

Универзитет у Београду
Математички факултет

Безијеове криве и површи

Ментор: Срђан Вукмировић
Студент: Александра Милинчић

Београд,
2019.

Садржај

1	Дефиниција Безијерове криве	5
1.1	Де Кастељау алгоритам и рекурзивна дефиниција	5
1.2	Дефиниција преко Бернштајнових полинома	8
2	Последице де Кастељау алгоритма	13
2.1	Подела Безијерове криве	13
2.2	Повећање степена Безијерове криве	16
3	Особине Безијерових кривих	20
4	Рационалне Безијерове криве	25
4.1	Рационалне Безијерове криве степена 2	26
4.2	Рационални де Кастељау алгоритам	32
5	Безијерове површи	35
5.1	Дефиниција Безијерових површи	35
5.2	Де Кастељау алгоритам	38
5.3	Рационалне Безијерове површи	43
6	Додатак	47
6.1	Конвексни омотач	47
6.2	Кодови	49
6.2.1	Де Кастељау алгоритам за Безијерове криве	49
6.2.2	Подела Безијерове криве на два дела	49
6.2.3	Повећање степена Безијерове криве за 1	49
6.2.4	Особина конвексности	49
6.2.5	Пресек $\min$ тах правоугаоника	50
6.2.6	Ротација Безијерове криве	50
6.2.7	Де Кастељау алгоритам за Безијерове површи	50

Увод

Све до појаве рачунара (у савременом смислу) у саобраћајној индустрији, за пројектовање разних превозних средстава, коришћене су табле за цртање на којима су биле рађене скице тих превозних средстава. Са развојем рачунара и њиховом све већом употребом, дошло се на идеју да се табле за цртање замене одговарајућим компјутерским програмом како би се скице лакше и прецизније израђивале. Разни програми за цртање су допринели реализацији ове идеје. Међутим, ти први програми су кориснику за цртање нудили само кружнице и линије, док цртање слободном руком није давало прецизне резултате. Иако су за израду неких скица биле довољне кружнице и линије, за неке сложеније су биле потребне криве чијим обликом је могуће лако манипулисати.

Године 1959. на сцену ступају Безијеове (у даљем тексту Безијерове) криве, чије су обе координате задате полиномима. Са друге стране, оне су одређене такозваним контролним тачкама (које не морају нужно да припадају кривој), а чијим померањем се мења облик целе криве. Њих су први пут користили Пол де Кастељау¹ и Пјер Безије² у дизајну аутомобила. Данас, Безијерове криве имају широку примену у рачунарској графици, векторском запису фонтова, апроксимацији података, роботици, итд.

Први проблем који се јавио код коришћења Безијерових кривих у дизајну јесте то што се померањем једне контролне тачке мења облик целе криве, јер је понекад потребно променити само један њен део. Један од начина на који је решен овај проблем јесте увођење такозваних В-сплајн кривих, које настају глатким надовезивањем Безијерових кривих. В-сплајн криве имају предност у односу на обичне Безијерове криве што се могу формирати од Безијерових кривих малог степена, а одређене су већим бројем контролних тачака, што, опет, обезбеђује бољу манипулацију њима.

Следећи проблем је настао онда када су дизајнери хтели да 3D модел аутомобила испројектују на раван и тако 3D моделовање сведу на 2D моделовање. Међутим, Безијерове криве, као полиномијалне, нису пројективно инваријантне. Овај проблем је решен увођењем рационалних Безијерових кривих и NURBS(В-сплајн криве формиране од рационалних Безијерових кривих) кривих, чија је главна карактеристика то што се оне задају рационалним функцијама, уместо полиномима, што омогућава пројективну инваријантност.

На крају, цела прича са кривама је уопштена на површи (Безијерове, В-сплајн, рационалне Безијерове и NURBS површи) које данас представљају основне објекте у рачунарској графици.

У првој глави дата је дефиниција Безијерових кривих у равни на два начина: рекурзивно и преко Бернштајнових полинома. Предност рекурзивне дефиниције је у томе што нам даје јаснију геометријску визуелизацију кривих, док је друга дефиниција погоднија за дубља аналитичка истраживања. Рекурзивна дефиниција се заснива на де Кастељауовом алгоритму, који представља најважнији алгоритам у целој теорији Безијерових кривих.

У другој глави обрађене су две најважније особине де Кастељауовог алгоритма: подела криве у датом тачки и повећање степена криве. Коректност извођења ових последица доказана је двома теоремама. Такође, од значаја је теорема која тврди да се повећањем степена Безијерове криве њен контролни полигон приближава самој кривој.

У трећој глави су доказане следеће особине Безијерових кривих: особина конвексног омотача, афина инваријантност и особина мање варијације. Значајна тео-

¹Paul de Casteljau(1930-), француски физичар и математичар, радио је за компанију Citroën

²Pierre Bézier(1910-1999), француски инжењер, радио је за компанију Renault

рема у овом поглављу је теорема која тврди да је свака Безијерова крива степена 2 део параболе, која је доказана коришћењем особине афине инваријантности. Иако нема везе са особинама наведеним у овој глави, али због свог великог значаја за даљи развој Безијерових кривих, овде је дат доказ теореме која тврди да се део круга (елипсе, хиперболе) не може представити као Безијерова крива степена 2.

У четвртој глави су обрађене рационалне Безијерове криве. Дефинисане су са аспекта пројективних пресликавања (тачније централног пројектовања) чиме је решен проблем из претходне главе, а то је да се део круга (елипсе, хиперболе) не може представити као Безијерова крива степена 2. Обрађене су особине рационалних кривих, као и рационални де Кастељау алгоритам, који се разликује од стандардног. Последицама није посвећена велика пажња, јер се изводе аналогно последицама из друге главе, без неких значајних разлика.

У петој глави дефинисане су Безијерове површи као тензорски производ Безијерових кривих. Обрађен је и де Кастељауов алгоритам за површи. Такође, прича је проширена и на рационалне Безијерове површи, јер се помоћу њих могу представити делови торуса. Циљ у овој глави је дати примере Безијерових површи, док дубља анализа ове теме превазилази оквире мастер рада.

Слике у овом раду су рађене коришћењем програмских пакета GeoGebra и Mathematica, док су кодови, који прате одређене примере у раду, рађени у програму Mathematica.

На крају, користим прилику да се захвалим ментору, професору Срђану Вукмировићу, као и члановима комисије професорима Тијани Шукиловић и Мирјани Ђорић на пажљивом читању и коментарима који су овај рад учинили бољим.

1 Дефиниција Безијерове криве

Прва дефиниција Безијерове криве била је рекурзивна и заснивала се на де Кастељау алгоритму. Тако дефинисана Безијерова крива има колико - толико геометријски јасну визуелизацију и управо из тог разлога крећемо од рекурзивне дефиниције, тј. од де Кастељау алгоритма.

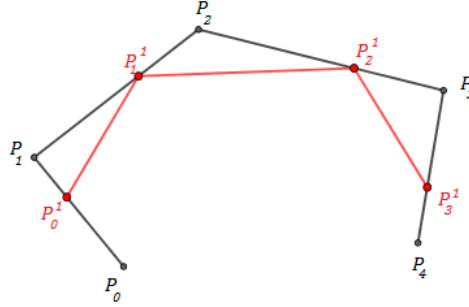
1.1 Де Кастељау алгоритам и рекурзивна дефиниција

Нека су $P_0, P_1, \dots, P_n (n \geq 1)$ дате тачке неке равни и нека је $t \in [0, 1]$ реалан број. Означимо дате тачке на следећи начин:

$$P_i = P_i^0(t), i \in \{0, 1, \dots, n\},$$

где 0 у горњем индексу означава број итерације. Дакле, у нултој итерацији имамо $n+1$ тачака. Сада дужи $P_i^0(t)P_{i+1}^0(t), i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ делимо у односу $t : (1-t)$, па у првој итерацији добијамо n нових тачака $P_i^1(t)$ за које важи:

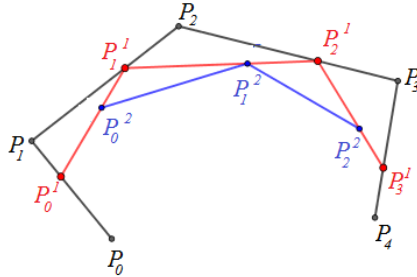
$$P_i^1(t) = (1-t)P_i^0(t) + tP_{i+1}^0(t), i \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$



Слика 1: Тачке у првој итерацији (GeoGebra)

Даље, исти поступак поделе примењујемо на дужи $P_i^1(t)P_{i+1}^1(t), i \in \{0, 1, \dots, n-2\}$, при чему у другој итерацији добијамо $n-1$ нових тачака $P_i^2(t)$, за које важи:

$$P_i^2(t) = (1-t)P_i^1(t) + tP_{i+1}^1(t), i \in \{0, 1, \dots, n-2\}.$$



Слика 2: Тачке у другој итерацији (GeoGebra)

Генерално, у r -тој итерацији добијамо $n - r + 1$ нових тачака $P_i^r(t)$, за које важи:

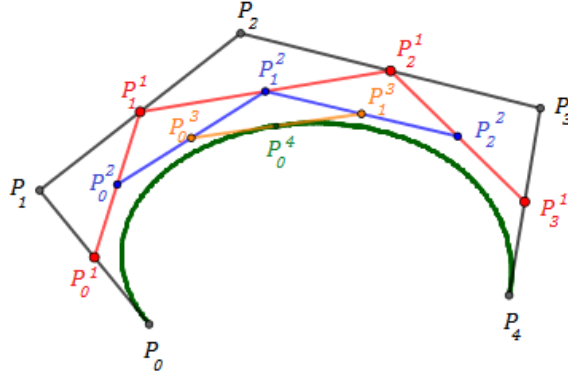
$$P_i^r(t) = (1 - t)P_i^{r-1}(t) + tP_{i+1}^{r-1}(t), i \in \{0, 1, \dots, n - r\}.$$

Поступак настављамо све док на крају, у n -тој итерацији, не добијемо једну тачку $P_0^n(t)$ за коју важи:

$$P_0^n(t) = (1 - t)P_0^{n-1}(t) + tP_1^{n-1}(t).$$

За ту тачку кажемо да припада **Беџијеровој кривој степена n** . Тачке $P_0, P_1, \dots, P_n$ се зову **контролне тачке**, дужи $P_0P_1, P_1P_2, \dots, P_{n-1}P_n$ су **контролне дужи**, а полигонска линија $P_0P_1 \dots P_n$ **контролна полигонска линија**.

Претходно приказани алгоритам одређивања тачке $P_0^n(t)$ за неко $t \in [0, 1]$ назива се **де Кастељау алгоритам** и он представља најважнији алгоритам у целој теорији Беџијерових кривих. На слици 3 приказане су све етапе алгоритма на примеру Беџијерове криве степена 4.



Слика 3: Беџијерова крива степена 4 (GeoGebra)

Приметимо да број контролних тачака одређује степен криве. У пракси се најчешће користе Беџијерове криве степена 2 или 3, док је Беџијерова крива степена 1 (одређена са две контролне тачке P_0 и P_1), заправо, дуж P_0P_1 .

Применимо де Кастељау алгоритам на тачке P_0, P_1 и P_2 , за неки параметар $t \in [0, 1]$:

$$P_0^1(t) = (1 - t)P_0 + tP_1, \quad (1)$$

$$P_1^1(t) = (1 - t)P_1 + tP_2, \quad (2)$$

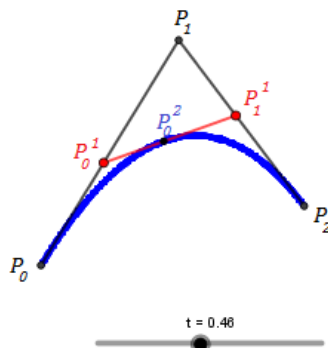
$$P_0^2(t) = (1 - t)P_0^1(t) + tP_1^1(t). \quad (3)$$

Заменом једнакости (1) и (2) у једнакост (3), добијамо следеће:

$$P_0^2(t) = (1 - t)^2P_0 + 2t(1 - t)P_1 + t^2P_2. \quad (4)$$

Дакле, израз (4) је квадратни по параметру t и то је Беџијерова крива степена 2 (слика 4) кад је $t \in [0, 1]$ ³. Приметимо и то да су сви коефицијенти који стоје уз контролне тачке P_0, P_1, P_2 ненегативни, јер је $t \in [0, 1]$. Наравно, то важи и у општем случају.

³У једној од наредних глава ћемо показати да је свака Беџијерова крива степена 2 парабола.



Слика 4: Безијерова крива степена 2 (GeoGebra)

Пример 1. Дате су контролне тачке $P_0(1, 1)$, $P_1(3, 5)$, $P_2(7, 5)$ и $P_3(9, 1)$. Одредити тачку $P_0^3(t)$ за $t = \frac{1}{2}$, применом де Кастељау алгоритма директно на дате вредности.

Решење. Пратимо горе описани алгоритам.

Прва итерација:

$$P_0^1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot P_0 + \frac{1}{2} \cdot P_1 = (2, 3),$$

$$P_1^1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot P_1 + \frac{1}{2} \cdot P_2 = (5, 5),$$

$$P_2^1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot P_2 + \frac{1}{2} \cdot P_3 = (8, 3).$$

Друга итерација:

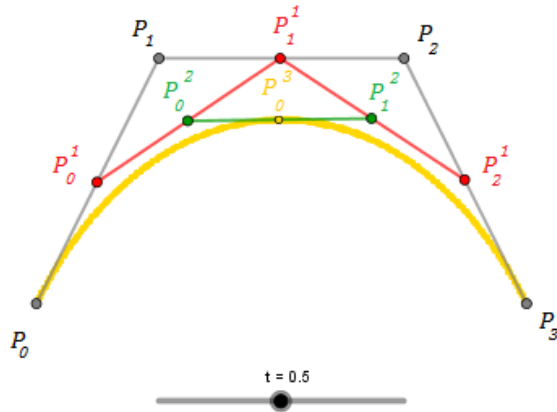
$$P_0^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot P_0^1\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot P_1^1\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, 4\right),$$

$$P_1^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot P_1^1\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot P_2^1\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{13}{2}, 4\right).$$

Трећа итерација:

$$P_0^3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot P_0^2\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot P_1^2\left(\frac{1}{2}\right) = (5, 4).$$

△



Слика 5: Слика уз пример 1 (GeoGebra)

1.2 Дефиниција преко Бернштајнових полинома

За нека дубља теоријска испитивања згодно би било дефинисати Безијерове криве експлицитно. У ту сврху користе се Бернштајнови полиноми.

Нека су $P_0, P_1, \dots, P_n$, ($n \geq 1$) тачке из дела 1.1. **Безијерова крива степена n** је непрекидно пресликавање $\alpha_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ дато са:

$$\alpha_n(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} P_i. \quad (5)$$

Дате тачке, такође, зовемо контролним тачкама, дужи $P_0P_1, P_1P_2, \dots, P_{n-1}P_n$ зовемо контролним дужима, а полигонску линију $P_0P_1 \dots P_n$ контролном полигонском линијом. Полиноми

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

зову се **Бернштајнови**⁴ **полиноми** или **базне функције**. Бројеви $\binom{n}{i}$ су биномни коефицијенти и за њих важи:

$$\binom{n}{i} = \begin{cases} \frac{n!}{i!(n-i)!}, & 0 \leq i \leq n \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

Приметимо да су Бернштајнови полиноми (као коефицијенти који стоје уз контролне тачке) ненегативни, јер је $t \in [0, 1]$. На слици 6 приказана је фамилија Бернштајнових полинома степена 3.

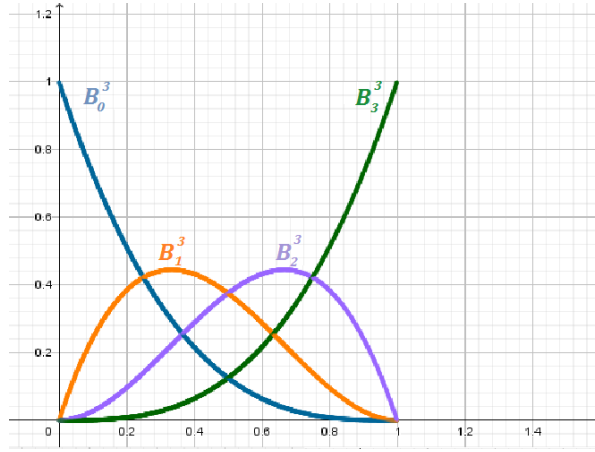
Како је Безијер од де Кастељау алгоритма дошао до дефиниције (5) можете видети у књизи [1], а ми ћемо доказати да су ове дефиниције еквивалентне. Уве-

⁴Felix Bernstein(1878-1956) - немачки математичар

римо се, за почетак, да то важи у случају $n = 2$.

$$\begin{aligned}\alpha_2(t) &= \sum_{i=0}^2 \binom{2}{i} t^i (1-t)^{2-i} P_i \\ &= \binom{2}{0} t^0 (1-t)^2 P_0 + \binom{2}{1} t^1 (1-t)^1 P_1 + \binom{2}{2} t^2 (1-t)^0 P_2 \\ &= (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t) P_1 + t^2 P_2,\end{aligned}$$

што је једнако са $P_0^2(t)$ из једнакости (4) за свако $t \in [0, 1]$.



Слика 6: Фамилија Бернштајнових полинома B_i^3 , $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ (GeoGebra)

Теорема 1. Тачка $P_0^n(t)$ добијена применом де Кастељау алгоритма поклапа се са тачком $\alpha_n(t)$ из дефиниције (5) за свако $t \in [0, 1]$, тј. важи:

$$P_0^n(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} P_i, \quad t \in [0, 1]. \quad (6)$$

Ова теорема је специјалан случај следеће теореме.

Теорема 2. Тачка $P_j^r(t)$ добијена применом де Кастељау алгоритма у r -тој итерацији поклапа се са тачком $\alpha_r(t) = \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} t^i (1-t)^{r-i} P_{i+j}$.

Доказ. Доказ изводимо математичком индукцијом по $r \geq 1$.

Б.И. $r = 1$

$$P_j^1(t) = (1-t)P_j^0(t) + tP_{j+1}^0(t) = (1-t)P_j + tP_{j+1}$$

$$\alpha_1(t) = \sum_{i=0}^1 \binom{1}{i} t^i (1-t)^{1-i} P_{i+j} = \binom{1}{0} t^0 (1-t)^1 P_{0+j} + \binom{1}{1} t^1 (1-t)^0 P_{1+j} = P_j^1(t)$$

$$\text{И.П. } P_j^{r-1} = \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r-1}{i} t^i (1-t)^{r-1-i} P_{i+j}$$

И.К.

$$\begin{aligned}
P_j^r(t) &= (1-t)P_j^{r-1} + tP_{j+1}^{r-1} \\
&= (1-t) \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r-1}{i} t^i (1-t)^{r-1-i} P_{i+j} + t \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r-1}{i} t^i (1-t)^{r-1-i} P_{i+j+1} \\
&= \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r-1}{i} t^i (1-t)^{r-i} P_{i+j} + \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r-1}{i} t^{i+1} (1-t)^{r-1-i} P_{i+j+1} \\
&= \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r-1}{i} t^i (1-t)^{r-i} P_{i+j} + \sum_{i=1}^r \binom{r-1}{i-1} t^i (1-t)^{r-i} P_{i+j} \\
&= (1-t)^r P_j + \sum_{i=1}^{r-1} \binom{r-1}{i} t^i (1-t)^{r-i} P_{i+j} + \sum_{i=1}^{r-1} \binom{r-1}{i-1} t^i (1-t)^{r-i} P_{i+j} + t^r P_{r+j} \\
&= (1-t)^r P_j + \sum_{i=1}^{r-1} \left[\binom{r-1}{i} + \binom{r-1}{i-1} \right] t^i (1-t)^{r-i} P_{i+j} + t^r P_{r+j} \\
&= (1-t)^r P_j + \sum_{i=1}^{r-1} \binom{r}{i} t^i (1-t)^{r-i} P_{i+j} + t^r P_{r+j} \\
&= \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} t^i (1-t)^{r-i} P_{i+j}.
\end{aligned}$$

□

Дакле, за $r = n$ и $j = 0$ добијамо једнакост (6), чиме је и теорема 1 доказана.

Пример 2. *Одредити тачку $\alpha_3\left(\frac{1}{3}\right)$ са Безијерове криве одређене контролним тачкама $P_0\left(-\frac{27}{2}, 54\right)$, $P_1(3, -9)$, $P_2\left(\frac{9}{2}, -18\right)$ и $P_3(18, -27)$, користећи дефиницију преко Бернштајнових полинома.*

Решење.

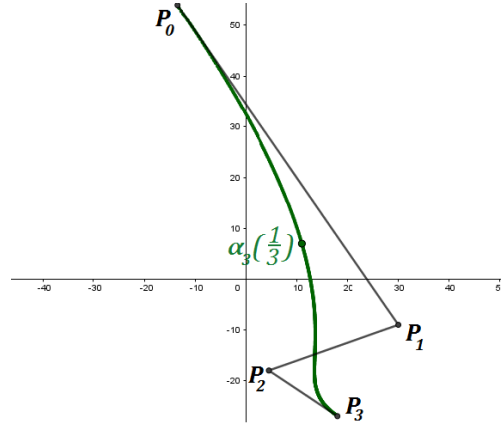
$$\begin{aligned}
\alpha_3\left(\frac{1}{3}\right) &= \sum_{i=0}^3 \binom{3}{i} \left(\frac{1}{3}\right)^i \left(\frac{2}{3}\right)^{3-i} P_i \\
&= \frac{8}{27} \cdot \left(-\frac{27}{2}, 54\right) + \frac{4}{9} \cdot (3, -9) + \frac{2}{9} \cdot \left(\frac{9}{2}, -18\right) + \frac{1}{27} \cdot (18, -27) \\
&= (11, 7).
\end{aligned}$$

△

Узимајући да је $t = 0$ и $t = 1$ у једнакости (5) добијамо следеће:

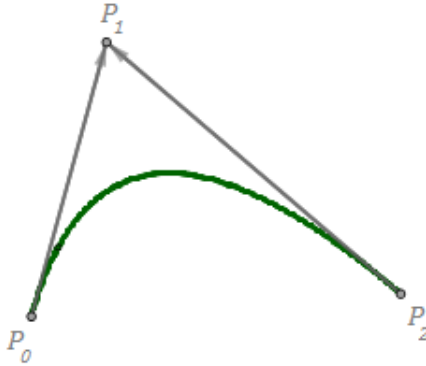
$$\begin{aligned}
\alpha_n(0) &= P_0 + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} \cdot 0 \cdot P_i = P_0, \\
\alpha_n(1) &= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \cdot 0 \cdot P_i + P_n = P_n.
\end{aligned}$$

Дакле, почетна и крајња тачка Безијерове криве су контролне тачке P_0 и P_1 .



Слика 7: Тачка $\alpha_3(\frac{1}{3})$ са Безијерове криве (GeoGebra)

Тврђење 1. Тангентни вектори у тачкама P_0 и P_n су колинеарни векторима $\overrightarrow{P_0P_1}$ и $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$, редом (слика 8).



Слика 8: Тангентни вектори $\overrightarrow{P_0P_1}$ и $\overrightarrow{P_2P_1}$ код квадратне Безијерове криве (GeoGebra)

Доказ. Рачунањем првог извода $\alpha'_n(t)$ Безијерове криве, добијамо:

$$\alpha'_n(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} t^i (1-t)^{n-1-i} (P_{i+1} - P_i). \quad (7)$$

Замењујући $t = 0$ и $t = 1$ у једнакост (7) добијамо:

$$\begin{aligned} \alpha'_n(0) &= n(P_1 - P_0) = n\overrightarrow{P_0P_1}, \\ \alpha'_n(1) &= n(P_n - P_{n-1}) = n\overrightarrow{P_{n-1}P_n}, \end{aligned}$$

чиме је тврђење доказано. $\square$

Пример 3. Одредити једначину Безијерове криве одређене контролним тачкама $P_0(1, 1)$, $P_1(2, 4)$ и $P_2(4, 2)$.

Решење.

$$\begin{aligned}
\alpha_2(t) &= \sum_{i=0}^2 \binom{2}{i} t^i (1-t)^{2-i} P_i \\
&= (1-t)^2 \cdot (1, 1) + 2t(1-t) \cdot (2, 4) + t^2 \cdot (4, 2) \\
&= (1-2t+t^2, 1-2t+t^2) + (4t-4t^2, 8t-8t^2) + (4t^2, 2t^2) \\
&= (1+2t+t^2, 1+6t-5t^2), \quad t \in [0, 1].
\end{aligned}$$

△

Беџијерова крива не мора бити дефинисана само на сегменту $[0, 1]$, већ се она може дефинисати и на произвољном сегменту $[a, b]$ увођењем смене:

$$t = \frac{u-a}{b-a}, \quad u \in [a, b]. \quad (8)$$

Тада, једначина (5) постаје:

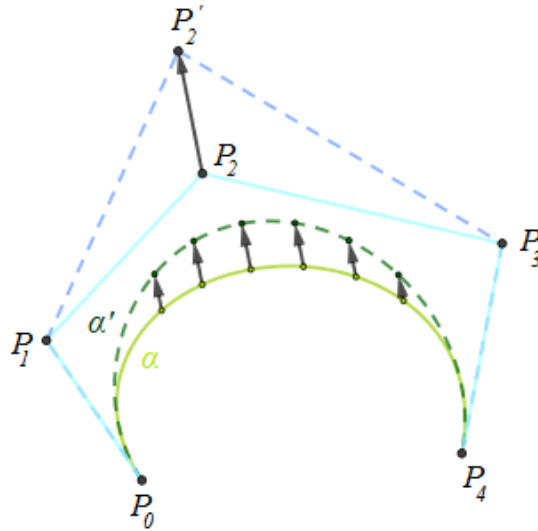
$$\alpha_n(u) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left(\frac{u-a}{b-a} \right)^i \left(\frac{b-u}{b-a} \right)^{n-i} P_i, \quad u \in [a, b],$$

при чему се облик криве не мења.

Међутим, облик криве се мења померањем контролних тачака. Наиме, претпоставимо да је контролна тачка P_i померена до тачке P'_i . Тада је нова Беџијерова крива α'_n одређена новим скупом контролних тачака $P_0, \dots, P_{i-1}, P'_i, P_{i+1}, \dots, P_n$ и важи:

$$\alpha'_n(t) - \alpha_n(t) = B_i^n(t) \overrightarrow{P_i P'_i}, \quad \text{за свако } t \in [0, 1].$$

Одавде видимо да је свака тачка Беџијерове криве α_n померена за вектор који је колинеаран вектору $\overrightarrow{P_i P'_i}$ (видети слику 9).



Слика 9: Контролна тачка P_2 померена је до тачке P'_2 (GeoGebra)

2 Последице де Кастељау алгоритма

Као што је речено, де Кастељау алгоритам је веома значајан за Безијерове криве. Захваљујући њему, могуће је дату криву поделити на две нове Безијерове криве истог степена и могуће је повећати степен дате Безијерове криве.

2.1 Подела Безијерове криве

Главна идеја поделе криве је да се у тачки $\alpha(t_0)$ (за неко $t_0 \in [0, 1]$) крива „пресече” при чему се добијају две нове криве α_1 и α_2 које су, такође, Безијерове криве истог степена, где је свака од њих задата својим скупом контролних тачака.

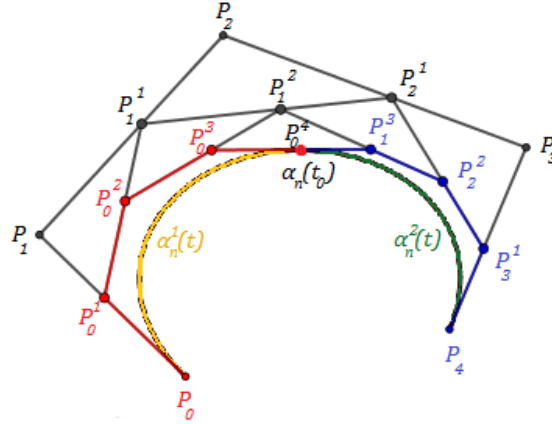
Поступак поделе је следећи:

- 1) применимо де Кастељау алгоритам да одредимо тачку $\alpha(t_0)$,
- 2) крива α_1 одређена је контролним тачкама

$$P_0 = P_0^0, P_0^1, \dots, P_0^n = \alpha(t_0),$$

а α_2 контролним тачкама

$$\alpha(t_0) = P_0^n, P_1^{n-1}, \dots, P_n^0 = P_n.$$



Слика 10: Подела криве на два дела (GeoGebra)

Следећа теорема показује да је поступак поделе криве на два дела коректан.

Теорема 3. Нека важе ознаке из претходног дела. Безијерова крива α_1 (α_2) одређена контролним тачкама $P_0^0, P_0^1, \dots, P_0^n$ ($P_0^n, P_1^{n-1}, \dots, P_n^0$) је рестрикција Безијерове криве α (одређене тачкама $P_0, P_1, \dots, P_n$) на сегменту $[0, t_0]$ ($[t_0, 1]$).

Доказ. Доказаћемо да је Безијерова крива α_1 рестрикција криве α на $[0, t_0]$, док се доказ за криву α_2 изводи аналогно. Приметимо, прво, да су α_1 и α истог степена n , јер су обе одређене са $n + 1$ контролних тачака. Друго, рестрикција криве $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ на сегменту $[0, t_0]$ добија се увођењем смене:

$$t = \frac{u}{t_0}, \quad u \in [0, t_0].$$

Дакле, $\alpha|_{[0,t_0]} : [0, t_0] \rightarrow \mathbb{R}^2$, при чему важи:

$$\alpha|_{[0,t_0]}(u) = \sum_{i=0}^n B_i^n(u) P_i = \sum_{i=0}^n B_i^n(tt_0) P_i = \alpha(tt_0).$$

Треба доказати да је $\alpha_1(t) = \alpha(tt_0)$, за свако $t \in [0, 1]$.

Како је крива α_1 одређена контролним тачкама тачкама $P_0^0, P_0^1, \dots, P_0^n$, то на основу (5) важи:

$$\alpha_1(t) = \sum_{r=0}^n B_r^n(t) P_0^r(t_0).$$

Примењујући једнакост (6) у претходној, добијамо:

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= \sum_{r=0}^n B_r^n(t) P_0^r(t_0) = \sum_{r=0}^n B_r^n(t) \sum_{i=0}^r B_i^r(t_0) P_i \\ &= \sum_{r=0}^n \sum_{i=0}^r B_r^n(t) B_i^r(t_0) P_i \\ &= \sum_{i=0}^n \underbrace{\sum_{r=0}^n B_r^n(t) B_i^r(t_0)}_{\text{коэффициент уз } P_i} P_i. \end{aligned}$$

Приметимо да смо у последњем изразу бројач i смели проширити до n , јер је за $i = r + 1, r + 2, \dots, n$ вредност $B_i^r(t_0) = 0$. Израчунајмо, сада, k -ти коефицијент уз k -ту контролну тачку P_k .

$$\begin{aligned} \sum_{r=k}^n B_r^n(t) B_k^r(t_0) &= B_k^n(t) B_k^k(t_0) + B_{k+1}^n(t) B_k^{k+1}(t_0) + \dots + B_n^n(t) B_k^n(t_0) \\ &= \sum_{j=0}^{n-k} B_{k+j}^n(t) B_k^{k+j}(t_0) \\ &= \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n}{k+j} t^{k+j} (1-t)^{n-k-j} \binom{k+j}{k} t_0^k (1-t_0)^j \\ &= \sum_{j=0}^{n-k} \frac{n!}{(k+j)!(n-k-j)!} \cdot t^k \cdot t^j (1-t)^{n-k-j} \cdot \frac{(k+j)!}{k! \cdot j!} \cdot t_0^k (1-t_0)^j \\ &= \frac{n!}{k!} \cdot (tt_0)^k \cdot \sum_{j=0}^{n-k} \frac{1}{j!(n-k-j)!} (t(1-t_0))^j (1-t)^{n-k-j} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!k!} \cdot (tt_0)^k \cdot \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(n-k)!}{j!(n-k-j)!} (t(1-t_0))^j (1-t)^{n-k-j} \\ &= \binom{n}{k} (tt_0)^k (t - tt_0 + 1 - t)^{n-k} = \binom{n}{k} (tt_0)^k (1 - tt_0)^{n-k} \\ &= B_k^n(tt_0). \end{aligned}$$

Дакле,

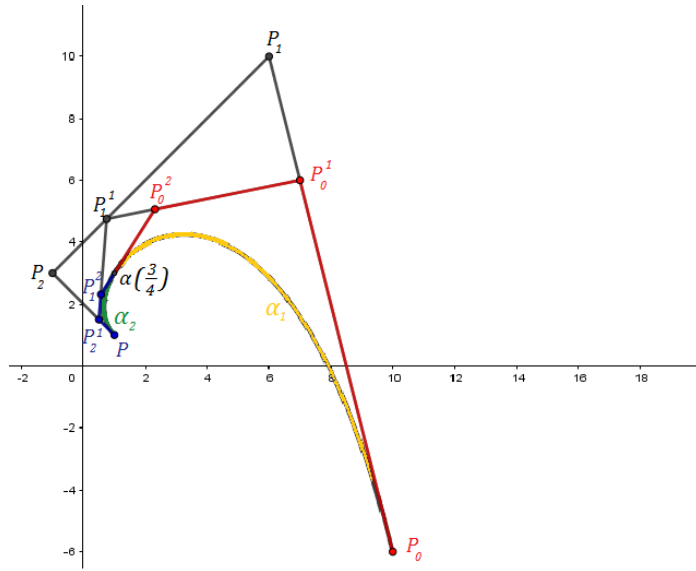
$$\alpha_1(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(tt_0) P_i = \alpha(tt_0).$$

□

Пример 4. Безијерову криву α која је одређена контролним тачкама $P_0(10, -6)$, $P_1(6, 10)$, $P_2(-1, 3)$ и $P_3(1, 1)$ поделити на два дела у тачки $\alpha(\frac{3}{4})$.

Доказ. Примењући де Кастељау алгоритам, добијамо следеће тачке:

$$\begin{array}{llll} P_0(10, -6) & P_0^1(7, 6) & P_0^2(\frac{37}{16}, \frac{81}{16}) & P_0^3(1, 3) \\ P_1(6, 10) & P_1^1(\frac{3}{4}, \frac{19}{4}) & P_1^2(\frac{9}{16}, \frac{37}{16}) & \\ P_2(-1, 3) & P_2^1(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) & & \\ P_3(1, 1). & & & \end{array}$$



Слика 11: Слика уз пример 4 (GeoGebra)

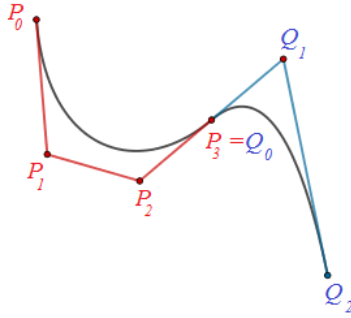
Тражене криве су:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &: P_0, P_0^1, P_0^2, P_0^3, \\ \alpha_2 &: P_0^3, P_1^1, P_1^2, P_2^1, P_3. \end{aligned}$$

△

Подела криве има велики број примена. Користи се за дизајнирање кривих, за одређивање пресека криве и праве, па чак и за одређивање пресека две Безијерове криве.

При дизајнирању кривих може се десити да је један део криве задовољавајући, а други не. Како се померањем једне контролне тачке мења изглед целе криве, то криву треба поделити на два дела: задовољавајући и незадовољавајући и извршити корекцију овог другог дела. Након корекције треба извршити глатко спајање тих делова да би се добила одговарајућа крива. Глатко спајање подразумева да тангентни вектори на оба дела криве у тачки спајања буду колинеарни (видети слику 12).



Слика 12: Глатко спајање кривих (GeoGebra)

2.2 Повећање степена Безијерове криве

Повећање степена Безијерове криве има велику практичну примену. Претпоставимо да нам је дата Безијерова крива α степена n . Може се десити да после одређеног броја померања контролних тачака, наша крива не може да добије жељени облик. Проблем можемо решити на два начина:

- 1) поделом криве на два дела и мењањем незадовољавајућег дела криве, као што је описано у претходном поглављу;
- 2) повећањем броја контролних тачака (што је еквивалентно повећању степена криве) чиме се постиже боља и прецизнија манипулација датом кривом.

Како је први начин већ описан, позабавићемо се другим.

Дакле, циљ је, за почетак, степен криве повећати за један, при чему треба водити рачуна да облик криве остане непромењен. У супротном, повећање степена бисмо могли вршити насумице и без икаквог практичног смисла.

Нека је Безијерова крива α (степен $n \geq 1$) одређена контролним тачкама $P_0, P_1, \dots, P_n$:

$$\alpha(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_i, \quad t \in [0, 1].$$

Предефинишимо криву α на следећи начин:

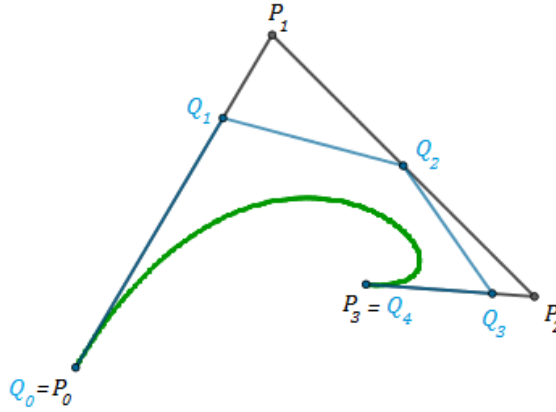
$$\begin{aligned} \alpha(t) &= (1-t)\alpha(t) + t\alpha(t) \\ &= (1-t) \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} P_i + t \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} P_i \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i+1} P_i + \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^{i+1} (1-t)^{n-i} P_i \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot \frac{n+1}{n+1-i} \cdot \frac{n+1-i}{n+1} \cdot t^i (1-t)^{n+1-i} P_i \\ &\quad + \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot \frac{n+1}{i+1} \cdot \frac{i+1}{n+1} t^{i+1} (1-t)^{n-i} P_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^n \frac{n+1-i}{n+1} B_i^{n+1}(t) P_i + \sum_{i=0}^n \frac{i+1}{n+1} B_{i+1}^{n+1}(t) P_i \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} \frac{n+1-i}{n+1} B_i^{n+1}(t) P_i + \sum_{i=1}^{n+1} \frac{i}{n+1} B_i^{n+1}(t) P_{i-1} \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} \frac{n+1-i}{n+1} B_i^{n+1}(t) P_i + \sum_{i=0}^{n+1} \frac{i}{n+1} B_i^{n+1}(t) P_{i-1} \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} B_i^{n+1}(t) \underbrace{\left[\frac{i}{n+1} P_{i+1} + \left(1 - \frac{i}{n+1} \right) P_i \right]}_{Q_i}.
\end{aligned}$$

Одавде добијамо да је крива α , која је одређена почетним скупом контролних тачака $P_0, P_1, \dots, P_n$, такође, одређена и новим скупом контролних тачака $Q_0, Q_1, \dots, Q_{n+1}$, за које важи:

$$Q_i = \frac{i}{n+1} P_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1} \right) P_i, \quad i \in \{0, 1, \dots, n+1\}. \quad (9)$$

Приметимо да је $Q_0 = P_0$ и $Q_{n+1} = P_n$ и да се тачке Q_i добијају поделом контролних дужи $P_{i-1}P_i$ у односу $\left(1 - \frac{i}{n+1} \right) : \frac{i}{n+1}$, $1 \leq i \leq n$. Видимо да тај однос поделе контролних дужи није константан као у де Кастељауовом алгоритму, већ зависи од вредности i , али је рачун веома сличан. На слици 13 приказано је повећање степена кубне Безијерове криве за један.



Слика 13: Повећање степена кубне Безијерове криве за један (GeoGebra)

Пример 5. Нека је Безијерова крива α_3 одређена контролним тачкама $P_0(0,0)$, $P_1(2,4)$, $P_2(3,2)$ и $P_3(5,-1)$. Одредити нови скуп контролних тачака после повећања степена ове криве за један.

Решење. Примењујући формулу (9) рачунамо тачке Q_i , $1 \leq i \leq 3$:

$$\begin{aligned}
Q_0 &= P_0 = (0,0), \\
Q_1 &= \frac{1}{4}P_0 + \frac{3}{4}P_1 = \left(\frac{3}{2}, 3 \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_2 &= \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2}P_2 = \left(\frac{5}{2}, 3\right), \\
Q_3 &= \frac{3}{4}P_2 + \frac{1}{4}P_3 = \left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right), \\
Q_4 &= P_3 = (5, -1).
\end{aligned}$$

△

Ако је потребно степен криве повећати за r , онда горе описани поступак треба поновити r пута. Означимо са $Q_i^{(r)}$, $i \in \{0, 1, \dots, n+r\}$ нове контролне тачке Безијерове криве после повећања степена за r . Важи следећа теорема.

Теорема 4. *Контролне тачке $Q_i^{(r)}$, $i \in \{0, 1, \dots, n+r\}$ Безијерове криве α дате су формулом:*

$$Q_i^{(r)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\binom{r}{i-k}}{\binom{n+r}{i}} P_k.$$

Доказ. Доказ изводимо математичком индукцијом по $r \geq 1$.

Б.И. $r = 1$

$$\begin{aligned}
Q_i^{(1)} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\binom{1}{i-k}}{\binom{n+1}{i}} P_k \\
&= \binom{n}{i-1} \cdot \frac{\binom{1}{1}}{\binom{n+1}{i}} \cdot P_{i-1} + \binom{n}{i} \cdot \frac{\binom{1}{0}}{\binom{n+1}{i}} \cdot P_i \\
&= \frac{i}{n+1} \cdot P_{i-1} + \frac{n+1-i}{n+1} \cdot P_i \stackrel{(9)}{=} Q_i
\end{aligned}$$

И.П. $Q_i^{(r-1)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\binom{r-1}{i-k}}{\binom{n+r-1}{i}} P_k$

И.К.

$$\begin{aligned}
Q_i^{(r)} &= \frac{i}{n+r} \cdot Q_{i-1}^{(r-1)} + \left(1 - \frac{i}{n+r}\right) Q_i^{(r-1)} \\
&= \frac{i}{n+r} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\binom{r-1}{i-1-k}}{\binom{n+r-1}{i-1}} P_k + \frac{n+r-i}{n+r} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\binom{r-1}{i-k}}{\binom{n+r-1}{i}} P_k \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left[\frac{i}{n+r} \cdot \frac{\binom{r-1}{i-1-k}}{\frac{(i-1)!(n+r-i)!}{(n+r-1)!}} + \frac{n+r-i}{n+r} \cdot \frac{\binom{r-1}{i-k}}{\frac{i!(n+r-i-1)!}{(n+r-1)!}} \right] P_k \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot \left[\frac{\binom{r-1}{i-1-k}}{\frac{(n+r)!}{i!(n+r-i)!}} + \frac{\binom{r-1}{i-k}}{\frac{(n+r)!}{i!(n+r-i)!}} \right] P_k \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\binom{r}{i-k}}{\binom{n+r}{i}} P_k.
\end{aligned}$$

□

Пример 6. *Повећати степен Безијерове криве α из претходног примера за два.*

Решење. Користећи формулу (4) рачунамо тачке $Q_i^{(2)}$, $i \in \{0, 1, \dots, 5\}$:

$$Q_0^{(2)} = P_0 = (0, 0),$$

$$Q_1^{(2)} = \binom{3}{0} \frac{\binom{2}{1}}{\binom{5}{1}} P_0 + \binom{3}{1} \frac{\binom{2}{0}}{\binom{5}{1}} P_1 = \left(\frac{6}{5}, \frac{12}{5} \right),$$

$$Q_2^{(2)} = \binom{3}{0} \frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} P_0 + \binom{3}{1} \frac{\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}} P_1 + \binom{3}{2} \frac{\binom{2}{0}}{\binom{5}{2}} P_2 = \left(\frac{21}{10}, 3 \right),$$

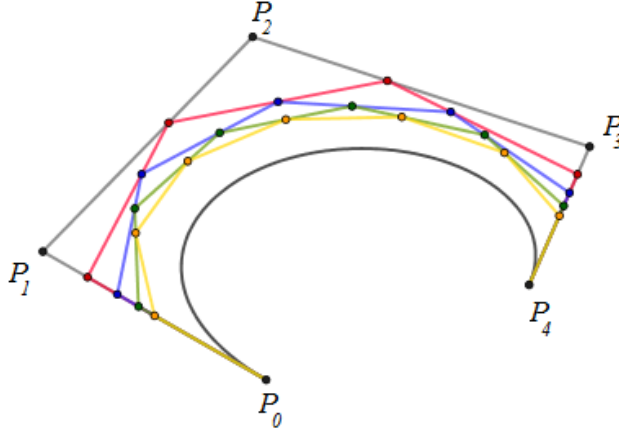
$$Q_3^{(2)} = \binom{3}{1} \frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{3}} P_1 + \binom{3}{2} \frac{\binom{2}{1}}{\binom{5}{3}} P_2 + \binom{3}{3} \frac{\binom{2}{0}}{\binom{5}{3}} P_3 = \left(\frac{29}{10}, \frac{23}{10} \right),$$

$$Q_4^{(2)} = \binom{3}{2} \frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{4}} P_2 + \binom{3}{3} \frac{\binom{2}{1}}{\binom{5}{4}} P_3 = \left(\frac{19}{5}, \frac{4}{5} \right),$$

$$Q_5^{(2)} = P_3 = (5, -1).$$

△

Степен Безијерове криве можемо повећавати неограничено много пута, при чему можемо приметити да што је веће r то се контролна полигонска линија приближава Безијеровој кривој (видети слику 14). Означимо са $\mathcal{E}^{(r)}P$ контролну полигонску линију Безијерове криве α одређене контролном полигонском линијом $P = P_0P_1 \dots P_n$, после повећања степена за r .



Слика 14: Повећање степена криве за 1 (црвено), 2 (плаво), 3 (зелено) и 4 (жуто) (GeoGebra)

Теорема 5. *Важи:*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathcal{E}^{(r)}P = \alpha.$$

Доказ. Фиксирајмо неки параметар $t \in [0, 1]$. Тада, за свако r можемо наћи индекс $i \in \{0, 1, \dots, n+r\}$ тако да $\frac{i}{n+r} \rightarrow t$, кад $r \rightarrow \infty$. О броју $\frac{i}{n+r}$ можемо размишљати као о параметру који фигурише по полигонској линији $\mathcal{E}^{(r)}P$ исто као што параметар t фигурише по кривој α . Треба доказати да важи:

$$\lim_{\frac{i}{n+r} \rightarrow t} Q_i^{(r)} = \alpha(t).$$

Помоћу Стирлингове формуле може се показати да је:

$$\lim_{\frac{i}{n+r} \rightarrow t} \frac{\binom{r}{i-j}}{\binom{n+r}{i}} = t^j (1-t)^{n-j},$$

па одавде следи да је:

$$\lim_{\frac{i}{n+r} \rightarrow t} Q_i^{(r)} = \lim_{\frac{i}{n+r} \rightarrow t} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{\binom{r}{i-j}}{\binom{n+r}{i}} P_j = \sum_{j=0}^n B_j^n(t) P_j = \alpha(t),$$

чиме је тврђење доказано. $\square$

3 Особине Безијерових кривих

Особина конвексног омотача. Појам и конвексног омотача је детаљно објашњен у додатку 6.1

Теорема 6. *За сваку тачку Безијерове криве важи да она припада конвексном омотачу својих контролних тачака, тј. свака тачка са Безијерове криве је конвексна комбинација контролних тачака.*

Доказ. Нека је

$$\alpha_n(t_0) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t_0) P_i$$

произволна тачка са Безијерове криве α_n , за неко $t_0 \in [0, 1]$. Треба показати да је та тачка конвексна комбинација тачака P_i , $i \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Прво,

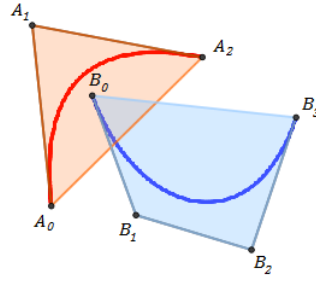
$$\sum_{i=0}^n B_i^n(t_0) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t_0^i (1-t_0)^{n-i} = (t_0 + 1 - t_0)^n = 1,$$

одакле следи да је $\alpha_n(t_0)$ барицентрична комбинација контролних тачака, а како је $B_i^n(t_0) \geq 0$ за свако $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, то је $\alpha_n(t_0)$ и конвексна комбинација истих тачака. $\square$

Дакле, јасно је да Безијерова крива неће ”изаћи” ван конвексног омотача својих контролних тачака.

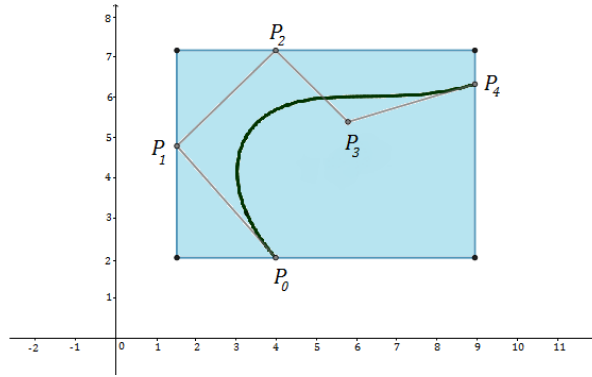
Ово својство има и практичну примену, нарочито у роботизи. На пример, направљен је робот чије руке праве покрете по неким Безијеровим кривама. Да би се избегли судари руку, а самим тим и скупа оштећења, потребно је извршити тзв. *проверу сметњи*, односно треба проверити да ли се Безијерове криве, по којима се руке крећу, секу. Уместо да тражимо могуће пресеке датих кривих, можемо урадити следеће: за сваку криву одредимо конвексни омотач, а онда одредимо да ли та два конвексна омотача имају пресечних тачака. У зависности од резултата те провере на роботу се врше одређене корекције. Наравно, може се десити да се конвексни омотачи секу, али одговарајуће Безијерове криве не (слика 15). То се дешава зато што конвексни омотач не апроксимира Безијерову криву довољно добро.

У пракси се, уместо конвексног омотача, чешће користе, тзв. **minmax правоугаоници**. То су правоугаоници најмање површине чије су странице паралелне координатним осама, а који садрже све контролне тачке (слика 16). На основу



Слика 15: Конвексни омотачи се секу, а криве не (GeoGebra)

особине конвексног омотача следи да ови правоугаоници морају садржати и одговарајућу Безијерову криву. Предност $\min$ тах правоугаоника у односу на конвексни омотач је у томе што је лакше проверити да ли се секу два правоугаоника него да ли се секу два произвољна конвексна многоугла.



Слика 16: $\min$ тах правоугаоник (GeoGebra)

Иначе, $\min$ тах правоугаоници се, у комбинацији са поделом криве на два дела, користе за одређивање пресека две Безијерове криве или Безијерове криве и произвољне праве. Размотримо први случај. Нека су дате две Безијерове криве α и β . За њих формирамо два $\min$ тах правоугаоника, $\mathcal{P}_\alpha$ и $\mathcal{P}_\beta$. На једноставан начин проверавамо да ли се они секу. Ако се не секу, ни криве α и β се неће сећи, а ако се секу онда поделимо, на пример, криву α у тачки $\alpha(\frac{1}{2})$ на два дела. Сада, за сваки тај део, поново, формирамо два $\min$ тах правоугаоника и испитујемо да ли се било који од њих сече са $\mathcal{P}_\beta$. Поступак понављамо све док $\min$ тах правоугаоници одређених делова криве не постану толико мали да се могу поистоветити са тачкама, које су, заправо, пресечне тачке Безијерових кривих α и β .

Афина инваријантност. За више информација о афиним пресликавањима видети књигу [6]. Важи следећа теорема.

Теорема 7. *Када се на Безијерову криву α_n која је одређена контролним тачкама $P_0, P_1, \dots, P_n$ примени афино пресликавање, добија се Безијерова крива α'_n која је одређена сликама $P'_0, P'_1, \dots, P'_n$ датих контролних тачака.*

Доказ. Нека је $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ било које афино пресликавање равни. Познато је да

за то пресликавање важи:

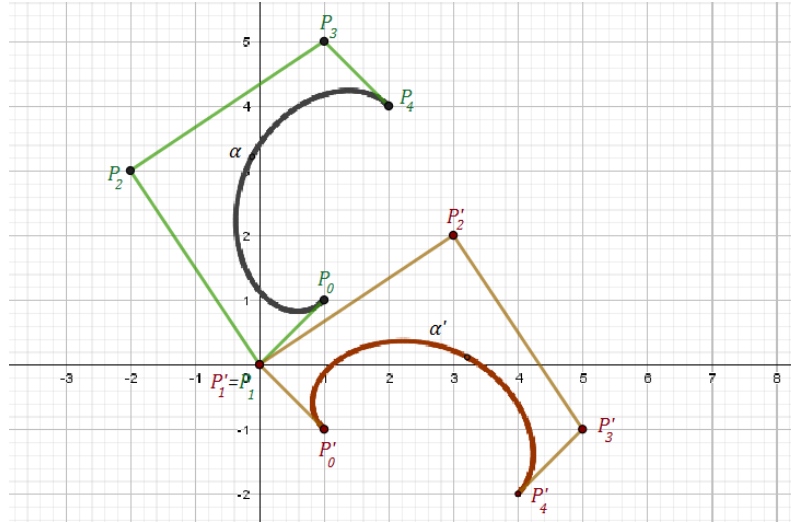
$$\phi(M) = A \cdot M + b,$$

где су A квадратна матрица ($\det A \neq 0$) и b вектор трансације. Из:

$$\begin{aligned} \phi(\alpha_n(t)) &= A \cdot \sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_i + b \\ &= \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \cdot A P_i + \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \cdot b \\ &= \sum_{i=0}^n B_i^n(t) (A P_i + b) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \phi(P_i), \quad t \in [0, 1], \end{aligned}$$

слиди да је слика Безијерове криве α_n при пресликавању ϕ Безијерова крива одређена контролним тачкама $\phi(P_i) = P'_i$, $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. $\square$

Из претходне теореме слиди да се афино пресликавање (ротација, трансација, скалирање, ...) Безијерове криве може извршити на врло једноставан начин. Наиме, уместо да афино пресликавање примењујемо на сваку тачку са дате криве, довољно је пресликати само њене контролне тачке, јер ће оне одређивати тражену слику.



Слика 17: Слика (браон) Безијерове криве (зелено) при ротацији за 270° око координатног почетка (GeoGebra)

Афина инваријантност нам омогућава да на врло једноставан начин докажемо следећу теорему.

Теорема 8. *Свака Безијерова крива степена 2 је део параболе.*

Доказ. Доказ дајемо по угледу на доказ теореме 8.1. из [6].

Нека су дате контролне тачке $P_0(-1, 1)$, $P_1(0, -1)$, $P_2(1, 1)$. Безијерова крива степена 2 одређена датим контролним тачкама има једначину:

$$\alpha_2(t) = (-1 + 2t, 4t^2 - 4t + 1), \quad t \in [0, 1]. \quad (10)$$

Приметимо да је $x(t) = 2t - 1$, $y(t) = (2t - 1)^2$ одакле следи да је та Безијерова крива део параболе $y = x^2$.

Нека су, сада, β_2 произвољна Безијерова крива степена 2 одређена контролним тачкама Q_0, Q_1, Q_2 и ϕ афино пресликавање које тачке Q_0, Q_1, Q_2 слика на P_0, P_1, P_2 , редом. Како су Безијерове криве афино инваријантне, следи да ће се крива β_2 пресликати на криву α_2 , а како афина пресликавања сликају параболу на параболу, а α_2 је део параболе, следи да ће и крива β_2 бити део параболе. $\square$

Теорема 9. *Круг (елипса, хипербола) се не може представити као Безијерова крива степена 2.*

Доказ теореме дајемо по угледу на [3].

Доказ. Доказаћемо да теорема важи у случају круга, јер се за елипсу и хиперболу ради аналогно.

Нека је круг дат једначином $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$, $p, q, r \in \mathbb{R}$ и $r > 0$. Претпоставимо супротно, тј. претпоставимо да се круг може представити као Безијерова крива степена 2 која је одређена контролним тачкама $P_0(x_0, y_0), P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$. Тада важи:

$$(x(t), y(t)) = (1 - t)^2(x_0, y_0) + 2t(1 - t)(x_1, y_1) + t^2(x_2, y_2), \quad t \in [0, 1].$$

Одавде следи да је:

$$\begin{aligned} x(t) &= at^2 + bt + c, \\ y(t) &= dt^2 + et + f, \end{aligned}$$

где су a, b, c, d, e, f одговарајући коефицијенти који зависе од координата контролних тачака. Заменом $x(t)$ и $y(t)$ у једначину круга, добијамо:

$$(at^2 + bt + c - p)^2 + (dt^2 + et + f - q)^2 = r^2.$$

Изједначавањем коефицијената који стоје уз t^4, t^3, t^2, t са нулом, добијамо:

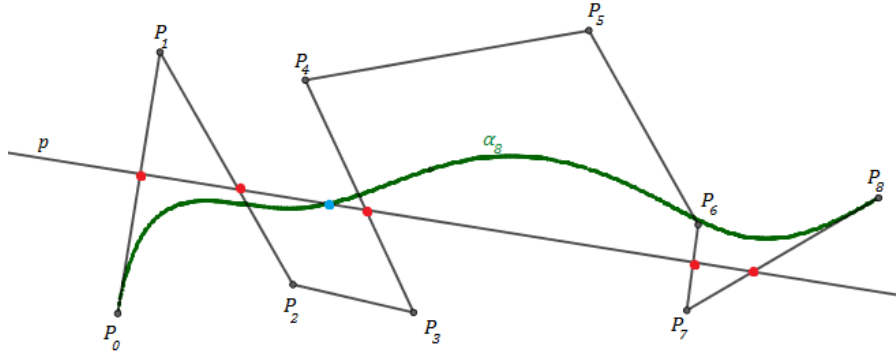
$$\begin{aligned} a^2 + d^2 &= 0, \\ ab + de &= 0, \\ b^2 + e^2 + 2a(c - p) + 2d(f - q) &= 0, \\ 2b(c - p) + 2a(f - q) &= 0. \end{aligned}$$

Одавде се добија да је $a = b = d = e = 0$, па следи да круг, као Безијерова крива, има једначину $(x(t), y(t)) = (c, f)$, што је контрадикција, јер је та крива само тачка. $\square$

Особина мање варијације. Важи следаћа теорема:

Теорема 10. *Нека су дате Безијерова крива α_n (одређена контролним тачкама $P_0, P_1, \dots, P_n$) и произвољна права p . Особина мање варијације тврди да је број пресечних тачака праве p и Безијерове криве мањи од броја пресечних тачака праве p и полигонске линије $P_0P_1 \dots P_n$.*

Наравно, број пресечних тачака у оба случаја не мора бити константан, али увек важи релација из ове теореме.

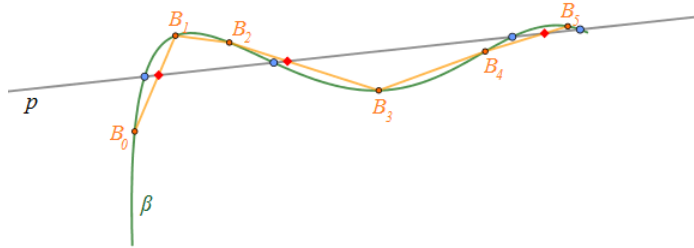


Слика 18: Број пресечних тачака праве и криве (плаво) је мањи од броја пресечних тачака праве и полигонске линије (црвено) (GeoGebra)

Доказ. Доказ који овде дајемо је дескриптивног карактера, при чему се позивамо на очигледност.

Нека је p фиксирана права неке равни и нека је $l : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{N}_0$ функција која одређује број пресечних тачака те праве p и објекта O исте равни. Пре него што размотримо случај Безијерове криве, посматрајмо, за почетак, неку произвољну криву β на слици 19. Изаберимо на тој кривој тачке $B_0, B_1, \dots, B_n$ тим редом, тако да оне формирају полигонску линију $B_0B_1 \dots B_n$. За ту полигонску линију рећи ћемо да је *линеарни интерполант* криве β и пишемо:

$$B_0B_1 \dots B_n = \mathcal{LI}(\beta).$$



Слика 19: Крива β (зелено) и њен линеарни интерполант (наранџасто) (GeoGebra)

Тада важи да је:

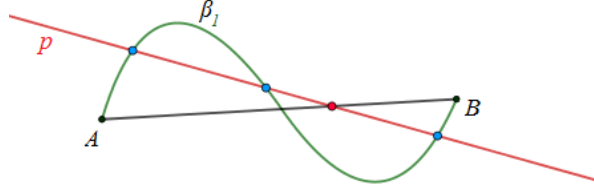
$$l(\beta) \geq l(\mathcal{LI}(\beta)). \quad (11)$$

Ово је очигледна последица очигледне чињенице да ако се део криве β (означен са β_1) између две тачке A и B (које јој припадају) замени са дужи AB , онда је број пресечних тачака праве p и дела криве β_1 већи до једнак од броја пресечних тачака праве p и дужи AB (видети слику 20).

Вратимо се, сада, на Безијерову криву α_n са контролном полигонском линијом $P = P_0P_1 \dots P_n$. Примењујући поступак повећања степена Безијерове криве за 1 добијамо нову полигонску линију $\mathcal{E}^{(1)}P = \mathcal{LI}(P)$ са $n + 2$ контролних тачака које

се налазе на контролној полигонској линији P . Одатле, на основу (11), следи да је:

$$l(P) \geq l(\mathcal{E}^{(1)}P).$$



Слика 20: $l(\beta_1) \geq l(AB)$ (GeoGebra)

Поновним повећањем степена криве за 1 добијамо полигонску линију $\mathcal{E}^{(2)}P = \mathcal{LI}(\mathcal{E}^{(1)}P)$, па, опет, на основу (11) следи:

$$l(P) \geq l(\mathcal{E}^{(1)}P) \geq l(\mathcal{E}^{(2)}P).$$

После повећања степена Безијерове криве α_n за r добијамо да важи:

$$l(P) \geq \dots \geq l(\mathcal{E}^{(r)}P).$$

Како на основу теореме 5 важи да је $\lim_{r \rightarrow \infty} \mathcal{E}^{(r)}P = \alpha_n$, то важи:

$$l(P) \geq l(\alpha_n),$$

чиме је теорема доказана. За прецизнији доказ видети [5]. □

Последица 1. *Ако је полигонска линија Безијерове криве α_n конвексна, онда је и Безијерова крива конвексна.*

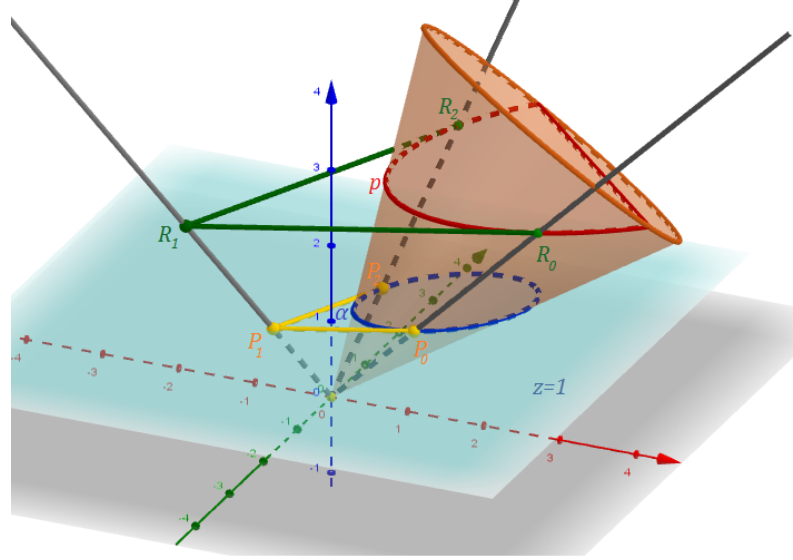
Доказ. Доказ ове последице следи из чињенице да ако је контролна полигонска линија конвексна, онда је број пресечних тачака те полигонске линије и било које праве 0, 1 или 2. На основу претходне теореме следи да је број пресечних тачака исте праве и одговарајуће Безијерове криве, такође, 0, 1 или 2, па је и та крива конвексна. □

4 Рационалне Безијерове криве

У претходној глави доказали смо да је свака Безијерова крива степена 2 део параболе, а да се делови кружнице, елипсе и хиперболе не могу представити као Безијерове криве. С друге стране, познато је да се пројективним пресликавањем параболола може прсликати на било коју конику, стога би нам највише одговарало када би Безијерове криве биле пројективно инваријантне. Међутим, Безијерове криве (као полиномијалне), јесу афино, али нису пројективно инваријантне, па из тог разлога треба увести нову класу Безијерових кривих које задовољавају тај услов, а то су **рационалне Безијерове криве**.

4.1 Рационалне Безијерове криве степена 2

Пошто рационалне Безијерове криве треба дефинисати тако да буду пројективно инваријантне, кренућемо од чињенице да се пројективним пресликавањем (конкретно централном пројекцијом у односу на координатни почетак $O(0, 0, 0)$) параболова слика на било коју конику (елипсу, хиперболу, параболу). Надаље ћемо под пројективним пресликавањем подразумевати централну пројекцију на раван $z = 1$ у односу на тачку O .



Слика 21: Део параболое (црвено) пројектује се на део елипсе (плаво) у равни $z = 1$ (GeoGebra)

Означимо са $p(t)$, $t \in [0, 1]$ део параболое у простору $\mathbb{R}^3$ који је одређен контролним тачкама R_0, R_1 и R_2 , а са $r(t)$, $t \in [0, 1]$ криву насталу пројективним пресликавањем дела p .

Посматрајмо, за почетак, тачку $r(t_0)$, за неко фиксирано $t_0 \in [0, 1]$. Њене координате у простору су $(x(t_0), y(t_0), 1)$ и она је слика одговарајуће тачке $p(t_0)$ при пројективном пресликавању. Приметимо да су тачке $r(t_0), p(t_0)$ и O колинеарне. Права која садржи O и $r(t_0)$ има једначину:

$$\frac{x}{x(t_0)} = \frac{y}{y(t_0)} = \frac{z}{1} = w, \quad w \in \mathbb{R},$$

па пошто и тачка $p(t_0)$ припада овој правој, за неко конкретно $w(t_0) \in \mathbb{R}$ она има координате $(w(t_0)x(t_0), w(t_0)y(t_0), w(t_0))$. Дакле, $p(t_0) = w(t_0)r(t_0)$. Генерално, за свако $t \in [0, 1]$ важи:

$$p(t) = w(t) \cdot r(t). \quad (12)$$

Трећа координата $w(t)$ тачака $p(t)$ мора бити квадратни израз по t , па се он може записати као:

$$w(t) = w_0 \cdot B_0^2(t) + w_1 \cdot B_1^2(t) + w_2 \cdot B_2^2(t), \quad (13)$$

где су $w_0, w_1, w_2 > 0$ позитивни реални бројеви такви да важи $R_i = w_i P_i$, $i \in \{0, 1, 2\}$. Заменом (13) у (12) следи:

$$p(t) = \sum_{i=0}^2 w_i B_i^2(t) \cdot r(t).$$

С друге стране,

$$p(t) = \sum_{i=0}^2 B_i^2(t) R_i = \sum_{i=0}^2 B_i^2(t) \cdot w_i P_i,$$

па из претходне две једнакости следи:

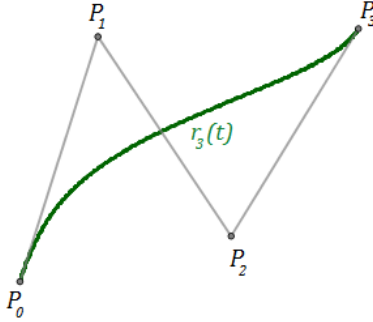
$$r(t) = \frac{\sum_{i=0}^2 w_i B_i^2(t) P_i}{\sum_{i=0}^2 w_i B_i^2(t)}. \quad (14)$$

Дакле, добили смо једначину криве $r(t)$ која представља рационалну Безијерову криву другог степена. Уопштавајући целу причу, дефинишимо рационалне Безијерове криве степена n .

Рационална Безијерова крива r_n степена n , ($n \geq 1$) је пресликавање $r_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ дато са:

$$r_n(t) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t) P_i}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)}. \quad (15)$$

Тачке P_i , $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ називамо **контролним тачкама**, а бројеве $w_0, w_1, \dots, w_n > 0$ зовемо **тежинама**, док су $B_i^n(t)$, $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ Бернштајнови полиноми.



Слика 22: Рационална Безијерова крива степена 3 задата контролним тачкама P_0, P_1, P_2, P_3 и тежинама w_0, w_1, w_2, w_3 (GeoGebra)

Пример 7. Изразити четвртину јединичног круга $x = \cos \phi$, $y = \sin \phi$, $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ као рационалну Безијерову криву.

Решење. Уместо параметра ϕ уводимо параметар t сменом:

$$t = \tan \frac{\phi}{2}.$$

Одавде се добија да је $\cos \phi = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin \phi = \frac{2t}{1+t^2}$, тако да добијемо рационалну параметризацију четвртине круга:

$$x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad y = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad t \in [0, 1]. \quad (16)$$

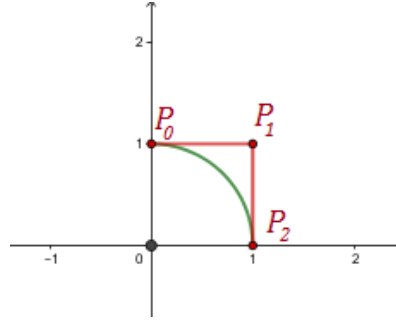
Именилац у (16) треба записати у облику имениоца из формуле (14), како бисмо нашли тежине w_0, w_1, w_2 .

$$\begin{aligned} 1 + t^2 &= w_0 \cdot (1 - t)^2 + 2w_1 t(1 - t) + w_2 t^2 \\ &= w_0 + (-2w_0 + 2w_1)t + (w_0 - 2w_1 + w_2)t^2. \end{aligned}$$

Одавде добијамо да је $w_0 = 1, w_1 = 1, w_2 = 2$. Остаје још да нађемо контролне тачке $P_i(x_i, y_i)$, $i \in \{0, 1, 2\}$. Њих налазимо изједначавањем бројилаца у једнакостима (16) и (14):

$$(2t, 1 - t^2) = \sum_{i=0}^2 w_i B_i^2(t) \cdot (x_i, y_i).$$

После једноставног рачуна, добијамо координате контролних тачака: $P_0(0, 1)$, $P_1(1, 1)$, $P_2(1, 0)$.



Слика 23: Јединични круг $r_2(t)$, $t \in [0, 1]$ (GeoGebra)

△

Ако су све тежине једнаке, онда је рационална Безијерова крива, заправо, стандардна (нерационална) Безијерова крива.

Тежине имају улогу обликовања криве. Наиме, ако се једна тежина w_i , на пример, повећа, онда ће се крива „повући“ према одговарајућој контролној тачки P_i . На слици 24 приказане су две рационалне Безијерове криве степена 2 са истим контролним тачкама, али са различитим тежинама w_1 .

Особине рационалних Безијерових кривих. За рационалне Безијерове криве важе исте особине као и за стандардне, при чему додајемо још две: пројективна инваријантност и линеарна прецизност.

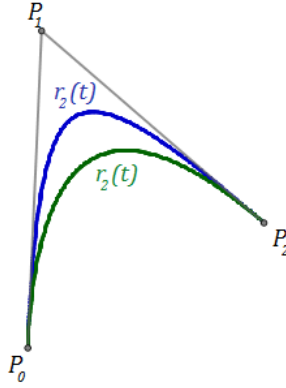
- 1) **Особина конвексног омотача.** Како за коефицијенте који стоје уз контролне тачке важи:

$$\sum_{i=0}^n \frac{w_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)} = 1$$

и како су сви коефицијенти ненегативни, то следи да за рационалне Безијерове криве кажи особина конвексног омотача.

- 2) **Особина афине инваријантности.** Нека је ϕ неко афино пресликавање које је задато својим линеарним делом, тј. матрицом A и својим трансляторним делом, тј. вектором b , односно важи:

$$\phi(M) = A \cdot M + b,$$



Слика 24: $w_1 = 2$ (зелено), $w_1 = 4$ (плаво) (GeoGebra)

за неку произволну тачку M . Примењујући пресликавање ϕ на сваку тачку $r_n(t)$, $t \in [0, 1]$ добијамо:

$$\begin{aligned}
 \phi(r_n(t)) &= A \cdot r_n(t) + b \\
 &= A \cdot \frac{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t) P_i}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)} + b \\
 &= \frac{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t) \cdot A P_i}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)} + \frac{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t) \cdot b}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)} \\
 &= \frac{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t) (A P_i + b)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)} = \frac{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t) \phi(P_i)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)}.
 \end{aligned}$$

Дакле, при афином пресликавању рационалне Безијерове криве довољно је пресликати само контролне тачке, јер ће њихове слике одређивати слику саме криве при датом пресликавању.

Пример 8. Ротирати четвртину јединичног круга око координатног почетка за 60° .

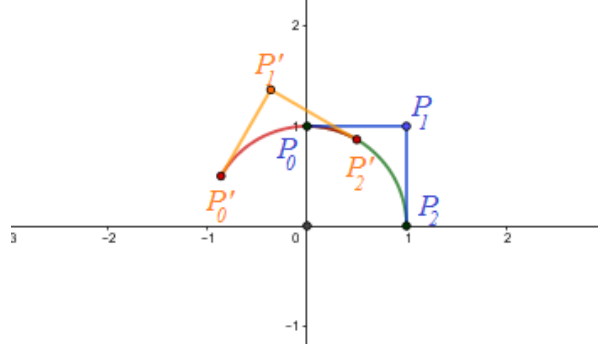
Решење. Четвртина круга је рационална Безијерова крива одређена контролним тачкама $P_0(0, 1)$, $P_1(1, 1)$ и $P_2(1, 0)$ и њиховим тежинама $w_0 = 1$, $w_1 = 1$ и $w_2 = 2$, редом. Матрица ротације за угао 60° је:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix},$$

па ротацијом контролних тачака, добијамо нове контролне тачке $P'_0\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $P'_1\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$, $P'_2\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Из доказа особине афине инваријантности видимо да тежине контролних тачака остају исте. Дакле, ротирана четвртина

јединичног круга за 60° има једначину:

$$r'(t) = \frac{\sum_{i=0}^2 w_i B_i^2(t) P'_i}{\sum_{i=0}^2 w_i B_i^2(t)} = \left(\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} + t + \frac{\sqrt{3}}{2} t^2}{1 + t^2}, \frac{\frac{1}{2} + \sqrt{3}t - \frac{1}{2} t^2}{1 + t^2} \right), \quad t \in [0, 1].$$



Слика 25: Слика уз пример 8 (GeoGebra)

△

- 3) **Особина мање варијације.** Број пресечних тачака било које праве са рационалном Безијеровом кривом је мањи од броја пресечних тачака исте праве са контролном полигонском линијом исте криве.
- 4) **Крајње тачке припадају кривој.** Заменом вредности 0 и 1 уместо параметра t у једначину (15) добијамо:

$$r_n(0) = \frac{w_0 \cdot (1-0)^n \cdot P_0 + \sum_{i=1}^n w_i B_i^n(0) P_i}{w_0 \cdot (1-0)^n + \sum_{i=1}^n w_i B_i^n(0)} = P_0,$$

$$r_n(1) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} w_i B_i^n(1) P_i + w_n \cdot 1^n \cdot P_n}{\sum_{i=0}^{n-1} w_i B_i^n(1) + w_n \cdot 1^n} = P_n.$$

- 5) **Предефинисање на произвољном сегменту $[a, b]$.** Рационалне Безијерове криве се могу дефинисати и на произвољном сегменту $[a, b]$ увођењем смене (8) из поглавља 1.2, при чему једначина (15) постаје:

$$r_n(u) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n\left(\frac{u-a}{b-a}\right) P_i}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n\left(\frac{u-a}{b-a}\right)} = \frac{\sum_{i=0}^n w_i \binom{n}{i} (u-a)^i (b-u)^{n-i} P_i}{\sum_{i=0}^n w_i \binom{n}{i} (u-a)^i (b-u)^{n-i}}, \quad u \in [a, b].$$

- 6) **Тангентни вектори у тачкама P_0 и P_n су колинеарни векторима $\overrightarrow{P_0P_1}$ и $\overrightarrow{P_nP_{n-1}}$.** Једначину (15) записаћемо у облику:

$$r_n(t) = \frac{p_n(t)}{w_n(t)}, \quad t \in [0, 1],$$

где су $p_n(t) = \sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t) P_i$ и $w_n(t) = \sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)$. Диференцирањем једначина $p_n(t)$ и $w_n(t)$ добијамо:

$$p'_n(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) (w_{i+1} P_{i+1} - w_i P_i) \text{ и}$$

$$w'_n(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) (w_{i+1} - w_i).$$

Како је

$$r'_n(t) = \frac{p'_n(t)w_n(t) - p_n(t)w'_n(t)}{w_n^2(t)},$$

после једноставног рачуна добијамо:

$$r'_n(0) = n \frac{w_1}{w_0} \overrightarrow{P_0P_1},$$

$$r'_n(1) = n \frac{w_{n-1}}{w_n} \overrightarrow{P_nP_{n-1}},$$

одакле следи да су тангентни вектори у тачкама $r_n(0) = P_0$ и $r_n(1) = P_n$ колинеарни векторима $\overrightarrow{P_0P_1}$ и $\overrightarrow{P_nP_{n-1}}$, редом.

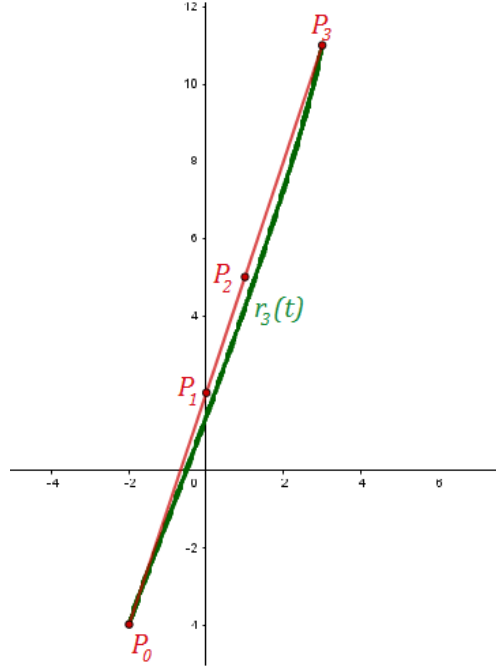
- 7) **Пројективна инваријантност.** Да су рационалне Безијерове криве пројективно инваријантне следи на основу саме дефиниције (15). Дакле, при произвољном пројективном пресликавању довољно је пресликати контролне тачке дате криве, а њихове слике одређиваће нову рационалну Безијерову криву која је слика почетне.
- 8) **Особина линеарне прецизности.** Нека је r_n рационална Безијерова крива одређена колинеарним контролним тачкама $P_0, P_1, \dots, P_n$. Особина линеарне прецизности тврди да се за сваку контролну тачку P_i може наћи одговарајућа тежина w_i тако да крива r_n није дуж P_0P_n (видети слику 26). Наиме, све контролне тачке у овом случају можемо записати на следећи начин:

$$P_i = (1 - a_i) \cdot P_0 + a_i \cdot P_n, \quad i \in \{0, 1, \dots, n\},$$

где су a_i произвољни реални бројеви. Ако тежине дефинишемо тако да је $w_0 = 1$, а

$$w_i = \frac{i}{n+1-i} \cdot \frac{1-a_{i-1}}{a_i} \cdot w_{i-1}, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\},$$

онда одговарајућа рационална Безијерова крива неће бити линеарна. Доказ видети у [2].



Слика 26: Рационална Безијерова крива одређена колинеарним контролним тачкама $P_0(-2, -4)$, $P_1(0, 2)$, $P_2(1, 5)$, $P_3(3, 11)$ и тежинама $w_0 = 1$, $w_1 = \frac{5}{6}$, $w_2 = \frac{5}{12}$, $w_3 = \frac{1}{2}$ (GeoGebra)

4.2 Рационални де Кастељау алгоритам

Тачке на рационалној Безијеровој кривој r_n могу се одредити и уз помоћ де Кастељау алгоритма, који се може, у овом случају, извести на неколико начина.

Прво, могуће је применити стандардни де Кастељау алгоритам на тачке $w_i P_i$ из бројиоца⁵, као и на тежине w_i , $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ из имениоца једнакости (15) и одговарајуће вредности поделити. Приметимо да, притом, нисмо изашли из равни $z = 1$. Међутим, овакав начин примене де Кастељау алгоритма је нумерички веома нестабилан, јер се за велике вредности тежина w_i може десити да тачке $w_i^r P_i^r$ које се добију у r -тој итерацији изађу ван конвексног омотача контролних тачака $P_0, P_1, \dots, P_n$.

Друго, могуће је применити стандардни де Кастељау алгоритам на тачке $(w_i P_i, w_i)$, $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ ⁶. Ово су контролне тачке нерационалне Безијерове криве у простору $\mathbb{R}^3$, чијим се централним пројектовањем у односу на тачку O на раван $z = 1$ добија рационална Безијерова крива са контролним тачкама P_i , $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Дакле, у r -тој итерацији добија се:

$$\begin{pmatrix} w_i^r P_i^r \\ w_i^r \end{pmatrix} = (1-t) \cdot \begin{pmatrix} w_{i-1}^{r-1} P_{i-1}^{r-1} \\ w_{i-1}^{r-1} \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} w_{i+1}^{r-1} P_{i+1}^{r-1} \\ w_{i+1}^{r-1} \end{pmatrix}, \quad (17)$$

при чему се пројекцијом ове тачке на раван $z = 1$ добија тачка у r -тој итерацији са рационалне Безијерове криве:

$$P_i^r = (1-t) \cdot \frac{w_{i-1}^{r-1}}{w_i^r} P_{i-1}^{r-1} + t \cdot \frac{w_{i+1}^{r-1}}{w_i^r} P_{i+1}^{r-1}, \quad (18)$$

⁵ $w_i P_i(w_i x_i, w_i y_i)$ су тачке равни $z = 1$, па трећу координату-јединицу не пишемо.

⁶ $(w_i P_i, w_i) = (w_i x_i, w_i y_i, w_i)$

где је $w_i^r(t) = (1-t) \cdot w_i^{r-1}(t) + t \cdot w_{i+1}^{r-1}(t)$. Међутим, овакав начин је технички захтеван, па се најчешће прибегава тзв. **рационалном де Кастељау алгоритму**. За разлику од стандардног алгоритма, који се заснива на дељењу контролних дужи у размери $t : (1-t)$, рационални алгоритам се заснива на дељењу контролних дужи двома тачкама тако да је дворазмера одговарајућих тачака једнака $\frac{1-t}{t}$.

Објаснимо, прво, појам дворазмере. Нека су дате 4 колинеарне тачке A, B, C и D тако да важи:

$$\begin{aligned} C &= \alpha A + \beta B, \\ D &= \gamma A + \delta B, \end{aligned}$$

где су $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ произвољни реални бројеви. **Дворазмера** тачака A, B, C, D је број:

$$(A, B, C, D) = \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\delta}{\gamma}.$$

Може се показати да је дворазмера инваријантна у односу на пројективно пресликавање. За више информација о дворазмери видети [6].

Циљ је на свакој контролној дужи $P_i^r P_{i+1}^r$, $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ у r -тој итерацији ($r = 0, 1, \dots, n$) одредити тачку P_i^{r+1} , али без коришћења стандардног алгоритма. Нека је Q_i^r тачка са праве $P_i^r P_{i+1}^r$ тако да је:

$$\frac{\overrightarrow{P_i^r Q_i^r}}{\overrightarrow{Q_i^r P_{i+1}^r}} = \frac{w_{i+1}^r}{w_i^r}.$$

Одатле следи да је:

$$Q_i^r = \frac{w_i^r}{w_i^r + w_{i+1}^r} P_i^r + \frac{w_{i+1}^r}{w_i^r + w_{i+1}^r} P_{i+1}^r, \quad i \in \{0, 1, \dots, n-r\}. \quad (19)$$

Тачка Q_i се зове и *центар масе*, јер успоставља равнотежу између тачака P_i^r и P_{i+1}^r са тежинама w_i^r и w_{i+1}^r , редом. На основу (18), за тражену тачку P_i^{r+1} треба да важи:

$$P_i^{r+1} = (1-t) \cdot \frac{w_i^r}{w_i^{r+1}} P_i^r + t \cdot \frac{w_{i+1}^r}{w_i^{r+1}}. \quad (20)$$

Из (19) и (20) следи:

$$(P_i^r, P_{i+1}^r, Q_i^r, P_i^{r+1}) = \frac{w_{i+1}^r}{w_i^r} : \frac{tw_{i+1}^r}{(1-t)w_i^r} = \frac{1-t}{t}.$$

Исто као у нерационалном случају, у r -тој итерацији имамо $n-r+1$ тачака, а поступак понављамо све док у n -тој итерацији не добијемо тачку P_0^n која представља тачку са одговарајуће рационалне криве.

Пример 9. *Применом рационалног де Кастељау алгоритма, одредити тачку $r_3(\frac{1}{2})$ са рационалне Безијерове криве $r_3(t)$ која је одређена контролним тачкама $P_0(0,0)$, $P_1(1,3)$, $P_2(2,-2)$ и $P_3(4,1)$, чије су тежине $w_0 = 1$, $w_1 = 2$, $w_2 = 2$ и $w_3 = 1$, редом.*

Решење. У првој итерацији, прво, одређујемо тачке Q_0, Q_1, Q_2 тако да задовољавају једнакост (19), а затим тачке P_i^1 тако да је дворазмера $(P_i, P_{i+1}, Q_i, P_i^1) =$

1, $i \in \{0, 1, 2\}$.

Рачунамо тачку Q_0 :

$$Q_0 = \frac{w_0}{w_0 + w_1} P_0 + \frac{w_1}{w_0 + w_1} P_1 = \frac{1}{3} P_0 + \frac{2}{3} P_1 = \left(\frac{2}{3}, 2 \right).$$

Из дефиниције дворазмере имамо:

$$(P_0, P_1, Q_0, P_0^1) = \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\delta}{\gamma} = 1,$$

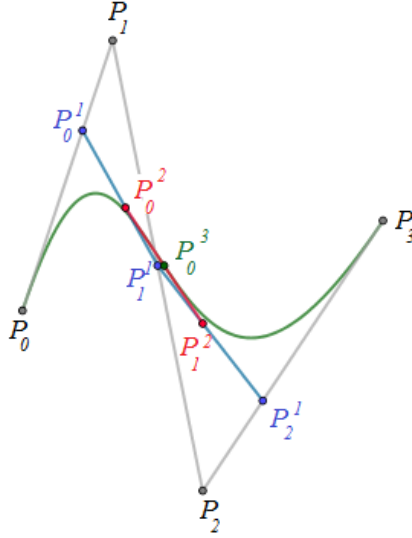
одакле следи да је $\frac{\delta}{\gamma} = \frac{\beta}{\alpha}$. Из тачке Q_0 налазимо да је $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = \frac{2}{3}$. Оно што увек треба имати на уму кад се рачунају координате тачака је то да оне (заједно са контролним тачкама) припадају равни $z = 1$ и да је њихова трећа координата увек једнака јединици. На основу тога важи:

$$P_0^1(x_0^1, y_0^1, 1) = \gamma(0, 0, 1) + 2\gamma(1, 3, 1),$$

одакле добијамо да је $P_0^1(\frac{2}{3}, 2)$. Тежина w_0^1 тачке P_0^1 је:

$$w_0^1 = \frac{1}{2} w_0 + \frac{1}{2} w_1 = \frac{3}{2}.$$

Приметимо, још, да важи $Q_i^r = P_i^{r+1}$, $r \in \{0, 1, 2\}$, $i \in \{0, 1, \dots, 3-r\}$, јер је дворазмера једнака јединици. Примењујући овај поступак у свим итерацијама и



Слика 27: Слика уз пример 9 (GeoGebra)

на одговарајуће контролне тачке добијамо следеће.

Прва итерација:

$$P_0^1 \left(\frac{2}{3}, 2 \right), w_0^1 = \frac{3}{2},$$

$$P_1^1 \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right), w_1^1 = 2,$$

$$P_2^1 \left(\frac{8}{3}, -1 \right), w_2^1 = \frac{3}{2}.$$

Друга итерација:

$$P_0^2 \left(\frac{8}{7}, \frac{8}{7} \right), w_0^2 = \frac{7}{4},$$

$$P_1^2 \left(2, -\frac{1}{7} \right), w_1^2 = \frac{7}{4}.$$

Трећа итерација:

$$P_0^3 \left(\frac{11}{7}, \frac{1}{2} \right), w_0^3 = \frac{7}{4}.$$

△

Последице рационалног де Кастељау алгоритма изводе се аналогно последицама у нерационалном случају.

5 Безијерове површи

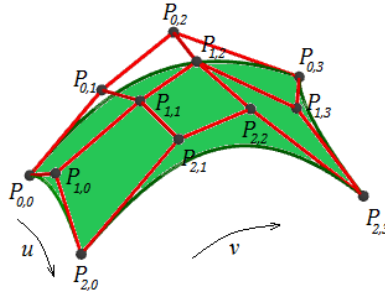
Причу са Безијеровим кривама и њиховим рационалним паровима уопштићемо на Безијерове површи и рационалне Безијерове површи, које представљају основне објекте у рачунарској графици.

5.1 Дефиниција Безијерових површи

Нека су $P_{i,j}$, $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, $j \in \{0, 1, \dots, m\}$, ($n, m \geq 1$) дате тачке у простору $\mathbb{R}^3$. **Безијерова површ** $\varphi_{n,m}$ степена (n, m) је пресликавање $\varphi_{n,m} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ тако да важи:

$$\varphi_{n,m}(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_i^n(u) B_j^m(v) P_{i,j}. \quad (21)$$

Тачке $P_{0,0}, P_{0,1}, \dots, P_{0,m}, P_{1,0}, P_{1,1}, \dots, P_{1,m}, \dots, P_{n,0}, P_{n,1}, \dots, P_{n,m}$ зовемо **контролним тачкама**, док четворке $P_{i,j}, P_{i,j+1}, P_{i+1,j+1}, P_{i+1,j}$ повезане дужима чине **контролну мрежу**. На слици 28 приказана је Безијерова површ степена $(2, 3)$.

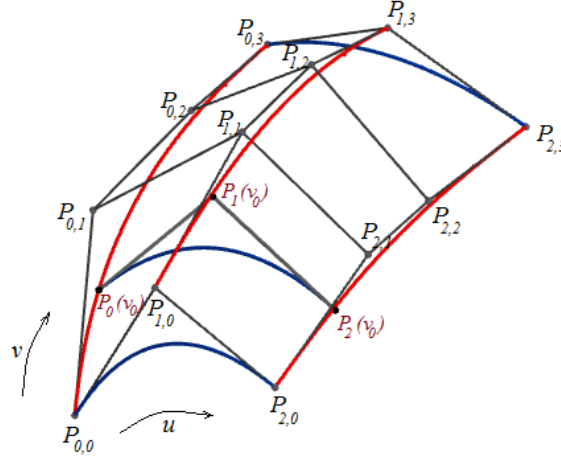


Слика 28: Безијерова површ степена $(2, 3)$ (GeoGebra)

За Безијерове површи кажемо још да су оне тзв. **тензорски производ** Безијерових кривих степена n и m . Наиме, запишимо једнакост (21) на следећи начин:

$$\varphi_{n,m}(u, v) = \sum_{i=0}^n B_i^n(u) \sum_{j=0}^m B_j^m(v) P_{i,j} = \sum_{i=0}^n B_i^n(u) \cdot P_i(v),$$

где су $P_i(v) = \sum_{j=0}^m B_j^m(v)P_{i,j}$, $i \in 0, 1, \dots, n$, Безијерове криве степена m , а укупно их има $n+1$ (на слици 29 те криве су црвене). Ако фиксирамо параметар $v = v_0$, на свакој од ових кривих одређујемо по једну тачку $P_i(v_0)$, које су сада контролне тачке за криву $\sum_{i=0}^n B_i^n(u)P_i(v_0)$ (на слици 29 су плаве) која припада површи $\varphi_{n,m}$. Практично, површ $\varphi_{n,m}$ добијамо „шетањем“ плаве криве по црвеној. Исту површ бисмо добили „шетањем“ црвене криве по плавој.



Слика 29: Тензорски производ Безијерових кривих степена 3 (црвено) и Безијерових кривих степена 2 (плаво) (GeoGebra)

Из претходног још можемо закључити да фиксирањем параметра $v = v_0$ (односно $u = u_0$) добијамо Безијерову криву $\varphi_{n,m}(u, v_0)$ (односно $\varphi_{n,m}(u_0, v)$) степена n (односно m):

$$\varphi_{n,m}(u, v_0) = \sum_{i=0}^n B_i^n(u)P_i(v_0), \text{ где је } P_i(v_0) = \sum_{j=0}^m B_j^m(v_0)P_{i,j},$$

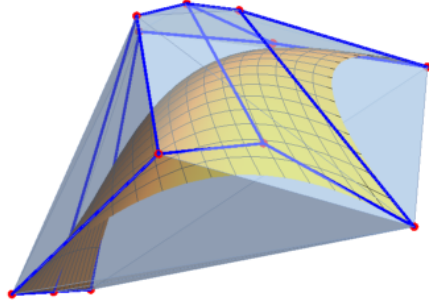
$$\varphi_{n,m}(u_0, v) = \sum_{j=0}^m B_j^m(v)Q_j(u_0), \text{ где је } Q_j(u_0) = \sum_{i=0}^n B_i^n(u_0)P_{i,j}.$$

Приметимо, уз то, да су параметарске криве $\varphi_{n,m}(u, 0)$, $\varphi_{n,m}(u, 1)$, $\varphi_{n,m}(0, v)$, $\varphi_{n,m}(1, v)$ ивичне криве површи $\varphi_{n,m}$.

Особине Безијерових површи. За Безијерове површи важе сличне особине као за Безијерове криве.

- 1) Безијерова површ има својство **конвексног омотача**, тј. она не излази ван конвексног омотача својих контролних тачака. То следи из чињенице да је $B_i^n(u)B_j^m(v) \geq 0$, за свако $0 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq m$ и из једнакости:

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_i^n(u)B_j^m(v) = \underbrace{\sum_{i=0}^n B_i^n(u)}_1 \cdot \underbrace{\sum_{j=0}^m B_j^m(v)}_1 = 1.$$



Слика 30: Конвексни омотач Безијерове површи (Mathematica)

- 2) Безијерове површи су **афино инваријантне**. Нека је $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ произвољно афино пресликавање дато са:

$$\phi(M) = A \cdot M + b,$$

где је $A_{3 \times 3}$ матрица, а $b \in \mathbb{R}^3$ вектор транслације. Тада важи:

$$\begin{aligned} \phi(\varphi_{n,m}) &= A \cdot \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_i^n(u) B_j^m(v) P_{i,j} + b = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_i^n(u) B_j^m(v) (A \cdot P_{i,j} + b) \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_i^n(u) B_j^m(v) \phi(P_{i,j}). \end{aligned}$$

Напоменимо да Безијерове површи нису пројективно инваријантне (слично Безијеровим кривама), па их не можемо пресликати пројективним пресликавањем, а да притом као резултат добијемо Безијерову површ.

- 3) Контролне тачке $P_{0,0}, P_{1,0}, P_{0,1}, P_{1,1}$ припадају одговарајућој Безијеровој површи $\varphi_{n,m}$:

$$\begin{aligned} \varphi_{n,m}(0,0) &= P_{0,0}, & \varphi_{n,m}(1,0) &= P_{n,0}, \\ \varphi_{n,m}(0,1) &= P_{0,m}, & \varphi_{n,m}(1,1) &= P_{n,m}. \end{aligned}$$

То су ћошкови дате Безијерове површи.

Најједноставнији пример Безијерових површи је Безијерова површ степена $(1,1)$ одређена са 4 контролне тачке $P_{0,0}, P_{0,1}, P_{1,0}, P_{1,1}$ и то је део хиперболичног параболоида (седла). Наиме, хиперболички параболоид је праволинијска површ⁷ и као таква, има једначину $z = xy$. Узимајући 4 тачке са параболоида :

$$P_{0,0}(0,0,0 \cdot 0), P_{1,0}(2,0,2 \cdot 0), P_{0,1}(0,2,0 \cdot 2), P_{1,1}(2,2,2 \cdot 2)$$

⁷Праволинијска површ - површ која настала кретањем праве по некој кривој.

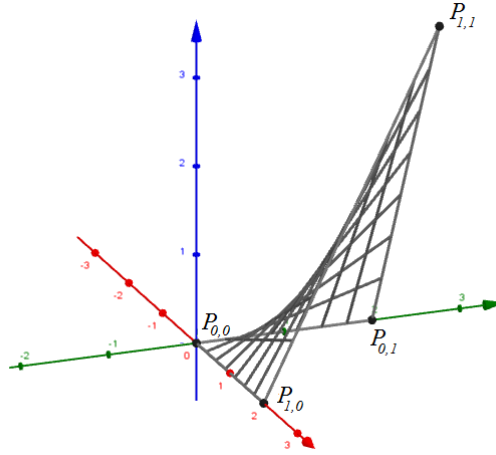
за контролне тачке, запишимо једначину одговарајуће Безијерове површи:

$$\begin{aligned}
\varphi_{1,1}(u, v) &= \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 B_i^1(u) B_j^1(v) P_{i,j} \\
&= \sum_{i=0}^1 B_i^1(u) \cdot [(1-v)P_{i,0} + vP_{i,1}] \\
&= (1-u)[(1-v)P_{0,0} + vP_{0,1}] + u[(1-v)P_{1,0} + vP_{1,1}] \\
&= (2u, 2v, 4uv) \\
&= (2u, 2v, 2u \cdot 2v), \quad u, v \in [0, 1].
\end{aligned}$$

Како је трећа координата једнака производу прве две, то следи да је Безијерова површ степена $(1, 1)$ одређена датим контролним тачкама део седла. Приметимо да су параметарске криве:

$$\begin{aligned}
\varphi_{1,1}(u, v_0) &= (2u, 2v_0, 4v_0u), \\
\varphi_{1,1}(u_0, v) &= (2u_0, 2v, 4u_0v), \quad u, v \in [0, 1],
\end{aligned}$$

дужи, што се поклапа са чињеницом да је хиперболички параболоид праволинијска површ (слика 31).



Слика 31: Део хиперболичког параболоида као Безијерова површ степена $(1, 1)$ (GeoGebra)

5.2 Де Кастељау алготритам

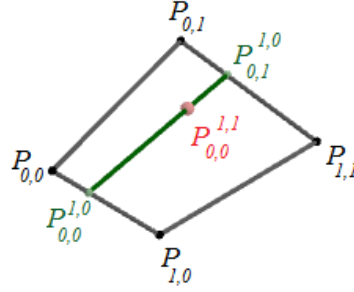
Размотримо, прво, де Кастељау алготритам за Безијерове површи степена (n, n) .

Нека су $P_{i,j}$, $0 \leq i, j \leq n$, дате контролне тачке:

$$\begin{array}{cccc}
P_{0,0}, & P_{0,1}, & P_{0,2}, \dots & P_{0,n}, \\
P_{1,0}, & P_{1,1}, & P_{1,2}, \dots & P_{1,n}, \\
P_{2,0}, & P_{2,1}, & P_{2,2}, \dots & P_{2,n}, \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
P_{n,0}, & P_{n,1}, & P_{n,2}, \dots & P_{n,n}.
\end{array}$$

Означимо их са $P_{i,j}^{0,0}$, где горњи индекс $0,0$ означава нулту итерацију. Основну идеју алгорита приказаћемо на четворки тачака $P_{0,0}, P_{1,0}, P_{1,1}, P_{0,1}$.

На контролним дужима $P_{0,0}P_{1,0}$ и $P_{0,1}P_{1,1}$ одређујемо тачке $P_{0,0}^{1,0}$ и $P_{0,1}^{1,0}$, редом, тако да оне деле одговарајуће контролне дужи у размери $u : (1 - u)$, а затим контролну дуж $P_{0,0}^{1,0}P_{0,1}^{1,0}$ делимо тачком $P_{0,0}^{1,1}$ у размери $v : (1 - v)$ (видети слику 32).



Слика 32: Одређивање тачке $P_{0,0}^{1,1}$ (GeoGebra)

Дакле, имамо да важи:

$$\begin{aligned} P_{0,0}^{1,0} &= (1 - u)P_{0,0} + uP_{1,0}, \\ P_{0,1}^{1,0} &= (1 - u)P_{0,1} + uP_{1,1}, \\ P_{0,0}^{1,1} &= (1 - v)P_{0,0}^{1,0} + vP_{0,1}^{1,0} \\ &= (1 - v)[(1 - u)P_{0,0} + uP_{1,0}] + v[(1 - u)P_{0,1} + uP_{1,1}] \\ &= \begin{pmatrix} 1 - u & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{0,0} & P_{0,1} \\ P_{1,0} & P_{1,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - v \\ v \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Приметимо да бисмо исто добили када бисмо прво делили контролне дужи $P_{0,0}P_{0,1}$ и $P_{1,0}P_{1,1}$ у размери $v : (1 - v)$.

Овај принцип одређивања тачке примењује се у свакој итерацији r , $1 \leq r \leq n$ и на сваку четворку тачака $P_{i,j}^{r,r}$, $P_{i+1,j}^{r,r}$, $P_{i+1,j+1}^{r,r}$, $P_{i,j+1}^{r,r}$, $0 \leq i, j \leq n - r$, па у r -тој итерацији имамо да важи:

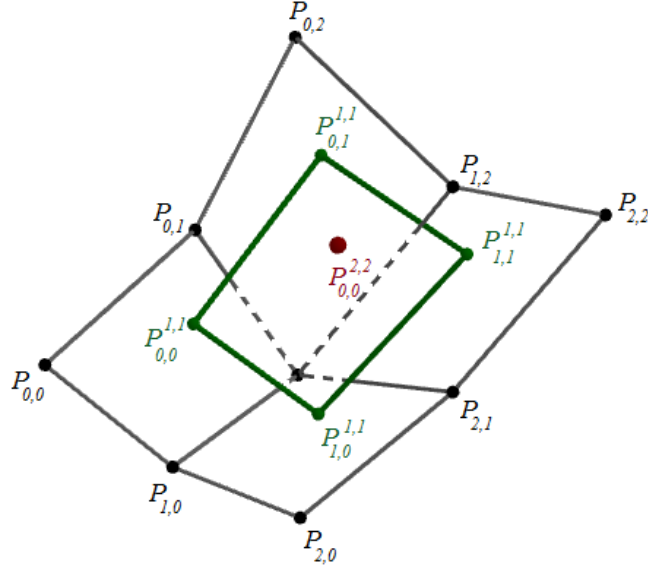
$$P_{i,j}^{r,r} = \begin{pmatrix} 1 - u & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{i,j}^{r-1,r-1} & P_{i,j+1}^{r-1,r-1} \\ P_{i+1,j}^{r-1,r-1} & P_{i+1,j+1}^{r-1,r-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - v \\ v \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Тако у нултој итерацији имамо $(n + 1) \cdot (n + 1)$ контролних тачака, у првој $n \cdot n$, у другој $(n - 1) \cdot (n - 1)$ и тако даље све док не стигнемо до n -те итерације у којој добијамо само једну тачку $P_{0,0}^{n,n}$ која припада Безијеровој површи $\varphi_{n,n}$ из једнакости (21). На слици 33 приказана је тачка са Безијерове површи степена $(2, 2)$.

Теорема 11. *Де Кастељау алгоритам за одређивање тачке $P_{0,0}^{n,n}$ на Безијеровој површи $\varphi_{n,n}$ је коректан, тј. важи:*

$$P_{0,0}^{n,n} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n B_i^n(u) B_j^n(v) P_{i,j}. \quad (23)$$

Ова теорема је специјалан случај следеће теореме.



Слика 33: Тачка $P_{0,0}^{2,2}$ са Безијерове површи за $u = 0.4$ и $v = 0.7$ (GeoGebra)

Теорема 12. За тачку $P_{i,j}^{r,r}$ добијену у де Кастељауовом алгоритму важи:

$$P_{i,j}^{r,r} = \sum_{k=0}^r \sum_{l=0}^r B_k^r(u) B_l^r(v) P_{i+k,j+l}, \quad (24)$$

где је $r \in \{0, 1, \dots, n\}$ и $i, j \in \{0, 1, \dots, n-r\}$.

Доказ. Доказ изводимо математичком индукцијом по $r \geq 1$.

Б.П. $r = 1$

$$\begin{aligned} P_{i,j}^{1,1} &= \begin{pmatrix} 1-u & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{i,j} & P_{i,j+1} \\ P_{i+1,j} & P_{i+1,j+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-v \\ v \end{pmatrix} \\ &= (1-u)[(1-v)P_{i,j} + vP_{i,j+1}] + u[(1-v)P_{i+1,j} + vP_{i+1,j+1}] \\ &= (1-u) \sum_{l=0}^1 B_l^1(v) P_{i,j+l} + u \sum_{l=0}^1 B_l^1(v) P_{i+1,j+l} \\ &= \sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 B_k^1(u) B_l^1(v) P_{i+k,j+l} \end{aligned}$$

$$\text{И.П. } P_{i,j}^{r-1,r-1} = \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{l=0}^{r-1} B_k^{r-1}(u) B_l^{r-1}(v) P_{i+k,j+l}$$

И.К.

$$\begin{aligned}
P_{i,j}^{r,r} &= \begin{pmatrix} 1-u & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{i,j}^{r-1,r-1} & P_{i,j+1}^{r-1,r-1} \\ P_{i+1,j}^{r-1,r-1} & P_{i+1,j+1}^{r-1,r-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-v \\ v \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1-u & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{l=0}^{r-1} B_k^{r-1}(u) B_l^{r-1}(v) P_{i+k,j+l} & \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{l=0}^{r-1} B_k^{r-1}(u) B_l^{r-1}(v) P_{i+k,j+1+l} \\ \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{l=0}^{r-1} B_k^{r-1}(u) B_l^{r-1}(v) P_{i+1+k,j+l} & \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{l=0}^{r-1} B_k^{r-1}(u) B_l^{r-1}(v) P_{i+1+k,j+1+l} \end{pmatrix} \\
&\cdot \begin{pmatrix} 1-v \\ v \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1-u & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{l=0}^{r-1} B_k^{r-1}(u) B_l^{r-1}(v) P_{i+k,j+l} & \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{l=1}^r B_k^{r-1}(u) B_{l-1}^{r-1}(v) P_{i+k,j+l} \\ \sum_{k=1}^{r-1} \sum_{l=0}^{r-1} B_{k-1}^{r-1}(u) B_l^{r-1}(v) P_{i+k,j+l} & \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r B_{k-1}^{r-1}(u) B_{l-1}^{r-1}(v) P_{i+k,j+l} \end{pmatrix} \\
&\cdot \begin{pmatrix} 1-v \\ v \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1-u & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & II \\ III & IV \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-v \\ v \end{pmatrix} = (*)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I &= \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{l=0}^{r-1} B_k^{r-1}(u) B_l^{r-1}(v) P_{i+k,j+l} \\
&= \sum_{k=0}^{r-1} \left(B_k^{r-1}(u) B_0^{r-1}(v) P_{i+k,j} + \sum_{l=1}^{r-1} B_k^{r-1}(u) B_l^{r-1}(v) P_{i+k,j+l} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{r-1} B_k^{r-1}(u) B_0^{r-1}(v) P_{i+k,j} + \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{l=1}^{r-1} B_k^{r-1}(u) B_l^{r-1}(v) P_{i+k,j+l} \\
&= \sum_{k=0}^{r-1} B_k^{r-1}(u) B_0^{r-1}(v) P_{i+k,j} + \sum_{l=1}^{r-1} B_0^{r-1}(u) B_l^{r-1}(v) P_{i,j+l} + \sum_{k=1}^{r-1} \sum_{l=1}^{r-1} B_k^{r-1}(u) B_l^{r-1}(v) P_{i+k,j+l}.
\end{aligned}$$

На сличан начин као што смо израчунали I , рачунамо и II, III и IV :

$$\begin{aligned}
II &= \sum_{k=0}^{r-1} B_k^{r-1}(u) B_{r-1}^{r-1}(v) P_{i+k,j+r} + \sum_{l=1}^{r-1} B_0^{r-1}(u) B_{l-1}^{r-1}(v) P_{i,j+l} + \\
&\quad + \sum_{k=1}^{r-1} \sum_{l=1}^{r-1} B_k^{r-1}(u) B_{l-1}^{r-1}(v) P_{i+k,j+l} \\
III &= \sum_{k=1}^r B_{k-1}^{r-1}(u) B_0^{r-1}(v) P_{i+k,j} + \sum_{l=1}^{r-1} B_{r-1}^{r-1}(u) B_l^{r-1}(v) P_{i+r,j+l} + \\
&\quad + \sum_{k=1}^{r-1} \sum_{l=1}^{r-1} B_{k-1}^{r-1}(u) B_l^{r-1}(v) P_{i+k,j+l} \\
IV &= \sum_{k=1}^r B_{k-1}^{r-1}(u) B_{r-1}^{r-1}(v) P_{i+k,j+r} + \sum_{l=1}^{r-1} B_{r-1}^{r-1}(u) B_{l-1}^{r-1}(v) P_{i+r,j+l} + \\
&\quad + \sum_{k=1}^{r-1} \sum_{l=1}^{r-1} B_{k-1}^{r-1}(u) B_{l-1}^{r-1}(v) P_{i+k,j+l}.
\end{aligned}$$

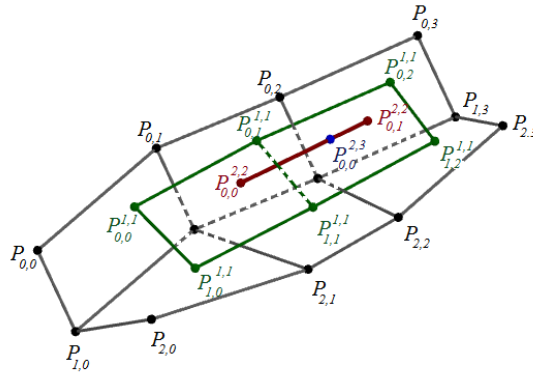
Заменом *I, II, III* и *IV* у (*) и после мало дужег рачуна добијамо:

$$\begin{aligned}
(*) &= \sum_{l=0}^r B_0^r(u) B_l^r(v) P_{i,j+l} + \sum_{k=0}^r B_k^r(u) B_0^r(v) P_{i+k,j} \\
&+ \sum_{k=1}^{r-1} \sum_{l=0}^{r-1} B_k^r(u) B_l^r(v) P_{i+k,j+l} \\
&+ \sum_{l=0}^r B_r^r(u) B_l^r(v) P_{i+r,j+l} + \sum_{k=0}^r B_k^r(u) B_r^r(v) P_{i+k,j+r} \\
&= \sum_{k=0}^r \sum_{l=0}^r B_k^r(u) B_l^r(v) P_{i+k,j+l}.
\end{aligned}$$

□

Потенцијални проблем код де Кастељау алгоритма може да настане када је Безијерова површ степена (n, m) , при чему је $n \neq m$. У том случају, после одређеног броја итерација нећемо имати одговарајуће четворке тачака на које бисмо могли да применимо основну идеју датог алгоритма. Зато се поступа на следећи начин:

- 1) одреди се $a = \min(n, m)$;
- 2) примени се претходно описани де Кастељау алгоритам до a -те итерације, када добијамо тачке $P_{0,0}^{m,m}, P_{1,0}^{m,m}, \dots, P_{n,0}^{m,m}$ или $P_{0,0}^{n,n}, P_{0,1}^{n,n}, \dots, P_{0,m}^{n,n}$ у зависности од тога да ли је $a = m$ или $a = n$, редом;
- 3) примени се де Кастељау алгоритам за Безијерове криве чије су контролне тачке добијене у кораку 2), при чему треба водити рачуна о параметру који том приликом фигурише.



Слика 34: Де Кастељау алгоритам за Безијерову површ степена $(2, 3)$ (GeoGebra)

Пример 10. Одредити тачку $\varphi_{3,2}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, коришћењем де Кастељау алгоритма, са Безијерове површи одређене контролним тачкама:

$$\begin{aligned}
&P_{0,0}(0, 0, 0), \quad P_{0,1}(-2, 1, 4), \quad P_{0,2}(-3, 2, 5), \\
&P_{1,0}(1, 1, 1), \quad P_{1,1}(1, 2, 3), \quad P_{1,2}(2, 3, 4), \\
&P_{2,0}(3, 0, 0), \quad P_{2,1}(4, 2, 4), \quad P_{2,2}(3, 3, 5), \\
&P_{3,0}(4, 0, 2), \quad P_{3,1}(4, 3, 5), \quad P_{3,2}(5, 4, 6).
\end{aligned}$$

Решење. Како је $n > m$ примењујемо 'комбиновани' де Кастељау алгоритам. Видимо рачуна да нам по вертикали фигурише параметар u , а по хоризонтали параметар v .

Прва итерација:

$$\begin{aligned} P_{0,0}^{1,1}(0, 1, 2), & \quad P_{0,1}^{1,1}\left(-\frac{1}{2}, 2, 4\right), \\ P_{1,0}^{1,1}\left(\frac{9}{4}, \frac{5}{4}, 2\right), & \quad P_{1,1}^{1,1}\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 4\right), \\ P_{2,0}^{1,1}\left(\frac{15}{4}, \frac{5}{4}, \frac{11}{4}\right), & \quad P_{2,1}^{1,1}(4, 3, 5). \end{aligned}$$

Друга итерација:

$$\begin{aligned} P_{0,0}^{2,2}\left(\frac{17}{16}, \frac{27}{16}, 3\right), \\ P_{1,0}^{2,2}\left(\frac{25}{8}, 2, \frac{55}{16}\right). \end{aligned}$$

Трећа итерација:

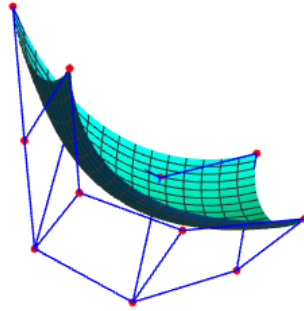
$$P_{0,0}^{3,2} = (1 - u)P_{0,0}^{2,2} + uP_{1,0}^{2,2} = \left(\frac{67}{32}, \frac{59}{32}, \frac{103}{32}\right).$$

△

5.3 Рационалне Безијерове површи

Безијерове површи се могу уопштити до рационалних на сличан начин као што су Безијерове криве уопштене до рационалних Безијерових кривих, што значи да су настале централним пројектовањем одговарајуће Безијерове површи из простора $\mathbb{R}^4$ на простор $\mathbb{R}^3$. **Рационална Безијерова површ** $\psi_{n,m}$ степена (n, m) одређена са $(n + 1)(m + 1)$ контролних тачака $P_{i,j}$ и њиховим одговарајућим тежинама $w_{i,j}$, $0 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq m$, је непрекидно пресликавање $\psi_{n,m} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ дато са:

$$\psi_{n,m}(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_{i,j} B_i^n(u) B_j^m(v) P_{i,j}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_{i,j} B_i^n(u) B_j^m(v)}, \quad u, v \in [0, 1]. \quad (25)$$



Слика 35: Рационална Безијерова површ степена $(3, 2)$ са тежинама $w_{i,0} = w_{i,2} = 1$, $w_{i,1} = 2$, $0 \leq i \leq 3$ (Mathematica)

Дакле, рационалне Безијерове површи су пројекција тензорског производа Безијерових кривих. Међутим, оне саме нису тензорски производ одговарајућих рационалних Безијерових кривих. Аналитички гледано, да би Безијерова површ

била тензорски производ Безијерових кривих, њена базна функција мора бити записана у облику $A(u)B(v)$, где је u параметар који фигурише по једној кривој, а v по другој. Код обичних Безијерових површи је то било могуће, јер је базна функција била облика $B_i^n(u)B_j^m(v)$. Базна функција рационалне Безијерове површи има облик:

$$\frac{B_i^n(u)B_j^m(v)}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_{i,j} B_i^n(u)B_j^m(v)},$$

па се због облика именица не може записати као тензорски производ кривих.

Генерално, све то не представља скоро никакав недостатак рационалних Безијерових површи. Приметимо да фиксирањем било ког параметра добијамо рационалну Безијерову криву, тако да произвољну тачку са површи можемо добити и применом рационалног де Кастељау алгоритма на одговарајуће криве.

Рационалне Безијерове површи, осим што поседују све особине обичних Безијерових површи, оне су још и пројективно инваријантне.

Један од главних разлога зашто су уведене рационалне Безијерове површи је-сте да се представе **ротационе површи**. Ротационе површи настају ротацијом неке раванске криве, коју зовемо **генератриса**, око фиксиране праве. Без умањења општости, можемо да претпоставимо да генератриса припада равни $y = 0$ и да има једначину $(x(v), 0, z(v))$, $v \in \mathbb{R}$. Претпоставимо, још, да је права око које се врши ротација оса Oz . Тада, одговарајућа површ има једначину:

$$\psi(\phi, v) = (x(v) \cos \phi, x(v) \sin \phi, z(v)), \quad v \in \mathbb{R}, \phi \in [0, 2\pi]. \quad (26)$$

Увођењем замене $\cos \phi = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, $\sin \phi = \frac{2u}{1+u^2}$, $u \in [0, 1]$ у једначину (26), она постаје:

$$\psi(u, v) = \left(x(v) \frac{1-u^2}{1+u^2}, x(v) \frac{2u}{1+u^2}, z(v) \right). \quad (27)$$

Ако је генератриса $(x(v), 0, z(v))$ рационална Безијерова крива, онда следи да је површ (27) рационална Безијерова површ, јер ће одговарајуће координатне функције бити рационалне по u и v .

Пример 11. *Изразити четвртину јединичне сфере као рационалну Безијерову површ.*

Решење. Четвртину јединичне сфере добијамо ротацијом четвртине јединичног круга $(x(\theta), 0, z(\theta)) = (\cos \theta, 0, \sin \theta)$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ око Oz осе за $\frac{\pi}{2}$. Увођењем замене $\cos \theta = \frac{1-v^2}{1+v^2}$ и $\sin \theta = \frac{2v}{1+v^2}$, $v \in [0, 1]$, на основу (27), добијамо да је једначина четвртине сфере:

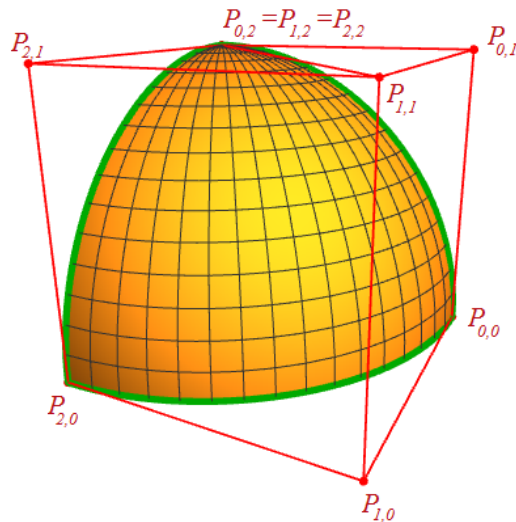
$$\psi(u, v) = \left(\frac{1-v^2}{1+v^2} \cdot \frac{1-u^2}{1+u^2}, \frac{1-v^2}{1+v^2} \cdot \frac{2u}{1+u^2}, \frac{2v}{1+v^2} \right). \quad (28)$$

Поређењем именица у једначинама (28) и (25), добијамо матрицу тежина:

$$w_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

док контролне тачке добијамо из услова тангентности:

$$\begin{matrix} P_{0,0}(1, 0, 0), & P_{0,1}(1, 0, 1), & P_{0,2}(0, 0, 1), \\ P_{1,0}(1, 1, 0), & P_{1,1}(1, 1, 1), & P_{1,2}(0, 0, 1), \\ P_{2,0}(0, 1, 0), & P_{2,1}(0, 1, 1), & P_{2,2}(0, 0, 1). \end{matrix}$$



Слика 36: Слика уз пример 11 (Mathematica)

△

Пример 12. *Одредити Безијерову површ насталу ротацијом Безијерове криве степена 3, која је одређена тачкама $P_0(1, 0)$, $P_1(2, -1)$, $P_2(3, 3)$ и $P_3(4, 2)$ у xOz равни, за $\frac{\pi}{2}$ око Oz -осе.*

Решење. Безијерова крива одређена тачкама P_0, P_1, P_2 и P_3 има једначину:

$$(x(v), z(v)) = (1 + 6v - 3v^2 + v^3, -3v + 15v^2 - 10v^3),$$

па заменом $x(v)$ и $z(v)$ у (27) добијамо једначину тражене површи:

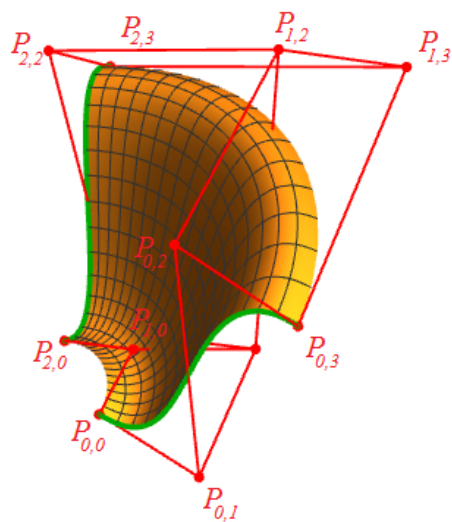
$$\psi_{2,3}(u, v) = \left((1 + 3v) \frac{1 - u^2}{1 + u^2}, (1 + 3v) \frac{2u}{1 + u^2}, (-3v + 15v^2 - 10v^3) \frac{1 + u^2}{1 + u^2} \right). \quad (29)$$

Поређењем имениоца у једнакостима (29) и (25) добијамо матрицу тежина:

$$w_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

а из услова тангентности добијамо контролне тачке тражене рационалне Безијерове површи:

$$\begin{array}{cccc} P_{0,0}(1, 0, 0), & P_{0,1}(2, 0, -1), & P_{0,2}(3, 0, 3), & P_{0,3}(4, 0, 2), \\ P_{1,0}(1, 1, 0), & P_{1,1}(2, 2, -1), & P_{1,2}(3, 3, 3), & P_{1,3}(4, 4, 2), \\ P_{2,0}(0, 1, 0), & P_{2,1}(0, 2, -1), & P_{2,2}(0, 3, 3), & P_{2,3}(0, 4, 2). \end{array}$$



Слика 37: Слика уз пример 12 (Mathematica)

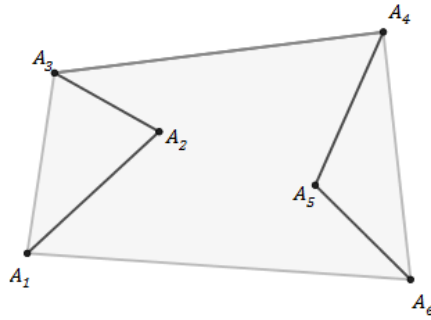
△

6 Додатак

У додатку дајемо објашњење појма конвексног омотача, као и кодове који илуструју разне особине Безијерових кривих и површи.

6.1 Конвексни омотач

Интуитивно, конвексни омотач можемо замислити на следећи начин: нека је дато неких n тачака $A_1, A_2, \dots, A_n$ које припадају истој равни. Замислимо да су у тим тачкама пободене шпенадле. Стегнувши конач који је био лабаво обавијен око тих шпенадла добијамо ивицу конвексног омотача, док све тачке које се налазе унутар области ограничене том ивицом припадају конвексном омотачу. На слици 38 приказан је конвексни омотач за шест тачака.



Слика 38: Конвексни омотач за 6 тачака освенчен је сивом бојом (GeoGebra)

Како можемо испитати да ли нека тачка припада конвексном омотачу или не?

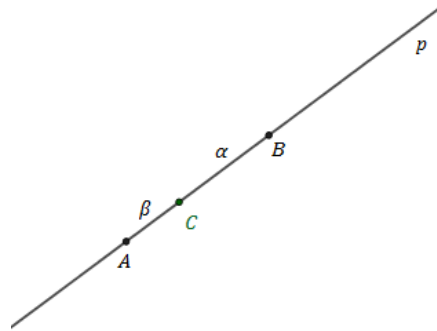
Посматрајмо, за почетак, две тачке A и B које припадају правој p . За тачку C за коју важи

$$C = \alpha A + \beta B, \alpha + \beta = 1,$$

где су α и β два реална броја, рећи ћемо да је она **барицентрична комбинација тачака A и B** . Из

$$C = \alpha A + \beta B = (1 - \beta)A + \beta B = A + \beta(B - A) = A + \beta \overrightarrow{AB}$$

следи да се тачка C налази на правој p (вектор $\overrightarrow{AB}$ је вектор правца праве p).



Слика 39: $C = \alpha A + \beta B, \alpha + \beta = 1$ (GeoGebra)

Приметимо да тачка C дели дуж AB у односу $\beta : \alpha$. Ако је $0 \leq \beta \leq 1$ (а самим тим је и $0 \leq \alpha \leq 1$) тачка C припада дужи AB ; ако је $\beta > 1$ ($\alpha < 0$) или $\beta < 0$ ($\alpha > 1$) тачка C је ван дужи AB .

Дакле, ако α и β поред услова $\alpha + \beta = 1$ испуњавају и услов ненегативности, тј. $\alpha, \beta \geq 0$, онда тачка C припада дужи AB и за њу кажемо да је **конвексна комбинација тачака A и B** .

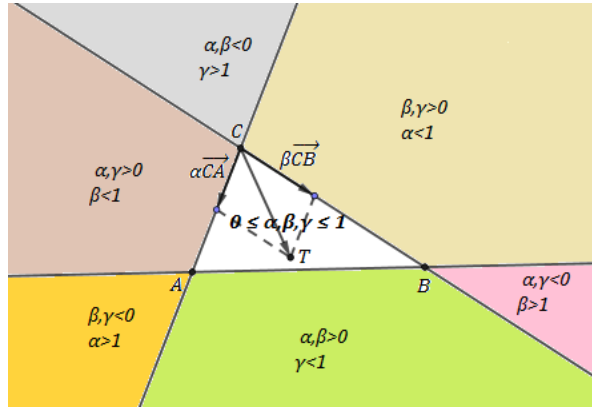
Нека су, сада, дате три тачке A, B и C . Слично као у претходном случају, тачка T за коју важи

$$T = \alpha A + \beta B + \gamma C, \alpha + \beta + \gamma = 1,$$

је барицентрична комбинација тачака A, B и C . Из

$$\begin{aligned} T &= \alpha A + \beta B + \gamma C \\ &= \alpha A + \beta B + (1 - \alpha - \beta)C \\ &= C + \alpha(A - C) + \beta(B - C) \\ &= C + \alpha \overrightarrow{CA} + \beta \overrightarrow{CB} \end{aligned}$$

видимо да се T добија трансформацијом тачке C за вектор $\alpha \overrightarrow{CA} + \beta \overrightarrow{CB}$, па у зависности од вредности параметара α и β тачка T се налази или не налази унутар троугла $\triangle ABC$ (видети слику 40).



Слика 40: $T = \alpha A + \beta B + \gamma C, \alpha + \beta + \gamma = 1$ (GeoGebra)

Дакле, за $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 1$ тачка T припада унутрашњости троугла $\triangle ABC$, па је она конвексна комбинација тачака A, B и C .

На крају, уопшtimo целу причу на n тачака $A_1, A_2, \dots, A_n$ неке равни. Ако је

$$T = \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i,$$

где је $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ (α_i су реални бројеви), онда је тачка T барицентрична комбинација тачака $A_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Ако уз то важи још да су α_i ненегативни, тј. $\alpha_i \geq 0$, онда је тачка T конвексна комбинација тачака $A_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Конвексни омотач тачака $A_1, A_2, \dots, A_n$ представља скуп конвексних комбинација тих тачака.

6.2 Кодови

У овом поглављу дати су кодови, рађени у програмском пакету Mathematica, који илуструју неке примере и особине Безијерових кривих и површи.

6.2.1 Де Кастељау алгоритам за Безијерове криве

Улаз: низ контролних тачака $P_0, P_1, \dots, P_n$ и параметар t

Израз: тачка $P_0^n(t)$

```
In[1] := n[niz_] := Length[niz] - 1
In[2] := PomF[r_, i_, niz_, t_] := (1 - t) * PomF[r - 1, i, niz, t] + t * PomF[r - 1, i + 1, niz, t]
In[3] := PomF[0, i_, niz_, t_] := niz[[i + 1]]
In[4] := Kast[niz_, t_] := PomF[n[niz], 0, niz, t]
```

6.2.2 Подела Безијерове криве на два дела

Улаз: низ контролних тачака $P_0, P_1, \dots, P_n$ и параметар t

Израз: {niz1, niz2}, где је niz1 низ контролних тачака првог, а niz2 низ контролних тачака другог дела криве

```
In[1] := n[niz_] := Length[niz] - 1
In[2] := PomF[r_, i_, niz_, t_] := (1 - t) * PomF[r - 1, i, niz, t] + t * PomF[r - 1, i + 1, niz, t]
In[3] := PomF[0, i_, niz_, t_] := niz[[i + 1]]
In[4] := Podela[niz_, t_] := {Table[PomF[r, 0, niz, t], r, 0, n[niz]],
    Table[PomF[n[niz] - i, i, niz, t], i, 0, n[niz]]}
```

6.2.3 Повећање степена Безијерове криве за 1

Улаз: низ контролних тачака $P_0, P_1, \dots, P_n$ и параметар t

Израз: низ са $n + 2$ тачака после повећања степена за 1

```
In[1] := n[niz_] := Length[niz] - 1
In[2] := Sredina[niz_] := Table[ $\frac{i}{n[niz]+1} * niz[[i]] + \left(1 - \frac{i}{n[niz]+1}\right) * niz[[i + 1]]$ , {i, 1, n[niz]}]
In[3] := Povecanje[niz_] := Insert[Insert[Sredina[niz], niz[[1]], 1], niz[[Length[niz]]], -1]
```

6.2.4 Особина конвексности

Улаз: низ контролних тачака $P_0, P_1, \dots, P_n$

Израз: слика одговарајуће Безијерове криве са контролним полигоном и конвексним омотачем

```
In[1] := n[niz_] := Length[niz] - 1
In[2] := B[m_, i_, t_] := Binomial[m, i] * t^i * (1 - t)^(m-i)
In[3] := Bezier[niz_, t_] := Expand[Sum[B[n[niz], i, t] * niz[[i + 1]], {i, 0, n[niz]}]]
In[4] := GrafikKrive[niz_] := Show[ParametricPlot[Bezier[niz, t], {t, 0, 1},
    PlotStyle -> Darker[Green], Graphics[{Red, PointSize[0.015], Point[niz],
    Darker[Blue], Thickness[0.0045], Line[niz]}], PlotRange -> All]
In[5] := OsobinaKonv[niz_] := Show[ConvexHullMesh[niz], GrafikKrive[niz],
    Axes -> True, PlotRange -> All]
```

6.2.5 Пресек minmax правоугаоника

Улаз: niz1 и niz2 контролних тачака двеју Безијерових кривих $P_0, P_1, \dots, P_n$

Израз: True или False (у зависности од тога да ли се правоугаоници секу или не)

```
In[1] := MinX[niz_] := Min[Table[niz[[i]][[1]], {i, 1, Length[niz]}]]
In[2] := MinY[niz_] := Min[Table[niz[[i]][[2]], {i, 1, Length[niz]}]]
In[3] := MaxX[niz_] := Max[Table[niz[[i]][[1]], {i, 1, Length[niz]}]]
In[4] := MaxY[niz_] := Max[Table[niz[[i]][[2]], {i, 1, Length[niz]}]]
In[5] := minmaxP[niz1, niz2] := Graphics[{Lighter[Green],
  Polygon[{minX[niz1], minY[niz1]}, {maxX[niz1], minY[niz1]},
    {maxX[niz1], maxY[niz1]}, {minX[niz1], maxY[niz1]}], Lighter[Blue],
  Polygon[{minX[niz2], minY[niz2]}, {maxX[niz2], minY[niz2]},
    {maxX[niz2], maxY[niz2]}, {minX[niz2], maxY[niz2]}],
  Red, PointSize[Medium], Point[niz1], Point[niz2],
  Darker[Green], Thickness[0.008], Line[niz1], Darker[Blue], Thickness[0.008],
  Line[niz2]}, Axes → True]
```

6.2.6 Ротација Безијерове криве

Улаз: низ контролних тачака $P_0, P_1, \dots, P_n$ и угао ротације

Израз: график оригинала и слике Безијерове криве

```
In[1] := n[niz_] := Length[niz] - 1
In[2] := B[m_, i_, t_] := Binomial[m, i] * t^i * (1 - t)^(m-i)
In[3] := Bezier[niz_, t_] := Expand[Sum[B[n[niz], i, t] * niz[[i + 1]], {i, 0, n[niz]}]]
In[4] := Original[niz_] := Show[ParametricPlot[Bezier[niz, t], {t, 0, 1}, Axes → True,
  PlotStyle → Darker[Green]], Graphics[{Red, PointSize[0.015], Point[niz]
  Darker[Blue], Thickness[0.0045], Line[niz]}], PlotRange → All]
In[5] := MR[ugao_] := {{Cos[ugao], -Sin[ugao]}, {Sin[ugao], Cos[ugao]}}
In[6] := Afino[niz_, ugao_] := Table[MR[ugao][niz[[i]], {i, Length[niz]}]]
In[7] := Slika[niz_, ugao_] := Show[ParametricPlot[Bezier[Afino[niz, ugao], t], {t, 0, 1},
  Axes → True, PlotStyle → Magenta], Graphics[{Red, PointSize[0.015],
  Point[Afino[niz, ugao]], Darker[Orange], Thickness[0.005], Line[Afino[niz, ugao]]},
  PlotRange → All]
In[8] := F[niz, ugao] := Show[Original[niz], Slika[niz, ugao]]
```

6.2.7 Де Кастељау алгоритам за Безијерове површи

Улаз: матрица контролних тачака $\{\{P_{0,0}, P_{0,1}, \dots, P_{0,m}\}, \{P_{1,0}, P_{1,1}, \dots, P_{1,m}\}, \dots, \{P_{n,0}, P_{n,1}, \dots, P_{n,m}\}\}$ и параметри u и v

Израз: тачка $\psi_{n,m}(u, v)$ са површи

```
In[1] := n[M_] := Length[M] - 1
In[2] := m[M_] := Length[Transpose[M]] - 1
In[3] := PomFP[r_, i_, j_, M_, u_, v_] := (1 - u) * ((1 - v) * PomFP[r - 1, i, j, M, u, v]
  + v * PomFP[r - 1, i, j + 1, M, u, v])
  + u * ((1 - v) * PomFP[r - 1, i + 1, j, M, u, v]
  + v * PomFP[r - 1, i + 1, j + 1, M, u, v])
In[4] := PomFP[0, i_, j_, M_, u_, v_] := M[[i + 1, j + 1]]
In[5] := NizOstatak[M_, u_, v_] := If[n[M] < m[M], {Table[PomFP[n[M], 0, j, M, u, v],
  {j, 0, m[M] - n[M]}], v,
  If[n[M] > m[M], {Table[PomFP[m[M], i, 0, M, u, v], {i, 0, n[M] - m[M]}], u}, {}]}
```

```

In[6] := PomF[r_, i_, niz_, t_] := (1 - t) * PomF[r - 1, i, niz, t] + t * PomF[r - 1, i + 1, niz, t]
In[7] := PomF[0, i_, niz_, t_] := niz[[i + 1]]
In[8] := Kast[niz_, t_] := PomF[Length[niz] - 1, 0, niz, t]
In[9] := KastP[M_, u_, v_] := If[Equal[n[M], m[M]], PomF[n[M], 0, 0, M, u, v],
    Kast[NizOstatak[M, u, v][[1]], NizOstatak[M, u, v][[2]]]]

```

Закључак

Циљ овог мастер рада је да представи основни концепт Безијерових кривих и површи, као и њихових рационалних парова. С обзиром да има велики практични значај, детаљно је обрађен де Кастељау алгоритам, који је илустрован бројним примерима и сликама. Бољој визуелизацији Безијерових кривих и површи, поред слика, допринели су кодови писани у програмском пакету Mathematica.

Рад пружа добру основу за даља истраживања у овој области. Повезивањем кривих и површи у тзв. В-сплајнове и NURBS криве и површи добијамо различите сложене структуре, које се данас доста користе у саобраћајној индустрији и рачунарској графици. Међутим, те теме превазилазе оквир мастер рада, па се овде заустављамо на примеру рационалних Безијерових површи.

Литература

- [1] G. Farin, *Curves and surfaces for CAGD*, Morgan Kaufmann Publishers, San Francisko, 2002.
- [2] G. Farin, D. Jung, *Linear precision of rational Bézier curves*, Computer Aided Geometric Design, 1995.
- [3] J. Marie, *Mathematics*, <https://math.stackexchange.com/questions/1941230/why-it-is-impossible-to-draw-a-circle-by-bezier-curve>, приступљено 29.8.2019.
- [4] H. Pottman, J. Wallner, *Computational Line Geometry*, Springer, 2001.
- [5] I. Schoenberg, *On Numerical Approximation*, University of Wisconsin Press, 1953.
- [6] T. Šukilović, S. Vukmirović, *Geometrija za informatičare*, Matematički fakultet, Beograd, 2015.