matematički vidici 1

Rade Dacić

ELEMENTARNA KOMBINATORIKA

matematički institut
BEOGRAD
1977

matematički vidici 1

Rade Dacić

ELEMENTARNA KOMBINATORIKA

matematički institut
BEOGRAD
1977

R e c e n z e n t i:

Profesori Prirodno-matematičkog fakulteta Adamović dr Dušan, Marijanović dr Miroslav, Milić dr Svetozar.

Primljeno za štampu na sednici Redakcionog odbora od 11. decembra 1975. godine.

Republička zajednica nauke SR Srbije učestvovala je u troškovima izdavanja ove publikacije.

Prema mišljenju republičkog sekretara za kulturu SR Srbije ova publikacija je oslobođena poreza na promet.

SADRŽAJ

Strana

Strana

P R E D G O V O R

Kombinatorika je grana matematike čije prve ideje potiču još iz vremena nastanka matematike kao nauke, iz vremena Starih Grka, tačnije iz Pitagorine epohe. I pored ovako duge istorije kombinatoriku treba smatrati matematičkom disciplinom dvadesetog veka, jer je u ovom veku ona doživela tako snažan razvoj da joj, u tom pogledu, teško može konkurisati bilo koja druga matematička disciplina*). Ono što naročito privlači ovoj grani matematike može se ukratko sažeti u dve tačke. Prvo, kao matematička disciplina ona je dovoljno izazovna za one duhove koji se, u matematici, ne mire ni sa čim što je trivijalno, lako, nedovoljno duboko, već traže složeno, teško, pa i nerešivo. Drugo, to je disciplina čija su otkrića najtešnje povezana sa praktičnim potrebama savremenog života.

Stepen primene kombinatorne teorije postaje danas merilom tehnološke razvijenosti društva. Ona služi u teoriji verovatnoće, statistici, ekonomici, fizici, hemiji, biologiji, psihologiji, organizacionim i mnogim drugim naukama i raznim područjima čisto praktične delatnosti.

*

Reč "elementarna" u naslovu knjige ima i sledeći smisao: ova knjiga sadrži sve one osnovne ideje kombinatorike bez kojih je nemoguće razvijanje i puno razumevanje posebnih kombinatornih teorija, koje bi, sa ove tačke gledišta ulazile u "višu kombinatoriku". Savladavši sadržaj ovog rada čitalac, sa puno samopouzdanja, može pristupiti dubljem studiranju kombinatorike. Sledeća etapa u tome mogle bi biti knjige navedene na kraju ove.

---

*) *Prema klasifikaciji Američkog matematičkog društva matematika se deli na preko 60 disciplina.*

Knjiga je namenjana veoma širokom krugu čitalaca (što je uslovilo nastojanje da bude pisana jednostavno i pristupačno). U savremenoj nauci, privredi i obrazovanju, pojedini njeni delovi (ili knjiga u celini) dobro će doći ekonomistima, statističarima, agronomima, inženjerima, studentima tehničkih i drugih fakulteta, profesorima i boljim učenicima srednjih škola, i još mnogima, pa i amaterima, koji rešavanjem matematičkih zadataka žele da stave na probu svoje matematičke sposobnosti.

Nju mogu koristiti tri (da ih tako nazovemo) klase čitalaca. U prvu klasu ulazili bi učenici koji savladjuju školskim programom predvidjeno gradivo iz kombinatorike. Njima će biti dovoljni drugi, treći i delimično četvrti odeljak, uz letimično čitanje prvog. Drugoj klasi (uglavnom sve nabrojane profesije i studenti) namenjeni su odeljci 1-8, zaključno, gde se obradjuju, približno, sva kombinatorna pitanja potrebna u praktičnom radu inženjera, ekonomista, psihologa i pripadnika drugih struka koje primenjuju teoriju verovatnoće. Poslednja dva odeljka namenjena su onima koji žele (i potrebno im je) da dublje udju u savremenu kombinatornu teoriju. U ovu klasu verovatno moraju ući studenti matematike na fakultetima i pedagoškim akademijama. Knjiga je od početka bila zamišljena tako da posluži čitaocima na izloženi način. Iz tih razloga u prvih osam odeljaka izbegavan je metod izlaganja koji bi se mogao smatrati iole neelementarnim;tako se teorija redova koristi tek u poslednjem odeljku.

1. PREDMET KOMBINATORIKE

Kombinatorika je grana matematike koja zadire u mnoge druge oblasti matematike, pa je, zbog toga, teško dati njenu definiciju. Osim toga, kombinatorika je oblast matematike u neprestanom i brzom razvitku, što čini da svaka njena definicija rizikuje da bude zastarela već u trenutku objavljivanja. Prema jednoj definiciji, koja, s obzirom na svoju kratkoću, dosta tačno odredjuje predmet, *kombinatorika proučava raspoređjivanja elemenata u skupovima.*

U kombinatorici se proučavaju *diskretni skupovi*, tj. skupovi sastavljeni od odvojenih, izolovanih elemenata. U najvećem broju slučajeva ti skupovi su konačni, ali se proučavaju i skupovi sa beskonačno mnogo elemenata (naročito u slučajevima kada je dobro poznata struktura tih skupova).

Kao što aritmetika proučava cele brojeve služeći se operacijama sa brojevima, tzv. aritmetičkim operacijama (sabiranje i množenje) tako i kombinatorika proučava diskretne skupove primenjujući kombinatorne operacije. Od kombinatornih operacija naročito su česte sledeće dve: izdvajanje podskupova posmatranog skupa i uredjivanje elemenata u skupovima.

Na kraju ovog odeljka biće naveden jedan pregled predmeta kombinatornih ispitivanja; ovde ćemo dati jednu grubu klasifikaciju njenih zadataka.

U literaturi su najraširenija sledeća dva kombinatorna zadatka. *Prvi* zadatak je da se ispita da li postoji ili ne postoji zamišljeni raspored. (Problemi ove vrste zovu se *problemi postojanja* - egzistencije). *Drugi* zadatak podrazumeva da je postojanje odredjenog rasporeda poznata ili očigledna činjenica i traži se broj takvih rasporeda ili njihovo razvrstavanje prema nekoj osobini. (Problemi ove vrste zovu se *problemi prebrojavanja*).

Sledeća, već klasična, pitanja iskazuju probleme obe vrste.

Pitanje 1. Sa šahovske table (koja ima 64 polja) udaljena su polja iz dva suprotna ugla (iz svakog ugla po jedno). Raspolažemo sa 31 dominom, od kojih svaka može da prekrije tačno dva polja šahovske table. Da li se sa tih 31 dominom može pokriti ostatak šahovske table?

Iz samog pitanja je vidljivo da je ovo jedan primer problema egzistencije, jer se ne zna da li postoji ijedno ovakvo pokrivanje.

Čitalac može lako zaključiti da je rešenje problema odrično; naime, da se, pod navedenim uslovima, tabla ne može pokriti sa 31 dominom. Zaista, svaka domina mora pokriti jedno belo i jedno crno polje šahovske table. Medjutim, udaljavanjem (izrezivanjem) po jednog polja table iz dva suprotna ugla ravnoteža polja se poremećuje, jer su oba udaljena polja iste boje (oba bela ili oba crna), pa je zahtevano pokrivanje nemoguće. (Čitalac je, svakako, svestan činjenice da nijedan deo domine ne sme pokrivati površinu van šahovske table, tj. da pod svakom dominom moraju biti tačno dva polja table).

Pitanje 2. Šahovska tabla ima 64 polja. Raspolažemo sa 32 domine, od kojih svaka može prekriti tačno dva polja šahovske table. Na koliko se različitih načina može izvršiti prekrivanje šahovske table raspoloživim dominama?

Ovde je odmah bilo jasno da je zahtevano pokrivanje izvodljivo i postavljalo se pitanje broja rešenja. Ovo je, dakle, problem druge vrste, problem prebrojavanja.

Od većeg značaja su oni problemi čije rešavanje zahteva istančanije i složenije rasudjivanje, a to nekad mogu biti problemi postojanja, a nekad problemi prebrojavanja.

Može se iskazati i *treći* zadatak kombinatorike. To je iznalaženje postupka (algoritma) za odredjivanje rešenja. Ponekad nov postupak za rešenje već rešenog problema može poslužiti kao izvanredno sredstvo za rešavanje problema koji će tek biti postavljeni.

Klod Berž (Claude Berge) u svojoj knjizi Principles of Combinatorics posmatra konfiguracije kao osnovni predmet kombinatorike. Pod *konfiguracijom* se pritom podrazumeva preslikavanje nekog skupa objekata u neki apstraktni skup sa datom strukturom. (Na primer, permutacija skupa od n objekata je bijekcija tog skupa u uredjeni skup $\{1,2,\ldots,n\}$. Berž posmatra sledeće aspekte kombinatornih proučavanja: 1 - Proučavanje bitnih osobina poznatih konfiguracija (ovde se podrazumeva da je konfiguracija data ili je nju mogućno lako sačiniti); 2 - Ispitivanje nepoznatih konfiguracija (ispitivanje postojanja konfiguracije sa unapred propisanim osobinama); 3 - Prebrojavanje konfiguracija (ovde se podrazumeva da je jednu ili više posmatranih konfiguracija lako dobiti i traži se tačan broj konfiguracija te vrste koje se mogu napraviti); 4 - Približno prebrojavanje konfiguracija (umesto tačnog broja konfiguracija, ponekad je istraživački interes zadovoljen i poznavanjem broja od kojeg je ovaj manji ili veći, a takodje asimptotskim procenama, kongruencijama mod p itd.); 5 - Numeracija i klasifikacija konfiguracija (jedno je naći broj konfiguracija a drugo navesti sve njih redom, tj. sačiniti njihovu listu; naravno, ovaj zadatak je u opštem slučaju veoma težak, ali u posebnim prilikama njegovo rešavanje je jedini put da se izvede dokaz u kombinatorici); 6 - Optimalizacija, tj. odredjivanje (u izvesnom smislu) najboljeg rešenja izmedju nekoliko mogućih rešenja nekog problema.

2. DVA OSNOVNA PRINCIPA

Pri izvodjenju dokaza u kombinatorici često se primenjuje jedan ili drugi princip o kojima će sada biti reči (a nije redak slučaj da se primenjuju oba istovremeno).

Prvi od tih principa sugerisan je sledećim primerom.

Primer 1. Bacaju se dve kocke istovremeno. Na koliko načina se može dobiti 9 ili 11?

Rešenje. 9 dobijamo na jedan od sledećih načina: (6,3), (5,4), (4,5), gde prvi broj u maloj zagradi označava koliko je tačaka dobijeno na prvoj kocki, a drugi - koliko je tačaka dobijeno na drugoj kocki. S druge strane, 11 dobijamo na jedan od ova dva načina: (6,5) i (5,6). Broj traženih načina dobijamo sabiranjem broja načina na koji se može dobiti 9 (njih ima 3) i broja načina na koji se može dobiti 11 (ima ih 2). Zaključujemo da 9 ili 11 možemo dobiti na ukupno 5 načina.

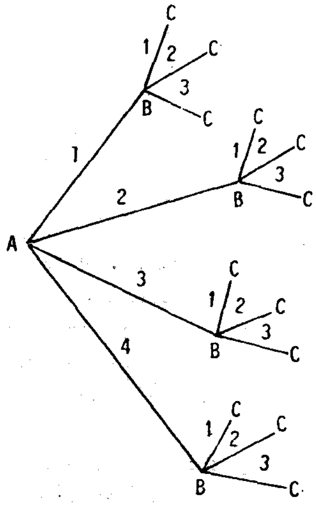
Princip zbira. Ako se objekat P može izabrati na m načina a drugi objekat Q na n načina, tada izbor bilo objekta P bilo objekta Q možemo izvršiti na $m+n$ načina.

Drugi princip sugerisan je sledećim primerom.

Primer 2. Od mesta A do mesta B vode 4 različita puta, a od mesta B do mesta C - tri različita puta. Koliko različitih puteva vodi od mesta A do mesta C?

Rešenje. Da bismo prebrojali sve te puteve možemo se poslužiti sledećom slikom (sl. 1.).

Ako hoćemo da stignemo iz A u B možemo izabrati jedan od 4 puta obeležena sa 1, 2, 3 ili 4. Ako smo izabrali, na primer, put 1, i stigli u B, imamo tri mogućnosti za nastavak puta (u cilju dolaska u C). Ako produžimo putem označenim sa 1, onda put od A do C možemo obeležiti sa 1,1. Ako, pak, nastavimo putem obeleženim sa 2, put od A do C označićemo sa 1,2. Vidimo da imamo na raspolaganju sledećih 12 puteva, kojima možemo stići od A do C: 1,1; 1,2;



Sl. 1.

1,3; 2,1; 2,2; 2,3; 3,1; 3,2; 3,3. Našli smo, dakle, da ima ukupno $4 \cdot 3$ puteva od A do C.

Princip proizvoda. Ako se objekat P može izabrati na m načina i ako, posle svakog takvog izbora, objekat Q možemo izabrati na n načina, tada izbor para (P,Q), u naznačenom poretku, možemo izvršiti na $m \cdot n$ načina.

U prednjem primeru "izbor objekta P" znači "izbor puta od A do B", a "izbor objekta Q" - "izbor puta od B do C".

Da bi ova dva principa postala čitaocu što bliža iskazaćemo ih i na drugi način. Pretpostavljajući da reč "dogadjaj" ima u svesti čitaoca dovoljno odredjeno značenje, ove principe možemo ovako formulisati.

Princip zbira. Ako su P i Q dva dogadjaja koja se ne mogu pojaviti istovremeno (na primer, pri bacanju dve kocke ne može se istovremeno dobiti i zbir 9 i zbir 11), i ako se dogadjaj P može odigrati na m načina, a dogadjaj Q na n načina, tada ima $m+n$ načina da se odigra bilo dogadjaj P bilo dogadjaj Q.

Princip proizvoda. Ako se dogadjaj P može odigrati na m načina i (pošto se dogadjaj P odigrao) dogadjaj Q na n načina, tada se oba dogadjaja, P i Q (uzeta tim redom) mogu odigrati na $m \cdot n$ načina.

Evo još jednog načina (iskazaćemo ga samo za princip proizvoda).

Ako je izvesnu kolekciju objekata moguće podeliti na m delova (da u svakom delu bude bar po jedan objekat, tj. da delovi ne butu prazni), a svaki od tih delova je dalje moguće podeliti na n (nepraznih) delova, onda je tu kolekciju objekata mogućno podeliti na $m \cdot n$ nepraznih delova.

Za čitaoca koji dobro vlada osnovnim pojmovima teorije skupova biće veoma bliska sledeća formulacija Principa proizvoda.

Ako iz skupa S podskup P možemo izabrati na m načina, i posle svakog takvog izbora ima n načina za izbor skupa Q, tada izbor skupova P i Q (u naznačenom poretku) može biti izvršen na $m \cdot n$ načina.

Napomenimo da Princip zbira kazuje koliko ima elemenata u uniji dva disjunktna skupa, ako se zna broj elemenata u svakom od tih skupova, a da Princip proizvoda kazuje koliko ima elemenata u Dekartovom proizvodu dva skupa ako se zna broj elemenata u svakom od skupova. Iz tih razloga ova dva principa se ne dokazuju, već u kombinatorici služe kao aksiome.

Oba ova principa mogu se uopštiti na više "sabiraka", odnosno "činilaca". Princip proizvoda može se, na primer, ovako uopštiti na više "činilaca".

Ako se dogadjaj A_1 može odigrati na m_1 različitih načina (a pošto se A_1 već odigrao) dogadjaj A_2 na m_2 načina, itd. i naposletku (pošto su se svi dogadjaji $A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}$ već odigrali), ako se dogadjaj A_k može odigrati na m_k različitih načina, onda se dogadjaji $A_1, A_2, \ldots, A_k$ (uzeti tim redom) mogu odigrati na $m_1\, m_2 \ldots m_k$ različitih načina.

U primeni najčešće se koriste baš uopštenja ovih principa.

Primer. U restoranu se može dobiti supa, glavno jelo i kolači. Ako supa ima tri vrste, četiri vrste gotovog jela i pet vrsta kolača, na koliko različitih načina može biti učinjena narudžbina za ručak? (Napomena: obavezno je poručiti i supu i glavno jelo i kolače).

Rešenje. Na osnovu Principa proizvoda ima $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ različitih narudžbina.

3. PERMUTACIJE I KOMBINACIJE

3.1. UVOD

Ove dve reči su poznate svakom ko je završio neku od naših srednjih škola i obično su jedino što iz kombinatorike zna jedan naš svršeni srednjoškolac; njihovo, pak, tačno značenje poznato je malom broju ljudi. U ovoj knjižici zadržaćemo se na ovim pojmovima onoliko koliko oni u celom kontekstu zaslužuju, zanemarujući znanje koje se od čitaoca sa već svršenom srednjom školom može očekivati. Radi uvodjenja pojmova, proučimo sledeća dva primera. Pre svega, uvedimo pojam "reč", podrazumevajući pod tim svaki konačan niz slova neke azbuke napisanih jedno uz drugo na način kako pišemo reči našega (ili nekog drugog) jezika. Tako, na primer, AKM je "reč", iako nema svoje značenje u srpskom jeziku. Od istih slova sačinjena reč KAM već ima značenje.

Primer 1. Koliko reči od 3 slova možemo sačiniti pomoću četiri slova A, K, M, T, uzimajući da se nijedno slovo ne sme pojaviti u reči više nego jedanput?

Primer 2. U ravni su date četiri tačke A, K, M i T takve da nikoje tri od njih ne leže na istoj pravoj. Koliko različitih trouglova obrazuju ove četiri tačke?

Na prvi pogled se može učiniti da su ova dva pitanja identična i da odgovori na njih moraju biti isti. To je, medjutim, varka i uverićemo se da su ona u osnovi različita. Već sam početak pažljivog ispitivanja uveriće nas u to. U primeru 1. reči MAT i TAM su različite (a od njih je različita, na primer reč AMT) dok su trouglovi MAT i TAM istovetni.

Ako pretpostavimo da nismo dosad ništa naučili iz kombinatorike, tj. ako budemo rasudjivali kao najprosečniji početnik, prvi problem ćemo rešiti praveći sve reči od tri slova, koristeći samo četiri navedena slova. U prvi stubac stavićemo reči koje ne sadrže T, u drugi reči koje ne sadrže M, u treći reči koje ne sadrže K i u četvrti reči koje ne sadrže A. Dobićemo sledeću tablicu:

AKM	AKT	AMT	KMT
AMK	ATK	ATM	KTM
KAM	KAT	MAT	MKT
KMA	KTA	MTA	MTK
MAK	TAK	TAM	TKM
MKA	TKA	TMA	TMK

Ima, dakle, 24 tražene reči, tj. odgovor na prvo pitanje glasi: 24.

Da bismo odgovorili na drugo pitanje primetimo da sve reči u prvom stupcu označavaju isti trougao. Isto je i sa ostalim stupcima, pa je odgovor na drugo pitanje: 4.

Objekti čiji je broj izračunat u odgovoru na prvo pitanje zovu se *permutacije*, a objekti čiji je broj odredjen u odgovoru na drugo pitanje zovu se *kombinacije*.

Tražeći odgovor na prvo pitanje mogli smo iskoristiti jedan od principa iz prethodnog odeljka, ali ćemo taj postupak odložiti za izvodjenje opšte formule za broj permutacija. Pre toga treba uvesti neophodne definicije.

3.2. DEFINICIJA PERMUTACIJA I KOMBINACIJA

Definicija. k-*permutacija od* n *objekata je svaki uredjen izbor* k *objekata od njih* n *koliko ih je na raspolaganju.*

Za svaku od takvih permutacija kažemo, kratko, da je k-*permutacija od* n. n-permutaciju od n zvaćemo prosto permutacija od n elemenata. Evo svih 2-permutacija od 4 (ovde uzimamo da je osnovni skup $\{a,b,c,d\}$): ab, ac, ad, bc, bd, cd, ba, ca, da, cb, db, dc.

U starijoj literaturi k-permutacije od n nazivaju se varijacijama bez ponavljanja k-te klase od n elemenata. Taj naziv je odavno zastareo i nije više u upotrebi.

Definicija. *k-kombinacija od n (ili duže: kombinacija k objekata uzetih između njih n) je svaki neuredjen izbor bilo kojih k elemenata od njih n koliko ih je na raspolaganju.*

Ako objekti čine skup {a,b,c,d} onda su 2-kombinacije ab i ba istovetne, jer poredak nije od važnosti. Tako da od ova četiri objekta imamo ukupno 6 2-kombinacija: ab, ac, ad, bc, bd, cd.

Objekti koje izdvajamo i uredjujemo (ili kraće: permutujemo) mogu biti slični (istovetni). Slični su, na primer, kad imamo dva primerka jedne knjige (iz istog izdanja). Kad permutujemo objekte medju kojima ima sličnih ispada da je broj *k*-permutacija od *n* manji nego što bi to bilo kad bi svi objekti bili različiti. Uverimo se u to na primeru.

Nadjemo sve 2-permutacije objekata slova: a, a, b i c. Opet imamo 4 objekta, ili ukupno 7 2-permutacija tih objekata; to su: aa, ab, ba, ac, ca, bc, cb.

Pojam permutacije jedan je od najvažnijih u matematici, pa ćemo se, s toga, još zadržati na njegovom odredjivanju. U istom duhu daćemo nešto drukčije definicije *k*-permutacije i *k*-kombinacije.

Permutacija konačnog skupa S je preslikavanje tog skupa na samog sebe. Na primer, simbol

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

predstavlja permutaciju skupa {a,b,c}, u kojoj se *a* preslikava u *b*, *b* u *c* i *c* u *a*.

Postoji šest permutacija skupa {a,b,c}:

$$\begin{pmatrix} a & b & a \\ a & b & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}.$$

Pošto je u prvoj vrsti (koja predstavlja oblast definisanosti funkcije) utvrdjen red pisanja elemenata, sve ove permutacije možemo kraće ovako zapisati: abc, acb, cba, bac, bca, cab, pa smo došli do načina zapisivanja permutacija upotrebljenog u prvoj definiciji.

Pojam permutacije prenosi se i na beskonačne skupove i, analogno, znači bijekciju beskonačnog skupa S na samog sebe.

Napomenimo da se permutacije, budući da su preslikavanja, mogu slagati, ili, kako se drukčije kaže, *množiti* ili *komponovati*. Na primer,

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}$$

U prvoj permutaciji je a preslikano u a, a u drugoj a je preslikano u c; sledi da je u njihovom *proizvodu* a preslikano u c. Isto tako, u prvoj je b preslikano u c, u drugoj je c preslikano u a; sledi da je u proizvodu b preslikano u a. Najzad, u prvom *činiocu* je c preslikano u b, u drugom b u b, pa je u rezultujućem preslikavanju c preslikano u b.

Napomenimo da skup preslikavanja datog skupa S, sa ovako definisanim množenjem obrazuje algebarsku strukturu koja se zove *grupa*. Pojam grupe jedan je od najznačajnijih pojmova algebre.

k-permutaciju od n možemo, u ovom kontekstu, definisati na sledeći način: to je permutacija bilo kojeg k-točlanog podskupa skupa S od n elemenata.

Najzad, k-kombinacija od n, je bilo koji k-točlani podskup skupa S od n elemenata.

Navedene definicije nisu jedine koje odredjuju pojmove permutacije, k-permutacije i k-kombinacije u terminima teorije skupova. k-permutacija od n sa neograničenim ponavljanjem se, na primer, može i ovako definisati: to je preslikavanje skupa $\{1,2,\dots,k\}$ u skup S sa n elemenata (na primer skup $S = \{a_1,a_2,\dots,a_n\}$).

Ovakav kombinatorni objekat zove se još i *uredjena k-torka* i obeležava na mnogo načina od kojih su najčešća sledeća dva: $(a_{i_1}, a_{i_2},\dots,a_{i_k})$ i $a_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_k}$.

Očigledno je da se k-permutacije od n bez ponavljanja dobijaju kad se u prethodnoj definiciji postavi uslov da preslikavanje bude injektivno.

3.3. ODREDJIVANJE BROJA PERMUTACIJA

U ovom odeljku bavićemo se odredjivanjem broja permutacija u sledeća 3 slučaja: 1° kad su svi objekti različiti; 2° kad medju n objekata ima sličnih (jednakih) i 3° kad ima n vrsta objekata ali u svakoj vrsti broj objekata može biti proizvoljan.

Broj k permutacija od n različitih objekata

Broj k-permutacija od n različitih objekata označićemo sa $P(n,k)$. Dokažimo sledeću teoremu.

Teorema 1. $P(n,k) = n(n-1)\ldots(n-k+1)$.

Dokaz. Pošto ima n različitih objekata, prvi član k-permutacije može se izabrati na n načina. Pošto je on izabran ostaje još $n-1$ objekat za izbor na drugo mesto u permutaciji. Treći se može izabrati na $n-2$ načina itd. Poslednji, k-ti član, može biti izabran na $n-(k-1) = n-k+1$ način. Na osnovu Principa proizvoda zaključujemo da je ukupan broj načina za obrazovanje jedne k-permutacije proizvod $n(n-1)\ldots(n-k+1)$, čime je teorema dokazana.

Posledica $P(n,n) = 1.2\ldots n$

Primetimo da u proizvodu kojim je izražen $P(k,n)$ imamo tačno k činilaca od kojih je najmanji $n-k+1$ a najveći n, i da su svi činioci celi brojevi.

Faktorijali

Proizvodi uzastopnih prirodnih brojeva, kao što su $1\cdot2\cdot3$, $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5$, itd. javljaju se vrlo često, pa je potrebno naći skraćen način za njihovo zapisivanje. Ovakvi proizvodi zovu se *faktorijali*. Klasični način zapisivanja faktorijala je zapisivanje pomoću najvećeg broja u proizvodu i znaka uzvika. Tako je, na primer,

$$3! = 1\cdot2\cdot3 = 6, 4! = 1\cdot2\cdot3\cdot4 = 24$$
$$6! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6 = 720,\ 7! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7 = 5\ 040.$$

U opštem slučaju je za prirodni broj $n \geqslant 1$:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n.$$

$n!$ čitamo "en faktorijal".

U upotrebi obrazaca u kojima figuriše $n!$ pojavljuje se potreba da se definiše i $0!$, kako se ne bi pravili izuzeci za $n = 0$. Po definiciji je

$$0! = 1.$$

Ovi brojevi, kao što je čitalac opazio iz nekoliko navedenih primera, rastu veoma brzo, kad se n uvećava. Iz tih razloga, mnoge računske tablice sadrže vrednosti za $n!$ i $\log n!$. Za veoma velike vrednosti n postoje približne vrednosti za $n!$.

Primetimo da je za svaki prirodan broj n: $n! = n(n-1)!$.

Pomoću oznake za faktorijale možemo broj $P(n,n)$ napisati kratko

$$P(n,n) = n!$$

Formula za $P(n,k)$ ne može se upotrebiti u svim slučajevima kad se rešava problem uredjenja k objekata uzetih od n koliko ih ima na raspolaganju. Preporučljivo je u takvim slučajevima neposredno primeniti Princip proizvoda, kao što će se iz sledećeg primera videti.

Primer. Koliko ima brojeva izmedju 100 i 999 čije su sve cifre različite?

Rešenje. Pošto ima 10 cifara: 0,1,...,9, a traže se uredjeni skupovi od po 3 cifre, izgleda da je rešenje $P(10,3)$, što nije tačno, jer, na primer 3-permutacija 012 ne daje broj izmedju 100 i 999. Cifra 0 ne može se upotrebiti na mestu stotina, a može na mestu jedinica i desetica). Prema tome, za mesto stotina imamo na raspolaganju 9 cifara (bilo koja cifra izuzev 0), za mesto desetica imamo na raspolaganju takodje 9 cifara (8 preostalih posle izbora cifre za stotine i nula) a za mesto jedinica ostaje, posle ta dva izbora, još 8 cifara. Na osnovu Principa proizvoda traženi broj je 9·9·8 = 648.

Kako primena gotovih formula može dovesti do pogrešnog rezultata, ako se nekritički primeni formula na situaciju za koju ista ne važi, uzećemo još jedan primer koji se rešava neposrednom primenom Principa proizvoda.

Primer. Između 648 brojeva prethodnog primera koliko ima neparnih?

Rešenje. Broj je neparan ako mu je cifra jedinica neparna, tj. ako je to jedna od cifara 1, 3, 5, 7, 9. Počnimo rasudjivanje od toga što ćemo prvo birati cifru jedinica. Mogućnosti izbora ima 5. Izaberimo zatim cifru stotina. Mogućnosti ima 8, jer 0 ne može zauzeti to mesto, a ne može ni jedna od neparnih cifara koja je već izabrana za cifru jedinica. Naposletku biramo cifru desetica. Imamo 8 mogućnosti pošto to mesto može zauzeti bilo koja od 10 cifara, a dve su već zauzete. Odgovor je 5·8·8 = 320.

Za rešenje nekih problema treba primenjivati i Princip proizvoda i Princip zbira.

Primer. Koliko brojeva između 0 i 10 000 imaju sve cifre različite?

Rešenje. Brojevi koje posmatramo mogu biti jedno, dvo, tro i četvorocifreni.

Jednocifrenih brojeva ima 9 i svi su sa različitim ciframa.

Dvocifrenih brojeva ima 90, ali nisu svi sa različitim ciframa (na primer 11, 22, itd.).

Dvocifrenih brojeva čije su sve cifre različite ima 9·9 = 81.

Trocifrenih brojeva čije su sve cifre različite, kao što već znamo ima 648.

Četvorocifrenih brojeva čije su sve cifre različite ima 9·9·8·7 = 4 536.

Na osnovu Principa zbira traženi broje je 9+81+648+4 536 = = 5 274.

Broj k permutacija od n objekata medju kojima ima sličnih

Videli smo (na primeru $n = 4$, $k = 2$) da broj k-permutacija od n nije isti u slučaju kad su svih n objekata različiti i u slučaju kad medju n objekata ima sličnih.

Sada ćemo izvesti obrazac za broj k-permutacija od n objekata medju kojima ima i sličnih, ali pre toga uočimo na primeru razloge koji se u dokazu koriste.

Primer. Koliko različitih reči možemo dobiti pregrupisavanjem slova reči "zapara"?

Rešenje. Podsetimo se da "reč" u značenju u kojem se ovde upotrebljava ne mora imati smisla u običnom jeziku; bitno je da na neki način bude poredjeno 6 slova (od kojih su tri jednaka - slični objekti): z, a, p, a, r, a.

Označimo sa x traženi broj permutacija. Uočimo jednu posebnu permutaciju na primer *aaazpr*. Pretpostavimo da su slova a različita, tj. da umesto a,a,a u ovoj permutaciji stoje a_1, a_2, a_3. Tada bi se od ove jedne posebne permutacije dobilo 3! = 6 novih permutacija:

$$\begin{array}{lll} a_1a_2a_3zpr & a_2a_1a_3zpr & a_3a_1a_2zpr \\ a_1a_3a_2zpr & a_2a_3a_1zpr & a_3a_2a_1zpr \end{array}$$

Pošto i svaka druga slična permutacija daje na sličan način 3! novih permutacija sa različitim slovima a, a ukupan njihov broj je x biće ukupan broj svih permutacija slova a_1, a_2, a_3, z, p, r ravan x 3!, tj.

$$x\,3! = 6! \quad \text{ili} \quad x = \frac{6!}{3!}$$

Pre nego pristupi čitanju daljeg teksta, čitalac bi mogao da samostalno, služeći se sličnim razlozima, reši gornji zadatak za slučaj reči *kukuruz*, u kojoj se 3 puta pojavljuje u i dva puta k.

Predjimo sada na opšti slučaj. Pretpostavimo da izmedju n objekata postoji n_1 jedne vrste, n_2 druge vrste, itd., naposletku n_k objekata k-te vrste. Ukupno je, dakle, $n_1+n_2+\ldots+n_k = n$.

U reči zapara je $n_1 = 1$ (jedno je z), $n_2 = 3$ (tri puta se javlja a), $n_3 = 1$, $n_4 = 1$. Primetimo da je $1 + 3 + 1 + 1 = 6$.

Teorema. *Broj permutacija n objekata od kojih je n_1 jedne vrste, n_2 druge vrste, itd., n_k k-te vrste, gde je $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, je*

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

Dokaz. Označimo sa x traženi broj. Kad bi svi objekti prve vrste bili različiti imali bismo $x(n_1!)$ različitih permutacija, jer bi od svake permutacije ubrojane u x nastalo $n_1!$ novih permutacija, koje odgovaraju broju mogućnosti da se n_1 različitih objekata poredja u vrstu. Ako bi n_2 sličnih objekata druge vrste bili svi različiti dobili bismo, sličnim rasudjivanjem, $(n_1!x)n_2!$ permutacija. Ponavljajući ovaj postupak dok ne dodjemo do (pretpostavljene) situacije da svih n objekata bude različito, dobili bismo sledeći broj permutacija: $n_1!n_2!\ldots n_k!x$. S druge strane je broj n-permutacija od n različitih objekata jednak $n!$ pa dolazimo do jednakosti: $n_1!n_2!\ldots n_k!x = n!$, odakle je

$$x = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

čime je dokaz završen.

Primer. Koliko različitih reči možemo dobiti permutovanjem slova u reči "kačamak"?

Rešenje. $\frac{7!}{2!3!1!1!} = 420.$

Broj k permutacija sa ponavljanjem

Ovde se podrazumevaju k-permutacije od n različitih vrsta objekata, ali u svakoj vrsti ima neograničen broj objekata (na primer, crvenih, belih, plavih, itd. loptica u neograničenom broju).

Umesto "k-permutacije sa ponavljanjem" možemo, dakle, reći "k-permutacije od n vrsta objekata, ali sa neograničenim brojem objekata u svakoj vrsti".

Na primer, ako iz svoje sredine biramo: predsednika (organizacije u kojoj se nalazimo), delegata za neku skupštinu višeg ranga i predlažemo jedno lice za odlikovanje, onda je moguće da za sva ta mesta bude izabrano isto lice. Ispada da smo posle izbora za predsednika izabrano lice vratili "u narod" i omogućili mu da i dalje bude birano. Ovo je, dakle, primer jedne 3-permutacije sa ponavljanjem.

Druga bi stvar bila kad bi trebalo izabrati 3 lica koja će istovremeno krenuti: na Mesec, Severni pol i Himalaje. Sumnjivo je da bi iko predložio da to bude isto lice. Ovo bi bio primer permutacije u kojoj nisu dozvoljena neograničena ponavljanja.

Uzmimo da raspolažemo sa 4 vrste objekata (označimo ih redom sa a, b, c i d) i da treba sačiniti sve moguće 2-permutacije sa ponavljanjem. Dobijamo:

aa ab ac ad ca cb cc cd
ba bb bc bd da db dc dd

Ima, dakle, ukupno 16 2-permutacija sa ponavljanjem od 4 vrste objekata. Način obrazovanja ovih permutacija je sledeći: najpre se izabere prvi član (za to imamo 4 mogućnosti), posle toga se bira drugi član (opet 4 mogućnosti). Na sličan način se rešava opšti slučaj.

Teorema. *Broj svih* k *permutacija sa ponavljanjem od* n *različitih vrsta objekata je* n^k.

Dokaz. Za prvi član u takvoj permutaciji ima n kandidata. Kad je on izabran, za drugi član ima, takodje n kandidata (jer već izabrani objekat ima pravo da bude i drugi član permutacije). Nastavljajući tako dolazimo do zaključka da i za k-ti član ima n mogućnosti. Primenom Principa proizvoda, nalazimo da je ukupan broj mogućnosti n^k.

3.4. KRUŽNE PERMUTACIJE

Dosad posmatrane permutacije zovu se *linearne*, jer su permutovani objekti poredjani u jednom redu - liniji. Pored potrebe da permutujemo ovako poredjane objekte često je i potreba da se permutuju objekti složeni u krugu (kao osobe u kolu ili perle u ogrlici). Takve permutacije zovu se *kružne (cikličke)*.

(Napomena: Definicija kružnih permutacija može se iskazati čisto algebarski. Ostavljamo čitaocu da to učini.)

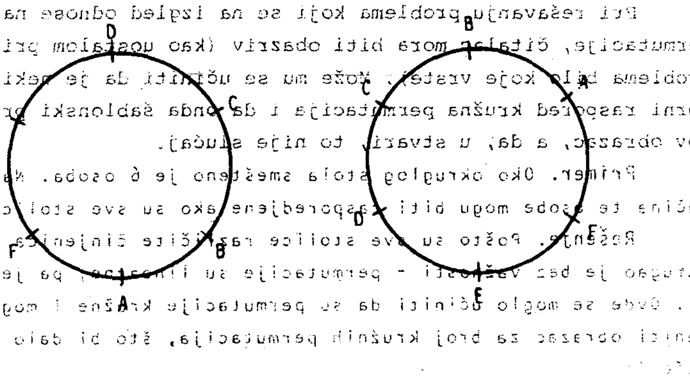
Kružne permutacije javljaju se u sledećem primeru.

Primer. Na koliko različitih načina možemo smestiti 6 osoba oko okruglog stola (uzimajući da su sve stolice jednake i nijedno mesto nije posebno istaknuto)?

Rešenje. Ako te osobe označimo sa A, B, C, D, E i F, odmah uočavamo da su permutacije

ABCDEF, BCDEFA, CDEFAB, DEFABC, EFABCD, FABCDE

istovetne (sl. 2. na kojoj su dve ucrtane permutacije istovetne), jer je potpuno isti uzajamni raspored osoba u svih 6 permutacija.



Sl. 2.

Ove permutacije znače da svaka osoba pomeri svoju stolicu za jedno mesto udesno. Prema tome, broj svih permutacija tih 6 lica za okruglim stolom dobija se deobom broja svih linearnih permutacija sa 6, tj. $\frac{6!}{6} = 5!$.

Isto rasudjivanje može se primeniti u opštem slučaju, pa se dobija sledeća

Teorema. *Broj kružnih permutacija* n *različitih objekata je* $(n-1)!$.

Daćemo još jedan dokaz ove teoreme. Kako kružna permutacija ostaje nepromenjena kad se svaki objekat pomeri udesno za jedno, dva, itd. mesta, može se utvrditi mesto jednog objekta i rasporediti ostale objekte u odnosu na njega. Za mesto do utvrdjenog objekta ima $n-1$ kandidat. Za sledeće mesto preostaje još $n-2$ kandidata, itd. Prema Principu proizvoda ima ukupno $(n-1)(n-2)\ldots3\cdot2\cdot1 = (n-1)!$ mogućnosti.

Napomena. Pojam "desno" na krugu možemo objasniti na sledeći način. Ako zamislimo da smo u kolu, okrenuti ka središtu kruga, onda "desno" treba da znači desno u uobičajenom smislu. Umesto desno od utvrdjenog objekta mogli smo linearne permutacije redjati levo od njega: rezultat bi bio isti, tj. dobile bi se one iste kružne permutacije koje smo dobili na prethodni način. Umesto "levo" i "desno" upotrebljavaju se još i izrazi "u smeru suprotnom kretanju satne kazaljke" i "u smeru satne kazaljke".

Pri rešavanju problema koji se na izgled odnose na kružne permutacije, čitalac mora biti obazriv (kao uostalom pri rešavanju problema bilo koje vrste). Može mu se učiniti da je neki kombinatorni raspored kružna permutacija i da onda šablonski primeni gotov obrazac, a da, u stvari, to nije slučaj.

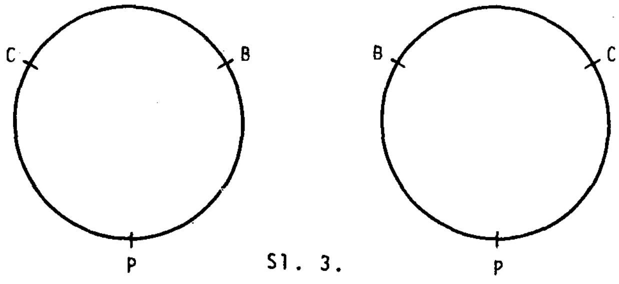
Primer. Oko okruglog stola smešteno je 6 osoba. Na koliko načina te osobe mogu biti rasporedjene ako su sve stolice različite?

Rešenje. Pošto su sve stolice različite činjenica da je sto okrugao je bez važnosti - permutacije su linearne, pa je odgovor 6!. Ovde se moglo učiniti da su permutacije kružne i mogao se primeniti obrazac za broj kružnih permutacija, što bi dalo pogrešno rešenje.

Primer. Na koliko načina možemo napraviti ogrlicu od 10 različitih obojenih perli?

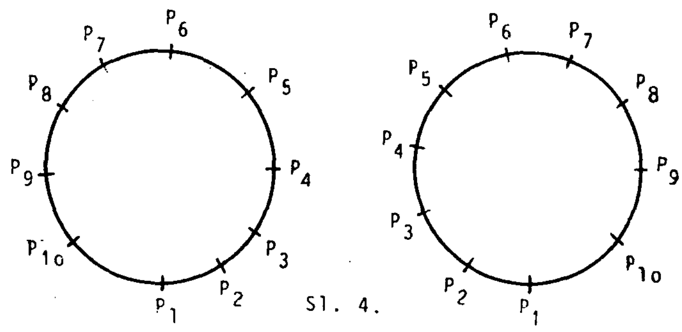
Rešenje. Površno gledano, traženi razmetašji su kružne permutacije, pa je njihov broj 9!. To je, medjutim, netačno. Da se najlakše uverimo da je tako, uzmimo 3 perle: plavu (P), belu (B) i crvenu (C). Pomoću 3 objekta možemo sačiniti dve kružne permutacije (sl. 3). U ogrlici su oba ova rasporeda identična. Naime, C je izmedju P i B i nema nikakvih daljih mogućnosti. Razlog je taj što ogrlicu možemo okrenuti, što nije slučaj sa zamišljenim rasporedom na krugu, koji je utvrdjen na jednoj strani papira.

Redjajući perle u ogrlicu, recimo desno od perle P_1 po nekom



Sl. 3.

izabranom redu, i redjajući te iste perle, po istom redu levo od P_1 dobijamo jednu istu ogrlicu (sl. 4.), gde se, na primer, P_{10} u oba slučaja nalazi izmedju P_1 i P_9). Istim postupkom dobili bismo dve različite kružne permutacije. Prema tome, traženi broj ogrlica iznosi polovinu broja kružnih permutacija, tj. (9!):2.



Sl. 4.

3.5. ODREDJIVANJE BROJA KOMBINACIJA

Primer 2 sa početka ovog odeljka doveo nas je do pojma kombinacija i do problema odredjivanja njihovog broja. Na kombinacije nailazimo u svim onim okolnostima kad je izmedju n objekata potrebno izabrati njih k $(k \leqslant n)$, a nije važan redosled kojim je izbor obavljen. Na primer, članovi nekog odbora mogu biti izabrani sa nejednakim brojem glasova, ali kad su već izabrani oni čine dotični odbor, a red uspostavljen brojem glasova koje su dobili postaje nevažan.

Napomenimo da je izraz "k-kombinacija od n" ranije iskazivan nešto duže: "kombinacija k-te klase od n objekata".

Broj k kombinacija od n različitih objekata

Teorema. *Broj svih k-kombinacija od $\underline{n}$ različitih objekata, koji ćemo označiti sa $C(n,k)$ je*

$$C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Dokaz. Svaka k-kombinacija od n različitih objekata može se urediti na $k!$ različitih načina, i pri svakom od tih uredjenja dobija se po jedna k-permutacija od n različitih objekata. Ako označimo sa $C(n,k)$ broj tih kombinacija, iz ovoga što je rečeno i iz obrasca za broj svih k-permutacija od n različitih objekata sledi

$$k!C(n,k) = n(n-1)\ \dots\ (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Odavde dobijamo navedeni obrazac.

Primer. Iz grupe od 10 učenika treba izabrati odbor od 3 člana. Na koliko se načina to može izvesti?

Rešenje. Ovde je reč o izboru tri od ukupno 10 različitih objekata, tj. o 3-kombinacijama od 10, pa je traženo rešenje $C(10,3) = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 120$.

Obrazac za $C(n,k)$, ne treba primenjivati šablonski, treba najpre videti radi li se o k-kombinacijama ili o nečem složenijem. Evo primera, koji čitaocu treba da ukaže na potrebu opreznosti.

Primer. Izmedju 10 osoba treba izabrati komisiju od 4 člana. Na koliko načina taj izbor može biti učinjen ako postoje dve zavadjene osobe koje ne mogu zajedno biti u komisiji?

Rešenje. Ako izuzmemo zavadjene osobe postoji još 8 kandidata za komisiju pa izbor može biti obavljen na $C(8,4) = 70$ načina, ne računajući komisije čiji je član jedna od zavadjenih osoba. Pored ovog broja moguće je obrazovati komisije čiji član je jedan od (dosad) izuzetih. Na osnovu Principa proizvoda i obrasca za broj kombinacija, takvih komisija može biti $2\cdot C(8,3) = 112$, jer svaku od zavadjenih osoba možemo pridružiti već izabranom tročlanom odboru i tako dobiti odbor od 4 člana. Iz Principa zbira sledi da je ukupan broj mogućnih komisija 70 + 112 = 182.

Postupak rešavanja problema uz primenu ne samo obrasca za broj kombinacija, već i Principa zbira i proizvoda, može se naći i u sledećem primeru.

Primer. Između 7 muškaraca i 4 žene treba izabrati grupu od 6 osoba. Na koliko se načina to može izvesti, ako je obavezno da u grupi budu najmanje 2 žene?

Rešenje. Mogu se izabrati 2, 3 i 4 žene. Dve žene je moguće izabrati na $C(4,2)=6$ načina. Posle toga treba izabrati 4 muškarca, za šta postoji $C(7,4) = 35$ načina. Prema pravilu proizvoda, dve žene i četiri muškarca moguće je izabrati na $C(4,2)C(7,4) = 6\cdot35 = 210$ načina. Za izbor 3 žene i 3 muškarca mogućnih načina ima $C(4,3)C(7,3) = 140$. Naposlektku, za izbor 4 žene i 2 muškarca mogućnih načina ima $C(4,4)C(7,2) = 1\cdot21 = 21$. Prema Principu zbira, ukupan broj načina da se obavi traženi izbor iznosi $210 + 140 + 21 = 371$.

Rešimo još ovaj zadatak.

Dato je n različitih objekata i k kutija. Na koliko načina je moguđno smestiti objekte u kutije tako da u i-toj kutiji bude n_i objekata $(n_1+n_2+\dots+n_k = n)$.

Smestimo u prvu kutiju n_1 objekat. To je moguđno izvesti na $\binom{n}{n_1}$ načina. Posle toga za drugu kutiju ostaje $\binom{n-n_1}{n_2}$ mogućnosti smeštaja. Nastavljajući tako dolazimo do rezultata: traženi broj smeštaja je

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-\dots-n_{k-1}}{n_k} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_k!}$$

Dobili smo, dakle, isti broj koji i u odgovoru na pitanje: na koliko načina je mogućno poredjati u red n_1 objekat jedne vrste, n_2 objekata druge vrste, ..., n_k objekata k-te vrste?

Ta identičnost rešenja je primer nečeg što se u matematici naziva *principom dualnosti*.

Napomenimo na kraju ovog odeljka da pored proučenog tipa kombinacija postoje i drugi tipovi, kojima ćemo se pozabaviti u jednom od sledećih odeljaka.

3.6. PRIMERI

1. Koliko različitih četvorocifrenih brojeva možemo napisati pomoću cifara 0,1,2,3,4,5,6, uzimajući da se svaka od cifara može ponavljati?

Rešenje. Za prvu cifru imamo 6 mogućnosti, jer 0 ne može biti prva cifra. Pošto smo prvu izabrali, za drugi, treću i četvrtu cifru ima po 7 mogućnosti. Na osnovu pravila proizvoda, traženi broj je $6\cdot 7^3$.

2. Osam osoba igra u kolu. Na koliko različitih načina se one mogu uhvatiti jedni do drugih u kolo?

Rešenje. Osobe u kolu nisu vezane za utvrdjeno mesto, već se nalaze u odredjenom medjusobnom odnosu. To znači da se uredjenja tih osoba smatraju jednakim ako su u istom poretku gledano u smeru kretanja kazaljke na časovniku. Drugim rečima, ako podjemo od jedne osobe (zovimo je 0_1) i idemo po krugu u smeru satne kazalje, osobe se nalaze u istom poretku. Prema tome, položaj jedne osobe nije od značaja, već je važno znati položaj ostalih 7 osoba u odnosu na onu prvu 0_1. Držeći 0_1 na mestu imamo 7! različitih rasporeda, što je i traženo rešenje.

3. U jednoj ustanovi zaposleno je 1 000 osoba. Je li mogućno da sve one imaju različite inicijale?

Rešenje. Broj inicijala jednak je broju uredjenih parova koji se mogu obrazovati od elemenata skupa od 30 elemenata (slova azbuke). Kako je taj broj $30^2 = 900 < 1\,000$, to nije mogućno da sve osobe imaju različite inicijale.

4. Na igranci ima 10 devojaka i 12 mladića. Na koliko se načina može obrazovati 5 igračkih parova?

Rešenje. Izmedju 10 devojaka možemo izabrati grupu od 5 devojaka na $\binom{10}{5}$ načina. Uz svaki od ovih izbora treba obrazovati uredjenu petorku mladića i na taj način uvek će se sastaviti po 5 igračkih parova. Poslednji izbor je mogućno obrazovati na $12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8$ različitih načina. Prema pravilu proizvoda ima ukupno $\binom{10}{5}\cdot 12\cdot 11\cdot$ $\cdot 10\cdot 9\cdot 8$ igračkih parova.

5. Koliko različitih celih četvorocifrenih brojeva deljivih sa četiri možemo obrazovati pomoću cifara 1,2,3,4 i 5, tako da se svaka cifra može ponavljati?

Rešenje. Četvorocifreni brojevi napisani pomoću ovih 5 cifara deljivi su sa 4 jedino ako se završavaju jednom od 5 kombinacija: 12, 24, 32, 44, 52, dok pri tom prve cifre mogu biti proizvoljne. Kako prve dve cifre možemo izabrati na 5^2 načina, traženi broj je (prema pravilu proizvoda) $5\cdot 5^2 = 125$.

6. Iz razreda u kojem ima 12 devojčica i 10 dečaka treba izabrati razredni odbor od 5 članova. Na koliko se načina to može učiniti ako u odboru ne može biti više od 3 dečaka?

Rešenje. U odbor može ući: 1° 5 devojčica, 2° 4 devojčice i 1 dečak, 3° 3 devojčice i 2 dečaka, i 4° 2 devojčice i 3 dečaka. Mogućnih izbora ima redom: $\binom{12}{5}$, $\binom{12}{4}10$, $\binom{12}{3}\binom{10}{2}$ i $\binom{12}{2}\binom{10}{3}$. Ukupan broj mogućnosti izbora je $\binom{12}{5} + \binom{12}{4}10 + \binom{12}{3}\binom{10}{2} + \binom{12}{2}\binom{10}{3} = 23\,562$.

7. Koliko se trocifrenih brojeva može napisati pomoću cifara 0,1,2,3,5, uzimajući da se nijedna cifra ne ponavlja? Koliko je od njih parnih?

Rešenje. Traženi broj je $5\cdot 4\cdot 3 - 4\cdot 4\cdot 3 = 48$, jer nula ne može biti prva cifra. Parni brojevi se završavaju nulom i dvojkom. Njihov broj je sledeći. Brojeva koji imaju na kraju 0 ima $4\cdot 3 = 12$. Brojeva koji na kraju imaju 2 ima koliko i dvocifrenih brojeva od 4 cifre medju kojima je i nula, tj. $4\cdot 3 - 3 = 9$. Parnih brojeva ima ukupno $12 + 9 = 21$.

8. U knjižari se nalazi 7 primeraka romana "Na Drini ćuprija" Ive Andrića, 4 primerka romana "Travnička hronika" i 6 primeraka romana "Gospodjica". Pored toga ima 5 tomova koji sadrže "Na Drini ćuprija" i "Gospodjicu" i 9 tomova koji sadrže "Travničku hroniku" i "Gospodjicu". Na koliko se načina može kupiti po jedan primerak svakog od tih romana?

Rešenje. Cilj se može ostvariti kupovanjem svakog od romana štampanim posebno ili kupovanjem jednog toma sa dva romana i trećeg romana posebno štampanog. Prema tome, traženi broj je $7\cdot 4\cdot 6 + 5\cdot 4 + 9\cdot 7 = 251$.

9. Kojih brojeva od 1 do 10 000 000 ima više: onih u čijem zapisu učestvuje cifra 1 ili onih u čijem zapisu cifra 1 ne učestvuje?

Rešenje. m-cifrenih brojeva u čijem zapisu ne učestvuje 1 ima $8\cdot 9^{m-1}$. Dakle, izmedju 1 i 10 000 000 ima ukupno

$$8(1+9+9^2+9^3+9^4+9^5+9^6) = 4\ 782\ 968$$

brojeva u čijem zapisu 1 ne učestvuje. Sledi da ima više onih u čijem zapisu 1 učestvuje, jer je $4\ 782\ 968 < 10\ 000\ 000/2$.

10. U kotarici ima 10 jabuka i 8 krušaka. Dečak ima pravo da izabere jabuku ili krušku, a posle toga devojčica ima pravo da izabere jabuku i krušku. U kojem slučaju devojčica ima više mogućnosti izbora: ako dečak izabere jabuku ili ako izabere krušku?

Rešenje. Devojčica bira par – jabuku i krušku. Pitanje je u tome, posle kojeg dečakovog izbora ostaje više parova. Ako dečak izabere jabuku preostaće $9 \cdot 8 = 72$ para, a ako izabere krušku, preostaće $10 \cdot 7 = 70$ parova. Prema tome, za devojčicu je povoljnije da dečak izabere jabuku.

11. Morzeova azbuka je telegrafski sistem znakova koji se sastoji od kombinacija tačke i crtice. Svako slovo azbuke predstavlja neku kombinaciju ta dva znaka. Koji je minimalni broj k znakova takvih da se slova srpske ćirilice mogu označiti sa najviše k znakova?

Rešenje. Očigledno je da se sa samo jednim znakom mogu preneti svega dva slova, tj. 2^1. Sa dva znaka ($k = 2$) mogu se preneti $2^2 = 4$ slova. Sa 3 znaka mogu se preneti $2^3 = 8$ slova, a sa 4 prenosimo $2^4 = 16$. Ukupan broj slova koja možemo preneti sa 1, 2, 3 i 4 simbola iznosi

$$2 + 4 + 8 + 16 = 30$$

pa je $k = 4$, tj. sva slova ćirilice mogu se preneti sa najviše 4 znaka u koje ulaze tačka i crtica.

Napomena. Zadatak je rešen pomoću broja permutacija sa ponavljanjem. Ispišite sve te permutacije.

12. Na koliko načina možemo izabrati tri broja od 1 do 30 tako da njihov zbir bude paran?

Rešenje. Zbir je paran ako su: 1° dva sabirka neparna a 1 paran, i 2° sva tri sabirka su parna. Sledi da je broj izbora

$$\binom{15}{2} \cdot 15 + \binom{15}{3} = 2\ 030.$$

13. Na koliko načina možemo izabrati 2 broja izmedju 1 i 20 tako da njihov zbir bude neparan broj?

Rešenje. Zbir je neparan ako je jedan sabirak paran a drugi neparan. Paran sabirak se može izabrati na 10 načina, a sa svakim od tako izabranih brojeva može se sabirati bilo koji od neparnih brojeva, kojih takodje ima 10. Odgovor je $10 \cdot 10 = 100$.

14. Tajni sef na čijem disku se nalazi 12 pokretnih slova otvara se automatski kad se sastavi jedna odredjena reč od 5 slova (slova se u reči mogu ponavljati). Koliko pokušaja treba da učini čovek koji ne zna tu tajnu reč da bi se sef sigurno otvorio?

Rešenje. Očigledno reč je o permutacijama sa ponavljanjem 5 slova izabranih izmedju 12. Njihov broj je 12^5.

15. Koliko različitih trocifrenih parnih brojeva možemo napisati tako da se nijedna cifra u broju ne ponavlja?

Rešenje. Broj je paran ako se završava sa 0,2,4, 6 i 8. Posmatrajmo dva slučaja: kad se broj završava sa 0 i kada se završava sa 2, 4, 6 i 8. U slučaju kada je nula na kraju postoji još 9 cifara za prvo mesto (prvu cifru u broju) i pošto je ta prva izabrana ostaje još 8 cifara za drugo mesto. Ukupno je, dakle, $9 \cdot 8 = 72$ trocifrenih brojeva koji se završavaju sa 0. U drugom slučaju postoji 4 mogućnosti za treću cifru (to su: 2, 4, 6 i 8). Kada je treća cifra utvrdjena ostaje još 8 mogućnosti za prvu cifru, jer nula ne može zauzeti to mesto, a kad je i cifra za prvo mesto izabrana ostaje još 8 mogućnosti za drugo mesto. Ima, dakle, ukupno $8 \cdot 8 \cdot 4$ parnih trocifrenih brojeva koji se završavaju sa 2, 4, 6 i 8, a čije su sve cifre različite. Ukupno svih parnih trocifrenih brojeva bez cifara koje se ponavljaju ima $9 \cdot 8 + 8 \cdot 8 \cdot 4 = 328$.

16. Na koliko načina možemo postaviti na šahovsku tablu 8 topova tako da nijedan od njih ne tuče nekog drugog?

Rešenje. Razlikovaćemo dva slučaja: a) svaki top je obeležen pa se svih 8 topova razlikuju medju sobom, b) svi topovi su jednaki.

U slučaju a) uzećemo jedan od topova i postaviti na šahovsku tablu. Mogućnost je $64 = 8^2$. Sledeći top ne sme ležati na horizontali i vertikali prethodnog topa pa mu ostaje 7^2 mogućnosti. Treći top ne sme ležati ni na horizontali ni na vertikali prva dva topa pa ima $(8-2)^2$ mogućnosti, itd. Primenom pravila proizvoda nalazimo da ima ukupno $(8!)^2$ mogućnosti.

U slučaju b) dobijeni broj mogućnosti pod a) treba podeliti brojem svih mogućih permutacija skupa od 8 topova, tj. sa 8!. Prema tome, 8 jednakih topova možemo rasporediti na šahovskoj tabli tako da ne biju jedan drugog na 8! načina.

Zadatak se može uopštiti na šahovsku tablu sa n^2 polja. Rezultati su:

u slučaju a) $(n!)^2$
u slučaju b) $n!$.

3.5. ZADACI

1. Ako $P(n,k)$ označava broj k-permutacija od n, dokazati: a) $P(7,3) = P(15,2)$; b) $P(n,1) + P(m,1) = P(m+n,1)$; c) $P(n,n) = P(n,n-1)$ za svaki prirodni broj n.

2. Koliko simbola možemo obrazovati od 3 različita slova azbuke?

3. Koji je odgovor na prethodno pitanje ako se slova smeju ponavljati?

4. Pet lica želi da se fotografiše. Na koliko načina ona mogu zauzeti položaj: a) u jednom redu; b) u dva reda (3 lica u prednjem, 2 u zadnjem redu)?

5. Na koliko različitih načina možemo poredjati ovih 13 slova: a, a, b, b, b, b, c, c, c, c, c, c, c?

6. Koliko različitih brojeva većih od 300 000 možemo napisati pomoću cifara 1, 2, 3, 4, 4, 4?

7. Koliko brojeva većih od 5 000 možemo napisati pomoću cifara 2, 4, 5, 8, 9 i 0, pod uslovom da su sve cifre u broju različite?

8. Koliko različitih brojeva možemo dobiti množeći neke ili sve cifre: 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5?

9. 6 mladića i 5 devojaka treba da sednu na klupu. Na koliko načina oni to mogu učiniti ako je uslov da svaka devojka sedi izmedju dva mladića?

10. U fudbalskom timu od 11. fudbalera njih četvorica mogu igrati na mestima oba krilna halfa i obe polutke, druga četvorica - oba beka i oba krila, dvojica golmana i centarhalfa i jedan centarfora i oba krila. Na koliko načina je mogućno sastaviti tim?

11. Bez izračunavanja zaključiti sa koliko se nula završava $30!$.

12. Koliko različitih permutacija možemo obrazovati od slova reči "matematika"?

13. Koliko ima petocifrenih brojeva (sa različitim ciframa), napisanih pomoću cifara 1, 2, 3, 4, 5 u kojima je cifra 1 uvek pored cifre 2?

14. Koliko ima brojeva iz prethodnog primera u kojima je 2 neposredno iza 1?

15. Koliko četvorocifrenih brojeva deljivih sa 4 možemo napisati pomoću cifara 1, 2, 3, 4 i 5 ako se svaka cifra može ponavljati više puta?

16. Koliko ogrlica možemo napraviti od:
a) 7 različitih perli; b) 6 perli jedne i 1 perle druge vrste; c) 5 perli jedne i 2 perle druge vrste?

17. Pravougaonik je podeljen sa p pravih linija pararelnih jednoj stranici i q pravih linija paralelnih drugoj stranici. Naći broj različitih pravougaonika u dobijenoj figuri.

(Primedba - Uočiti da se neki od pravougaonika može nalaziti u drugom).

18. Dato je n tačaka u ravni, od kojih se k nalazi na jednoj pravoj a ostale su u opštem položaju. Naći broj pravih linija koje se dobijaju spajanjem svih parova tih pravih.

19. Dato je n tačaka u ravni, koje su spojene pravim linijama na sve moguće načine. Uzimajući da medju tim pravim linijama nema paralelnih i nikoje tri se ne seku u istoj tački, odrediti broj presečnih tačaka tih pravih linija ne računajući n datih tačaka.

20. Dato je n tačaka na krugu i ucrtane sve tetive kruga čiji su krajevi tih n tačaka. Uzimajući da se nikoje tri tetive ne seku u jednoj tački, odrediti broj presečnih tačaka tetiva u krugu.

(Ne uzimaju se u obzir presečne tačke pravih na kojima leže tetive, ako te tačke leže van kruga).

21. Neka je svaka od p tačaka koje leže na jednoj pravoj spojena sa svakom od q tačaka na drugoj pravoj, paralelnoj prvoj. Naći broj tačaka preseka tako dobijenih duži uzimajući da se ni-

koje tri duži ne seku u istoj tački.

22. Na jednom testu od 10 pitanja ispitanik može za svako pitanje izabrati jedan od tri ponudjena odgovora. Na koliko načina može kandidat pokušati da nadje pravi odgovor?

23. Uzimajući da svaki tačan odgovor na pitanje iz prethodnog zadatka vuče 10 poena, naći broj načina da ispitanik dobije:

a) 70 poena

b) 70 poena ili više

24. U ravni je dato n tačaka od kojih se p tačaka nalazi na jednoj pravoj a osim njih nikoje tri tačke ne leže na istoj pravoj. Koliko ima trouglova čija su temena te tačke?

25. Na pravoj se nalazi p tačaka a na njoj paralelnoj pravoj q tačaka. Koliko trouglova odredjuju ove tačke?

26. Neka je pri uslovu prethodnog zadatka zadata treća paralelna prava i r tačaka na njoj, i neka nikoje tri tačke ne leže na jednoj pravoj koja seče sve tri zadate paralelne prave. Koliko se još trouglova dobija?

27. U ravni je dato n tačaka od kojih nikoje tri ne leže na jednoj pravoj i nikoje četiri na jednom krugu. Kroz svake dve od tih tačaka povučena je prava a kroz svake tri - krug. Naći najveći mogući broj presečnih tačaka svih tih povučenih pravih i krugova.

28. U ravni su date tačke A i B. Kroz A prolazi m, a kroz B n pravih. Neka nikoje dve prave nisu paralelne i nijedna ne prolazi kroz A i B. Naći broj oblasti na koje ove prave dele ravan.

29. Na koliko načina n različitih objekata možemo smestiti u k kutija, ako je $k > n$ i u jednu kutiju se sme staviti samo jedan objekat?

30. U kutiji se nalazi 100 kuglica jednake veličine i težine ali različitih boja: 28 belih, 20 crvenih, 12 plavih, 20 žutih, 10 sivih i 10 zelenih. Koji najmanji broj kuglica treba izvući da bi se u njemu neizbežno našlo 15 kuglica iste boje?

31. Kvadrat je podeljen na 16 jednakih kvadrata. Na koliko načina je moguće obojiti manje kvadrate sa 4 boje (recimo crvena, crna, plava i zelena) tako da u svakom vodoravnom i uspravnom redu budu sve četiri boje?

4. BINOMNI I POLINOMNI OBRAZAC

4.1. SKRAĆENO OBELEŽAVANJE ZBIROVA

Često se konačni zbirovi i proizvodi brojeva mogu skraćeno napisati pomoću grčkih slova Σ (čitaj: sigma) i Π (čitaj: pi).

Na primer, zbir $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ skraćeno zapisujemo ovako:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

i čitamo: "Zbir a_i kad i uzima vrednosti od 1 do n". Broj *i* se zove *indeks* sabiranja, a brojevi 1 i *n* su *donja* i *gornja granica indeksa sabiranja*. Gornja granica je veća od donje ili njoj jednaka.

Primetimo da nije važno koje smo slovo uzeli za indeks sabiranja, jer pored *i* istoj svrsi bi poslužilo i bilo koje drugo slovo sem, narano, slova uzetih u formuli, kao na pr. donja i gornja granica indeksa sabiranja i dr. Tako, na primer, sledeća tri zapisa označavaju isti zbir:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k,\quad \sum_{j=1}^{n} a_j,\quad \sum_{\beta=1}^{n} a_\beta .$$

Indeksi i, k, j, β itd. upotrebljeni na ovaj način, su "nemi indeksi". U ovom slučaju bilo koje slovo, sem slova *n* i slova *a*, može biti upotrebljeno kao nemi indeks.

Primeri:

$$\sum_{i=1}^{4} a^i = a + a^2 + a^3 + a^4$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$$

Gornja i donja granica indeksa sabiranja mogu biti bilo koja dva cela broja. Na primer,

$$\sum_{i=-2}^{3} a_i = a_{-2} + a_{-1} + a_o + a_1 + a_2 + a_3$$

$$\sum_{i=o}^{n} (i+1)^3 = 1^3 + 2^3 + \dots + (n+1)^3$$

$$\sum_{k=5}^{9} k\cdot 2^k = 5\cdot 2^5 + 6\cdot 2^6 + 7\cdot 2^7 + 8\cdot 2^8 + 9\cdot 2^9$$

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n$$

Osobine simbola Σ. Iz osobina komutativnosti i asocijativnosti zbira realnih brojeva i distributivnosti množenja u odnosu na sabiranje slede sledeće osobine simbola Σ (dokazi ovih osobina izvode se indukcijom):

a) $\sum\limits_{k=1}^{n} (a_k+b_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k + \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$ (aditivnost)

b) $\sum\limits_{k=1}^{n} c\, a_k = c \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ (homogenost)

c) $\sum\limits_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_o$

Skraćeno beleženje proizvoda

Proizvod oblika $a_1\cdot a_2\cdot \dots \cdot a_n$ kraće beležimo ovako

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1\cdot a_2\cdot \dots \cdot a_n$$

i čitamo "Pi a_i kad i ide od 1 do n".

Lako se dokazuju sledeće osobine simbola za proizvod Π:

a) $\prod\limits_{i=1}^{n} a_i b_i = (\prod\limits_{i=1}^{n} a_i)(\prod\limits_{a=1}^{n} b_i)$

b) $\prod\limits_{i=1}^{n} C = C^n$

c) $\prod_{i=1}^{n} Ca_i = C^n \prod_{i=1}^{n} a_i$

d) $\prod_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{a_n}{a_o}$ ($a_k \neq 0$ za svako k)

Odmah se vidi da se n! može zapisati ovako:

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i$$

Na sličan način uvode se dvostruki, trostruki, itd. zbirovi i proizvodi. Na primer:

$$\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{3} a_{ij} = \sum_{i=1}^{4} (a_{i1} + a_{i2} + a_{i3})$$

$$= a_{11} + a_{21} + a_{31} + a_{41} + \dots + a_{13} + a_{23} + a_{33} + a_{43}$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{4} a_{ij}$$

Lako se dokazuje da je uvek

a) $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$

b) $\prod_{j=1}^{m} \prod_{i=1}^{n} a_{ij} = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} a_{ij}$

4.2. BINOMNI I POLINOMNI BROJEVI

Binomni brojevi (koeficijenti)

Operišući sa konačnim skupovima i prebrojavajući njihove podskupove često srećemo brojeve oblika $\frac{n!}{k!(n-k)!}$, gde su k i n celi brojevi takvi da je $0 \leqslant k \leqslant n$. Zbog svoje važnosti ti brojevi su dobili posebno ime - *binomni koeficijenti* (razlozi zbog kojih se tako zovu biće jasni kasnije) i posebne oznake. Jedna od najčešćih oznaka za broj $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ je $\binom{n}{k}$ (čitati: "en nad ka"), tj.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad .$$

Kad su n i k celi pozitivni brojevi i $k \leqslant n$ znamo kombinatorni smisao brojeva $\binom{n}{k}$. To su brojevi $C(n,k)$, koji kazuju koliko u skupu sa n elemenata ima k-podskupova, tj. podskupova sa k elemenata. Za $k = 0$ broj $C(n,0) = 1$, nema kombinatornog smisla, ali je uveden radi toga da se u računima u kojima se pojavljuju brojevi $C(n,k)$ ne bi pravili izuzeci za $k = 0$.

Isto tako se uvode

$$C(0,k) = \binom{0}{k} = 0, \quad C(0,0) = \binom{0}{0} = 1$$
$$C(n,k) = \binom{n}{k} = 0 \text{ za } k > n$$

a takodje i $C(n,k) = 0$ za $k < 0$.

U mnogim primenama matematike korisno je uvesti i brojeve oblika $C(-n,k)$ stavljajući

$$C(-n,k) = \binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$$

I za bilo koji drugi realni broj α definiše se $\binom{\alpha}{k}$ na sledeći način:

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ \dots\ (\alpha-k+1)}{k!}, \quad \binom{\alpha}{0} = 1$$

gde se, kao i inače uzima da je k prirodan broj ili nula (kaže se ceo nenegativan broj). Poslednja definicija simbola $\binom{\alpha}{k}$ obuhvata sve ranije definicije.

Oznaka $\binom{n}{k}$ smatra se, u novije vreme, pomalo nezgrapnom pa se, pored $C(n,k)$, zamenjuje i ovim oznakama: $[n]_k$, C_n^k, ${}_nC_k$, itd.

Evo nekoliko primera vrednosti binomnih koeficijenata:

$$\binom{3}{1} = \frac{3!}{1!2!} = 3, \quad \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = 10, \quad \binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n$$
$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}, \quad \binom{n}{n} = 1$$

Primetimo da je

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ \dots\ (n-k+1)}{k!}$$

pa otuda i dolazi prednja definicija broja $\binom{\alpha}{k}$ za α realno.

Binomni koeficijenti imaju čitav niz zanimljivih osobina, od kojih ćemo navesti nekolike.

Osobine binomnih koeficijenata

I $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Računski dokaz ove identičnosti je neposredan, jer su obe strane identične sa $\frac{n!}{k!(n-k)!}$. Kombinatorni dokaz je u tome što uzimanjem k-točanog podskupa skupa sa n elemenata ostaje podskup od $n-k$ elemenata i obrnuto, pa je broj jednih jednak broju drugih.

II $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

Ova formula zove se Paskalova formula.

Računska provera identičnosti laka je i ostavlja se čitaocu. Izvešćemo njen kombinatorni dokaz.

$\binom{n}{k}$ je broj svih k-točlanih podskupova skupa od n različitih objekata. Uočimo jedan odredjen objekat O. Tada svi k-točlani podskupovi ulaze u jednu od sledeće dve klase: (i) klasu koja sadrži O, i (ii) klasu koja ne sadrži O. Klasa (i) ima $\binom{n-1}{k-1}$ elemenata, a klasa (ii) $\binom{n-1}{k}$ elemenata. Time je formula dokazana.

Ilustrujući dokaz na primeru skupa $\{1,2,3,4,5\}$ i njegovih dvočlanih podskupova $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{1,5\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$, $\{2,5\}$, $\{3,4\}$, $\{3,5\}$, $\{4,5\}$ vidimo da se 1 sadrži u 4, tj. u $\binom{4}{1}$ podskupa a ne sadrži u 6, tj. u $\binom{4}{2}$ podskupova, pa je

$$\binom{5}{2} = \binom{4}{1} + \binom{4}{2}$$

III $\binom{m+n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$

Dokaz. Pretpostavimo da imamo m ispravnih i n neispravnih predmeta neke proizvodnje koji su pomešani i smešteni na jednoj gomili. Broj svih mogućih k-podskupova ovog skupa je $\binom{m+n}{k}$.

S druge strane, svi ovi k-podskupovi mogu se klasifikovati na one koji sadrže redom $0,1,\ldots,k$ neispravnih predmeta ($k \leq n$). Iz gomile od m ispravnih i n neispravnih predmeta možemo, prema pravilu proizvoda, izabrati i ispravnih i $k-i$ neispravnih predmeta na

$$\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$$

načina, gde je $0 \leq i \leq k$.

Za $i = 0,1,\ldots,k$ sve klase su disjunktne, možemo, dakle, primeniti princip zbira, pa dobijamo desnu stranu gornje identičnosti. Kako su time iscrpljeni svi k-podskupovi posmatranog skupa objekata, leva strana je jednaka desnoj, čime je identičnost dokazana.

Za $k = m = n$, dobijamo iz III

$$\binom{2n}{n} = \sum_{i=o}^{n} \binom{n}{i}^2$$

Formula III je uopštenje formule II jer je za $m = 1$, $n \geq 1$.

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Čitaocu ostavljamo da samostalno dokaže formule

(i) $\binom{n+2}{k+2} = \binom{n}{k+2} + 2\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$

Za $0 \leq k \leq n-2$

(ii) $\binom{m+i}{m}\binom{k}{m+i} = \binom{k}{m}\binom{k-m}{i}$

Polinomni koeficijenti

Neka su $n, n_1, \ldots, n_k$ nenegativni celi brojevi takvi da je $n_1+n_2+\ldots+n_k = n$. Tada se broj $\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$ zove polinomni koeficijent i obeležava sa $\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_k}$, tj.

$$\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

I za ove brojeve uvode se druge oznake kao, npr. $C_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k}$

Primeri

$$\binom{7}{4,3,0} = \frac{7!}{4!3!0!} = 35, \quad \binom{8}{7,0,1} = \frac{8!}{7!0!1!} = 8.$$

Neke osobine polinomnih koeficijenata. Sledećih nekoliko osobina polinomnih koeficijenata ostavljamo čitaocu da dokaže

1° Ako je $a + b + c = n$, tada je

$$\binom{n}{a,b,c} = \binom{n}{a}\binom{n-a}{b}.$$

2° $\binom{n+1}{i,j,k} = \binom{n}{i-1,j,k} + \binom{n}{i,j-1,k} + \binom{n}{i,j,k-1}$

3° $\binom{n}{n-r,r-k,k} = \binom{n}{r}\binom{r}{k}$

Kao i binomni, polinomni koeficijenti imaju kombinatorni smisao: oni znače broj svih permutacija n objekata od kojih ima n_1 jedne vrste, n_2 druge vrste itd., n_k k-te vrste.

4.3. BINOMNI OBRAZAC

Izraz $x+y$, gde simboli x i y označavaju objekte, koji se mogu sabirati (npr. realni brojevi, ili kompleksni brojevi, ili polinomi), zove se *binom*. Ako se ovaj binom može dizati na stepene $2,3,\ldots$, ima smisla postavljati pitanje koliko je, za prirodan broj n, u razvijenom obliku

$$(x + y)^n$$

Na primer, neposrednim izračunavanjem nalazimo

$$(x+y)^1 = x + y$$
$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

Ako je n proizvoljan prirodni broj, onda se izraz na desnoj strani može napisati bez prethodnog izračunavanja vrednosti tog izraza za 2,3,..,n-1, i dat je sledećom teoremom.

Binomna teorema. *Ako je n prirodan broj a x i y bilo kakvi realni brojevi, tada je*

$$(1) \quad (x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{n}y^n$$

ili, sažetije

$$(x+y)^n = \sum_{k=o}^{n} \binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

Dokaz. Da bismo izračunali $(x+y)^n$, biramo bilo slovo x bilo slovo y iz svakog od n činioca identiteta

$$(1') \quad (x+y)^n = (x+y)(x+y)\ldots(x+y)$$

i, prema pravilu proizvoda, množimo tih n izbora. Ako to uradimo za sve moguće izbore x i y i rezultate saberemo, dobićemo $(x+y)^n$. Na primer, proizvod x^n dobijamo kad iz svakog činioca izaberemo x, a proizvod $x^{n-2}y^2$ dobijemo kad iz samo dva činitelja izaberemo y a iz svih preostalih n-2 izaberemo x, itd.

Za dati ceo broj k $(0 \leqslant k \leqslant n)$ proizvod $x^{n-k}y^k$ dobija se kad se izabere n iz k činioca a x iz preostalih $n-k$ činioca. Ovaj izbor je jednoznačno odredjen kad se zna iz kojih k činioca od njih n biramo y. Prema tome, ima $\binom{n}{k}$ izbora koji dovode do proizvoda $x^{n-k}y^k$, pa se $\binom{n}{k}$ $x^{n-k}y^k$ pojavljuje u razvijenom obliku desne strane u (1'). Pošto k može uzeti sve celobrojne vrednosti od 0 do n, traženi razvoj mora imati oblik (1). Teorema je dokazana.

Sada postaje jasno poreklo imena "binomni koeficijenti" za brojeve $\binom{n}{k}$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$.

Napomena. U formulaciji teoreme rečeno je "neka su x i y bilo kakvi realni brojevi". Umesto "realni brojevi" može stajati: "kompleksni brojevi", "polinomi" itd.

Primetimo da u binomnom razvitku za $(x+y)^n$ ima tačno n+1 sabirak. Tako, na primer, u razvitku za $(x+y)^5$ ima 6 sabiraka.

Dve veze izmedju binomnih koeficijenata. Sledeće dve veze izmedju binomnih koeficijenata dobijaju se neposredno iz binomne formule.

Ako u formuli (1) uzmemo x = y = 1, dobijamo

(I) $C(n,o) + C(n,1) + \ldots + C(n,n) = 2^n$

Ako u istoj formuli stavimo x = 1, y = -1 i iskoristimo formulu I, dobijamo:

(II) $C(n,o) + C(n,2) \ldots = C(n,1) + C(n,3) + \ldots = 2^{n-1}$

Drugim rečima, zbir svih parnih binomnih koeficijenata jednak je zbiru svih neparnih binomnih koeficijenata.

Čitaocu ostavljamo da na sličan način dokaže formulu

$$\sum_{k=o}^{n} 2^k \binom{n}{k} = 3^n$$

Primer. Koristeći binomnu teoremu izračunati približno $(0,99)^6$.

Rešenje. Stavimo u binomni obrazac x = 1, y = 0,01; dobijamo $(0,99)^6 = (1-0,01)^6 = \binom{6}{0} + \binom{6}{1}(-0,01) + \binom{6}{2}(-0,01)^2 + \ldots + \binom{6}{6}(-0,01)^6 = 1-0,06+0,0015+0,00002+\ldots+0,000000000001 = 0,914$ (uzimajući 3 decimalna mesta).

Paskalov trougao. Binomni koeficijenti binomnog razvitka za $(x+y)^n$ poredjani po rastućim vrednostima za n obrazuju interesantnu shemu koja je oblika trougla i naziva se Paskalovim trouglom (Blaise Pascal, 1623-1662). Radi simetričnosti sheme počećemo sa $(x+y)^o = 1$, $(x+y \neq 0)$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

Broj u (n+1)-oj vrsti i (k+1)-oj koloni je binomni koeficijenat $C(n,k)$. Paskalova formula služi za obrazovanje trougla. Prvi i poslednji broj u svakoj vrsti su jedinice. Svaki broj izmedju ove dve jedinice dobija se kao zbir broja neposredno iznad i broja levo od ovog. Tako se, na primer, broj 35 u 8-oj vrsti i 4-oj koloni dobija kao zbir brojeva 20 i 15, ili $C(7,3) = C(6,3) + C(6,2)$. Neka čitalac nastavi ispisivanje sheme za $n = 8,9,10,\ldots$ Za $n = 8$, na primer, dobijaju se brojevi 1,8,28,56,70,56,28,8,1.

4.4. POLINOMNA TEOREMA

Neka je n prirodan broj, $x_1,x_2,\ldots,x_k$, bilo kakvih k realnih brojeva. Tada je

$$(2) \qquad (x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n = \sum \binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k}$$

gde se sabiranje izvodi preko svih celih nenegativnih brojeva $n_1,n_2,\ldots,n_k$ takvih da je $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

Dokaz. I ovde, kao i kod binomne teoreme, imamo n činilaca samo je sada svaki od njih zbir od više nego 2 sabirka. Iz svakog činioca možemo izabrati x_1 ili $x_2,\ldots,$ ili x_k, a zatim izmnožiti tih n izbora pa, naposletku, sabrati ove proizvode za sve moguće izbore. Na primer, x_1^n dobijamo birajući x_1 iz svakog činioca, $x_1^{n-2} x_2 x_3$ dobijamo birajući x_1 iz n-2 činioca, x_2 iz jednog od preostalih i x_3 iz poslednjeg preostalog činioca, itd.

Za date nenegativne brojeve $n_1,n_2,\ldots,n_k$ (čiji je zbir n) dobijamo proizvod $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_k^{n_k}$ kadgod izaberemo tačno iz n_1 činilaca x_1, iz n_2 činilaca $x_2,\ldots,$ iz n_k činilaca x_k (iz n činilaca na raspolaganju). Postoji toliko načina da se ovaj izbor izvrši koliko ima mogućnosti da se smesti n objekata u k kutija, tako da prva kutija sadrži n_1, druga $n_2,\ldots,$ k-ta n_k objekata. Kao što nam je poznato (v. § 3.5) postoji $\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ takvih izbora koji dovode do proizvoda $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_k^{n_k}$. Sabirajući sve te proizvode dobijamo tvrdjenje teoreme.

Poreklo izraza "polinomni koeficijenti" sada je potpuno jasno.

Posledica 1. $k^n = \sum \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k}$

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$$

$$n_1, n_2 \ldots n_k \geqslant 0$$

Dokaz sledi iz polinomne teoreme za $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 1$.

Zanimljivo je kombinatorno tumačenje prednje identičnosti. Na levoj strani je broj svih mogućih načina podele n objekata na k delova (mogućno i praznih) a na desnoj zbir svih mogućih podela tih n objekata na k delova (recimo k osoba) tako da prva dobija n_1, druga n_2, ..., k-ta n_k. Prirodno je da ta dva broja moraju biti jednaka.

Očigledno je da u binomnom razvitku za $(x+y)^n$ ima n+1 sabirak. U polinomnom razvitku ima onoliko sabiraka koliko ima nenegativnih rešenja jednačine

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$$

tj.

$$\binom{n+k-1}{n} \qquad \text{(videti § 6)}$$

Posledica 2. *Član u polinomnom razvitku za* $(a_o+a_1x+\ldots+a_{m-1}x^{m-1})^n$ *koji sadrži činilac* $a_o^{n_o}\, a_1^{n_1} \ldots a_{n-1}^{n_{n-1}}$ *je oblika*

$$\frac{n!}{n_o!n_1!\ldots n_{m-1}!}\, a_o^{n_o}\, a_1^{n_1} \ldots a_{m-1}^{n_{m-1}}\, x^{n_o+2n_1+\ldots+(m-1)n_{m-1}}$$

gde je $n_o + n_1 + \ldots + n_{n-1} = n$.

Dokaz sledi neposredno iz polinomne formule.

Primer 1. Naći koeficijenat uz $x^2y^3z^2$ u razvitku za $(x+y+z)^7$.

Rešenje. Traženi koeficijent je $\binom{7}{2,3,2} = 210$.

Primer 2. Naći koeficijent uz $x^6y^3z^2$ u razvitku za $(x-2y+5z)^{11}$.

Rešenje. Stavimo $x = x_1$, $-2y = x_2$, $5z = x_3$ i iskoristimo razvoj za $(x_1 + x_2 + x_3)^{11}$. Koeficijenat uz $x_1^6\, x_2^3\, x_3^2$ je $\binom{11}{6,3,2} = \frac{11!}{6!3!2!}$. Kako je $x_1^6\, x_2^3\, x_3^2 = x^6(-2y)^3(5z)^2 = -2^3 \cdot 5^2 x^6 y^3 z^2$ traženi koeficijenat je $\frac{11!}{6!3!2!}(-2^3 \cdot 5^2) = -924000$.

4.5. ZADACI

1. Brojevi 2, 22, 84, 212, ... dobijeni su kao vrednosti izraza $4i^3 - 3i^2 + i$ za $i = 1,2,3,4,\ldots$ Naći formulu za zbir prvih n članova ovoga niza.

2. Naći zbir koeficijenata polinoma

$$(9x^3 - 13y^2 + 5z^2)^{1830}(y^8 + 4y^7 + y^6 - 5z^2) +$$
$$+ (3x^2 + 13y^3 - 15)^{2000}$$

3. Dokazati identičnosti

a) $C(n,c) + 2C(n,1) + \ldots + (n+1)C(n,n) = 2^n + n2^{n-1}$

b) $\binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \ldots + n\binom{n}{n}^2 = \frac{(2n-1)!}{((n-1)!)^2}$

4. Dokazati binomnu formulu indukcijom, koristeći pri tom Paskalovu formulu.

5. Rešiti po n: $C(n+1,4) = C(n,3)$.

6. Koliki je zbir brojeva u prvih 8 vrsta Paskalovog trougla?

7. Dokazati da je zbir brojeva u n-toj vrsti Paskalovog trougla za 1 veći od zbira brojeva u svim prethodnim vrstama.

8. Naći k za koje je $C(12,k)$ najveći.

9. Tačka počinje da se kreće iz početka koordinatnog sistema u ravni i može se kretati samo u pravcu pozitivne x-ose ili pozitivne y-ose u "koracima" od 1 cm dužine. Pokazati da broj različitih puteva od početka do tačke $(n-k,k)$ iznosi $C(n,k)$.

10. Dokazati da neparan broj predmeta možemo odabrati izmedju n predmeta na 2^{n-1} različitih načina.

11. Dokazati da je

$$(a + \sqrt{a^2-1})^7 + (a - \sqrt{a^2-1})^7 = 2a(64a^6 - 112a^4 + 56a^2 - 7)$$

12. Primenom binomne formule izračunati

$$(x^2 - 3x + 1)^4$$

13. Naći koeficijent uz x^m u razvoju

$$(1+x)^k + (1+x)^{k+1} + \ldots + (1+x)^n$$

razlikujući slučajeve: $n \leqslant k$, $m \geqslant k$.

14. Napisati binomni razvitak za: a) $(x+2a)^4$; b) $(x^2 - 2y^2)^5$; c) $(x + \frac{1}{x})^5$; d) $(-x + 2y^2)^3$.

15. Naći koeficijenat uz x^3y^2 u razvitku za $(3x - 2y)^5$.

16. Naći koeficijent uz x^2 i x^4 u razvitku za $(x^3 - \frac{2}{x^2})^4$.

17. U razvitku za $(x^2 + 3x^3)^5$ naći koeficijent uz x^9, x^{11} i x^{13}.

18. Naći član nezavisan od x u binomnom razvitku za $(2x - 3x^{-2})^9$.

19. Naći koeficijent uz x^4 u razvitku za $(x + 3x^{-1})^8$.

20. Dokazati da $(a+b)^n$ može da se izrazi kao zbir svih sabiraka oblika $\frac{n!}{k!m!} a^k b^m$, gde k i m prolaze skupom svih nenegativnih celih brojeva čiji je zbir n.

21. Naći koeficijenat uz x^n u razvitku za $(x^2 + \frac{1}{x^3})^n$.

22. Koji je najveći koeficijent u binomnom razvitku za:

a) $(1 + x)^{50}$; b) $(1 + x)^{51}$; c) $(x^{-1} + 3x)^n$?

23. Koliki je koeficijent uz x^{19} u razvoju za $(1 + x^5 + x^9)^{20}$?

24. Koliki je zbir svih brojeva oblika $\frac{10}{a!b!c!}$, gde su a,b,c, celi nenegativni brojevi čiji je zbir 10?

25. Koliki je koeficijenat uz $x^2y^3z^5t^2u$ u razvitku za $(x + y + z + t + u)^{13}$?

26. Koliki je zbir svih koeficijenata razvitka za: 1° $(x+y+z+t)^8$, 2° $(a+b+c+d+e)^{11}$?

27. Naći koeficijenat uz $x^5y^9z^{10}$ u razvitku za $(2x - 5y - 7z)^{24}$

28. Naći koeficijenat uz x^5 u razvitku za $(a + bx + cx^2)^9$.

21. Odrediti $[6,1,1,1,1,1,1][4,4,4]$.

22. Odrediti $[3,1,1,\dots,1][6,6,6]$, gde je na levoj strani 15 jedinica.

5. PRINCIP UKLJUČENJA I ISKLJUČENJA

5.1. UVODNI ZADACI I OBJAŠNJENJA

Predmet ove glave je dokaz jednog opšteg principa koji se primenjuje pri rešavanju mnogobrojnih problema i čiji značaj se iz dana u dan uvećava. Put ka otkrivanju principa može se naslutiti iz sledeća tri zadatka.

Zadatak 1. Koliko celih brojeva izmedju 1 i 5 100 nije deljivo sa 5?

Odgovor je veoma prost. Lako nalazimo koliko je brojeva izmedju 1 i 5 100 deljivo sa 5. Naime, tih brojeva ima 5 100 : 5 = = 1 020. Oduzimanjem 5 100 - 1 020 dobijamo rešenje zadatka. Ono je 4 080.

Da bismo našli rešenje uključili smo sve brojeve izmedju 1 i 5 100 i isključili one koji su deljivi sa 5.

Zadatak 2. Koliko brojeva izmedju 1 i 5 100 nije deljivo sa 5 i sa 3?

Koliko ih nije deljivo sa 5 našli smo: 4 080. Na isti način nalazimo koliko ih nije deljivo sa 3: 5 100 - (5 100:3) = 5 100 - - 1 700 = 3 400. Izgledalo bi da ima ukupno 5 100 - 1 020 - 1 700 brojeva izmedju 1 i 5 100 koji nisu deljivi ni sa 3 ni sa 5 ali to nije tačno. Oduzimajući broj brojeva deljivih sa 3 mi još po jedanput oduzimamo neke brojeve koje smo već isključili kao deljive sa 5. Takvi su, na primer brojevi 15, 30, 45, ... Pošto smo te brojeve dvaput isključili, potrebno je da ih još jednom uključimo. Drugim rečima, traženo rešenje će se dobiti ako se broju 5 100 - 1 020 - 1 700 doda broj onih brojeva izmedju 1 i 5 100 koji su deljivi i sa 3 i sa 5, tj. sa 15. Njih ima: 5 100:15 = = 340, pa je traženo rešenje oblika

$$5\,100 - 1\,020 - 1\,700 + 340 = 2\,720$$

Zadatak 3. Koliko brojeva izmedju 1 i 5 100 nije deljivo sa 2, 3 i 5.

Za rešenje zadatka postupićemo na način kako je rešen prethodni zadatak. Izmedju brojeva 1, 2, ..., 5 100 isključićemo broj onih brojeva koji su deljivi sa 2 (ima ih 2 550), onih koji su deljivi sa 3 (ima ih 1 700) i onih koji su deljivi sa 5 (ima ih 1.020); dobićemo broj

5 100 - 2 550 - 1 700 - 1 020.

Ovaj broj je samo prvi korak ka rešenju ali ne i rešenje. Brojevi deljivi sa 2 i 3 isključeni su dva puta. Isti je slučaj i sa brojevima deljivim sa 2 i 5 i sa 3 i 5. Te brojeve koji su dva puta isključeni, i oba puta to brojano, moramo sada ponovo uključiti. Gornjem broju treba dodati broj onih brojeva izmedju 1 i 5 100 koji su deljivi sa 2 i 3 (tj. sa 6), sa 2 i 5 (tj. sa 10) i sa 3 i 5 (tj. sa 15). Njih ima:

5 100 : 6 = 850, 5 100 : 10 = 510 i 5 100 : 15 = 340.

Sledeći korak ka odgovoru je broj

(*) 5 100 - 2 550 - 1 700 - 1 020 + 850 + 510 + 340

ali ni on ne predstavlja odgovor.

Ima celih brojeva koji su deljivi sa 2, 3 i 5 istovremeno, kao 30, 60 itd. Ti brojevi su uključeni izmedju 1 i 5 100 isključeni pri oduzimanjima brojeva 2 550, 170 i 1 020 i ponovo uključeni dodavanjem broja 850, 510 i 340. Oni su, dakle, 4 puta uključeni a 3 puta isključeni. Treba ih isključiti još jedanput. Prema tome, od gornjeg broja (*) treba oduzeti broj onih brojeva izmedju 1 i 5 100 koji su deljivi sa 2·3·5 = 30. Njih ima 5 100 : 30 = 170, pa je, najzad, traženo rešenje broj

5 100 - 2 550 - 1 700 - 1 020 + 850 + 510 + 340 - 170 = 1 160

Sva tri ova zadatka su posebni slučajevi Principa iz naslovaovog odeljka, a mi sada pristupamo njegovom iskazu.

Pretpostavimo da imamo skup od N objekata i da je C neko svojstvo objekata. Uzimamo da neki objekti imaju svojstvo C a neki ga nemaju (na primer, u navedenim zadacima svojstvo C može biti: "broj je deljiv sa 3", "broj je deljiv sa 5" ili "broj je deljiv sa 2"). Uzimamo za zakon našeg mišljenja da svaki objekat ili ima svojstvo C ili nema svojstvo C i da treće mogućnosti nema.

Broj objekata (izmedju N uočenih) koji imaju svojstvo C označićemo sa $N(C)$.

Videli smo iz primera 1 da, kad postoji samo jedno svojstvo objekata, prebrojavanje objekata koji nemaju to svojstvo je vrlo jednostavno. Zbog toga, pretpostavljamo da objekti u posmatranoj kolekciji mogu imati više svojstava i zadržaćemo se malo na tzv. operacijama sa svojstvima.

Neka su A i B svojstva posmatranih objekata. Tada je i svojstvo istih objekata svojstvo C koje ćemo obeležavati sa $A \cup B$ i čitati "A ili B". Pod "A ili B" podrazumevaćemo sledeće: neki objekat ima svojstvo A ili B ako i samo ako taj objekat ima svojstvo A, ili ima svojstvo B, ili, naposletku, ima oba ta svojstva. Ako neki objekat ima oba svojstva: A i B, tada se piše da taj objekat ima svojstvo AB. Sa A' obeležavaćemo odsustvo svojstva A, tj. svojstvo "ne A".

Primer. Neka posmatrani objekti budu zastave. Neka B znači da zastava sadrži belu boju, P da sadrži plavu, a C da sadrži crvenu boju. Tada

BP znači da zastava sadrži belu i plavu boju

B' - zastava ne sadrži belu boju

$B \cup C$ - bela ili crvena (bar jedna od njih dve)

$B'C'$ - nema bele i nema crvene boje

$B' \cup P$ - nema bele ili ima plave boje.

Na primer, zastava Jugoslavije ima osobinu PBC. Poljska zastava ima osobinu $P'BC$ (jer ne sadrži plavu boju) a zastava Sovjetskog Saveza (crvena) ima osobinu $P'B'C$ i naravno mnoge druge, kao: $C \cup P$, $C \cup PB$, $(C' \cup P)'$ itd. (naravno da je potreban dokaz da ona ima poslednju osobinu).

Pretpostavimo da imamo $N = 5$ zastava - jugoslovensku, francusku (plava, bela, crvena), poljsku (bela, crvena), sovjetsku (crvena) i italijansku (zelena, bela, crvena).

Obeležićemo sa $N(A)$ broj objekata sa svojstvom A. U ovom slučaju imamo

$N(B) = 4$, $N(C) = 5$, $N(P) = 2$

$N(BC) = 4$, $N(P') = 3$, $N(P'B') = 1$

$N(P \cup C) = 5$, $N(P' \cup B') = 1$, $N(P \cup C') = 2$ itd.

Uopštavajući gornje oznake, pisaćemo $C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n$ svojstvo "C_1, ili C_2, ili ..., ili C_n", a $C_1 C_2 \ldots C_n$ svojstvo "C_1 i C_2 i, ..., i C_n". Tako, iz gornjeg primera, $P \cup C \cup B$ će značiti "plavo ili crveno ili belo" i očigledno je $N(P \cup C \cup B) = 5$. Neki objekat ima bar jedno od svojstava C_i $(i = 1,\ldots,n)$ ako i samo ako ima svojstvo $C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n$. S druge strane, neki objekat ima svojstvo $C_1 C_2 \ldots C_n$ ako i samo ako ima sva svojstva C_i $(i = 1,2,\ldots n)$.

Od bitne je važnosti definicija jednakosti svojstva.

Dva svojstva A i B su *jednaka*, što se piše $A = B$, ako i samo ako svaki objekat koji ima svojstvo A ima i svojstvo B i obrnuto.

Evo nekih slučajeva jednakosti svojstva, koji su opisani na različite načine.

1. $(C')' = C$

Zaista, ako neki objekat O ima svojstvo $(C')'$, onda on nema svojstvo C', a tada mora imati svojstvo C. Pretpostavimo, sad da neki objekat ima svojstvo C. Tada on ne može imati svojstvo C', a to znači da mora imati svojstvo $(C')'$. Time smo dokazali da svaki objekat koji ima svojstvo $(C')'$ mora imati svojstvo C, pa na osnovu definicije jednakosti dva svojstva sledi da je $(C')' = C$.

2. $(C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n)' = C_1' C_2' \ldots C_n'$

Ako neki objekat ima svojstvo $(C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n)'$ onda on ne može imati nijedno od svojstava $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Prema tome, taj objekat ima svojstva C_1' i C_2' i, ..., i C_n', tj. svojstvo $C_1' C_2' \ldots C_n'$.

Obrnuto, pretpostavimo da neki objekat ima svojstvo $C_1' C_2' \ldots C_n'$. Tada on ima sva svojstva: $C_1', C_2', \ldots, C_n'$, a to znači da ne može imati nijedno od svojstava $C_1, C_2, \ldots, C_n$. To znači da ima svojstvo $(C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n)'$.

Sličnim rasudjivanjem može se ustanoviti tačnost sledećih relacija:

3. $(C_1 C_2 \ldots C_n)' = C_1' \cup C_2' \cup \ldots \cup C_n'$.

4. $(C_1' \cup C_2')' = C_1C_2$

5. $(C_1' \cup C_2)' = C_1C_2'$

6. $(C_1'C_2)' = C_1 \cup C_2'$

7. $((C')')' = C'$.

5.2. PRINCIP UKLJUČENJA I ISKLJUČENJA

Pretpostavimo da imamo N objekata od kojih neki imaju svojstva $C_1, C_2, \ldots, C_n$. To znači da proizvoljno izabrani objekat iz posmatranog skupa objekata može nemati nijedno od nabrojanih svojstava ili imati jedno ili više njih. Označimo sa $N(C_iC_j\ldots C_k)$ broj objekata koji imaju svojstva $C_i, C_j, \ldots, C_k$, i, eventualno, još i neka druga svojstva. Ako hoćemo da naglasimo da se biraju samo oni objekti koji nemaju neko odredjeno svojstvo, recimo C_s, onda to svojstvo pišemo sa crticom, C_s'. Na primer, $N(C_iC_kC_s')$ označavamo broj objekata koji imaju svojstva C_i i C_k ali nemaju svojstvo C_s. Što se tiče ostalih svojstava, da li ih nabrojani elementi imaju ili ne iz ove oznake ne vidimo.

Broj objekata koji nemaju nijedno od navedenih svojstava označićemo, prema tome, sa $N(C_1'C_2'\ldots C_n')$.

Opšte pravilo koje se zove

Princip ukljucenja i iskljucenja glasi:

(1) $$N(C_1'C_2'\ldots C_n') = N - N(C_1) - N(C_2) - \ldots - N(C_n) + N(C_1C_2) + N(C_1C_3) + \ldots + N(C_1C_n) + \ldots + N(C_{n-1}C_n) - N(C_1C_2C_3) - \ldots - N(C_{n-2}C_n) + \ldots + (-1)^n N(C_1C_2\ldots C_n)$$

Sabiranje se izvodi preko svih kombinacija svojstava $C_1, C_2, \ldots, C_n$ bez uzimanja u obzir njihovog poretka.

Znak + uzima se kad je broj posmatranih svojstava (svojstava ne objekata!) paran, a znak −, kad je taj broj nepara.

Razlog za naziv formule je u tome, što ona najpre uključuje sve objekte, zatim isključuje sve one objekte koji imaju bar jedno svojstvo, zatim uključuje objekte koji imaju bar dva svojstva itd.

Dokaz principa izvešćemo indukcijom po broju svojstava. Kad postoji samo jedno svojstvo, recimo C, formula je očigledna,

$$N(C') = N - N(C).$$

Pretpostavimo da je formula dokazana za slučaj kada je broj svojstava n-1, tj. da je

$$(2)\quad \begin{aligned} N(C_1'C_2'\ldots C_{n-1}') &= N - N(C_1) - \ldots - N(C_{n-1}) \\ &+ N(C_1C_2) + \ldots + N(C_{n-2}C_{n-1}) \\ &- N(C_1C_2C_3) + \ldots + N(C_{n-3}C_{n-2}C_{n-1}) \\ &+ \ldots + (-1)^{n-1}N(C_1C_2\ldots C_{n-1}) \end{aligned}$$

Ova formula je, po pretpostavci, tačna za svaki skup objekata pa i za onaj skup objekata (podskup posmatrane kolekcije objekata koji mogu imati jedno ili više svojstava $C_1, C_2, \ldots, C_n$) koji imaju svojstvo C_n. Primenjena formula na taj skup objekata glasi:

$$(3)\quad \begin{aligned} N(C_1'C_2'\ldots C_{n-1}'C_n) &= N(C_n) - N(C_1C_n) - N(C_2C_n) - \ldots - N(C_{n-1}C_n) \\ &+ N(C_1C_2C_n) + N(C_1C_2C_n) + \ldots + N(C_{n-2}C_{n-1}C_n) \\ &- N(C_1C_2C_3C_n) - N(C_1C_2C_4C_n) - \ldots + N(C_{n-3}C_{n-2}C_{n-1}C_n) \\ &+ \ldots + (-1)^n N(C_1C_2\ldots C_{n-1}C_n) \end{aligned}$$

Poslednja formula je tačna, jer se odnosi na n-1 svojstvo: $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$, i sa C_n je označena kolekcija objekata u kojoj ta svojstva važe ili ne važe.

Oduzmimo jednakost (3) od jednakosti (2). Odmah je jasno da na desnoj strani dobijamo desnu stranu jednakosti (1), a na levoj strani razliku

$$N(C_1'C_2'\ldots C_{n-1}') - N(C_1'C_2'\ldots C_{n-1}'C_n)$$

Objasnimo šta znači ovaj broj. $N(C_1'C_2'\ldots C_{n-1}')$ je broj objekata koji nemaju svojstva $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$, a mogu imati svojstvo C_n. S druge strane, $N(C_1'C_2'\ldots C_{n-1}'C_n)$ je broj objekata koji nemaju svojstva $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$, ali imaju svojstvo C_n. Prema tome, ova razlika daje broj objekata koji nemaju nijedno od svojstava C_1, $C_2, \ldots, C_n$, tj. ona je jednaka $N(C_1'C_2'\ldots C_n')$. Time je, na osnovu pretpostavke da je jednakost tačna za n-1, dokazana njena tačnost i za n, čime je dokaz završen.

S obzirom na važnost Principa uključenja i isključenja, izvešćemo još *jedan njegov dokaz*. Elemenat koji nema nijedno od posmatranih svojstava brojan je jedanput u N a nije brojan ni u jednom od ostalih sabiraka. Treba još dokazati da nijedan od objekata sa jednim ili više svojstava nije brojan nijedanput u desnoj strani formule (1). Znači da će sa (1) biti dat samo broj onih objekata koji nemaju nijedno od nabrojanih svojstava, jer su oni ubrojani u N (N je broj svih objekata u posmatranom skupu).

Posmatrajmo jedan odredjen objekat, recimo objekat O, i pretpostavimo da on ima tačno i od ukupno n svojstava ($1 \leq i \leq n$). Taj objekat je najpre ubrojan u N, i to jedanput, tj. $C(i,0)$ puta. Zatim je brojan u $- N(C_1) - \ldots - N(C_n)$, i to i puta, tj. $C(i,1)$ puta). U drugom redu on je brojan $C(i,2)$ puta, jer toliko ima 2-kombinacija od i. U trećem redu taj objekat je brojan $C(i,3)$ puta, itd. Uzimajući u obzir znakove + i -, nalazimo da je objekat O brojan

$$C(i,0) - C(i,1) + C(i,2) - \ldots$$

puta. Videli smo, medjutim, da je vrednost ovog izraza jednaka vrednosti binoma $(1+x)^i$ za $x = -1$, tj. da je ona jednaka nuli. Time je teorema dokazana.

Simbolički zapis principa

Princip uključenja i isključenja može se simbolički zapisati na sledeći način

$$N(C_1'C_2'\ldots C_n') = N[(1-C_1)(1-C_2)\ldots(1-C_n)]$$

Smisao zapisa je u tome da najpre treba izvršiti množenje u srednjoj zagradi, a zatim umesto $N\,C_i$ napisati $N(C_i)$ i $N(1) = N$. Na primer, ako ima samo tri svojstva, a, b, c, onda je

$$\begin{aligned}(4)\qquad N(a'b'c') &= N[(1-a)(1-b)(1-c)]\\ &= N[1-a-b-c+ab+bc+abc]\\ &= N(1)-N(a)-N(b)-N(c)+N(ab)+N(ac)+N(bc)-N(abc)\end{aligned}$$

gde je $N(1) = N$.

Svrha ovog simboličkog zapisa je u tome da se olakša što je moguće raznovrsnija upotreba Principa. Iz dokaza Principa metodom matematičke indukcije videli smo da se Princip može primeniti i na neki podskup skupa svih objekata (njih N na broju) u kojima su uočena svojstva $C_1, C_2, \ldots, C_n$ kao na primer na onaj podskup koji ima samo svojstvo C_1.

Tako, na primer, ako budemo tražili broj onih objekata koji imaju svojstvo $ab'c$ (uzima se da ima samo tri svojstva a, b i c) onda ćemo pisati

$$N(ab'c) = N[a(1-b)c] = N(ac) - N(abc)$$

jer je $b + b' = 1$, tj. $b = 1 - b'$.

Isto tako možemo pisati

$$N(C_1C_2\ldots C_{n-1}C_n') = N[C_1C_2\ldots C_{n-1}(1-C_n)] =$$
$$= N(C_1C_2\ldots C_{n-1}) - N(C_1C_2\ldots C_n).$$

Koristeći ova zapažanja možemo Principu isključenja i uključenja dati i ovaj oblik

$$(5)\quad \begin{aligned} N(C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n) &= N[1-C_1'C_2'\ldots C_n'] = N - N(C_1'C_2'\ldots C_n') \\ &= N(C_1) + N(C_2) + \ldots + N(C_n) \\ &- N(C_1C_2) - \ldots - N(C_{n-1}C_n) \\ &+ N(C_1C_2C_3) + \ldots + N(C_{n-2}C_{n-1}C_n) \\ &- \ldots + (-1)^{n-1}N(C_1C_2\ldots C_n) \end{aligned}$$

Ovom formulom dobija se broj onih objekata koji imaju bar jedno od svojstava $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Princip uključenja i isključenja nosi više različitih naziva. Jedan od njih je *Simbolički metod*. Nagoveštaj razloga (ne ceo razlog) što se tako zove leži u navedenom simboličkom zapisu njegovom.

Primer 1. Na koliko načina možemo poredjati u red 3 Italijana, 3 Španca i 3 Francuza, tako da se tri sunarodnika ne mogu naći zajedno?

Resenje. Neka α (odnosno β, γ) znači da su sva tri Italijana (odnosno Španca, Francuza) zajedno. Ukupan broj mogućih razmeštaja je 9!

Na osnovu Principa uključenja i isključenja je

$$N(\alpha'\beta'\gamma') = 9! - (N(\alpha)+N(\beta)+N(\gamma))+N(\alpha\beta)+N(\alpha\gamma)+N(\beta\gamma)-N(\alpha\beta\gamma).$$

$N(\alpha)$ je broj svih permutacija u kojima su 3 Italijana jedan do drugog. Oni mogu menjati mesta izmedju sebe na $3!$ načina pa da i dalje ostanu zajedno. Ako ih posmatramo kao jednu osobu imaćemo $7!$ mogućih rasporeda, pa je $N(\alpha) = 3!7!$. Očigledno je $N(\alpha) = N(\beta) = N(\gamma)$.

$N(\alpha\beta)$ je broj razmeštaja u kojima su i Italijani i Španci skupa. Ako 3 Italijana posmatramo kao jednu osobu, a 3 Španca kao drugu, imaćemo ukupno 5 osoba za razmeštanje. Tako nalazimo da je $N(\alpha\beta) = 3!3!5!$ a očigledno je $N(\alpha\beta) = N(\alpha\gamma) = N(\beta\gamma)$.

Naposletku, sa sličnim razlozima, nalazimo

$$N(\alpha\beta\gamma) = (3!)^4$$

pa je

$$N(\alpha'\beta'\gamma') = 9! - 3\cdot 3!7! + 3\cdot(3!)^2 5! - (3!)^4 = 283\ 824.$$

Svaka klasa objekta sadrži ili pozitivan broj objekata ili nulu, pa, zbog toga, Princip uključenja i isključenja služi kao neka vrsta kontrolora za *saglasnost* statističkih podataka. Sistem podataka je nesaglasan, ako pomoću Principa uključenja i isključenja može da se odredi klasa čiji je broj elemenata negativan.

Primer 2. U jednoj anketi, od 1000 zaposlenih njih 500 su muškarci, 800 se ne bavi sportom, a 20 boluje od malokrvnosti. Pored toga, muškaraca i sportista ima 450, muškaraca i malokrvnih 17, a sportista i malokrvnih 12. Najzad, zabeležno je da ima 5 muškaraca koji se bave sportom ali su malokrvni. Treba odrediti broj žena koje su malokrvne i ne bave se sportom.

Resenje. Neka M znači: muškarac, B: boluje od malokrvnosti a S: bavi se sportom. Treba da nadjemo $N(M'S'B)$. Na osnovu Principa (koristeći njegov simbolični zapis) nalazimo:

$$\begin{aligned} N(M'S'B) &= N[(1-M)(1-S)B] \\ &= N(B) - N(MB) - N(SB) + N(MSB) \\ &= 20 - 17 - 12 + 5 = -4 \end{aligned}$$

Pošto smo dobili da je broj žena, koje se ne bave sportom a malokrvne su, -4, zaključujemo da je sistem podataka nesaglasan, dakle, nemoguć i netačan.

Napomenimo da ovaj kriterijum daje samo *dovoljan uslov* za nesaglasnost podataka, što znači da sistem podataka može biti nesaglasan iako se iz ovog kriterijuma to ne vidi.

5.3. RASTROJI PORETKA

Iskoristićemo Princip uključenja i isključenja da nadjemo broj *rastroja poretka*, tj. *broj permutacija skupa u kojem se nijedan objekat ne preslikava u sebe.*

Uzimamo da u skupu ima n elemenata i označavamo ih (kao i inače) sa $1,2,\dots,n$. Permutacija $1\ 2\ \dots\ n$ je jedna jedina u kojoj svaki objekat stoji na svom prirodnom mestu: 1 na prvom, 2 na drugom, ... , n na n-tom. Rastroji su permutacije kod kojih ni jedan elemenat nije na svom "prirodnom" mestu. Na primer, 23154 je rastroj, dok 23541 to nije. Permutacija slova A, B, C BCA jeste rastroj, dok permutacija BAC to nije.

Označimo sa $D(n)$ broj rastroja skupa od n objekata. Odredimo $D(n)$ za prvih nekoliko prirodnih brojeva. $D(1) = 0$, jer ne može biti rastroja pošto postoji samo jedan elemenat, koji je na svom prirodnom mestu. $D(2) = 1$ jer postoji jedan rastroj: 21. $D(3) = 2$ jer ima dva rastroja: 231 i 312. $D(4) = 9$. Rastroji su:

2143	3142	4123
2341	3412	4312
2413	3421	4321

Posmatrajmo sada permutacije prvih n prirodnih brojeva. Njih ima $n!$ tako da je $N = n!$ broj objekata u skupu čiji jedan deo treba izdvojiti tako da u bilo kojoj permutaciji iz tog dela nijedan od elemenata ne bude na svom prirodnom mestu. Reći ćemo da jedna permutacija ima osobinu C_1 ako je 1 na prvom mestu, da ima osobinu C_2 ako je 2 na drugom mestu, ... , da ima osobinu C_n ako je n na n-tom mestu.

Rastroj je ona permutacija koja nema nijednu od osobina C_1, $C_2,\dots,C_n$.

Izračunajmo $N(C_1)$, tj. broj permutacija brojeva $1,2,\dots,n$ kod kojih 1 uvek ostaje na prvom mestu a drugi brojevi mogu zauzimati proizvoljna mesta (izuzev prvog). Jasno je da je $N(C_1) = (n-1)!$. Slično tome, ako se 2 utvrdi na drugom mestu a ostali brojevi permutuju, dobiće se $N(C_2) = (n-1)!$ itd. Nije, dakle, bitno koji od brojeva čuva svoje prirodno mesto - ostali se permutuju proizvoljno a takvih permutacija ima $(n-1)!$. Prema tome je

$$N(C_1) = N(C_2) = \dots = N(C_n) = (n-1)!$$

Izračunajmo sada $N(C_1C_2)$. C_1C_2 znači osobinu permutacije u kojoj 1 i 2 moraju zauzeti svoja prirodna mesta a ostali brojevi se slobodno permutuju. Takvih permutacija ima $(n-2)!$ Na isti način, ako se utvrde mesta bilo koja dva broja u njihovom prirodnom poretku a ostali brojevi permutuju slobodno dobiće se $(n-2)!$ permutacija, tako da je

$$N(C_1C_2) = N(C_1C_3) = \dots = N(C_{n-1}C_n) = (n-2)!$$

Sličnim razmišljanjem zaključujemo da je

$$N(C_1C_2C_3) = N(C_1C_2C_4) = \dots = N(C_{n-2}C_{n-1}C_n) = (n-3)!$$

i na isti način za $4,5,\dots,n$ osobina.

Iz razloga simetrije formulu uključenja i isključenja možemo napisati u obliku

$$(6)\qquad \begin{aligned} D(n) &= n! - C(n,1)(n-1)! + C(n,2)(n-2)! - \dots + (-1)^n C(n,n)0! \\ &= n! - \frac{n!}{1!(n-1)!}(n-1)! + \frac{n!}{2!(n-2)!}(n-2)! - \dots + \\ &\qquad + (-1)^n \frac{n!}{n!0!}0! \\ &= n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{n!}{n!} \end{aligned}$$

ili

$$D(n) = n! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right]$$

što predstavlja traženu formulu za broj rastroja. Na primer, za $n = 5$ je

$$D(5) = 5!\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right]$$
$$= 44$$

Druga interpretacija broja D(n). Definišući broj $D(n)$ pošli smo od one permutacije brojeva $1,2,\ldots,n$ u kojoj su svi ti brojevi poredjani na prirodan način a zatim smo tražili broj rastroja u odnosu na tu permutaciju. Jasno je da smo mogli poći i od bilo koje druge permutacije, na primer permutacije $n(n-1)\ldots 321$ i pitati se koliko ima permutacija kod kojih nijedan elemenat nije na onom mestu na kojem je u uočenoj permutaciji. Neka je $a_{i_1}\, a_{i_2} \ldots a_{i_n}$ permutacija P_o. Kaže se da je permutacija $P_1 = a_{j_1}\, a_{j_2} \ldots a_{j_n}$ *nesaglasna* sa permutacijom P_o ako je $j_1 \neq i_1,\ j_2 \neq i_2, \ldots, j_n \neq i_n$. Odmah primećujemo da je rastroj nesaglasan sa prirodnim poretkom. Pitanje je: koliko ima permutacija nesaglasnih sa datom permutacijom P_o? Kako broj permutacija nesaglasnih sa nekim poretkom očigledno ne zavisi od toga da li je taj poredak prirodni ili nije, zaključujemo da je broj permutacija nesaglasnih sa datom permutacijom P_o jednak broju rastroja tj. $D(n)$.

Ovaj rezultat se može i neposredno izvesti i to na način kojim je izveden obrazac za broj rastroja. U ovom slučaju bi se sa C_1 označila osobina one permutacije koja ima na prvom mestu isti elemenat kao i P_o, tj. permutacija $a_{j_1}\, a_{j_2} \ldots a_{j_n}$ kod koje je $i_1 = j_1$. Na očigledan način odredile bi se osobine $C_2,\ldots,C_n$ i primenom Principa uključenja i isključenja dobio broj jednak broju $D(n)$.

5.4. BROJ OBJEKATA SA m SVOJSTAVA

Iz Principa uključenja i isključenja izveli smo formulu za broj objekata koji imaju bar jedno od svojstava $C_1, C_2, \ldots, C_n$; to je formula (5) ovog odeljka.

Sada ćemo potražiti formulu za broj objekata koji imaju tačno m svojstava ($1 \leq m \leq n$) čiji će poseban slučaj (kad je $m=0$) biti Princip uključenja i isključenja. Prema tome, ovde će taj Princip biti uopšten. Izvešćemo još i formulu za broj objekata koji imaju m ili više svojstava.

Uvedimo, najpre, ove oznake:

$$T_0 = N,\ T_1 = \sum N(C_i),\ T_2 = \sum N(C_i C_j),\ \dots,$$
$$T_k = \sum N(C_{i_1} \dots C_{i_k}),\ \dots,\ T_n = N(C_1 \dots C_n).$$

Teorema 1. *Broj objekata sa tačno m od n datih svojstava ($1 < m < n$) je*

$$(4) \quad N_m = T_m - \binom{m+1}{m} T_{m+1} + \binom{m+2}{m} T_{m+2} - \dots + (-1)^{n-m} \binom{n}{m} T_n$$

Dokaz. Pretpostavimo da neki dati objekat ima k svojstava. Ako je $k < m$ taj objekat nije brojan u (4), gde su brojani samo objekti sa m ili više svojstava. Ako je $k = m$, taj objekat je brojan samo jednom, i to u $N(C_{i_1} \dots C_{i_m})$, gde je $C_{i_1},\dots,C_{i_m}$ m svojstva koje ima taj objekat. Ako je $k > m$, taj objekat je brojan $C(k,m)$ puta u T_m, $C(k,m+1)$ puta u $T_{m+1},\dots,$ itd. sve do T_k, a nije brojan u $T_{k+1},\dots,T_n$. Prema tome, taj objekat je brojan ukupno

$$C(k,m) - C(m+1,m)C(k,m+1) + C(m+2,m)C(k,m+2) - \dots + (-1)^{k-m} C(k,m)C(k,k)$$

puta. Imajući u vidu identičnost

$$C(m+i,m)C(k,m+i) = C(k,m)C(k-m,i)$$

(dokazanu u §. 4), prethodni izraz možemo napisati ovako

$$C(k,m)[1 - C(k-m,1) + C(k-m,2) - \dots + (-1)^{k-m}]$$

Izraz u srednjoj zagradi iznosi $(1-1)^{k-m}$, tj. nula je, pa objekat koji ima više od m osobina nije brojan. Time je teorema dokazana.

Teorema 2. *Broj $N(m)$ objekata koji imaju bar m svojstava (tj. m ili $m+1,\ldots,$ ili n svojstava) je*

$$(5)\quad N(m) = T_m - C(m,m-1)T_{m+1} + C(m+1,m-1)T_{m+2} - \ldots + (-1)^{n-m}C(n-1,m-1)T_n$$

Dokaz. Traženi broj je, očigledno

$$N(m) = N_m + N_{m+1} + \ldots + N_n$$

Koristeći obrazac (4) za $m,m+1,\ldots,n$, vidimo da je koeficijenat uz T_{m+k}

$$\begin{aligned}&(-1)^k C(m+k,m) + (-1)^{k-1}C(m+k,m+1) + (-1)^{k-2}C(m+k,m+2) + \ldots\\ &\quad + (-1)^{k-k}C(m+k,m+k)\\ &\quad = (-1)^k\{[C(m+k-1,m-1) + C(m+k-1,m) - C(m+k-1,m)\\ &\quad + C(m+k-1,m+1)] + [C(m+k-1,m+1) + C(m+k-1,m+2)] + \ldots\}\\ &\quad = (-1)^k C(m+k-1,m-1),\end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

5.5. ZADACI

1. Koliko brojeva izmedju 1 i 100 000 nisu ni kvadrati, ni kubovi, ni četvrti stepeni nekog prirodnog broja?

2. Neka su α, β, γ osobine nekih od N objekata. Pokazati da je

$$3N + N(\alpha\beta) + N(\alpha\gamma) + N(\beta\gamma) \geqslant 2N(\alpha) + 2N(\beta) + 2N(\gamma)$$

3. Naći broj permutacija 8 slova A, B, C, D, E, F, G, H, takvih da B nije neposredno iza A, C nije neposredno iza B itd. i H nije neposredno iza G.

4. Koliko brojeva izmedju 0 i 999 nisu deljivi ni sa 2, ni sa 3, ni sa 5, ni sa 7?

5. Koliko ima prirodnih brojeva izmedju 1 i 1 260 (uključujući i 1 260), koji su relativno prosti sa 1 260?

6. Naći broj permutacija slova A,A B,B C,C D,D takvih da dva ista slova ne budu susedna.

7. Naći broj permutacija slova A, B, C, D, E, F takvih da dva u azbuci susedna slova nisu susedna u permutaciji.

8. Od n vrsta objekata pojavljuje se svaki u dve kopije. Naći broj permutacija takvih $2n$ objekata kod kojih jednaki objekti nisu susedni.

9. U fijoci se nalazi 10 pari rukavica. Četiri rukavice se uzimaju nasumice. Naći broj mogućnosti da na taj način bude izvučen bar jedan par.

10. Sekretarica ima 5 pisama i 5 tačno adresovanih koverata. Na koliko načina ona može svako pismo staviti u pogrešnu kovertu?

11. Malo dete hoće da nabroji dane u nedelji njihovim redom i uvek pogreši. Na koliko načina ono to može učiniti?

12. Izračunati $D(n)$ za $n = 6,7,8$.

13. Naći broj permutacija skupa $\{1,2,3,4,5,6\}$ u kojima se 1 i 6 ne preslikavaju u sebe.

14. Koliko permutacija skupa $\{1,2,\ldots,10\}$ ima tačno 5 elemenata koji se preslikavaju u sebe?

15. Naći broj rastroja skupa $\{1,2,\ldots,10\}$ u kojima se skup $\{1,2,3,4,5\}$ preslikava u sebe (ali nijedan elemenat se ne preslikava u sebe).

16. Naći broj rastroja skupa $\{1,2,\ldots,12\}$ u kojem se skup $\{1,2,3,4,5,6\}$ preslikava u skup $\{7,8,9,10,11,12\}$.

17. Naći broj načina na koje se 8 topova može smestiti na šahovskoj tabli tako da ni jedan od njih ne stoji na dijagonali belih polja i ni koji par topova ne bije jedan drugog (ne nalazi se u istom vodoravnom i uspravnom redu).

18. Deset pisama se nasumice stavlja u adresovane koverte. Koliko ima mogućnosti da: a) nijedno; b) bar jedno; c) bar tri pisma nadju se u pravoj koverti?

6. KOMBINACIJE SA PONAVLJANJEM

6.1. UVOD

Kad smo dosad govorili o k-kombinaciji skupa S od n objekata podrazumevali smo da su svi objekti u S različiti. Može se desiti (i dešava se) da medju izabranim objektima ima jednakih. To se dešava kad kupujemo više jednakih olovaka, više istih igračaka za poklon deci, više primeraka iste knjige itd. Tada se može postaviti sledeće pitanje: Raspolažemo sa n vrsta različitih objekata, u svakoj vrsti neograničen broj jedinaka (na primer, n naslova knjiga u knjižari, svaki naslov u praktično neograničenom broju primeraka); koliko ima različitih kombinacija od po k objekata obrazovanih od tih n vrsta objekata? Naravno, medju k izabranih objekata može biti njih nekoliko iste vrste. Takve kombinacije nazivamo *kombinacijama sa neograničenim ponavljanjima*.

Naš neposredni zadatak je da odredimo njihov broj.

Pre nego što pristupimo izvodjenju formule, proučimo sledeći primer.

Primer 1. Poslastičar prodaje 5 vrsta kolača. Na koliko načina gost može poručiti tri kolača, koji ne moraju biti različiti?

Rešenje. Označimo tih pet različitih kolača nekim redom brojevima 1, 2, 3, 4 i 5. Tada naručilac može tražiti tri kolača prve vrste, ili 2 kolača 4. vrste i 1 kolač druge vrste itd. Dve navedene kombinacije obeležićemo sa 111 i 244. Kao što se odmah uočava, red pisanja brojeva nije bitan (inače bismo drugu narudžbu obeležili sa 442), već je samo bitno koji brojevi učestvuju u kombinaciji i koliko se puta ponavljaju. Prema tome, sledeće kombinacije su istovetne: 115, 511, 151. S obzirom na ovu istovetnost za predstavnika ovih triju kombinacija uzećemo 115. Kako je $1 \leqslant 1 \leqslant 5$, možemo reći da se traži broj svih neopadajućih tročlanih nizova

$a_1a_2a_3$, gde je $a_1 \leq a_2 \leq a_3$, čiji članovi mogu biti celi brojevi od 1 do 5. Da bismo rešili zadatak pridružićemo svakom tročlanom nizu $a_1a_2a_3$ ili svakoj tročlanoj kombinaciji gornjih 5 cifara jedinstvenu tročlanu kombinaciju $b_1b_2b_3$ definisanu sa $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2 + 1$, $b_3 = a_3 + 2$. Na taj način, nizovima 112 i 235 pridružuju se redom nizovi 124 i 247. Obrnuto, ako su dati nizovi oblika $b_1b_2b_3$, uvek na jedinstven način možemo odrediti nizove oblika $a_1a_2a_3$, stavljajući $a_1=b_1$, $a_2=b_2-1$, $a_3=b_3-2$. Problem se svodi na odredjivanje broja tročlanih *rastućih* nizova $b_1b_2b_3$ sastavljenih od brojeva $1,\ldots,7$. Prednost ove nove formulacije je u tome što nove kombinacije koje obrazujemo imaju sve elemente različite. Znamo da je njihov broj $\binom{7}{3}$, što predstavlja rešenje našeg problema.

I u opštem slučaju rasudjivanje je slično ovom kojim smo se služili u rešavanju prethodnog primera.

Teorema. *Broj k-kombinacija od n različitih vrsta objekata (uzimajući da u svakoj vrsti ima objekata u neograničenom broju) je*

$$C(n+k-1,k)$$

(Napomena. U iskazu teoreme govori se da u svakoj vrsti ima objekata u neograničenom broju. U stvari, nije potrebno toliko mnogo objekata. Čitalac će se lako uveriti da je neophodno da u svakoj vrsti bude po k objekata. Zaista, svaki objekat se može pojaviti u nekoj odredjenoj kombinaciji $0,1,2,\ldots,k$ puta, pa je nužno da bude k objekata u vrsti. S druge strane, "višak" preko k ostaje neiskorišćen).

Dokaz. Ne gubeći ništa u opštosti možemo uzeti da su tih n različitih objekata obeleženi brojevima $1,2,\ldots,n$, ili, što je isto, da su to brojevi $1,2,\ldots,n$. Neka je $a_1a_2\ldots a_k$ jedna k-kombinacija tih brojeva, gde su brojevi $a_1,a_2,\ldots,a_n$ odredjeni tako da čine neopadajući niz, tj. $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_k$. Pridružimo svakoj od k-kombinacija ovog tipa na jedinstven način odredjenu k-kombinaciju $b_1b_2\ldots b_k$, gde su $b_1,b_2,\ldots,b_k$ brojevi definisani na sledeći način

$$b_1 = a_1, b_2 = a_2+1,\ldots,b_i = a_i+i-1,\ldots,b_k = a_k+k-1.$$

Primetimo da bez obzira kakvi su a-ovi, b-ovi su različiti između sebe. Pored toga b-ovi na jedinstven način odredjuju a-ove i a-ovi na jedinstven način odredjuju b-ove. Svakoj kombinaciji a-ova odgovara jedinstvena kombinacija b-ova i obrnuto. (Drugim rečima, izmedju skupa svih k-kombinacija a-ova i skupa svih k-kombinacija b-ova postoji *bijekcija*). Prema tome, izračunati broj jednih isto je što i izračunati broj drugih. Broj k-kombinacija b-ova je, u stvari, izbor k brojeva izmedju brojeva $1,2,\ldots,n+k-1$, i znamo da iznosi $C(n+k-1,k)$ ili $\binom{n+k-1}{k}$. Teorema je dokazana.

Drugi dokazi teoreme. Teorema kojom se odredjuje broj kombinacija sa ponavljanjem može se izvesti na još nekoliko načina. Te načine ćemo izložiti rešavajući odredjene primere, sa ciljem da pokažemo raznovrsnost kombinatornih rasudjivanja.

Primer 1. U kutiji se nalaze bele, plave i crvene kuglice u (praktično) neograničenoj količini (jer čim je kuglica odredjene boje izvučena, automat ubacuje kuglicu iste boje). Na koliko različitih načina možemo izvući 7 kuglica?

Rešenje. Zapišimo svako od obavljenih izbora pomoću nula i jedinica. Napišimo najpre onoliko jedinica koliko je izvučeno belih kuglica, zatim stavimo nulu pa zapišimo onoliko jedinica koliko je izvučeno plavih kuglica. Posle toga ponovo upišimo nulu i zapišimo onoliko jedinica koliko je izvučeno crvenih kuglica. Nulama smo na taj način odelili broj izvučenih plavih kuglica od odgovarajućeg broja belih kuglica, a takodje, broj izvučenih crvenih kuglica od odgovarajućeg broja plavih kuglica. Na primer, kombinaciju: 3 bele, 2 plave, 2 crvene kuglice zapisaćemo sa 111011011, a kombinaciju 5 belih, 2 crvene sa 111110011. Pojava dveju nula u zapisu ove kombinacije označava da nije uzet ni jedan objekat iz druge vrste objekata, tj. od plavih kuglica. Kombinacija od 7 crvenih kuglica zapisuje se sa 001111111. Kombinacija 1 plava i 6 crvenih zapisuje se sa 010111111, itd. (Ako bi bilo 5 vrsta objekata a mi izaberemo 4 objekta prve i 3 objekta pete vrste zapis obrazovane kombinacije bio bi 11110000111, jer iz druge, treće i četvrte vrste nije izabran ni jedan objekat). Broj traženih kombinacija, očigledno, jednak je broju permutacija sa ponavljanjem od 7 jedinica i 2 nule.

Kao što je poznato, taj broj je $\frac{9!}{7!2!} = 36 = \binom{3+7-1}{7}$, što bismo dobili i primenom teoreme 1.

Postupkom kojim je rešen ovaj zadatak može se izvesti i formula (1). Ako ima n vrsta predmeta i traže se kombinacije u koje ulazi k predmeta sa mogućnošću da se bilo koji od predmeta može pojaviti u više primeraka, treba obrazovati sve moguće permutacije sa ponavljanjem od n jedinica i k-1 nula i time će problem odredjivanja posmatranog broja kombinacija biti rešen. Rezultat je, očigledno, dat obrascem (1).

Broj homogenih proizvoda

Neka su a,b,... (njih n na broju) neki objekti koji se mogu množiti izmedju sebe, npr. brojevi 1,...,n ili ... polinomi. Pod *homogenim proizvodima dimenzije* k podrazumevamo proizvode oblika $a^m b^n \dots c^p$ takve da je $m+n+\dots+p = k$. Na primer, ako je $n = 4$ i $k = 3$, i ako su a, b, c i d brojevi tada su homogeni proizvodi dimenzije 3 sledeći:

$$a^3, b^3, c^3, d^3, a^2b, a^2c, a^2d, b^2a, b^2c, \dots, abc, abd, bcd$$

Svakom od ovakvih homogenih proizvoda može se na obostrano jednoznačan način pridružiti k-točlana kombinacija (sa ponavljanjem) od n elemenata, pa je broj homogenih proizvoda $\binom{n+k-1}{k}$.

Primer. Na koliko se načina 6 jednakih klikera može podeliti desetorici učenika.

Jasno je da će uvek neki od dečaka ostati bez klikera. Podelu je mogućno i tako izvesti da samo jedan dečak dobije svih deset klikera. Ovaj zadatak se na sledeći način svodi na izračunavanje broja homogenih proizvoda. Označimo dečake sa $D_1, D_2 \dots, D_{10}$ i ako dečak D_1 (na primer) dobije tri klikera zapišimo tu činjenicu sa D_1^3. Ako klikere razdelimo tako da D_2 dobije 1, D_4 tri i D_{10} dva klikera to ćemo zapisati sa $D_2^1\, D_4^3\, D_{10}^2$. Na taj način, problem je u odredjivanju broja homogenih proizvoda dimenzije 6 od 10 elemenata. Kao što je poznato, taj broj je $\binom{10+6-1}{6} = \binom{15}{6}$.

6.2. LINEARNE JEDNAČINE SA KOEFICIJENTIMA JEDNAKIM JEDINICI

Mnogi kombinatorni problemi čine se teški kad su iskazani na jedan način a postaju laki kad im damo drukčiji iskaz ili ih svedemo na problem druge vrste koji je prvobitnom problemu ekvivalentan. Jedan od problema na koje se mnogi drugi svode sastoji se u odredjivanju broja celobrojnih rešenja linearne jednačine oblika

(1) $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$

gde su k i n celi brojevi.

Odredjivanje broja kombinacija sa ponavljanjima je jedan od kombinatornih problema koji se svodi na odredjivanje broja rešenja jednačine (1) u celim brojevima.

Rešenje ograničenja odozdo

Najpre ćemo odrediti broj *nenegativnih rešenja* jednačine (1), tj. broj uredjenih k-torki $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ celih brojeva koje jednačinu (1) svode na identičnost i zadovoljavaju uslove $x_i \geqslant 0$ za $i = 1, 2, \dots, k$.

Na primer, $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$, ili uredjena šestorka (1,1,1,1,0,0) je jedno rešenje jednačine:

(2) $x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 4$

Drugo njeno rešenje je, na primer, $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 1$, tj. šestorka (0,0,1,1,1,1). Ova dva rešenja smatraju se različitim, mada se u svakom rešenju kao skupu (bez obraćanja pažnje na poredak) nalaze isti brojevi. Dva rešenja se, dakle, poklapaju samo kad se poklapaju kao uredjene šestorke (u oštem slučaju: kao uredjene k-torke). Jedno rešenje jednačine (2) je i (4,0,0,0,0,0).

Problem odredjivanja broja rešenja jednačine (1) u nenegativnim celim brojevima istovetan je problemu podele n objekata iste vrste na k delova. Videli smo da se to može učiniti na $\binom{n+k-1}{n}$ različitih načina, pa imamo sledeću teoremu.

Teorema 1. *Broj rešenja jednačine*

$$(1) \quad x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$$

u nenegativnim celim brojevima je $\binom{n+k-1}{n} = \binom{n+k-1}{k-1}$.

Na primer, broj rešenja jednačine (2) u nenegativnim celim brojevima je $\binom{9}{4} = 126$.

Odredimo sada broj rešenja jednačine (1) u *pozitivnim celim brojevima*. Takvo jedno rešenje postoji samo ako je $k \leqslant n$. Jednačina (2), na primer, ne bi imala nijedno rešenje te vrste.

Da bismo rešavanje ovog novog problema sveli na upravo rešeni problem stavimo $y_1 = x_1-1$, $y_2 = x_2-1, \dots, y_k = x_k-1$, posle čega jednačina (1) dobija oblik

$$(3) \quad y_1 + y_2 + \dots + y_k = n - k$$

gde se traže nenegativna rešenja jednačine (3). Na osnovu teoreme 1, traženi broj je $\binom{n-k+k-1}{n-k}$, tj. $\binom{n-1}{n-k} = \binom{n-1}{k-1}$.

Prema tome, sledi

Teorema 2. *Broj rešenja jednačine*

$$(1) \quad x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$$

u pozitivnim celim brojevima, tj. broj različitih uredjenih k-torki $(x_1, x_2, \dots, x_k)$, *gde su* $x_i \geqslant 1$ *za* $i = 1, 2, \dots, k$, *je*

$$\binom{n-1}{k-1}$$

Posmatraćemo sada *opšti slučaj* u kojem je *svaka od promenljivih* x_i *ograničena odozdo celim brojem*, bilo pozitivnim, bilo negativnim. Najpre jedan primer.

Primer. Naći broj različitih rešenja jednačine

$$(4) \quad x_1 + x_2 + x_3 = 20$$

u celim brojevima koji zadovoljavaju uslove: $x_1 > -2$, $x_2 > 0$,

$x_3 > 7$.

Rešenje. Stavimo $y_1 = x_1 + 2$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_3 - 7$, odakle je $x_1 = y_1 - 2$, $x_2 = y_2$, $x_3 = y_3 + 7$, posle čega jednačina (4) postaje

(5) $\quad y_1 + y_2 + y_3 = 15$

Broj rešenja jednačine (4) sa zadatim uslovima jednak je broju rešenja jednačine (5) u celim pozitivnim brojevima, tj. $\binom{15}{2} = 105$.

Ovo što je pokazano na posebnom primeru posmatrajmo sada u opštem slučaju.

Potražimo broj različitih rešenja jednačine (1) u celim brojevima sa ograničenjima

(6) $\quad x_1 > c_1,\ x_2 > c_2,\ \ldots,\ x_k > c_k$

gde su c_i $(i = 1,\ldots,k)$ dati celi brojevi. Stavimo

(7) $\quad y_1 = x_1-c_1,\ y_2 = x_2-c_2,\ \ldots,\ y_k = x_k-c_k,$

ili

(8) $\quad x_1 = y_1+x_1,\ x_2 = y_2+c_2,\ \ldots,\ x_k = y_k+c_k$

Stavljajući vrednosti za $x_1,\ldots,x_k$ iz (8) u (1) dobijamo jednačinu

(9) $\quad y_1 + y_2 + \ldots + y_k = n - c_1 - c_2 - \ldots - c_k$

Broj različitih rešenja jednačine (9) u pozitivnim celim brojevima je

$$\binom{n - c_1 - c_2 - \ldots - c_k - 1}{k - 1}$$

što predstavlja i broj različitih rešenja jednačine (1) u celim brojevima za koje važe ograničenja (6).

Da su ta dva broja rešenja istovetna vidi se iz relacija (7), odnosno (8), koje daju bijekciju izmedju ta dva skupa. Tako je dokazana

Teorema 3. *Broj različitih rešenja jednačine*

(1) $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$

u celim brojevima takvim da je $x_i > c_i$ *za* $i = 1,2,\ldots,k$ *je*

$$C(n - c_1 - c_2 - \ldots - c_k - 1,\ k - 1).$$

Rešenja ograničena sa obe strane

Ako se traže rešenja ograničena sa obe strane, $c_i \leqslant x_i \leqslant d_i$ za $i = 1,2,\ldots,k$, za njihovo nalaženje koristi se Princip uključenja i isključenja.

Primer 1. Naći broj rešenja jednačine

(10) $$x + y + z = 8$$

u celim pozitivnim brojevima koji zadovoljavaju uslove

$x \leqslant 3,\ y \leqslant 4,\ z \leqslant 5.$

Rešenje. Označimo sa S skup rešenja jednačine (10) u celim pozitivnim brojevima, sa A skup rešenja iste jednačine uz ograničenje $x > 3$, sa B skup rešenja uz ograničenje $y > 4$ i C skup rešenja za koja je $z > 5$. Tada je AB skup rešenja za koja je $x > 3$, $y > 0$ itd., ABC označava skup rešenja za koja je $x > 3$, $y > 4$, $z > 5$.

Primenom Principa uključenja i isključenja nalazimo

$$N(A'B'C') = N(S) - [N(A)+N(B)+N(C)] + N(AB) + N(AC) + N(BC) - N(ABC).$$

Kako je $N(S) = \binom{7}{2} = 21$, $N(A) = \binom{4}{2} = 6$, $N(B) = \binom{3}{2} = 3$ $N(C) = \binom{2}{2} = 1$, $N(AB) = N(AC) = N(BC) = N(ABC) = 0$, nalazimo da je broj rešenja sa datim ograničenjima

$$N(A'B'C') = 21 - 10 = 11$$

Jedno takvo rešenje je (1,2,5). Neka čitalac odredi ostala.

Primer 2. Naći rešenja jednačine

(11) $$x + y + z = 16$$

u celim pozitivnim brojevima takvim da je $x \leqslant 4$, $y \leqslant 6$, $z \leqslant 7$.

Rešenje. Označavajući sa S, A, B, C redom skup rešenja jednačine (11), u celim pozitivnim brojevima bez ograničenja, a zatim sa ograničenjima $x > 4$ (skup A), $y > 6$ (skup B), $z > 7$ (skup C). Tada je

$$N(C) = \binom{15}{2} = 105,\ N(A) = \binom{11}{2},\ N(B) = \binom{9}{2},\ N(C) = \binom{8}{2},$$

$$N(AB) = \binom{5}{2},\ N(AC) = \binom{4}{2},\ N(BC) = \binom{2}{2},\ N(ABC) = 0$$

Na osnovu Principa uključenja i isključenja traženi broj je

$$N(A'B'C') = 105 - (55+36+28) + (10+6+1) - 0 = 3$$

Rešenja su (3,6,7), (4,5,7), (4,6,6).

Posmatrajmo sada opšti slučaj.

Teorema 4. *Neka A_i označava skup rešenja u celim pozitivnim brojevima jednačine*

$$(1)\qquad x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$$

tako da je $x_i > c_i$ za $i = 1,2,\ldots,k$. Tada je broj R rešenja jednačine (1) u celim pozitivnim brojevima x_i takvim da je $x_i \le c_i$, $i = 1,2,\ldots,k$, dat formulom

$$R = N(S) - \Sigma N(A_i) + \Sigma N(A_iA_j) - \ldots + (-1)^k N(A_1A_2\ldots A_k)$$

gde je S skup rešenja jednačine (1) u celim pozitivnim brojevima i sabiranje se izvodi preko svih brojeva $1,2,\ldots,k$.

U drugom sabirku je, na primer, $N(A_1) + N(A_2) + \ldots + N(A_k)$, u trećem $N(A_1A_2) + N(A_1A_3 + \ldots + N(A_1A_k) + N(A_2A_3) + \ldots + N(A_2A_k) + + \ldots N(A_{k-1}A_k)$ u četvrtom sabirku je $N(A_1A_2A_3) + N(A_1A_2A_4) + \ldots + + N(A_1A_2A_k) + \ldots + N(A_{k-2}A_{k-1}A_2)$ itd.

Primetimo da je $N(S) = C(n-1,k-1)$.

Dokaz tereme 4 izvodi se primenom Principa uključenja i isključenja na način kako je to uradjeno u prethodna dva primera.

Poseban slučaj je kad su sva gornja ograničenja jednaka $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = c$. U tom slučaju je

$N(A_1) = N(A_2) = \ldots = N(A_k) = C(n-c-1,k-1)$

$N(A_1A_2) = N(A_1A_3) = \ldots = N(A_{k-1}A_k) = C(n-2c-1,k-1)$

$N(A_1A_2A_3) = N(A_1A_2A_4) = \ldots = N(A_{k-2}A_{k-1}A_k) = C(n-3c-1,k-1)$

. . . .

pa dobijamo poseban slučaj tereme 4:

Teorema 5. *Broj rešenja jednačine*

(1) $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$

u celim brojevima koji zadovoljavaju uslove $1 \leqslant x_i \leqslant c$ *za* $i = 1,2,\ldots,k$, *je*

$$C(n-1,k-1) - C(k,1)C(n-c-1,k-1)+C(k,2)C(n-2c-1,k-1) - \ldots + (-1)^k C(k,k)C(n-kc-1,k-1)$$

Primer 3. Naći broj rešenja jednačine

$x + y + z = 21$

u celim pozitivnim brojevima koji nisu veći od 8.

Rešenje. Broj svih rešenja u pozitivnim brojevima je $C(20,2) = 190$. Neka je A skup rešenja za koja je $x > 8$, B skup rešenja za koja je $y > 8$ i C skup rešenja za koja je $z > 8$.

Jasno je da je $N(A)=N(B)=N(C)=C(12,2) = 66$. Dalje je $N(AB) = N(AC) = N(BC) = C(4,2) = 6$, $N(ABC) = 0$. Na osnovu teoreme 4 nalazimo da je traženi broj rešenja date jednačine

$190 - (3\cdot 66) + 3\cdot 6 - 0 = 10.$

Primer 4. U vrećici se nalazi 10 novčića od 5 para, 6 novčića od 10 para, 5 novčića od 20 para i 4 novčića od po 50 para. Uzimajući da su novčići iste vrednosti istovetni, koliko različitih kolekcija od po 6 novčića možemo napraviti pomoću novčića u datoj vrećici?

Rešenje. Ovo je primer odredjivanja broja kombinacija sa ponavljanjima koji ćemo rešiti metodom jednačina sa jediničnim koeficijentima. Označimo sa x broj novčića od 5 para, sa y od 10 para, sa z od 20 para i sa u broj novčića od 50 para koji ulazi u jednu od kombinacija. Zadatak se svodi na nalaženje broja rešenja jednačine

$$x + y + z + u = 6$$

u nenegativnim brojevima uz uslove $x \leqslant 10$, $y \leqslant 6$, $z \leqslant 5$, $u \leqslant 4$.

Broj svih nenegativnih rešenja je $C(6+4-1,4-1) = C(9,3) = 84$.

Rešenje ove jednačine ima osobinu A ako je $x \geqslant 11$, osobinu B ako je $y \geqslant 7$, C ako je $z \geqslant 6$ i D ako je $u \geqslant 5$. Tada je

$$N(A) = N(B) = 0,\ N(C) = 1,\ N(D) = 4$$
$$N(AB) = N(AC) = N(AD) = N(BC) = N(BD) = 0,\ N(CD) = 0$$
$$N(ABC) = \ldots = N(BCD) = 0,\ N(ABCD) = 0$$

Traženi broj kombinacija je

$$84 - (1 + 4) = 79.$$

U dosadašnjim razmatranjima promenljive x_i, $i = 1,\ldots,k$, bile su podvrgnute ograničenjima $1 \leqslant x_i \leqslant c_i$ ili, što je isto, $0 < x_i < c_i$. Opšti slučaj, tj. slučaj kad su ograničenja oblika $d_i < x_i \leqslant c_i$, $i = 1,2,\ldots,k$, svodi se na prethodni smenom promenljivih: $y_i = x_i - d_i$. Prema tome, važi sledeća teorema.

Teorema 6. *Broj rešenja jednačine*

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$$

takvih da je $d_i < x_i \leqslant c_i$, $i = 1,\ldots,k$, *gde su* d_i *i* c_i *celi brojevi, jednak je broju rešenja jednačine*

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_k = n - d_1 - d_2 - \ldots - d_k$$

u celim pozitivnim brojevima y_i *ograničenim s gornje strane sa* $c_i - d_i$.

6.3. PODELA n SLIČNIH OBJEKATA IZMEDJU m OSOBA

Problem podele n sličnih objekata na m osoba može se svesti na problem odredjivanja broja nenegativnih rešenja linearne jednačine. (Može se reći: smeštaj n objekata u m kutija).

Primer 1. Na koliko različitih načina možemo smestiti 4 slične kuglice u dve različite kutije?

Primetimo da se ne zahteva da u svakoj od kutija mora biti bar po jedna kuglica, tj. jedna od kutija može biti i prazna. Čitalac može, pre nastavljanja čitanja da reši zadatak neposrednim prebrojavanjem.

Rešenje. Označimo sa x_1 broj kuglica smeštenih u jednu od te dve kutije, a sa x_2 broj kuglica smeštenih u drugu kutiju. Problem koji treba da rešimo svodi se, dakle, na odredjivanje broja rešenja jednačine

$$x_1 + x_2 = 4$$

u celim nenegativnim brojevima. Taj broj je, kao što znamo $C(4+2-1,\ 4) = C(5,4) = 5$, što je čitalac, verovatno, i neposredno odredio.

Na sličan način se rešava i opšti slučaj iskazan sledećom teoremom.

Teorema 1. *Broj načina na koji se može smestiti n sličnih objekata u k različitih kutija je $C(n+k-1,n)$.*

Kao i u primeru 1, problem se svodi na nalaženje broja nenegativnih rešenja jednačine

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$$

a taj broj je $C(n+k-1,n)$.

Na problem odredjivanja broja celobrojnih rešenja linearnih jednačina mogu se svesti i neki složeniji problemi podele. Pokazaćemo to na sledećem primeru.

Primer 2. Na koliko različitih načina možemo smestiti 8 jednakih kuglica u tri različite kugije A, B i C ako se zna da se u svakoj kutiji mora nalaziti bar po jedna kuglica i pri tom u kutiji A ne sme biti više od 3 kuglice, u kutiji B ne sme biti više od 4 kuglice i u kutiji C ne sme biti više od 5 kuglica?

Rešenje. Ovaj problem se svodi na odredjivanje broja rešenja jednačine

$$x + y + z = 8$$

uz uslov $1 \leqslant x \leqslant 3$, $1 \leqslant y \leqslant 4$, $1 \leqslant z \leqslant 5$ i rešen je u prethodnom pododeljku (6.2). Rezultat je 11.

6.4. ZADACI

1. Naći broj kombinacija od 8 vrsta objekata, uzimajući po tri objekata u kombinaciji, ako u svakoj vrsti ima neograničeno mnogo objekata.

2. Pretpostavljajući da u prethodnom primeru postoje samo po dva objekta u svakoj vrsti, odrediti broj 3-kombinacija.

3. Dokazati da ako ima p objekata jedne vrste i po jedan objekat od preostalih q vrsta $(p + q = n)$, onda je broj k-kombinacija od tih objekata dat formulom

$$\binom{q}{k} + \binom{q}{k-1} + \binom{q}{k-2} + \dots + \binom{q}{k-p}$$

4. Koliko ima 6-kombinacija od 20 vrsta objekata ako svaki od objekata može ući u kombinaciju najviše dvaput?

5. Na raspolaganju su nam n objekata jedne vrste, i još n različitih objekata. Na koliko načina možemo izabrati n objekata izmedju raspoloživih 2n objekata?

6. Koliko ima trouglova čije su dužine stranica neki od brojeva 4,5,6,7?

7. Od 3n + 1 objekata n je jednakih a ostali su različiti. Dokazati da se iz ove kolekcije može izvući n objekata na 2^{2n} načina.

8. Koliko rešenja ima jednačina

$$x + y + z + u + v = 40$$

a) u celim nenegativnim brojevima; b) u celim pozitivnim brojevima?

9. Dokazati da jednačine

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \quad i \quad y_1 + y_2 + \dots + y_7 = 10$$

imaju isti broj rešenja u celim pozitivnim brojevima?

10. Koliki treba da bude ceo broj n da bi jednačine

$$x_1 + x_2 + x_3 = 12 \quad i \quad y_1 + y_2 + \dots + y_{10} = n$$

imale jednak broj rešenja u celim pozitivnim brojevima?

11. Dokazati da jednačine $x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 11$ i $y_1 + y_2 + \dots + y_{12} = 5$ imaju isti broj rešenja u celim nenegativnim brojevima.

12. Dokazati da je broj rešenja jednačine $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$ u celim pozitivnim brojevima jednak broju rešenja u celim pozitivnim brojevima jednačine $y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-k+1} = n$.

13. Koliko ima članova u razvitku za: a) $(x_1+x_2+\ldots+x_5)^{13}$; b) $(x_1+x_2+\ldots+x_k)^n$?

14. Izraziti bijekciju izmedju skupa rešenja jednačine $x + y + z + u = 36$ u celim brojevima većim od 4 i skupa rešenja jednačine $p + q + r + s = 20$ u celim pozitivnim brojevima.

15. Koliko rešenja u celim brojevima većim od 8 ima jednačina $x + y + z + u = 79$?

16. Naći broj rešenja jednačine $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 30$ u celim pozitivnim brojevima uz uslov da je $x_4 > 3$.

17. Naći broj rešenja jednačine $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2$ u celim brojevima većim od -5.

18. Naći broj rešenja jednačine $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 30$ u celim brojevima takvim da je $x_1 > -1$, $x_2 > -3$, $x_3 > 2$, $x_4 > 0$, $x_5 > 6$, $x_6 > 3$.

19. Naći broj rešenja jednačine $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 31$ u celim brojevima koji ispunjavaju uslov $x_1 \geqslant -3$, $x_2 \geqslant 2$, $x_3 \geqslant 3$, $x_4 \geqslant -2$.

20. Naći broj rešenja jednačine $x_1 + x_2 + \ldots + x_7 = 39$ u celim brojevima koji ispunjavaju uslove: $x_1 \geqslant -1$, $x_2 > -3$, $x_3 \geqslant 0$, $x_4 > 0$, $x_5 \geqslant 7$, $x_6 \geqslant 3$, $x_7 > 2$.

21. Koliko celih brojeva izmedju 1 i 1 000 000 (isključujući ova dva broja) imaju zbir cifara 7?

22. Naći broj parcijalnih izvoda reda k analitičke funkcije sa n promenljivih.

(Zadatak je samo za one kojima su poznati pojmovi u njegovoj formulaciji).

23. Koliko jednačina $x_1 + x_2 + \ldots + x_5 = 20$ ima rešenja u celim brojevima koji zadovoljavaju uslove $x_1 > 2$, $x_2 > 3$, $x_3 > 4$, $x_4 > 3$, $x_5 > 5$?

24. Koliko celih brojeva izmedju 1 i 1 000 000 ima zbir cifara: a) jednak 11; b) manji od 8?

25. Koliko brojeva izmedju 100 i 1 000 000 ima zbir cifara manji od 5?

26. Naći broj rešenja jednačine $x + y + z + u = 11$ u celim brojevima izmedju 1 i 6 (uključujući granice).

27. Naći rešenja jednačine $x + y + u + v = 17$ u celim brojevima takvim da je $1 \leqslant x \leqslant 5$, $1 \leqslant y \leqslant 6$, $3 \leqslant u \leqslant 8$, $u \leqslant v \leqslant 12$.

28. Naći broj rešenja jednačine $x + y + z + u = 2$ u celim brojevima izmedju -2 i $+3$ (uključujući granice).

29. Jednačina $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = mk$ (m i k su celi pozitivni brojevi) ima, kao što se neposredno vidi, samo jedno rešenje koje zadovoljava uslove $1 \leqslant x_i \leqslant m$, $i = 1,2,\ldots,k$. Iskoristiti tu činjenicu i jednakost (4.12) da bi se dobila jedna identičnost sa brojevima $C(n,i)$.

30. Koliko ima celih pozitivnih sedmocifrenih brojeva čiji je zbir cifara jednak 17?

31. 30 ljudi glasa za 5 predloga (svaki za po 1 predlog, uzdržanih nema). Na koliko načina glasovi mogu biti raspodeljeni?

7. REKURENTNE RELACIJE

7.1. UVOD

Jedan od načina rešavanja kombinatornih zadataka je u tome da se dati zadatak svede na zadatak sa manjim brojem objekata. Primer za taj način je formula Paskalovog trougla

(1) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

koja iznalaženje broja k-kombinacija od n-objekata svodi na iznalaženje k-kombinacija i $(k-1)$-kombinacija od $n-1$ objekata. Koristeći ovu formulu mogućno je da se, pomoću dve pogodno izabrane početne vrednosti, odrede binomni koeficijenti za sve nenegativne cele brojeve.

Formule tipa (1) zovu se *rekurentne formule* (latinski recurrere - vraćati se) ili *rekurentne relacije*, a pomenuti metod rešavanja zadataka je *metod svodjenja na rekurentne relacije.*

Pomoću ovog metoda zadatak sa n objekata svodi se na zadatak sa $n-1$ objektom, ovaj na zadatak sa $n-2$ objekata, itd. sve dok se ne dodje do zadatka koji je lako rešiti.

U mnogim slučajevima mogućno je iz rekurentne relacije dobiti eksplicitnu formulu za broj kombinatornih zadataka. Takva formula je onda *rešenje date rekurentne relacije.*

U ovom odeljku bavićemo se najpre nekim kombinatornim problemima koji se svode na rekurentne relacije, a zatim ćemo se ukratko osvrnuti na opštu teoriju rekurentnih relacija i na jedan poseban njihov tip.

7.2. PRIMERI REKURENTNIH RELACIJA

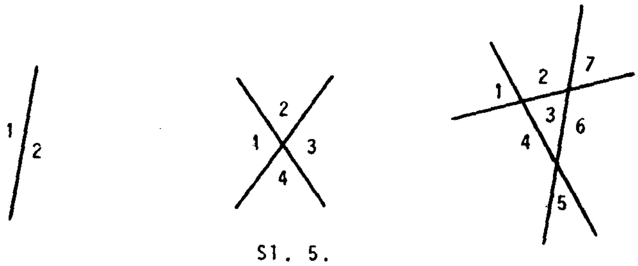
Oblasti u ravni

Do novog primera rekurentne relacije doći ćemo rešavanjem sledećeg problema iz elementarne geometrije.

Na koliko oblasti deli ravan n pravih linija u opštem položaju?

Napomenimo da se pod "opštim položajem" pravih podrazumeva da nema paralelnih pravih, niti ima više od dve prave koje se seku u jednoj tački. Uzimamo, naravno, da svih n pravih ležu u ravni o kojoj je reč.

Označimo sa $f(n)$ broj oblasti na koje n pravih u opštem položaju dele ravan. Neposredno je jasno da kad nema nijedne prave, cela ravan čini jednu oblast, da jedna prava deli ravan na dve oblasti. Prema tome, uzećemo da je $f(0) = 1$ a vidimo da je $f(1) = 2$. Isto tako jasno je da je (Sl. 5) $f(2) = 4$ i $f(3) = 7$.



Sl. 5.

Primećujemo sa Sl. 5. da dodavanjem druge prave prva prava deli drugu na dve poluprave a svaka od ovih polupravih deli dve postojeće oblasti na dva dela (dve nove oblasti), tako da je $f(2) = f(1) + 2$. Vidimo dalje da kad se doda treća prava ona seče dve postojeće prave u različitim tačkama (jer sve prave moraju biti u opštem položaju) tako da je ta treća prava podeljena ovim presečnim tačkama na tri dela i svaki od ovih delova deli postojeće oblasti na dve nove oblasti. To znači da nova prava dodaje tri nove oblasti (recimo 5, 6, 7), što znači da je $f(3) = f(2) + 3$. Kad dodamo četvrtu pravu tako da ne bude dve paralelne prave niti se tri od njih seku u jednoj tački, ona će sa prethodne tri prave biti podeljena na 4 dela i svaki od tih delova deliće oblast u koju je smešten na dva dela. Tako se dobijaju 4 nove oblasti. Drugim rečima, $f(4) = f(3) + 4$.

Dokažimo da je u opštem slučaju

(2) $f(n) = f(n-1) + n.$

Posmatrajmo (u cilju dokaza) $n-1$ pravu liniju u opštem položaju i neka te prave dele ravan na $f(n-1)$ oblasti. Dodavanjem još jedne, n-te, prave tako da bilo koje dve prave ne budu paralelne i bilo koje tri ne seku se u jednoj tački, ta dodata prava ima $n-1$ presečnu tačku sa postojećim pravim i na taj način je podeljena na n delova. Kako svaki od tih delova deli postojeću oblast u kojoj se nalazi na dva dela, dobijamo n novih oblasti, tj. $f(n) = f(n-1)+n$, što je i trebalo dokazati.

Došli smo, dakle, do jednog novog primera rekurentne relacije. Svaka rekurentna relacija omogućuje da se dobije traženi član niza na taj način što se izračunavaju svi prethodni članovi. Ali čest je slučaj da se može dobiti formula za n-ti član niza a da se ne moraju izračunavati svi prethodni članovi. Takva formula zove se *rešenje rekurentne relacije*. (Opštije: *Rešenje neke rekurentne relacije je svaki onaj niz čiji članovi stavljeni u relaciju istu svode na identičnost)*. Rešimo rekurentnu relaciju (2). Primenićemo sledeći postupak. Napisaćemo vrednosti relacije (2) zamenjujući n sa $n-1, n-2, \ldots, 3, 2$. Dobijamo

$$\begin{aligned} f(n) &= f(n-1) + n \\ f(n-1) &= f(n-2) + n-1 \\ f(n-2) &= f(n-3) + n-2 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ f(3) &= f(2) + 3 \\ f(2) &= f(1) + 2 \end{aligned}$$

Sabirajući sve ove jednakosti dobija se posle svodjenja (jer se potire prvi sabirak na levoj (izuzev f(n)) sa prvim na desnoj u prethodnoj jednakosti)

$$f(n) = f(1) + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n$$

Pošto je $f(1) = 2$ i $1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$, dobijamo

$$f(n) = \frac{n(n+1)}{2} + 1$$

što i jeste traženo rešenje relacije (2).

Napomena. Rešenje relacije (2) našli smo u obliku jednostavnog analitičkog izraza. Taj izraz je, svakako, pogodniji od same relacije (2). Medjutim, ne treba misliti da se u slučajevima kad je kombinatorni problem sveden na rekurentnu relaciju čije rešenje ne znamo nije ništa dobilo. Naprotiv, i u tom slučaju možemo smatrati da je problem rešen, jer upotrebom savremenih računara možemo doći do proizvoljnog člana niza odredjenog relacijom, a to znači i do onog koji predstavlja rešenje posmatranog problema.

Broj rastroja

Vratimo se ponovo na problem rastroja (v. § 5) i označimo sa D_n broj rastroja skupa od n elemenata.

Neka je

(1) $a_1 a_2 \ldots a_n$

rastroj skupa od n elemenata, recimo brojeva $1,2,\ldots,n$ gde je $n \geqslant 2$. Mesto a_1 u (1) može zauzeti bilo koji od gornjih brojeva izuzev broja 1, pa ima $n-1$ mogućnosti za popunu prvog mesta. Neka je $a_1 = k$ $(k \neq 1)$. Tada postoje dve vrste rastroja: oni kod kojih je 1 na k-tom mestu i oni kod kojih 1 nije na k-tom mestu. Ako je 1 na k-tom mestu, onda ostaje $n-2$ elemenata od kojih treba napraviti rastroje a takvih ima D_{n-2}.

Ako, pak, 1 nije na mestu a_k, onda treba permutovati elemente $1,2,\ldots,k-1,k+1,\ldots,n$ tako da 1 ne bude na k-tom mestu, i ni jedan od ostalih elemenata na svom mestu. k-to mesto možemo za trenutak smatrati da je prirodno mesto elementa 1 pa je jasno da je reč o broju rastroja od $n-1$ elemenata, a taj broj je D_{n-1}.

Prema tome, došli smo do rekurentne relacije za rastroje

(2) $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$

Koristeći ovu relaciju indukcijom lako nalazimo da je

(3) $D_n = n!\ (1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{n!}{n!})$

što je od ranije poznati rezultat.

Kombinacije sa ponavljanjem

Označimo sa $f(n,k)$ broj k-kombinacija sa ponavljanjem od n različitih vrsta objekata. Eksplicitni izraz za $f(n,k)$ odredili smo ranije na drugi način, a ovde ćemo za njegovo odredjivanje upotrebiti rekurentne relacije. Pretpostavimo da su objekti označeni brojevima od 1 do n. Tada svaka kombinacija ili sadrži ili ne sadrži 1. Ako kombinacija sadrži 1 tada se preostalih k-1 elemenata kombinacija može izabrati na $f(n,k-1)$ načina. Ako kombinacija ne sadrži 1, onda postoji tačno $f(n-1,k)$ načina da se ona sačini, jer se k-kombinacija obrazuje od n-1 elemenata. Na osnovu Principa zbira nalazimo da je

(1) $f(n,k) = f(n,k-1) + f(n-1,k).$

Ako je $k = 1$, nikakva ponavljanja elemenata nisu moguća pa je $f(n,1) = n$. Ako je $n = 1$, onda za bilo koje k postoji samo jedna k-kombinacija, pa je $f(1,k) = 1$.

Iz (1) nalazimo još $f(n,0) = f(n,1) - f(n-1,1) = 1$ što znači da postoji samo jedan način da se ne vrši nikakav izbor.

Dalje je

$$\begin{aligned} f(n,2) &= f(n,1) + f(n-1,2) \\ &= f(n,1) + f(n-1,1) + f(n-2,2) \end{aligned}$$

Ako nastavimo sa uzastopnom primenom relacije (1) dok ne dodjemo do broja $f(1,2)$, za koji znamo da je 1, dobijamo

$$f(n,2) = n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 1 = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$$

Slično nalazimo

$$f(n,3) = f(n,2) + f(n-1,2) + \ldots + f(1,3)$$
$$= \binom{n+1}{2} + \binom{n}{2} + \ldots + 1 = \binom{n+2}{3}$$

Indukcijom nalazimo da je opšte rešenje rekurentne relacije (1)

$$f(n,k) = \binom{n+k-1}{k} \tag{2}$$

i lako proveravamo da (2) zadovoljava relaciju (1) i uslove $f(n,1) = n$ i $f(1,k) = 1$.

Broj interpretacija neasocijativnog proizvoda

Opšte je poznato da su operacije sabiranja i množenja brojeva asocijativne, tj. da je

$$a + (b+c) = (a+b) + c \quad \text{i} \quad a(bc) = (ab)c$$

Ima, medjutim, mnogo operacija u matematici koje nisu asocijativne. Na primer, ako definišemo operaciju "o" na sledeći način

$$a \circ b = a^b,$$

onda je

$$2 \circ (1 \circ 3) = 2 \circ (1^3) = 2$$
$$(2 \circ 1) \circ 3 = 2^1 \circ 3 = 2^3 = 8$$

pa je

$$2 \circ (1 \circ 3) \neq (2 \circ 1) \circ 3.$$

Ovakve operacije zvaćemo jednostavno *proizvodima* i izostavljati kružić o, tj. umesto a o b pisaćemo ab, i a(bc) umesto a o (b o c).

Naš cilj je da odredimo broj $F(n)$ interpretacija neasocijativnog proizvoda od n slova: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, kad se zagrade stave na sve moguće načine, jer svakim drugim stavljanjmem zagrada moguće je dobiti različitu vrednost celog proizvoda. Već smo videli da za $n = 3$ imamo dve različite mogućnosti: $x_1(x_2x_3)$ i $(x_1x_2)x_3$. Za $n = 4$ mogući su sledeći različiti proizvodi:

$$x_1(x_2(x_3x_4)),\ x_1((x_2x_3)x_4),\ (x_1x_2)(x_3x_4),\ (x_1(x_2x_3))x_4,$$
$$((x_1x_2)x_3)x_4$$

Prema tome je $F(3) = 2$, $F(4) = 5$. Jasno je da je $F(2) = 1$ i stavićemo, dogovorno, da je $F(1) = 1$.

Proizvod od n slova mora biti oblika $(x_1 \ldots x_k)(x_{k+1} \ldots x_n)$ za $k = 1,2,\ldots,n-1$, gde je sa $x_1 \ldots x_k$ označen jedan od proizvoda prvih k slova, i sa $x_{k+1} \ldots x_n$ jedan od proizvoda preostalih $n-k$.

Postoji $F(k)F(n-k)$ proizvoda ove vrste, jer ima $F(k)$ proizvoda oblika $x_1 \ldots x_k$ i $F(n-k)$ proizvoda preostalih slova. Kako u prvoj zagradi može biti jedno, dva, ..., n-1 slovo, to je za $n > 2$

$$(\alpha) \qquad F(n) = F(1)F(n-1) + F(2)F(n-2) + \ldots + F(n-1)F(1)$$

Dobili smo, dakle, jednu rekurentnu relaciju, koju, s obzirom na uslove $F(1) = 1$ i $F(2) = 1$ možemo kraće napisati

$$F(n) = \sum_{k=1}^{n-1} F(k)F(n-k)$$

Pomoću nje se lako nalazi

$$F(3) = 2,\ F(4) = 5,\ F(5) = 14, \text{ itd.}$$

Rešenje rekurentne relacije (α), a time i našeg problema, je

$$F(n) = \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}, \qquad n \geqslant 2.$$

Elementarni dokaz ove formule dosta je glomazan, a dokaz na osnovu proizvodnih funkcija daćemo na kraju poslednjeg odeljka ove knjige.

7.3. NEKI OPŠTI POJMOVI O REKURENTNIM RELACIJAMA

Za rekurentnu relaciju kažemo da je *reda k* ako se $f(n+k)$ može izraziti pomoću $f(n), f(n+1), \dots, f(n+k-1)$.

Na primer, rekurentna relacija $f(n) = f(n-1) + n$ je prvog reda, rekurentna relacija $f(n-2) + f(n+1) - 6f(n) = 2^n$ je drugog reda, a rekurentna relacija $f(n+3) = 3f(n)f(n+2) + f(n+1)$ je trećeg reda.

Kad je data rekurentna relacija (recimo reda k), postoji beskonačno mnogo nizova koji tu relaciju zadovoljavaju, jer od vrednosti prvih k članova niza zavisi vrednost (k+1)-og člana, itd., pa promena prvih izaziva promenu poslednjih, što i daje razne nizove rešenja posmatrane rekurentne relacije. Medjutim, ako su za rekurentnu relaciju k-og reda zadate vrednosti prvih k članova (recimo $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$) tada je rešenje rekurentne relacije jednoznačno odredjeno. Date vrednosti $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ zovu se *početne vrednosti* rekurentne relacije. Rešenje rekurentne relacije k-og reda koje zavisi od k proizvoljnih konstanata $c_1, c_2, \dots, c_k$ čijim pogodnim izborom je moguće dobiti svako drugo rešenje te rekurentne relacije naziva se *opštim rešenjem*.

Na primer, rekurentna relacija drugog reda

$$(\alpha) \qquad f(n+2) + 3f(n+1) - 10f(n) = 0$$

ima opšte rešenje

$$(\beta) \qquad f(n) = c_1 2^n + c_2(-5)^n$$

Zaista, lako je proveriti da zamenom vrednosti za $f(n)$ u (α) relacija (α) se svodi na identičnost. Prema tome, treba još dokazati da je svako rešenje relacije (α) oblika (β). Setimo se da se jedno odredjeno rešenje dobija kad su unapred zadate vrednosti a_1 i a_2. Prema tome, treba dokazati da za bilo koja dva broja a_1 i a_2 postoje vrednosti za c_1 i c_2 takve da je

$$2c_1 + (-5)c_2 = a_1$$
$$2^2c_1 + (-5)^2c_2 = a_2$$

Lako se proverava da nezavisno od vrednosti a_1 i a_2 gornji sistem ima rešenja po c_1 i c_2. Prema tome, (β) je zaista opšte rešenje rekurentne relacije (α).

7.4. LINEARNE REKURENTNE RELACIJE SA KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA

Pod linearnom rekurentnom relacijom sa konstantnim koeficijentima podrazumeva se rekurentna relacija oblika

$$f(n+k) = a_1f(n+k-1) + a_2f(n+k-2) + \dots + a_kf(n),$$

gde su $a_1, a_2, \dots, a_k$ dati brojevi.

Ovo je linearna rekurentna relacija reda k.

Rešavanje linearnih rekurentnih relacija sa konstantnim koeficijentima

Težnja da se nadje analitički izraz rešenja svake rekurentne relacije je prirodna ali nije uvek ostvarljiva. Ostvarljiva je (i to u principu lako ostvarljiva) u slučaju linearnih rekurentnih relacija sa konstantnim koeficijentima. Uzmimo radi jednostavnosti linearnu rekurentnu relaciju drugog reda sa stalnim koeficijentima:

$$(\ell) \quad f(n+2) = a_1f(n+1) + a_2f(n)$$

Rešenje ove relacije zasniva se na sledećim tvrdjenjima.

Tvrdjenje 1. *Ako su $f_1(n)$ i $f_2(n)$ rešenja relacije (ℓ), tada je za bilo koje brojeve a i b niz $\varphi(n) = af_1(n) + bf_2(n)$ takodje rešenje relacije (ℓ).*

Zaista, pošto su $f_1(n)$ i $f_2(n)$ rešenja relacije (ℓ), važi

$$f_1(n+2) = a_1f_1(n+1) + a_2f_2(n)$$
$$f_2(n+2) = a_1f_2(n+1) + a_2f_2(n)$$

Množeći prvu relaciju sa a, drugu sa b i sabirajući dobijamo

$$af_1(n+2) + bf_2(n+2) = a_1[af_1(n+1) + bf_2(n+1)] +$$
$$+ a_2 [af_1(n) + bf_2(n)]$$

a to i znači da je niz $af_1(n) + bf_2(n)$ rešenje relacije (ℓ).

Tvrdjenje 2. *Ako je broj r rešenje jednačine*

$$(K) \quad r^2 - a_1r - a_2 = 0$$

tada je niz $1,r,r^2,\dots,r^{n-1},\dots$ rešenje rekurentne relacije (ℓ).

Zaista, ako je $f(n) = r^{n-1}$, tada je $f(n+1) = r^n$ i $f(n+2) = r^{n+1}$, pa smena tih vrednosti u (ℓ) daje

$$r^{n+1} - a_1r^n - a_2r^{n-1}$$

tj.

$$r^{n-1}(r^2 - a_1r - a_2)$$

što je na osnovu (K), nula pa zaista niz $\{r^{n-1}\}$ zadovoljava relaciju (ℓ), čime je tvrdjenje 2 dokazano.

Jednačina (K) zove se *karakteristična jednačina* rekurentne linearne relacije (ℓ).

Razlikujemo sledeća dva slučaja u pogledu prirode rešenja karakteristične jednačine.

I slučaj. Koreni karakteristične jednačine su realni i različiti (označimo ih sa r_1 i r_2). Tada važi sledeća

Teorema 1. *U I slučaju opšte rešenje jednačine (ℓ) je oblika*

$$(O_I) \quad f(n) = c_1r_1^{n-1} + c_2r_2^{n-1}$$

gde su c_1 i c_2 proizvoljne konstante.

Dokaz je neposredan. Iz tvrdjenja 2 sledi da su $f_1(n) = r_1^{n-1}$ i $f_2(n) = r_2^{n-1}$ rešenja jednačine (ℓ). Iz tvrdjenja 1 sledi da je to i $f(n) = c_1 r_1^{n-1} + c_2 r_2^{n-1}$, tj. relacija (O_I). Ostaje još da se dokaže da je pomoću (O_I) dato opšte rešenje. Kako je bilo koje rešenje $f(n)$ jednačine (ℓ) jednoznačno odredjeno kad se znaju vrednosti $f(1)$ i $f(2)$ dovoljno je da sistem

$$(S) \qquad \begin{aligned} c_1 + c_2 &= a \\ c_1 r_1 + c_2 r_2 &= b \end{aligned}$$

ima rešenje po c_1 i c_2 za bilo koje a i b. Lako je videti da je to rešenje:

$$c_1 = \frac{b - ar_2}{r_1 - r_2}, \quad c_2 = \frac{ar_1 - b}{r_1 - r_2}$$

pa budući da je $r_1 \neq r_2$ brojevi c_1 i c_2 su odredjeni.

II slučaj. Koreni karakteristične jednačine su realni i jednaki (označimo ih sa r). Tada važi

Teorema 2. *U II slučaju opšte rešenje jednačine (ℓ) je oblika*

$$(O_{II}) \qquad f(n) = c_1 r^{n-1} + c_2 n r^{n-1}$$

gde su c_1 i c_2 proizvoljne konstante.

Dokaz. U slučaju $r_1 = r_2 = r$ sistem (S) ne daje (u opštem slučaju) jedno odredjeno rešenje za c_1 i c_2, tj. niz $f(n) = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-1}$ ne predstavlja opšte rešenje relacije (ℓ), jer je nemoguće izabrati $c_1 + c_2$ (što možemo kraće obeležiti sa c) tako da budu istovremeno zadovoljeni uslovi

$$c = a \quad \text{i} \quad cr = b$$

za proizvoljno izabrane brojeve $a = f(1)$ i $b = f(2)$. Potrebno je naći drugo rešenje relacije (ℓ) različito od r^{n-1} (i od cr^{n-1}, gde je c bilo koji stalan broj). Pokazuje se da je takvo rešenje oblika $f_2(n) = nr^{n-1}$, gde je r dvostruki koren karakteristične jednačine (K). Podsetimo se da ako je r dvostruki koren karakteristične jednačine (K) tada je $2r - a_1 = 0$ (to sledi iz Vietovog pravila, jer je tada $r_1 + r_2 = a_1$, tj. $2r = a_1$ ili $2r - a_1 = 0$.

Uverimo se da je $f_2(n) = nr^{n-1}$ zaista rešenje relacije (ℓ). Smenom u (ℓ) odgovarajućih vrednosti za $f_2(n)$ nalazimo da je

$$(n+2)r^{n+1} = a_1(n+1)r^n + a_2nr^{n-1}$$

Poslednja jednačina se može napisati u obliku

$$r^{n-1}\{n[r^2 - a_1r - a_2] + 2r(2r - a_1)\} = 0$$

i stvarno je istinita jer su izrazi u zagradama [] i () jednaki nuli.

Pošto znamo dva rešenja $f_1(n) = r^{n-1}$ i $f_2(n) = nr^{n-1}$ relacije (ℓ), njeno opšte rešenje je oblika $f(n) = c_1f_1(n) + c_2f_2(n)$, tj. oblika ($O_{II}$). Dokaz da je rešenje zaista opšte, tj. da je svako drugo rešenje $f(n)$ jednoznačno odredjeno kad se znaju vrednosti $f(1) = a$ i $f(2) = b$ sledi iz činjenice da sistem

$$c_1 + c_2 = a$$
$$2^{n-1}(c_1 + 2c_2) = b$$

ima jedinstveno rešenje po c_1 i c_2.

Time je teorema 2 dokazana.

Napomena. Linearne rekurentne relacije sa konstantnim koeficijentima reda višeg od dva rešavaju se na isti način. Neka je jednačina oblika

$$\text{(M)} \qquad f(n+k) = a_1f(n+k-1) + \ldots + a_kf(n)$$

Karakteristična jednačina ove jednačine je

$$r^k = a_1r^{k-1} + \ldots + a_k$$

Ako su svi koreni ove algebarske jednačine različiti, opšte njeno rešenje biće oblika

$$f(k) = c_1r_1^{n-1} + c_2r_2^{n-1} + \ldots + c_kr_k^{n-1}$$

gde su $r_1, r_2, \ldots, r_k$ koreni karakteristične jednačine.

Ako je, pak, $r_1 = r_2 = \ldots = r_s$, to ovome korenu odgovaraće rešenja

$$f_1(n) = r_1^{n-1},\ f_2(n) = nr_1^{n-1}, \ldots, f_s(n) = n^{s-1}r_1^{n-1}$$

date rekurentne relacije. U opštem rešenju ovome višestrukom korenu odgovaraće sabirak oblika

$$r_1^{n-1}[c_1 + c_2 n + \ldots + c_s n^{s-1}]$$

Sastavljajući ovakve izraze za sve korene i sabirajući ih dobijamo opšte rešenje date relacije (M).

Pokažimo to na jednom primeru.

Primer. Rešiti rekurentnu relaciju

$$f(n+4) = f(n+3) + 7f(n+2) - 13f(n+1) + 6f(n)$$

Rešenje. Karakteristična jednačina ove relacije je

$$r^4 = r^3 + 7r^2 - 13r + 6.$$

Činitelji slobodnog člana ove algebarske jednačine su 1, -1, 2, -2, 3, -3, 6 i -6. Proverom nalazimo da su rešenja 1, 2 i -3. Deobom polinoma $r^4 - r^3 - 7r^2 + 13r - 6$ polinomom $(r-1)(r-2)(r+3)$ dolazimo do količnika $r-1$ i ostatka nula. Odatle sledi da je $r_1 = 1$ dvostruki koren karakteristične jednačine. Opšte rešenje date relacije je

$$f(n) = c_1 + nc_2 + c_3 2^{n-1} + c_4(-3)^{n-1}$$

Primer 1. *(Fibonačijev niz)*. Niz čiji opšti član $f(n)$ zadovoljava rekurentnu relaciju

$$\text{(F)} \quad f(n+2) = f(n+1) + f(n),$$

uz uslove $f(1) = f(2) = 1$, zove se *Fibonačijev niz*.

Nadjimo rešenje relacije (F). Njena karakteristična jednačina je

$$r^2 - r - 1 = 0,$$

čiji su koreni

$$r_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}), \quad r_2 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$$

Prema teoremi 1, opšte rešenje relacije (F) je oblika

$$f(n) = c_1\left[\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})\right]^{n-1} + c_2\left[\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})\right]^{n-1} \tag{O}$$

Stavljajući u (O) $n = 1$ i $n = 2$ dobijamo

$$c_1 + c_2 = 1$$

$$c_1\left[\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})\right] + c_2\left[\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})\right] = 1$$

Odavde je $c_1 = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ i $c_2 = -\dfrac{1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$

Rešenje relacije (F) uz date uslove je

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left[\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})\right]^n - \left[\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})\right]^n\right\} \tag{F_R}$$

Primetimo (mada se na prvi pogled čini da nije tako) da je svaki od Fibonačijevih brojeva datih sa (F_R) ceo broj. Prvih nekoliko brojeva tog niza su: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 itd.

Primer 2. Rešiti rekurentnu relaciju

$$f(n) = 2f(n-1) - f(n-2), \ f(=) = 0, \ f(1) = 1.$$

Rešenje. Data rekurentna relacija je linearna pa možemo napisati njenu karakterističnu jednačinu

$$r^2 = 2r - 1$$

Koreni poslednje algebarske jednačine su $r_1 = r_2 = 1$, pa je ovo slučaj jednakih korena i iz teoreme 2 sledi da je opšte rešenje date rekurentne relacije

$$f(n) = c_1 + nc_2$$

Iz početnih uslova nalazimo

$$c_1 = 0 \quad i \quad c_1 + c_2 = 1$$

tj. $c_1 = 0$, $c_2 = 1$

Rešenje rekurentne relacije je $f(n) = n$.

7.5. FIBONAČIJEVI NIZOVI

Fibonačijev niz uveli smo kao niz koji zadovoljava rekurentnu relaciju $f(n+2) = f(n+1) + f(n)$ uz početne uslove $f(1) = f(2) = 1$.

Birajući različite početne uslove, npr. $f(1) = a$, $f(2) = b$, dobijamo različite nizove koji se takodje zovu Fibonačijevi nizovi (svi ovi zadovoljavaju prednju rekurentnu relaciju).

Ako se, na primer, uzme $f(1) = 2$, $f(2) = -1$ dobiće se niz $2, -1, 1, 0, 1, 1, 2, \ldots$, koji sadrži sve članove ranije dobijenog niza za početne uslove $f(1) = f(2) = 1$. Uzimajući $a = -1$, $b = 3$, dobijamo niz $-1, 3, 2, 5, 7, \ldots$ koji ne sadrži niz dobijen za $a = 1$, $b = 1$.

Sledeća teorema uspostavlja vezu izmedju različitih Fibonačijevih nizova.

Teorema 1. *Neka su* $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ *članovi niza definisanog sa*

$$f(n+2) = f(n+1) + f(n), \quad f(1) = f(2) = 1$$

a $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ *članovi niza definisanog sa*

$$f(n+2) = f(n+1) + f(n), \quad f(1) = a, \quad f(2) = b$$

Tada je

$$b_n = a\, a_{n-2} + b\, a_{n-1}, \quad za \quad n \geq 3.$$

Dokaz ove teoreme izvodi se indukcijom pošto se neposredno proveri za $n = 3$.

Teorema 2. *Ako su $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ članovi niza definisanog sa*

$$f(n+2) = f(n+1) + f(n), \quad f(1) = a, \quad f(2) = b,$$

onda je

$$b_n = \frac{a(\omega-1) + b}{\sqrt{5}}\,\omega^{n-1} + \frac{a(1-\bar{\omega}) - b}{\sqrt{5}}\,\bar{\omega}^{n-1}$$

gde je

$$\omega = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \bar{\omega} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

I ova teorema se lako proverava primenom izložene teorije, pa se njen dokaz ostavlja čitaocu za vežbu.

Fibonačijevi brojevi javljaju se pri rešavanju mnogih kombinatornih problema i imaju veoma zanimljiva algebarska svojstva. Evo primera koji to potvrdjuju.

Primer 1. Posmatrajmo Paskalov trougao i saberimo dijagonalno njegove članove, ispisujući zbirove levo od trougla. Primećujemo da su ovi zbirovi Fibonačijevi brojevi.

1	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
5	1	4	6	4	1					
8	1	5	10	10	5	1				
13	1	6	15	20	15	6	1			
21	1	7	21	35	35	21	7	1		
34	1	8	28	56	70	56	28	8	1	

Razlog zašto je to tako lako je videti. Posmatrajmo, na primer, dijagonalu čiji je zbir 21. Primećujemo da je $6 = 1 + 5$, a 1 i 5 pripadaju prethodnim dvema dijagonalama. Isto je $10 = 4 + 6$, $4 = 3 + 1$. Naposletku, 1 u ovoj dijagonali odgovara broju 1 u prethodnoj dijagonali. (Neka čitalac izvede slične zaključke za dijagonalu čiji je zbir 34).

Zbir elemenata u n-toj dijagonali je

$$\binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \ldots + \binom{n-k-1}{k}$$

gde je $k = [\frac{n+1}{2}]$ (tj. k je najveći ceo broj koji nije veći od $\frac{n+1}{2}$).

U $(n-1)$-oj i $(n-2)$-oj dijagonali odgovarajući zbirovi su:

$$\binom{n-2}{0} + \binom{n-3}{1} + \ldots$$

i $$\binom{n-3}{0} + \binom{n-4}{1} + \ldots$$

Sabiranjem poslednja dva zbira, uz primenu Paskalove formule, dobijamo prvi od ova tri zbira, što pokazuje da su ovi zbirovi stvarno Fibonačijevi brojevi.

Primer 2. *(Nizovi znakova plus i minus, PM nizovi).* Pod PM nizovima podrazumeva se niz znakova + i - u kojem se ne nalaze dva znaka minus jedan do drugog.

Na primer,

1^o postoji dva PM niza od jednog znaka, naime {+} i {-} ;

2^o postoji tri PM niza od dva znaka, naime, {+,+}, {+,-} i {-,+};

3^o postoji pet PM nizova od tri znaka, naime, {+,+,+}, {+,-,+}, {+,+,-}, {-,+,+} i {-,+,-}.

Označimo sa F(n) broj različitih PM nizova od n plus ili minus znakova. Pokazaćemo da je niz F(n) Fibonačijev niz sa F(1) = 2, F(2) = 3.

Zaista, svaki niz ove vrste mora početi ili sa + ili sa -.

Ako niz počinje sa +, njegov nastavak može se obrazovati od bilo kojeg od F(n-1) nizova obrazovanih sa n-1 znakova (bez dva uzastopna znaka -).

Ako niz počinje sa -, posle njega mora doći +, a iza ovog znaka može se pisati bilo koji od F(n-2) nizova obrazovanih od n-2 znaka + i -.

Sledi da je F(n) = F(n-1) + F(n-2).

Da je F(1) = 2 i F(2) = 3 videli smo neposredno.

Time je tvrdjenje dokazano.

Primer 3. Fibonači je 1202. god. u svojoj knjizi "Liber Abacci" postavio (izmedju ostalih) sledeći problem:

Par kunića množi se svakog meseca i radja par kunića (mužjaka i ženku), pri čemu novorodjeni par kroz dva meseca donosi sličan priplod. Koliko kunića će biti na kraju godine ako je u početku godine bio jedan par zrelih (starijih od jednog meseca) kunića?

Iz uslova zadatka sledi da će na kraju prvog meseca biti dva para kunića, na kraju drugog - tri, jer će samo zreli par doneti priplod a ne i mladunci iz prvog meseca. Na kraju trećeg meseca doneće mladunce dva para - par sa početka prvog meseca i par rodjen u prvom mesecu, a ne i par rodjen u drugom mesecu. Biće, dakle, ukupno pet pari kunića na kraju trećeg meseca.

Označujući sa F(n) broj parova kunića po isteku n meseci vidimo da samo F(n-2) para daju priplod na kraju n-tog meseca tako da će se F(n) sastojati od broja parova sa kraja (n-1)-og meseca više broj parova rodjenih u n-tom mesecu, tj.

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2)$$

Početni uslovi su $F(0) = 1$, $F(1) = 2$.

Dobili smo Fibonačijev niz. Prirodno, ovaj primer je izvor naziva za niz. Proverite da li će na kraju 12. meseca biti 377 parova.

7.6. ZADACI

1. Odrediti rekurentnu relaciju za svaku od funkcija definisanih niže:

a) f(n) je broj oblasti na koje je ravan podeljena sa n krugova od kojih se svaka dva seku u dve tačke i nikoja tri kruga nemaju zajedničku tačku.

b) f(n) je broj oblasti na koje je površ sfere podeljena sa n velikih krugova sfere od kojih se nikoja tri ne seku u istoj tački.

c) $f(n)$ je broj prostornih oblasti na koje je podeljen trodimenzioni prostor sa n ravni u opštem položaju (tj. svake tri ravni se seku u jednoj tački ali se nikoje četiri ne seku u jednoj tački).

2. Neka $f(n,k)$ bude broj oblasti na koje je ravan podeljena sa $n+k$ pravih takvih da: a) tačno k pravih su medjusobno paralelne; b) nikoje tri prave ne prolaze kroz istu tačku. Naći rekurentnu relaciju za $f(n,k)$ a zatim je rešiti.

3. Na koliko je oblasti podeljena unutrašnjost kruga pomoću tetiva koje spajaju n tačaka na krugu?

4. Na koliko oblasti dele ravan 5 pravih od kojih nijedan par ne čine paralelne prave, ali se tačno 3 prave seku u jednoj tački.

5. Neka n pravih u ravni budu takve da medju njima nema nijedan par paralelnih, ali postoji tačno 3 koje se seku u jednoj tački. Na koliko oblasti te prave dele ravan?

6. Izračunavanjem prvih nekoliko članova sledećih rekurentnih relacija naslutiti oblik njihovog rešenja a zatim primenom indukcije dokazati nadjene formule.

a) $f(n+1) = f(n) + (n+1)^3, f(1) = 1$

b) $f(n+1) = f(n) + 2^n,\ f(1) = 1$

c) $f(n+1) = f(n) + (2n+1),\ f(1) = 1$

d) $f(n+1) = f(n) + (n+1)(n+2)(n+3),\ f(1) = 6$

7. Neka je $f(n+1) = 1 + \prod_{k=1}^{n} f(k),\ f(1) = 2.$

Dokazati:

a) $f(n+1) = f^2(n) - f(n) + 1$

b) $f(n)$ i $f(m)$ su relativno prosti za $n \neq m$

c) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f(k)} = 1 - \frac{1}{f(n)[f(n)-1]}$

d) $f(n) > n.$

8. Rešiti rekurentne relacije *metodom sabiranja* (tj. metodom kojim je rešen problem oblasti u ravni):

a) $f(n+1) = f(n) + n(n-1),\ f(1) = 1$

b) $f(n+1) = f(n) + \frac{1}{n(n+1)},\ f(1) = 1$

c) $f(n+1) = f(n) + n2^n,\ f(1) = 1$

9. Rešiti rekurentnu relaciju iz zadatka 1c)

10. Naći opšte rešenje sledećih rekurentnih relacija:

a) $f(n+2) + 3f(n+1) - 10f(n) = 0$

b) $f(n+2) + 4f(n) = 0$

c) $f(n+3) - 9f(n+2) + 26f(n+1) - 24f(n) = 0$

d) $f(n+4) + 9f(n) = 0$

11. Rešiti sledeće rekurentne relacije sa datim početnim uslovima:

a) $f(n+2) - 4f(n+1) + 4f(n)$, $f(1) = 2$, $f(2) = 4$

b) $f(n+3) - 9f(n+2) + 26f(n+1) - 24f(n) = 0$,
$f(1) = 1$, $f(2) = -3$, $f(3) = -29$.

12. Naći niz $f(n)$ koji ispunjava uslove $f(1) = \cos\alpha, f(2) = \cos 2\alpha$ i $f(n+2) - 2\cos\alpha\, f(n+1) + f(n) = 0$.

13. Pokazati da je za svaki Fibonačijev niz

$$f(n+2) = 2f(n) + f(n-1).$$

14. Dokazati da je broj PM nizova sa k plusova i r minusova $C(k+1,r)$.

15. Na koliko načina je mogućno poredjati u red 12 muškaraca i 7 žena tako da svaka žena bude izmedju dva muškarca.

16. 10 osoba ulazi u lift u prizemlju zgrade sa 23 sprata. Lift staje na prvom i svim ostalim spratovima redom zaključno sa 23. Ako više od jedne osobe ne izlazi iz lifta pri svakom zaustavljanju, na koliko načina mogu sve osobe napustiti lift pod uslovom da nije dozvoljeno da na dva uzastopna zaustavljanja iz lifta izidju dve osobe?

17. Ako se pretpostavi da u Fibonačijevom problemu postoje u početku 3 para zečeva i usvoje sve ostale pretpostavke, izračunati broj parova zečeva na kraju sedmog meseca.

18. Na koliko načina se čovek može uspeti uz stepenište od n stepenika ako mu je dopušteno da može preskočiti najviše jedan stepenik?

19. Isto pitanje kao u prethodnom zadatku pod uslovom da je dozvoljeno preskočiti dva stepenika.

20. Dokazati da zbir bilo kojih 8 uzastopnih članova Fibonačijevog niza ne pripada tom nizu.

21. Neka je $\{a_n\}$ Fibonačijev niz (koji ispunjava uslov $a_1 = 1$, $a_2 = 1$). Dokazati da je:

a) $a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1} = a_{2n}$

b) $a_2 + a_4 + \dots + a_{2n} = a_{2n+1} - 1$

c) $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = a_n a_{n+1}$

8. NEKI PROBLEMI SMEŠTAJA ILI PODELE

8.1. UVOD

Veliki broj kombinatornih problema može se svesti na ovaj: na koliko je različitih načina mogućno n objekata smestiti u k kutija? Tako iskazano pitanje nije dovoljno odredjeno, jer se ne zna: da li su objekti različiti ili jednaki, da li su kutije različite ili jednake, da li su objekti u kutijama uredjeni. Uzimajući u obzir različitost ili sličnost (jednakost) objekata, različitost ili identičnost kutija i uredjenost kako objekata tako i kutija, mogućno je formulisati 9 zadataka ove vrste. Ovde neće biti navedeni svi ti zadaci, već će se, zanemarujući uredjenost, ukazati na 4 osnovna tipa zadataka ove vrste:

I - objekti različiti, kutije različite,
II - objekti jednaki, kutije različite,
III - objekti različiti, kutije jednake,
IV - objekti jednaki, kutije jednake.

U svakom od ovih tipova zadataka postoje razni podtipovi, a neki od ovih zadataka pokazali su se kao veoma teški. U ovom odeljku pozabavićemo se rešavanjem nekih zadataka tipa I-III, a zadacima tipa IV posvećen je sledeći odeljak. Pored načina rešavanja ovih zadataka koje ovde dajemo, oni se mogu rešavati i metodima § 10. Na kraju ovog odeljka osvrnućemo se ukratko na one smeštaje (razmeštaje ili podele) u kojima su objekti uredjeni.

8.2. DEOBA NA DVA DELA

Posebno važan slučaj deobe objekata jeste njihovo razvrstavanje u dve klase ili deoba na dva dela. Primer takvog razvrstavanja je svaki izbor. Kad se izmedju n objekata izabere njih k onda su svi ti objekti podeljeni u dve klase: k izabranih i $n-k$ preostalih.

Primer. Na koliko načina 2 dečaka mogu podeliti 8 krušaka, 10 jabuka i 12 banana?

Rešenje. Kruške možemo podeliti na 9 načina: prvi dečak može ne dobiti nijednu, ili dobiti jednu, ili dve, ..., ili svih 8 krušaka. Isto tako jabuke se mogu podeliti na 11, a banane na 13 načina. Kako je deoba svake vrste voća nezavisna od deobe ostalih vrsta, može se primeniti pravilo proizvoda, pa je traženi broj načina deobe $9 \cdot 11 \cdot 13 = 1\,287$.

Istim postupkom dokazuje se i teorema koja daje rešenje u opštem slučaju.

Teorema 1. *Broj načina na koje n_1 predmeta jedne vrste,..., n_k predmeta k-te vrste, možemo podeliti na dva dela (jedan od tih delova može biti prazan) jednak je*

$$(1) \qquad (n_1 + 1)\,(n_2 + 1)\,\ldots\,(n_k + 1)$$

U slučaju kada su svi predmeti različiti, tj. kad u svakoj vrsti postoji samo po jedan predmet, dobijamo poseban slučaj:

Broj načina na koje možemo podeliti k predmeta na 2 dela je 2^k.

Ova formula dobija se iz (1) stavljanjem

$$n_1 = n_2 = \ldots = n_k = 1.$$

Pravednija deoba. Pri deobi pod uslovima prethodne teoreme jedan od učesnika može ne dobiti ni jedan predmet. Da bismo ispravili tu nepravdu uzmimo da svaki od učesnika u deobi mora dobiti najmanje m_1 predmeta prve vrste, m_2 predmeta druge vrste, ... , m_k predmeta k-te vrste. Na način kako je dokazana teorema 1 izvodi se

Teorema 2. *Postoji*

$$(2) \qquad (n_1 - 2m_1 + 1)\,(n_2 - 2m_2 + 1)\,\ldots\,(n_k - 2m_k + 1)$$

načina da n_1 predmeta jedne vrste, n_2 predmeta druge vrste, ..., n_k predmeta k-te vrste podele dve osobe izmedju sebe, tako *da svaka od osoba ima najmanje m_i $(i = 1,\dots,k)$ predmeta i-te vrste.*

Ako, radi ilustracije, uzmemo u prethodnom primeru da svaki od dečaka mora dobiti najmanje 3 kruške, 4 jabuke, i 4 banane, onda broj mogućih raspodela iznosi $3\cdot 3\cdot 5 = 45$.

Napomena. Umesto: deoba na dva dela, mogli smo reći: smeštanje u dve kutije.

Podela heterogenih objekata na dva dela odredjene veličine

Pretpostavimo da n_1 objekat jedne vrste, n_2 objekata druge vrste, ..., n_k objekata k-te vrste treba podeliti na dva dela tako da u jednom delu bude p objekata, a u drugom $n-p$, gde je $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$. Kako da prebrojimo mogućnosti ovakve podele.

Označimo sa x_i $(i = 1,\dots,k)$ broj objekata i-te vrste koje treba da dobije prvi sudeonik. Tada se problem svodi na nalaženje broja rešenja jednačine

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = p$$

u celim nenegativnim brojevima, koji zadovoljavaju uslov $0 \leqslant x_i \leqslant n_i$ za $i = 1,2,\dots,k$. Taj zadatak smo, u principu, rešili u § 6, pa je time i zadatak podele na dva dela, p i $n-p$, u načelu rešen. Zadržimo se još samo na nekoliko primera.

Primer. Naći broj načina na koje se 4 grupe po n jednakih predmeta mogu podeliti na dva dela od po 2n predmeta.

Rešenje. Označimo sa x_1 (odnosno x_2, x_3, x_4) broj predmeta prve (odnosno druge, treće, četvrte) vrste koje dobija prvi sudeonik. Treba naći broj rešenja jednačine

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2n$$

u celim nenegativnim brojevima, koji nisu veći od n, tj. $0 \leqslant n_i \leqslant n$, za $i = 1,2,3,4$. Na osnovu teoreme 6, § 6.2., taj broj je

$$C(2n+3,3) - 4C(n+2,3) = (n+1)\left[2n^2+4n+3\right]/3.$$

(Jasno je da kad se zna deo prvog sudeonika, ostatak pripada drugom).

8.3. SMEŠTAJ RAZLIČITIH OBJEKATA U RAZLIČITE KUTIJE

Ako n različitih objekata treba smestiti u k kutija, postojaće k^n različitih načina da se to smeštanje obavi. Zaista, postoji k kutija u koje možemo smestiti prvi predmet, k za drugi, itd. i naposletku k kutija za n-ti predmet. Prema pravilu proizvoda ukupan broj smeštaja je k^n.

Pri ovakvom smeštaju neke kutije mogu biti prazne. Postavimo li uslov da nijedna od kutija ne bude prazna, moraće u svakoj biti smešten bar po jedan objekat a to znači da mora imati bar onoliko objekata koliko ima kutija, tj. $n \geq k$, inače podela nije moguća. Označimo sa $d(n,k)$ broj podela n različitih objekata na k osoba (broj smeštaja n različitih objekata u k različitih kutija). Pošto ne postoji nijedna zahtevana podela ako je $n < k$ stavićemo $d(n,k) = 0$ za $n < k$.

Za dobijanje formule za $d(n,k)$ koristimo Princip uključenja i isključenja. Broj svih mogućih podela je k^n, tj. $N = k^n$. Za jednu podelu ovih n objekata reći ćemo da ima osobinu C_1 ako je prva kutija prazna, osobinu C_2 ako je druga kutija prazna, itd. Da bi se izračunao broj smeštaja u kojima ni jedna kutija nije prazna, treba izračunati broj smeštaja koji nemaju nijednu od osobina $C_1, C_2, \ldots, C_k$. Iz razloga simetrije je $N(C_1) = N(C_2) = \ldots = N(C_k) = (k-1)^n$, $N(C_1C_2) = N(C_1C_3) = \ldots = N(C_{k-1}, C_k) = (k-2)^n$, $N(C_1C_2C_3) = N(C_1C_2C_4) = \ldots = N(C_{k-2}, C_{k-1}, C_k) = (k-3)^n$ itd. U opštem slučaju je

$$N(C_{i_1} C_{i_2} \ldots C_{i_s}) = (k-s)^n$$

Prema tome, Princip uključenja i isključenja daje traženu formulu

$$(1) \quad d(n,k) = k^n - C(k,1)(k-1)^n + C(k,2)(k-2)^n - C(k,3)(k-3)^n + \ldots + (-1)^{k-1}C(k,k-1)1^n$$

Za $n < k$ je $d(n,k) = 0$ pa za $n < k$ dobijamo sledeću identičnost sa brojevima $C(k,r)$

$$k^n - C(k,1)(k-1)^n + C(k,2)(k-2)^n - \ldots + (-1)^n C(k,k-1)1^n = 0$$

Primer. Na koliko se načina mogu podeliti 6 različitih predmeta na 3 lica tako da svako od lica dobije bar po jedan predmet?

Rešenje. Primenom formule (1) nalazimo da je traženi broj

$$3^6 - C(3,1)2^6 + C(3,2)1^6 = 540.$$

8.4. SMEŠTAJ JEDNAKIH OBJEKATA U RAZLIČITE KUTIJE

Teorema 1. *Broj načina na koje se n jednakih objekata može smestiti u k različitih kutija je*

$$\binom{n+k-1}{n} \quad tj. \quad \binom{n+k-1}{k-1}$$

Dokaz. Dodajmo gomili od n jednakih predmeta date vrste još k-1 jednakih predmeta neke druge vrste. Broj svih mogućih permutacija tih $n+k-1$ objekata je

$$\frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!} \quad \text{ili} \quad \binom{n+k-1}{n}$$

Pokažimo da svakoj od ovih permutacija odgovara izvesna podela n jednakih objekata na k delova (ili smeštaj jednakih objekata u k kutija) i obrnuto, tj. pokažimo da izmedju skupa ovih podela i permutacija postoji (1-1)-korespondencija (ili bijekcija). Zaista, stavimo u prvu kutiju sve one objekte date vrste koji se nalaze od početka reda (u kojem je predstavljena neka od tih permutacija) do prvog objekta druge vrste. Posle toga, stavimo u drugu kutiju sve one objekte date vrste koji se (u istoj permutaciji) nalaze izmedju prvog i drugog objekta druge vrste, itd. Naposletku, stavimo u k-tu kutiju sve one objekte date vrste koji se nalaze posle $(k-1)$-og objekta druge vrste. Jasno je da i svakoj podeli odgovara ovakav jedan raspored, tj. da je broj ovakvih permutacija istovetan sa brojem proučavanih podela. Time je teorema dokazana.

Primer. 18 jabuka možemo podeliti trojici dečaka na $\frac{20!}{18!2!} =$ $= 190$ načina.

Ako bismo ovaj zadatak rešavali metodom dokaza prednje teoreme, dodali bismo jabukama još dve kruške, a zatim poredjali u red sve te jabuke i kruške. S obzirom da sve jabuke smatramo za jednake i to isto pretpostavljamo i za obe kruške, broj ovih rasporeda je $\frac{20!}{18!2!}$. Svakom od ovih rasporeda odgovara po jedna podela jabuka na 3 dela: prvi deo sačinjavaju sve jabuke od početka reda do prve kruške, drugi deo čine jabuke izmedju obeju krušaka a treći deo čine jabuke od druge kruške do kraja reda. Primetimo da u slučaju kada red počinje kruškom, prvi dečak ne dobija ni jednu jabuku. Ako su kruške jedna do druge, drugi dečak ne dobija ni jednu jabuku, a ako su uz to obe kruške na kraju reda, onda i drugi i treći dečak ostaju bez jabuka. Takodje je jasno da svakoj podeli jabuka na tri dela odgovara po jedan raspored ove vrste.

Možemo, radi lakšeg grafičkog predstavljanja, date jednake objekte predstaviti na hartiji tačkama, a delove - uspravnim crtama. Prvu kutiju (prvog sudeonika u deobi) predstavljaće deo ravni levo od prve uspravne crte, drugu - deo ravni izmedju prve i druge crte, itd. Poslednjeg učesnika u deobi (ili poslednju kutiju) predstavljaće deo ravni desno od poslednje crte.

Primer. Na koliko se načina 6 jednakih klikera mogu podeliti izmedju 10 dečaka?

Rešenje. Obeležavajući klikere tačkama, a delove koje pojedini od dečaka dobija uspravnim crtama (na način kako je gore objašnjeno), imaćemo 6 tačaka i 9 uspravnih crta. Ako je dečak dobio odredjen broj klikera, toliki broj tačaka nalaziće se u delu ravni odredjenom za obeležavanje dela tog dečaka. Napisaćemo, primera radi, dve takve raspodele i objasniti ih.

I II

U raspodeli I prvi dečak je dobio jedan kliker, drugi, treći i četvrti nijedan, peti 2, šesti nijedan, sedmi 1, osmi i deveti nijedan i deseti 2 klikera.

U raspodeli II 3 klikera je dobio 4. dečak, 1 peti, 2 šesti a ostali nisu dobili nijedan kliker.

Vidi se da svaka raspodela, o kojoj se govori, može biti predstavljena sa 9 uspravnih crta i 6 tačaka poredjanih u jedan red i obrnuto. Prema tome, broj raspodela 6 klikera na deset dečaka jednak je broju načina na koje se 6 tačaka i 9 crta mogu poredjati u red.

Pravednija podela. Ako želimo da grupu jednakih objekata podelimo tako da svaki od učesnika u deobi uvek dobije bar jedan odredjen broj predmeta, najprirodnije je garantovati neki "minimalni dohodak", recimo m predmeta svakom učesniku. Deobu u ovom slučaju počinjemo time što svakom učesniku dodelimo po m predmeta, a preostalih $n-mk$ predmeta delimo na proizvoljan način. Prema već izvedenom, broj načina na koje možemo izvesti ovakve deobe iznosi

$$\frac{(n-mk+k-1)!}{(n-mk)!(k-1)!}$$

Važi, dakle, sledeća

Teorema 2. *Broj načina na koje se n jednakih objekata može smestiti u k različitih kutija tako da u svakoj kutiji bude bar po m objekata je*

$$\binom{n-mk+k-1}{k-1}$$

Ako u svakoj od kutija treba da bude bar po jedan predmet, tj. da svaki učesnik u deobi dobije bar po jedan objekat, onda dobijamo (za $m = 1$) sledeću posledicu.

Posledica. *Broj načina na koje se n jednakih objekata može smestiti u k različitih kutija tako da nijedna kutija nije prazna je*

$$\binom{n-1}{k-1}$$

Primer. n jednakih ping-pong loptica mogu se smestiti u m različitih kutija ($n \geq m$), tako da nijedna kutija ne bude prazna, na $\binom{n-1}{m-1}$ načina.

8.5. SMEŠTAJ RAZLIČITIH OBJEKATA U JEDNAKE KUTIJE (*PODELA NEKOG SKUPA*)

Kad n različitih objekata treba smestiti u k jednakih (sličnih) kutija zadatak se može shvatiti kao zadatak podele (particije) nekog skupa sa n elemenata na k podskupova. U opštem slučaju unapred se ne utvrdjuje koliko treba da bude elemenata u pojedinim od tih k podskupova, sem što se u pojedinim problemima zahteva da nijedan podskup ne bude prazan.

Označimo sa $G(n,k)$ broj podela n različitih objekata na k jednakih kutija. Reč "jednakih" znači da je kutije nemoguće razlikovati i da nisu uredjene. Ako se ništa ne kaže, pretpostavlja se da neke kutije mogu biti prazne.

Uzmimo najpre neke posebne slučajeve.

$G(n,1) = 1$, jer nema nikakve deobe - svi predmeti idu u jednu kutiju.

Izračunajmo $G(3,2)$. Označimo objekte sa A, B i C. Mogući su sledeći slučajevi podele:

1 - Sva tri objekta u jednoj kutiji, druga prazna

2 - A u jednoj, B i C u drugoj

3 - B u jednoj, A i C u drugoj

4 - C u jednoj, A i B u drugoj.

Drugih mogućnosti podele nema, pa je $G(3,2) = 4$.

Označimo sa $g(n,k)$ broj podela n objekata na k nepraznih delova (broj smeštaja n objekata u k jednakih kutija tako da nijedna kutija ne bude prazna). I dalje je očigledno $g(n,1) = 1$ ali $g(3,2)$ nije 4 već 3, jer je prva od navedenih podela isključena, pošto nijedna kutija ne sme biti prazna. Broj $g(n,k)$ je broj podela skupa od n elemenata na k nepraznih podskupova.

Izrazićemo $G(n,k)$ posredstvom $g(n,s)$ za razne vrednosti s.

Svih $G(n,k)$ podela možemo svrstati u sledeće klase: u prvu klasu ulaze podele kod kojih nijedna kutija nije prazna (njih ima $g(n,k)$), u drugu - podele kod kojih je prazna tačno jedna kutija (njih ima $g(n,k-1)$), u treću idu one podele kod kojih su prazne tačno 2 kutije (njih ima $g(n,k-2)$) itd. Na taj način dobijamo

$$(2)\qquad G(n,k) = g(n,k) + g(n,k-1) + g(n,k-2) + \ldots + g(n,2) + g(n,1)$$

Sada ćemo naći formulu za $g(n,k)$. Ona se dobija zahvaljujući činjenici što postoji jednostavna veza izmedju $g(n,k)$ i $d(n,k)$ iz prethodnog odeljka. Ta veza se izvodi na isti način kako je izveden broj k-kombinacija iz broja k-permutacija od n objekata.

Posmatrajmo bilo koju podelu uračunatu u broj $g(n,k)$. Kako ima $k!$ načina da se numeriše k jednakih kutija da bi se na taj način dobilo k različitih kutija, svaka podela na jednake kutije daje $k!$ podela na različite kutije. Sledi da je $d(n,k) = g(n,k)k!$ ili

$$(3)\qquad g(n,k) = \frac{1}{k!}\, d(n,k)$$

uzimajući u obzir vrednost za $d(n,k)$ datu jednakošću (1) prethodnog paragrafa, dobijamo iz (3)

$$(4)\qquad g(n,k) = \frac{1}{k!}\left[k^n - C(k,1)(k-1)^n + C(k,2)(k-2)^n - \ldots + (-1)^{k-1} C(k,k-1)1^n\right]$$

Pomoću jednakosti (4) odredjuje se $g(n,k)$ a pomoću (2) $G(n,k)$.

Kako formula (4) daje broj particija nekog skupa od n elemenata na k nepraznih podskupova, broj svih particija istog skupa može se dobiti sabiranjem vrednosti za $g(n,k)$ za $k = 1,2,\ldots,n$. Broj svih particija skupa sa n elemenata je, dakle

$$g(n,1) + g(n,2) + \ldots + g(n,n).$$

8.6. DEOBA PREDMETA RAZLIČITE VRSTE (HETEROGENIH PREDMETA) NA VIŠE OD DVA DELA

Ako se traži broj načina na koje se mogu smestiti više grupa jednakih predmeta u k kutija ($k > 2$), a nema zahteva da u odredjenu kutiju treba smestiti odredjen broj predmeta, onda treba, najpre, naći broj načina na koji se svaka od datih vrsta predmeta može smestiti u k kutija (ili podeliti na k sudeonika), pa dobijene brojeve (primenom Principa proizvoda) izmnožiti.

Primer 1. Na koliko načina 4 lica mogu podeliti 10 nalivpera, 14 olovaka i 9 flomastera?

Rešenje. Prema prethodnom, nalivpera se mogu podeliti na $\binom{13}{3}$, olovke na $\binom{17}{3}$ i flomasteri na $\binom{12}{3}$ načina. Ukupan broj načina da se izvrši tražena deoba je, prema Principu proizvoda

$$\binom{13}{3}\binom{17}{3}\binom{12}{3} .$$

Ako u ovom zadatku postavimo uslov da svaki učesnik u deobi dobije bar po jedan predmet od svake vrste, broj načina deobe biće

$$\binom{9}{3}\binom{13}{3}\binom{8}{3}$$

Primer 2. 5 jabuka, 1 krušku, 1 lubenicu, 1 pomorandžu, 1 limun i 1 bananu možemo podeliti izmedju 3 osobe na $\binom{7}{2}3^5 = 5\ 106$ načina.

Mnogo teži je sledeći problem:

Na koliko načina se mogu smestiti k vrsta predmeta (u svakoj vrsti svi predmeti se smatraju jednakim) u m kutija tako da u svakoj od kutija bude odredjen broj predmeta?

Dato je, dakle, n_1 predmeta prve vrste, n_2 predmeta druge vrste, ..., n_k predmeta k-te vrste, pri čemu je $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, i m kutija. Traži se broj načina na koji se svi ovi predmeti mogu smestiti u kutije tako da u prvoj kutiji bude p_1 predmeta u drugoj p_2 predmeta, ..., u m-toj p_m predmeta. Jasno je da mora biti i $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = n$.

Za primer ovakvih objekata možemo uzeti poštanske marke ili knjige itd. (koje se mogu pojaviti u više primeraka) a "kutije" su albumi ili police za knjige, itd.

Za broj ovakvih smeštaja upotrebićemo simbol

(s) $[n_1,n_2,\ldots,n_k][p_1,p_2,\ldots,p_m]$

jer se pomoću njega bitno skraćuje izlaganje.

Na primer, pitanje: "Na koliko načina možemo smestiti 5 belih, 5 crvenih i 5 zelenih kuglica u dve kutije, tako da u prvoj kutiji bude 7, a u drugoj 8 kuglica"? možemo iskazati veoma kratko: "koliko je $[5,5,5][7,8]$"?

U pododeljku "Podela na dva dela" rešeno je pitanje kako se odredjuje $[n_1,n_2,\ldots,n_k][p,n-p]$. Za slučaj deobe na više od dva dela teškoće su znatno veće. Ovde ćemo dati samo nekoliko primera i dokazati jednu zanimljivu osobinu simbola $[n_1,n_2,\ldots,n_k][p_1,p_2,\ldots,p_m]$.

Teorema. $[n_1,n_2,\ldots,n_k][p_1,p_2,\ldots,p_m] =$

$= [p_1,p_2,\ldots,p_m][n_1,n_2,\ldots,n_k]$.

Za slučaj navedenog primera, ova teorema (koju ćemo nazvati *teoremom o dualnosti*) bi, iskazana rečima, glasila:

Broj načina na koje se 5 belih, 5 crvenih i 5 plavih kuglica mogu smestiti u dve kutije - 7 u prvoj i 8 u drugoj kutiji, jednak je broju načina na koji možemo smestiti 7 žutih i 8 zelenih loptica u tri kutije tako da u svakoj kutiji bude po 5 loptica.

Dokažimo teoremu.

Označimo sa x_i broj objekata prve vrste koji se smeštaju u i-tu kutiju, sa y_i odgovarajući broj objekata druge vrste, itd., naposletku sa z_i broj objekata k-te vrste koji se smeštaju u i-tu kutiju. Tada se problem svodi na odredjivanje broja rešenja sistema jednačina

$$\begin{array}{ll}
x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n_1 & x_1 + y_1 + \ldots + z_1 = p_1 \\
y_1 + y_2 + \ldots + y_m = n_2 & x_2 + y_2 + \ldots + z_2 = p_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
z_1 + z_2 + \ldots + z_m = n_k & x_m + y_m + \ldots + z_m = p_m
\end{array}$$

u celim nenegativnim brojevima.

Ako izvršimo smenu

$$\begin{array}{l} u_1 = x_1,\ v_1 = x_2,\dots,w_1 = x_m \\ u_2 = y_1,\ v_2 = y_2,\dots,w_2 = y_m \\ \dots\dots\dots\dots \\ u_k = z_1,\ v_k = z_2,\dots,w_k = z_k \end{array}$$

dolazimo dó sistema

$$\begin{array}{ll} u_1 + u_2 + \dots + u_k = p_1 & u_1 + v_1 + \dots + w_1 = n_1 \\ v_1 + v_2 + \dots + v_k = p_2 & u_2 + v_2 + \dots + w_2 = n_2 \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ w_1 + w_2 + \dots + w_k = p_m & u_k + v_k + \dots + w_k = n_k \end{array}$$

koji predstavlja upravo broj $[p_1,p_2,\dots,p_m][n_1,n_2,\dots,n_k]$, čime je teorema dokazana, jer su oba ova sistema ekvivalentna, tj. imaju ista rešenja.

Primer. Primenimo teoremu o dualnosti da odredimo $[30,10][10,10,10]$.

Pošto je $[30,10][10,10,10,10] = [10,10,10,10][30,10]$, traženi broj je jednak broju rešenja jednačine

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

u celim nenegativnim brojevima i iznosi $C(13,3) = 286$.

Sa oznakom (s) broj n! može se napisti ovako

$[1,1,\dots,1][1,1,\dots,1]$

gde sa obe strane ima po *n* jedinica.

Ako na levoj strani ima *n*, a na desnoj *k* jedinica, onda je ovo oznaka za $P(n,k)$.

Kombinacije $C(n,k)$ obeležavamo sa

$[1,1,\dots,1][k,n-k]$.

8.7. UREDJENI RAZMEŠTAJI

Predjimo sada na slučaj kad su objekti u svakoj kutiji uredjeni. Dva razmeštaja ove vrste smatraju se različitim ako su objekti različito uredjeni u kutiji. Na primer, razmeštaji I i II objekata A, B, C, D, E, F, G, H po kutijama 1, 2, 3, 4 i 5:

I	1	|AH|	II	1	|HA|
	2			2	
	3	|BC|		3	|BC|
	4	|DFG|		4	|DFG|
	5	|E|		5	|E|

su različiti jer je u prvoj kutiji drukčiji poredak objekata A i H; u razmeštaju I on je AH a u razmeštaju II HA. Činjenica da je u ostalim kutijama poredak objekata identičan nema uticaja.

Problem odredjivanja broja ovakvih razmeštaja tesno je povezan sa problemom smeštaja jednakih objekata po kutijama. Videćemo to iz ovih primera.

Teorema 1. *Broj razmeštaja n različitih objekata u k različitih kutija, ako su objekti u kutijama uredjeni, a nema ograničenja na broj objekata u kutiji (tj. neke kutije mogu biti i prazne) je*

$$n!\binom{n+k-1}{n}$$

Ako nijedna od kutija ne sme biti prazna, taj broj je

$$n!\binom{n-1}{k-1}$$

Dokaz. Pretpostavimo, najpre, da su svi objketi jednaki. Tada su $\binom{n+k-1}{n}$ i $\binom{n-1}{k-1}$ odgovarajući brojevi razmeštaja. Pretpostavimo zatim da su svi objekti različiti i permutujmo ih na svih n! mogućih načina. Primenom Principa proizvoda dolazimo do brojeva u iskazu teoreme.

Kad su objekti jednaki njihovo uredjivanje u kutijama gubi smisao pa važi sledeća

Teorema 2. *Broj razmeštaja n objekata, od kojih su n_1 jedne vrste, n_2 druge vrste, ..., n_k k-te vrste, u k kutija, tako da su objekti u kutijama uredjeni, jednak je*

$$n!\ n_1!n_2!\ \dots\ n_k!$$

puta broj razmeštaja n jednakih objekata u k kutija bez uredjenja objekata u kutijama.

8.8. ZADACI

1. Dokazati da se $2n$ predmeta jedne, $2n$ predmeta druge i $2n$ predmeta treće vrste mogu podeliti na dva dela, tako da u svakom delu bude $3n$ predmeta, na $3n^2 + 3n + 1$ načina.

2. Dokazati da se neparan broj predmeta može izabrati iz n predmeta na 2^{n-1} načina.

3. Koliko delilaca ima broj 29 400?
(Uputstvo: Svaki prirodni broj N može se napisati u obliku $N = p_1^{n_1}\ p_2^{n_2}\ \dots\ p_k^{n_k}$ gde su $p_1, p_2, \dots, p_k$ različiti prosti brojevi. Stavljajući $N = N_1\ N_2$ problem se svodi na podelu n_1 predmeta jedne vrste, n_2 predmeta druge vrste, ..., n_k predmeta k-te vrste na 2 dela. Ta deoba se može izvesti na $(n_1+1)(n_2+1)\ \dots\ (n_k+1)$ načina. Rezultat je: 72).

4. Odrediti broj delilaca broja $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^7$.

5. Dva prijatelja imaju 4 vrste maraka, u svakoj vrsti po 5 maraka. Na koliko načina oni mogu podeliti te marke tako da svaki dobije po 10 maraka?

6. Na koliko različitih načina možemo smestiti n različitih objekata u n različitih kutija tako da nijedna od kutija ne bude prazna? Odgovoriti na ovo pitanje neposredno a zatim primenom formule (1) i na osnovu toga izvesti odgovarajuću identičnost.

7. Da li je tačna relacija

$$8^7 - C(8,1)7^7 + C(8,2)6^7 - C(8,3)5^7 + C(8,4)4^7 - C(8,5)3^7 + C(8,6)2^7 - C(8,7)1^7 = 0?$$

i obrazložiti odgovor.

8. Izračunati $d(7,3)$.

9. Dokazati da se n različitih predmeta može razdeliti izmedju m+p osoba tako da m osoba dobije bar po 1 predmet na

$$(m+p)^n - m(n+p-1)^n + C(m,2)(m+p-2)^n - \ldots + (-1)^m p^n$$

načina.

10. Izračunati $g(7,3)$.

11. Jasno je da postoji samo jedan način da se n različitih objekata smesti u n jednakih kutija tako da nijedna kutija ne bude prazna. Uveriti se u to i računski primenjujući formulu za $g(n,k)$ uzimajući $n = k = 5$.

12. Odrediti broj svih mogućih particija skupa sa 6 elemenata.

13. Uveriti se neposrednim rasudjivanjem, bez primene formule, da je

$$g(n,n-1) = C(n,2) \text{ i } g(n,n-2) = C(n,3) + 3C(n,4).$$

14. Na koliko načina se može razložiti broj 2 310 na tri cela pozitivna činioca tako da: a) činilac sme biti broj 1, b) nijedan od činilaca ne sme biti 1? (Red činilaca je bez važnosti).

15. Koliko je mogućnosti da tri osobe razdele izmedju sebe 6 različitih predmeta i još 6 predmeta iste vrste?

16. Na koliko načina možemo podeliti 4 predmeta jedne vrste, 4 predmeta druge vrste i 4 predmeta treće vrste izmedju 6 osoba (neka od osoba može ne dobiti ni jedan predmet).

17. Na koliko načina možemo razdeliti $3n$ različitih predmeta izmedju 3 čoveka tako da svaki dobije po n predmeta?

18. Na koliko načina možemo podeliti nj različitih predmeta na n grupa u svakoj po j predmeta?

19. Na koliko načina je moguće podeliti 4 predmeta jedne i 5 predmeta druge vrste na 9 osoba tako da svaka osoba dobije po jedan predmet?

20. Izračunati $[2,1,1,1,1][2,1,1,1,1]$.

21. Odrediti $[6,1,1,1,1,1,1][4,4,4]$.

22. Odrediti $[3,1,1,\ldots,1][6,6,6]$, gde je na levoj strani 15 jedinica.

9. PODELA JEDNAKIH PREDMETA (PARTICIJA CELOG BROJA)

9.1. UVOD

Ako se dele istovetni predmeti jedino što tom prilikom uzimamo u razmatranje jeste broj tih predmeta. Zbog toga se podela jednakih predmeta naziva još i *podelom celog broja* na sabirke (takodje cele brojeve) i tako se ovi problemi kombinatorike poklapaju sa nekim problemima klasične teorije brojeva. Ovde se pojavljuje čitav niz problema: kod nekih se uzima u obzir poredak sabiraka, kod drugih ne. Moguće je dalje razlaganje na parne ili neparne sabirke, na različite ili proizvoljne sabirke itd.

Pod *podelom (particijom) ili razlaganjem broja n* podrazumeva se niz brojeva $n_1, n_2, \dots, n_k$ takav da je

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$$

i pri tome je

$$n_1 \geqslant n_2 \geqslant \dots \geqslant n_k \geqslant 1.$$

Brojevi $n_1, n_2, \dots, n_k$ zovu se *sastojci* ili *delovi* razlaganja.

Primeri

(i) $2 = 1 + 1, \quad 2 = 2$

Broj 2 je, dakle moguće razložiti na sabirke samo na dva načina.

(ii) $3 = 1 + 1 + 1, \quad 3 = 2 + 1, \quad 3 = 3$

Broj 3 se može razložiti na 3 načina.

(iii) Za broj 4 nalazimo 5 načina:

$4 = 4, \quad 4 = 3 + 1, \quad 4 = 2 + 2, \quad 4 = 2 + 1 + 1$ i

$4 = 1 + 1 + 1 + 1$

Broj načina na koje se može razložiti ceo broj n na sabirke obeležavaćemo sa p(n). Pri tom uzimamo da su dva razlaganja jednaka ako se razlikuju samo poretkom sabiranja. Tako, na primer, razlaganja broja 3: 2 + 1 i 1 + 2 smatraju se jednakim (broje se samo jedanput).

Naravno, mogle bi se posmatrati *uredjene* podele celog broja, tj. takve podele kod kojih bi se 2 + 1 i 1 + 2 smatrale različitim. Pokazuje se, medjutim, da takve podele nisu od posebnog interesa, jer njihov broj, na primer, odredjuje se vrlo lako; to je broj rešenja jednačine

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$$

u celim pozitivnim brojevima i znamo da iznosi C(n-1,k-1). Odredjivanje broja neuredjenih podela predstavlja veoma težak zadatak.

Pri podeli celog broja može se zahtevati da bude odredjen broj sabiraka, recimo, *najviše* m. Tada se za broj takvih podela upotrebljava oznaka $p_m(n)$. Očigledno je $p_1(n) = 1$.

Radi lakšeg operisanja sa brojevima p_m, uzima se, po dogovoru, da je $p_0 = 1$.

Takodje, $\pi_k(n)$ označava broj razlaganja *n* na sastojke koji su manji ili jednaki *k*.

9.2. GRAFIČKO PREDSTAVLJANJE I DVE VAŽNE IDENTIČNOSTI

Podela celog broja može se predstaviti grafički na način kako je to učinjeno u ovim primerima

```
    5        4 + 1    3 + 2    3 + 1 + 1    2 + 2 + 1
. . . . .    ....     . . .    . . .        . .
             .        . .      .            . .
                               .            .

  2 + 1 + 1 + 1     1 + 1 + 1 + 1 + 1
  . .               .
  .                 .
  .                 .
  .                 .
                    .
```

Sve krajnje leve tačke leže na uspravnoj pravoj liniji i rastojanja izmedju tačaka su jednaka.

Ako u grafičkoj predstavi jedne podele nekog celog broja n pročitamo koliko ima tačaka u uspravnim linijama (kolonama) i te brojeve uzmemo za sastojke podele dobijamo novu podelu tog istog broja (jer broj tačaka pri tom nije ni smanjen ni povećan) koja se zove *spregnuta podela date podele broja n.*

Tako, na primer, grafički predstava podele 5 + 4 + 1 broja 10 je

• • • • •

• • • •

•

a njoj spregnuta podela je 3 + 2 + 2 + 2 + 1 sa grafikom

• • •

• •

• •

• •

•

Iz grafika podele 8 + 4 + 3 + 1 + 1 broja 17

• • • • • • • •

• • • •

• • •

•

•

nalazimo njoj spregnutu podelu istog broja: 5 + 3 + 3 + 2 + 1 + + 1 + 1 + 1.

Grafici podele celog broja upotrebljavaju se za rešavanje nekih problema. Kako se tehnika grafika koristi videćemo iz dokaza sledeće teoreme.

Teorema 1. *Broj podela n u kojima se pojavljuje m ili manje sastavnih delova jednak je broju onih podela n čiji sastojci nisu veći od m, tj.*

$$p_m(n) = \pi_m(n).$$

Dokaz. Posmatrajmo bilo koju podelu broja n u kojoj se pojavljuje najviše m delova. Spregnuta podela ili spreg takve podele nema nijednog dela većeg od m pošto ne može biti više od m tačaka u bilo kojoj koloni one prve podele.

Ovo sparivanje svake podele n na najviše m delova sa njoj spregnutom podelom n čiji nijedan deo nije veći od m uspostavlja obostrano jednoznačan odnos izmedju ovih skupova podela, pa je broj elemenata u oba skupa isti.

Primer. Neka je $n = 5$, $m = 3$. Podele 5 sa najviše tri sastojka su: 5, 4 + 1, 3 + 2, 3 + 1 + 1, 2 + 2 + 1, i podele 5 čiji sastojci nisu veći od 3 su: 3 + 2, 3 + 1 + 1, 2 + 2 + 1, 2 + 1 + + 1 + 1, 1 + 1 + 1 + 1 + 1. Odgovarajući spregovi su

```
    5         1 + 1 + 1 + 1 + 1
. . . . .     .
              .
              .
              .
              .

4 + 1         2 + 1 + 1 + 1
. . . .       . .
.             .
              .
              .

3 + 2         2 + 2 + 1
. . .         . .
. .           . .
              .

3 + 1 + 1     3 + 1 + 1
. . .         . . .
.             .
.             .

2 + 2 + 1     3 + 2
. .           . . .
. .           . .
.
```

Teorema 2. *Broj podela celog broja n na neparne sastojke jednak je broju podela n u kojima su svi sastojci različiti.*

Dokaz. Treba uspostaviti bijekciju izmedju dva skupa delova.

Posmatrajmo najpre jednu od podela čiji su svi delovi neparni. Neka u_i označava koliko se puta i pojavljuje u podeli. Uočenu podelu možemo napisati u obliku:

$$(\alpha)\quad n = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{u_1 \text{ puta}} + \underbrace{3 + 3 + \ldots + 3}_{u_2 \text{ puta}} + \ldots + \underbrace{(2m-1) + (2m-1) + \ldots + (2m-1)}_{u_{m-1} \text{ puta}} = u_1 \cdot 1 + u_2 \cdot 3 + \ldots + u_{2m-1}(2m-1)$$

Kako se svaki prirodan broj n može na jedinstven način predstaviti kao zbir različitih stepena sa osnovom 2 (na primer, $13 = 2^3 + 2^2 + 2^0$), sledi da je

$$(\beta)\quad n = (2^a+2^b+\ldots+2^c)1 + (2^d+2^e+\ldots+2^f)3+\ldots+(2^r+2^s+\ldots+2^t)(2m-1)$$

tj.

$$(\gamma)\quad n = 2^a+2^b+\ldots+2^c+3\ 2^d+3\ 2^e+\ldots+3\ 2^f+\ldots+(2m-1)2^r + +(2m-1)2^s+\ldots+(2m-1)2^t$$

Poslednji izraz za n je jedna podela n na različite delove.

Treba još da proverimo da je ovim uspostavljena bijekcija izmedju podela n na neparne delove i podela n na različite delove. Pretpostavimo da smo pošli od jedne podele n na različite delove. Svaki od tih delova možemo onda napisati kao proizvod nekog neparnog broja i stepena broja 2. Dobićemo onda jedan izraz oblika (γ). Posle toga skupićemo sve delove sa jednakim najvećim neparnim činiocem. Izvlačeći različite neparne činioce dobićemo izraz oblika (β). Kad u (β) saberemo različite stepene od 2 u zagradama, dobićemo podelu n na neparne delove oblika (α). Tako je uspostavljena bijekcija izmedju ovih dveju vrsta podele, a time je teorema dokazana.

9.3. JEDNA REKURENTNA RELACIJA ZA BROJ DELOVA

Označimo sa $\pi_k(n)$ broj razlaganja broja n na sabirke manje ili jednake k. Važi rekurentna relacija

(R) $\quad \pi_k(n) = \pi_{k-1}(n) + \pi_k(n-k)$

Dokaz. Da bismo dokazali ovu jednakost za cele brojeve k i n, $1 < k < n$, podelimo $\pi_k(n)$ razlaganja, čiji su sastojci manji ili jednaki k, u dve grupe:

1^o u jednu grupu ulaze ona razlaganja čiji je jedan sastojak k;

2^o u drugu grupu ulaze ona razlaganja koja nemaju k medju svojim sastojcima.

Odmah je jasno da razlaganja druge grupe ima tačno $\pi_{k-1}(n)$, tj. da ih ima onoliko koliko je razlaganja sa sastojcima manjim ili jednakim k-1.

U svakom od razlaganja prve grupe pojavljuje se k bar jedanput kao sastojak, pa se iz svakog takvog razlaganja može isključiti k. Kad se to učini, broj koji se razlaže je n-k, a razlaganja su na sastojke manja ili jednaka k, te ih ima $\pi_k(n-k)$. Time je relacija dokazana za $1 < k < n$. Formalno, možemo joj pridati smisao i za $k = 1$ i $k = n$.

Primer. Primenićemo izvedenu rekurentnu relaciju da nadjemo koliko ima razlaganja broja 7 na 3 sastojka.

$$\pi_3(7) = \pi_2(6) + \pi_3(4)$$
$$\pi_2(6) = \pi_1(5) + \pi_2(4) = 1 + \pi_2(4)$$
$$\pi_2(4) = \pi_1(3) + \pi_2(2) = 1 + 1$$
$$\pi_3(4) = \pi_2(3) + \pi_3(1) = \pi_2(3)$$
$$\pi_2(3) = \pi_1(2) + \pi_2(1) = 1$$

Sledi

$$\pi_3(7) = 4$$

Posledica 1. *Ako je $k > n/2$, onda je $\pi_k(n) = \pi_{k-1}(n-1)$*

Dokaz. Za $k > n/2$ je $n-k < k$ pa je $\pi_k(n-k) = 0$.

Posledica 2. $\pi_2(2n) = n$, $\pi_2(2n-1) = n$

Dokaz. Razlaganja parnog broja na 2 sastojka su
$1 + (2n-1), 2 + (2n-2), \ldots, n + (2n-n)$

Razlaganja neparnog broja $2n + 1$ (većeg od 1) na dva dela su: $1 + 2n, 2 + (2n-1), \ldots, n + (n+1)$.

Imajući u vidu da je $\pi_n(n) = 1$, $\pi_{n-1}(n) = 1$, $\pi_1(n) = 1$, i uzastopnom primenom relacije (R), dolazimo do formule

$$\pi_k(n) = 1 + \pi_2(n-k) + \pi_3(n-k) + \ldots + \pi_k(n-k)$$

pomoću koje se može sačiniti tablica broja razlaganja n na k delova.

k	n											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2		1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6
3			1	1	2	3	4	5	7	8	10	12
4				1	1	2	3	5	6	9	11	15
5					1	1	2	3	5	7	10	13
6						1	1	2	3	5	7	11
7							1	1	2	3	5	7
8								1	1	2	3	5
9									1	1	2	3

Prva vrsta tablice sastoji se od $\pi_1(n) = 1$. Iz $\pi_n(n) = 1$ i $\pi_{n-1}(n) = 1$ sledi da su dve dijagonale tablice sastavljene od jedinica. Drugu vrstu ispisujemo primenom posledice 2. Tu vrstu možemo napisati i primenom sledećeg postupka: da bismo našli $\pi_2(3)$ sabraćemo brojeve u koloni ispod $3-2 = 1$. Za nalaženje $\pi_2(4)$ sabiraju se brojevi u koloni ispod $4-2 = 2$ itd. (Uzimaju se samo oni brojevi koji do trenutka odredjivanja već postoje u tablici). Slično za ispisivanje treće vrste: za odredjivanje $\pi_3(4)$ sabiraju se brojevi u koloni ispod $4 - 3 = 1$; za odredjivanje $\pi_3(5)$ sabiraju se brojevi u koloni ispod $5 - 3 = 2$, za $\pi_3(6)$ - brojevi ispod $6 - 3 = 3$, za $\pi_3(7)$ brojevi ispod $7 - 3 = 4$ itd.

9.4. SAVRŠENA RAZLAGANJA

Savršeno razlaganje broja n je takvo razlaganje u kojem se sadrži u vidu zbira ... + (...) samo jedno razlaganje svakog broja manjeg od n.

Tako, na primer, razlaganje $1 + 1 + \ldots + 1$ je savršeno razlaganje za svako n.

Savršena su i ova razlaganja: za 3 : $2 + 1$; za 4 : $2 + 1 + 1$, za 5: $3 + 1 + 1$. Broj 7 ima samo ova savršena razlaganja: $4 + 1 + 1 + 1$, $4 + 2 + 1$, $2 + 2 + 2 + 1$ i $1 + \ldots + 1$.

Primetimo da u savršenom razlaganju bar jedan deo mora biti jednak 1. Pretpostavimo da u savršenom razlaganju ima s_1-1 jedinica. Tada svi brojevi manji od s_1 imaju tačno jedno razlaganje, pa je s_1 sledeći deo savršenog razlaganja. Neka se, dalje, u razlaganju sadrži s_2-1 delova jednakih s_1. Tada se svi brojevi do s_1s_2 na jedinstven način razlažu pomoću 1 i s_1. Produžujući sa sličnim rasudjivanjem dolazimo do savršenog razlaganja:

$$\underbrace{1 + \ldots + 1}_{(s_1-1)\text{ puta}} + \underbrace{s_1 + \ldots + s_1}_{(s_2-1)\text{ puta}} + \underbrace{s_1s_2 + \ldots + s_1s_2}_{(s_3-1)\text{ puta}} + \ldots +$$

$$+ \underbrace{s_1s_2\ldots s_{k-1} + \ldots + s_1s_2\ldots s_{k-1}}_{(s_k-1)\text{ puta}}$$

tj.

$$n = s_1-1 + s_1(s_2-1) + \ldots + (s_1s_2\ldots s_{k-1})(s_k-1) = s_1s_2\ldots s_k-1$$

Brojevi $s_1s_2\ldots s_k$ u napisanom poretku u potpunosti odredjuju dato razlaganje. Pri tom je $s_i > 1$ za svako i. Prema tome, važi sledeća

Teorema. *Broj savršenih razlaganja celoga broja n jednak je uredjenom rastavu broja $n+1$ na činioce u kojima se ne pojavljuje 1.*

Na primer, uredjeni rastavi na činioce broja 8 su: 8, 4·2, 2·4, 2·2·2 a njima odgovaraju sledeća razlaganja broja 7: 1 + ... + 1, 4 + 1 + 1 + 1, 2 + 2 + 2 + 1, 4 + 2 + 1.

Savršena razlaganja imaju mnoge praktične primene.

Brojevi p(n) rastu veoma brzo kad raste n. Na primer, broj razlaganja broja 200 ima astronomsku vrednost: 3 972 999 029 388. Za odredjivanje ovog broja ispitivanjem svih razlaganja broja 200 ne bi, verovatno, bio dovoljan jedan ceo ljudski život. Postoji, medjutim, formula, otkrivena 1917. (njeni pronalazači su G.H. Hardy i S. Ramanujan), pomoću koje se gornji broj dovoljno tačno dobija za samo nekoliko minuta. Ta formula koristi tehniku infinitezimalnog računa i njen prvi član glasi:

$$\cdot \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \frac{d}{dn} \left\{ \frac{\exp\left(\frac{2\pi}{\sqrt{6}} \sqrt{n - \frac{1}{24}}\right)}{\sqrt{n - \frac{1}{24}}} \right\}$$

U knjigama koje podrobnije obradjuju ovo pitanje mogu se naći mnoge zanimljive identičnosti izmedju različitih brojeva podele celog broja, a takodje i mnoge asimptotske relacije izmedju ovih brojeva. Za dublje proučavanje ove teme čitalac se može obratiti knjizi M. Hall-a.

Jedan od načina proučavanja broja razlaganja celog broja i dobijanja mnogih identičnosti jeste primenom metoda proizvodnih funkcija o čemu će biti reči u sledećem odeljku.

9.5. ZADACI

1. Izračunati p(5), p(6), p(7), p(8), p(9), p(10).
2. Izračunati $p_4(7)$, $p_5(9)$, $p_3(10)$.
3. Izračunati $\pi_{93}(93) - \pi_{91}(93)$
4. Pokazati da je $\pi_n(n) = \pi_{n-1}(n) + 1$
5. Naći grafik svake od sledećih podela i odgovarajuću spregnutu podelu:

a) 6 + 4 + 3 + 2 + 1 + 1 b) 7 + 5 + 1

c) 10 + 7 + 6 + 3 + 3 + 3 d) 9 + 8 + 3 + 1

e) 8 + 6 + 2 + 2 + 1 f) 4 + 3 + 2 + 1

6. Za $n = 6$, $m = 4$ napisati sve parove podela o kojima je govoreno u dokazu Teoreme 1.

7. Isto, za $n = 7$, $m = 3$.

8. Za $n = 9$ napisati sve parove podela opisanih u dokazu Teoreme 2.

9. Za $n = 6$, $k = 4$ ispisati razlaganja obeju vrsta koja se pominju u dokazu rekurentne relacije (R).

10. Proširiti tablicu vrednosti $\pi_k(n)$ do $n = 12$, $k = 12$.

11. Ispisati savršena razlaganja brojeva 8, 9, 10, 11 i 12 i odgovarajuće rastave na činioce brojeva 9, 10, 11, 12 i 13, o kojima se govori u dokazu teoreme o savršenim razlaganjima.

12. Dokazati da je broj razlaganja broja n na k sabiraka jednak broju razlaganja 2n na n sabiraka.

13. Čega ima više: razlaganja broja 1 000 na 4 parna pozitivna sabirka ili razlaganja broja 1 000 na 4 pozitivna neparna sabirka?

14. Čega ima više: razlaganja broja 1 000 na parne sastojke ili razlaganja istog broja na neparne sastojke?

15. Dokazati da je broj razlaganja 2n na 3 sastojka takva da je zbir bilo koja dva sastojka veći od trećeg, jednak broju takvih istih razlaganja od 2n - 3.

16. Dokazati da ima više razlaganja broja 100 na 2 i 5 nego njegovih razlaganja na 3 i 5.

10. PROIZVODNE FUNKCIJE

10.1. UVOD

U kombinatorici i u primenama kombinatorike mi često izračunavamo (ili upotrebljavamo) brojeve $\varphi(n)$ koji zavise od celog nenegativnog broja, $n \geqslant 0$. Primeri takvih brojeva su: broj k-kombinacija od n elemenata, broj k-permutacija od n elemenata, broj načina na koji se n predmeta može smestiti u k kutija, itd. Dosad smo za svaki od tih brojeva pronalazili poseban način izračunavanja a za svaku od teorema poseban način dokazivanja. Postoji, medjutim, način da se većina od tih dokaza izvede istim postupkom. To je *metod proizvodnih funkcija* (engl.: generating functions).

Da bismo shvatili smisao pojma proizvodne funkcije posmatrajmo neke primere.

Neka su x_1 i x_2 dva objekta koji se mogu sabirati, množiti realnim brojem i množiti izmedju sebe (takvi objekti su, na primer, dva realna broja, dva kompleksna broja, dva polinoma itd.). Posmatrajmo proizvod

(1) $$(1 + x_1t)(1 + x_2t) = 1 + (x_1 + x_2)t + (x_1x_2)t^2$$

Koeficijenat uz t je zbir svih mogućih 1-kombinacija ta dva objekta, a koeficijenat uz t^2 je jedina postojeća 2-kombinacija ta dva objekta.

Slično tome, razvijanjem proizvoda

(2) $$(1 + x_1t)(1 + x_2t)(1 + x_3t)$$

dobijamo sredjeni izraz po stepenima od t:

(3) $1 + (x_1+x_2+x_3)t + (x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)t^2 + (x_1x_2x_3)t^3$

I ovde vidimo da koeficijenat uz t čini zbir svih mogućih 1-kombinacija ovih objekata, koeficijenat uz t^2 zbir svih mogućih 2-kombinacija tih objekata, a koeficijenat uz t^3 je jedinstvena 3-kombinacija ta tri objekta.

Da bismo dobili broj 2-kombinacija ova tri objekta, treba da nadjemo broj sabiraka u koeficijentu uz t^2 u (3). Ako nas zanima jedino broj kombinacija a ne i same kombinacije, možemo staviti $x_1=x_2=x_3 = 1$ u (3) pa nam koeficijent uz t^2 daje traženi broj 2-kombinacija. Kako se u tom slučaju (2) svodi na $(1 + t)^3$ možemo reći da je $(1 + t)^3$ funkcija koja kad se razvije po stepenima od t daje kako broj svih 2-kombinacija tri objekta, tako i broj svih 1-kombinacija (to je koeficijenat uz t) i broj svih 3-kombinacija ta tri objekta (to je koeficijenat uz t^3). Drugim rečima, funkcija $(1 + t)^3$ *proizvodi* svojim razvijanjem po stepenima od t tri broja 3, 3, 1 (koji su, redom, brojevi 1, 2 i 3-kombinacija skupa od tri objekta).

Postupak se može uopštiti na slučaj od *n* različitih objekata:

$$\prod_{i=1}^{n} (1 + x_i t) = 1 + s_1 t + s_2 t^2 + \ldots + s_n t^n \tag{4}$$

Koeficijenti

$$\begin{aligned} s_1(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= x_1 + x_2 + \ldots + x_n \\ s_2(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_n + x_2x_3+\ldots+x_{n-1}x_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_n(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= x_1x_2\ldots x_n \end{aligned}$$

zovu se *elementarne simetrične funkcije* od *n* promenljivih i igraju važnu ulogu u algebri. Ako nas ne zanimaju same funkcije (koje su *k*-kombinacije od *n* objekata) već jedino broj *k* kombinacija stavićemo $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$. Tako dobijamo

$$s_k(1,1,\ldots,1) = \binom{n}{k}, \quad k = 1,2,\ldots,n.$$

Stavljajući $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$ u (4) dobijamo

$$(1 + t)^n = 1 + \binom{n}{1}t + \binom{n}{2}t^2 + \ldots + \binom{n}{n}t^n$$

pa je funkcija $(1 + t)^n$ proizvodna funkcija brojeva $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}$.

Primetimo da dosad navedeni primeri nisu sami po sebi od interesa: brojeve čije smo proizvodne funkcije našli možemo lako naći i bez proizvodnih funkcija. Primeri služe samo za razjašnjenje ideje proizvodne funkcije u cilju primene pojma za odredjivanje onih brojeva u kombinatorici koji su nam još nepoznati.

Definicija proizvodne funkcije konačnog niza. Neka je $a_o, a_1, \ldots, a_n$ konačan niz brojeva. Funkcija $F(t)$ definisana sa

$$F(t) = a_o + a_1 t + \ldots a_n t^n$$

(ili kraće $F(t) = \sum_{k=o}^{n} a_k t^k$) zove se proizvodna funkcija datog niza brojeva.

Za one čitaoce koji su upoznati sa pojmom beskonačnog reda i kojima je jasan samisao izraza "konvergentan red u nekoj okolini nule" dajemo opštiju definiciju proizvodne funkcije (ostali čitaoci mogu ovu definiciju i kasnije njene primene preskočiti).

Definicija proizvodne funkcije beskonačnog niza brojeva. Neka je $a_o, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ beskonačan niz brojeva. Pod proizvodnom funkcijom ovog niza brojeva podrazumeva se zbir $F(t)$ beskonačnog reda

$$F(t) = \sum_{k=o}^{\infty} a_k t^k = a_o + a_1 t + \ldots + a_k t^k + \ldots$$

U vezi sa ovim definicijama primetimo sledeće. Elementi niza $a_o, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ su uredjeni ali ne moraju obavezno biti različiti. Tako, na primer, funkcija $(1 + t)^3$ je proizvodna funkcija konačnog niza 1, 3, 3, 1 u kojem ima dva para jednakih brojeva. I svi članovi niza mogu biti jednaki tako da se može postaviti pitanje koja je proizvodna funkcija niza 1,1,...,1,... (Na ovo pitanje biće odgovoreno kasnije).

Druga primedba koju ovde treba učiniti je u tome, što često mi ne tražimo sve članove jednog niza već samo jedan od njih, recimo a_n. To ne smeta da obrazujemo proizvodnu funkciju celog niza, ali pri njenom razvijanju nećemo izračunavati sve koeficijente polinoma (ili reda) već samo koeficijent uz t^n. Šta to u praksi znači videćemo kasnije iz primera.

Primer 1. Konstantna funkcija 1 je proizvodna funkcija niza 1, 0, 0, ...

Primer 2. Identična funkcija $f(t) = t$ je proizvodna funkcija niza 0, 1, 0, 0, ...

Većini čitalaca svakako da je poznat geometrijski niz

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \ldots + t^n + \ldots$$

Formalno gornje razlaganje može se dobiti deobom polinoma 1 polinomom 1-t.

Prema tome, imamo

Primer 3. Funkcija $f(t) = 1/(1-t)$ je proizvodna funkcija niza 1, 1, 1, ...

Isto tako, deljenjem polinoma 1 polinomom $(1 - t)^2 = 1 - 2t + t^2$ dolazimo do formlanog reda

$$\frac{1}{(1-t)^2} = 1 + 2t + 3t^2 + \ldots + nt^{n-1} + \ldots$$

Onima koji znaju neke osnovne primere beskonačnih redova poznato je da je prednji red konvergentan za $|t| < 1$ i za njih taj red nije formalni. Sledi

Primer 4. Funkcija $f(t) = 1/(1-t)^2$ je proizvodna funkcija niza brojeva 1, 2, 3, ..., n, ...

Slično

Primer 5. Funkcija $f(t) = 1/(1-at)$ (gde je $a \neq 0$) je proizvodna funkcija niza brojeva $1 = a^0, a, a^2, \ldots, a^n, \ldots$

Čitaocu upoznatom sa osnovnim primerima stepenih redova sledeći primeri biće potpuno jasni (ostali čitaoci ove primere mogu preskočiti).

Primer 6. Funkcije a) e^x, b) $\sin x$, c) $\cos x$ proizvodne su funkcije nizova brojeva

a) $a_n = \frac{1}{n!}$; b) $a_n = 0$ ako je n paran broj, a $a_n = \frac{1}{n!}$ ako je n oblika $4k + 1$ i $a_n = \frac{-1}{n!}$ ako je n oblika $4k + 3$; c) $a_n = 0$ ako je n neparan broj, $a_n = \frac{1}{n!}$ za $n = 4k$ i $a_n = \frac{-1}{n!}$ za $n = 4k + 2$.

Primer 7. Lako se nalazi da nizovi: a) $a_n = (-1)^n$; b) $a_n = (-1)^n(n+1)$; c) $a_n = (-1)^n 2^n$; d) $a_n = n(n+1)$ imaju proizvodne funkcije: a) $f(t) = 1/(1+t)$; b) $f(t) = 1/(1+t)^2$; c) $1/(1+2t)$; d) $(2t)/(1-t)^3$.

Izračunavanje nepoznatih brojeva

Osnovni problem u primeni proizvodnih funkcija nije toliko u odredjivanju oblika proizvodne funkcije (mada je taj problem na prvom mestu po važnosti i može biti veoma težak) koliko u odredjivanju brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ Zbog toga ćemo dati nekoliko načina pomoću kojih se lakše izračunavaju dati brojevi.

Pošto su polinomi najčešće funkcije kojima se mogu rešavati kombinatorni problemi, pozabavićemo se najpre odredjivanjem koeficijenata proizvodnih polinoma.

Izračunavanje koeficijenata proizvodnih polinoma

Ranije je rečeno da se proizvodne funkcije koriste za nalaženje samo jednog broja - jednog koeficijenta proizvodnog polinoma (ograničavamo se zasad na polinome) mada je proizvodna funkcija sa kojom se operiše proizvodna funkcija celog jednog konačnog ili beskonačnog niza.

Proizvodni polinomi se obično dobijaju kao proizvodi drugih polinoma a traži se samo koeficijenat jednog odredjenog stepena u polinomu. Pri izračunavanju tog koeficijenta svi članovi proizvoda koji prelaze taj odredjeni stepen ne izračunavaju se. Da bi se dobro shvatilo kako se to izvodi uradićemo nekoliko primera.

Primer 1. Naći članove proizvoda

$$P = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6)$$

koji ne prelaze stepen x^6.

Rešenje.

$$P = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5+x^6+\ldots)$$
$$=(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4+x^5+x^6+\ldots)$$
$$= (1+x)(1+x^2)(1+x^3+x^4+x^5+x^6+\ldots)$$
$$= (1+x)(1+x^2+x^3+x^4+2x^5+2x^6+\ldots)$$
$$= (1+x+x^2+2x^3+2x^4+3x^5+3x^6+\ldots)$$

Primer 2. Izračunati proizvod

$$P = (1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7)(1+x^2+x^4+x^6)\cdot$$
$$\cdot(1+x^3+x^6)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6)(1+x^7) \text{ idući do } x^7.$$

Rešenje.

$$P = (1+x^2+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7)(1+x^2+x^4+x^6)\cdot$$
$$\cdot(1+x^3+x^6)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6+x^7+\ldots) = (1+x+x^2+x^3+x^4+$$
$$+x^5+x^6+x^7)(1+x^2+x^4+x^6)(1+x^3+x^6)(1+x^4)(1+x^5+x^6+x^7+\ldots) =$$
$$= (1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7)(1+x^2+x^4+x^6)(1+x^3+x^6)(1+x^4+x^5+x^6+$$
$$+x^7+\ldots) = (1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7)(1+x^2+x^4+x^6)(1+x^3+x^4+$$
$$+x^5+2x^6+2x^7+\ldots) = (1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7)(1+x^2+x^3+2x^4+$$
$$+2x^5+4x^6+4x^7+\ldots) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 +$$
$$+ 15x^7 + \ldots$$

Primer 3. Izračunati proizvod

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6)(1+x^7(1+x^8)$$

idući do člana koji sadrži x^8.

Rešenje. Posmatrajući kao u prethodnim primerima nalazimo da je taj proizvod jednak polinomu

$$1 + x + x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 4x^6 + 5x^7 + 6x^8 + \ldots$$

gde su izostavljeni svi oni sabirci polinoma koji sadrže stepene x veće od x^8.

Nama će u rešavanju kombinatornih problema biti potrebni samo koeficijenti uz x na naznačenom stepenu; u 1. primeru taj koeficijenat je 3, u 2. on je 15 i u 3. primeru je 6, i to je će biti traženi brojevi posmatranog kombinatornog problema.

Zbog toga treba usmeriti pažnju na izračunavanje samo tog jednog koeficijenta i razvijati veštinu za to.

Na pitanje kako obrazovati proizvodnu funkciju za dati kombinatorni problem biće (delimično) odgovoreno u tekstu koji sledi.

Napomene o definiciji proizvodne funkcije. U definiciji proizvodne funkcije nije potrebno pretpostaviti da je t realan (ili kompleksan) broj već to može biti apstraktan elemenat sa kojim su definisane operacije potrebne u onim slučajevima u kojima je t broj; u tom slučaju nije potrebno voditi računa o konvergenciji beskonačnog reda, već operacije sa beskonačnim redovima ove vrste (kao sabiranje i množenje) treba smatrati formalno definisanim. Tada se lako proverava da su te operacije asocijativne, komutativne i zadovoljavaju zakon distribucije.

Pored ranije definisane proizvodne funkcije uvodi se i *eksponencijalna proizvodna funkcija* definisana (za slučaj beskonačnog reda) na sledeći način:

$$F(t) = a_o + a_1 t + \frac{a_2 t^2}{2!} + \ldots + \frac{a_n t^n}{n!} + \ldots$$

Proizvodna funkcija niza brojeva $a_o, a_1, \ldots$ definiše se i na drugi način, ne samo u odnosu na stepene od t kako je to ovde najpre uradjeno, niti na stepene od t podeljene sa faktorijelima eksponenata - kako je to učinjeno u prethodnoj napomeni već i u odnosu na proizvoljan niz funkcija od t, $f_o(t)$, $f_1(t)$, $f_2(t)$, ...

Funkciju t^2, na primer, možemo prikazati u obliku

$$t^2 = (-1)\cdot 1 + 2\cdot t + 1\cdot(t-1)^2$$

tj. u obliku $a_o f_o(t) + a_1 f_1(t) + a_2 f_2(f)$, gde je $a_o = -1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $f_o(t) = 1$, $f_1(t) = t$, $f_2(t) = (t-1)^2$. Prema tome, funkcija t^2 je proizvodna funkcija tročlanog niza brojeva -1, 2, 1 u odnosu na tročlani niz funkcija 1, t, $(t-1)^2$.

Ovaj primer nagoveštava opštu definiciju proizvodne funkcije:

Funkcija f je proizvodna funkcija niza brojeva $a_o, a_1, \dots, a_n, \dots$ u odnosu na niz funkcija $f_o(t), f_1(t), \dots, f_n(t), \dots$ ako je

$$f(t) = a_o f_o(t) + a_1 f_1(t) + \dots + a_n f_n(t) + \dots$$

Mi se u daljem tekstu nećemo koristiti ovom opštom definicijom već ćemo pojam proizvodne i eksponencijalne proizvodne funkcije upotrebljavati u smislu u kojem su ti pojmovi napred odredjeni, tj. uzimaćemo proizvodnu funkciju (konačnog ili beskonačnog) niza brojeva u odnosu na niz funkcija $1, t, t^2, \dots, t^n, \dots$ ili na niz funkcija $1, t, \frac{t^2}{2!}, \dots, \frac{t^n}{n!}, \dots$.

10.2. PROIZVODNE FUNKCIJE KOMBINACIJA

Razmislimo još malo o primeru proizvodne funkcije binomnih koeficijenata $\binom{n}{o}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$, tj. o funkciji $(1+t)^n$. Mi smo pošli od proizvoda $\prod_{k=1}^{n} (1+x_k t)$ i dobili na desnoj strani polinom n-og stepena od t sa elementarnim simetričnim funkcijama kao koeficijentima. Zbog čega se dobijaju elementarne simetrične funkcije? Da bi se dobio koeficijenat uz t potrebno je sabrati sve članove koji sadrže t. Kako se t dobija kad se izabere t (sa svojim koeficijentom x_1 ili $x_2, \dots$) iz samo jednog činioca proizvoda $(1 + x_1 t)(1+x_2 t) \dots (1+x_n t)$ a 1 iz preostalih (n-1) činioca i rezultati tog izbora pomnože, a zatim saberu svi ti proizvodi, dobijamo za koeficijenat uz t funkciju $s_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + \dots + x_n$. (Ovde je najpre primenjen princip proizvoda a zatim princip zbira). Slično tome, da se dobije koeficijenat uz t^2 treba sabrati sve članove koji sadrže t^2. t^2 se dobija kad se izabere t iz samo dva činioca gornjeg proizvoda a 1 iz ostalih n-2 činilaca. Ako je t izabrano iz i-tog i j-tog činioca dobija se sabirak $x_i x_j t^2$. Uzimanje svih mogućih sabiraka ovog oblika daje simetričnu funkciju s_2. Slično se razmišlja i pri traženju koeficijenta uz t^k $(1 \leqslant k \leqslant n)$. Da se dobije sabirak u tom koeficijentu potrebno je izabrati t iz k činilaca a 1 iz preostalih $n-k$. Obavljajući sve moguće izbore te vrste i sabirajući ih dolazi se do s_k.

Ovaj način zaključivanja već je poznat iz dokaza binomne teoreme. Da on ima opštiju primenu nego što je samo dokaz jedne teoreme videćemo iz sledećeg primera, koji, ustvari, predstavlja odredjivanje proizvodne funkcije za kombinacije sa ponavljanjem.

Uzmimo da je dato n različitih objekata $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (n slova) i da svaki od tih objekata može da se pojavi k puta (da zauzme k mesta), a da je zadatak u odredjivanju broja kombinacija te vrste sa po k objekata u svakoj kombinaciji. Da bismo našli proizvodnu funkciju ovih kombinacija podsetimo se da svakoj ovakvoj kombinaciji odgovara jedinstven homogeni proizvod slova $x_1, x_2, \ldots, x_n$ stepena k i, obrnuto, da svakom homogenom proizvodu stepena k odgovara jedinstvena k-kombinacija ove vrste. To znači da je broj k-kombinacija sa ponavljanjem od n objekata jednak broju homogenih proizvoda stepena k od n slova. Za primer homogenih proizvoda stepena 2 od 4 slova x_1, x_2, x_3, x_4 možemo uzeti $x_1^2, x_2x_3, x_3^2, x_1x_4$. Značaj interpretacije k-kombinacija sa ponavljanjem pomoću homogenih proizvoda stepena k je u tome što ove proizvode možemo obrazovati algebarski, tj. koristeći njih možemo obrazovati proizvodnu funkciju broja svih k-kombinacija sa ponavljanjem, na isti način kako je obrazovana proizvodna funkcija k-kobminacija (bez ponavljanja).

Posmatrajmo proizvod

$$\Pi = (1 + x_1t + x_1^2t^2 + \ldots)(1 + x_2t + x_2^2t + \ldots) \ldots (1 + x_nt + x_n^2t^2 + \ldots).$$

Pošto izvršimo naznačeno množenje i sredimo rezultate dobijamo:

$$\Pi = 1 + (x_1+x_2+\ldots+x_n)t + (x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2+x_1x_2 + \ldots + x_1x_n + x_2x_3 + \ldots + x_2x_n + \ldots + x_{n-1}x_n)t^2 + \ldots$$

Koeficijenat uz t je zbir svih homogenih proizvoda stepena 1, koeficijenat uz t^2 je zbir svih homogenih proizvoda stepena 2. Da se dobije koeficijenat uz t^k treba iz prvog činioca izabrati t^{i_1}, iz drugog t^{i_2}, ..., i naposletku iz n-og t^{i_n} ali tako da bude $i_1 + i_2 + \ldots + i_n = k$, pri čemu su $i_1, i_2, \ldots, i_n$, nenegativni brojevi. Koeficijent tako izabranog t^k je $x_1^{i_1}, x_2^{i_2}, \ldots, x_n^{i_n}$. Sabirajući sve takve članove (pod uslovom da je $i_1 + i_2 + \ldots + i_n = k$) dobijamo koeficijenat uz t^k. Vidimo da je taj koeficijenat zbir svih homogenih proizvoda stepena k koji se mogu obrazovati od slova $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Da bismo našli broj svih ovih homogenih proizvoda stepena k stavićemo $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$ i naći koeficijenat uz t^k u Π. Sa tako izabranim vrednostima za $x_1, x_2, \ldots, x_n$ proizvod Π postaje

$$\Pi' = (1 + t + t^2 + \ldots + t^m + \ldots)^n$$

Čitalac ovde može zamisliti da je svaki od činilaca u Π bio konačan i išao do t^m, na primer, ili da su neki (ili svi) činioci beskonačni redovi.

Kako je
$$\Pi' = \left(\frac{1}{1-t}\right)^n = (1-t)^{-n}$$
$$= \sum_{k=o}^{\infty} (-1)^k \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\ldots(-n-k+1)}{1\cdot 2\ \ldots\ k} t^k$$
$$= \sum_{k=o}^{\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n+k-1)}{k!} t^k$$
$$= \sum_{k=o}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} t^k$$

zaključujemo da je $(1-t)^{-n}$ proizvodna funkcija brojeva k-kombinacija sa ponavljanjem od n objekata, za $k = 0, 1, \ldots,$ i taj broj je (kao što nam je od ranije poznato) $\binom{n+k-1}{k}$.

Primer 1. Koliko 3-kombinacija možemo obrazovati od slova a, b, c, d tako da se slovo a može pojaviti proizoljan broj puta (to znači ili 0 ili 1 ili 2 ili 3 puta) a ostala slova najviše jedanput?

Rešenje. Zadatak je veoma lak, tražene kombinacije su aaa, aab, aac, aad, abc, abd, acd, bcd, pa ih ima 8 i rešavanje zadatka pomoću proizvodnih funkcija ima za cilj uvežbavanje njihove upotrebe.

Sve gornje kombinacije proizvode se funkcijom

$$f = (1+at+a^2t^2+a^3t^3)(1+bt)(1+ct)(1+dt),$$

a njihov broj dobija se kao koeficijenat uz t^3 kad se stavi $a = b = c = d = 1$, tj. kao koeficijenat uz t^3 izraza

$$f^1 = (1 + t + t^2 + t^3)(1 + t)^3$$

Kako je $f^1 = (1 + t + t^2 + t^3)(1 + 3t + 3t^2 + t^3)$

a traži se samo koeficijenat uz t^3 nećemo izvoditi celo naznačeno množenje već ćemo ići samo do t^3. Imamo

$$\begin{aligned} f^1 &= (1 + 3t + 3t^2 + t^3 + t + 3t^2 + 3t^3 + t^2 + 3t^3 + t^3 + \ldots) \\ &= 1 + 4t + 7t^2 + 8t^3 + \ldots \end{aligned}$$

pa je traženi broj kombinacija 8.

Primetimo da je ovde primenjen postupak nepotpunog množenja polinoma, o kojem je govoreno ranije.

Primer 2. Proizvodna funkcija k-kombinacija sa neograničenim ponavljanjima od n objekata, uz uslov da se svaki objekat mora pojaviti bar jednom je

$$f = (t + t^2 + \ldots)^n$$

tj. $f = t^n(1+t+t^2+\ldots) = t^n(\frac{1}{1-t})^n = t^n \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} t^k$

Kad promenimo indeks sabiranja stavljajući $n+k = m$ poslednji zbir postaje

$$f = \sum_{m=n}^{\infty} \binom{m-1}{m-n} t^m = \sum_{m=n}^{\infty} \binom{m-1}{n-1} t^m$$

Sledi da je broj k-kombinacija tražene vrste 0 kad je $k < n$, a $\binom{k-1}{n-1}$ kad je $k \geqslant n$.

10.3. PROIZVODNE FUNKCIJE PERMUTACIJA

Iz prethodnih primera stiče se utisak da su proizvodne funkcije kao stvorene za iznalaženje broja kombinacija, ali da se ne mogu primeniti na permutacije, jer su x_1x_2 i x_2x_1 istovetni elementi u slučaju komutativnih algebarskih operacija kao što je množenje brojeva. Ipak pokazalo se da je do proizvodnih funkcija permutacija moguće doći bez naročitih teškoća.

Dok razmišljamo o tome kakvog oblika treba da budu proizvodne funkcije permutacija primetimo da se sve permutacije dobijaju tako što se uzmu odgovarajuće kombinacije i zatim na sve moguće načine ispremeštaju elementi uzetih kombinacija. U slučaju k-permutacija bez ponavljanja postoji sledeća veza izmedju $P(n,k)$ i $C(n,k)$

$$P(n,k) = k!C(n,k)$$

Prema tome, preobražajem koeficijenta u proizvodnoj funkciji za kombinacije

$$(1+t)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)t^k = \sum_{k=0}^{n} k!C(n,k)\frac{t^k}{k!}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} P(n,k)\frac{t^k}{k!}$$

dolazimo do proizvodne funkcije k-permutacija bez ponavljanja. To su, dakle, koeficijenti uz $\frac{t^k}{k!}$ za $k = 0,1,\ldots,n$.

Pokušajmo da sličan postupak primenimo i u slučaju kad se jedan objekat u k-permutaciji može javiti više puta (on se može pojaviti ili 0, ili 1, ili 2, ..., ili k puta). Uzmimo najpre jedan primer. Recimo da treba da za $k = 1,2,\ldots,5$ nadjemo sve permutacije slova a, a, a, b, c. Služeći se analogijom sa prethodnim slučajem obrazovaćemo funkciju

$$(1 + at + a^2t^2 + a^3t^3)(1 + bt)(1 + ct) =$$
$$= 1+1!(a+b+c)\frac{t}{1!} +2!(a^2+ab+ac+bc)\frac{t^2}{2!} +3!(a^3+a^2b+a^2c+abc)\frac{t^3}{3!}$$
$$+ 4!(a^3b+a^3c+a^2bc)\frac{t^4}{4!} + 5!(a^3bc)\frac{t^5}{5!}$$

Stavljajući a = b = c = 1 nalazimo da su koeficijenti uz $\frac{t^k}{k!}$ (k = 1,...,5) redom: 3, 8, 24, 72 i 120, dok je broj odgovarajućih permutacija 3, 7, 13, 20 i 20.

Došli smo, dakle, tim postupkom do netačnog rezultata. Koji je razlog toga? On je u tome što sve *k*-kombinacije (u ovom slučaju) ne proizvode isti broj permutacija. Na primer, kombinacija a^3 proizvodi samo jednu permutaciju, a kombinacija *abc* njih 6. Lako uočavamo da ako je jedno slovo u *k*-kombinaciji ponovljenom puta onda ta kombinacija daje $\frac{k!}{m!}$ različitih *k*-permutacija.

Zaključujemo da će proizvodna funkcija biti tačno odredjena uvek kad se u nekoj kombinaciji slovo *a* (recimo) nadje *m* puta, tj. pojavi se a^m, tu kombinaciju treba podeliti sa m! Kad smo to primetili, proizvodnu funkciju za prethodni primer možemo napisati u obliku

$$(1 + a\frac{t}{1!} + a^2\frac{t^2}{2!} + a^3\frac{t^3}{3!})(1 + b\frac{t}{1!})(1 + c\frac{t}{1!})$$

$$= 1 + 1!(a+b+c)\frac{t}{1!} + 2!(\frac{a^2}{2!} + ab + ac + bc)\frac{t^2}{2!} +$$

$$+ 3!(\frac{a^3}{3!} + \frac{a^2b}{2!1!} + \frac{a^2c}{2!1!} + abc)\frac{t^3}{3!} +$$

$$+ 4!(\frac{a^2bc}{2!1!1!} + \frac{a^3b}{3!1!} + \frac{a^3c}{3!1!})\frac{t^4}{4!} + 5!(\frac{a^3bc}{3!1!1!})\frac{t^5}{5!}$$

Stavljajući a = b = c = 1, dobijamo tražene brojeve permutacija kao koeficijente uz $\frac{t^k}{k!}$ (k = 1,...,5).

I u opštem slučaju koristi se isti postupak. Odgovarajuća proizvodna funkcija za kombinacije menja se tako što se t^m zamenjuje sa $\frac{t^m}{m!}$ u svakom činiocu u kojem se pojavljuje.

Primer 1. Proizvodna funkcija *k*-permutacija od *n* različitih objekata, sa neograničenim ponavljanjem svakog od objekata je

$$(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^k}{k!} + \dots)^n = e^{nt} = \sum_{k=0}^{\infty} n^k\frac{t^k}{k!}$$

Odmah vidimo da permutacija o kojima je reč ima n^k.

Primer 2. Broj k-permutacija od n objekata, od kojih je n_1 jedne vrste, n_2 druge vrste, ..., n_m m-te vrste, gde je $n_1 + n_2 +$

$+ \ldots + n_m = n$, odredjuje se pomoću proizvodne funkcije

$$(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{t^{n_1}}{n_1!})(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{t^{n_2}}{n_2!}) \ldots$$
$$(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{t^{n_m}}{n_m!})$$

Čitalac se može uveriti da je koeficijenat uz $t^n/n!$ $\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_m!}$, što je od ranije poznat rezultat.

10.4. PROIZVODNE FUNKCIJE I PROBLEMI RAZMEŠTAJA

Kao i mnogi drugi problemi prebrojavanja i problemi razmeštaja (raspodele i sl.) mogu se uspešno rešavati pomoću proizvodnih funkcija. Pokazaćemo to na nekoliko primera.

Objekti različiti (i neuredjeni), kutije različite

Teorema. *Broj načina na koji se n različitih objekata mogu smestiti u k različitih kutija, tako da tačno m kutija nije prazno (i $n-m$ je prazno) je*

(1) $\binom{k}{m} \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} (-1)^j (m-j)^n$

Dokaz. Ako uzmemo da su neprazne kutije $i_1, i_2, \ldots, i_m$ onda je odgovarajuća simbolična proizvodna funkcija

(α) $(x_{i_1} t + x_{i_1}^2 t^2 + \ldots)(x_{i_2} t + x_{i_2} t^2 + \ldots)(x_{i_m} t + x_{i_m} t^2 + \ldots)$

Broj načina razmeštaja n objekata u k kutija tako da naznačene kutije ne budu prazne je koeficijenat uz $t^n/n!$ u prednjem izrazu u kojem je stavljeno $x_{i_1} = x_{i_2} = \ldots = x_{i_m} = 1$. Tada se (α) svodi na $(e^t - 1)^m$. Kako m kutija, izmedju njih k, može biti izabrano na $\binom{k}{m}$ različitih načina, proizvodna funkcija našeg problema je $\binom{k}{m}$ $(e^t - 1)^m$. Razvijajući $(e^t - 1)^m$, najpre po binomnom obrascu, a zatim u stepeni red za e^t, dobijamo

$$\binom{k}{m}(e^t - 1)^m = \binom{k}{m}\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}(-1)^j e^{(m-j)t}$$
$$= \binom{k}{m}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{m}{j}(m-j)^n\right]\frac{t^n}{n!}$$

Vidimo da je koeficijenat uz $t^n/n!$ izraz (1).

Ako zahtevamo da nijedna kutija ne bude prazna, tj. da bude $m = k$, onda se (1) svodi na

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j(k-j)^n$$

a ovo je (već nam poznati) broj načina na koji se n različitih objekata može smestiti u k kutija tako da nijedna kutija ne bude prazna.

Objekti jednaki, kutije različite

Teorema. *Broj načina smeštaja n jednakih objekata u k različitih kutija je*

$$C(n + k - 1, n).$$

Dokaz. Posmatrajmo proizvod

$$(1+x_1t+x_1^2t^2+\dots+x_1^nt^n)(1+x_2t+x_2^2t^2+\dots+x_2^nt^n)\dots(1+x_kt+x_k^2t^2 + \\ +\dots+x_k^nt^n)$$

Kad se ovaj proizvod razvije njegovi koeficijenti uz t^s (za $s = 0,1,\dots,n$) biće zbirovi svih homogenih proizvoda reda s obrazovanih od slova $x_1,x_2,\dots,x_k$ (v. jednakost (α) ovog odeljka). Koeficijenat uz t^n imaće sabirke oblika $x_1^{i_1}, x_2^{i_2},\dots,x_k^{i_m}$ i taj sabirak ćemo interepretirati na sledeći način: i_1 predmeta je smešteno u kutiju br. 1, i_2 u kutiju br. 2, itd. Na taj način, jedan homogeni proizvod reda n na jedinstven način predstavlja smeštaj

n objekata u k kutija i obrnuto. Prema tome, ako stavimo $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 1$ dobićemo broj načina na koji možemo n predmeta smestiti u k kutija. To znači da je traženi broj jednak koeficijentu uz t^n u razvijenom obliku za $(1 + t + \ldots + t^n)^k$. Taj koeficijenat je, medjutim, jednak koeficijentu uz t^n u razvoju za $(1 + t + \ldots + t^n + \ldots)^k = (\frac{1}{1-t})^k$. Na osnovu obrasca za binomni red, ovaj koeficijenat je $C(n + k - 1, n)$, čime je teorema dokazana.

Smeštaj n jednakih predmeta u k kutija tako da nijedna kutija ne bude prazna

Prethodni smeštaj dopuštao je prazne kutije. Sada ćemo tu mogućnost isključiti. Kad to učinimo neće se više pojavljivati x_i pa ćemo, stoga, posmatrati proizvod $(x_1 t + x_1^2 t^2 + \ldots + x_1^n t^n)(x_2 t + x_2^2 t^2 + \ldots + x_2^n t^n + \ldots)(x_k t + x_k^2 t^2 + \ldots + x_k^n t^n + \ldots)$.

Kad se ovaj proizvod razvije njegov koeficijenat uz t^n biće zbir svih sabiraka oblika $x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_k^{i_k}$, gde je $i_1 + i_2 + \ldots + i_k = n$, i $i_j \neq 0$ (za $j = 1,\ldots,k$). Svaki ovakav sabirak na jedinstven način predstavlja broj načina na koje se mogu smestiti n jednakih objekata (recimo kuglica) u k različitih kutija. Kao i u prethodnom slučaju, broj tih načina dobijamo stavljajući $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 1$, i taj broj predstavlja koeficijent uz t^n u razvitku za

$$(t + t^2 + \ldots + t^n + \ldots)^{-k}$$

On je

$$C(n-1, n-k), \text{ tj. } C(n-1, k-1)$$

Dokazana je, dakle,

Teorema. *Broj načina smeštaja n jednakih objekata u k kutija tako da nijedna kutija ne bude prazna je*

$$C(n-1, k-1).$$

10.5. PROIZVODNE FUNKCIJE I RAZLAGANJE CELOG BROJA

Teorema. *Proizvodna funkcija $P(t)$ razlaganja celog broja n bez ikakvih ograničenja na njegove sastojke, (tj. broja p_n) je*

$$(1)\quad P(t) = (1+t+t^2+\dots)(1+t^2+t^4+\dots)(1+t^3+t^6+\dots)(1+t^k+t^{2k}+\dots)\dots = 1/(1-t)(1-t^2)(1-t^3)\dots(1-t^k)\dots$$

(gde je, po definiciji $p_0 = 1$).

Dokaz. Podjimo od izraza (koji važi za $|t| < 1$)

$$\begin{aligned}&1/(1-a_1t)(1-a_2t^2)\dots(1-a_kt^k)\dots\\ &= (1+a_1t+a_1^2t^2+a_1^3t^3+\dots)(1+a_2t^2+a_2^2t^4+\dots)\dots\\ &\quad\dots(1+a_kt^k+a_k^2t^{2k}+\dots)\dots\\ &= 1 + a_1t + (a_1^2+a_2)t^2 + \dots + (a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}\dots a_k^{\lambda_k}+\dots)t^n + \dots\end{aligned}$$

U koeficijentu uz t^n svaki sabirak odgovara (ili strožije: odredjuje) jednom razlaganju broja n na sabirke:

$$\underbrace{(1+1+\dots+1)}_{\lambda_1} + \underbrace{(2+2+\dots+2)}_{\lambda_2} + \dots + \underbrace{(k+k+\dots+k)}_{\lambda_k} = n$$

Prema tome, ima onoliko razlaganja broja n koliko ima sabiraka uz t^n. Da dobijemo njihov broj stavićemo $a_1 = a_2 = \dots = 1$, a to i daje funkciju $P(t)$. Time je teorema dokazana.

Primetimo da (1) daje i proizvodnu funkciju permutacija sa ponavljanjem, kod kojih se na prvi elemenat ne nameću nikakva ograničenja, od drugog se zahteva da se javlja u parnom broju, od trećeg da se javlja u broju jednakom nekom umnošku broja 3 itd.

Iz dokaza ove teoreme lako se vidi kako treba da izgleda proizvodna funkcija razlaganja na koje su nametnuta izvesna ograničenja. Evo nekoliko primera.

1. *Proizvodna funkcija razlaganja čiji sastojci nisu veći od m je:*

$$P_m(t) = 1/(1-t)(1-t^2)\ldots(1-t^m)$$

2. *Proizvodna funkcija razlaganja čiji su svi sastojci različiti je:*

$$q(t) = (1+t)(1+t^2)(1+t^3)\ldots$$

3. *Razlaganja čiji su svi delovi neparni ima proizvodnu funkciju:*

$$n(t) = 1/(1-t)(1-t^3)(1-t^5)\ldots$$

U § 9 bilo je dokazano da je broj razlaganja broja n na nejednake delove jednak broju njegovih razlaganja na neparne delove. Ta činjenica sada postaje skoro očigledna, jer je za $|t| < 1$:

$$n(t) = \frac{(1-t^2)(1-t^4)(1-t^6)\ldots}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)\ldots} = \frac{(1-t)(1+t)(1-t^2)(1+t^2)(1-t^3)(1+t^3)}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)\ldots}.$$

$$= (1+t)(1+t^2)(1+t^3)\ldots = q(t)$$

4. *Broj razlaganja broja n na tačno m delova ima proizvodnu funkciju*

$$e_m(t) = t^m/(1-t)(1-t^2)\ldots(1-t^m)\ldots$$

Primer 1. Broj razlaganja broja 9 na sabirke jednake 3 je koeficijenat uz t^9 u izrazu

$$1 + t^3 + t^6 + t^9$$

Taj koeficijenat je 1 i odgovara razlaganju 3+3+3.

Primer 2. Broj razlaganja brojeva 9 i 10 na sastojke 2 i 3 su koeficijenti uz t^9 i t^{10} u izrazu

$$(1+t^2+\ldots+t^{10})(1+t^3+t^6+t^9)$$
$$= 1+t^2+t^3+t^4+t^5+2t^8+2t^9+2t^{10}+\ldots$$

Ima, dakle, po dva tražena razlaganja za svaki od ovih brojeva. Ta razlaganja su: za broj 9: 3+3+3 i 3+2+2+2, a za broj 10: 3+3+2+2 i 2+2+2+2+2.

Primer 3. Broj razlaganja broja 25 na delove jednake 3, 5 i 7 je koeficijenat uz t^{25} u izrazu

$$(1+t^3+\ldots+t^{24})(1+t^5+\ldots+t^{25})(1+t^7+t^{14}+t^{21})$$

Primer 4. Naći broj načina pomoću kojih može biti nalepljen iznos od 100 din. u sudskim markama od 1, 5, 10, 20 i 50 din. pretpostavljajući da ovih maraka ima u praktično neograničenom broju.

Rešenje. Ovo je problem razlaganja broja 100 na delove 1, 5, 10, 20 i 50, pa se rešenje dobija kao koeficijenat uz t^{100} u izrazu:

$$(1+t+t^2+\ldots+t^{100})(1+t^5+t^{10}+\ldots+t^{100})\cdot$$
$$(1+t^{10}+\ldots+t^{100})(1+t^{20}+\ldots+t^{100})(1+t^{50}+t^{100})$$

Posle podužeg računanja nalazimo da je traženi broj 345.

10.6. PROIZVODNE FUNKCIJE I REKURENTNE RELACIJE

Za dobijanje analitičkog izraza niza brojeva zadatih nekom rekurentnom relacijom koriste se i proizvodne funkcije. Koeficijenti razvitka proizvodne funkcije moraju u tom slučaju zadovoljavati rekurentnu relaciju i njene početne uslove. Kako se proizvodne funkcije primenjuju na odredjivanje niza zadatog rekurentnom relacijom videćemo iz primera.

Primer 1. Koristeći proizvodne funkcije odrediti analitički izraz za $\{a_n\}$ zadatog rekurentnom relacijom $a_{n+1} = a_n + n$ uz uslov $a_o = 1$.

Rešenje. Stavimo

$$f(x) = a_o + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

Naš cilj je da dobijemo izraze oblika $(a_{n+1}-a_n-n)x^{n+1}$ koji su svi jednaki nuli budući da je $a_{n+1} = a_n+n$. Da bismo to postigli postupićemo na sledeći način

$$f(x) = a_o+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$$
$$- xf(x) = -a_ox-a_1x^2-\ldots-a_{n-1}x^n-a_nx^{n+1}-\ldots$$
$$- \frac{x^2}{(1-x)^2} = -x^2-2x^3-3x^4-\ldots-nx^{n+1}-\ldots$$

Sabiranjem ovih relacija dobijamo

$$(1-x)f(x) - \frac{x^2}{(1-x)^2} = a_o+(a_1-a_o)x+(a_2-a_1-1)x^2$$
$$+\ldots+(a_{n+1}-a_n-n)x^{n+1}+\ldots = a_o = 1$$

jer su svi ostali koeficijenti na desnoj strani nule.

Odavde je

$$f(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{x^2}{(1-x)^3}$$

Dalje je (razvijanjem u red)

$$f(x) = 1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$$
$$+x^2\left(\frac{2\cdot 1}{2} + \frac{3\cdot 2}{2}x + \frac{4\cdot 3}{2}x^2 + \ldots + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2} + \ldots\right)$$
$$= 1 + x + 2x^2 + \left(1 + \frac{3\cdot 2}{2}\right)x^3 + \ldots + \left(1 + \frac{n(n-1)}{2}\right)x^n + \ldots$$

Zaključujemo da je

$$a_n = 1 + \frac{n(n-1)}{2}$$

rešenje date rekurentne relacije.

Primer 2. Naći analitički izraz niza $\{a_n\}$ koji zadovoljava rekurentnu relaciju

$$f(n+2) = f(n+1) + f(n), \ f(1) = 1, \ f(2) = 2.$$

$a_1 = 1$ $a_2 = 2$

Rešenje. Stavimo

$$\phi(t) = a_o + a_1 t + \ldots + a_n t^n + \ldots$$

Dalje je

$$t\phi(t) = a_o t + a_1 t^2 + \ldots + a_n t^{n+1} + \ldots$$
$$t^2\phi(t) = a_o t^2 + a_1 t^3 + \ldots + a_n t^{n+2} + \ldots$$

Oduzimajući od prve jednakosti drugu i treću dobijamo

$$\phi(t)[1-t-t^2] = a_o + (a_1+a_o)t + (a_2-a_1-a_o)t^2 + \ldots$$
$$+ (a_{n+2} - a_{n+1} - a_n)t^{n+2} + \ldots$$

Stavimo $a_o = 1$, pa, budući da su svi koeficijenti nule (jer oni moraju zadovoljavati datu rekurentnu relaciju), dobijamo

$$\phi(t)[1-t-t^2] = 1$$

ili

$$\phi(t) = \frac{1}{1-t-t^2}$$

Koreni polinoma u imenitelju su

$$t_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ i } t_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

Sledi da je

$$\phi(t) = \frac{1}{1-t-t^2} = \frac{A}{t - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}} + \frac{B}{t - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$$

Odredjivanjem konstanata A i B nalazimo da je

$$A = -B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

pa je

$$\phi(t) = \frac{-\frac{1}{\sqrt{5}}}{t - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}} + \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{t - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$$

Razvijajući u red svaki od ovih sabiraka nalazimo da je

$$\phi(t) = \sum_{n=o}^{\infty} [(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10})(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n + (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10})(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n]t^n.$$

Konačno je

$$f(n) = (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10})(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n + (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10})(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10})^n, \ n = 1,2,3,\ldots$$

Primer 3. Koristeći proizvodne funkcije rešiti rekurentnu relaciju

$$F(n) = F(1)F(n-1)+F(2)F(n-2)+\ldots+F(n-1)F(1), \ F(1)=F(2)=1.$$

Rešenje. Stavimo

$$f(t) = a_1t + a_2t^2 + \ldots + a_nt^n + \ldots$$

(uzimajući da je $a_i = F(i)$).

Tada je, s obzirom na gornju rekurentnu relaciju

$$(f(t))^2 = -t + f(t).$$

Rešavajući ovu kvadratnu jednačinu po $f(t)$ nalazimo

$$f(t) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4t})$$

Uzet je znak minus jer red za $f(t)$ nema konstantnog člana (red za rešenje sa znakom plus imao bi za konstantni član 1, pa ne bi predstavljao traženo rešenje). Razvijajući ovu funkciju u binomni red nalazimo da je koeficijent uz t^n, tj. a_n ili $F(n)$:

$$F(n) = \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}$$

10.7. ZADACI

1. Odrediti proizvodne funkcije nizova a_n definisanih sa:

a) $a_n = (-1)^n$ b) $a_n = (-1)^n 2^n$ c) $a_n = (-1)^n(n+1)$

d) $a_n = 1/2^n$ e) $a_n = n(n+1)$ f) $a_n = 1/n!$

2. Koji nizovi imaju kao proizvodne funkcije sledeće funkcije:

a) $\ln(1+x)$ b) $\sin x$ d) $\cos x$?

3. Napisati proizvodnu funkciju za k-kombinacije slova a, b, c, d, e pod uslovom da se a može pojaviti najviše 2 puta, b najviše 3 puta.

4. Napisati proizvodnu funkciju k-kombinacija n slova $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ako se x_1 uvek mora pojavljivati paran broj puta, ali ne više nego i puta, a x_2 se uvek mora pojavljivati neparan broj puta ali ne više nego j puta.

5. Koliko rešenja ima jednačina

$$2x + 3y + 5z + 7u = 20$$

u celim nenegativnim brojevima?

6. Koliko rešenja ima jednačina

$$3x + 5y + 7z + 9u = 42$$

u celim pozitivnim brojevima?

7. Naći broj permutacija n različitih objekata ako se svaki objekat mora pojaviti u permutaciji bar jednom.

8. Napisati proizvodnu funkciju 4-permutacija od n objekata sa neograničenim ponavljanjem, ali takvih da se svaki objekat

mora pojaviti neparan broj puta.

9. Naći proizvodnu funkciju k-permutacija $2m$ objekata (m vrsta objekata, u svakoj vrsti po 2 objekta), ako se svaki od m objekata može pojaviti u permutaciji 0, 1 ili 2 puta.

10. Dokazati da broj takvih k-permutacija sa ponavljanjem od n različitih objekata, koje ne sadrže dva uzastopna jednaka objekta iznosi $n(n-1)^{k-1}$ i uveriti se da je proizvodna funkcija ovog niza

$$\frac{nx}{1-x(n-1)}$$

11. Koristeći proizvodne funkcije dokazati da se n različitih kuglica mogu smestiti u k različitih kutija na k^n načina.

Na koliko se načina mogu 20 jednakih loptica smestiti u 5 različitih kutija?

12. Koliko ima smeštaja iz prethodnog zadatka takvih da svaka kutija sadrži bar dve loptice?

13. Na dva načina - primenom proizvodnih funkcija i primenom jednačina sa celobrojnim rešenjima - odgovoriti na sledeće pitanje: Na koliko načina petoro dece mogu podeliti 15 jabuka tako da nijedno dete ne dobije manje od 2 niti više od 4 jabuke?

14. Ako k različitih kutija ne smeju sadržavati manje nego m od n jednakih objekata, pokazati da je odgovarajuća proizvodna funkcija

$$t^{km}(1-t)^{-k}$$

15. Šta predstavlja koeficijenat uz x^{20} u razvijenom proizvodu

$$(1+x^2+x^4+\ldots+x^{20})(1+x^5+x^{10}+x^{15}+x^{20})(1+x^{10}+x^{20})?$$

16. Napisati proizvod polinoma, koji se može iskoristiti da bi se našao:

a) broj podela broja 32 na sastojke od 6, 9, 13 i 20;

b) broj podela broja 16 na sastojke veće od 3;

c) broj podela broja 10 na različite sastojke.

17. Na koliko načina možemo isplatiti 63 din. novčanicama od 1, 2, 5, 10 i 50 din.

18. Koristeći proizvodne funkcije rešiti sledeće rekurentne relacije:

1° $f(n+1) = f(n) + \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$, $f(0) = 0$.

2° $f(n+1) = f(n) + 2^n$, $f(0) = 0$

3° $f(n+1) = f(n) + (n+1)^2$, $f(0) = 0$.

19. Koristeći proizvodne funkcije rešiti rekurentne relacije:

1° $f(n+2) = f(n+1) + f(n)$, $f(0) = 2$, $f(1) = 5$.

2° $f(n+2) - 2f(n+1) + f(n) = 2^n$, $f(0) = f(1) = 1$.

REZULTATI I UPUTSTVA

3.

2. $30 \cdot 29 \cdot 28$.

3. 30^3.

4. a) 120; b) 120.

5. $\frac{13!}{2!3!7!}$

6. 80.

7. 1380.

8. 47.

9. $6 \cdot 5^2 \cdot 4^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2$

10. 1152.

11. 7.

13. 60.

14. 24.

15. 125.

16. a) 360; b) 1; c) 3.

17. $C(p+2,2)\, C(q+2,2)$.

18. $C(n-k,2) + k(n-k) + 1$

19. $3 \cdot C(n,4)$

20. $C(n,4)$

21. $p(p-1)q(q-1)/4$

22. 3^{10}.

23. a) $2^3 C(10,3) = 960$; b) 1161.

24. $\binom{n}{3} - \binom{p}{3}$

25. $\frac{pq}{2}(p+q-2)$

26. $\frac{r}{2}(p+q)(p+q+r-2)$

27. $C(n,2)[2C(n-2,3) + 2C(n-1,2) - C(n-2,1) + 2]$

28. $mn + 2m + 2n - 1$

29. $k(k-1)\ldots(k-n+1)$

30. 75, jer najveći broj kuglica među kojima nema 15 iste boje je 74: 10 sivih, 10 zelenih, 12 plavih i po 14 belih, crvenih i žutih.

31. 144.

4.

1. $n^3(n+1)$.

2. Zbir koeficijenata jednak je vrednosti polinoma za $x = y = z = 1$ i iznosi 2.

3. Uputstvo. Napisati levu stranu u obliku $C(n,0) + C(n,1) + \ldots + C(n,n) + n[C(n-1,0) + C(n-1,1) + \ldots]$, koristeći identičnost $kC(n,k) = nC(n-1, k-1)$.

6. 2^7

10. Sledi iz $C(n,1) + C(n,3) + \ldots = 2^{n-1}$.

13. $C(n+1,m+1) - C(k,m+1)$ za $m < k$, $C(n+1,m+1)$ za $m \geqslant k$.

18. $\binom{9}{5} \cdot 2^6 \cdot (-3)^3$.

19. 252.

21. $(\frac{4^n}{5} n)$ za takvo n za koje je $\frac{4}{5}$ n ceo broj.

22. a) $\binom{50}{25}$; b) $\binom{51}{25}$

23. $C(30,3)\cdot C(3,1) = 12\ 180$.

24. 3^{10}

25. $\frac{13!}{2!3!5!2!1!}$

26. $1^o\ 4^8$; $2^o\ 5^{11}$.

27. $\frac{24!}{5!9!10!} 2^5(-5)^9(-7)^{10}$.

28. $126\ a^4b^5 + 252\ a^6bc^2 + 504\ a^5b^3c$.

5.

1. 998 910. Staviti: ceo broj ima osobinu α ako je kvadrat, a osobinu β ako je treći stepen. Tada je traženi broj $N - N(\alpha) - N(\beta) + N(\alpha\beta) = 100\ 000 - 1000 - 1000 + 10 = 998\ 910$.

3. 16 687. Uputstvo. Jedna od 8! mogućnih permutacija ima osobinu α_1 ako B nije neposredno iza A, osobinu α_2 ako C nije neposredno iza B, ..., osobinu α_7 ako H nije neposredno iza G. Tada je $N(\alpha_1) = \dots = N(\alpha_7) = 7!$. $N(\alpha_1\alpha_2) = 6!$ itd.

4. 228.

6. 864. Uputstvo. $N = 8!/2!2!2!2! = 2520$. Reći ćemo da permutacija ima osobinu α ako su oba A susedna, itd. Tada je $N(\alpha) = \dots = N(\delta) = 7!/2!2!2! = 630$, $N(\alpha\beta) = \dots = N(\gamma\delta) = 180$ itd.

7. 90.

8. $\sum_{i=o}^{n} \frac{(-1)^i C(n,i)(2n-i)!}{2^{n-i}}$

9. 1485.

10. 44. Ovo su rastroji, gde je n = 5.

11. 1854.

13. $6! - 2\cdot 5! + 4! = 504$.

14. $\binom{10}{5} D(5) = 2772$.

15. $[D(5)]^2 = 44^2$.

16. $(6!)^2$.

17. $8!(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{8!}) = 14\ 833$.

6.

1. $C(10,3) = 120$.

2. $C(8,3) + 8\cdot 7 = 112$.

3. $\binom{q}{k} + \binom{q}{k-1} + \ldots + \binom{q}{k-p}$.

4. $C(20,6) + C(20,1)\cdot C(19,4) + C(20,2)\cdot C(18,4) + C(20,3) = 146\ 400$.

5. 2^n.

6. 20.

8. a) $\binom{44}{4}$; b) $\binom{39}{4}$.

10. 12.

13. a) $\binom{17}{4}$; b) $\binom{n+k-1}{n}$, jer je svaki član homogeni proizvod oblika $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_k^{m_k}$, gde je $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$ i $m_i \geqslant 0$.

21. $\binom{12}{6}$.

22. $\binom{n+k-1}{n-1}$.

23. Nijedno.

24. a) Zamislimo da su svi ovi brojevi napisani pomoću 6 cifara, npr., 359 = 000 359. Tada se traži broj rešenja jednačine $x_1 + \ldots + x_6 = 11$ uz uslove $0 \leqslant x_i \leqslant 9$ za $i = 1,\ldots,6$. Broj nenegativnih rešenja ove jednačine je $C(16,11)$. Od ovog broja treba oduzeti ona rešenja kod kojih je $x_1 > 9$, a takvih je $C(7,2)$. Treba, takodje, oduzeti rešenja za koja je $x_2 > 9$ ($x_3 > 9, \ldots, x_6 > 9$), pa se, konačno, dobija $C(16,11) - 6\cdot C(7,2)$; b) $C(12,6) + C(11,5) + C(10,4) + C(9,3) + C(8,2) + C(7,1) + 1$.

25. $\binom{9}{4} + \binom{8}{3} + \binom{7}{2} + \binom{6}{1} + 1 - [\binom{5}{4} + \binom{4}{3} + \binom{3}{2} + \binom{2}{1} + 1 + 1] = 194$.

30. $C(22,6) - 7\, C(14,6)$.

31. $46 \cdot 376$.

7.

1. a) $f(n) - f(n-1) = 2n-2$, $f(1) = 2$; b) $f(n) - f(n-1) = 2n-2$, $f(1) = 2$; c) $f(n) - f(n-1) = \frac{1}{2} n\,(n-1) + 1$, $f(1) = 2$.

2. $f(n,k) = n+1 + f(n,k-1)$; $f(n,k) = \frac{1}{2}(n^2 + 2nk + n + 2k + 2)$.

4. 15.

5. $n(n+1)/2$.

6. a) $f(n) = [n(n+1)/2]^2$; b) $f(n) = 2^n - 1$; c) $f(n) = n^2$; d) $f(n) = n(n+1)(n+2)(n+3)/4$

8. a) $n(n-1)(n-2)/3 + 1$; b) $(2n-1)/n$; c) $(n-2)\cdot 2^n + 3$

9. $f(n) = (n^3 + 5n + 6)/6$.

10. a) $f(n) = C_1 2^n + C_2(-5)^n$; b) $f(n) = C_1(2i)^n + C_2(-2i)^n$; c) $f(n) = C_1 2^n + C_2 3^n + c_3 4^n$.

11. a) $f(n) = 2^n$; b) $f(n) = 2^n + 3^n - 4^n$.

12. $f(n) = \cos^{-} n\alpha$

15. 1716.

16. 1001.

17. 39.

18. $(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10})(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n + (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10})(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$.

19. $f(n) = f(n-1) + f(n-2) + f(n-3)$, $n > 3$, $f(o) = 1$, $f(1) = 2$, $f(3) = 4$.

8.

3. Svaki prirodni broj N može se napisati u obliku $N = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$, gde su $p_1, p_2, \ldots, p_k$ različiti prosti brojevi. Stavljajući $N = N_1 \cdot N_2$ problem se svodi na podelu n_1 predmeta jedne vrste, n_2 predmeta druge vrste, ..., n_k predmeta k-te vrste na dva dela. Ta deoba se može izvesti na $(n_1+1)(n_2+1)\ldots(n_k+1)$ načina.

Rezultat: 72.

4. 160.

6. $n! = n^n - C(n,1)(n-1)^n + C(n,2)(n-2)^n - \ldots + (-1)^{n-1}C(n,n-1)$.

7. Relacija je tačna; leva njena strana predstavlja broj načina na koje se 7 različitih objekata može smestiti u 8 kutija tako da nijedna kutija ne bude prazna, što je nemoguće, tj. taj broj je nula.

8. 1806.

10. 301.

14. a) Traženi bro j je $G(5,3)$ i iznosi 41; b) Traženi broj je $g(5,3)$, jer se 2310 može razložiti na 5 prostih činilaca, koje zatim, treba svrstati u tri grupe, što se može obaviti na 25 načina.

15. $3^6 \cdot C(8,3)$. 6 predmeta iste vrste mogu se razdeliti na $C(8,2)$ načina, a svaki od preostalih 6 različitih predmeta može pripasti bilo kojoj osobi. Poslednjih mogućnosti je 3^6, pa se rezultat dobija na osnovu Principa proizvoda.

16. $[C(9,5)]^3$.

17. $\frac{(3n)!}{(n!)^3}$.

18. $(n_j)!/\{(j!)^n n!\}$, jer se prva grupa može obrazovati na $C(nj,j)$ načina, druga na $C(n-j,j)$ načina, itd. Kako nije važan red grupa, proizvod $C(n_j,j)C(n_j-j,j)\ldots C(3j,j)C(2j,j)$ se deli na $n!$

19. 126. Na osnovu Principa dualnosti je $[4,5][1,1,1,1,1,1,1,1,1] = [1,1,1,1,1,1,1,1,1][4,5]$ pa je problem sveden na deobu na dva dela.

20. 192.

21. 690.

22. 19068.

9.

3. 1.

8.

9	9
7+1+1	7+2
5+3+1	5+3+1
5+1+1+1+1	5+4
3+3+3	6+3
3+3+1+1+1	6+2+1
3+1+1+1+1+1+1	4+3+2
1+1+1+1+1+1+1+1+1	8+1

9.

1°	2°
4+1+1	1+1+1+1+1+1
4+2	2+1+1+1+1
	3+1+1+1
	2+2+1+1
	2+2+2
	3+3

12. Uputstvo. Uz dijagram razlaganja broja n na k sabiraka dobijamo stubac sa n tačaka.

13. Ima više razlaganja na 4 pozitivna neparna sabirka. Dokaz. Neka je a+b+c+d = 1000 razlaganje broja 1000 na 4 pozitivna parna sabirka. Tada je (a+3) + (b-1) + (c-1) + (d-1) razlaganje broja 1000 na 4 neparna pozitivna sabirka. Ovo daje bijekciju izmedju svih parnih razlaganja i podskupa svih neparnih razlaganja. Da navedena razlaganja ne obuhvataju sva razlaganja na neparne sabirke vidi se iz toga što je a+3 veće od b-1 bar za 4 jedinice pa u ovaj tip razlaganja ne ulazi, na primer, razlaganje 399 + 399 + 101 + 101.

14. Razlaganja broja 1000 na neparne sastojke. Dati dokaz razlažući svaki sastojak $2i$ na 1 i $2i$-1.

16. *Rešenje.* Broj razlaganja na 2 i 5 je broj rešenja jednačine 2x+5y = 100 u celim nenegativnim brojevima. Ovde y može uzeti sve celobrojne vrednosti od 0 do 20. Razlaganja na 3 i 5 ima

koliko i celobrojnih nenegativnih rešenja jednačine $3x+5y = 100$. Ovde y može uzeti samo ove vrednosti: 2, 5, 8, 11, 14, 17 i 20.

10.

1. a) $1/(1+x)$; b) $1/(1+2x)$; c) $(1+x)^{-2}$; d) $(1-\frac{x}{2})^{-1}$; e) $2x(1-x)^{-3}$; f) e^x.

2. a) $(-1)^n/n$; b) $a_n = 0$ za n parno, $a_n = (-1)^{n-1}/n!$ za n neparno; c) $a_n = 0$, za n neparno; $a_n = (-1)^n/n!$ za n parno.

3. $(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3)(1-x)^{-3}$ ili $(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3)(1+x+\ldots)^3$.

4. $(1+t^2+t^4+\ldots+t^i)(t+t^3+\ldots+t^j)(1+t+t^2+\ldots)^{n-2}$.

5. Treba izračunati koeficijenat uz t^{20} u proizvodu $(1+t^2+\ldots+t^{20})(1+t^3+t^6+\ldots+t^{18})(1+t^5+\ldots+t^{20})(1+t^7+t^{14})$.

6. Stavljajući $x = 1+X$, $y = 1+Y$, $z = 1+Z$, $u = 1+U$, jednačina postaje $3X+5Y+7Z+9U = 18$ i treba naći broj njenih rešenja u celim nenegativnim brojevima. Taj broj je koeficijenat uz t^{18} u proizvodu $(1+t^3+\ldots+t^{18})(1+t^5+t^{10}+t^{15})(1+t^7+t^{14})(1+t^9+t^{18})$.

7. $\sum_{i=1}^{n} C(n,i)\, i^k(-1)^{n-i}$

8. $(t+\frac{t^3}{3!}+\ldots+\frac{t^{2i+1}}{(2i+1)!}+\ldots)^n$.

9. $(1+t+\frac{t^2}{2})^m$.

11. 10 626.

12. 1001.

15. Broj razlaganja broja 20 na komponente 2, 5 i 10.

16. a) $(1+x^6+\ldots+x^{30})(1+x^9+x^{18}+x^{27})(1+x^{13}+x^{26})(1+x^{20})$;
b) $(1+x^4+\ldots+x^{16})(1+x^5+x^{10}+x^{15})(1+x^6+x^{12})(1+x^7+x^{14})(1+x^8+x^{16})\ldots(1+x^{16})$; c) $(1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^{10})$.

18. 1° $f(n) = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$; 2° $f(n) = 2^n - 1$;
3° $f(n) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

19. 1° $f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left((4+\sqrt{5})(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (4-\sqrt{5})(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n\right)$;
2° $f(n) = 2^n - n$

BIBLIOGRAFIJA

[1] *C. Berge, PRINCIPLES OF COMBINATORICS*, Academic Press, New York and London, 1971.

[2] *O. Berman and K.D. Fryer, INTRODUCTION TO COMBINATORICS*, Academic Press, New York and London, 1972.

[3] *M. Hall, COMBINATORIAL THEORY*, Blaisdell, 1967.

[4] *I. Niven, MATHEMATICS OF CHOICE*, Random House, New York, 1965.

[5] *J. Riordan, AN INTRODUCTION TO COMBINATORIAL ANALYSIS*, Wiley, New York, 1958.

[6] *H. J. Ryser, COMBINATORIAL MATHEMATICS*, MAA, Wiley, 1963.

[7] Н.Я. Виленкин, КОМБИНАТОРИКА, Москва, 1969.