Универзитет у Београду

Математички факултет

Мастер рад

Потапов**љ**еве трансформације отворене јединичне лопте у простору ограничених оператора на Хилбертовом простору

Ментор:
др Данко Јоцић

Аутор:
Стеван Милашиновић

Члан комисије:
др Ђорђе Кртинић

Члан комисије:
др Стефан Милошевић

Септембар, 2019.

Садржај

Предговор

У овом мастер раду биће разматрана шира класа трансформација Мебијусовог[1] типа на отвореној јединичној лопти (строгим контракцијама) ограничених оператора на комплексном Хилбертовом[2] простору, укључујући Потаповљеву[3] и Јулијину[4] трансформацију. Посебна пажња биће посвећена операторним (блок) матрицама, ради бољег разумевања некомутативних аспеката функционалног рачуна за операторе, важних у испитивању најважнијих својстава трансформација које се разматрају у овом раду. Рад се састоји од три главе.

У првој глави приказане су основне дефиниције и својства ограничених оператора на Хилбертовим просторима. Уведен је појам адјунгованог оператора, класе самоадјунгованих оператора са парцијалним уређењем на њој, поткласе позитивних оператора као и класе контрактибилних пресликавања. Дефинише се појам ортогоналног збира Хилбертових простора, заједно са операторним матрицама и њиховим елементарним особинама. Коначно, дата је карактеризација контрактивности операторних матрица типа 1×2 и 2×1, као и доње троугаоних матрица типа 2×2.

У другој глави разматра се појам извода на Банаховим[5] просторима и наводе се неке од основних особина. Дефинисани су појмови холоморфне и бихоломорфне функције, холоморфно еквивалентних области, симетричних области, J^*-алгебре као и неке њихове основне особине. Уведен је појам Мебијусове транфсормације на Хилбертовим просторима, Јулијин оператор, као и веза између њих. Приказан је и специјални случај Мебијусове трансформације на J^*-алгебри и доказано тврђење да је у том случају отворена јединична лопта холоморфно еквивалентна себи самој, где се еквиваленост постиже управо при Мебијусовим трансформацијама.

У трећој глави разматра се појам уопштене горње полуравни и доказује се да су отворена јединична лопта и горња полураван холоморфно еквивалентне.

Велику захвалност дугујем свом ментору, професору др. Данку Јоцићу на предлогу теме, као и на великом броју корисних сугестија и савета током израде рада. Захваљујем се и члановима комисије на читању рада и указаним пропустима. Такође, захваљујем се професору др. Александру Перовићу и Катарини Халај са Саобраћајног факултета који су ми несебично помагали током израде рада.

[1] August Ferdinand Möbius (1790-1868), немачки математичар
[2] David Hilbert (1862-1943), немачки математичар
[3] Владимир Петрович Потапов (1914-1980), руски математикчар
[4] Gaston Maurice Julia (1893-1978), француски математичар
[5] Stefan Banach (1892-1945), пољски математичар

Глава 1

Контракције на Хилбертовим просторима

1 Ограничени линеарни оператори на Хилбертовим просторима

На почетку наводимо основне ознаке и појмове везане за ограничене линеарне операторе на Хилбертовим просторима.

Са $\mathcal{H}, \mathcal{K}, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \ldots$ ћемо означавати комплексне Хилбертове просторе. Скаларни производ ћемо означавати са $\langle \cdot, \cdot \rangle$, а са $\| \cdot \|$ норму индуковану скаларним производом, и то на свим Хилбертовим просторима у истој ознаци, ако је недвосмислено јасно о ком се скаларном производу, односно норми, ради.

Дефиниција 1.1. *Линеаран оператор $A : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ је* ***ограничен*** *ако постоји позитиван број M такав да за свако $h \in \mathcal{H}$ важи $\|Ah\| \leqslant M\|h\|$. Инфимум бројева M за које важи претходна неједнакост назива се* ***нормом*** *оператора A и означава са $\|A\|$.*

Овај инфимум је у ствари и минимум, у шта се уверавамо граничним преласком по низу мајоранти који тежи ка $\|A\|$, па за све ограничене операторе важи неједнакост $\|Ah\| \leqslant \|A\| \, \|h\|$ за свако $h \in \mathcal{H}$. Класу свих ограничених линеарних оператора из $\mathcal{H}$ у $\mathcal{K}$ означавамо са $\mathfrak{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, а ако је $\mathcal{H} = \mathcal{K}$ са $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$.

Став 1.1. ***Оператор $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ је непрекидан ако и само ако је ограничен.***

За доказ Става 1.1 погледати [1, Став 2.7].

Дефиниција 1.2. *За оператор $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ кажемо да је* ***ограничен одоздо*** *ако постоји позитиван број c тако да важи $\|Ah\| \geqslant c\|h\|$ за свако $h \in \mathcal{H}$.*

Ако је оператор $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ инвертибилан, тј. постоји оператор A^{-1}, тада је A ограничен одоздо ако и само ако је A^{-1} ограничен и важи

$$\|Ah\| \geqslant c\|h\| \iff \|A^{-1}k\| \leqslant c^{-1}\|k\|, \tag{1.1}$$

за све $h \in \mathcal{H},\ k \in \mathcal{K}$.

Ово није тешко показати. Наиме, претпоставимо да је A ограничен одоздо. Тада важи $\|A^{-1}k\| = \|A^{-1}Ah\| = \|h\| \leqslant c^{-1}\|Ah\| = c^{-1}\|k\|$, где је $k = Ah$ за неко $h \in \mathcal{H}$, јер је оператор A сурјективан. На сличан начин се доказује и други смер.

Напоменимо да са 0 означавамо нула оператор, или, ако из контекста није јасно, са $\mathbf{0}$, а са I јединични оператор на одговарајућим просторима.

Дефиниција 1.3. *Нека је $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$.* ***Адјунговани*** *оператор оператора A у ознаци A^* је јединствени оператор из $\mathfrak{B}(\mathcal{K},\mathcal{H})$, такав да је за свако $h \in \mathcal{H}$ и $k \in \mathcal{K}$*

$$\langle Ah, k\rangle = \langle h, A^*k\rangle.$$

Адјунговани оператор увек постоји и јединствен је. За доказ погледати [7, Теорема 4.13]. Наведимо сада основне особине адјунговања.

Став 1.2. ***За све*** $A, B \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$ ***,*** $C \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_2,\mathcal{H}_3)$ ***и свако*** $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ***важи:***

1° $(\alpha A + \beta B)^* = \bar{\alpha}A^* + \bar{\beta}B^*$,

2° $A^{**} = A$,

3° $(CA)^* = A^*C^*$,

4° $I^* = I$,

5° $\|A^*\| = \|A\|$,

6° $\|A^*A\| = \|A\|^2$,

7° $A^*A = 0$ ***ако и само ако је*** $A = 0$,

8° A ***је инвертибилан ако и само ако је*** A^* ***инвертибилан, и у том случају је*** $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Између језгра и слике међусобно адјунгованих оператора постоји веза о којој говори следећа

Теорема 1.3. ***За сваки*** $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ ***важи:***

1° $\mathcal{N}(A) = \mathcal{R}(A^*)^{\perp} \overset{\text{деф}}{=} \mathcal{H} \ominus \overline{\mathcal{R}(A^*)}$ ***и*** $\mathcal{N}(A^*) = \mathcal{R}(A)^{\perp} \overset{\text{деф}}{=} \mathcal{K} \ominus \overline{\mathcal{R}(A)}$***,***

2° $\mathcal{H} = \mathcal{N}(A) \oplus \overline{\mathcal{R}(A^*)}$ ***и*** $\mathcal{K} = \mathcal{N}(A^*) \oplus \overline{\mathcal{R}(A)}$***,***

3° $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A^*A)$***,***

4° $\overline{\mathcal{R}(A)} = \overline{\mathcal{R}(AA^*)}$***.***

Докази претходна два тврђења се могу наћи у [7, Теореме 4.13, 4.14, 4.17 и 4.19], или су директне последице наведених теорема.

Дефиниција 1.4. *Оператор $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ се назива* ***изометријом*** *ако је $\|Ah\| = \|h\|$ за свако $h \in \mathcal{H}$, а* ***коизометријом*** *ако је $\|A^*k\| = \|k\|$ за свако $k \in \mathcal{K}$. Кажемо да је оператор A* ***унитаран*** *ако је изометрија и ако је $\mathcal{R}(A) = \mathcal{K}$.*

Докажимо сада следећи

Став 1.4. ***Оператор*** $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ ***је унитаран ако и само ако су*** A ***и*** A^* ***изометрије и тада је*** $A^{-1} = A^*$.

Доказ: Приметимо прво да је $\|Ah\|^2 = \langle Ah, Ah\rangle = \langle A^*Ah, h\rangle$ као и да је $\|h\|^2 = \langle h, h\rangle = \langle Ih, h\rangle$, па на основу једнакости квадратних форми добијамо да је $\|Ah\|^2 = \|h\|^2$ ако и само ако је $\langle A^*Ah, h\rangle = \langle Ih, h\rangle$ односно ако и само ако је $A^*A = I$. Другим речима, A је изометрија ако и само ако је $A^*A = I$. Слично, A је коизометрија (тј. A^* је изометрија) ако и само ако је $AA^* = I$. Како је изометрија увек инјекција, из дефиниције следи да је унитаран оператор увек инвертибилан. Претпоставимо сада да је A унитаран. Како је онда A инвертибилан и како важи $A^*A = I$ (јер је унитаран по дефиницији изометрија) следи да је $A^{-1} = A^*$, па је и $AA^* = I$, односно A је коизометрија. Обрнуто, ако је A изометрија и коизометрија, важи $A^*A = I$ и $AA^* = I$, па је A бијекција, а самим тим, уз изометричност, и унитаран. $\square$

Сваки ограничени линеарни оператор Хилбертових простора може се непрекидно продужити на затворење његовог домена и то без повећања норме. Заправо, простори не морају бити обавезно Хилбертови, о чему нам говори следећи

Став 1.5. ***Нека је*** $\mathcal{X}$ ***нормиран,*** $\mathcal{Y}$ ***Банахов простор и нека је*** $\mathcal{L}$ ***свуда густ векторски потпростор од*** $\mathcal{X}$ ***(тј.*** $\overline{\mathcal{L}} = \mathcal{X}$***). Нека је*** $A_0 : \mathcal{L} \to \mathcal{Y}$ ***линеаран оператор такав да је***

$$\|A_0\|_{\mathcal{L}} \overset{\text{деф}}{=} \sup_{\|x\|=1,\ x\in\mathcal{L}} \|A_0x\| < +\infty.$$

Тада постоји јединствен непрекидан линеаран оператор $A : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ ***такав да је*** $Ax = A_0x$ ***за свако*** $x \in \mathcal{L}$***. При томе је*** $\|A\| = \|A\|_{\mathcal{L}}$.

Доказ претходног става може се наћи у [1, Став 7.3]. Наведимо сада један став који ће нам бити од велике користи у наредним поглављима.

Став 1.6. ***Нека је*** $\mathcal{X}$ ***Банахов простор и*** $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ ***такав да је*** $\|A\| < 1$***. Тада оператор*** $I - A$ ***има ограничен инверзни оператор и важи***

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n,$$

при чему горњи ред апсолутно конвергира у $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ ***и важи процена***

$$\|(I - A)^{-1}\| \leqslant (1 - \|A\|)^{-1}. \tag{1.2}$$

Доказ овог става може се наћи у [1, Став 7.5].

2 Контракције и позитивни оператори на Хилбертовим просторима

У овој секцији дефинишу се контрактивни и позитивни оператори и наводе њихове основне особине.

Дефиниција 1.5. *Оператор $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ се назива* ***контракцијом*** *ако је $\|A\| \leqslant 1$, односно* ***строгом контракцијом*** *ако је $\|A\| < 1$.*

Како је $\|A\| = \|A^*\|$ имамо да је A (строга) контракција ако и само ако је A^* (строга) контракција.

Дефиниција 1.6. *Оператор $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ назива се* ***самоадјунгованим*** *ако је $A = A^*$.*

Дефиниција 1.7. *Оператор $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ се назива* ***позитивним*** *(у ознаци $A \geqslant 0$) ако је $\langle Ah, h\rangle \geqslant 0$ за свако $h \in \mathcal{H}$, а* ***строго позитивним*** *(у ознаци $A > 0$) ако је $\langle Ah, h\rangle > 0$ за свако $h \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$. За оператор A рећи ћемо да је* ***позитиван и инвертибилан*** *ако постоји $\delta > 0$ тако да је $A - \delta I$ позитиван оператор.*

Напоменимо да је позитиван оператор увек самоадјунгован јер важи општије тврђење да је оператор $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ самоадјунгован ако и само ако је његова квадратна форма реална, које се лако може проверити. У класу самоадјунгованих оператора уводи се (делимично) уређење $\leqslant$.

Дефиниција 1.8. *За самоадјунговане операторе A и B рећи ћемо да важи $A \leqslant B$ ако и само ако је $\langle Ah, h\rangle \leqslant \langle Bh, h\rangle$ за свако $h \in \mathcal{H}$.*

Овакав поредак (будући у суштини поредак међу одговарајућим формама) располаже особинама које наводи следећи

Став 1.7. ***Нека су*** $A, B, C, D \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ***самоадјунговани,*** $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ***и*** $\alpha \geqslant 0$ ***произвољни. Тада важи:***

1° ***ако је*** $A \leqslant B$ ***и*** $B \leqslant C$***, онда је и*** $A \leqslant C$***,***

2° ***ако је*** $A \leqslant B$ ***и*** $C \leqslant D$***, онда је и*** $A + C \leqslant B + D$***,***

3° ***ако је*** $A \leqslant B$***, онда је*** $\alpha A \leqslant \alpha B$***,***

4° ***ако је*** $A \leqslant B$***, онда је*** $X^*AX \leqslant X^*BX$ ***и***

5° $0 \leqslant X^*X \leqslant \|X\|^2 I$***.***

Доказ: За произвољно $h \in \mathcal{H}$ имамо:

1° Из $A \leqslant B$ и $B \leqslant C$ следи $\langle Ah, h\rangle \leqslant \langle Bh, h\rangle \leqslant \langle Ch, h\rangle$, па је по дефиницији $A \leqslant C$.

2° Из $A \leqslant B$ и $C \leqslant D$ следи $\langle (A+C)h, h\rangle = \langle Ah, h\rangle + \langle Ch, h\rangle \leqslant \langle Bh, h\rangle + \langle Dh, h\rangle = \langle (B+D)h, h\rangle$, па је по дефиницији $A + C \leqslant B + D$.

3° Из $A \leqslant B$ и $\alpha \geqslant 0$ следи $\langle (\alpha A)h, h\rangle = \alpha\langle Ah, h\rangle \leqslant \alpha\langle Bh, h\rangle = \langle (\alpha B)h, h\rangle$, па је по дефиницији $\alpha A \leqslant \alpha B$.

4° Из $A \leqslant B$ за произвољно $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ следи $\langle X^*AXh, h\rangle = \langle AXh, Xh\rangle \leqslant \langle BXh, Xh\rangle = \langle X^*BXh, h\rangle$, па је по дефиницији $X^*AX \leqslant X^*BX$.

5° За произвољно $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ важи $\langle X^*Xh, h\rangle = \langle Xh, Xh\rangle = \|Xh\|^2 \geqslant 0$, па је $X^*X \geqslant 0$. С друге стране је $\langle X^*Xh, h\rangle = \|Xh\|^2 \leqslant \|X\|^2\|h\|^2 = \|X\|^2\langle h, h\rangle = \langle (\|X\|^2 I)h, h\rangle$, па је по дефиницији $X^*X \leqslant \|X\|^2 I$.

□

Последица 1.8. ***Нека су оператори*** $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ***произвољни. Тада је***

$$A^*B^*BA \leqslant \|B\|^2 A^*A. \tag{1.3}$$

Доказ: Како је на основу својства 5° Става 1.7, $B^*B \leqslant \|B\|^2 I$, на основу својства 4° истог става добијамо да је $A^*B^*BA \leqslant A^*(\|B\|^2 I)A = \|B\|^2 A^*A$. □

Везу између позитивних оператора и контракција описује следећи

Став 1.9. ***Нека је*** $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$***. Тада је*** A ***контракција ако и само ако је*** $I - A^*A$ ***позитиван оператор у*** $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Доказ: За $h \in \mathcal{H}$ је $\|h\|^2 - \|Ah\|^2 = \langle h, h\rangle - \langle Ah, Ah\rangle = \langle (I - A^*A)h, h\rangle$, па је A контракција ако и само ако је $\|Ah\|^2 \leqslant \|A\|^2\|h\|^2 \leqslant \|h\|^2$, ако и само ако је $0 \leqslant \|h\|^2 - \|Ah\|^2 = \langle (I - A^*A)h, h\rangle$, ако и само ако је $I - A^*A$ позитиван. □

За позитивне операторе важе следећа два интересантна својства, која важе и за реалне бројеве.

Теорема 1.10. ***Ако су*** $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ***и*** $A, B \geqslant 0$ ***такви да је*** $AB = BA$***, онда је и*** $AB \geqslant 0$.

Теорема 1.11. **[квадратни корен позитивног оператора]** ***За дати позитиван оператор*** $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ***постоји јединствен позитиван оператор*** $B \geqslant 0$ ***(у ознаци*** $B = \sqrt{A}$***) за који је*** $B^2 = A$***, при чему*** B ***комутира са свим операторима са којима комутира и*** A.

За доказе претходне две теореме погледати [1, Теорема 12.8, Теорема 12.9]. Између норме оператора и његовог корена постоји једноставна веза коју изражава следећа

Лема 1.12. ***Нека је оператор*** $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ***позитиван. Тада је***

$$\|\sqrt{A}\| = \sqrt{\|A\|}. \tag{1.4}$$

Доказ: На основу Става 1.2, 6° имамо $\|A\| = \|\sqrt{A}\sqrt{A}\| = \|\sqrt{A}^*\sqrt{A}\| = \|\sqrt{A}\|^2$, одакле кореновањем добијамо једнакост (1.4). □

Напоменимо да се квадратни корен позитивног оператора A може добити и као униформни лимес одговарајућег низа оператора $p_n(A)$, где је p_n низ полинома са комплексним коефицијентима и $n \in \mathbb{N}$. Такође, A је инвертибилан ако и само ако је $\sqrt{A}$ инвертибилан и важи $\sqrt{A}^{-1} = \sqrt{A^{-1}}$. Ово следи из чињенице да је $\sqrt{A^{-1}}^2 = A^{-1}$ и $\sqrt{A}^{-1}\sqrt{A}^{-1} = A^{-1}$, као и јединствености квадратног корена позитивног оператора.

Дефиниција 1.9. *За дату контракцију* $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$*, оператор* $D_A \stackrel{\text{деф}}{=} \sqrt{I - A^*A}$ *се зове* ***дефект*** *контракције* A*.* $\mathcal{D}_A \stackrel{\text{деф}}{=} \overline{R(D_A)}$ *се зове* ***дефектни простор*** *контракције* A*, а број* $\partial_A \stackrel{\text{деф}}{=} \dim(\mathcal{D}_A)$ *се зове* ***индекс дефекта*** *контракције* A*.*

Ови објекти се користе као нека мера колико је контракција A „блиска” изометрији. Важно својство дефекта даје

Став 1.13. ***Ако је*** $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ ***контракција, тада је***

$$AD_A = D_{A^*}A. \tag{1.5}$$

Доказ: Очигледно је $A(I-A^*A)=(I-AA^*)A$, па је $A(I-A^*A)^n=(I-AA^*)^nA$ за свако $n\in\mathbb{N}$. То значи да је и за сваки полином p са реалним коефицијентима $Ap(I-A^*A)=p(I-AA^*)A$. Постоји низ полинома $p_n(x)\rightrightarrows\sqrt{x}$ $(n\to\infty)$ на $[0,1]$, па добијамо да су D_A и D_A^* униформни лимеси оператора $p_n(I-A^*A)$ и $p_n(I-AA^*)$. Како је онда и $Ap_n(I-A^*A)=p_n(I-AA^*)A$ за свако $n\in\mathbb{N}$, преласком на лимес добијамо да важи (1.5). □

Адјунговањем обе стране у (1.5) добијамо да важи и

$$D_AA^*=A^*D_{A^*}. \tag{1.6}$$

Приметимо да за свако $h\in\mathcal{H}$ важи

$$\|h\|^2-\|Ah\|^2=\langle (I-A^*A)h,h\rangle=\langle D_A^2h,h\rangle=\langle D_Ah,D_Ah\rangle=\|D_Ah\|^2,$$

па добијамо још једну важну везу између оператора и његовог дефекта:

$$\|h\|^2=\|Ah\|^2+\|D_Ah\|^2. \tag{1.7}$$

Докажимо сада карактеризацију строге контрактивности.

Став 1.14. ***Оператор** $A\in\mathfrak{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ **је строга контракција ако и само ако је** $I-A^*A$**, или еквивалентно,** $I-AA^*$ **позитиван и инвертибилан. Контракција** A **је строга контракција ако и само ако је** D_A**, или еквивалентно,** D_{A^*} **инвертибилан.***

Доказ: Нека је A строга контракција. Тада је $\|A\|=\|A^*\|<1$, па важи да је $\|Ah\|<\|h\|$ за свако $h\in\mathcal{H}$ и $\|A^*k\|<\|k\|$ за свако $k\in\mathcal{K}$. Одатле добијамо

$$\langle (I-A^*A)h,h\rangle=\|h\|^2-\|Ah\|^2\geqslant\|h\|^2-\|A\|^2\|h\|^2=(1-\|A\|^2)\|h\|^2$$

и

$$\langle (I-AA^*)k,k\rangle=\|k\|^2-\|A^*k\|^2\geqslant\|k\|^2-\|A^*\|^2\|k\|^2=(1-\|A^*\|^2)\|k\|^2,$$

а како су $1-\|A\|^2>0$ и $1-\|A^*\|^2>0$ следи да је $I-A^*A\geqslant(1-\|A\|^2)I$ и $I-AA^*\geqslant(1-\|A^*\|^2)I$, па су оператори $I-A^*A$ и $I-AA^*$ позитивни и инвертибилни.
Обрнуто, нека постоје $\delta_1>0$ или $\delta_2>0$ такви да је $I-A^*A\geqslant\delta_1 I$ или $I-AA^*\geqslant\delta_2 I$. За свако $h\in\mathcal{H}$ $(k\in\mathcal{K})$ је онда

$$\|Ah\|^2=\|h\|^2-\langle (I-A^*A)h,h\rangle\leqslant\|h\|^2-\delta_1\|h\|^2=(1-\delta_1)\|h\|^2$$

и

$$\|A^*k\|^2=\|k\|^2-\langle (I-AA^*)k,k\rangle\leqslant\|k\|^2-\delta_2\|k\|^2=(1-\delta_2)\|k\|^2.$$

Узимањем супремума по $h\in\mathcal{H},\|h\|=1$ (аналогно $k\in\mathcal{K},\|k\|=1$) добијамо да је $\|A\|\leqslant\sqrt{1-\delta_1}<1$ односно $\|A^*\|\leqslant\sqrt{1-\delta_2}<1$, па је у оба случаја (јер је $\|A\|=\|A^*\|$, као и чињенице да δ_1,δ_2 можемо изабрати из интервала $(0,1)$) оператор A строга контракција. Последњи део следи из чињенице да су оператори $I-A^*A$ и D_A, као и $I-AA^*$ и D_{A^*} истовремено позитивни и инвертибилни. □

Нека је $A\in\mathfrak{B}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H})$ и $B\in\mathfrak{B}(\mathcal{H}_2,\mathcal{H})$. У неким ситуацијама нас занима да ли постоји контракција $C\in\mathfrak{B}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$ таква да је $A=BC$, тј. да дијаграм на слици испод комутира.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}_2 \arrow[dr, "B"] & \\
\mathcal{H}_1 \arrow[u, dashed, "C"] \arrow[r, "A"'] & \mathcal{H}
\end{tikzcd}$$

Ако таква контракција постоји онда је

$$BB^* - AA^* = BB^* - BCC^*B^* = B(I - CC^*)B^* \geqslant 0$$

према Ставу 1.9 и Ставу 1.7, тачка 4°, тј. $AA^* \leqslant BB^*$. Овај услов је и довољан за постојање контракције C. О томе нам говори следећа теорема која даје општији резултат.

Теорема 1.15. ***Нека су*** $\mathcal{H}, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ ***Хилбертови простори. Нека*** $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H})$ ***и*** $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H})$ ***и нека је*** $c > 0$***. Тада постоји ограничен оператор*** $C : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ ***такав да је*** $\|C\| \leqslant c$ ***и*** $A = BC$ ***ако и само ако је*** $AA^* \leqslant c^2 BB^*$***.***

Доказ: Претпоставимо да постоји ограничени оператор $C : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$, такав да је $\|C\| \leqslant c$ и $A = BC$. Како је $\|C\| \leqslant c$, имамо да је $\langle (c^2 I - CC^*)h_2, h_2\rangle = c^2\|h_2\|^2 - \langle CC^*h_2, h_2\rangle \geqslant c^2\|h_2\|^2 - \|CC^*\|\|h_2\|^2 = c^2\|h_2\|^2 - \|C\|^2\|h_2\|^2 \geqslant c^2\|h_2\|^2 - c^2\|h_2\|^2 = 0$ за свако $h_2 \in \mathcal{H}_2$, односно оператор $c^2 I - CC^*$ је позитиван. Зато важи $c^2BB^* - AA^* = c^2BB^* - BCC^*B^* = B(c^2I - CC^*)B^* \geqslant 0$, односно $AA^* \leqslant c^2BB^*$. Докажимо сада други смер. Претпоставимо да је $AA^* \leqslant c^2BB^*$. Из $\langle A^*h, A^*h\rangle = \langle AA^*h, h\rangle \leqslant c^2\langle BB^*h, h\rangle = c^2\langle B^*h, B^*h\rangle$ следи да је $\|A^*h\|^2 \leqslant c^2\|B^*h\|^2$, односно

$$\|A^*h\| \leqslant c\|B^*h\|, \tag{1.8}$$

за свако $h \in \mathcal{H}$. Ова неједнакост нам омогућава да дефинишемо пресликавање $D : \mathcal{R}(B^*) \to \mathcal{R}(A^*)$ са $Dg = D(B^*h) \overset{\text{деф}}{=} A^*h$, где је $h \in \mathcal{H}$ такво да је $B^*h = g$. Докажимо прво да је ово пресликавање добро дефинисано. Нека је зато $g \in \mathcal{R}(B^*)$ такав да има две репрезентације $g = B^*h = B^*h'$, онда је $B^*(h - h') = 0$, а одатле следи да је и $A^*(h - h') = 0$, јер је из (1.8) $\|A^*(h - h')\| \leqslant c\|B^*(h - h')\| = 0$, односно $A^*(h - h') = 0$. Другим речима $A^*h = A^*h' = Dg$. Да би проверили линеарност узмимо $g_1 = B^*h, g_2 = B^*h' \in \mathcal{R}(B^*)$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, тада је $D(\alpha g_1 + \beta g_2) = D(\alpha B^*h + \beta B^*h') = D(B^*(\alpha h + \beta h')) = A^*(\alpha h + \beta h') = \alpha A^*h + \beta A^*h' = \alpha Dg_1 + \beta Dg_2$, па је D линеарно пресликавање. Приметимо да је $\|Dg\| = \|D(B^*h)\| = \|A^*h\| \leqslant c\|B^*h\| = c\|g\|$, па се D може продужити непрекидно до ограниченог оператора у истој ознаци на $\overline{\mathcal{R}(B^*)} \subset \mathcal{H}_2$ у $\mathcal{R}(A^*) \subset \mathcal{H}_1$ и то без повећања норме. У последњем кораку продужења, продужимо оператор D до ограниченог оператора из $\mathcal{H}_2$ у $\mathcal{H}_1$ дефинишући $Dg = 0$ за $g \in \mathcal{R}(B^*)^\perp$, па се норма неће повећати. Овај оператор задовољава $DB^* = A^*$ и $\|D\| \leqslant c$, па је адјунговањем $A = BD^*$ и за тражени оператор C узмемо D^*. $\square$

У претходној теореми оператори A и B имају исти кодомен. У неким случајевима ће нам бити од интереса сличан резултат, али да оператори A и B имају исти домен. То нам даје следећа лема која је директна последица претходне теореме.

Лема 1.16. ***Нека су*** $\mathcal{H}, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ ***Хилбертови простори. Нека је*** $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}_1)$***,*** $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}_2)$ ***и нека је*** $c > 0$***. Тада постоји ограничен оператор*** $C : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ ***такав да је*** $\|C\| \leqslant c$ ***и*** $A = CB$ ***ако и само ако је*** $A^*A \leqslant c^2B^*B$***.***

Доказ: Применимо претходну теорему на операторе A^* и B^*. $\square$

Напоменимо да у случају једнакости у претходне две леме важи $\|C\| = c$.

3 Ортогоналан збир Хилбертових простора

У овој секцији ћемо увести ортогоналан збир највише пребројиве фамилије Хилбертових простора као и основне особине и идентитете везане за њега.

Нека је $\{\mathcal{H}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ низ Хилбертових простора. Посматрајмо следећи скуп

$$\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n \overset{\text{деф}}{=} \left\{ h \in \prod_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n : \sum_{n=1}^{\infty}\|h_n\|^2_{\mathcal{H}_n} < +\infty \right\}. \tag{1.9}$$

Скуп $\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n$ се на природан начин може опремити скаларним производом са којим ће чинити Хилбертов простор.

Теорема 1.17. ***Пресликавање*** $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n} : \bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n \times \bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n \to \mathbb{C}$ ***дефинисано са***

$$\langle h, g\rangle_{\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n} \overset{\text{деф}}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\langle h_n, g_n\rangle_{\mathcal{H}_n} \tag{1.10}$$

је скаларни производ на $\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n$ ***и чини га Хилбертовим простором.***

Доказ: Докажимо прво да је израз (1.10) добро дефинисан. Нека су $h, g \in \bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n$ произвољни. Коришћењем неједнакости Коши-Шварца на сваком од простора $\mathcal{H}_n$, као и на простору квадратно сумабилних низова, добијамо

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\langle h_n, g_n\rangle_{\mathcal{H}_n}| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\|h_n\|_{\mathcal{H}_n}\|g_n\|_{\mathcal{H}_n} \leqslant \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\|h_n\|^2_{\mathcal{H}_n}}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\|g_n\|^2_{\mathcal{H}_n}} < +\infty,$$

па ред у (1.10) апсолутно конвергира, одакле следи његова добра дефинисаност. Докажимо сада да израз (1.10) дефинише скаларни производ на $\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n$. Нека су $f, g, h \in \bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n$ и $\lambda \in \mathbb{C}$ произвољни. Како су сви простори $\mathcal{H}_n$ Хилбертови простори, из линеарности суме реда, као и линеарности и непрекидности комплексног конјуговања следи

$$\langle f+g, h\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\langle f_n+g_n, h_n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\langle f_n, h_n\rangle + \sum_{n=1}^{\infty}\langle g_n, h_n\rangle = \langle f, h\rangle + \langle g, h\rangle,$$

$$\overline{\langle f, g\rangle} = \overline{\sum_{n=1}^{\infty}\langle f_n, g_n\rangle} = \sum_{n=1}^{\infty}\overline{\langle f_n, g_n\rangle} = \sum_{n=1}^{\infty}\langle g_n, f_n\rangle = \langle g, f\rangle,$$

$$\langle \lambda f, g\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\langle \lambda f_n, g_n\rangle = \lambda\sum_{n=1}^{\infty}\langle f_n, g_n\rangle = \lambda\langle f, g\rangle.$$

Како је за свако $n \in \mathbb{N}$ израз $\langle h_n, h_n\rangle = 0$ ако и само ако је $h_n = 0$, следи

$$\langle h, h\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\langle h_n, h_n\rangle = 0$$

ако и само ако је $h_n = 0$ за свако $n \in \mathbb{N}$, због позитивности сваког члана горњег реда, па је $h = 0$ у $\bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n$. Дакле (1.10) дефинише скаларни производ на $\bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n$. Што се њиме индуковане норме тиче, биће нам од користи следећи израз (који ће се користити у форми коначног збира)

$$\|h\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \langle h_n, h_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\|^2,$$

за $h \in \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n$.

Докажимо сада комплетност простора $\bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n$ у норми индукованој скаларним производом (1.10). Довољно је доказати да је сваки апсолутно конвергентан ред у (1.9) и конвергентан (видети [1, Став 7.1]). Нека је $\sum_{k=1}^{\infty} h^{(k)}$ произвољан апсолутно конвергентан ред у $\bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n$, тј. нека је

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left\| h_n^{(k)} \right\|^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \left\| h^{(k)} \right\| =: C < +\infty, \tag{1.11}$$

Из неједнакости Минковског у $l^2_{\mathbb{N}}(\mathbb{C})$ директно добијамо

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left\| h_n^{(k)} \right\| \right)^2} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left\| h_n^{(k)} \right\|^2} = C, \tag{1.12}$$

Одатле следи да је за свако $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\| h_n^{(k)} \right\| \leqslant C < +\infty. \tag{1.13}$$

Како је сваки од простора $\mathcal{H}_n$ Хилбертов, следи да апсолутно конвергентни редови у (1.13) конвергирају у тим просторима, тј. постоје $g_n := \sum_{k=1}^{\infty} h_n^{(k)} \in \mathcal{H}_n$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Нека је $g := (g_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n$. Из основне неједнакости за Хилбертове просторе $\mathcal{H}_n$ и неједнакости (1.12) добијамо

$$\begin{aligned} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\|^2} &= \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} h_n^{(k)} \right\|^2} \leqslant \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left\| h_n^{(k)} \right\| \right)^2} \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left\| h_n^{(k)} \right\|^2} \leqslant C < +\infty, \end{aligned} \tag{1.14}$$

одакле следи да $g \in \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n$. Додатно, упоређивањем једнакости (1.11) и неједнакости (1.14), добили смо да за сваки апсолутно конвергентан ред $\sum_{k=1}^{\infty} h^{(k)}$ важи „слаба" основна неједнакост

$$\left\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} h_n^{(k)} \right)_{n \in \mathbb{N}} \right\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} h_n^{(k)} \right\|^2} \leqslant C = \sum_{k=1}^{\infty} \left\| h^{(k)} \right\|. \tag{1.15}$$

Применом слабе основне неједнакости на остатак реда, добијамо

$$\left\| g - \sum_{k=1}^{K} h^{(k)} \right\| = \left\| \sum_{k=K+1}^{\infty} h^{(k)} \right\| \leqslant \sum_{k=K+1}^{\infty} \left\| h^{(k)} \right\| \to 0, \text{ кад } K \to +\infty, \tag{1.16}$$

јер је ред са десне стране неједнакости (1.16) остатак конвергентног реда. Дакле, ред $\sum_{k=1}^{\infty} h^{(k)}$ конвергира ка g у норми простора $\bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n$, чиме је доказ завршен. □

Претходна теорема оправдава следећу дефиницију.

Дефиниција 1.10. *Нека је $\{\mathcal{H}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ низ Хилбертових простора. Тада $\bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n$ називамо **ортогоналним збиром Хилбертових простора** $\{\mathcal{H}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ у односу на скаларни производ* (1.10).

У наставку ћемо разматрати само коначне фамилије $\{\mathcal{H}_i\}_{i=1}^{n}$ Хилбертових простора и у том случају имамо дефинисане коначне ортогоналне суме $\bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{H}_i \overset{\text{деф}}{=} \prod_{i=1}^{n} \mathcal{H}_i$, као и скаларни производ

$$\langle f, g\rangle \overset{\text{деф}}{=} \langle f, g\rangle_{\bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{H}_i} = \sum_{i=1}^{n} \langle f_i, g_i\rangle_{\mathcal{H}_i},$$

у односу на који је $\bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{H}_i$ Хилбертов простор.

Дефиниција 1.11. *Нека су $\{\mathcal{H}_i\}_{i=1}^{n}$ и $\{\mathcal{K}_j\}_{j=1}^{m}$ коначни низови Хилбертових простора и нека су $T_{ij} \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_j, \mathcal{K}_i)$. Тада је **операторна матрица** пресликавање*

$$[T_{ij}]_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}} : \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{H}_i \to \bigoplus_{j=1}^{m} \mathcal{K}_j : \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} T_{1j} h_j \\ \sum_{j=1}^{n} T_{2j} h_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} T_{mj} h_j \end{bmatrix}, \tag{1.17}$$

при чему можемо користити и нотацију $\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1n} \\ T_{21} & T_{22} & \dots & T_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{m1} & T_{m2} & \dots & T_{mn} \end{bmatrix} \overset{\text{деф}}{=} [T_{ij}]_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$.

Као и у случају скаларних матрица, наведено пресликавање Хилбертових простора је и линеарно.

Став 1.18. ***Пресликавање** $[T_{ij}]_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ **дефинисано у** (1.17) **је линеарно.***

Доказ: За све $(g_i)_{i=1}^{n}, (h_i)_{i=1}^{n} \in \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{H}_i$ и за свако $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ имамо

$$[T_{ij}]_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}} (\alpha (g_i)_{i=1}^{n} + \beta (h_i)_{i=1}^{n}) = \left(\sum_{j=1}^{n} T_{ij}(\alpha g_j + \beta h_j) \right)_{i=1}^{m}$$

$$= \alpha \left(\sum_{j=1}^{n} T_{ij} g_j \right)_{i=1}^{m} + \beta \left(\sum_{j=1}^{n} T_{ij} h_j \right)_{i=1}^{m} = \alpha [T_{ij}]_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}} (g_i)_{i=1}^{n} + \beta [T_{ij}]_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}} (h_i)_{i=1}^{n}$$

□

Такође, рачунање адјунгованог оператора операторној матрици $[T_{ij}]_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ је аналогно случају скаларне матрице.

Став 1.19. ***За свако** $n \in \mathbb{N}$ **и за свако** $[T_{ij}]_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathfrak{B}(\bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{H}_i, \bigoplus_{j=1}^{m} \mathcal{K}_j)$ **је***

$$\left([T_{ij}]_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \right)^{*} = [T_{ji}^{*}]_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}}. \tag{1.18}$$

Доказ: За све $(h_i)_{i=1}^n \in \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{H}_i$ и $(g_j)_{j=1}^m \in \bigoplus_{j=1}^m \mathcal{K}_j$ је

$$\left\langle [T_{ij}]_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}(h_i)_{i=1}^n, (g_j)_{j=1}^m \right\rangle = \left\langle \left(\sum_{i=1}^n T_{ji}h_i \right)_{j=1}^m, (g_j)_{j=1}^m \right\rangle$$
$$= \sum_{j=1}^m \left\langle \sum_{i=1}^n T_{ji}h_i, g_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \langle h_i, T_{ij}^* g_j \rangle = \sum_{i=1}^n \left\langle h_i, \sum_{j=1}^m T_{ij}^* g_j \right\rangle$$
$$= \left\langle (h_i)_{i=1}^n, \left(\sum_{j=1}^m T_{ij}^* g_j \right)_{i=1}^n \right\rangle = \left\langle (h_i)_{i=1}^n, [T_{ji}^*]_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}(g_j)_{j=1}^m \right\rangle,$$

чиме је доказ завршен. □

4 Контрактивност операторних блок матрица

У овој секцији разматрамо карактеризације контрактивности операторних матрица димензија 2×1 и 1×2, као и доње троугаоних блок матрица димензије 2×2.

4.1 Контрактивност операторних матрица димензија 2×1 и 1×2

Нека су $\mathcal{H}, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ Хилбертови простори. Ако су дати $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}_1)$ и $B \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}_2)$, размотримо оператор

$$T = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 : \ h \mapsto \begin{bmatrix} Ah \\ Bh \end{bmatrix}. \tag{1.19}$$

Имамо да је оператор T контракција ако и само ако је $\|Th\|^2 = \|Ah\|^2 + \|Bh\|^2 \leqslant \|h\|^2$ за свако $h \in \mathcal{H}$. Одатле следи да тада A и B морају бити контракције јер је $\|Ah\|^2 \leqslant \|Ah\|^2 + \|Bh\|^2 \leqslant \|h\|^2$ и слично за B. Користећи Лему 1.16, можемо добијемо следећу карактеризацију контрактивности за оператор дефинисан у (1.19).

Став 1.20. ***Оператор*** $T = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ ***је контракција ако и само ако постоји контракција*** $Y : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_1$ ***таква да је*** $A = YD_B$.

Доказ: T је контракција ако и само ако је $\|Th\|^2 = \|Ah\|^2 + \|Bh\|^2 \leqslant \|h\|^2$ за свако $h \in \mathcal{H}$. Ово последње је еквивалентно са $A^*A + B^*B \leqslant I$, јер је $A^*A + B^*B \leqslant I$ ако и само ако је за свако $h \in \mathcal{H}$ $\langle (A^*A + B^*B)h, h\rangle \leqslant \langle Ih, h\rangle$ ако и само ако је $\langle A^*Ah, h\rangle + \langle B^*Bh, h\rangle \leqslant \|h\|^2$ ако и само ако је $\langle Ah, Ah\rangle + \langle Bh, Bh\rangle \leqslant \|h\|^2$ ако и само ако је $\|Ah\|^2 + \|Bh\|^2 \leqslant \|h\|^2$. Даље, $A^*A + B^*B \leqslant I$ ако и само ако је $A^*A \leqslant I - B^*B$ ако и само ако је $A^*A \leqslant \sqrt{I - B^*B}\sqrt{I - B^*B} = 1^2 D_B^* D_B$, а то је према Леми 1.16 еквивалентно са тим да постоји $Y : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_1$, тако да је $\|Y\| \leqslant 1$ и $A = YD_B$. Ово важи због $I - B^*B \geqslant 0$, јер је B контракција, као и због $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_1$ и $D_B : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, а константа c из Леме 1.16 је $c = 1$. □

Како је $T' = \begin{bmatrix} B \\ A \end{bmatrix} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_1$ контракција ако и само ако је $T = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ контракција (што се види из дефиниције квадрата норме матричног оператора), то имамо, према претходном ставу, да је T контракција ако и само ако постоји контракција $Y : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_2$ таква да је $B = YD_A$. Приметимо да смо за домен контракције Y, за коју је $B = YD_A$, могли да узмемо $\mathcal{D}_A = \overline{R(D_A)}$. Даље, ако је T контракција и Y контракција за коју је $B = YD_A$, имамо да важи

$$\begin{aligned} \|h\|^2 - \|Th\|^2 &= \|h\|^2 - \|Ah\|^2 - \|YD_Ah\|^2 \\ &= \|D_Ah\|^2 - \|YD_Ah\|^2 = \|D_YD_Ah\|^2, \text{ за свако } h \in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

Одатле видимо да је $\|D_Th\|^2 = \|h\|^2 - \|Th\|^2 = \|D_YD_Ah\|^2$, тј. $\|D_Th\| = \|D_YD_Ah\|$ за свако $h \in \mathcal{H}$, па постоји $W : \mathcal{D}_T \to \mathcal{D}_Y$ за које важи

$$WD_T = D_YD_A, \tag{1.20}$$

које је изометрија простора $\mathcal{D}_T$ и $\mathcal{D}_Y$ и очигледно сурјективно. Из свега закључујемо да је W, дефинисан са (1.20), унитаран оператор из $\mathcal{D}_T$ на $\mathcal{D}_Y$. Постојање оператора W је оправдано Теоремом 1.15 и неједнакошћу (1.8) (што је у нашем случају једнакост).

Ако су сада $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_1$ и $B : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_2$ два ограничена оператора, размотримо оператор

$$T = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} : \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H} : \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \mapsto Ah_1 + Bh_2. \tag{1.21}$$

Оператор T дат са (1.21) је контракција ако и само ако је $T^* = \begin{bmatrix} A^* \\ B^* \end{bmatrix}$ контракција, одакле видимо да тада и оператори A и B морају бити контракције. Следећи став је директна последица претходног става.

Став 1.21. ***Ако су*** $A : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}$ ***и*** $B : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}$ ***ограничени оператори, тада је оператор*** $T = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} : \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}$ ***контракција ако и само ако постоји контракција*** $X : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}$ ***таква да је*** $A = D_{B^*}X$***.***

Доказ: T је контракција из $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ у $\mathcal{H}$ ако и само ако је $T^* = \begin{bmatrix} A^* \\ B^* \end{bmatrix}$ контракција из $\mathcal{H}$ у $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$, а то је према претходном ставу еквивалентно са тим да постоји контракција $Y : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_1$ таква да је $A^* = YD_{B^*}$. Адјунговањем добијамо да је $A = D_{B^*}Y^*$, где је Y^* такође контракција из $\mathcal{H}_1$ у $\mathcal{H}$. Узмемо $X = Y^*$ и тиме је доказ завршен. $\square$

Ако је $T' = \begin{bmatrix} B & A \end{bmatrix}$, онда слично као и у случају за оператор колону имамо да је T' контракција ако и само ако је $T = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$ контракција, па важи да је T контракција ако и само ако постоји контракција $X : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}$ таква да је $B = D_{A^*}X$.

Став 1.22. ***Нека је*** T ***контракција облика*** (1.21) ***и нека је*** X ***њоме индукована контракција за коју је*** $B = D_{A^*}X$***. Тада је оператор*** $W : \mathcal{D}_T \to \mathcal{D}_A \oplus \mathcal{D}_X$ ***дефинисан са***

$$WD_T \overset{\text{деф}}{=} \begin{bmatrix} D_A & -A^*X \\ 0 & D_X \end{bmatrix} \tag{1.22}$$

унитаран.

Доказ претходног става може се видети у [2, Последица 1.5].

4.2 Контрактивност доње троугаоних операторних матрица димензије 2×2

У овој секцији ћемо дати карактеризацију свих контрактиблиних доње троугаоних операторних матрица димензије 2×2. Посматраћемо оператор T облика

$$T = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix} : \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3, \tag{1.23}$$

где оператори A, C и D дејствују на одговарајућим просторима.

Лема 1.23. ***Оператор T дефинисан у (1.23) је контракција ако и само ако су оператори A и D контракције и постоји контракција $\Gamma : \mathcal{D}_A \to \mathcal{D}_{D^*}$ таква да је оператор C облика***

$$C = D_{D^*} \Gamma D_A. \tag{1.24}$$

Доказ: Претпоставимо да је операторна матрица T контракција. Нека су $h \in \mathcal{H}$ и $h_1 \in \mathcal{H}_1$ произвољни. Тада је

$$\left\| \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ 0 \end{bmatrix} \right\|^2 = \|Ah\|^2 + \|Ch\|^2 \leqslant \left\| \begin{bmatrix} h \\ 0 \end{bmatrix} \right\|^2 = \|h\|^2$$

и

$$\left\| \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ h_1 \end{bmatrix} \right\|^2 = \|Dh_1\|^2 \leqslant \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ h_1 \end{bmatrix} \right\|^2 = \|h_1\|^2,$$

одакле следи да су оператори A и D (и C) контракције. Дакле, контрактивност оператора A и D је потребан услов за контрактивност операторне матрице T, па ћемо у наставку доказа претпоставити да је тај услов испуњен. Из Става 1.20 следи да је T контракција ако и само ако је пресликавање $Y : \mathcal{D}_{\begin{bmatrix} A & 0 \end{bmatrix}} \to \mathcal{H}_3$ дефинисано са

$$\begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} = Y D_{\begin{bmatrix} A & 0 \end{bmatrix}} \tag{1.25}$$

контракција. Директним рачуном добијамо

$$\begin{aligned} D_{\begin{bmatrix} A & 0 \end{bmatrix}} &= \sqrt{I - \begin{bmatrix} A & 0 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} A & 0 \end{bmatrix}} = \sqrt{\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} A & 0 \end{bmatrix}} = \sqrt{\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A^*A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} \\ &= \sqrt{\begin{bmatrix} D_A^2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} D_A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{1.26}$$

где је последња матрица очигледно тражени позитиван корен матрице. Дакле, оператор Y је врста облика $\begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \end{bmatrix}$ и његов домен је $\mathcal{D}_{\begin{bmatrix} A & 0 \end{bmatrix}} = \mathcal{D}_A \oplus \mathcal{H}_1$. Заменом (1.26) у (1.25) добијамо

$$\begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

па је $C = Y_1 D_A$ и $D = Y_2$. На основу Става 1.21, врста $\begin{bmatrix} Y_1 & D \end{bmatrix}$ је контракција ако и само ако једнакост $Y_1 = D_{D^*}\Gamma$ дефинише контракцију $\Gamma : \mathcal{D}_A \to \mathcal{D}_{D^*}$. Коришћењем једнакости $C = Y_1 D_A$ добијамо коначно да је доње троугаона матрица T контракција ако и само ако су оператори A и D контракције и постоји контракција $\Gamma : \mathcal{D}_A \to \mathcal{D}_{D^*}$ таква да је

$$C = Y_1 D_A = D_{D^*} \Gamma D_A,$$

што је и требало доказати. □

Став 1.24. ***Нека је T контракција облика (1.23) и Γ контракција њоме индукована, дефинисана једнакошћу (1.24). Тада су оператори $W : \mathcal{D}_T \to \mathcal{D}_\Gamma \oplus \mathcal{D}_D$ и $W_* : \mathcal{D}_{T^*} \to \mathcal{D}_{A^*} \oplus \mathcal{D}_{\Gamma^*}$ дефинисани са***

$$W D_T \overset{\text{деф}}{=} \begin{bmatrix} D_\Gamma D_A & 0 \\ -D^* \Gamma D_A & D_D \end{bmatrix} \tag{1.27}$$

и

$$W_* D_{T^*} \overset{\text{деф}}{=} \begin{bmatrix} D_{A^*} & -A\Gamma D_{D^*} \\ 0 & D_{\Gamma^*} D_{D^*} \end{bmatrix} \tag{1.28}$$

унитарни.

Доказ овог става се може видети у [2, Последица 2.2].
За крај овог поглавља размотримо следећу операторну матрицу

$$T = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} : \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_3 \oplus \mathcal{H}_4, \tag{1.29}$$

где су A, B, C, D ограничени оператори на одговарајућим просторима. Претпоставимо сада да је оператор T дат са (1.29) контракција. Ако T посматрамо као оператор колону, из претходно реченог можемо закључити да је оператор $\begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} : \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_4$ контракција, а ако T посматрамо као оператор врсту, закључујемо да је оператор $\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_3 \oplus \mathcal{H}_4$ такође контракција. Претпоставимо да су B, C, D дати ограничени оператори такви да су $\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_3 \oplus \mathcal{H}_4$ и $\begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} : \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_4$ контракције. Питање постојања оператора $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_3)$, таквог да је оператор $T = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ контракција биће размотрено у наредном поглављу.

Глава 2

Ограничене симетричне области

1 Диференцирање на Банаховим просторима

Неки проблеми функционалне анализе намећу потребу за израчунавањем нелинеарних пресликавања и на бесконачно димензионалним просторима. У овој секцији биће разматрани основни појмови диференцијалног рачуна таквих функција. Надаље, свуда претпостављамо да су $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ Банахови простори.

Дефиниција 2.1. *Нека је $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ отворен скуп и $a \in \mathcal{U}$. За пресликавање $f : \mathcal{U} \to \mathcal{Y}$ кажемо да је* ***јако диференцијабилно*** *или краће* ***диференцијабилно*** *у тачки a ако постоји оператор $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ такав да је*

$$\lim_{x \to a} \frac{\|f(x) - f(a) - A(x - a)\|}{\|x - a\|} = 0. \tag{2.1}$$

Некада ће нам бити лакше да лимес (2.1) пишемо у облику

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(a + h) - f(a) - Ah\|}{\|h\|} = 0, \tag{2.2}$$

где је $h = x - a \to 0$ кад $x \to a$, или некада $f(a+h) - f(a) - Ah = o(h)$ што подразумева да је лимес из (2.2) једнак нули.

Оператор A из Дефиниције 2.1 је јединствен увек када постоји. Заиста, ако би постојао још неки оператор $B \in \mathfrak{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ за који важи $\lim\limits_{x \to a} \frac{\|f(x) - f(a) - B(x-a)\|}{\|x - a\|} = 0$, одатле би следило да важи и

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} \frac{\|(A - B)(x - a)\|}{\|x - a\|} &= \lim_{x \to a} \frac{\|f(x) - f(a) - B(x - a) - (f(x) - f(a) - A(x - a))\|}{\|x - a\|} \\ &\leqslant \frac{\|f(x) - f(a) - B(x - a)\|}{\|x - a\|} + \frac{\|f(x) - f(a) - A(x - a)\|}{\|x - a\|} = 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Сада, ако је $h \neq 0,\ h \in \mathcal{X}$, имамо да $a + th \to a$, кад $t \to 0$, па из (2.3) добијамо

$$\frac{\|(A - B)h\|}{\|h\|} = \lim_{t \to 0} \frac{\|(A - B)(a + th - a)\|}{\|a + th - a\|} = \lim_{x \to a} \frac{\|(A - B)(x - a)\|}{\|x - a\|} = 0,$$

за $x = a + th$. Одатле је $\|(A - B)h\| = 0$, за свако $h \in \mathcal{X}$, па следи да је $Ah = Bh$, тј. $A = B$.

Дефиниција 2.2. *Оператор A из дефиниције 2.1 називамо* ***јаким*** *или* ***Фрешеовим***[1] ***изводом*** *пресликавања f у тачки a и означавамо са $f'(a)$, тј. кажемо да је f* ***јако диференцијабилно*** *у тачки a ако и само ако постоји јединствен $f'(a) \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ за који је*

$$\lim_{x \to a} \frac{\|f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)\|}{\|x-a\|} = 0.$$

Сам вектор $f'(a)(x-a) \in \mathcal{Y}$ називамо вредношћу ***јаког*** *или* ***Фрешеовог диференцијала*** *функције f у тачки a у правцу вектора $x - a$.*

Наведимо сада неке особине Фрешеовог извода.

Став 2.1. ***Нека је $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ отворен скуп и $f : \mathcal{U} \to \mathcal{Y}$. Тада:***

1° ***Ако је f диференцијабилна у тачки $a \in \mathcal{U}$, онда је она и непрекидна у тој тачки.***

2° ***Ако је $f(x) = c$, за неко $c \in \mathcal{Y}$ и све $x \in \mathcal{U}$, тада је $f'(a) = \mathbf{0}$ за свако $a \in \mathcal{U}$.***

3° ***Ако је $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, тада је $A'(a) = A$ за свако $a \in \mathcal{X}$.***

Доказ: 1° Како је f диференцијабилна у тачки a, следи да је $\lim\limits_{x \to a} \frac{\|f(x)-f(a)-A(x-a)\|}{\|x-a\|} = 0$, за $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Одавде следи да мора бити $\lim\limits_{x \to a} \|f(x) - f(a) - A(x-a)\| = 0$. Даље, због непрекидности норме и оператора A имамо да је

$$\lim_{x \to a} \|f(x) - f(a) - A(x-a)\| = 0 \iff \lim_{x \to a} \|f(x) - f(a)\| = 0 \iff \lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

што је еквивалентно са непрекидношћу функције f у тачки a.
2°

$$\lim_{x \to a} \frac{\|f(x) - f(a) - \mathbf{0}(x-a)\|}{\|x-a\|} = \lim_{x \to a} \frac{\|c-c\|}{\|x-a\|} = 0,$$

па по дефиницији следи да је $\mathbf{0} \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ извод од константне функције $f(x) = c$.
3°

$$\lim_{x \to a} \frac{\|A(x) - A(a) - A(x-a)\|}{\|x-a\|} = \lim_{x \to a} \frac{\|A(x) - A(a) - A(x) + A(a)\|}{\|x-a\|} = 0,$$

јер је A линеарно, па је $A'(a) = A$ за све $a \in \mathcal{X}$. □

Следећа теорема нам говори о изводу сложене функције.

Теорема 2.2. ***Нека су $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ Банахови простори, $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$, $\mathcal{V} \subset \mathcal{Y}$ отворени скупови, $g : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$, $f : \mathcal{V} \to \mathcal{Z}$ и $a \in \mathcal{U}$. Нека је f диференцијабилна у $g(a)$ и g диференцијабилна у a. Тада је и $f \circ g$ диференцијабилна у a и важи***

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a). \tag{2.4}$$

[1] Maurice René Fréchet (1878-1973), француски математичар

Доказ: За дато $\varepsilon > 0$ нека је $\eta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}+\|f'(g(a))\|+\|g'(a)\|}$. Приметимо да је $\eta < \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} = \sqrt{\varepsilon}$. Због диференцијабилности f у $g(a)$ и g у a постоје $\delta_1, \delta_2 > 0$ такви да је $\mathbb{B}(a, \delta_1) \subset \mathcal{U}$ и $\mathbb{B}(g(a), \delta_2) \subset \mathcal{V}$, где је $\mathbb{B}(x, r)$ отворена лопта полупречника r са центром у x, као и

$$\|f(y) - f(g(a)) - f'(g(a))(y - g(a))\| < \eta\|y - g(a)\| \text{ за } \|y - g(a)\| < \delta_2, \tag{2.5}$$
$$\|g(x) - g(a) - g'(a)(x - a)\| < \eta\|x - a\| \text{ за } \|x - a\| < \delta_1. \tag{2.6}$$

За $\delta = \min\left\{\delta_1, \frac{\delta_2}{\eta+\|g'(a)\|}\right\}$ и $\|x - a\| < \delta$ је

$$\begin{aligned}
\|g(x) - g(a)\| &= \|g(x) - g(a) - g'(a)(x - a) + g'(a)(x - a)\| \\
&\leqslant \|g(x) - g(a) - g'(a)(x - a)\| + \|g'(a)(x - a)\| \\
&\leqslant \|g(x) - g(a) - g'(a)(x - a)\| + \|g'(a)\|\|x - a\| \\
&\leqslant \eta\|x - a\| + \|g'(a)\|\|x - a\| = (\eta + \|g'(a)\|)\|x - a\| \\
&< (\eta + \|g'(a)\|)\delta < \delta_2,
\end{aligned} \tag{2.7}$$

па (2.5) важи и за $y = g(x)$. Коначно, за све $\|x - a\| < \delta$ је

$$\begin{aligned}
&\|(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a) - f'(g(a))g'(a)(x - a)\| = \|(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a) \\
&- f'(g(a))g'(a)(x - a) + f'(g(a))(g(x) - g(a)) - f'(g(a))(g(x) - g(a))\| \\
&\leqslant \|f(g(x)) - f(g(a)) - f'(g(a))(g(x) - g(a))\| + \|f'(g(a))(g(x) - g(a) - g'(a)(x - a))\| \\
&\leqslant \|f(g(x)) - f(g(a)) - f'(g(a))(g(x) - g(a))\| + \|f'(g(a))\|\|g(x) - g(a) - g'(a)(x - a)\| \\
&\leqslant \eta\|g(x) - g(a)\| + \eta\|f'(g(a))\|\|x - a\| \text{ према (2.5) и (2.6)} \\
&\leqslant \eta(\eta + \|g'(a)\|)\|x - a\| + \eta\|f'(g(a))\|\|x - a\| \text{ према (2.7)} \\
&\leqslant \eta\|x - a\|(\eta + \|g'(a)\| + \|f'(g(a))\|) < \eta(\sqrt{\varepsilon} + \|g'(a)\| + \|f'(g(a))\|)\|x - a\| \\
&= \varepsilon\|x - a\|,
\end{aligned} \tag{2.8}$$

односно

$$\frac{\|(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a) - f'(g(a))g'(a)(x - a)\|}{\|x - a\|} < \varepsilon \text{ за све } 0 < \|x - a\| < \delta.$$

Како је $\varepsilon > 0$ било произвољно, то је задовољен услов (2.1) за функцију $f \circ g$ у тачки a ако узмемо $A \overset{\text{деф}}{=} f'(g(a))g'(a) \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Z})$, одакле због јединствености изводног пресликавања следи тврђење. □

Следећи став је последица претходне теореме и говори нам о линеарности диференцирања.

Став 2.3. ***Нека је*** $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ ***отворен скуп и нека су*** $f, g : \mathcal{U} \to \mathcal{Y}$ ***диференцијабилне у тачки*** $a \in \mathcal{U}$***. Тада је и пресликавање*** $\alpha f + \beta g$ ***диференцијабилно у*** a ***за све*** $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ***и важи***

$$(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a). \tag{2.9}$$

Доказ: Векторски простор $\mathcal{Y} \times \mathcal{Y}$ је и Банахов када се у њега уведе норма са

$$\|(y_1, y_2)\| \overset{\text{деф}}{=} \|y_1\| + \|y_2\|,$$

за свако $y_1, y_2 \in \mathcal{Y}$. Функција $G : \mathcal{U} \to \mathcal{Y} \times \mathcal{Y} \ : \ x \mapsto (f(x), g(x))$ је диференцијабилна у тачки a и извод јој је $G'(a) : \mathcal{X} \to \mathcal{Y} \times \mathcal{Y} \ : \ h \mapsto (f'(a)h, g'(a)h)$, јер је очигледно линеарно и ограничено због

$$\begin{aligned}\|G'(a)h\| &= \|f'(a)h\| + \|g'(a)h\| \leqslant \|f'(a)\|\|h\| + \|g'(a)\|\|h\| \\ &= (\|f'(a)\| + \|g'(a)\|)\|h\|.\end{aligned}$$

Одатле следи да је $\|G'(a)\| \leqslant \|f'(a)\| + \|g'(a)\|$, па важи

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to a} \frac{\|G(x) - G(a) - (f'(a)(x-a), g'(a)(x-a))\|}{\|x-a\|} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{\|(f(x) - f(a) - f'(a)(x-a), g(x) - g(a) - g'(a)(x-a))\|}{\|x-a\|} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{\|f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)\|}{\|x-a\|} + \lim_{x\to a} \frac{\|g(x) - g(a) - g'(a)(x-a)\|}{\|x-a\|} = 0.\end{aligned}$$

Пресликавање $A : \mathcal{Y} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{Y} \ : \ (y_1, y_2) \mapsto \alpha y_1 + \beta y_2$ је линеарно и ограничено због

$$\begin{aligned}\|A(y_1, y_2)\| &= \|\alpha y_1 + \beta y_2\| \leqslant |\alpha|\|y_1\| + |\beta|\|y_2\| \leqslant \max\{|\alpha|, |\beta|\}(\|y_1\| + \|y_2\|) \\ &= \max\{|\alpha|, |\beta|\}\|(y_1, y_2)\|,\end{aligned}$$

одакле следи да је $\|A\| \leqslant \max\{|\alpha|, |\beta|\}$ и A је диференцијабилно јер је линеарно и $A'(y_1, y_2) = A$. Важи да је $(A \circ G)(x) = A(f(x), g(x)) = \alpha f(x) + \beta g(x)$, тј. $A \circ G = \alpha f + \beta g$. Према претходној теореми имамо да важи

$$\begin{aligned}(\alpha f + \beta g)'(a)h &= (A \circ G)'(a)h = A'(G(a))G'(a)h = AG'(a)h = A(f'(a)h, g'(a)h) \\ &= \alpha f'(a)h + \beta g'(a)h = (\alpha f'(a) + \beta g'(a))h,\end{aligned}$$

чиме је тврђење доказано. □

Дефиниција 2.3. ***Банахова алгебра*** *је Банахов простор $\mathcal{X}$ над пољем $\mathbb{C}$, са додатном операцијом множења $\cdot : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, која има следеће особине:*

1° $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \ (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z, \ \lambda(x \cdot y) = (\lambda x) \cdot y$

2° $\|x \cdot y\| \leqslant \|x\|\|y\|$,

за све $x, y, z \in \mathcal{X}$ и $\lambda \in \mathbb{C}$. Ако у Банаховој алгебри постоји јединични елемент, онда је зовемо ***унитална***.

Лако се види да је фамилија ограничених линеарних оператора $\mathcal{B}(\mathcal{X})$, на Банаховом простору $\mathcal{X}$, једна Банахова алгебра, где је операција множења композиција линеарних пресликавања.

Теорема 2.4. ***Нека је $\mathcal{X}$ Банахов простор, $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ отворен скуп, $\mathcal{Y}$ Банахова алгебра и нека су $f, g : \mathcal{U} \to \mathcal{Y}$ диференцијабилне функције у тачки $a \in \mathcal{U}$. Тада важи***

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a), \tag{2.10}$$

па за све $h \in \mathcal{X}$ важи $(f \cdot g)'(a)h = f'(a)h \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)h$.

Доказ: Приметимо прво да је

$$
\begin{aligned}
(f\cdot g)(a+h)-(f\cdot g)(a) &= f(a+h)\cdot g(a+h)+f(a)\cdot g(a)\\
&= f(a+h)\cdot g(a+h)+f(a)\cdot g(a)-f(a)\cdot g(a+h)\\
&+ f(a)\cdot g(a+h)\\
&= (f(a+h)-f(a))\cdot g(a+h)+f(a)\cdot(g(a+h)-g(a))\\
&= (f'(a)h+o(h))\cdot g(a+h)+f(a)\cdot(g'(a)h+o(h))\\
&= f'(a)h\cdot g(a+h)+o(h)\cdot g(a+h)+f(a)\cdot g'(a)h+f(a)\cdot o(h),
\end{aligned}
$$

одакле је

$$(f\cdot g)(a+h)-(f\cdot g)(a)-f'(a)h\cdot g(a)-f(a)\cdot g'(a)h = o(h)\cdot g(a+h)+f(a)\cdot o(h).$$

Дакле, имамо да је

$$
\begin{aligned}
&\frac{\|(f\cdot g)(a+h)-(f\cdot g)(a)-f'(a)h\cdot g(a)-f(a)\cdot g'(a)h\|}{\|h\|}=\frac{\|o(h)\cdot g(a+h)+f(a)\cdot o(h)\|}{\|h\|}\\
&\leqslant \frac{\|o(h)\|\|g(a+h)\|+\|f(a)\|\|o(h)\|}{\|h\|}=\frac{\|o(h)\|}{\|h\|}\|g(a+h)\|+\|f(a)\|\frac{\|o(h)\|}{\|h\|}\to 0,\ h\to 0,
\end{aligned}
$$

јер $\frac{\|o(h)\|}{\|h\|}\to 0,\ h\to 0$ због диференцијабилности функција f,g у тачки a, а самим тим и непрекидности g у a. Тиме је доказ завршен. $\square$

Користећи особину производа у Банаховој алгебри $\|a\cdot b\|\leqslant\|a\|\|b\|$, директно се показује следећа

Лема 2.5. ***Нека је $\mathcal{U}\subset\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ Банахова алгебра и $f:\mathcal{U}\to\mathcal{Y}$ диференцијабилно пресликавање у тачки $a\in\mathcal{U}$ и нека је $b\in\mathcal{Y}$ произвољно. Тада је диференцијабилно и пресликавање***

$$b\cdot f:\mathcal{U}\to\mathcal{Y}\ :\ x\mapsto b\cdot f(x),$$

и важи

$$(b\cdot f)'(a)=b\cdot f'(a). \tag{2.11}$$

У наставку излагања требаће нам следећа

Лема 2.6. ***Нека је $\mathcal{X}$ Банахов простор и $f:\mathcal{U}\to\mathcal{U}$ пресликавање дато са***

$$f(A)\overset{\text{деф}}{=}A^{-1},$$

где је $\mathcal{U}\overset{\text{деф}}{=}\Big\{A\in\mathcal{B}(\mathcal{X}):$ постоји A^{-1} и $A^{-1}\in\mathcal{B}(\mathcal{X})\Big\}$. Тада је f јако диференцијабилно у свакој тачки $A\in\mathcal{U}$ и за свако $H\in\mathcal{B}(\mathcal{X})$ важи

$$f'(A)H=-A^{-1}HA^{-1}. \tag{2.12}$$

Доказ: Докажимо прво да је скуп $\mathcal{U}$ отворен у $\mathfrak{B}(\mathcal{X})$. Довољно је доказати да за сваки $A \in \mathcal{U}$, $A+H \in \mathcal{U}$ за све $H \in \mathfrak{B}(\mathcal{X})$ са довољно малом нормом. Ако је $\|H\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ имамо да је $A+H = A(I+A^{-1}H)$, а како је A инвертибилан и $\|A^{-1}H\| \leqslant \|A^{-1}\|\|H\| < 1$ то следи и да је $I + A^{-1}H$ инвертибилан, па је и $A + H$ инвертибилан као производ два инвертибилна оператора. Нека је сада $H \in \mathfrak{B}(\mathcal{X})$ такав да $H \to 0$. Имамо да је

$$\begin{aligned}(A+H)^{-1} - A^{-1} + A^{-1}HA^{-1} &= -(A+H)^{-1}HA^{-1} + A^{-1}HA^{-1} \\ &= (-(A+H)^{-1} + A^{-1})HA^{-1} = ((A+H)^{-1}HA^{-1})HA^{-1} \\ &= (A+H)^{-1}(HA^{-1})^2 = (I+A^{-1}H)^{-1}A^{-1}(HA^{-1})^2,\end{aligned}$$

одакле имамо да је

$$\begin{aligned}\frac{\|(A+H)^{-1} - A^{-1} + A^{-1}HA^{-1}\|}{\|H\|} &= \frac{\|(I+A^{-1}H)^{-1}A^{-1}(HA^{-1})^2\|}{\|H\|} \\ &\leqslant \frac{\|(I+A^{-1}H)^{-1}\|\|A^{-1}\|^3\|H\|^2}{\|H\|} \\ &\leqslant \frac{\|A^{-1}\|^3\|H\|}{1-\|A^{-1}H\|} \leqslant \frac{\|A^{-1}\|^3\|H\|}{1-\|A^{-1}\|\|H\|},\end{aligned}$$

одакле видимо да је

$$\lim_{H\to 0} \frac{\|(A+H)^{-1} - A^{-1} + A^{-1}HA^{-1}\|}{\|H\|} = 0,$$

што значи да је $f'(A)H = -A^{-1}HA^{-1}$. У доказу смо користили идентитет

$$(A+H)^{-1} - A^{-1} = -(A+H)^{-1}HA^{-1},$$

као и процену (1.2). □

2 Холоморфне функције и J^*-алгебре

У овој секцији разматрамо холоморфна пресликавања на Банаховим просторима и J^*-алгебре.

Дефиниција 2.4. *Нека су $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ комплексни нормирани векторски простори и нека је $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ отворен. Функција $f : \mathcal{U} \to \mathcal{Y}$ је* ***холоморфна*** *(на $\mathcal{U}$), ако је f Фреше диференцијабилна у свакој тачки x скупа $\mathcal{U}$.*

Дефиниција 2.5. *Ако је $\mathcal{V} \subset \mathcal{Y}$ отворен, кажемо да је $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$* ***бихоломорфно пресликавање*** *($\mathcal{U}$ на $\mathcal{V}$) ако постоји $f^{-1} : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ и оба пресликавања f и f^{-1} су холоморфна. Кажемо да су скупови $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$* ***холоморфно еквивалентни*** *ако постоји бихоломорфно пресликавање $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$.*

Дефиниција 2.6. *Област $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ је* ***хомогена*** *ако за сваки пар тачака $x, y \in \mathcal{U}$ постоји бихоломорфно пресликавање $f : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ за које важи $f(x) = y$. Област $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ је* ***симетрична*** *ако за свако $x \in \mathcal{U}$ постоји бихоломорфно пресликавање $f : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$, $f^2 = \mathbb{1}_{\mathcal{U}}$ такво да је x јединa фиксна тачка за f, тј. $f(x) = x$.*

Надаље, отворену (затворену) јединичну лопту у комплексном нормираном простору $\mathcal{X}$ означаваћемо са $\mathbb{B}_{\mathcal{X}}$ ($\overline{\mathbb{B}}_{\mathcal{X}}$). Дакле, $\mathbb{B}_{\mathcal{X}} \overset{\text{деф}}{=} \{x \in \mathcal{X} : \|x\| < 1\}$, $\overline{\mathbb{B}}_{\mathcal{X}} \overset{\text{деф}}{=} \{x \in \mathcal{X} : \|x\| \leqslant 1\}$.

Теорема 2.7. ***Нека су $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ комплексни нормирани простори и нека је $h : \mathbb{B}_{\mathcal{X}} \to \overline{\mathbb{B}}_{\mathcal{Y}}$ холоморфна функција. Ако је $h'(0)$ изометрички изоморфизам $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$, онда је h линеарно пресликавање. Штавише, h је рестрикција од $h'(0)$ на $\mathbb{B}_{\mathcal{X}}$.***

Теорема 2.8. ***Ако је $f : \mathbb{B}_{\mathcal{X}} \to \mathbb{B}_{\mathcal{Y}}$ бихоломорфно пресликавање и $f(0) = 0$, онда је f рестрикција линеарне изометрије $\mathcal{X}$ на $\mathcal{Y}$, тј. постоји линеарно пресликавање $h : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ које је изометрија, такво да је $h|_{\mathbb{B}_{\mathcal{X}}} = f$.***

Докази претходне две теореме се могу видети у [4]. Наведимо сада једну последицу претходне теореме.

Последица 2.9. ***Претпоставимо да је $\mathbb{B}_{\mathcal{X}}$ хомогена област. Тада $\mathbb{B}_{\mathcal{X}}$ и $\mathbb{B}_{\mathcal{Y}}$ су холоморфно еквивалентне области ако и само ако су простори $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ изометрички изоморфни.***

Доказ: Претпоставимо да су $\mathbb{B}_{\mathcal{X}}$ и $\mathbb{B}_{\mathcal{Y}}$ холоморфно еквивалентне. То значи да постоји $f : \mathbb{B}_{\mathcal{X}} \to \mathbb{B}_{\mathcal{Y}}$ бихоломорфно. Како $0 \in \mathbb{B}_{\mathcal{Y}}$ то значи да постоји $x_0 \in \mathbb{B}_{\mathcal{X}}$ тако да је $f(x_0) = 0$. Из претпоставке, $\mathbb{B}_{\mathcal{X}}$ је хомогена област па ако узмемо за пар тачака $(0, x_0)$ то значи да постоји бихоломорфна функција $g : \mathbb{B}_{\mathcal{X}} \to \mathbb{B}_{\mathcal{X}}$ таква да је $g(0) = x_0$. Нека је сада $F : \mathbb{B}_{\mathcal{X}} \to \mathbb{B}_{\mathcal{Y}}$ дато са $F(x) = (f \circ g)(x)$. Тада је F бихоломорфно као композиција таквих и важи $F(0) = f(g(0)) = f(x_0) = 0$, па према претходној теореми постоји нека линеарна изометрија $h : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ таква да је F рестрикција од h на $\mathbb{B}_{\mathcal{X}}$. Обрнуто, нека су $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ изометрички изоморфни. То значи да постоји изометрија $h : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ која је линеарна. Изометрија h има извод у свакој тачки $x \in \mathcal{X}$ јер је линеарна и важи $h'(x) = h$ и извод је свакако ограничен, јер је $\|h\| = 1$. Дакле, $h|_{\mathbb{B}_{\mathcal{X}}} : \mathbb{B}_{\mathcal{X}} \to \mathbb{B}_{\mathcal{Y}}$ је тражено бихоломорфно пресликавање, јер је инверз од h такође линеарна изометрија, па има извод у свакој тачки. □

Приметимо, ако је $\mathbb{B}_{\mathcal{X}}$ хомогена област тада је $\mathbb{B}_{\mathcal{X}}$ симетрична област. Заиста, за дато $x \in \mathbb{B}_{\mathcal{X}}$ постоји $g : \mathbb{B}_{\mathcal{X}} \to \mathbb{B}_{\mathcal{X}}$ бихоломорфно са $g(x) = 0$. Дефинишимо

$$f \coloneqq g^{-1} \circ L \circ g,$$

где је $L : \mathbb{B}_{\mathcal{X}} \to \mathbb{B}_{\mathcal{X}}$ дато са $Lx = -x$, за $x \in \mathbb{B}_{\mathcal{X}}$. Лако је видети да f задовољава својства која су потребна:

1. f је бихоломорфно као композиција таквих, јер су g, g^{-1} и L као линеарно, бихоломорфне функције,

2. $f(x) = g^{-1}(L(g(x))) = g^{-1}(L(0)) = g^{-1}(0) = x$ одакле следи да је x фиксна тачка за f. Ако би било $f(y) = y$ за још неко $y \in \mathbb{B}_{\mathcal{X}}$, важило би $y = f(y) = g^{-1}(-g(y))$, па би одатле било $g(y) = g(g^{-1}(-g(y))) = -g(y)$, односно $g(y) = 0$. Како је и $g(x) = 0$ мора бити $x = y$ јер је g инјективно. Дакле, x је једина фиксна тачка за f,

3. $f^2 = g^{-1} \circ L \circ g \circ g^{-1} \circ L \circ g = g^{-1} \circ L \circ L \circ g = g^{-1} \circ g = \mathbb{1}_{\mathbb{B}_{\mathcal{X}}}$, јер је $L^2 = \mathbb{1}_{\mathbb{B}_{\mathcal{X}}}$.

Дакле, по дефиницији, $\mathbb{B}_{\mathcal{X}}$ тада јесте симетрична област.

Дефиниција 2.7. *J^*-**алгебра** је затворени комплексни векторски потпростор $\mathfrak{A}$ од $\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$, такав да $AA^*A \in \mathfrak{A}$, кад год $A \in \mathfrak{A}$, где су $\mathcal{H}$ и $\mathcal{K}$ Хилбертови простори.*

Пример 2.1. Ако су C, D самоадјунговани оператори у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ и $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ респективно, онда је

$$\mathfrak{A} \overset{\text{деф}}{=} \big\{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K}) : AC = DA\big\},$$

једна J^*-алгебра.

Заиста, ако је $A \in \mathfrak{A}$, онда је $AC = DA$, па је $AA^*A \in \mathfrak{A}$ ако и само ако је $AA^*AC = DAA^*A$.

$$\begin{aligned} AA^*AC &= AA^*DA = AA^*D^*A = A(DA)^*A \\ &= A(AC)^*A = AC^*A^*A = ACA^*A = DAA^*A, \end{aligned}$$

чиме је доказано да је $\mathfrak{A}$ једна J^*-алгебра.

Ако су $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ J^*-алгебре, онда се и њихов производ $\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}$ такође може учинити J^*-алгебром на природан начин. Тако, ако су $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ потпростори од $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$ и $\mathcal{B}(\mathcal{H}_3,\mathcal{H}_4)$ респективно, дефинишемо

$$\mathfrak{A}\times\mathfrak{B} \overset{\text{деф}}{=} \big\{(A,B) : A \in \mathfrak{A}, B \in \mathfrak{B}\big\},$$

где је (A,B) оператор из Хилбертовог простора $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ у Хилбертов простор $\mathcal{H}_3 \times \mathcal{H}_4$ дат са $(A,B)(x,y) \overset{\text{деф}}{=} (Ax, By)$. Тада из $(A,B) \in \mathfrak{A}\times\mathfrak{B}$ следи да је $(A,B)(A,B)^*(A,B) = (AA^*A, BB^*B) \in \mathfrak{A}\times\mathfrak{B}$, јер $AA^*A \in \mathfrak{A}$ и $BB^*B \in \mathfrak{B}$. J^*-алгебре имају одређене симетрије у себи што нам говори следећи

Став 2.10. ***Нека*** $A, B, C \in \mathfrak{A}$ ***и нека је*** p ***неки комӣлексан ӣолином. Тада важи:***

1° $AB^*C + CB^*A \in \mathfrak{A}$,

2° $A(B^*A)^n = (AB^*)^n A \in \mathfrak{A}$,

3° $p(AB^*)C + Cp(B^*A) \in \mathfrak{A}$,

4° $p(AB^*)Cp(B^*A) \in \mathfrak{A}$.

Доказ:

1° Следи из идентитета

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{3}(-1)^k(B+i^kA)(B+i^kA)^*(B+i^kA) = \sum_{k=0}^{3} i^{2k}(B+i^kA)(B+i^kA)^*(B+i^kA) \\ &= \sum_{k=0}^{3} i^{2k}(B+i^kA)(B^*B + A^*A + i^kB^*A + i^{-k}A^*B) \\ &= A\sum_{k=0}^{3} i^{3k}(A^*A + B^*B + i^kB^*A + i^{-k}A^*B) + B\sum_{k=0}^{3} i^{2k}(A^*A + B^*B + i^kB^*A + i^{-k}A^*B) \\ &= A\sum_{k=0}^{3}(i^{2k}A^*B + B^*A) + B\sum_{k=0}^{3}(i^kA^*B + i^{3k}B^*A) = 4AB^*A \text{ и} \end{aligned}$$

$$AB^*C + CB^*A = (A+C)B^*(A+C) - AB^*A - CB^*C.$$

2° Следи из идентитета

$$A(B^*A)^n = A(B(A^*B)^{n-1})^*A,$$

који се директно проверава и 1°, док је једнакост $A(B^*A)^n = (AB^*)^n A$ очигледна.

3° Да би ово доказали довољно је уочити да оператор

$$(AB^*)^n C + C(B^*A)^n = A((BA^*)^{n-1}B)^*C + C(B(A^*B)^{n-1})^*A$$

припада $\mathfrak{A}$ према 1° и 2°, па самим тим тврђење важи и за сваки полином p, јер је $p(AB^*)$ заправо линеарна комбинација оператора облика $(AB^*)^k$.

4° Ово следи из дела 3° и идентитета

$$\begin{aligned} p(AB^*)Cp(B^*A) &= p(AB^*)\big(p(AB^*)C + Cp(B^*A)\big) \\ &\quad + \big(p(AB^*)C + Cp(B^*A)\big)p(B^*A) - \big(p^2(AB^*)C + Cp^2(B^*A)\big). \end{aligned}$$

□

Дефиниција 2.8. *За пресликавање $L : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ кажемо да је* ***J^*-изоморфизам*** *ако је L ограничена линеарна бијекција која за све $A \in \mathfrak{A}$ задовољава*

$$L(AA^*A) = L(A)L(A)^*L(A). \tag{2.13}$$

Приметимо да из идентитета доказаних у Ставу 2.10 директно следи да за произвољно линеарно пресликавање $L : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ које задовољава (2.13) важе аналози формула $1^\circ - 4^\circ$ тог става, тј. :

1° $L(AB^*C + CB^*A) = L(A)L(B)^*L(C) + L(C)L(B)^*L(A)$,

2° $L(A(B^*A)^n) = L(A)(L(B)^*L(A))^n$,

3° $L\big(p(AB^*)C + Cp(B^*A)\big) = p\big(L(A)L(B)^*\big)L(C) + L(C)p\big(L(B)^*L(A)\big)$,

4° $L\big(p(AB^*)Cp(B^*A)\big) = p\big(L(A)L(B)^*\big)L(C)p\big(L(B)^*L(A)\big)$.

3 Мебијусова трансформација и Јулијин оператор

Из комплексне анализе нам је познато да за одређене вредности параметара $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, Мебијусова трансформација

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

пресликава јединични диск у себе. Ако су сада A, B, C, D и X оператори из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ такви да је оператор $CX + D$ инвертибилан, тада вођени мотивацијом из комплексне анализе можемо посматрати аналогна оператор-вредносна пресликавања

$$X \mapsto (AX+B)(CX+D)^{-1}$$

или

$$X \mapsto (CX+D)^{-1}(AX+B).$$

Ипак, због генералног изостанка комутативности, горње комбинације пресликавања не морају да дају исте резултате. Због тога је пожељно потражити нека измењена пресликавања оператора, која би могла послужити као алтернатива Мебијусове трансформације. На пример, можемо за одговарајуће $a', b' \in \mathbb{C}$ написати

$$\frac{az+b}{cz+d} = a' + \frac{b'z}{cz+d},$$

као и многе друге комбинације. То нас наводи да посматрамо, на пример, пресликавање

$$X \mapsto B - AX(I+CX)^{-1}D,$$

за дате операторе A, B, C, D из $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Наш циљ је да пронађемо такву комбинацију која ће јединичну лопту у $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ да пресликава у себе, тј. контракције да трансформише у контракције. Нека је T унитаран оператор на $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$, тј. $TT^* = T^*T = I$. Тада оператор T можемо написати у матричној форми као

$$T = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} : \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_3 \oplus \mathcal{H}_4,$$

где су A, B, C, D оператори који су дефинисани на одговарајућим просторима.

Дефиниција 2.9. *Ако су* $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_3)$, $B \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)$, $C \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_4)$, $D \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_4)$ *и* $X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ *оператори такви да је оператор* $T = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ *унитаран, тада пресликавање*

$$\Psi_T(X) := B - AX(I+CX)^{-1}D, \tag{2.14}$$

дефинисано на скупу $\Big\{X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1) : I + CX \text{ је инвертибилан у } \mathfrak{B}(\mathcal{H}_2)\Big\}$ *називамо* ***оператор-вредносна (о.в.) Мебијусова трансформација****.*

Из дефиниције домена о.в. Мебијусове трансформације видимо да он садржи све строге контракције, $\|X\| < 1$, а ако је $\|C\| < 1$, онда садржи све контракције. Заиста, T је унитаран оператор, а тиме и контракција, па су тако и A, B, C, D све контракције. Ако је $\|X\| < 1$, имамо $\|CX\| \leqslant \|C\|\|X\| \leqslant 1\|X\| < 1$, одатле према Ставу 1.6 следи да је оператор $I + CX = I - (-CX)$ инвертибилан, што значи да X припада домену о.в. Мебијусове трансформације, тј. отворена јединична лопта је подскуп домена. Слично важи и када је C строга контракција. Важну особину оператора $\Psi_T(X)$ даје следећа

Лема 2.11. ***Нека је*** $T = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} : \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_3 \oplus \mathcal{H}_4$ ***унитаран оператор. Тада за сваки*** X ***из домена*** Ψ_T ***важи***

$$I - \Psi_T(X)^*\Psi_T(X) = D^*(I + X^*C^*)^{-1}(I - X^*X)(I+CX)^{-1}D. \tag{2.15}$$

Доказ: Из претпоставке да је $T^*T = I$ имамо

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^* & C^* \\ B^* & D^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^*A + C^*C & A^*B + C^*D \\ B^*A + D^*C & B^*B + D^*D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

што је еквивалентно са

$$A^*A + C^*C = I, A^*B + C^*D = 0, B^*A + D^*C = 0, B^*B + D^*D = I.$$

Користећи горње релације и ако уведемо $E = (I + CX)^{-1}D$ добијамо

$$\begin{aligned}
I - \Psi_T(X)^*\Psi_T(X) &= I - (B - AX(I + CX)^{-1}D)^*(B - AX(I + CX)^{-1}D) \\
&= I - (B^* - D^*(I + X^*C^*)^{-1}X^*A^*)(B - AX(I + CX)^{-1}D) \\
&= (I - B^*B) + D^*(I + X^*C^*)^{-1}X^*A^*B + B^*AX(I + CX)^{-1}D \\
&- D^*(I + X^*C^*)^{-1}X^*A^*AX(I + CX)^{-1}D \\
&= D^*D - D^*(I + X^*C^*)^{-1}X^*C^*D - D^*CX(I + CX)^{-1}D \\
&- D^*(I + X^*C^*)^{-1}X^*A^*AX(I + CX)^{-1}D \\
&= E^*((I + X^*C^*)(I + CX) - X^*C^*(I + CX) \\
&- (I + X^*C^*)CX - X^*A^*AX)E \\
&= E^*(I - X^*(A^*A + C^*C)X)E = E^*(I - X^*X)E.
\end{aligned}$$

□

Слично се показује да важи

$$I - \Psi_T(X)\Psi_T(X)^* = F(I - XX^*)F^*, \tag{2.16}$$

где је $F = A(I + XC)^{-1}$. Приметимо да смо у доказу претходне леме користили инвертибилност оператора $I + CX$, док би нам у (2.16) било потребно да је $I + XC$ инвертибилан. Међутим, то је увек случај кад год је $I + CX$ инвертибилан, јер се директно проверава да је $I - X(I + CX)^{-1}C$ инверз од $I + XC$.

Претходни став нам омогућава да покажемо да важи следећа

Теорема 2.12. ***Ако је X из домена Ψ_T, а X је контракција, онда је и $\Psi_T(X)$ контракција.***

Доказ: Према Ставу 1.9 произилази да је $I - X^*X \geqslant 0$. Како је тада и $E^*(I - X^*X)E \geqslant 0$, на основу Става 1.7 део 4°, то је према претходној леми и $I - \Psi_T(X)^*\Psi_T(X) \geqslant 0$, што је, опет према Ставу 1.9, еквивалентно са тим да је $\Psi_T(X)$ контракција. □

Ефектну употребу претходне теореме омогућава нам Јулијина трансформација, која даје примере унитарних оператора на $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$.

Дефиниција 2.10. *Ако је $B : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ дата контракција, тада је њој придружен* ***Јулијин оператор****, у ознаци $J(B) \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2)$, дефинисан са*

$$J(B) \overset{\text{деф}}{=} \begin{bmatrix} D_{B^*} & B \\ -B^* & D_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{I - BB^*} & B \\ -B^* & \sqrt{I - B^*B} \end{bmatrix}. \tag{2.17}$$

Основно својство Јулијиног оператора $J(B)$ даје следећа

Теорема 2.13. ***Нека је $B : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ контракција. Тада је $J(B)$ унитаран оператор на $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$.***

Доказ: Према Ставу 1.4 треба показати да је $J(B)J(B)^* = J(B)^*J(B) = I$. Имамо

$$\begin{aligned}
J(B)^*J(B) &= \begin{bmatrix} D_{B^*} & B \\ -B^* & D_B \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} D_{B^*} & B \\ -B^* & D_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{B^*} & -B \\ B^* & D_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{B^*} & B \\ -B^* & D_B \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} D_{B^*}^2 + BB^* & D_{B^*}B - BD_B \\ B^*D_{B^*} - D_BB^* & B^*B + D_B^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

јер је $BD_B = D_{B^*}B$ за контракцију B, односно $D_B B^* = B^* D_{B^*}$ према (1.5) односно (1.6), као и $D_{B^*}^2 + BB^* = \sqrt{I - BB^*}^2 + BB^* = I$ и слично $B^*B + D_B^2 = I$. Аналогно се доказује да је $J(B)J(B)^* = I$. $\square$

Знајући сада да је $J(B)$ унитаран оператор на $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$, из Теореме 2.12 следи непосредна

Последица 2.14. ***Нека је*** $B : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ ***контракција таква да је оператор*** $I - B^*X$ ***инвертибилан у*** $\mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$***. Тада је***

$$\Psi_{J(B)}(X) = B - D_{B^*}X(I - B^*X)^{-1}D_B$$

такође контракција на $\mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$***.***

Доказ: Према Теореми 2.13 $J(B)$ је унитаран, па је према Теореми 2.12 $\Psi_{J(B)}(X)$ контракција. $\square$

Сада смо у могућности да докажемо да питање комплетирања 2×2 операторне контракције има потврдан одговор.

Теорема 2.15. ***Нека су***

$$\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_3 \oplus \mathcal{H}_4 \ \ \textit{и} \ \ \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} : \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_4$$

контракције. Тада постоји оператор $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_3)$ ***такав да је***

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} : \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_3 \oplus \mathcal{H}_4$$

контракција.

Доказ: Како су $\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix}$ контракције, то према Ставу 1.20 и Ставу 1.21 имамо да постоје контракције $E : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_3$ и $F : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_4$ такве да је $B = ED_D$ и $C = D_{D^*}F$. Посматрајмо сада операторе $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & E \\ F & 0 \end{bmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -D \end{bmatrix}$ из $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3 \oplus \mathcal{H}_4)$. Имамо да је

$$\begin{aligned}\mathbf{I} - \mathbf{X}^*\mathbf{X} &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & E \\ F & 0 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 0 & E \\ F & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & F^* \\ E^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & E \\ F & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I - F^*F & 0 \\ 0 & I - E^*E \end{bmatrix},\end{aligned}$$

$$\mathbf{I} - \mathbf{B}^*\mathbf{B} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -D \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -D^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I - D^*D \end{bmatrix}.$$

Како су E, F и D контракције закључујемо да важи

$$\langle (\mathbf{I} - \mathbf{X}^*\mathbf{X})(h_1, h_2), (h_1, h_2) \rangle = \langle (I - F^*F)h_1, h_1 \rangle + \langle (I - E^*E)h_2, h_2 \rangle \geqslant 0,$$

за све $(h_1, h_2) \in \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$, па је и $\mathbf{X}$ контракција. Потпуно аналогно закључујемо да је $\mathbf{B}$ контракција. Штавише,

$$\mathbf{I} - \mathbf{B}^*\mathbf{X} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -D \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 0 & E \\ F & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ D^*F & I \end{bmatrix}$$

је инвертибилан, а директно се проверава и да је

$$(\mathbf{I} - \mathbf{B}^*\mathbf{X})^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -D^*F & I \end{bmatrix}.$$

На основу Леме 2.14 следи да је $\Psi_{J(\mathbf{B})}(\mathbf{X})$ је контракција. Да израчунамо $\Psi_{J(\mathbf{B})}(\mathbf{X})$ приметимо да је

$$\sqrt{\mathbf{I} - \mathbf{B}\mathbf{B}^*} = D_{\mathbf{B}^*} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & D_{D^*} \end{bmatrix},$$

јер је $\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & D_{D^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & D_{D^*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & D_{D^*}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I - DD^* \end{bmatrix} = \mathbf{I} - \mathbf{B}\mathbf{B}^*$. Стога имамо да је

$$\begin{aligned}
\Psi_{J(\mathbf{B})}(\mathbf{X}) &= \mathbf{B} - D_{\mathbf{B}^*}\mathbf{X}(\mathbf{I} - \mathbf{B}^*\mathbf{X})^{-1}D_{\mathbf{B}} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -D \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & D_{D^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & E \\ F & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -D^*F & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & D_D \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -D \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & E \\ D_{D^*}F & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -D^*F & D_D \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -D \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -ED^*F & ED_D \\ D_{D^*}F & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ED^*F & -ED_D \\ -D_{D^*}F & -D \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ED^*F & -B \\ -C & -D \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -ED^*F & B \\ C & D \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

контракција. Ако за A узмемо оператор $-ED^*F$ и приметимо да је $-\Psi_{J(\mathbf{B})}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ такође контракција, добијамо тражени резултат. □

4 Потаповљева и Мебијусова трансформација на J^*-алгебрама

У овој секцији показаћемо да трансформација

$$\mathcal{T}_B(A) = (I - BB^*)^{-\frac{1}{2}}(A + B)(I + B^*A)^{-1}(I - B^*B)^{\frac{1}{2}},$$

пресликава отворену јединичну лопту у J^*-алгебри $\mathfrak{A}$ у себе саму, за фиксирано $B \in \mathbb{B}_{\mathfrak{A}}$, као и да задовољава сличне особине као и комплексни аутоморфизми диска, и неке последице и примене те трансформације. Ову трансформацију ћемо такође називати о.в. Мебијусовом трансформацијом.

Дефиниција 2.11. ***Потаповљева трансформација*** *на J^*-алгебри $\mathbb{B}_{\mathfrak{A}}$ је трансформација*

$$\mathcal{P}_B : \mathbb{B}_{\mathfrak{A}} \to \mathfrak{A}$$

дата са

$$\mathcal{P}_B(A) \stackrel{\text{деф}}{=} \mathcal{T}_B(-A),$$

за фиксирано $B \in \mathbb{B}_{\mathfrak{A}}$ и за свако $A \in \mathbb{B}_{\mathfrak{A}}$.

Теорема 2.16. ***За свако $B \in \mathbb{B}_{\mathfrak{A}}$, о.в. Мебијусова трансформација***

$$\mathcal{T}_B(A) = (I - BB^*)^{-\frac{1}{2}}(A + B)(I + B^*A)^{-1}(I - B^*B)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.18}$$

је бихоломорфно пресликавање $\mathbb{B}_{\mathfrak{A}}$ на себе са особином $\mathcal{T}_B(0) = B$. Штавише,

$$\mathcal{T}_B^{-1} = \mathcal{T}_{-B},\ \mathcal{T}_B(A)^* = \mathcal{T}_{B^*}(A^*),\ \|\mathcal{T}_B(A)\| \leqslant \mathcal{T}_{\|B\|}(\|A\|),\ \mathcal{P}_B^{-1} = \mathcal{P}_B$$

и

$$\mathcal{T}_B'(A)H = D_{B^*}(I + AB^*)^{-1}H(I + B^*A)^{-1}D_B,$$

за $A \in \mathbb{B}_{\mathfrak{A}}$ и $H \in \mathfrak{A}$.

Доказ: Како је

$$\begin{aligned}
&(A + B)(I + B^*A)^{-1} = A(I + B^*A)^{-1} + B(I + B^*A)^{-1} = B\sum_{n=0}^{\infty}(-B^*A)^n \\
&+ A(I + B^*A)^{-1} = B(I + \sum_{n=1}^{\infty}(-B^*A)^n) + A(I + B^*A)^{-1} = B + B\sum_{n=1}^{\infty}(-B^*A)^n \\
&+ A(I + B^*A)^{-1} = B - BB^*A\sum_{n=0}^{\infty}(-B^*A)^n + A(I + B^*A)^{-1} \\
&= B - BB^*A(I + B^*A)^{-1} + A(I + B^*A)^{-1} = B + (-BB^* + I)A(I + B^*A)^{-1} \\
&= B + (I - BB^*)A(I + B^*A)^{-1},
\end{aligned}$$

и како је $D_{B^*}B = BD_B$, имамо

$$\begin{aligned}
&\mathcal{T}_B(A) = (I - BB^*)^{-\frac{1}{2}}(A + B)(I + B^*A)^{-1}(I - B^*B)^{\frac{1}{2}} \\
&= (I - BB^*)^{-\frac{1}{2}}(B + (I - BB^*)A(I + B^*A)^{-1})(I - B^*B)^{\frac{1}{2}} = ((I - BB^*)^{-\frac{1}{2}}B \\
&+ (I - BB^*)^{-\frac{1}{2}}(I - BB^*)A(I + B^*A)^{-1})(I - B^*B)^{\frac{1}{2}} \\
&= D_{B^*}^{-1}BD_B + D_{B^*}A(I + B^*A)^{-1}D_B \\
&= D_{B^*}^{-1}D_{B^*}B + D_{B^*}A(I + B^*A)^{-1}D_B = B + D_{B^*}A(I + B^*A)^{-1}D_B.
\end{aligned}$$

Дакле

$$\mathcal{T}_B(A) = B + D_{B^*}A(I + B^*A)^{-1}D_B, \tag{2.19}$$

за све $A \in \mathbb{B}_{\mathfrak{A}}$. Како је

$$A\sum_{k=0}^{n}(-B^*A)^k \in \mathfrak{A},\ \text{из дела } 2^\circ \text{ Става } 2.10 \text{ и } A\sum_{k=0}^{n}(-B^*A)^k \to A(I + B^*A)^{-1}, n \to \infty,$$

а $\mathfrak{A}$ је затворен, то следи да $A(I+B^*A)^{-1} \in \mathfrak{A}$. Слично, $D_B A(I+B^*A)^{-1} D_{B^*} \in \mathfrak{A}$, па је $\mathcal{T}_B(\mathbb{B}_{\mathfrak{A}}) \subset \mathfrak{A}$. Диференцирањем израза (2.19) добијамо да је

$$\mathcal{T}_B'(A) = D_{B^*}(A(I+B^*A)^{-1})' D_B,$$

јер су B, D_B и D_{B^*} константе. Остаје да одредимо извод од $A(I+B^*A)$. За то ћемо користити извод производа, као и извод сложене функције. Заиста, ако је $f(A) = A$, $g(A) = I + B^*A$ и $h(A) = A^{-1}$, имамо да је $A(I+B^*A)^{-1} = f(A)h(g(A))$, па је

$$\begin{aligned}(A(I+B^*A)^{-1})'H &= f'(A)Hh(g(A)) + f(A)h'(g(A))g'(A)H \\ &= H(I+B^*A)^{-1} + A(-(I+B^*A)^{-1}B^*H(I+B^*A)^{-1}) \\ &= (I - A(I+B^*A)^{-1}B^*)H(I+B^*A)^{-1} \\ &= (I+AB^*)^{-1}H(I+B^*A)^{-1},\end{aligned}$$

јер је

$$\begin{aligned}&f'(A)H = H \\ &g'(A)H = B^*H \\ &h'(g(A))g'(A)H = -(I+B^*A)^{-1}B^*H(I+B^*A)^{-1}, \\ &I - A(I+B^*A)B^* = (I+AB^*)^{-1}.\end{aligned}$$

Овиме је доказано чему је једнак извод о.в. Мебијусове трансформације. Из (2.19) је јасно да је $\mathcal{T}_B(0) = B$, док је $\mathcal{T}_B(A)^* = \mathcal{T}_{B^*}(A^*)$ због

$$\begin{aligned}A^*(I+BA^*)^{-1} &= A^* \sum_{n=0}^{\infty} (-BA^*)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A^*(BA^*)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (A^*B)^n A^* \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-A^*B)^n A^* = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} (-A^*B)^n\Big) A^* = (I+A^*B)^{-1}A^*.\end{aligned}$$

Неједнакост $\|\mathcal{T}_B(A)\| \leqslant \mathcal{T}_{\|B\|}(\|A\|)$ ћемо извести из следећег идентитета

$$I - \mathcal{T}_B(A)^*\mathcal{T}_B(A) = D_B(I+A^*B)^{-1}(I-A^*A)(I+B^*A)^{-1}D_B, \tag{2.20}$$

који се доказује аналогно као (2.15) примењено на унитаран оператор

$$T = \begin{bmatrix} -D_{B^*} & B \\ B^* & D_B \end{bmatrix}.$$

Нека је $x \in \mathcal{H}$ и $y = (I+B^*A)^{-1}D_B x$. Примењујући (2.20) на x добијамо

$$\begin{aligned}&\langle (I - \mathcal{T}_B(A)^*\mathcal{T}_B(A))x, x\rangle = \langle (I - A^*A)y, y\rangle \geqslant (1 - \|A\|^2)\|y\|^2 \\ &\geqslant (1-\|A\|^2)(1+\|B\|\|A\|)^{-2}(1-\|B\|^2)\|x\|^2 = (1 - (\mathcal{T}_{\|B\|}(\|A\|))^2)\|x\|^2.\end{aligned}$$

Одатле је

$$\begin{aligned}&I - \mathcal{T}_B(A)^*\mathcal{T}_B(A) \geqslant (1 - (\mathcal{T}_{\|B\|}(\|A\|))^2)I \Longrightarrow \mathcal{T}_B(A)^*\mathcal{T}_B(A) \leqslant (\mathcal{T}_{\|B\|}(\|A\|))^2 I \\ &\Longrightarrow \|\mathcal{T}_B(A)^*\mathcal{T}_B(A)\| = \|\mathcal{T}_B(A)\|^2 \leqslant \mathcal{T}_{\|B\|}(\|A\|))^2 \Longrightarrow \|\mathcal{T}_B(A)\| \leqslant \mathcal{T}_{\|B\|}(\|A\|),\end{aligned}$$

јер је

$$\begin{aligned}&\langle (I - \mathcal{T}_B(A)^*\mathcal{T}_B(A))x, x\rangle \\ &= \langle D_B(I + A^*B)^{-1}(I - A^*A)(I + B^*A)^{-1}D_Bx, x\rangle \\ &= \langle D_B(I + A^*B)^{-1}(I - A^*A)y, x\rangle \\ &= \langle (I - A^*A)y, (D_B(I + A^*B)^{-1})^*x\rangle \\ &= \langle (I - A^*A)y, y\rangle,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle (I - A^*A)y, y\rangle &= \langle y, y\rangle - \langle A^*Ay, y\rangle \geqslant \|y\|^2 - \|A\|^2\|y\|^2 \\ &= (1 - \|A\|^2)\|y^2\|,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\|((I + B^*A)^{-1}D_B)^{-1}y\| = \|(I - B^*B)^{-\frac{1}{2}}(I + B^*A)y\| \\ &\leqslant \|(I - B^*B)^{-\frac{1}{2}}\|\|(I + B^*A)y\| \leqslant \sqrt{\|(I - B^*B)^{-1}\|}\|I + B^*A\|\|y\| \\ &\leqslant \sqrt{\frac{1}{1 - \|B^*B\|}}(1 + \|A\|\|B\|)\|y\| \\ &= \frac{1 + \|A\|\|B\|}{\sqrt{1 - \|B\|^2}}\|y\|,\end{aligned}$$

одакле видимо да је $\|((I + B^*A)^{-1}D_B)^{-1}\| \leqslant \frac{1+\|A\|\|B\|}{\sqrt{1-\|B\|^2}}$, па је $\|(I + B^*A)^{-1}D_B\| \geqslant \frac{\sqrt{1-\|B\|^2}}{1+\|A\|\|B\|}$, из чега следи да је

$$\|y\|^2 = \|(I + B^*A)^{-1}D_Bx\|^2 \geqslant \frac{1 - \|B\|^2}{(1 + \|A\|\|B\|)^2}\|x\|^2,$$

и коначно, за $a = \|A\|,\ b = \|B\|$ имамо

$$\begin{aligned}&\mathcal{T}_b(a) = (1 - b^2)^{-\frac{1}{2}}(a + b)(1 + ab)^{-1}(1 - b^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{a + b}{1 + ab} \\ &(\mathcal{T}_b(a))^2 = \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{(1 + ab)^2} \\ &1 - (\mathcal{T}_b(a))^2 = \frac{1 + a^2b^2 + 2ab - a^2 - b^2 - 2ab}{(1 + ab)^2} = \frac{1 - a^2 - b^2 + a^2b^2}{(1 + ab)^2} \\ &= \frac{(1 - a^2)(1 - b^2)}{(1 + ab)^2}.\end{aligned}$$

Даље, због $\mathcal{T}_{\|B\|}(\|A\|) = \frac{\|A\|+\|B\|}{1+\|A\|\|B\|} < 1$ јер $\|A\| < 1$ и $\|B\| < 1$ је $\mathcal{T}_B(\mathbb{B}_{\mathfrak{A}}) \subset \mathbb{B}_{\mathfrak{A}}$ и $\mathcal{T}_B$ је холоморфно у $\mathbb{B}_{\mathfrak{A}}$. Потпуно исто се доказује да је пресликавање $\mathcal{T}_{-B}$ холоморфно, па остаје још само да покажемо да је $\mathcal{T}_B^{-1} = \mathcal{T}_{-B}$, односно да је $h = \mathcal{T}_B \circ \mathcal{T}_{-B} = \mathbb{1}_{\mathbb{B}_{\mathfrak{A}}}$. Приметимо да је h холоморфна на $\mathbb{B}_{\mathfrak{A}}$ као композиција две холоморфне и важи $h'(0) = \mathcal{T}_B'(\mathcal{T}_{-B}(0))(\mathcal{T}_{-B}'(0)) = \mathbb{1}_{\mathfrak{A}}$, јер је

$$\begin{aligned}&\mathcal{T}_{-B}(A)H = D_{B^*}(I - AB^*)^{-1}H(I - B^*A)^{-1}D_B, \text{ па је} \\ &\mathcal{T}_B'(\mathcal{T}_{-B}(0))(\mathcal{T}_{-B}'(0))H = \mathcal{T}_B'(-B)D_{B^*}HD_B \\ &= D_{B^*}(I - BB^*)^{-1}D_{B^*}HD_B(I - B^*B)^{-1}D_B \\ &= H.\end{aligned}$$

Одатле је h рестрикција идентитете $\mathbb{1}_{\mathfrak{A}}$ на $\mathbb{B}_{\mathfrak{A}}$ према Теореми 2.7, јер је идентитета изометрички изоморфизам $\mathfrak{A}$ у себе самог. Слично се доказује да је $\mathcal{P}_B^{-1} = \mathcal{P}_B$. Тиме је тврђење доказано у потпуности. $\square$

Последица 2.17. ***Отворена јединична лопта $\mathbb{B}_{\mathfrak{A}}$ је хомогена и симетрична ограничена област у свакој J^*-алгебри $\mathfrak{A}$.***

Доказ: Нека су $X, Y \in \mathbb{B}_{\mathfrak{A}}$. Уочимо пресликавања $\mathcal{T}_{-X} : \mathbb{B}_{\mathfrak{A}} \to \mathbb{B}_{\mathfrak{A}}$ и $\mathcal{T}_Y : \mathbb{B}_{\mathfrak{A}} \to \mathbb{B}_{\mathfrak{A}}$. Тада је $\mathcal{T}_{-X}(X) = 0$ и $\mathcal{T}_Y(0) = Y$, па $\mathcal{T}_Y \circ \mathcal{T}_{-X} : \mathbb{B}_{\mathfrak{A}} \to \mathbb{B}_{\mathfrak{A}}$ и важи $(\mathcal{T}_Y \circ \mathcal{T}_{-X})(X) = \mathcal{T}_Y(0) = Y$ и $\mathcal{T}_Y \circ \mathcal{T}_{-X}$ је бихоломорфно као композиција два таква. Одатле следи да је $\mathfrak{A}$ хомогена област, а тиме и симетрична према примедби након Последице 2.9. $\square$

Теорема 2.18. ***Свако бихоломорфно пресликавање $h : \mathbb{B}_{\mathfrak{A}} \to \mathbb{B}_{\mathfrak{B}}$ је облика***

$$h = \mathcal{T}_{h(0)} \circ L|_{\mathbb{B}_{\mathfrak{A}}},$$

где је $L : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ сурјективна линеарна изометрија.

Доказ: Према Теореми 2.16 $\mathcal{T}_{h(0)}^{-1} \circ h : \mathbb{B}_{\mathfrak{A}} \to \mathbb{B}_{\mathfrak{B}}$ је бихоломорфно пресликавање са $(\mathcal{T}_{h(0)}^{-1} \circ h)(0) = \mathcal{T}_{h(0)}^{-1}(h(0)) = 0$, па по Теореми 2.8 постоји линеарна изометрија L која слика $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$ са особином $L|_{\mathbb{B}_{\mathfrak{A}}} = \mathcal{T}_{h(0)}^{-1} \circ h$, одакле следи да је $h = \mathcal{T}_{h(0)} \circ L|_{\mathbb{B}_{\mathfrak{A}}}$. $\square$

Да би добили експлицитну формулу за сва бихоломорфна пресликавања између две јединичне лопте у две J^*-алгебре, довољно је одредити експлицитно како изгледају све сурјективне линеарне изометрије између тих J^*-алгебри. Међутим, то је у општем случају тешко урадити. Али ако то имамо, онда важи следећа

Теорема 2.19. ***Ако је $L : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ сурјективна линеарна изометрија, онда је***

$$L(AB^*A) = L(A)L(B)^*L(A),$$

за све $A, B \in \mathfrak{A}$.

Доказ: Нека је $B \in \mathbb{B}_{\mathfrak{A}}$ и уочимо

$$h = \mathcal{T}_{-L(B)} \circ L \circ \mathcal{T}_B.$$

Према претпоставци теореме и особинама о.в. Мебијусове трансформације, имамо да је $h : \mathbb{B}_{\mathfrak{A}} \to \mathbb{B}_{\mathfrak{B}}$ бихоломорфно пресликавање са $h(0) = \mathcal{T}_{-L(B)}(L(\mathcal{T}_B(0))) = \mathcal{T}_{-L(B)}(L(B)) = 0$. Према Теореми 2.8, h је линеарно, па је зато $h'(X) = h$ за свако $X \in \mathfrak{A}$. Специјално, $h'(0) = h'(-B)$. Примењујући извод сложене функције на функцију h и користећи израз за извод о.в. Мебијусове трансформације, имамо да је са једне стране

$$\begin{aligned}
h'(0)H &= \mathcal{T}'_{-L(B)}(L(\mathcal{T}_B(0)))L'(\mathcal{T}_B(0))\mathcal{T}'_B(0)H = \mathcal{T}'_{-L(B)}(L(\mathcal{T}_B(0)))L(D_{B^*}HD_B) \\
&= \mathcal{T}'_{-L(B)}(L(B))LD_{B^*}HD_B \\
&= D_{L(B)^*}(I - L(B)L(B)^*)^{-1}L(D_{B^*}HD_B)(I - L(B)^*L(B))^{-1}D_{L(B)} \\
&= D_{L(B)^*}^{-\frac{1}{2}}L(D_{B^*}HD_B)D_{L(B)}^{-\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

а са друге стране је

$$\begin{aligned} h'(-B)H &= \mathcal{T}'_{-L(B)}(L(\mathcal{T}_B(-B)))L'(\mathcal{T}_B(-B))\mathcal{T}'_B(-B) \\ &= \mathcal{T}'_{-L(B)}(0)L(D_{B^*}(I-BB^*)^{-1}H(I-B^*B)^{-1}D_B) \\ &= \mathcal{T}'_{-L(B)}(0)L(D_{B^*}^{-1}HD_B^{-1}) = \\ &= D_{L(B)^*}L(D_{B^*}^{-1}HD_B^{-1})D_{L(B)}, \end{aligned}$$

за свако $H \in \mathfrak{A}$, где смо искористили да је

$$\mathcal{T}'_{-B}(A)H = D_{B^*}(I-AB^*)^{-1}H(I-B^*A)^{-1}D_B.$$

Ако узмемо $H = A$ и искористимо чињеницу да је $h'(0)A = h'(-B)A$ добијамо

$$L(D_{B^*}AD_B) = D^2_{L(B)^*}L(D_{B^*}^{-1}AD_B^{-1})D^2_{L(B)},$$

па зато имамо

$$\begin{aligned} L((I-BB^*)A(I-B^*B)) &= L(D_{B^*}D_{B^*}AD_BD_B) = D_{L(B)^*}L(D_{B^*}^{-1}D_{B^*}AD_BD_B^{-1})D_{L(B)} \\ &= (I-L(B)L(B)^*)L(A)(I-L(B)^*L(B)), \end{aligned} \tag{2.21}$$

где су сви оператори на које делује L из $\mathfrak{A}$ што следи из дела $4°$ Става 2.10. Замењујући B са tB у (2.21), где је $0 < t < 1$, после краћег рачуна добијамо

$$\begin{aligned} &t^4L(BB^*B^*B) - t^2L(AB^*B + BB^*A) + L(A) \\ &= t^4L(B)L(B)^*L(B)^*L(B) - t^2(L(A)L(B)^*L(B) + L(B)L(B)^*L(A)) + L(A), \end{aligned}$$

одакле изједначавајући коефицијенте уз t^2 добијамо да важи

$$L(BB^*A + AB^*B) = L(B)L(B)^*L(A) + L(A)L(B)^*L(B),$$

за свако $A, B \in \mathfrak{A}$, а $BB^*A + AB^*B \in \mathfrak{A}$ због дела $1°$ Става 2.10. За $A = B$ добијамо да је

$$L(AA^*A) = L(A)L(A)^*L(A),$$

тј. L је J^*-изоморфизам између $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, па ће L да „прође” кроз све особине из Става 2.10, што се види из доказа тог става. Специјално, уз ознаке дела $1°$ Става 2.10 и $C = A$ имамо тражено тврђење. □

Последица 2.20. ***Области $\mathbb{B}_{\mathfrak{A}}$ и $\mathbb{B}_{\mathfrak{B}}$ су холоморфно еквивалентне ако и само ако су J^*-алгебре $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ изометрички J^*-изоморфне.***

Доказ: Ово је директна последица Теореме 2.19 и Последица 2.9 и 2.17. □

Урадимо за крај један пример.

Пример 2.2. Нека је $\mathcal{H}$ Хилбертов простор и нека $y \in \mathbb{B}_{\mathcal{H}}$. Ако идентификујемо $\mathcal{H}$ са $\mathcal{B}(\mathbb{C}, \mathcal{H})$, имамо да је $\mathcal{H}$ једна J^*-алгебра. Нека је P_y ортогонални пројектор који пројектује $\mathcal{H}$ на потпростор разапет са y. Тада је о.в. Мебијусова трансформација $\mathcal{T}_y : \mathbb{B}_{\mathcal{H}} \to \mathbb{B}_{\mathcal{H}}$ дата са

$$\mathcal{T}_y(x) = \frac{y + P_yx + \sqrt{1-\|y\|^2}(I-P_y)x}{1 + \langle x, y\rangle}.$$

Прво, $\mathcal{H}$ се заиста може идентификовати са $\mathfrak{B}(\mathbb{C},\mathcal{H})$ помоћу пресликавања

$$l:\mathcal{H}\to\mathfrak{B}(\mathbb{C},\mathcal{H}),\ \text{дефинисаним са } l_h \overset{\text{деф}}{=} l(h)\ :\ z\mapsto zh,$$

које је очигледно изометрија па је инјективно. Сурјективност добијамо ако l применимо на вектор $A(1)$, где је $A\in\mathfrak{B}(\mathbb{C},\mathcal{H})$ произвољан ограничен оператор. Дакле, надаље ћемо вектор h поистовећивати са оператором l_h. Ако је $h\in\mathcal{H}$ онда је

$$h^*:\mathcal{H}\to\mathbb{C}\ :\ x\mapsto\langle x,h\rangle.$$

Даље, ортогонални пројектор је пресликавање

$$P_y:\mathcal{H}\to\mathfrak{L}(y)\ :\ x\mapsto\frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}y,$$

где је $\mathfrak{L}(y)$ линеарни омотач над y. Индукцијом се покаже да је $P_y^n=P_y$ за све $n\in\mathbb{N}$. Приметимо да је $yy* = \|y\|^2P_y$, јер

$$yy^*(x)=y(\langle x,y\rangle)=\langle x,y\rangle y=\langle y,y\rangle\frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}y=\|y\|^2P_y(x),$$

за свако $x\in\mathcal{H}$. Имамо да је

$$\begin{aligned}
&(I-yy^*)^{-\frac12}=(I-\|y\|^2P_y)^{-\frac12}=I+((1-\|y\|^2)^{-\frac12}-1)P_y,\ \text{јер је}\\
&(I-\|y\|^2P_y)^{-\frac12}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac12}{n}\|y\|^{2n}P_y^n=I+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{-\frac12}{n}\|y\|^{2n}P_y^n\\
&=I+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{-\frac12}{n}\|y\|^{2n}P_y=I+\left(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac12}{n}\|y\|^{2n}-1\right)P_y\\
&=I+((1-\|y\|^2)^{-\frac12}-1)P_y.
\end{aligned}$$

Користећи формулу (2.18) добијамо

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_y(x)&=(I-yy^*)^{-\frac12}(x+y)(I+y^*x)^{-1}(I-y^*y)^{\frac12}\\
&=(I+((1-\|y\|^2)^{-\frac12}-1)P_y)(x+y)(1+\langle x,y\rangle)^{-1}(1-\|y\|^2)^{\frac12}\\
&=\frac{(1-\|y\|^2)^{\frac12}x+(1-\|y\|^2)^{\frac12}y+P_yx+P_yy-(1-\|y\|^2)^{\frac12}P_yx-(1-\|y\|^2)^{\frac12}P_yy}{1+\langle x,y\rangle}\\
&=\frac{(1-\|y\|^2)^{\frac12}x+(1-\|y\|^2)^{\frac12}y+P_yx+y-(1-\|y\|^2)^{\frac12}P_yx-(1-\|y\|^2)^{\frac12}y}{1+\langle x,y\rangle}=\\
&=\frac{(1-\|y\|^2)^{\frac12}x+P_yx+y-(1-\|y\|^2)^{\frac12}P_yx}{1+\langle x,y\rangle}\\
&=\frac{y+P_yx+\sqrt{1-\|y\|^2}(I-P_y)x}{1+\langle x,y\rangle},
\end{aligned}$$

јер је $I+y^*x$ множење са $1+\langle x,y\rangle$ и $I-y^*y$ је множење са $1-\|y\|^2$.

Глава 3

Неограничене области

1 Полупростори као уопштења горње полуравни

У овој секцији разматра се уопштена горња полураван и доказује да су отворена јединична лопта и горња полураван бихоломорфно еквивалентне.

Дефиниција 3.1. *Нека је $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, тада A можемо написати као*

$$A = \operatorname{Re}(A) + i \operatorname{Im}(A),$$

где је

$$\operatorname{Re}(A) \overset{\text{деф}}{=} \frac{A + A^*}{2}, \text{ а } \operatorname{Im}(A) \overset{\text{деф}}{=} \frac{A - A^*}{2i}.$$

Убудуће, за оператор $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ ћемо писати $A > 0$, ако је A позитиван и инвертибилан према Дефиницији 1.7.

Дефиниција 3.2. *Нека је $\mathfrak{A}$ J^*-алгебра која садржи изометрију V. Тада са*

$$\mathbb{H}_{\mathfrak{A}}^{+} \overset{\text{деф}}{=} \Big\{ A \in \mathfrak{A} : \operatorname{Im}(V^* A) - A^*(I - VV^*)A > 0 \Big\},$$

означавамо ***уопштену горњу полураван****.*

Теорема 3.1. ***Нека је $\mathfrak{A}$ J^*-алгебра и нека је $\mathbb{H}_{\mathfrak{A}}^{+}$ уопштена горња полураван. Тада је $\mathbb{H}_{\mathfrak{A}}^{+}$ неограничена конвексна област у $\mathfrak{A}$ и трансформација***

$$\mathcal{S}(A) = i(A + V)(I - V^* A)^{-1},$$

је бихоломорфно пресликавање из $\mathbb{B}_{\mathfrak{A}}$ на $\mathbb{H}_{\mathfrak{A}}^{+}$.

Доказ: Према Ставу 2.10 и развоју у ред оператора $(I-V^*A)^{-1}$ као и чињеници да је V изометрија ако и само ако је $V^*V=I$, за $A\in\mathbb{B}_{\mathfrak{A}}$ имамо да је

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(A) &= i(A+V)(I-V^*A)^{-1} = i(A+V)\sum_{n=0}^{\infty}(V^*A)^n = i\Big(\sum_{n=0}^{\infty}A(V^*A)^n+\sum_{n=0}^{\infty}V(V^*A)^n\Big)\\
&= i\Big(A+V+\sum_{n=1}^{\infty}A(V^*A)^n+\sum_{n=1}^{\infty}V(V^*A)^n\Big)\\
&= i\Big(A+V+\sum_{n=1}^{\infty}A(V^*A)^nV^*V+VV^*\sum_{n=2}^{\infty}A(V^*A)^n\Big)\\
&= i\Big(A+V+\sum_{n=1}^{\infty}A(V^*A)^nV^*V+VV^*\Big(\sum_{n=1}^{\infty}A(V^*A)^n-AV^*A\Big)\Big)\\
&= i\Big(A+V+\sum_{n=1}^{\infty}A(V^*A)^nV^*V+VV^*\sum_{n=1}^{\infty}A(V^*A)^n-VV^*AV^*A+AV^*AV^*V\\
&\quad -AV^*AV^*V\Big)\\
&= i(A+V+VV^*\sum_{n=1}^{\infty}A(V^*A)^n+\sum_{n=1}^{\infty}A(V^*A)^nV^*V-(VV^*AV^*A+AV^*AV^*V)\\
&\quad +AV^*A)\in\mathfrak{A},
\end{aligned}$$

јер из $A\in\mathfrak{A},\ V\in\mathfrak{A}$ имамо

$$\begin{aligned}
&A+V\in\mathfrak{A},\\
&AV^*A\in\mathfrak{A},\\
&\sum_{n=1}^{\infty}A(V^*A)^n\in\mathfrak{A},\ \text{па}\ VV^*\sum_{n=1}^{\infty}A(V^*A)^n+\sum_{n=1}^{\infty}A(V^*A)^nV^*V\in\mathfrak{A},\\
&VV^*(AV^*A)+(AV^*A)V^*V\in\mathfrak{A},
\end{aligned}$$

чиме смо показали да трансформација $\mathcal{S}$ пресликава $\mathbb{B}_{\mathfrak{A}}$ у $\mathfrak{A}$. Даље, нека је

$$IM(A)=\operatorname{Im}(V^*A)-A^*(I-VV^*)A,$$

за $A\in\mathfrak{A}$. Тада је

$$\begin{aligned}
IM(\mathcal{S}(A)) &= \frac{V^*\mathcal{S}(A)-(\mathcal{S}(A))^*V}{2i}-(\mathcal{S}(A))^*(I-VV^*)\mathcal{S}(A)\\
&= \frac{iV^*(A+V)(I-V^*A)^{-1}+i(I-A^*V)^{-1}(A^*+V^*)V}{2i}\\
&\quad -(-i(I-A^*V)^{-1}(A^*+V^*)(I-VV^*)i(A+V)(I-V^*A)^{-1})\\
&= \frac{V^*(A+V)(I-V^*A)^{-1}+(I-A^*V)^{-1}(A^*+V^*)V}{2}\\
&\quad -(I-A^*V)^{-1}(A^*+V^*)(I-VV^*)(A+V)(I-V^*A)^{-1}\\
&= \frac{1}{2}[(V^*-(I-A^*V)^{-1}(A^*+V^*)(I-VV^*))(A+V)(I-V^*A)^{-1}\\
&\quad +(I-A^*V)^{-1}(A^*+V^*)(V-(I-VV^*)(A+V)(I-V^*A)^{-1}]=(*).
\end{aligned}$$

Имамо да је

$$\begin{aligned}&V^* - (I - A^*V)^{-1}(A^* + V^*)(I - VV^*) = V^* - (I - A^*V)^{-1}(A^* - A^*VV^*)\\&= V^* - (I - A^*V)^{-1}A^* + (I - A^*V)^{-1}(A^*V)V^* = V^* - (I - A^*V)^{-1}A^*\\&+ ((I - A^*V)^{-1} - I)V^* = -(I - A^*V)^{-1}A^* + (I - A^*V)^{-1}V^* = (I - A^*V)^{-1}(V^* - A^*),\end{aligned}$$

а слично је и

$$V - (I - VV^*)(A + V)(I - V^*A)^{-1} = (V - A)(I - V^*A)^{-1}.$$

Даље

$$\begin{aligned}(*) &= \frac{1}{2}[(I - A^*V)^{-1}(V^* - A^*)(A + V)(I - V^*A)^{-1}\\&+ (I - A^*V)^{-1}(A^* + V^*)(V - A)(I - V^*A)^{-1}]\\&= \frac{1}{2}(I - A^*V)^{-1}[(V^* - A^*)(A + V) + (V^* + A^*)(V - A)](I - V^*A)^{-1}\\&= (I - A^*V)^{-1}(I - A^*A)(I - V^*A)^{-1} > 0,\end{aligned}$$

јер је $\|A\| < 1$. Заиста,

$$\begin{aligned}\langle (I - A^*V)^{-1}(I - A^*A)(I - V^*A)^{-1}h, h\rangle &= \langle (I - A^*A)(I - V^*A)^{-1}h, (I - V^*A)^{-1}h\rangle\\&> \varepsilon\|(I - V^*A)^{-1}h\|^2 \geqslant \varepsilon\Big(\frac{1}{1 + \|V^*A\|}\Big)^2\|h\|^2\\&\geqslant \varepsilon\frac{1}{4}\|h\|^2 \text{ за свако } h \in \mathcal{H}.\end{aligned}$$

Овим смо доказали да $\mathcal{S}$ заиста пресликава $\mathbb{B}_{\mathfrak{A}}$ у $\mathbb{H}^+_{\mathfrak{A}}$. Може се показати да транфсормација

$$\mathcal{S}^{-1}(A) = (AV^* + iI)^{-1}(A - iV)$$

пресликава $\mathbb{H}^+_{\mathfrak{A}}$ у $\mathbb{B}_{\mathfrak{A}}$ и да је $\mathcal{S}^{-1}$ заиста инверз од $\mathcal{S}$. Слично као код извода о.в. Мебијусове трансформације, лако се види да су трансформације $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}^{-1}$ холоморфне тамо где су дефинисане, па је $\mathcal{S}$ бихоломорфно пресликавање $\mathbb{B}_{\mathfrak{A}}$ на $\mathbb{H}^+_{\mathfrak{A}}$.

Скуп $\mathbb{H}^+_{\mathfrak{A}}$ је неограничен јер садржи све позитивне умношке од iV. Да би доказали да је конвекасан узмимо $A, B \in \mathbb{H}^+_{\mathfrak{A}}$ и $C = tA + (1 - t)B$, за $t \in [0, 1]$. Тада је, после мало рачуна

$$\begin{aligned}IM(C) &> tA^*(I - VV^*)A + (1 - t)B^*(I - VV^*)B - C^*(I - VV^*)C\\&= t(1 - t)(A - B)^*(I - VV^*)(A - B) \geqslant 0,\end{aligned}$$

што значи да $C \in \mathbb{H}^+_{\mathfrak{A}}$. □

Наведимо за крај један пример.

Пример 3.1. Нека је $\mathfrak{A} = \mathbf{\mathfrak{B}}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$, где је $n < m$ и посматрајмо $\mathfrak{A}$ као скуп свих $m \times n$ матрица са комплексним елементима. Сваки $A \in \mathfrak{A}$ може бити написан у облику $\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$, где су A_1 и A_2 $n \times n$ и $(m - n) \times n$ матрице, респективно. Нека је $V = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$, где је I јединична матрица типа $n \times n$. Тада је V изометрија и одговарајућа горња полураван је

$$\mathbb{H}^+_{\mathfrak{A}} = \left\{ \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} : \mathrm{Im}(A_1) - A_2^*A_2 > 0 \right\}.$$

Литература

[1] М. Арсеновић, М. Достанић, Д. Јоцић, Теорија мере, Функционална анализа и Теорија оператора, Завод за уџбенике, Београд, 2012.

[2] C. Foias, A. E. Frazho, The Commutant Lifting Approach to Interpolation Problems, Springer Basel AG, 1990

[3] E. Fricain, J. Mashereghi, The theory of $\mathcal{H}(b)$ spaces, vol 1, Cambridge University Press, 2016.

[4] L. A. Harris, *Schwarz's lemma in normed linear spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 62 (1969), 1014-1017.

[5] L. A. Harris, *Bounded symmetric homogeneous domains in infinite dimensional spaces*, Lecture Notes in Mathematics 364 (Berlin: Springer, 1973), 13-40.

[6] V. P. Potapov, *The multiplicative structure of J-contractive matrix functions*, Amer. Math. Soc. Transl. 15 (1960), 131-243.

[7] J. Weidmann, Linear operators in Hilbert Spaces, Springer-Verlag, New York, 1980.