_1 1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 1 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) \\ &= (a_1 + a_2)1 + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k. \end{aligned}$$

Nazivamo je *sabiranjem* u skupu H. Prema definiciji sabiranja u skupu H imamo da je uređeni par $(H, +)$ jedan *grupoid*. Operacija $+$ je asocijativna jer se asocijativnost operacije $+$ svodi na asocijativnost sabiranja u skupu R. Naime, iz definicije operacije $+$ sledi

$$\begin{aligned} (q_1 + q_2) + q_3 &= ((a_1 + a_2)1 + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k) + (a_3 1 + b_3 i + c_3 j + d_3 k) \\ &= ((a_1 + a_2) + a_3)1 + ((b_1 + b_2) + b_3)i + ((c_1 + c_2) + c_3)j + ((d_1 + d_2) + d_3)k \\ &= (a_1 + (a_2 + a_3))1 + (b_1 + (b_2 + b_3))i + (c_1 + (c_2 + c_3))j + (d_1 + (d_2 + d_3))k \\ &= (a_1 1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + ((a_2 + a_3)1 + (b_2 + b_3)i + (c_2 + c_3)j + (d_2 + d_3)k) \\ &= q_1 + (q_2 + q_3), \end{aligned}$$

odakle dobijamo da je uredeni par $(H, +)$ i jedna *polugrupa*. Na osnovu definicije sabiranja kvaterniona sledi da je njen neutral element $01 + 0i + 0j + 0k$ a kvaternion $-q = -a - bi - cj - dk$ nazivamo *suprotnim elementom* kvaterniona $q = a1 + bi + cj + dk$. Kako se komutativnost operacije sabiranja kvaterniona svodi na komutativnost sabiranja u skupu R time smo dokazali sledeću lemu:

Lema. *Algebarska struktura* $(H, +)$ *gde je operacija* $+$ *sabiranje u skupu* H *jeste jedna Abelova grupa.*

Sada možemo definisati i jednu spoljnu R−operaciju $*$ u skupu H tako da za svako $\alpha \in \mathrm{R}$ i svako $q \in H$ važi

$$\alpha * q = (\alpha a)1 + (\alpha b)i + (\alpha c)j + (\alpha d)k.$$

Tako definisanu spoljnu R−operaciju nazivamo *množenje skalarima*.

Na osnovu ovoga važi i sledeća teorema:

Teorema. Skup H = {$a1 + bi + cj + dk : a, b, c, d \in$ R} jeste jedan vektorski prostor nad poljem R u odnosu na operacije sabiranja $+$ i množenja $*$ kvaterniona skalarima određene sa:

$$
\begin{aligned}
q_1 + q_2 &= (a_1 1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 1 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) \\
&= (a_1 + a_2)1 + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k,
\end{aligned}
$$

$$\alpha * q = (\alpha a)1 + (\alpha b)i + (\alpha c)j + (\alpha d)k.$$

Dokaz. Na osnovu *leme* 1. pokazali smo da je $(H, +)$ jedna Abelova grupa dok se ostale aksiome vektorskog prostora dokazuju neposredno koristeći definicije sabiranja i množenja kvaterniona skalarima.

Dakle, na osnovu prethodne teoreme, struktura $(H, +, *)$ postaje jedan vektorski prostor nad poljem R koji ćemo obeležiti sa (H, +, *). Prema definiciji skupa H sledi da se svaki element $a1+ biI + cj + dk$ iz skupa H može na jedinstven način zapisati kao linearna kombinacija elemenata $1, i, j, k$. To upravo znači da je skup $[1, i, j, k]$ i jedna baza vektorskog prostora H.

Množenje elemenata baze uvodimo relacijama $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = 1$, pri čemu pretpostavimo da je množenje asocijatvno a da je 1 neutral množenja. Inače, relacije $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ gde su i, j i k bazni elementi vektorskog prostora H, određuju sve moguće proizvode i, j i k. Na primer, ako pođemo od relacije

$$-1 = ijk$$

množenjem sa desne strane obe strane jednakosti istovremeno sa k dobijamo:

$$
\begin{aligned}
-k &= (ijk)k, \\
-k &= ij(kk), \\
-k &= ij(-1), \\
-k &= -ij, \\
k &= ij.
\end{aligned}
$$

Sve ostale mogućnosti proizvoda mogu biti određene sličnim metodama, što dovodi do:

$$
\begin{aligned}
ij &= k, & ji &= -k, \\
jk &= i, & kj &= -i, \\
ki &= j, & ik &= -j,
\end{aligned}
$$

odakle dobijamo da se množenje parova elemenata iz podskupa $\{i, j, k\}$ ponaša isto kao vektorski proizvod jediničnih vektora u trodimenzionom euklidskom prostoru.

Sada množenje elemenata baze možemo predstaviti Kejlijevom tablicom :

·	i	j	k
i	-1	k	-j
j	-k	-1	i
k	j	-i	-1

Pretpostavili smo da je bazni element 1 neutral za množenje, onda ćemo umesto zapisa $a1+bi+cj+dk$ koristiti zapis $a+bi+cj+dk$. Sada je proizvod dva proizvoljna kvaterniona dat na sledeci nacin:

$$\begin{aligned} q_1 \cdot q_2 &= (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 kq) \cdot (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) \\ &= a_1 \cdot (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) + b_1 i \cdot (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) \\ &\quad + c_1 j \cdot (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) + d_1 k \cdot (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) \\ &= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_1 c_2 j + a_1 d_2 k + b_1 i a_2 + b_1 i b_2 i + b_1 i c_2 j + d b_1 i_2 k + c_1 j a_2 \\ &\quad + c_1 j b_2 i + c_1 j c_2 j + c_1 j d_2 k + d_1 k a_2 + d_1 k b_2 i + d_1 k c_2 j + d_1 k d_2 k. \end{aligned}$$

Na osnovu tablice množenja baznih vektora i, j i k i aksioma vektorskog prostora (H, +, $*$) dobijamo sledeće:

$$\begin{aligned} q_1 \cdot q_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2) i \\ + (a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2) j + (a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 + d_1 a_2) k. \end{aligned}$$

Ovim je uredeni par (H, ·) jedan grupoid. Na osnovu definicije množenja kvaterniona, neposrednom proverom se dobija da je množenje kvaterniona asocijativno ako i samo ako je množenje baznih elemenata asocijativno. Slično tome, množenje kvaterniona je komutativno ako i samo ako je množenje baznih elemenata komutativno. Na osnovu Kejlijeve tablice množenja baznih elemenata vidimo da množenje baznih elemenata nije komutativno, jer tablica nije simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu. Stoga ni samo množenje kvaterniona nije komutativna operacija.

Slično skupu kompleksnih brojeva i u skupu H možemo definisati operaciju konjugovanja kvaterniona. Neka je $q = a+bi+cj+dk$ proizvoljan kvaternion iz skupa H. Tada njegov konjugat, definišemo sa $\overline{q} = a-bi-cj-dk$. Preslikavanje $q \rightarrow \overline{q}$ jeste jedno involutivno preslikavanje, odnosno važi $\overline{\overline{q}} = q$. Važi i sledeće:

Lema. *Neka su* $q_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k$ *i* $q_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k$ *dva proizvoljna kvaterniona iz skupa* H. Tada važi:

$$\overline{q_1 + q_2} = \overline{q_1} + \overline{q_2} \quad i \quad \overline{q_1 \cdot q_2} = \overline{q_2} \cdot \overline{q_1}.$$

Dokaz. *Na osnovu definicije sabiranja kvaterniona imamo*

$$\begin{aligned}\overline{q_1 + q_2} &= \overline{(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k)}\\ &= \overline{(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k}\\ &= (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)i - (c_1 + c_2)j - (d_1 + d_2)k\\ &= (a_1 - b_1 i - c_1 j - d_1 k) + (a_2 - b_2 i - c_2 j - d_2 k)\\ &= \overline{q_1} + \overline{q_2}.\end{aligned}$$

Slično se dokazuje i druga relacija:

$$\begin{aligned}\overline{q_1 \cdot q_2} &= \overline{(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 kq) \cdot (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k)}\\ &= \overline{(a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)i}\\ &+ \overline{(a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2)j + (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)k}\\ &= (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) - (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)i\\ &- (a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2)j - (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)k.\end{aligned}$$

S druge strane, imamo:

$$\begin{aligned}\overline{q_2} \cdot \overline{q_1} &= (a_2 - b_2 i - c_2 j - d_2 k) \cdot (a_1 - b_1 i - c_1 j - d_1 k)\\ &= (a_2a_1 - b_2b_1 - c_2c_1 - d_2d_1) - (a_2b_1 + b_2a_1 - c_2d_1 + d_2c_1)i\\ &- (a_2c_1 + b_2d_1 + c_2a_1 - d_2b_1)j - (a_2d_1 - b_2c_1 + c_2b_1 + d_2a_1)k,\end{aligned}$$

upoređivanjem prethodne dve relacije imamo jednakost desnih strana pa i leve strane moraju biti jednake čime smo tvrđenje u celosti dokazali.

Neka je $q = a + bi + cj + dk$ proizvoljan kvaternion i neka je $\overline{q} = a - bi - cj - dk$ njemu konjugovani kvaternion. Množenjem ova dva kvaterniona

$$q \cdot \overline{q} = (a + bi + cj + dk) \cdot (a - bi - cj - dk) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

dobijamo da je taj broj realan i nenegativan. Stoga možemo govoriti i o dužini kvaterniona kao kvadratnog korena proizvoda kvaterniona sa njegovim konjugatom. Dužina kvaterniona se naziva i *norma* ili *moduo* kvaterniona i obeležava se

$$|q| = \sqrt{q\overline{q}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

Na osnovu definicije dužine kvaterniona sledi da važi:

$$|\overline{q}| = \sqrt{\overline{q}\,\overline{\overline{q}}} = \sqrt{\overline{q}q} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = |q|$$

kao i $$|q\overline{q}| = \sqrt{(q\overline{q})\overline{(q\overline{q})}} = \sqrt{(\overline{q}q)(\overline{q}q)} = \sqrt{\overline{q}q}\sqrt{\overline{q}q} = |q||q| = |q|^2 = |q||\overline{q}|.$$

Sada možemo definisati *inverz kvaterniona*. Proizvod ne-nula kvaterniona i njegovog inverza treba da bude jednak 1 pa je inverz kvaterniona q kvaternion:

$$q^{-1} = \frac{\overline{q}}{|q|^2}.$$

Time smo i dokazali naredno tvrđenje:

Lema. Algebarska struktura $(H \setminus \{0\}, \cdot)$ gde je H skup svih kvaterniona, a $\cdot$ binarna operacija množenja kvaterniona u tom skupu, jeste jedna grupa. Pri tom, kako operacija nije komutativna u skupu H ova grupa nije Abelova.

Skup $\{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ predstavlja jednu grupu u odnosu na množenje baznih vektora jer je proizvod bilo koja dva bazna vektora plus ili minus drugi bazni vektor.

Ova grupa se naziva *grupa kvaterniona* i označava sa Q_8.

$\cdot$	1	-1	i	-i	j	-j	k	-k
1	1	-1	i	-i	j	-j	k	-k
-1	-1	1	-i	i	-j	j	-k	k
i	i	-i	-1	1	k	-k	-j	j
-i	-i	i	1	-1	-k	k	j	-j
j	j	-j	-k	k	-1	1	i	-i
-j	-j	j	k	-k	1	-1	-i	i
k	k	-k	j	-j	-i	i	-1	1
-k	-k	k	-j	j	i	-i	1	-1

Grupa kvaterniona jeste jedna ne Abelova grupa reda 8, izomorfna nekom podskupu skupa kvaterniona koji ima osam elemenata u odnosu na množenje kvaterniona i zapisujemo kao

$$Q =< -1, i, j, k \mid (-1)^2 = 1, i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 >,$$

gde je 1 neutralni element a (-1) komutira sa ostalim elementima grupe. Tu elementi i, j i k imaju red 4 u Q i svaka dva od njih generišu celu grupu Q.

Iz definicije sabiranja i množenja kvaterniona možemo dokazati distributivnost množenja prema sabiranju, to jest da važi:

$$q_1 \cdot (q_2 + q_3) = q_1 \cdot q_2 + q_1 \cdot q_3$$
$$(q_1 + q_2) \cdot q_3 = q_1 \cdot q_3 + q_2 \cdot q_3.$$

Na osnovu prethodnih lema važi i sledeća teorema:

Teorema. Algebarska struktura $(H, +, \cdot)$ gde je $+$ binarna operacija sabiranja kvaterniona i $\cdot$ binarna operacija množenja kvaterniona jeste jedan prsten. Tačnije, na osnovu leme 3. važi da je prsten kvaterniona $(H, +, \cdot)$ jedno telo (polje bez komutativnosti).

Posledica. Za proizvoljne realne brojeve a_1, b_1, c_1, d_1 i a_2, b_2, c_2, d_2 postoje realni brojevi A, B, C i D takvi da važi:

$$(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + d_2^2) = (A^2 + B^2 + C^2 + D^2).$$

Dokaz. Neka su a_1, b_1, c_1, d_1 i a_2, b_2, c_2, d_2 proizvoljni realni brojevi. Tada oni određuju i dva kvaterniona $q_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k$ i $q_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k$. Na osnovu $\overline{q1q2} = \overline{q2}\ \overline{q1}$ (lema 2.) i definicije inverza kvaterniona imamo:

$$|q_1q_2|^2(q_1q_2)^{-1} = |q_1|^2|q_2|^2q_2^{-1}q_1^{-1}.$$

Sada na osnovu $(q_1q_2)^{-1} = q_2^{-1}q_1^{-1}$ imamo $|q_1|^2|q_2|^2 = |q_1q_2|^2$.

Kako smo kvaternione q_1 i q_2 definisali kao $q_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k$, $q_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k$ iz poslednje relacije dobijamo i tvrđenje:

$$(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + d_2^2) = (A^2 + B^2 + C^2 + D^2),$$

gde je kvaternion $q_1 q_2$ određenrealnim brojevima A, B, C i D. Tako su oni i odredeni realnim brojevima a_1, b_1, c_1, d_1 i a_2, b_2, c_2, d_2 čime je tvrđenje u celosti dokazano.

1.2 Algebre sa deljenjem

Pod *linearnom algebrom* nad poljem K ili K−algebrom, podrazumevamo svaku od algebarskih struktura $(V, +, \cdot, *)$ sa po dve binarne operacije $+$ i $\cdot$ i jednom spoljnom K−operacijom $*$ u skupu V, koja zadovoljava uslove:

1. $(V, +, \cdot)$ je prsten,
2. $(\alpha u) \cdot (\beta v) = (\alpha\beta)(u \cdot v)$,
3. $(V, +, *)$ je vektorski prostor nad poljem K,

za svako $\alpha, \beta \in$ K i $u, v \in V$. Same te operacije $+, \cdot$ i $*$ nazivamo njenim *sabiranjem, množenjem i množenjem skalarima*. Za K−algebru kažemo da je *komutativna* ako je takvo i njeno množenje.

Za K−algebre u kojima jedino nula nema inverz, to jest za algebre u kojima je deljenje moguće kažemo i da su *divizione* ili *algebre sa deljenjem*. Za asocijativnu algebru, definicija može biti uprošćena na sledeći način: asocijativna algebra nad poljem je *diviziona algebra* ako i samo ako sadrži jedinicu množenja $1 \neq 0$ i svaki ne-nula element a ima inverz, to jest postoji element x tako da važi $ax = xa = 1$.

Prema tome, kako smo pokazali da je $(\mathrm{H}, +, \cdot)$ jedan prsten kvaterniona pri čemu operacija $\cdot$ predstavlja množenje kvaterniona i da je $(\mathrm{H}, +, *)$ jedan vektorski prostor nad poljem R gde $*$ predstavlja množenje skalarima, to algebarska struktura $(\mathrm{H}, +, \cdot, *)$ predstavlja jednu *linearnu algebru*. Kako smo još pokazali da je njeno množenje asocijativno, ali ne i komutativno, u kome jedino nula nema inverz, to će ona predstavljati jednu asocijativnu divizionu algebru.

Najpoznatiji primeri asocijativnih divizionih algebri su konačnodimenzione algebre nad poljem R, u smislu konačnodimenzionog vektorskog prostora nad poljem R. **Frobenijusova teorema** tvrdi da do na izomorfizam postoje tri takve algebre nad poljem R: algebra realnih brojeva (R, R, $+, \cdot, *$)(dimenzije 1), algebra kompleksnih brojeva (C, R, $+, \cdot, *$)(dimenzije 2) i algebra kvaterniona (H, R, $+, \cdot, *$) (dimenzija 4). Među svim ovim algebrama jedino H nije komutativna. Ako je algebra nad poljem R tada ćemo tu algebru kraće nazivati R−algebra.

1.3 Hopfova teorema

Postoje beskonačno mnogo drugih neizomorfnih komutativnih, neasocijativnih, konačnodimenzionih divizionih R−algebri, ali sve imaju dimenziju 2. Zapravo, svaka konačnodimenziona komutativna diviziona R−algebra je dimenzije 1 ili 2. Ovo je poznato kao **Hopfova teorema** i objavljena je 1940.

Izbacujući uslov komutativnosti, rezultat Hopfa se uopštava: svaka konačnodimenziona diviziona R−algebra mora biti dimenzije 1, 2, 4 ili 8. Ovo su nezavisno jedan od drugog dokazali Majkl Kervejr i Džon Milnor, 1958. koristeći algebarsku topologiju. Adolf Hurvic pokazao je 1898. da identitet $q\overline{q}$ jednak sumi kvadrata važi jedino za dimenzije 1, 2, 4 i 8.

Skup H svih kvaterniona jeste vektorski prostor nad poljem realnih brojeva čija je dimenzija 4. (Poređenja radi, realni brojevi imaju dimenziju 1, kompleksni brojevi dimenziju 2, a oktonioni dimenziju 8.) Kvaternioni imaju množenje koje je asocijativno i distributivno prema sabiranju kvaterniona ali nije komutativno.

Pošto je moguće deliti kvaternione, oni čine jednu *divizionu* algebru ili algebru sa deljenjem. Ovo je struktura slična polju osim što množenje nije komutativno. Diviziona R−algebra H zajedno sa svojom normom predstavlja jednu *normiranu divizionu algebru*. I normirane algebre su, takode, veoma retke. **Hurvicova teorema** kaže da su jedine takve njih četiri: R, C, H i O.

Dok postoje beskonačno mnogo neizomorfnih realnih algebri dimenzije 2, 4 i 8, može se reći sledeće: svaka realna konačnodimenziona diviziona algebra nad poljem realnih brojeva mora biti

- izomorfna R ili C ako je asocijativna i komutativna
- izomorfna algebri kvaterniona ako je nekomutativna ali asocijativna
- izomorfna algebri oktoniona ako je neasocijativna i nekomutativna.

1.4 Ortogonalna i unitarna grupa

Skup $\mathrm{GL}(V)$ svih automorfizama datog vektorskog prostora V nad poljem K je i jedna grupa u odnosu na njihovo slaganje. Nazivamo je *linearna grupa* nad tim prostorom V.

Posebno ako je V konačne dimenzije, na primer n, svaka od njegovih baza indukuje i jedan izomorfizam te grupe na grupu $\mathrm{GL}(n, \mathrm{K})$ svih inverzibilnih matrica reda n nad poljem K koju nazivamo *linearnom grupom* stepena n nad poljem K. Zapravo

$$\mathrm{GL}(n, \mathrm{K}) = \{A \in M_n(\mathrm{K}) : detA \neq 0\},$$

dok

$$\mathrm{SL}(n, \mathrm{K}) = \{A \in M_n(\mathrm{K}) : detA = 1\},$$

nazivamo jednom *specijalnom linearnom grupom* stepena n nad poljem K. Razmotrimo slučaj K = C kao i slučaj K = R. Neka je zato sada V bilo koji *hermitski* prostor dimenzije n. Tada za linearni operator L na tom prostoru kažemo da je *unitaran* , ako čuva odgovarajuću normu, to jest ako za svako $u \in V$ važi

$$|L(u)| = |u|.$$

Tada L čuva i ortonormirane baze vektorskog prostora V i skup svih takvih operatora $\mathrm{GU}(V)$ jeste jedna podgrupa grupe $\mathrm{GL}(V)$, koju nazivamo *unitarnom grupom* uočenog prostora V.

Analogno, svaka ortonormirana baza prostora V indukuje i jedan izomorfizam grupe $\mathrm{GU}(V)$ na grupu svih *unitarnih* matrica reda n koju zovemo *unitarnom grupom* stepena n i označavamo sa

$$\mathrm{GU}(n) = \{A \in M_n(\mathrm{C}) : A^*A = E\}.$$

Njenu podgrupu svih matrica čija je determinanta 1 označavamo sa

$$\mathrm{SU}(n) = \{A \in \mathrm{GU}(n) : detA = 1\},$$

i nazivamo *specijalnom unitarnom grupom* stepena n.

Neka je sada V euklidski vektorski prostor dimenzije n nad poljem R, sa skalarnim proizvodom $(u, v) \mapsto u \circ v$. Tada on ima bar jednu ortonormiranu bazu, to jest bazu u kojoj su svi vektori jedinični i ortogonalni.

Ako je A matrica prelaska sa ortonormirane baze e na neku bazu f prostora V, tada je i ta baza $f = eA$ ortonormirana, ako i samo ako je $A^T A = E$. Za matrice sa tim svojstvom kažemo i da su *ortogonalne*.

Skup GO(n, R) svih realnih ortogonalnih matrica reda n je i jedna podgrupa linerane grupe GL(n, R). Zovemo je *ortogonalnom* grupom stepena n i označavamo je i sa GO(n). Uz to, iz $A^T A = E$ sledi da determinanta ortogonalne matrice mora biti 1 ili −1. Time je skup

$$SO(n) = \{A \in GO(n) : detA = 1\}$$

i jedna podgrupa te grupe GO(n). Zovemo je *specijalnom ortogonalnom grupom* stepena n.

Otuda i dve ortonormirane baze e i f pripadaju istoj orijentaciji prostora V, ako i samo ako je matrica A koja ih povezuje u grupi SO(n). Naime, kako je ta matrica A ortogonalna, relacija $detA > 0$ je moguća jedino ako je i $detA = 1$.

S druge strane, za linearni operator L na euklidskom vektorskom prostoru V kažemo da je *ortogonalan*, ako čuva skalarni proizvod , to jest ako za proizvoljne vektore u i v važi:

$$Lu \circ Lv = u \circ v \qquad (u, v \in V).$$

Naravno, tada je $|Lu| = |u|$, kao i $u \perp v \Leftrightarrow Lu \perp Lv$. To posebno znači da je linearni operator L ortogonalan ako i samo ako su takve i njegove matrice u odnosu na ortonormirane baze.

Time je skup GO(V) svih ortogonalnih operatora L na euklidskom vektorskom prostoru V i podgrupa GL(V). Zovemo je i *ortogonalnom grupom* samog prostora V. Ona je izomorfna ortogonalnoj grupi GO(n) stepena $n = dim$V. Specijalno, podgrupu grupe GO(V) izomorfnu specijalnoj grupi SO(n) stepena $n = dim$V zovemo *specijalnom ortogonalnom grupom* uočenog vektorskog prostora V i označavamo sa SO(V).

Posebno, ako je tu $n = 2$, operator L je ortogonalan ako i samo ako je to i njegova matrica A u odnosu na bilo koju ortonormiranu bazu $e = [e_1, e_2]$ prostora V. S druge strane, svaka ortogonalna matrica reda 2 je jedna od oblika

$$R_Q = \begin{bmatrix} cosQ & -sinQ \\ sinQ & cosQ \end{bmatrix} \qquad S_Q = \begin{bmatrix} cosQ & sinQ \\ sinQ & -cosQ \end{bmatrix}$$

Pri tome je $detR_\theta = 1$, kao i $detS_\theta = -1$. Na taj način, ako je operator L i direktan, to jest $detL = 1$, uočena matrica A je oblika $A = R_\theta$ za bar jedno θ iz R. Štaviše, ako je i R_ω njegova matrica u odnosu na bilo koju ortonormiranu bazu koja je u istoj orijentaciji sa bazom e, tada mora biti $R_\omega = R_\theta$, a time i $\omega = \theta (mod\ 2\pi)$. Uz to se lako proveri da je $\cos(u, Lu) = \cos\theta$ za svaki vektor u iz V. Zato ortogonalne operatore L sa tim svojstvom zovemo i *vektorskim rotacijama* uočenog prostora V.

1.5 Vektorski prostor dimenzije 4

Uvedimo prvo pojam bilinearne forme na nekom vektorskom prostoru da bismo mogli formalno da zasnujemo algebru. U tom smislu, neka je V vektorski prostor nad poljem K. Za preslikavanje $F : V \times V \to \mathrm{K}$ kažemo da je jedna *bilinearna forma* na prostoru $V \times V$, ako je linearno i po prvoj i po drugoj komponenti, to jest ako zadovoljava uslove:

1^0 $\quad F(u+u', v) = F(u,v) + F(u', v),\; F(\alpha u, v) = \alpha F(u,v),$

2^0 $\quad F(u, v+v') = F(u,v) + F(u, v'),\; F(u, \alpha v) = \alpha F(u,v),$

gde su $u, v, u', v' \in V$ i $\alpha \in \mathrm{K}$. Dalje, za bilinearnu formu F kažemo da je *simetrična* ako važi

$$F(u,v) = F(v,u)$$

za svako $u, v \in V$. Još ako za svaki vektor $u \in V$ važi

$$F(u,u) \geq 0$$

gde jednakost važi ako i samo ako je $u = 0$, tada za takvu bilinearnu formu kažemo da je i jedna *pozitivno definitna kvadratna* forma vektorskog prostora V nad poljem K.

Neka je (V_4(R), +, $*$) vektorski prostor dimenzije 4 nad poljem R na kome je definisana pozitivno definitna simetrična bilinearna forma

$$(\alpha u + \beta v)w = \alpha uw + \beta vw,$$

$$w(\alpha u + \beta v) = \alpha wu + \beta wv.$$

Sa $[e, i, j, k]$ označimo jednu njegovu ortonormiranu bazu i definišimo množenje elemenata baze sledećom tablicom:

·	e	i	j	k
e	e	i	j	k
i	i	-e	k	-j
j	j	-k	-e	i
k	k	j	-i	-e

Dalje, na osnovu osobina pomenute bilinearne forme i osobina množenja vektora baze date tablicom možemo definisati i množenje bilo koja dva elementa vektorskog prostora $V_4(\mathrm{R})$.

Sa ovakvom definicijom množenja i već postojeće definicije sabiranja elemenata, skup $V_4(\mathrm{R})$ postaje i jedan prsten. Na osnovu asocijativnosti množenja bazne relacije se mogu zapisati i kao $\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = \boldsymbol{ijk} = -e$ gde je e jedinični element.

Za bilo koje $q \in V_4(\mathrm{R})$ definišemo preslikavanje $\rho_q := V_4(\mathrm{R}) \to V_4(\mathrm{R})$ sa $x \mapsto x \cdot q$ koje nazivamo *desno množenje*. Kako $q, x \in V_4(\mathrm{R})$ sledi da je $q = \lambda e + \alpha \boldsymbol{i} + \beta \boldsymbol{j} + \gamma \boldsymbol{k}$ i $x = x_1 + x_2 \boldsymbol{i} + x_3 \boldsymbol{j} + x_4 \boldsymbol{k}$ njihova reprezentacija u bazi $[e, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}]$. Pre svega, na osnovu definisanog množenja u vektorskom prostoru sledi

$$x \cdot q = (x_1\lambda - x_2\alpha - x_3\beta - x_4\gamma) + (x_1\alpha + x_2\lambda + x_3\gamma - x_4\beta)\boldsymbol{i} +$$

$$(x_1\beta - x_2\gamma + x_3\lambda + x_4\alpha)\boldsymbol{j} + (x_1\gamma + x_2\beta - x_3\alpha + x_4\lambda)\boldsymbol{k}.$$

Ako vektore q i x tapišemo kao vektore kolone u odnosu na datu bazu $[e, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}]$ tada se prethodna relacija u matričnom obliku može zapisati kao:

$$[x_1\ x_2\ x_3\ x_4] \bullet \begin{bmatrix} \lambda \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = [x_1\ x_2\ x_3\ x_4] \begin{bmatrix} \lambda & \alpha & \beta & \gamma \\ -\alpha & \lambda & -\gamma & \beta \\ -\beta & \gamma & \lambda & -\alpha \\ -\gamma & -\beta & \alpha & \lambda \end{bmatrix}.$$

Na osnovu toga vidimo da je ρ_q jedno linearno preslikavanje i da je potpuno odredeno matricom

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & \alpha & \beta & \gamma \\ -\alpha & \lambda & -\gamma & \beta \\ -\beta & \gamma & \lambda & -\alpha \\ -\gamma & -\beta & \alpha & \lambda \end{bmatrix}$$

u odnosu na ortonormiranu bazu $[e, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}]$.

Tada važi:

$$detA = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -\gamma & \beta \\ \gamma & \lambda & -\alpha \\ -\beta & \alpha & \lambda \end{vmatrix} - \alpha \begin{vmatrix} -\alpha & -\gamma & \beta \\ -\beta & \lambda & -\alpha \\ -\gamma & \alpha & \lambda \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} -\alpha & \lambda & \beta \\ -\beta & \gamma & -\alpha \\ -\gamma & -\beta & \lambda \end{vmatrix} - \gamma \begin{vmatrix} -\alpha & \lambda & -\gamma \\ -\beta & \gamma & \lambda \\ -\gamma & -\beta & \alpha \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \lambda(\lambda^3 - \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\gamma + \beta^2\lambda + \alpha^2\lambda + \gamma^2\lambda) \\ &- \alpha(-\alpha\lambda^2 - \alpha\gamma^2 - \beta^2\alpha - \alpha^3 - \lambda\beta\gamma + \lambda\beta\gamma) \\ &+ \beta(-\alpha\gamma\lambda + \alpha\gamma\lambda + \beta^3 + \gamma^2\beta + \alpha^2\beta + \beta\lambda^2) \\ &- \gamma(-\gamma\alpha^2 - \gamma\lambda^2 - \gamma\lambda^2 - \gamma^3 - \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\gamma) \\ &= \lambda^2(\lambda^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \\ &+ \alpha^2(\lambda^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \\ &+ \beta^2(\lambda^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \\ &+ \gamma^2(\lambda^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \\ &= (\lambda^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2. \end{aligned}$$

Algebru kvaterniona koju smo mi konstruisali nad elementima $V_4(\mathrm{R})$ jasno zavisi od izbora ortonormiranih baza $[e, i, j, k]$ i za različite izbore prvog elementa e dobijaju se različiti jedinični elementi u algebri. Proverimo kako algebra zavisi od izbora baza. Primetimo da imamo dva različita sistema slično orijentisanih ortonormiranih baza. Zbog jednostavnosti za dve baze iste orijentacije reći ćemo da su *kompatibilne* to jest *direktne*. Zapravo, dve baze su kompatibilne ako i samo ako postoji transformacija $\sigma \in \mathrm{SO}(V_4(\mathrm{R}))$ koja preslikava jednu na drugu.

Lema. *Dve kompatibilne baze sa istim prvim elementom e definišu istu algebru kvaterniona nad* $V_4(\mathrm{R})$.

Dokaz. Neka su $[e, i, j, k]$ i $[e, u, v, w]$ dve kompatibilne baze. Dovoljno je pokazati da u algebri konstruisanoj nad prvom bazom važi $u^2 = v^2 = w^2 = uvw = -e$. Sada, $[i, j, k]$ i $[u, v, w]$ su dve kompatibilne baze trodimenzionog prostora $< e >^{\perp}$, pa je $u = \alpha i + \beta j + \gamma k$, $v = \alpha' i + \beta' j + \gamma' k$ i $w = \alpha'' i + \beta'' j + \gamma'' k$, gde je

$$T = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{bmatrix} \in \mathrm{SO}(3).$$

Mi imamo odmah $u^2 = -(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)e = -e$ *i slično* $v^2 = w^2 = -e$. *Drugi deo dokaza sledi iz ortogonalnosti vrsta matrice* T *čime dobijamo* $u(vw) = -(detT)e = -e$.

Tako za kompatibilne baze, algebra kvaterniona je jedinstveno određena prvim baznim elementom pa je možemo nazvati i "e–algebra"..

Sada razmotrimo vektore iz prostora $V_3(\mathrm{R})$ čija je baza $[i, j, k]$ i uloga e je samo da služi kao jedinični element algebre kvaterniona. Kako je e jedinični element tada se element ae ponaša u algebri isto kao i skalar a pa je uobičajena praksa da se simbol e ne koristi pa tako kvaternion $q = ae+bi+cj+dk$ zapisujemo i kao $q = a + bi + cj + dk$ pri čemu važe relacije $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

Tada za kvaternion q kažemo da je suma *skalarnog* dela a i *vektorskog* dela $bi + cj + dk$. Kako množenje kvaterniona ne zavisi od izbora desno ortonormirane baze mi možemo kvaternion pisati u obliku $a + u$, $u \in V_3(\mathrm{R})$ i vršiti manipulacije u algebri kvaterniona bez obzira na određenu bazu.

Pri tom je sa

$$f(a1 + bi + cj + dk) = ae + bi + cj + dk$$

definisan i jedan izomorfizam f algebre kvaterniona (H, +, ·, ∗) na strukturu (V_4(R), +, ·, ∗) čije su operacije određene sa:

$$(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k)+(a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) = (a_1 + a_2)+(b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k,$$

$$(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) \cdot (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) = (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2)+(a_1b_2+b_1a_2+c_1d_2-d_1c_2)i$$
$$+(a_1c_2 \;\; -b_1d_2+c_1a_2+d_1b_2)j + (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)k.$$

Specijalno, za $V_4(\mathrm{R}) = \mathrm{R}^4$ imamo izomorfizam algebre kvaterniona (H, +, ·, ∗) na strukturu (R^4, +, ·, ∗) čije su operacije + i ·, određene sa

$$(a_1, b_1, c_1, d_1)+(a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1 + a_2 ,\; b_1 + b_2 , c_1 + c_2 , d_1 + d_2),$$

$$(a_1, b_1, c_1, d_1) \cdot (a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2,$$
$$a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2,\; a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2,\; a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2).$$

Na osnovu ovog izomorfizma skupove H i R^4 možemo poistovetiti i time kvaternione predstaviti i kao skup uredenih četvorki:

$$H = \{(a, b, c, d) \mid a, b, c, d \in R\},$$

čiji su bazni elementi:

$$\begin{aligned} 1 &= (1,0,0,0), \\ i &= (0,1,0,0), \\ j &= (0,0,1,0), \\ k &= (0,0,0,1). \end{aligned}$$

Hamilton je bio svestan mogućnosti da kvaternione posmatramo jednostavno kao četvorke realnih brojeva sa pogodno definisanim operacijama sabiranja i množenja. Analogno, vektorskom prostoru $V_4(R)$, mi kvaternion $q = a + bi + cj + dk$ koji smo poistovetili sa uredenom četvorkom (a, b, c, d), možemo predstaviti kao sumu *skalaranog* dela a i *vektorskog* dela (b, c, d). Ova činjenica da kvaternion možemo shvatiti i kao zbir skalara i vektora preokrenula je istoriju jer na osnovu toga sledi da aritmetičke operacije izmedu kvaterniona možemo svesti na aritmetičke operacije samih vektora. Tako se došlo do pogodnog opisivanja proizvoda kvaterniona pomoću skalarnog i vektorskog proizvoda. U skladu sa tim mi ćemo kvaternion zapisivati kao $q = (a, \mathrm{v})$, gde je $\mathrm{v} = (b, c, d)$. Realni broj a identifikovaćemo sa kvaternionom $(a, 0)$ a vektore $\mathrm{v} \in R^3$ sa kvaternionom $(0, \mathrm{v})$. I obratno, broj oblika $a + 0i + 0j + 0k$ gde je a realan broj, naziva se *realni broj* a broj oblika $0 + bi + cj + dk$, gde su b, c i d realni brojevi, naziva se *čist imaginaran broj*. Mada je svaki kvaternion vektor u četvorodimenzionom vektorskom prostoru, uobičajeno je da se *vektor* definiše kao *čist imaginarni kvaternion*, to jest kao element vektorskog prostora R^3.

Hamilton naziva čiste imaginarne kvaternione i *pravim kvaternionima* a realne brojeve (misleći na kvaternione sa nula vektorskim delom) i *skalarnim kvaternionima*.

Na osnovu svega rečenog, kvaternioni mogu biti zapisani na nekoliko različitih, ekvivalentnih (*izomorfnih*) načina.

Dakle, imamo: $q = (a, \mathrm{v}),$

$$\begin{aligned} &= (a, (b, c, d)), \\ &= (a, b, c, d), \\ &= a + bi + cj + dk, \end{aligned}$$

gde je a skalarni deo i $\mathrm{v} = (b, c, d) \in \mathrm{R}^3$ vektorski deo kvaterniona. Slično, sabiranje kvaterniona možemo zapisati na tazličite načine.

Kao i kod zapisivanja pođimo od oblika $q = (a, \mathrm{v})$, $q_1 = (a_1, \mathrm{v}_1)$:

$$\begin{aligned} q + q_1 &= (a, \mathrm{v}) + (a_1, \mathrm{v}_1) \\ &= (a + a_1, \mathrm{v} + \mathrm{v}_1) \\ &= (a + a_1, (b, c, d) + (b_1, c_1, d_1)) \\ &= (a + a_1, (b + b_1, c + c_1, d + d_1)) \\ &= (a + a_1, b + b_1, c + c_1, d + d_1). \end{aligned}$$

Razmotrimo sada različite načine množenja kvaterniona i veze koje medu njima važe. Iz definicije množenja kvaterniona prvo imamo:

$$\begin{aligned} q_1 \cdot q_2 = (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)i + (a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2)j \; + \\ (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)k \\ = a_1a_2 - (b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2) + a_1(b_2i + c_2j + d_2k) + a_2(b_1i + c_1j + d_1k) \\ + (c_1d_2 - d_1c_2)i - (b_1d_2 - d_1b_2)j + (b_1c_2 - c_1b_2)k. \end{aligned}$$

S druge strane, ako kvaternione zapišemo u obliku sume realnog (skalarnog) i imaginarnog (vektorskog) dela dobijamo sledeće:

$$\begin{aligned} q_1 \cdot q_2 &= (a_1 + \mathrm{v}_1) \cdot (a_2 + \mathrm{v}_2) \\ &= (a_1a_2 + a_1\mathrm{v}_2 + a_2\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_1 \cdot \mathrm{v}_2). \end{aligned}$$

Slično, kao kod kompleksnih brojeva konjugat se može iskoristiti da se izrazi realni i imaginarni deo kvaterniona. Skalarni (realni) deo kvaterniona q je $\frac{q+\overline{q}}{2}$, a vektorski (imaginarni) deo je $\frac{q-\overline{q}}{2}$.

Između kompleksnih brojeva i kvaterniona postoje odredene sličnosti i analogije. Podsetimo se da su nam za definisanje kompleksnih brojeva bili potrebni bazni elementi 1 i i i da smo onda C predstavili kao vektorski prostor nad poljem realnih brojeva čiji elementi imaju oblik $x + iy$. Ako bismo želeli da uvedemo množenje kompleksnih brojeva bila nam je potrebna još aksioma $i^2 = -1$.

Za definisanje kvaterniona, potrebni su nam bazni elementi: 1, i, j, k i posmatrajući H kao vektorski prostor nad poljem realnih brojeva, njegovi elementi imaju oblik $a1 + bi + cj + dk$. Međutim, sada nam je za množenje kvaterniona potrebno još šest aksioma:

$$i^2 = -1,$$
$$j^2 = -1,$$
$$k^2 = -1, \quad ij = k,$$
$$jk = i, \quad ki = j.$$

Dakle, kvaternioni mogu biti predstavljeni kao parovi kompleksnih brojeva što je posledica *Kejli-Diksonove konstrukcije* kompleksnih brojeva. Ova konstrukcija je generalizacija konstrukcije kompleksnih brojeva kao parova realnih brojeva. Naime, neka je C_2 dvodimenzioni vektorski prostor nad poljem kompleksnih brojeva. Izaberimo bazu koja sadrži dva elementa $[1, j]$, odakle vektor u C_2 može biti zapisan pomoću baznih elemenata 1 i j kao

$$(a + bi)1 + (c + di)j.$$

Pri tom ako je tu $j^2 = -1$ i $ij = -ji$ i ako sa k označimo proizvod ij tada koristeći ista pravila za množenje koja važe i za obične kvaternione vektoru $(a + bi)1 + (c + di)j$ odgovara kvaternion $a + bi + cj + dk$. S druge strane, ako elemente iz C_2 zapišemo kao uređene parove kompleksnih brojeva i kvaternione kao uređene četvorke tada je odgovarajuća korespondencija data sa:

$$(a + bi, c + di) \leftrightarrow (a, b, c, d).$$

S druge strane, kao što se kompleksni brojevi mogu predstaviti matricama, tako se i kvaternioni mogu predstaviti pomoću matrica. Postoje dva načina kako predstaviti kvaternione kao matrice i isto toliko načina kako operacije izmedu kvaterniona da predstavimo pomoću operacija izmedu matrica. Jedan je koristeći 2×2 kompleksnu matricu, a drugi koristeći 4×4 realnu matricu. Koristeći 2×2 kompleksne matrice, kvaternion $a + bi + cj + dk$ može biti predstavljen kao:

$$\begin{bmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

Ova reprezentacija kvaterniona ima sledeća svojstva:

- Kompleksnim brojevima ($c = d = 0$) odgovara dijagonalna matrica
- Norma kvaterniona (kvadratni koren proizvoda sa njegovim konjugatom) je kvadratni koren determinante odgovarajuće kvadratne matrice
- Konjugatu kvaterniona odgovara konjugat transponovane matrice

Ako prethodne matrice označimo sa $1, \mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}$ redom. Lako se proverava da za njih važi:

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = -1,$$
$$\mathrm{ij} = -\mathrm{ji} = \mathrm{k},\ \mathrm{jk} = -\mathrm{kj} = \mathrm{i},\ \mathrm{ki} = -\mathrm{ik} = \mathrm{j}.$$

Sve ove matrice imaju determinantu 1. Koristeći 4×4 realne matrice, isti kvaternion može biti zapisan na sledeći način:

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

U ovoj reprezentaciji, konjugatu kvaterniona odgovara transponovana matrica. Četvrti stepen norme kvaterniona je upravo determinanta odgovarajuće matrice.

1.6 Kvadratni koren broja −1 u skupu kvaterniona

Pomenuli smo da za razliku od realnih i kompleksnih brojeva, množenje kvaterniona nije komutativno. Tako je na primer $ij = k$ dok je $ji = -k$. Sama nekomutativnost množenja kvaterniona ima neke neočekivane posledice. Jedna od njih jeste da polinomijalne jednačine nad kvaternionima mogu imati različitih rešenja vise nego što je stepen polinoma. Zapravo:

Lema. *Jednačina* $z^2 + 1 = 0$ *u skupu* H *ima beskonačno mnogo rešenja i sva ona se nalaze na površini jedinične sfere u trodimenzionom prostoru.*

Dokaz. Da bismo ovo dokazali, neka je q $= a + bi + cj + dk$ proizvoljan kvaternion čiji je kvadrat −1. Ovo znači da je

$$a^2 - b^2 - c^2 - d^2 = -1$$
$$2ab = 0$$
$$2ac = 0$$
$$2ad = 0.$$

Da bi bile zadovoljene poslednje tri jednačine, ili je $a = 0$ ili b, c i d su 0. Drugi slučaj je nemoguć, jer je a realan broj pa ne može da zadovoljava prvu jednačinu $a^2 = -1$. Dakle, $a = 0$ i $b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Drugim rečima, kvaternion je rešenje kvadratnog korena 1 akko je ĭmaginaran kvaternion čija je norma 1. Po definiciji, skup svih takvih vektora se nalaze na jediničnoj sferi .

1.7 Metrika na prostoru kvaterniona H

Rekli smo da se kvadratni koren proizvoda kvaterniona sa njegovim konjugatom naziva njegova norma i obeležavali smo je sa $|q| = \sqrt{q\overline{q}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$. Ovo je uvek nenegativan realan broj i on je isti kao i euklidska norma ako H posmatramo kao vektorski prostor R^4. Množenjem kvaterniona realnim brojem njegova norma se menja apsolutnom vrednošću tog broja. Tako, ako je α realan broj, tada važi $|\alpha q| = |\alpha||q|$. Zapravo, ovo je specijalan slučaj multiplikativnosti norme $|pq| = |p||q|$ za bilo koja dva kvaterniona p i q. Multiplikativnost je posledica formule za konjugaciju proizvoda dok alternativno multiplikativnost sledi direktno iz svojstava determinanti odgovarajućih kvadratnih matrica

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = det \begin{bmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{bmatrix}$$

gde *i* označava uobićajenu imaginarnu jedinicu.

Na taj način definisana norma omogućuje nam da definišemo *rastojanje* $d(p, q)$ izmedu kvaterniona p i q kao normu njihove razlike:

$$d(p, q) = |p - q|.$$

Ovako definisana funkcija, naziva se *metrika* indukovana normom i zajedno sa skupom H predstavlja jedan metrički prostor. Sabiranje i množenje kvaterniona su neprekidni u smislu metrike.

1.8 Hurvicovi kvaternioni

U matematici, *Hurvicovi kvaternioni* ili *Hurvicov ceo broj* je kvaternion čije su komponente ili svi celi brojevi ili sve polovine neparnih celih brojeva (ne smeju i jedni i drugi). Tako skup svih Hurvicovih kvaterniona je

$$\mathcal{H} = \{a + bi + cj + dk \in \mathrm{H} \mid \text{ili } a, b, c, d \in \mathrm{Z} \text{ ili } a, b, c, d \in \mathrm{Z} + \frac{1}{2}\}.$$

Može se pokazati da je $\mathcal{H}$ zatvoren u odnosu na množenje i sabiranje kvaterniona i u odnosu na njih predstavlja jedan potprsten prstena svih kvaterniona H.

Stav. Norma Hurvicovog kvaterniona je ceo broj.

Dokaz. Neka je $q \in$ H. Tada je $q = a + bi + cj + dk$ za neke $a, b, c, d \in \mathrm{Z}$ ili $q = \frac{e}{2} + \frac{f}{2}i + \frac{g}{2}j + \frac{h}{2}k$ za neke neparne $e, f, g, h \in$ Z. Otuda je

$$|q| = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \in \mathrm{Z}.$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 + \left(\frac{g}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \\
&= \frac{e^2}{4} + \frac{f^2}{4} + \frac{g^2}{4} + \frac{h^2}{4} \\
&= \frac{(2l+1)^2}{4} + \frac{(2m+1)^2}{4} + \frac{(2n+1)^2}{4} + \frac{(2p+1)^2}{4} \\
&= \frac{4l^2 + 4l + 1 + 4m^2 + 4m + 1 + 4n^2 + 4n + 1 + 4p^2 + 4p + 1}{4} \\
&= l^2 + l + m^2 + m + n^2 + n + p^2 + p + 1 \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Lipšicov kvaternion ili *Lipšicov ceo broj* je kvaternion čije su komponente celi brojevi. Skup svih Lipšicovih kvaterniona

$$\mathcal{L} = \{a + bi + cj + dk \in \mathrm{H} \mid a, b, c, d \in \mathrm{Z}\}$$

predstavlja potprsten prstena Hurvicovih kvaterniona H. Lipšicova podgrupa kvaterniona $\mathcal{L}$ je indeksa 2 grupe H.

Norma Hurvicovih kvaterniona, data sa $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ je uvek ceo broj. Po teoremi Lagranža svaki nenegativan ceo broj može biti zapisan kao suma najviše četiri kvadrata. Tako, svaki nenegativan ceo broj je norma nekog Lipšicovog ili Hurvicovog kvaterniona. Hurvicov ceo broj je prost akko je njegova norma prost broj.

Zaključak

Tokom pisanja ovog rada, trudila sam se da jasno definišem kvaternione i operacije kvaterniona, da istaknem njihova svojstva, a zatim preko pojma kompleksnog broja, koji su prosečnom čitaocu najpoznatiji, predstavim kvaternione. Trudila sam se da definišem analogne pojmove pojmovima vezanim za kompleksne brojeve i predstavim sličnosti i razlike izmedju njih. Kvaternioni imaju jako veliku primenu, pre svega u geometriji.

Nadam se da će ovaj rad zaintresovati čitaoce da dalje istražuju kvaternione i da će im biti uvod u to istraživanje.

Literatura

[1] Kvaternioni i njihova primena, V.Ilić 2008.

[2] A first course in noncommutative rings, T.Y.Lam

[3] Kalajdžić Gojko, Dorić Mirjana, *Geometrija (pisani materijal za studente)*, Matematički fakultet, Beograd (2003.)

[4] Landau, L. D.Lifshitz, E. M., *Mechanics (3rd edition)*, Oxford: Butterworth-Heinemann, (1996.)

[5] M. M. Postnikov, *Analytic geometry*, Nauka, (1973.)

[6] P. M. Neumann, G. A. Stoy, E. C. Thompson, *Groups and Geometry*, Oxford University Press, (1995.)

[7] P. R. Girard, *The quaternion group and modern physics*, European Journal of Physics 5, (1984.)

[8] R. Hermann, *Lectures in Mathematical Physics*, Vol. I, W. A. Benjamin, Inc. NY, (1970.)