

Matematički fakultet  
Univerzitet u Beogradu

# **SLERP interpolacija**

- Master rad -

Student:  
Miloš Nešić

Mentor:  
Srđan Vukmirović

Beograd,  
2019.

# Sadržaj

<b>Uvod</b>	<b>2</b>
<b>1 Predstavljanje direktnih izometrija prostora <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>4</b>
1.1 Rotacija oko prave u prostoru . . . . .	5
1.2 Predstavljanje kretanja rotacijom oko prave . . . . .	7
1.3 Sopstvene rotacije i Ojlerovi uglovi . . . . .	9
1.4 Izračunavanje Ojlerovih uglova . . . . .	10
<b>2 Kvaternioni</b>	<b>13</b>
2.1 Nastanak kvaterniona . . . . .	15
2.2 Operacije sa kvaternionima . . . . .	15
2.3 Grupa kvaterniona . . . . .	18
2.4 Jedinični kvaternioni i rotacije . . . . .	20
<b>3 Prednosti i mane različitih načina za predstavljanje orijentacije</b>	<b>25</b>
<b>4 Linearne interpolacije orijentacije</b>	<b>26</b>
<b>5 SLERP interpolacija</b>	<b>28</b>
5.1 Stepena funkcija kvaterniona . . . . .	28
5.2 Algebarska definicija SLERP-a . . . . .	31
5.3 Geometrizacija SLERP-a . . . . .	32
5.4 Formula SLERP-a bez stepene funkcije . . . . .	35
5.5 SLERP i osobine dobre interpolacije . . . . .	38
<b>6 Vizuelizacija SLERP-a u programskom paketu GeoGebra</b>	<b>38</b>
<b>7 Zaključak</b>	<b>48</b>
<b>Literatura</b>	<b>49</b>

## Uvod

U raznim primenama (mehanika, robotika, kompjuterska grafika) često je potrebno opisati i kontrolisati kretanje objekta trodimenzionog prostora iz jednog položaja u drugi položaj. Pod položajem objekta se podrazumeva gde se on nalazi u prostoru (koordinate centra) i kako je postavljen (okrenut u prostoru). Sa tim u vezi, uvedimo sledeću terminologiju. Pod pozicijom objekta podrazumevaće se koordinate njegovog centra, a pod orijentacijom kako je on zarotiran u prostoru. Dakle, položaj objekta je u potpunosti određen pozicijom i orijentacijom.

U ovom radu na samom početku biće reči o različitim načinima predstavljanja orijentacije objekata. Praksa u računarskoj grafici je da se smatra da u početnom trenutku ( $t = 0$ ) objekat u koordinatnom početku i da nije uopšte zarotiran (odnosno da mu je orijentacija takva da se sopstvene ose objekta poklapaju sa osama koordinatnog sistema). Dakle, može se smatrati da je objekat do svoje trenutne pozicije i orijentacije došao nekim kretanjem u prostoru koje naravno čuva njegov oblik (čuva rastojanja između tačaka) pa u suštini onda postoji direktna izometrija prostora koja slika njegov početni položaj u trenutni. Da bi sve to bilo formalno zasnovano u Poglavlju 1 podsetićemo se bitnih činjenica vezanih za izometrije, i onda detaljno obraditi neke od načina na koje je moguće predstaviti direktnu izometriju prostora a koji će nam biti od ogromne važnosti za predstavljanje orijentacije objekta. Pre svega, to su matični zapis, zapis osom i uglom i zapis Ojlerovim uglovima i svi ovi zapisi će detaljno biti prikazani u Poglavlju 1. Nakon toga u Poglavlju 2 sledi priča o kvaternionima, nekim specijalnim "brojevima", kojima je moguće kontrolisati orijentaciju objekta, a onda u Poglavlju 3 poređenje svih načina za predstavljanje orijentacija (sa svim svojim pogodnostima i manama) i objašnjenje zašto su kada se sve uračuna kvaternioni najbolji izbor.

Nakon što smo se opredelili za najbolji način za predstavljanje orijentacije (kvaternione) onda možemo preći na glavni deo. Kako interpolirati između dva položaja? Sigurno je da za to postoje mnogi načini ali je poželjno da ta interpolacija ispuni i određene zahteve:

- da je pouzdana (radi u svim slučajevima);
- da se odvija najkraćim putem;
- da se odvija konstantnom brzinom;
- da nema bespotrebnog uvrtnja;
- da nema trzaja;
- da se pri tome troši najmanje energije.

Poželjno je dati preciznije definicije ovih zahteva.

Interpolacija je *pouzdana* ako se odvija na željeni način bez obzira na ulazne parametre.

Interpolacija *se odvija najkraćim putem* ukoliko je put koji pređe centar mase minimalan.

Ukoliko se centar mase kreće konstantnom brzinom onda se kaže da se interpolacija *odvija konstantnom brzinom*.

Interpolacija između dva položaja *troši najmanje energije* ukoliko je rad potreban za prebacivanje objekta iz početnog u krajnji položaj minimalan.

Može se tražiti i *da nema bespotrebnog uvrtnja i trzaja*, pri čemu bi pojam trzaj trebalo da predstavlja naglu promenu pravca kretanja.

Uslov da se interpolacija odvija najkraćim putem i konstantnom brzinom biće zadovoljen ukoliko je **interpolacija pozicije linearna**, o čemu će biti više reči u uvodnom delu Poglavlja 4.

Što se tiče **interpolacije orijentacije** to je dosta komplikovanije pitanje. U Poglavlju 4 biće izložene različite ideje koje deluju intuitivno ali ipak ne ispunjavaju sve naše zahteve. Jedina interpolacija koja je dovoljno dobra i ispunjava sve zahteve je SLERP interpolacija koja je zasnovana upravo na kvaternionima. Ona predstavlja kretanje po velikom krugu na trodimenzionoj sferi jediničnih kvaterniona i otuda i njen naziv SLERP (Spherical Linear IntERPolation). U Poglavlju 5 će biti obrađena algebarska formula SLERP-a koja sadrži stepenu kvaternionsku funkciju, koja će prethodno biti definisana, a onda i izvedena formula bez stepene kvaternionske funkcije koja se mnogo češće koristi u računarskoj praksi. Idejni tvorac SLERP interpolacije jeste Ken Shoemake i on je prvi put pominje u svom delu [1]:

“Simply plot the two given orientations on the sphere and draw the great circle arc between them. A formula for *spherical linear interpolation* from  $q_1$  to  $q_2$ , with parameter  $u$  moving from 0 to 1, can be obtained two different ways. From the group structure we find

$$Slerp(q_1, q_2; u) = q_1 \cdot (q_1^{-1} \cdot q_2)^u;$$

while from 4-D geometry comes

$$Slerp(q_1, q_2; u) = \frac{\sin(1-u) \cdot \theta}{\sin \theta} \cdot q_1 + \frac{\sin u \cdot \theta}{\sin \theta} \cdot q_2.”$$

Ovakva formula je ostala nepromenjena samo što se umesto kvaterniona  $q_1$  nekad uzima kvaternion  $-q_1$  (koji predstavlja istu orijentaciju) da bi se išlo po kraćem luku velikog kruga a u praktičnoj implementaciji kada je ugao  $\theta$  dovoljno mali, preciznije  $\cos \theta > 0.95$ , onda je  $Slerp(q_1, q_2, u) = q_1$ . Osim toga, vremenom su na osnovama ove interpolacije razvijani i metodi za interpolaciju između više orijentacija kao što su Spring i Squad (videti [2]).

Nakon diskusije o osobinama ove interpolacije, ona će u Poglavlju 6 biti i praktično prikazana u programskom paketu GeoGebra (videti [7]). Biće posvećeno dosta pažnje algoritmima za prelaz između različitih načina za predstavljanje orijentacije, praktično implementiranim u GeoGebri, i nekim pogodnostima i poteškoćama te implementacije. Animacija u GeoGebri praktično potvrđuje da SLERP poseduje željene osobine dobre interpolacije.

Na kraju, hteo bih da se zahvalim mentoru Srđanu Vukmiroviću na velikom trudu, strpljenju i zalaganju. Sama ideja za ovaj rad je nastala na njegovom predavanju, a njegove inovativne, originalne i praktične ideje su učinile da ovaj rad dobije oblik kakav ima. Članu komisije Miroslavi Antić hvala na blagovremenim odgovorima i pravim savetima koji su učinili da geometrijski deo rada bude kvalitetniji. Članu komisije Miroslavu Mariću hvala na uloženom trudu i zamerka koje su učinile da deo vezan za vizuelizaciju SLERP interpolacije bude efektniji, ubedljiviji i kvalitetniji. Hvala svima koji su imali strpljenja za mene dok sam pisao ovaj rad!

# 1 Predstavljanje direktnih izometrija prostora $\mathbb{R}^3$

Kao što je u uvodnom delu rečeno, da bismo mogli da na različite načine opisujemo orijentaciju objekata neophodno je da se dosta dobro upoznamo sa direktnim izometrijama jer su one u bliskoj vezi sa orijentacijom (u principu sa celim položajem) tela. Da bi uopšte bilo govora o izometrijama neophodno je prvo definisati rastojanje između dve tačke euklidskog prostora  $\mathbb{R}^n$ .

**Definicija 1.** Neka su  $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$  i  $B(y_1, y_2, \dots, y_n)$  dve tačke euklidskog prostora  $\mathbb{R}^n$  date sa svojim koordinatama. Tada je rastojanje između njih  $d(A, B)$  definisano sa

$$d(A, B) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

**Definicija 2.** Bijektivno preslikavanje  $I : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  naziva se izometrijom prostora  $\mathbb{R}^n$  ukoliko za proizvoljne tačke  $A, B \in \mathbb{R}^n$  važi

$$d(I(A), I(B)) = d(A, B)$$

gde su  $I(A)$  i  $I(B)$  slike tačaka  $A$  i  $B$  pri ovom preslikavanju (redom).

Dakle, izometrije su preslikavanja koja čuvaju rastojanja. Može se pokazati da će one čuvati i uglove, površinu, razmeru, paralelnost.

Neka je  $I$  jedna izometrija a tačke  $A, B, C$  i  $D$  takve da je  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ . Tada se središta duži  $AD$  i  $BC$  poklapaju i neka je to tačka  $X$ . Neka je  $A' = I(A)$ ,  $B' = I(B)$ ,  $C' = I(C)$ ,  $D' = I(D)$  i  $X' = I(X)$ . Pošto se izometrijom središte duži slika u središte tada je  $X'$  središte duži  $A'D'$  i  $B'C'$  pa važi  $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$ . Zbog ovoga je naredna definicija valjana.

**Definicija 3.** Svaka izometrija prostora tačaka  $I : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  indukuje preslikavanje odgovarajućeg vektorskog prostora  $\hat{I} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  definisano sa  $\hat{I}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{I(A)I(B)}$ . Preslikavanje  $\hat{I}$  se naziva **linearnim delom preslikavanja  $I$** .

Nije teško pokazati da je preslikavanje  $\hat{I}$  linearno (korišćenjem da izometrija čuva dužine, kolinearnost i razmeru).

Neka je  $O$  koordinatni početak,  $X$  proizvoljna tačka iz  $\mathbb{R}^n$ ,  $I(O) = O'$  i  $I(X) = X'$ . Označimo sa  $[X]$  kolonu koordinata tačke  $X$ . Pošto  $\hat{I}$  linearno slika vektor  $\overrightarrow{OX}$  sa koordinatama  $[X] - [O] = [X]$  u vektor  $\overrightarrow{O'X'}$  sa koordinatama  $[X'] - [O']$  onda postoji kvadratna matrica  $A$  dimenzije  $n$  takva da je:

$$\begin{aligned} [X'] - [O'] &= A \cdot ([X] - [O]), \\ [X'] - [O'] &= A \cdot [X], \\ [X'] &= A \cdot [X] + [O']. \end{aligned}$$

Kada se kaže vektor  $X$ , često se misli na kolonu njegovih koordinata pa jednačina iznad se češće zapisuje kao

$$X' = A \cdot X + O'. \quad (1)$$

Ukoliko dodatno izometrija fiksira koordinatni početak, odnosno važi  $O' = O$  onda se ona može zapisati koordinatno jednačinom

$$X' = A \cdot X. \quad (2)$$

Međutim, ne samo da su izometrije afina preslikavanja koja se mogu zapisati koordinatno jednačinom (1) već matrica  $A$  ima i specijalne osobine. Naime, važi sledeća teorema.

**Teorema 1.** Preslikavanje dato formulom (1) je izometrija ako i samo ako je  $A$  ortogonalna matrica, odnosno ako važi  $A \cdot A^t = A^t \cdot A = E$ .

Sada, dobijemo da će za svaku izometriju datu formulom (1) važiti:

$$\begin{aligned} \det(A \cdot A^t) &= \det(A) \cdot \det(A^t) && \text{(Bine-Koši)} \\ &= \det(A) \cdot \det(A) && (\det(A^t) = \det(A)) \\ &= (\det(A))^2. \end{aligned}$$

A kako je  $A \cdot A^t = E$  jer je  $A$  ortogonalna i  $\det(E) = 1$  važi

$$\begin{aligned} (\det(A))^2 &= 1, \\ \det(A) &= \pm 1. \end{aligned}$$

Zbog ovoga je moguće podeliti izometrije na sledeći način.

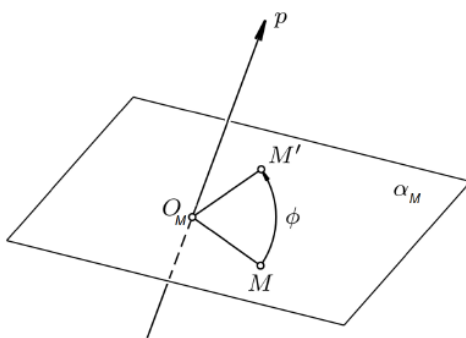
**Definicija 4.** Izometrija euklidskog prostora  $\mathbb{R}^n$  data formulom  $X' = A \cdot X + B$  je **direktna** ako je  $\det(A) = 1$ , a **indirektna** ako je  $\det(A) = -1$ .

Direktne izometrije prostora  $\mathbb{R}^3$  se još nazivaju i **kretanja prostora**. One čuvaju orijentaciju za razliku od indirektnih koje menjaju orijentaciju i veoma važna činjenica je **da se samo kretanja mogu fizički realizovati** (indirektne izometrije trodimenzionog prostora ne mogu). Zato će od značaja za rad biti kretanja i specijalno osna rotacija (rotacija oko prave u prostoru).

## 1.1 Rotacija oko prave u prostoru

Neka je data orijentisana prava  $p$ , tačka  $M$  proizvoljna (i ne pripada pravoj  $p$ ). Označimo sa  $\alpha_M$  onu ravan koja sadrži tačku  $M$  i normalna je na pravu  $p$ . Neka je  $\{O_M\} = \alpha_M \cap p$ .

**Rotacija oko orijentisane prave  $p$  za ugao  $\phi \in [0, \pi]$  (u oznaci  $\mathcal{R}_p(\phi)$ )** je kretanje prostora koje slika tačku  $M$  u tačku  $M'$  tako da je ona dobijena rotacijom tačke  $M$  oko tačke  $O_M$  za ugao  $\phi$  u ravni  $\alpha_M$  pri čemu je smer rotacije takav da za vektore  $\overrightarrow{O_M M}$ ,  $\overrightarrow{O_M M'}$ ,  $\vec{p}$  važi pravilo desne ruke, odnosno determinanta matrice čija je prva vrsta  $\overrightarrow{O_M M}$ , druga vrsta  $\overrightarrow{O_M M'}$  i treća vrsta  $\vec{p}$  je veća od 0.



Slika 1: Rotacija oko orijentisane prave  $p$  za ugao  $\phi$

Primetimo da je korektno zahtevati da ugao  $\phi \in [0, 2\pi]$  umesto  $\phi \in [0, \pi]$ . Međutim, važi

$$\mathcal{R}_p(\phi) = \mathcal{R}_{-p}(2\pi - \phi)$$

tj. za  $\phi > \pi$  se rotira u odnosu na suprotno orijentisanu pravu za ugao  $2\pi - \phi \in [0, \pi]$ , pa je moguće da ugao rotacije bude uvek iz intervala  $[0, \pi]$ .

Primetimo da su sve tačke sa prave  $p$  fiksne za kretanje  $\mathcal{R}_p(\phi)$ . Ukoliko prava  $p$  prolazi kroz koordinatni početak onda će on biti fiksna za kretanje  $\mathcal{R}_p(\phi)$  pa se ono može predstaviti jednačinom (2). Postavlja se pitanje kako naći matricu  $A$ .

**Teorema 2** (Formula Rodrigeza). *Matrica rotacije  $\mathcal{R}_p(\phi)$ , za ugao  $\phi$  oko orijentisane prave  $p$  koja sadrži koordinatni početak je:*

$$R_p(\phi) = pp^T + \cos \phi \cdot (E - pp^T) + \sin \phi \cdot p_{\times} \quad (3)$$

gde je  $p_{\times}$  matrica vektorskog množenja jediničnim vektorom prave  $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ , odnosno

$$p_{\times} := \begin{pmatrix} 0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & 0 & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Dokaz.* Dokažimo prvo da matrica  $R_p(\phi)$  definisana sa (3) rotira proizvoljan vektor  $x$  normalan na  $p$  za ugao  $\phi$  oko orijentisane prave  $p$ :

$$\begin{aligned} x' &= R_p(\phi) \cdot x \\ &= (pp^T + \cos \phi \cdot (E - pp^T) + \sin \phi \cdot p_{\times}) \cdot x \\ &= pp^T \cdot x + \cos \phi \cdot (E - pp^T) \cdot x + \sin \phi \cdot p_{\times} \cdot x \\ &= p \cdot (p^T \cdot x) + \cos \phi \cdot (E \cdot x) - \cos \phi \cdot p \cdot (p^T \cdot x) + \sin \phi \cdot (p_{\times} \cdot x). \end{aligned}$$

Pošto je  $x \perp p$  onda je  $p^T \cdot x = 0$ . Osim toga važi i  $E \cdot x = x$  i  $p_{\times} \cdot x = p \times x$  jer je  $p_{\times}$  matrica vektorskog množenja vektorom  $p$ . Konačno:

$$\begin{aligned} x' &= p \cdot 0 + \cos \phi \cdot x - \cos \phi \cdot p \cdot 0 + \sin \phi \cdot (p \times x) \\ &= \cos \phi \cdot x + \sin \phi \cdot (p \times x) \end{aligned}$$

što predstavlja vektor  $x$  rotiran oko prave  $p$  za ugao  $\phi$ .

Takođe, matrica  $R_p(\phi)$  pravu  $p$  slika u nju samu jer:

$$\begin{aligned} R_p(\phi) \cdot p &= (pp^T + \cos \phi \cdot (E - pp^T) + \sin \phi \cdot p_{\times}) \cdot p \\ &= pp^T \cdot p + \cos \phi \cdot (E - pp^T) \cdot p + \sin \phi \cdot p_{\times} \cdot p \\ &= p \cdot (p^T \cdot p) + \cos \phi \cdot E \cdot p - \cos \phi \cdot p \cdot (p^T \cdot p) + \sin \phi \cdot (p_{\times} \cdot p). \end{aligned}$$

Pošto je  $p \cdot p^T = \langle p, p \rangle = |p|^2 = 1$  (jer  $p$  je jedinični) i  $p_{\times} \cdot p = p \times p = 0$  onda

$$\begin{aligned} R_p(\phi) \cdot p &= p \cdot 1 + \cos \phi \cdot E \cdot p - \cos \phi \cdot p \cdot 1 + \sin \phi \cdot 0 \\ &= p + \cos \phi \cdot p - \cos \phi \cdot p = p. \end{aligned}$$

Iz svega navedenog sledi tvrđenje teoreme. □

Dakle matrica  $A$  koju smo tražili je ustvari  $R_p(\phi)$  iz tvrdjenja Rodrigezove teoreme. Sada smo u mogućnosti da damo matrice rotacija oko koordinatnih osa  $x, y$  i  $z$  fiksirane ortonormirane i pozitivno orijentisane baze  $e$ . Pre toga nađimo matrice  $x_\times, y_\times$  i  $z_\times$ :

$$\begin{aligned} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\rightarrow x_\times = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &\rightarrow y_\times = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &\rightarrow z_\times = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Matrica rotacije oko koordinatne ose  $x$  za ugao  $\phi$  je

$$\begin{aligned} R_x(\phi) &= x \cdot x^T + \cos \phi \cdot (E - x \cdot x^T) + \sin \phi \cdot x_\times \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (1, 0, 0) + \cos \phi \cdot \left( E - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (1, 0, 0) \right) + \sin \phi \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \cos \phi \cdot \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) + \sin \phi \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Na isti način se dobijaju i matrice rotacija oko koordinatnih osa  $y$  i  $z$ :

$$\begin{aligned} R_y(\theta) &= \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}, \\ R_z(\psi) &= \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

## 1.2 Predstavljanje kretanja rotacijom oko prave

U prethodnom delu smo videli da svaka rotacija oko orijentisane prave koja prolazi kroz koordinatni početak jeste izometrija čija se matrica  $A$  može dobiti korišćenjem Rodrigezove formule. Ali da li važi i obrnuto? Odnosno, da li svaka izometrija koja fiksira koordinatni početak (pa je zato zadata ortogonalnom matricom  $A$ ,  $\det(A) = 1$ ) jeste rotacija oko orijentisane prave? I ako jeste, kako naći tu pravu i ugao?

**Teorema 3** (I Ojlerova teorema). *Svako kretanje prostora  $\mathcal{I}$  koje ima fiksnu tačku  $O$  je rotacija oko neke orijentisane prave  $p$  koja sadrži  $O$  za ugao  $\phi \in [0, \pi]$ .*



*Dokaz.* Ako su  $\lambda_1, \lambda_2$  i  $\lambda_3$  sopstvene vrednosti matrice  $A$  koja odgovara izometriji  $\mathcal{I}$  onda je

$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3.$$

Kako je u pitanju kretanje prostora onda je

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 1,$$

pri čemu sopstvene vrednosti mogu biti brojevi  $-1, 1$  ili par konjugovano kompleksnih brojeva modula 1. Očigledno, bar jedna sopstvena vrednost mora biti 1, pa su onda sve mogućnosti za sopstvene vrednosti:

- 1, 1, 1
- 1,  $-1, -1$
- 1,  $\cos \alpha \pm \sin \alpha \cdot i$ , gde  $\alpha \in (0, 2\pi)$ .

Na osnovu klasifikacije izometrija trodimenzionog euklidskog prostora prema sopstvenim vrednostima dobije se da ako su sopstvene vrednosti **1, 1, 1** onda je u pitanju identitet, odnosno preslikavanje  $\mathcal{I}$  takvo da za  $x \in \mathbb{R}^3$  važi  $\mathcal{I}(x) = x$ . A identičko preslikavanje se može zapisati kao rotacija oko proizvoljne prave za ugao 0, pa dakle  $\mathcal{I} = \mathcal{R}_p(\phi)$ , gde je  $p = (1, 0, 0)$ , a  $\phi = 0$ .

Ukoliko su sopstvene vrednosti **1,  $-1, -1$**  onda je u pitanju osna simetrija u odnosu na pravu  $p$  čiji je vektor pravca prave sopstveni vektor koji odgovara sopstvenoj vrednosti 1. A osna simetrija se može posmatrati kao rotacija oko prave  $p$  za ugao  $\pi$  ( $\phi = \pi$ ).

Ostao je jos slučaj kada su sopstvene vrednosti **1,  $\cos \alpha \pm \sin \alpha \cdot i$** . Tada je u pitanju rotacija oko prave  $p$  čiji je vektor pravca sopstveni vektor za sopstvenu vrednost 1, a ugao  $\phi = \alpha$ . Ako nije  $\phi \in (0, \pi)$  onda je dobijeni vektor  $p$  neophodno pomnožiti sa  $-1$  i tako dobijeni vektor je traženi vektor pravca ose rotacije.

U sva tri slučaja je  $\mathcal{I} = \mathcal{R}_p(\phi)$  za neku orijentisanu pravu  $p$  i ugao  $\phi \in [0, \pi]$ . □

Da bismo našli pravu  $p$  i ugao  $\phi$  kada je data matrica  $A$  koristimo takozvani algoritam "A2AxisAngle".

### Algoritam A2AxisAngle

- $p$  je normirani sopstveni vektor koji odgovara sopstvenoj vrednosti  $\lambda = 1$ ;
- $\phi$  se dobija tako što se uzme proizvoljan jedinični vektor  $u$  normalan na  $p$ , nađe njegova slika  $u'$  i onda je

$$\begin{aligned} \langle u, u' \rangle &= \|u\| \cdot \|u'\| \cdot \cos \phi, \\ \langle u, u' \rangle &= 1 \cdot 1 \cdot \cos \phi, && (u \text{ i } u' \text{ jedinični}) \\ \phi &= \arccos(\langle u, u' \rangle). \end{aligned}$$

Potrebno je samo voditi računa da rotacija ostane u pozitivnom smeru, odnosno da za vektore  $u, u', p$  važi pravilo desne ruke. To će biti ispunjeno ako važi da je mešoviti proizvod vektora  $u, u', p$  (redom) veći od 0. Ukoliko to ne važi onda je dobijeni vektor  $p$  neophodno pomnožiti sa  $-1$  i tako dobijeni vektor je traženi vektor pravca ose rotacije.

### 1.3 Sopstvene rotacije i Ojlerovi uglovi

U delu 1.1 je bilo reči o pronalaženju matrica koje odgovaraju rotacijama oko koordinatnih osa fiksirane ortonormirane pozitivno orijentisane baze  $e$ . Takve rotacije se još nazivaju i svetske rotacije, a osim njih od značaja će biti i takozvane sopstvene rotacije. **Sopstvene rotacije** su rotacije u odnosu na ose pokretnog koordinatnog sistema koji je vezan za telo, a uglovi  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\phi$  za koje se vrši rotacija oko koordinatnih osa  $z$ ,  $y_1$ ,  $x_2$  (redom) nazivaju se **Ojlerovi uglovi**. Osa  $y_1$  je osa dobijena rotacijom  $y$  ose početnog koordinatnog sistema za ugao  $\psi$  oko  $z$  ose, a  $x_2$  je osa dobijena rotacijom  $x$  ose početnog koordinatnog sistema za ugao  $\psi$  oko  $z$  ose, a potom i rotacijom za ugao  $\theta$  oko  $y_1$  ose. Pri tome su Ojlerovi uglovi takvi da važi  $\psi, \phi \in [0, 2\pi)$  i  $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .

Sada se postavlja pitanje kako naći matricu  $A$  direktne izometrije  $\mathcal{I}$  koja predstavlja kompoziciju sopstvenih rotacija za Ojlerove uglove  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\phi$ . Očigledno:

$$\mathcal{I} = \mathcal{R}_{x_2}(\phi) \circ \mathcal{R}_{y_1}(\theta) \circ \mathcal{R}_z(\psi). \quad (4)$$

S obzirom da kompoziciji izometrija odgovara množenje matrica onda bismo mogli lako da nađemo traženu matricu  $A$  ako znamo matrice za date rotacije. Matrica  $R_z(\psi)$  rotacije  $\mathcal{R}_z(\psi)$  je poznata iz dela 1.1, dok je pronalaženje matrica za druge dve rotacije komplikovanije jer su to rotacije oko novih sopstvenih osa  $y_1$  i  $x_2$ , pa je neophodno da to prenesemo na početni (svetski) koordinatni sistem  $Oxyz$ . U suštini, data su tri koordinatna sistema:  $Oxyz$ ,  $Ox_1y_1z_1$  i  $Ox_2y_2z_2$  (pri čemu je  $z = z_1$  i  $y_1 = y_2$ ) i zbog toga nastaje problem. Zbog toga je neophodno koristiti matrice prelaska iz jednog koordinatnog sistema u drugi (iz jedne baze u drugu) i to je upravo osnovna ideja dokaza naredne teoreme koja se koristi za pronalaženje matrice  $A$ .

**Teorema 4.** *Matrica  $A$  direktne izometrije  $\mathcal{I}$  (u koordinatnom sistemu  $Oxyz$ ) koja predstavlja kompoziciju sopstvenih rotacija za Ojlerove uglove  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\phi$ , odnosno koja je takva da važi  $\mathcal{I} = \mathcal{R}_{x_2}(\phi) \circ \mathcal{R}_{y_1}(\theta) \circ \mathcal{R}_z(\psi)$ , se računa kao:*

$$A = R_z(\psi) \cdot R_y(\theta) \cdot R_x(\phi), \quad (5)$$

gde su  $R_z(\psi)$ ,  $R_y(\theta)$  i  $R_x(\phi)$  matrice rotacija oko koordinatnih osa početnog (svetskog) koordinatnog sistema  $Oxyz$ , za odgovarajuće uglove.

*Dokaz.* Neka je  $e$  baza koordinatnog sistema  $Oxyz$ ,  $f$  baza koordinatnog sistema  $Ox_1y_1z_1$  i  $g$  baza koordinatnog sistema  $Ox_2y_2z_2$ . Hajde prvo da nađemo  $[\mathcal{R}_{y_1}(\theta)]_e$  (matricu rotacije  $\mathcal{R}_{y_1}(\theta)$  u bazi  $e$  koja odgovara svetskom koordinatnom sistemu  $Oxyz$ ). Koristeći stav linearne algebre o vezi reprezentacija preslikavanja u dvema različitim bazama dobijamo

$$[\mathcal{R}_{y_1}(\theta)]_e = P_1^{-1} \cdot [\mathcal{R}_{y_1}(\theta)]_f \cdot P_1, \quad (6)$$

gde je  $P_1$  matrica prelaska iz baze  $f$  u bazu  $e$ . A pošto je  $f$  dobijena od  $e$  rotacijom oko  $z$  za ugao  $\psi$  onda  $f$  dobijamo od  $e$  inverznim preslikavanjem pa je zato  $P_1 = (R_z(\psi))^{-1}$ . Još važi i da je  $[\mathcal{R}_{y_1}(\theta)]_f = R_y(\theta)$  jer  $y_1$  jeste  $y$  osa u koordinatnom sistemu sa bazom  $f$ , pa kad sve ovo uvrstimo u (6) dobija se

$$[\mathcal{R}_{y_1}(\theta)]_e = R_z(\psi) \cdot R_y(\theta) \cdot (R_z(\psi))^{-1}. \quad (7)$$

Slično:

$$[\mathcal{R}_{x_2}(\phi)]_e = P_1^{-1} \cdot [\mathcal{R}_{x_2}(\phi)]_f \cdot P_1 = R_z(\psi) \cdot [\mathcal{R}_{x_2}(\phi)]_f \cdot (R_z(\psi))^{-1}, \quad (8)$$

$$[\mathcal{R}_{x_2}(\phi)]_f = P_2^{-1} \cdot [\mathcal{R}_{x_2}(\phi)]_g \cdot P_2 = R_y(\theta) \cdot R_x(\phi) \cdot (R_y(\theta))^{-1}, \quad (9)$$

gde je  $P_2$  matrica prelaska iz baze  $g$  u bazu  $f$  i jednaka je  $R_y(\theta)$ . Kada iskoristimo jednačinu (9) i zamenimo u jednačini (8) dobija se:

$$[\mathcal{R}_{x_2}(\phi)]_e = R_z(\psi) \cdot R_y(\theta) \cdot R_x(\phi) \cdot (R_y(\theta))^{-1} \cdot (R_z(\psi))^{-1}. \quad (10)$$

Konačno:

$$\begin{aligned} A &= [\mathcal{R}_{x_2}(\phi) \circ \mathcal{R}_{y_1}(\theta) \circ \mathcal{R}_z(\psi)]_e \\ &= [\mathcal{R}_{x_2}(\phi)]_e \cdot [\mathcal{R}_{y_1}(\theta)]_e \cdot [\mathcal{R}_z(\psi)]_e \\ &= (R_z(\psi) \cdot R_y(\theta) \cdot R_x(\phi) \cdot (R_y(\theta))^{-1} \cdot (R_z(\psi))^{-1}) \cdot (R_z(\psi) \cdot R_y(\theta) \cdot (R_z(\psi))^{-1}) \cdot R_z(\psi) \\ &\hspace{15em} \text{(Zbog (7) i (10))} \\ &= R_z(\psi) \cdot R_y(\theta) \cdot R_x(\phi) \hspace{15em} \text{(Asocijativnost i } A \cdot A^{-1} = E) \end{aligned}$$

čime je dokaz ove teoreme završen.  $\square$

## 1.4 Izračunavanje Ojlerovih uglova

U prethodnom delu videli smo kako je moguće pronaći matricu za direktnu izometriju koja predstavlja kompoziciju sopstvenih rotacija za određene Ojlerove uglove. Prirodno se onda nameće pitanje da li važi i obrnuto, odnosno da li se svaka direktna izometrija (koja fiksira koordinatni početak) može predstaviti pomoću sopstvenih rotacija za Ojlerove uglove i ako da kako izračunati te uglove. Može se dokazati naredna teorema.

**Teorema 5** (II Ojlerova). *Svaka direktna izometrija prostora  $\mathcal{I}$  koja fiksira koordinatni početak se može predstaviti kao kompozicija tri sopstvene rotacije.*

Potražimo vrednosti Ojlerovih uglova tih sopstvenih rotacija (držimo se i dalje redosleda rotacija  $z$ - $y$ - $x$  i oznaka za uglove  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\phi$ ). Ako se setimo Teoreme 4 imamo da važi:

$$A = R_z(\psi) \cdot R_y(\theta) \cdot R_x(\phi) \quad (11)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \psi \cdot \cos \theta & -\sin \psi & \cos \psi \cdot \sin \theta \\ \sin \psi \cdot \cos \theta & \cos \psi & \sin \psi \cdot \sin \theta \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \psi \cdot \cos \theta & -\cos \phi \cdot \sin \psi + \sin \phi \cdot \cos \psi \cdot \sin \theta & \sin \phi \cdot \sin \psi + \cos \phi \cdot \cos \psi \cdot \sin \theta \\ \sin \psi \cdot \cos \theta & \cos \phi \cdot \cos \psi + \sin \phi \cdot \sin \psi \cdot \sin \theta & -\sin \phi \cdot \cos \psi + \cos \phi \cdot \sin \psi \cdot \sin \theta \\ -\sin \theta & \sin \phi \cdot \cos \theta & \cos \phi \cdot \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Kada je poznata matrica  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$  onda **ukoliko je  $\cos \theta \neq 0$  možemo jednoznačno odrediti Ojlerove uglove** koristeći sledeće veze:

$$a_{31} = -\sin \theta, \quad (15)$$

$$\frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{\sin \psi \cdot \cos \theta}{\cos \psi \cdot \cos \theta} = \operatorname{tg} \psi, \quad (16)$$

$$\frac{a_{32}}{a_{33}} = \frac{\sin \phi \cdot \cos \theta}{\cos \phi \cdot \cos \theta} = \operatorname{tg} \phi. \quad (17)$$

Uzimajući u obzir da  $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  i da funkcija  $\arcsin$  vraća baš broj iz tog intervala onda iz jednačine (15) sledi da je:

$$\theta = \arcsin(-a_{31}). \quad (18)$$

Za pronalaženje uglova  $\psi, \phi \in [0, 2\pi)$  se ne može samo primeniti funkcija  $\operatorname{arctg}$  na odgovarajući količnik jer on vraća rezultat iz intervala  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , već se u računarskoj praksi često piše funkcija  $\operatorname{arctan2}(y, x)$  koja vraća ugao koji poluprava OM zaklapa sa pozitivnim delom  $x$  ose, gde je  $M(x, y)$ . Matematički zapis te funkcije je

$$\operatorname{arctan2}(y, x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0, y \geq 0 \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi & x > 0, y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0, y > 0 \\ \frac{3\pi}{2} & x = 0, y < 0 \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & x < 0 \end{cases}.$$

Konačno, iz (16) i (17):

$$\psi = \operatorname{arctan2}(a_{21}, a_{11}), \quad (19)$$

$$\phi = \operatorname{arctan2}(a_{32}, a_{33}). \quad (20)$$

Dakle, kada je  $\cos \theta \neq 0$  odnosno kada  $\theta \neq \pm\frac{\pi}{2}$  mogu se jedinstveno odrediti Ojlerovi uglovi. Ovaj uslov je potreban da bi pri izračunavanju bilo obezbeđeno da nema deljenja nulom. Ispitajmo šta se dešava kada  $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ .

Za  $a_{31} = -1$  ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ) je  $\cos \theta = 0$ , a  $\sin \theta = 1$ , pa se zamenom u (14) dobija:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{33} \\ -1 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -\cos \phi \cdot \sin \psi + \sin \phi \cdot \cos \psi & \sin \phi \cdot \sin \psi + \cos \phi \cdot \cos \psi \\ 0 & \cos \phi \cdot \cos \psi + \sin \phi \cdot \sin \psi & -\sin \phi \cdot \cos \psi + \cos \phi \cdot \sin \psi \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \sin(\phi - \psi) & \cos(\phi - \psi) \\ 0 & \cos(\phi - \psi) & -\sin(\phi - \psi) \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{Adicione formule})$$

Odavde se vidi da za matricu  $A$  važi  $a_{23} = -a_{12}$  i  $a_{22} = a_{13}$  i

$$\frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{\sin(\phi - \psi)}{\cos(\phi - \psi)} = \operatorname{tg}(\phi - \psi) \quad (21)$$

odakle sledi da

$$\phi - \psi = \operatorname{arctan2}(a_{12}, a_{22}). \quad (22)$$

Dakle, u ovom slučaju rešenje nije jedinstveno jer  $\phi$  i  $\psi$  su bilo koji uglovi (naravno iz  $[0, 2\pi)$ ) takvi da važi (22) po modulu  $2\pi$ .

Slično važi i kada je  $a_{31} = 1$  odnosno  $\theta = -\frac{\pi}{2}$ :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{33} \\ 1 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -\cos\phi \cdot \sin\psi - \sin\phi \cdot \cos\psi & \sin\phi \cdot \sin\psi - \cos\phi \cdot \cos\psi \\ 0 & \cos\phi \cdot \cos\psi - \sin\phi \cdot \sin\psi & -\sin\phi \cdot \cos\psi - \cos\phi \cdot \sin\psi \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\sin(\phi + \psi) & -\cos(\phi + \psi) \\ 0 & \cos(\phi + \psi) & -\sin(\phi + \psi) \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{Adicione formule})$$

Za matricu  $A$  važi  $a_{23} = a_{12}$  i  $-a_{22} = a_{13}$  i

$$\frac{-a_{12}}{a_{22}} = \frac{\sin(\phi + \psi)}{\cos(\phi + \psi)} = \text{tg}(\phi + \psi) \quad (23)$$

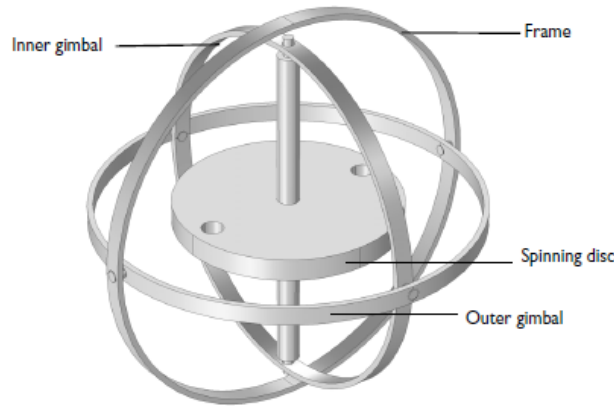
odakle sledi da

$$\phi + \psi = \arctan2(-a_{12}, a_{22}). \quad (24)$$

**Ni u ovom slučaju rešenje nije jedinstveno** jer  $\phi$  i  $\psi$  su bilo koji uglovi (naravno iz  $[0, 2\pi)$ ) takvi da važi (24) po modulu  $2\pi$ .

Konačan zaključak je da za  $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$  nemamo jednoznačno određene Ojlerove uglove i ova dva slučaja predstavljaju takozvani **slučaj zaključanog žiroskopa (gymbal lock)**. Zašto baš ovakav naziv?

Žiroskop je instrument koji ima primenu u određivanju orijentacije objekta u prostoru i navigaciji. Klasični (mehanički) žiroskop se sastoji od jednog diska (rotora) i tri prstena koji registruju promenu u orijentaciji objekta i koji služe za određivanje Ojlerovih uglova (slika 2).



Slika 2: Žiroskop

Glavni princip na kome on radi je zakon održanja momenta impulsa (konkretno primenjen na rotor). Žiroskopi se nalaze u telefonima, brodovima, avionima, svemirskim šatlovima i imaju široku

primenu, ali problem koji prati klasične žiroskope jeste takozvano zaključavanje ili na engleskom "gymbal lock". Suština ovog problema je da kada telo dođe u takav položaj da mu je ugao  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$  onda se dva prstena nađu u istoj ravni i telo gubi jedan stepen slobode jer rotacije za uglove  $\psi$  i  $\phi$  rade istu stvar i onda je nemoguće promeniti pravac tela bez menjanja  $\theta$ .

Verovatno najpoznatiji slučaj zaključavanja žiroskopa je onaj koji se desio u svemirskoj misiji Apolo 11. Naime, žiroskop je korišćen na šatlu na jednom bitnom sistemu koji se zvao IMU. Inženjeri i astronauti su bili svesni mogućnosti zaključavanja i kompjuter je trebalo da predvidi i spreči zaključavanje ali to se nije desilo. Posledica toga je bila da je sistem morao da bude resetovan da se ne bi pogubili i da se šatl ručno pomeri iz te pozicije, a da se uglovi ponovo ručno (na osnovu položaja zvezda) postave na ispravne vrednosti.

Osim toga, praktičan problem koji je vezan za regulisanje orijentacije kamere pomoću Ojlerovih uglova takođe ima veze i sa "zaključanim žiroskopom". Naime, kada kamera u toku svog kretanja (koje je regulisano menjanjem Ojlerovih uglova) dođe do pomenutog položaja onda se uvek javi nepravilnost u kretanju. Zato, ovo jeste jedan ozbiljan nedostatak Ojlerovih uglova u predstavljanju orijentacije objekata.

## 2 Kvaternioni

Na samom početku ovog poglavlja upoznajmo se sa pojmom kvaterniona, kao i njegovog imaginarnog i realnog dela. Jedan od načina da se definišu kvaternioni je sledeći.

Uvedimo u skup  $\mathbb{R}^4$  sabiranje elemenata  $(x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$  sa

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) + (y_1, y_2, y_3, y_4) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4)$$

i množenje elementa  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  skalarom  $s \in \mathbb{R}$  sa

$$s * (x_1, x_2, x_3, x_4) = (s \cdot x_1, s \cdot x_2, s \cdot x_3, s \cdot x_4).$$

Može se pokazati da je algebarska struktura  $(\mathbb{R}^4, +, *)$  četvorodimenzioni vektorski prostor. Njegova standardna baza je  $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ . Označimo elemente baze sa:

$$\begin{aligned} i &= (1, 0, 0, 0) \\ j &= (0, 1, 0, 0) \\ k &= (0, 0, 1, 0) \\ \mathbf{1} &= (0, 0, 0, 1). \end{aligned}$$

**Definicija 5.** *Definišimo množenje dva elementa  $(x_1, y_1, z_1, w_1), (x_2, y_2, z_2, w_2) \in \mathbb{R}^4$  sa:*

$$\begin{aligned} (x_1, y_1, z_1, w_1) \cdot (x_2, y_2, z_2, w_2) &= (x_1 \cdot w_2 + y_1 \cdot z_2 - z_1 \cdot y_2 + w_1 \cdot x_2, \\ &\quad - x_1 \cdot z_2 + y_1 \cdot w_2 + z_1 \cdot x_2 + w_1 \cdot y_2, \\ &\quad x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot x_2 + z_1 \cdot w_2 + w_1 \cdot z_2, \\ &\quad - x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2 - z_1 \cdot z_2 + w_1 \cdot w_2). \end{aligned}$$

U odnosu na ovako definisano množenje važi da

$$\begin{aligned}i \cdot i &= (1, 0, 0, 0) \cdot (1, 0, 0, 0) = (0, 0, 0, -1) = -\mathbf{1} \\j \cdot j &= (0, 1, 0, 0) \cdot (0, 1, 0, 0) = (0, 0, 0, -1) = -\mathbf{1} \\k \cdot k &= (0, 0, 1, 0) \cdot (0, 0, 1, 0) = (0, 0, 0, -1) = -\mathbf{1}\end{aligned}$$

Dakle,  $i^2 = j^2 = k^2 = -\mathbf{1}$ , pa se zbog ovoga  $i, j$  i  $k$  zovu još i **imaginarne jedinice**.

Za množenje iz Definicije 5 važi sledeća tablica množenja baznih elemenata.

$\cdot$	$i$	$j$	$k$	$1$
$i$	$-1$	$k$	$-j$	$i$
$j$	$-k$	$-1$	$i$	$j$
$k$	$j$	$-i$	$-1$	$k$
$1$	$i$	$j$	$k$	$1$

Može se pokazati da je ovakvo definisano množenje bilinearно i u potpunosti je određeno množenjem elemenata baze koji su predstavljeni u tablici iznad. Uočimo da je neutral za ovakvo množenje  $1$ .

**Definicija 6.** *Kvaternioni su brojevi oblika*

$$q = xi + yj + zk + w$$

gde  $x, y, z, w \in \mathbb{R}$  a  $i, j, k$  su imaginarne jedinice.

Skup svih kvaterniona označavaćemo sa  $\mathbb{H}$ , odnosno:

$$\mathbb{H} = \{xi + yj + zk + w \mid x, y, z, w \in \mathbb{R}\}$$

gde su  $i, j$  i  $k$  imaginarne jedinice.

**Definicija 7.** *Neka je dat kvaternion  $q = xi + yj + zk + w$ .*

*Realni deo kvaterniona  $q$  je*

$$Re(q) = w.$$

*Imaginarni deo kvaterniona  $q$  je*

$$Im(q) = xi + yj + zk.$$

Potprostor  $Im\mathbb{H}$  koji je izomorfan sa  $\mathbb{R}^3$  se naziva prostor imaginarnih kvaterniona. Ako je  $\vec{v} = (x, y, z)$  gde su brojevi  $x, y$  i  $z$  oni iz imaginarnog dela kvaterniona  $q$  onda se taj kvaternion može zapisati i na sledeći način:

$$q = [(x, y, z), w] = [\vec{v}, w].$$

Pre nego što nastavimo sa bitnim osobinama kvaterniona osvrnimo se na njihov nastanak.

## 2.1 Nastanak kvaterniona

Kvaternioni su nastali iz želje da se stvori uopštenje kompleksnih brojeva kojim bi mogle da se opisuju rotacije trodimenzionog prostora. Njihovi prethodnici su bili trodimenzioni kompleksni brojevi, odnosno brojevi oblika  $xi + yj + w$  gde su  $x, y, w \in \mathbb{R}$  a  $i$  i  $j$  su imaginarne jedinice. Tvorac ove ideje je bio irski matematičar Vilijam Hamilton (1809-1865). Zamisao sa trodimenzionim kompleksnim brojevima nije bila dobra, a jedan od razloga je što ovakav skup nije zatvoren u odnosu na množenje.

**Stav 1.** *Skup trodimenzionih kompleksnih brojeva nije zatvoren u odnosu na njihovo množenje, pri čemu se zahteva da množenje bude asocijativno.*

*Dokaz.* Pretpostavimo suprotno. To znači da za bilo koja dva broja iz tog skupa proizvod ponovo ostaje u njemu pa onda

$$i \cdot j = ai + bj + c \quad (25)$$

gde  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Pomnožimo obe strane prethodne jednačine sa  $i$ :

$$\begin{aligned} i \cdot i \cdot j &= i \cdot (ai + bj + c), & (26) \\ -j &= -a + b \cdot i \cdot j + ci. & (i^2 = -1, j^2 = -1) \end{aligned}$$

U prethodnoj jednačini zameniti  $i \cdot j$  sa desnom stranom jednakosti (25):

$$\begin{aligned} -j &= -a + b \cdot (ai + bj + c) + ci, & (27) \\ 0 &= (ab + c) \cdot i + (b^2 + 1) \cdot j + bc - a. & (28) \end{aligned}$$

Odatle dobijamo  $ab + c = 0$ ,  $b^2 + 1 = 0$  i  $bc - a = 0$ , a pošto  $b^2 + 1 = 0$  onda imamo da  $b$  nije realan broj, što je kontradikcija sa pretpostavkom. Dakle, pretpostavka je pogrešna čime je dokaz završen.  $\square$

Hamilton je u oktobru 1843. godine shvatio da mu trebaju tri imaginarne jedinice, odnosno četiri realna broja da bi opisao rotacije praćene skaliranjem i to suštinski predstavlja trenutak u kome su nastali kvaternioni.

## 2.2 Operacije sa kvaternionima

Pre nego što krenemo u razmatranje bitnih algebarskih osobina kvaterniona definišimo osnovne operacije nad njima.

**Definicija 8.** *Neka su data dva kvaterniona  $q_1 = x_1i + y_1j + z_1k + w_1$  i  $q_2 = x_2i + y_2j + z_2k + w_2$ . Njihovo sabiranje je definisano sa:*

$$q_1 + q_2 = (x_1 + x_2)i + (y_1 + y_2)j + (z_1 + z_2)k + (w_1 + w_2) \quad (29)$$

Ako se kvaternioni  $q_1$  i  $q_2$  zapišu u obliku  $q_1 = [\vec{v}_1, w_1]$  i  $q_2 = [\vec{v}_2, w_2]$ , onda je  $q_1 + q_2 = [\vec{v}_1 + \vec{v}_2, w_1 + w_2]$ .

Ovakva definicija sabiranja je u skladu sa intuicijom, jer kvaternioni se očigledno mogu posmatrati i kao elementi  $\mathbb{R}^4$  (postoji izomorfizam), pa onda njihovo sabiranje i množenje treba da budu u skladu sa sabiranjem i množenjem definisanim na  $\mathbb{R}^4$ .



**Definicija 9.** Neka su data dva kvaterniona  $q_1 = x_1i + y_1j + z_1k + w_1$  i  $q_2 = x_2i + y_2j + z_2k + w_2$ . Njihovo množenje je definisano sa

$$q_1 \cdot q_2 = A \cdot i + B \cdot j + C \cdot k + D \quad (30)$$

gde su  $A, B, C$  i  $D$  realni brojevi koji se računaju na sledeći način:

$$\begin{aligned} A &= x_1 \cdot w_2 + y_1 \cdot z_2 - z_1 \cdot y_2 + w_1 \cdot x_2 \\ B &= -x_1 \cdot z_2 + y_1 \cdot w_2 + z_1 \cdot x_2 + w_1 \cdot y_2 \\ C &= x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot x_2 + z_1 \cdot w_2 + w_1 \cdot z_2 \\ D &= -x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2 - z_1 \cdot z_2 + w_1 \cdot w_2. \end{aligned}$$

Ovakvo množenje "čuva" željenu strukturu kvaterniona određenu tablicom. Može se pokazati da je bilinearно i da je **neutral 1**.

Očigledno je da **množenje kvaterniona nije komutativno** jer važi  $i \cdot j \neq j \cdot i$ .

Može se pokazati i da je **množenje kvaterniona asocijativno**, odnosno da za bilo koja tri  $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{H}$  važi

$$(q_1 \cdot q_2) \cdot q_3 = q_1 \cdot (q_2 \cdot q_3). \quad (31)$$

**Stav 2.** Ako su kvaternioni  $q_1 = [\vec{v}_1, w_1]$  i  $q_2 = [\vec{v}_2, w_2]$  onda je njihov proizvod

$$q_1 \cdot q_2 = [\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 + w_1 \cdot \vec{v}_2 + w_2 \cdot \vec{v}_1, w_1 \cdot w_2 - \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle] \quad (32)$$

gde  $\times$  predstavlja vektorski a  $\langle, \rangle$  skalarni proizvod dva vektora u  $\mathbb{R}^3$ .

*Dokaz.* Neka je  $\vec{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$  i  $\vec{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ . Po definiciji je za  $q_1 = x_1 \cdot i + y_1 \cdot j + z_1 \cdot k + w_1$  i  $q_2 = x_2 \cdot i + y_2 \cdot j + z_2 \cdot k + w_2$ :

$$\begin{aligned} q_1 \cdot q_2 &= (x_1 \cdot w_2 + y_1 \cdot z_2 - z_1 \cdot y_2 + w_1 \cdot x_2) \cdot i \\ &\quad + (-x_1 \cdot z_2 + y_1 \cdot w_2 + z_1 \cdot x_2 + w_1 \cdot y_2) \cdot j \\ &\quad + (x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot x_2 + z_1 \cdot w_2 + w_1 \cdot z_2) \cdot k \\ &\quad + (-x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2 - z_1 \cdot z_2 + w_1 \cdot w_2) \\ &= [(y_1 \cdot z_2 - z_1 \cdot y_2, -x_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot x_2, x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot x_2) + w_1 \cdot (x_2, y_2, z_2) \\ &\quad + w_2 \cdot (x_1, y_1, z_1), w_1 \cdot w_2 - (x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2)]. \end{aligned}$$

Skalarni i vektorski proizvod vektora  $\vec{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$  i  $\vec{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$  je

$$\begin{aligned} \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle &= x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2, \\ \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 &= (y_1 \cdot z_2 - z_1 \cdot y_2, -x_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot x_2, x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot x_2) \end{aligned}$$

i onda se dobije da je

$$q_1 \cdot q_2 = [\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 + w_1 \cdot \vec{v}_2 + w_2 \cdot \vec{v}_1, w_1 \cdot w_2 - \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle]$$

čime je dokaz završen.  $\square$

Uočimo da kada kvaternion  $q = [\vec{v}, w]$  želimo da množimo skalarom  $s$  onda taj skalar možemo posmatrati kao kvaternion  $[\vec{0}, s]$  i onda je

$$\begin{aligned} s \cdot q &= [\vec{0}, s] \cdot [\vec{v}, w] \\ &= [\vec{0} \times \vec{v} + s \cdot \vec{v} + w \cdot \vec{0}, s \cdot w - \langle \vec{0}, \vec{v} \rangle] \\ &= [s \cdot \vec{v}, s \cdot w]. \end{aligned}$$

**Definicija 10.** Neka je dat kvaternion  $q = [\vec{v}, w]$ . Definišemo njemu konjugovani kvaternion sa

$$\bar{q} = [-\vec{v}, w].$$

U sledećem stavu su date neke osnovne osobine vezane za konjugovanje kvaterniona.

**Stav 3.** Za bilo koja dva kvaterniona  $q_1 = [\vec{v}_1, w_1]$  i  $q_2 = [\vec{v}_2, w_2]$  važe sledeće osobine:

$$a) \overline{q_1 + q_2} = \bar{q}_1 + \bar{q}_2; \quad b) \overline{q_1 \cdot q_2} = \bar{q}_2 \cdot \bar{q}_1; \quad c) \bar{\bar{q}}_1 = q_1.$$

*Dokaz.*

$$\begin{aligned} a) \overline{q_1 + q_2} &= \overline{[\vec{v}_1, w_1] + [\vec{v}_2, w_2]} \\ &= \overline{[\vec{v}_1 + \vec{v}_2, w_1 + w_2]} && \text{(Sabiranje kvaterniona)} \\ &= [-(\vec{v}_1 + \vec{v}_2), w_1 + w_2] && \text{(Definicija konjugovanja)} \\ &= [-\vec{v}_1 - \vec{v}_2, w_1 + w_2] \\ &= [-\vec{v}_1, w_1] + [-\vec{v}_2, w_2] && \text{(Sabiranje kvaterniona)} \\ &= \bar{q}_1 + \bar{q}_2. && \text{(Definicija konjugovanja)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \overline{q_1 \cdot q_2} &= \overline{[\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 + w_1 \cdot \vec{v}_2 + w_2 \cdot \vec{v}_1, w_1 \cdot w_2 - \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle]} && \text{(Po stavu 2)} \\ &= [-(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 + w_1 \cdot \vec{v}_2 + w_2 \cdot \vec{v}_1), w_1 \cdot w_2 - \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle] \\ &= [-\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 - w_1 \cdot \vec{v}_2 - w_2 \cdot \vec{v}_1, w_1 \cdot w_2 - \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{q}_2 \cdot \bar{q}_1 &= \overline{[\vec{v}_2, w_2]} \cdot \overline{[\vec{v}_1, w_1]} \\ &= [-\vec{v}_2, w_2] \cdot [-\vec{v}_1, w_1] \\ &= [(-\vec{v}_2) \times (-\vec{v}_1) + w_2 \cdot (-\vec{v}_1) + w_1 \cdot (-\vec{v}_2), w_2 \cdot w_1 - \langle -\vec{v}_2, -\vec{v}_1 \rangle] \\ &= [\vec{v}_2 \times \vec{v}_1 - w_1 \cdot \vec{v}_2 - w_2 \cdot \vec{v}_1, w_1 \cdot w_2 - \langle \vec{v}_2, \vec{v}_1 \rangle] \\ &= [-\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 - w_1 \cdot \vec{v}_2 - w_2 \cdot \vec{v}_1, w_1 \cdot w_2 - \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle], \end{aligned}$$

pa važi  $\overline{q_1 \cdot q_2} = \bar{q}_2 \cdot \bar{q}_1$ .

$$\begin{aligned} c) \bar{\bar{q}}_1 &= \overline{\overline{[\vec{v}_1, w_1]}} \\ &= \overline{[-\vec{v}_1, w_1]} && \text{(Definicija konjugovanja)} \\ &= [-(-\vec{v}_1), w_1] && \text{(Definicija konjugovanja)} \\ &= [\vec{v}_1, w_1] \\ &= q_1. \end{aligned}$$

□

Osim konjugovanja kvaterniona ono što će biti bitno za dalji rad jeste i njihova norma, kao i inverzan kvaternion. Pre norme definišimo skalarni proizvod.

**Definicija 11.** Neka su data dva kvaterniona  $q_1 = x_1i + y_1j + z_1k + w_1$  i  $q_2 = x_2i + y_2j + z_2k + w_2$ . Njihov skalarni proizvod je

$$\langle q_1, q_2 \rangle = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 + w_1 \cdot w_2.$$

**Definicija 12.** Norma kvaterniona  $q = xi + yj + zk + w$  u odnosu na skalarni proizvod iz prethodne definicije je

$$\|q\| = \sqrt{\langle q, q \rangle} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + w^2}.$$

U sledećem stavu su opisane najvažnije osobine norme.

**Stav 4.** Za bilo koja dva kvaterniona  $q_1 = x_1i + y_1j + z_1k + w_1$  i  $q_2 = x_2i + y_2j + z_2k + w_2$  važe sledeće osobine norme:

$$a) \|q_1 \cdot q_2\| = \|q_1\| \cdot \|q_2\|; \quad b) \|\overline{q_1}\| = \|q_1\|; \quad c) \|q_1\|^2 = q_1 \cdot \overline{q_1}.$$

*Dokaz.* Jednostavnosti radi pokazaćemo prvo c) i to koristiti u dokazu za a).

$$\begin{aligned} c) \quad q_1 \cdot \overline{q_1} &= (x_1i + y_1j + z_1k + w_1) \cdot (-x_1i - y_1j - z_1k + w_1) \\ &= [(x_1, y_1, z_1), w_1] \cdot [(-x_1, -y_1, -z_1), w_1] \\ &= [(x_1, y_1, z_1) \times (-x_1, -y_1, -z_1) + w_1 \cdot (-x_1, -y_1, -z_1) + w_1 \cdot (x_1, y_1, z_1), \\ &\quad w_1 \cdot w_1 - \langle (x_1, y_1, z_1), (-x_1, -y_1, -z_1) \rangle] \\ &= [(0, 0, 0) + w_1 \cdot (0, 0, 0), w_1^2 - (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)] \\ &= [(0, 0, 0), w_1^2 + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2] \\ &= x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + w_1^2 \\ &= \|q_1\|^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a) \quad \|q_1 \cdot q_2\| &= \sqrt{(q_1 \cdot q_2) \cdot \overline{(q_1 \cdot q_2)}} && \text{(Iz c)} \\ &= \sqrt{(q_1 \cdot q_2) \cdot \overline{q_2} \cdot \overline{q_1}} && \text{(Po stavu 3 b)} \\ &= \sqrt{q_1 \cdot (q_2 \cdot \overline{q_2}) \cdot \overline{q_1}} && \text{(Asocijativnost)} \\ &= \sqrt{q_1 \cdot \|q_2\|^2 \cdot \overline{q_1}} && \text{(Iz c)} \\ &= \sqrt{\|q_2\|^2 \cdot (q_1 \cdot \overline{q_1})} \\ &= \sqrt{\|q_2\|^2 \cdot \|q_1\|^2} && \text{(Iz c)} \\ &= \sqrt{\|q_2\|^2} \cdot \sqrt{\|q_1\|^2} \\ &= \|q_2\| \cdot \|q_1\|. && \text{(Norma je nenegativna)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad \|\overline{q_1}\| &= \|-x_1i - y_1j - z_1k + w_1\| \\ &= \sqrt{(-x_1)^2 + (-y_1)^2 + (-z_1)^2 + w_1^2} && \text{(Po definiciji norme)} \\ &= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + w_1^2} \\ &= \|q_1\|. \end{aligned}$$

□

## 2.3 Grupa kvaterniona

Označimo skup svih kvaterniona bez kvaterniona  $[\vec{0}, 0]$  sa  $\widehat{\mathbb{H}}$ .

**Stav 5.**  $(\widehat{\mathbb{H}}, \cdot)$  gde je operacija  $\cdot$  množenje kvaterniona je nekomutativna grupa.

*Dokaz.* Iz (31) se dobija asocijativnost. Kvaternion  $[\vec{0}, 1] = 1$  je neutral, a to se može potvrditi i korišćenjem stava 2:

$$\begin{aligned} [\vec{0}, 1] \cdot [\vec{v}, w] &= [\vec{0} \times \vec{v} + 1 \cdot \vec{v} + w \cdot \vec{0}, 1 \cdot w - \langle \vec{0}, \vec{v} \rangle] \\ &= [\vec{0} + \vec{v} + \vec{0}, w - 0] \\ &= [\vec{v}, w], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\vec{v}, w] \cdot [\vec{0}, 1] &= [\vec{v} \times \vec{0} + w \cdot \vec{0} + 1 \cdot \vec{v}, w \cdot 1 - \langle \vec{v}, \vec{0} \rangle] \\ &= [\vec{0} + \vec{0} + \vec{v}, w - 0] \\ &= [\vec{v}, w]. \end{aligned}$$

Ostaje još da se dokaže postojanje inverza. Za svaki kvaternion  $q \in \widehat{\mathbb{H}}$  postoji kvaternion  $q^{-1} \in \widehat{\mathbb{H}}$  takav da  $q \cdot q^{-1} = q^{-1} \cdot q = 1$ . Takav kvaternion je jedinstven i računa se po formuli

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|^2}. \quad (33)$$

Uverimo se da je to tako. Kvaternion određen jednačinom (33) će uvek postojati u  $\widehat{\mathbb{H}}$  jer norma kvaterniona  $q$  neće nikada biti 0 pošto je  $q \in \widehat{\mathbb{H}}$  pa nemamo problema sa deljenjem sa 0. Jedinstvenost sledi iz toga što ako su  $q^{-1}$  i  $\widetilde{q^{-1}}$  dva inverza kvaterniona  $q$  onda

$$q^{-1} = q^{-1} \cdot 1 = q^{-1} \cdot (q \cdot \widetilde{q^{-1}}) = (q^{-1} \cdot q) \cdot \widetilde{q^{-1}} = 1 \cdot \widetilde{q^{-1}} = \widetilde{q^{-1}},$$

odnosno jednaki su. Takođe:

$$\begin{aligned} q \cdot q^{-1} &= q \cdot \frac{\bar{q}}{\|q\|^2} = \frac{q \cdot \bar{q}}{\|q\|^2} \\ &= \frac{\|q\|^2}{\|q\|^2} \\ &= 1, \end{aligned} \quad (\text{Stav 4c})$$

$$\begin{aligned} q^{-1} \cdot q &= \frac{\bar{q}}{\|q\|^2} \cdot q = \frac{\bar{q} \cdot q}{\|q\|^2} = \frac{\bar{q} \cdot \bar{\bar{q}}}{\|q\|^2} \\ &= \frac{\|\bar{q}\|^2}{\|q\|^2} \end{aligned} \quad (\text{Stav 4c})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\|q\|^2}{\|q\|^2} \\ &= 1. \end{aligned} \quad (\text{Stav 4b})$$

Dakle, postoji i jedinstven inverz, pa data struktura jeste grupa. Pošto ne važi komutativnost u  $\mathbb{H}$  onda ova grupa neće biti komutativna, može se uzeti isti kontraprimer  $i \cdot j \neq j \cdot i$ .  $\square$

Nekad je potrebno pronaći inverz proizvoda dva kvaterniona  $q_1$  i  $q_2$ :

$$\begin{aligned}
 (q_1 \cdot q_2)^{-1} &= \frac{\overline{q_1 \cdot q_2}}{\|q_1 \cdot q_2\|^2} && \text{(Po (33))} \\
 &= \frac{\overline{q_2} \cdot \overline{q_1}}{\|q_1\|^2 \cdot \|q_2\|^2} && \text{(Stav 3b) i Stav 4a)} \\
 &= \frac{\overline{q_2}}{\|q_2\|^2} \cdot \frac{\overline{q_1}}{\|q_1\|^2} \\
 &= q_2^{-1} \cdot q_1^{-1}.
 \end{aligned}$$

Važi

$$(q_1 \cdot q_2)^{-1} = q_2^{-1} \cdot q_1^{-1}. \quad (34)$$

## 2.4 Jedinični kvaternioni i rotacije

Iz skupa svih kvaterniona od najvećeg značaja u ovom radu će biti oni čija je norma 1, tj. jedinični kvaternioni. Oznaka za skup takvih kvaterniona je  $\mathbb{H}_1$ , odnosno

$$\mathbb{H}_1 = \{q = [(x, y, z), w] \in \mathbb{H} \mid x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\}. \quad (35)$$

Jedinični kvaternioni se mogu zapisati na specijalan način.

**Stav 6.** Za svaki  $q = [\vec{v}, w] \in \mathbb{H}_1$  postoje jedinični vektor  $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$  i ugao  $\alpha \in (-\pi, \pi]$  takvi da je  $q = [\sin \alpha \cdot \vec{u}, \cos \alpha]$ .

*Dokaz.* Razmotrimo dva slučaja:

$$1^\circ \quad q = 1 = [\vec{0}, 1]$$

Onda je  $\alpha = 0$  a za  $\vec{u}$  se može uzeti bilo koji jedinični vektor iz  $\mathbb{R}^3$ .

$$2^\circ \quad q \neq 1$$

Neka je  $k = \|\vec{v}\|$ . Tada je  $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{k}$ . Da bismo našli  $\alpha$  primetimo da važi sledeće:

$$\begin{aligned}
 1 &= \|q\| && \text{(Jer } q \text{ jedinični)} \\
 &= w^2 + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \\
 &= w^2 + \langle k \cdot \vec{u}, k \cdot \vec{u} \rangle && (\vec{v} = k \cdot \vec{u}) \\
 &= w^2 + k^2 \cdot \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle && \text{(Izvlačimo } k) \\
 &= w^2 + k^2. && \text{(Jer } \vec{u} \text{ je jedinični)}
 \end{aligned}$$

Jednačina  $w^2 + k^2 = 1$  opisuje jedinični krug u ravni, isto kao i jednačina  $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ , gde je parametar  $\alpha$  iz  $(-\pi, \pi]$ . Zato jeste  $w = \cos \alpha$  i  $k = \sin \alpha$  za neko  $\alpha \in (-\pi, \pi]$  i konačno

$$q = [k \cdot \vec{u}, w] = [\sin \alpha \cdot \vec{u}, \cos \alpha].$$

□

**Definicija 13.** Konjugacija kvaternionom  $q \neq 0$  je preslikavanje  $C_q : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  definisano sa:

$$C_q(p) = q \cdot p \cdot q^{-1}. \quad (36)$$

**Stav 7.** Neka su  $q_1, q_2, p \in \mathbb{H}$ . Tada važi:

a)  $C_{q_1} = C_{q_2}$  ako i samo ako  $q_1 = \lambda \cdot q_2$ , gde je  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ;

b)  $C_{q_2} \circ C_{q_1} = C_{q_2 \cdot q_1}$ .

*Dokaz.* a)

$\Leftarrow$ : Neka je  $q_1 = \lambda \cdot q_2$ ,  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Tada je:

$$\begin{aligned}
 C_{q_1}(p) &= q_1 \cdot p \cdot q_1^{-1} \\
 &= \lambda \cdot q_2 \cdot p \cdot (\lambda \cdot q_2)^{-1} && \text{(Po pretpostavci smeru)} \\
 &= \lambda \cdot q_2 \cdot p \cdot q_2^{-1} \cdot \lambda^{-1} && \text{(Po (33))} \\
 &= \lambda \cdot \lambda^{-1} \cdot q_2 \cdot p \cdot q_2^{-1} && \text{(Izvlačenje skalara ispred)} \\
 &= q_2 \cdot p \cdot q_2^{-1} && (\lambda \cdot \lambda^{-1} = 1) \\
 &= C_{q_2}(p).
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ : Neka je po pretpostavci smeru  $C_{q_1}(p) = C_{q_2}(p)$  i pretpostavimo suprotno, da  $q_1 \neq \lambda \cdot q_2$ , gde  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Tada:

$$\begin{aligned}
 C_{q_1}(p) &= q_1 \cdot p \cdot q_1^{-1} \\
 &\neq \lambda \cdot q_2 \cdot p \cdot (\lambda \cdot q_2)^{-1} && (q_1 \neq \lambda \cdot q_2 \text{ po pretpostavci}) \\
 &= \lambda \cdot q_2 \cdot p \cdot q_2^{-1} \cdot \lambda^{-1} && \text{(Po (33))} \\
 &= \lambda \cdot \lambda^{-1} \cdot q_2 \cdot p \cdot q_2^{-1} && \text{(Izvlačenje skalara ispred)} \\
 &= q_2 \cdot p \cdot q_2^{-1} && (\lambda \cdot \lambda^{-1} = 1) \\
 &= C_{q_2}(p).
 \end{aligned}$$

Važi  $C_{q_1}(p) \neq C_{q_2}(p)$ , što je u suprotnosti sa pretpostavkom smeru. Znači pretpostavka je pogrešna, odnosno važi da je  $q_1 = \lambda \cdot q_2$ , gde  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

b)

$$\begin{aligned}
 (C_{q_2} \circ C_{q_1})(p) &= C_{q_2}(C_{q_1}(p)) \\
 &= C_{q_2}(q_1 \cdot p \cdot q_1^{-1}) \\
 &= q_2 \cdot (q_1 \cdot p \cdot q_1^{-1}) \cdot q_2^{-1} \\
 &= (q_2 \cdot q_1) \cdot p \cdot (q_1^{-1} \cdot q_2^{-1}) && \text{(Asocijativnost)} \\
 &= (q_2 \cdot q_1) \cdot p \cdot (q_2 \cdot q_1)^{-1} && \text{(Po (33))} \\
 &= C_{q_2 \cdot q_1}(p).
 \end{aligned}$$

□

Sledeći bitan stav govori o tome šta se sve čuva kada se konjuguje jediničnim kvaternionom.

**Stav 8.** Neka je  $q$  jedinični i  $p = [\vec{v}, w]$  proizvoljan kvaternion. Ako je  $p' = C_q(p) = q \cdot p \cdot q^{-1}$  onda je  $p' = [\vec{v}', w]$  pri čemu je  $\|\vec{v}'\| = \|\vec{v}\|$ .

*Dokaz.* 1° Ako je kvaternion  $p$  samo skalar, odnosno  $p = [\vec{0}, w] = w$  onda važi:

$$\begin{aligned}
 q \cdot p \cdot q^{-1} &= q \cdot w \cdot q^{-1} \\
 &= w \cdot q \cdot q^{-1} \\
 &= w \cdot 1 \\
 &= p.
 \end{aligned}$$

2° Ako kvaternion  $p$  ima samo imaginarni deo, odnosno  $p = [\vec{v}, 0]$  onda važi:

$$\begin{aligned}
2 \cdot \operatorname{Re}(p') &= 2 \cdot \operatorname{Re}(q \cdot p \cdot q^{-1}) \\
&= q \cdot p \cdot q^{-1} + \overline{q \cdot p \cdot q^{-1}} \\
&= q \cdot p \cdot \bar{q} + \overline{(q \cdot p) \cdot \bar{q}} && (q \text{ jedinični}) \\
&= q \cdot p \cdot \bar{q} + \bar{\bar{q}} \cdot \overline{q \cdot p} && (\text{Stav 3 b)}) \\
&= q \cdot p \cdot \bar{q} + q \cdot \bar{p} \cdot \bar{q} && (\text{Stav 3 b),c)}) \\
&= q \cdot (p \cdot \bar{q} + \bar{p} \cdot \bar{q}) \\
&= q \cdot (p + \bar{p}) \cdot \bar{q} \\
&= q \cdot 2 \cdot \operatorname{Re}(p) \cdot \bar{q} \\
&= 0, && (\operatorname{Re}(p) = 0)
\end{aligned}$$

pa dakle važi da je  $\operatorname{Re}(p') = 0$ .

3° Sada neka je  $p = [\vec{v}, w]$  proizvoljan kvaternion. Tada važi:

$$\begin{aligned}
p' &= q \cdot p \cdot q^{-1} \\
&= q \cdot ([\vec{v}, 0] + [\vec{0}, w]) \cdot q^{-1} \\
&= q \cdot [\vec{v}, 0] \cdot q^{-1} + q \cdot [\vec{0}, w] \cdot q^{-1} \\
&= [\vec{v}', 0] + [\vec{0}, w] && (\text{Iz 1° i 2°}) \\
&= [\vec{v}', w].
\end{aligned}$$

Ostaje još da se pokaže da je  $\|\vec{v}'\| = \|\vec{v}\|$ . Uočimo da

$$\begin{aligned}
\|p'\| &= \|q \cdot p \cdot q^{-1}\| \\
&= \|q\| \cdot \|p\| \cdot \|q^{-1}\| && (\text{Stav 4 a)}) \\
&= \|p\| && (q \text{ jedinični})
\end{aligned}$$

i pošto su im norme i realni delovi jednaki onda i norme imaginarnih delova moraju biti jednake odnosno važi tvrđenje stava.  $\square$

Prethodnim stavom smo pokazali da konjugacija jediničnim kvaternionom indukuje izometriju u trodimenzionom prostoru imaginarnih kvaterniona, a realni deo kvaterniona fiksira. Na osnovu Poglavlja 1 znamo da je svaka izometrija koja čuva orijentaciju rotacija oko neke prave. Zato ne iznenađuje sledeća teorema koja precizno opisuje koju rotaciju predstavlja konjugacija.

**Teorema 6.** *Neka je  $q = [\sin \alpha \cdot \vec{u}, \cos \alpha]$  proizvoljan jedinični kvaternion,  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ , kvaternion  $p = [\vec{x}, 0]$  a kvaternion  $p' = [\vec{x}', 0]$  je dobijen od  $p$  konjugacijom kvaternionom  $q$ , odnosno  $p' = C_q(p)$ . Tada je  $\vec{x}'$  ustvari  $\vec{x}$  rotiran za ugao  $2\alpha$  oko prave čiji je vektor pravca  $\vec{u}$  i koja prolazi kroz  $O$ .*

*Dokaz.* Ako je  $\vec{x} = \vec{u}$  tada:

$$\begin{aligned}
C_q(p) &= C_q([\vec{u}, 0]) = q \cdot [\vec{u}, 0] \cdot q^{-1} \\
&= [\sin \alpha \cdot \vec{u}, \cos \alpha] \cdot [\vec{u}, 0] \cdot [\sin \alpha \cdot \vec{u}, \cos \alpha]^{-1} \\
&= [\sin \alpha \cdot \vec{u}, \cos \alpha] \cdot [\vec{u}, 0] \cdot [-\sin \alpha \cdot \vec{u}, \cos \alpha] \quad (\text{Inverz jediničnog}) \\
&= [(\sin \alpha \cdot \vec{u}) \times \vec{u} + \cos \alpha \cdot \vec{u} + 0 \cdot (\sin \alpha \cdot \vec{u}), 0 \cdot \cos \alpha - \langle \sin \alpha \cdot \vec{u}, \vec{u} \rangle] \\
&\quad \cdot [-\sin \alpha \cdot \vec{u}, \cos \alpha] \\
&= [\vec{0} + \cos \alpha \cdot \vec{u} + \vec{0}, 0 - \sin \alpha \cdot 1] \cdot [-\sin \alpha \cdot \vec{u}, \cos \alpha] \\
&= [\cos \alpha \cdot \vec{u}, -\sin \alpha] \cdot [-\sin \alpha \cdot \vec{u}, \cos \alpha] \\
&= [(\cos \alpha \cdot \vec{u}) \times (-\sin \alpha \cdot \vec{u}) - \sin \alpha \cdot (-\sin \alpha \cdot \vec{u}) + \cos \alpha \cdot (\cos \alpha \cdot \vec{u}), \\
&\quad -\sin \alpha \cdot \cos \alpha - \langle \cos \alpha \cdot \vec{u}, -\sin \alpha \cdot \vec{u} \rangle] \\
&= [\vec{0} + \sin^2 \alpha \cdot \vec{u} + \cos^2 \alpha \cdot \vec{u}, -\sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot 1] \\
&= [\vec{u}, 0].
\end{aligned}$$



Ako je vektor  $\vec{x}$  normalan na vektor  $\vec{u}$  onda važi:

$$\begin{aligned}
C_q(p) &= C_q([\vec{x}, 0]) = q \cdot [\vec{x}, 0] \cdot q^{-1} \\
&= [\sin \alpha \cdot \vec{u}, \cos \alpha] \cdot [\vec{u}, 0] \cdot [\sin \alpha \cdot \vec{u}, \cos \alpha]^{-1} \\
&= [\sin \alpha \cdot \vec{u}, \cos \alpha] \cdot [\vec{x}, 0] \cdot [-\sin \alpha \cdot \vec{u}, \cos \alpha] && \text{(Inverz jediničnog)} \\
&= [(\sin \alpha \cdot \vec{u}) \times \vec{x} + \cos \alpha \cdot \vec{x} + 0 \cdot (\sin \alpha \cdot \vec{u}), 0 \cdot \cos \alpha - \langle \sin \alpha \cdot \vec{u}, \vec{x} \rangle] \\
&\quad \cdot [-\sin \alpha \cdot \vec{u}, \cos \alpha] \\
&= [\sin \alpha \cdot (\vec{u} \times \vec{x}) + \cos \alpha \cdot \vec{x}, -\sin \alpha \cdot \langle \vec{u}, \vec{x} \rangle] \cdot [-\sin \alpha \cdot \vec{u}, \cos \alpha] \\
&= [\sin \alpha \cdot (\vec{u} \times \vec{x}) + \cos \alpha \cdot \vec{x}, 0] \cdot [-\sin \alpha \cdot \vec{u}, \cos \alpha] && (\vec{u} \perp \vec{x}) \\
&= [(\sin \alpha \cdot (\vec{u} \times \vec{x}) + \cos \alpha \cdot \vec{x}) \times (-\sin \alpha \cdot \vec{u}) + 0 \cdot (-\sin \alpha \cdot \vec{u}) + \\
&\quad + \cos \alpha \cdot (\sin \alpha \cdot (\vec{u} \times \vec{x}) + \cos \alpha \cdot \vec{x}), \\
&\quad 0 \cdot \cos \alpha - \langle \sin \alpha \cdot (\vec{u} \times \vec{x}) + \cos \alpha \cdot \vec{x}, -\sin \alpha \cdot \vec{u} \rangle] \\
&= [(\sin \alpha \cdot (\vec{u} \times \vec{x})) \times (-\sin \alpha \cdot \vec{u}) + (\cos \alpha \cdot \vec{x}) \times (-\sin \alpha \cdot \vec{u}) + \vec{0} + \\
&\quad + \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot (\vec{u} \times \vec{x}) + \cos \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \vec{x}, \\
&\quad - \langle \sin \alpha \cdot (\vec{u} \times \vec{x}), -\sin \alpha \cdot \vec{u} \rangle + \langle \cos \alpha \cdot \vec{x}, -\sin \alpha \cdot \vec{u} \rangle] \\
&\hspace{10em} \text{(Distributivnost } \times \text{ i linearnost } \langle, \rangle) \\
&= [-\sin^2 \alpha \cdot (\vec{u} \times \vec{x}) \times \vec{u} - \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot (\vec{x} \times \vec{u}) - \\
&\quad - \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot (\vec{x} \times \vec{u}) + \cos^2 \alpha \cdot \vec{x}, \\
&\quad - (-\sin^2 \alpha \cdot \langle \vec{u} \times \vec{x}, \vec{u} \rangle - \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot \langle \vec{x}, \vec{u} \rangle)] && \text{(Izvlačenje skalara)} \\
&= [-\sin^2 \alpha \cdot (\vec{u} \times \vec{x}) \times \vec{u} - 2 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot (\vec{x} \times \vec{u}) + \cos^2 \alpha \cdot \vec{x}, 0] \\
&\hspace{10em} \text{(Jer } \vec{x} \perp \vec{u} \text{ pa } \langle \vec{u} \times \vec{x}, \vec{u} \rangle = 0 \text{ i } \langle \vec{x}, \vec{u} \rangle = 0) \\
&= [-\sin^2 \alpha \cdot (-\langle \vec{u}, \vec{x} \rangle \cdot \vec{u} + \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \cdot \vec{x}) - 2 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot (\vec{x} \times \vec{u}) + \\
&\quad + \cos^2 \alpha \cdot \vec{x}, 0] && \text{(Po formuli } (\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z} = -\langle \vec{z}, \vec{y} \rangle \cdot \vec{x} + \langle \vec{z}, \vec{x} \rangle \cdot \vec{y}) \\
&= [-\sin^2 \alpha \cdot (-0 + 1 \cdot \vec{x}) - 2 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot (\vec{x} \times \vec{u}) + \cos^2 \alpha \cdot \vec{x}, 0] \\
&\hspace{10em} (\langle \vec{u}, \vec{x} \rangle = 0 \text{ i } \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 1) \\
&= [(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \cdot \vec{x} - 2 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot (\vec{x} \times \vec{u}), 0] \\
&= [\cos(2\alpha) \cdot \vec{x} - \sin(2\alpha) \cdot (\vec{x} \times \vec{u}), 0] \\
&= [\mathcal{R}_u(2\alpha)(\vec{x}), 0].
\end{aligned}$$

Dakle, kada  $\vec{x} \perp \vec{u}$  onda je  $\vec{x}' = \mathcal{R}_u(2\alpha)(\vec{x})$ , a kada  $\vec{x} = \vec{u}$  onda je  $\vec{x}' = \vec{x}$  i to je upravo ono što radi rotacija oko prave  $\vec{u}$  za ugao  $2\alpha$ , pa zbog toga je  $C_q = \mathcal{R}_u(2\alpha)$  čime je dokaz ove teoreme završen.  $\square$

Pokazano je da svaki jedinični kvaternion predstavlja rotaciju oko neke prave za neki ugao. Očigledno važi i obrnuto jer ako imamo rotaciju oko prave  $\vec{p}$  za ugao  $\alpha$  onda je kvaternion koji predstavlja tu rotaciju  $q = \left[ \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \vec{p}, \cos \frac{\alpha}{2} \right]$ . Setimo se da se svaka rotacija oko prave može postići i sopstvenim rotacijama za trojku Ojlerovih uglova i onda se dobije **da svi jedinični kvaternioni čine trodimenzionu sferu** (opisana je sa tri parametra, Ojlerovim uglovima).

Bitno je razumeti i vezu između kvaterniona  $q$  i  $q^{-1}$  a posebno vezu između  $q$  i  $-q$ . Kad je kvaternion  $q = [v, w]$  jedinični onda je  $q^{-1} = [-v, w]$  pa će rotacija koju predstavlja  $q^{-1}$  biti za isti ugao jer je realni deo isti, ali oko suprotno orijentisane prave zbog minusa, pa će ona ustvari poništavati rotaciju koju uradi  $q$  što i jeste smisao inverza. Odnos između kvaterniona  $q$  i  $-q$  je opisan u narednom stavu.

**Stav 9.** *Kvaternioni  $q$  i  $-q$  predstavljaju istu rotaciju.*

*Dokaz.* Formalno dokaz sledi odmah iz stava 7 deo a).

Suštinska potvrda toga je sledeće razmatranje. Ako je  $q = [\sin \alpha \cdot \vec{p}, \cos \alpha]$  onda  $-q = [-\sin \alpha \cdot \vec{p}, -\cos \alpha] = [\sin(\pi - \alpha) \cdot \vec{-p}, \cos(\pi - \alpha)]$ . Dakle, kvaternion  $q$  predstavlja rotaciju oko prave  $p$  za ugao  $2\alpha$  a kvaternion  $-q$  predstavlja rotaciju oko prave  $-p$  za ugao  $2\pi - 2\alpha$  što je isto.  $\square$

### 3 Prednosti i mane različitih načina za predstavljanje orijentacije

#### Matrice

Kao što smo videli u Poglavlju 1 ako je data direktna izometrija koja fiksira koordinatni početak onda se njoj može pridružiti odgovarajuća matrica  $A$ . Upravo ta matrica određuje orijentaciju tela, a može se dodatno proširiti do  $4 \times 4$  matrice  $\hat{A}$  koja će sadržati i informaciju o translaciji centra mase u odnosu na koordinatni početak pa samim tim je celokupan položaj tela određen samo jednom matricom. Takođe, matrični način predstavljanja omogućava i laku kompoziciju. Međutim, ovaj način ima jednu veliku manu, a to je nepostojanje dovoljno dobrog načina za interpolaciju.

#### Ojlerovi uglovi

Način koji je bio glavni do pojave kvaterniona, a danas se koristi isključivo u korisničkim interfejsima. Prednost je što postoje jednostavni i jeftini uređaji koji se koriste za određivanje Ojlerovih uglova i što jeste relativno intuitivan način za predstavljanje. Pored teške kompozicije još nekoliko ozbiljnih mana su: nepostojanje dovoljno dobrog metoda za interpolaciju, problem “zaključan žiroskop” o kome je već bilo reči u 1.4 i činjenica da je bitan redosled osa oko kojih se rotira. U radu je korišćen redosled  $z - y - x$ , ali u praksi ima i drugih koji se gotovo ravnopravno koriste.

#### Predstavljanje osom i uglom

U delu 1.1 je bilo reči o tome da se svaka direktna izometrija koja fiksira koordinatni početak može prikazati kao rotacija oko orijentisane prave  $p$  za ugao  $\phi \in [0, \pi]$  i ta prava  $p$  (osa) i ugao  $\phi$  služe za prikazivanje orijentacije objekta. Ovo je relativno intuitivan način za predstavljanje orijentacije. Ne postoji problem “zaključan žiroskop” niti bilo koji drugi nalik tome. Linearna interpolacija ose i ugla u praksi daje dosta dobre rezultate (o tome više u narednom delu), međutim dosta je teška kompozicija sa ovakvim predstavljanjem.

#### Kvaternioni kao najbolji izbor

Teoremom 6 je pokazano da konjugacija jediničnim kvaternionom ustvari predstavlja rotaciju oko orijentisane prave za neki ugao pa samim tim kvaternioni služe za predstavljanje orijentacije objekta. Osim što izgledaju komplikovano, teško je sa njima implementirati translaciju i jesu apsolutno ne-intuitivni, kvaternioni nemaju drugih mana. Sa druge strane, kvaternioni su prvenstveno pouzdan način jer nema poteškoća sa problemom “zaključani žiroskop” i ne zavise od izbora koordinatnog sistema i redosleda rotacija. Takođe, lako je izračunati kompoziciju dve konjugacije i o tome govori naredni stav.

**Stav 10.** *Neka je  $p \in \mathbb{H}$  i  $q_1, q_2 \in \mathbb{H}_1$ . Važi:*

$$C_{q_2} \circ C_{q_1}(p) = C_{q_2 \cdot q_1}(p). \quad (37)$$

*Dokaz.*

$$\begin{aligned}
C_{q_2} \circ C_{q_1}(p) &= C_{q_2}(q_1 \cdot p \cdot (q_1)^{-1}) \\
&= q_2 \cdot (q_1 \cdot p \cdot (q_1)^{-1}) \cdot (q_2)^{-1} \\
&= (q_2 \cdot q_1) \cdot p \cdot ((q_1)^{-1} \cdot (q_2)^{-1}) \\
&= (q_2 \cdot q_1) \cdot p \cdot (q_2 \cdot q_1)^{-1} \\
&= C_{q_2 \cdot q_1}(p)
\end{aligned} \tag{Po (36)}$$

□

Ovo jeste velika prednost, ali ne i najveća. Ono zbog čega su kvaternioni dobili primat u predstavljanju orijentacije jeste Slerp interpolacija, koja je zasnovana baš na kvaternionima i najbolja je moguća interpolacija jer ispunjava sve zahteve o kojima je bilo reći u uvodnom delu rada.

## 4 Linearne interpolacije orijentacije

U uvodnom delu je rečeno da je najbolja interpolacija između dve pozicije ustvari linearna interpolacija. Naime, ako su početne koordinate centra  $C_1(x_1, y_1, z_1)$  a krajnje koordinate centra  $C_2(x_2, y_2, z_2)$  i  $t_u$  predstavlja ukupno vreme za koje treba izvršiti interpolaciju onda se koordinate centra u trenutku  $t \in [0, t_u]$  (u oznaci  $C_t(x_t, y_t, z_t)$ ) računaju kao:

$$C_t = \left(1 - \frac{t}{t_u}\right) \cdot C_1 + \frac{t}{t_u} \cdot C_2. \tag{38}$$

Preciznije,  $x$ ,  $y$  i  $z$  koordinata centra se računaju na sledeći način:

$$x_t = \left(1 - \frac{t}{t_u}\right) \cdot x_1 + \frac{t}{t_u} \cdot x_2; \tag{39}$$

$$y_t = \left(1 - \frac{t}{t_u}\right) \cdot y_1 + \frac{t}{t_u} \cdot y_2; \tag{40}$$

$$z_t = \left(1 - \frac{t}{t_u}\right) \cdot z_1 + \frac{t}{t_u} \cdot z_2. \tag{41}$$

Formula (38) je dobijena tako što se traži  $C_t$  u linearnom obliku  $C_t = a \cdot t + b$  i koriste uslovi  $C_0 = C_1$  i  $C_{t_u} = C_2$  i reši se sistem linearnih jednačina po  $a$  i  $b$ .

Znatno teži zadatak je naći interpolaciju orijentacije koja poseduje željena svojstva. Zdravorazumsko je razmišljanje probati sa raznim linearnim interpolacijama.

### Linearna matricna interpolacija

Neka je prva orijentacija zadata matricom  $A_1$  a druga matricom  $A_2$  i neka je vreme za koje se odvija interpolacija  $t_u$ . Tada će linearna matricna interpolacija biti zadata sa

$$A(t) = \left(1 - \frac{t}{t_u}\right) \cdot A_1 + \frac{t}{t_u} \cdot A_2 \tag{42}$$

gde je  $t \in [0, t_u]$ . Očigledan problem koji ovde nastaje je što matrica  $A(t)$  uopšte ne mora biti ortogonalna (bez obzira što  $A_1$  i  $A_2$  jesu), a to je neophodan uslov da bi uopšte mogli da govorimo o izometriji i položaju objekta. Osim toga u praksi ovako nešto daje često interpolaciju u kojoj ima

mного bespotrebnog uvrtnanja.

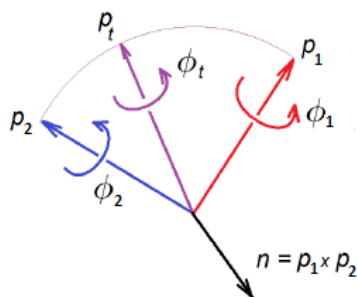
### Linearna interpolacija osom i uglom

Neka je prva orijentacija dobijena rotacijom oko prave  $p_1$  za ugao  $\phi_1$  a druga dobijena rotacijom oko  $p_2$  za ugao  $\phi_2$  i neka je  $n = p_1 \times p_2$  a  $\theta = \angle(p_1, p_2)$ . Tada je orijentacija u trenutku  $t \in [0, t_u]$  dobijena rotacijom oko prave  $p_t$  za ugao  $\phi_t$ , pri čemu su oni zadati sa:

$$\phi_t = \left(1 - \frac{t}{t_u}\right) \cdot \phi_1 + \frac{t}{t_u} \cdot \phi_2, \quad (43)$$

$$p_t = \mathcal{R}_n \left( \frac{t}{t_u} \cdot \theta \right) (p_1). \quad (44)$$

Ovakva interpolacija gde se vektor  $p_1$  konstantnom brzinom rotira do poklapanja sa  $p_2$  (kao što je prikazano na slici 3) jeste prirodna i u praksi daje dosta dobre rezultate, ali je nemoguće garantovati da će biti ispunjeni svi zahtevi sa početka.



Slika 3: Interpolacija osom i uglom

### Linearna interpolacija Ojlerovim uglovima

Ako je početna orijentacija zadata Ojlerovim uglovima  $\psi_1, \theta_1, \phi_1$  a krajnja orijentacija zadata Ojlerovim uglovima  $\psi_2, \theta_2, \phi_2$  onda su u trenutku  $t \in [0, t_u]$  Ojlerovi uglovi dobijenim ovakvom interpolacijom određeni sa:

$$\psi_t = \left(1 - \frac{t}{t_u}\right) \cdot \psi_1 + \frac{t}{t_u} \cdot \psi_2; \quad (45)$$

$$\theta_t = \left(1 - \frac{t}{t_u}\right) \cdot \theta_1 + \frac{t}{t_u} \cdot \theta_2; \quad (46)$$

$$\phi_t = \left(1 - \frac{t}{t_u}\right) \cdot \phi_1 + \frac{t}{t_u} \cdot \phi_2. \quad (47)$$

Iako je možda za očekivati da ovakva interpolacija da dosta dobre rezultate to se ne dešava jer ima puno bespotrebnog uvrtnanja a može doći i do nagle promene pravca kretanja zbog problema “zaključan žiroskop”.

### Linearna interpolacija kvaternionima (LERP)

Neka kvaternioni  $q_1$  i  $q_2$  predstavljaju početnu i krajnju orijentaciju u interpolaciji koja se izvršava za vreme  $t_u$ . Kvaternion  $q_t$  koji određuje orijentaciju u trenutku  $t$  a koji je dobijen ovom interpolacijom se računa po formuli

$$q_t = \left(1 - \frac{t}{t_u}\right) \cdot q_1 + \frac{t}{t_u} \cdot q_2. \quad (48)$$

Sušinski  $\{q_t \mid t \in [0, t_u]\}$  predstavlja pravu u prostoru kvaterniona. Ta prava spaja  $q_1$  i  $q_2$ . Međutim koristeći Stav 7 a) ta prava se može projektovati na sferu jediničnih kvaterniona a da i dalje ostane ista interpolacija. U principu umesto kvaterniona  $q_t$  uzima se jedinični kvaternion  $\frac{q_t}{\|q_t\|}$  koji predstavlja istu orijentaciju. Osim toga ukoliko je  $\theta = \angle(q_1, q_2)$  tup, a to će biti ispunjeno ako je  $\langle q_1, q_2 \rangle = \cos \theta < 0$ , umesto kvaterniona  $q_1$  uzima se kvaternion  $-q_1$  koji predstavlja istu orijentaciju. U praksi ovakva interpolacija pokazuje dosta dobre rezultate jer zadovoljava većinu zahteva, ali ne i sve.

Dakle, linearne interpolacije mogu dati pristojan rezultat ali ne zadovoljavaju sve razumne zahteve koje smo postavili. Interpolacija koja daje najbolji rezultat jeste SLERP interpolacija.

## 5 SLERP interpolacija

Geometrijski rečeno, SLERP interpolacija je kretanje lukom velikog kruga na jediničnoj sferi između dva jedinična kvaterniona. Pre nego što krenemo sa algebarskim zasnivanjem SLERP-a, pokažemo njegovu geometrijsku interpretaciju i utvrdimo osobine koje poseduje ova interpolacija, uvedimo stepenovanje kvaterniona realnim brojem i uočimo bitna svojstva (posebno ona vezana za diferenciranje) koja će nam biti potrebna u dokazima.

Naredno izlaganje bi bilo značajno jednostavnije na jeziku Lijevih grupa (jedinični kvaternioni čine Lijevu grupu), ali je to dosta apstraktnija teorija, te je ovde nećemo koristiti.

### 5.1 Stepena funkcija kvaterniona

Isto kao u slučaju realne stepene funkcije, za stepenu funkciju kvaterniona je neophodno prvo definisati eksponencijalnu i logaritamsku funkciju.

**Definicija 14.** *Neka je  $q = [\sin \alpha \cdot \vec{u}, \cos \alpha]$  proizvoljan jedinični kvaternion. Logaritamska funkcija kvaterniona je definisana sa*

$$\log q = [\alpha \cdot \vec{u}, 0]. \quad (49)$$

**Definicija 15.** *Neka je dat kvaternion oblika  $q = [\alpha \cdot \vec{u}, 0]$  gde je  $\alpha \in \mathbb{R}$ , vektor  $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$  ali takav da  $\|\vec{u}\| = 1$ . Eksponencijalna funkcija ovakvih kvaterniona je definisana sa*

$$\exp q = [\sin \alpha \cdot \vec{u}, \cos \alpha]. \quad (50)$$

**Definicija 16.** *Neka je  $q$  proizvoljan jedinični kvaternion a  $t \in \mathbb{R}$ . Stepenovanje jediničnog kvaterniona je definisano sa*

$$q^t = \exp(t \cdot \log q). \quad (51)$$

Odmah se primećuje sličnost sa odgovarajućim realnim funkcijama. Primitimo prvo da je domen logaritamske kvaternionske funkcije  $\mathbb{H}_1$  a direktna slika je skup imaginarnih kvaterniona  $Im\mathbb{H} = \{q = [\alpha \cdot \vec{u}, 0] \mid \alpha \in \mathbb{R}, \vec{u} \in \mathbb{R}^3, \|\vec{u}\| = 1\}$ , dok je za eksponencijalnu funkciju obrnuto i jedna drugoj su inverzne. Stepena kvaternionska funkcija slika  $\mathbb{H}_1$  u  $\mathbb{H}_1$  i očigledno je definisana kao pandan realne stepene funkcije i zbog toga je nasledila mnoge njene osobine. Neke od njih koje će biti korišćene u daljem radu su opisane u naredna dva stava.

**Stav 11.** *Neka je  $q = [\sin \alpha \cdot \vec{u}, \cos \alpha]$  proizvoljan jedinični kvaternion i  $a, b \in \mathbb{R}$ . Tada važi:*  
*a)  $q^a \cdot q^b = q^{a+b}$ ;      b)  $(q^a)^b = q^{a \cdot b}$ .*

Dokaz. a)

$$q^{a+b} = \exp((a+b) \cdot \log(q)) \quad (\text{Po (51)})$$

$$= \exp((a+b) \cdot [\alpha \cdot \vec{u}, 0]) \quad (\text{Po (49)})$$

$$= \exp([(a+b) \cdot \alpha \cdot \vec{u}, 0])$$

$$= [\sin([(a+b) \cdot \alpha] \cdot \vec{u}), \cos([(a+b) \cdot \alpha])] \quad (\text{Po (50)})$$

$$= [\sin(a \cdot \alpha + b \cdot \alpha) \cdot \vec{u}, \cos(a \cdot \alpha + b \cdot \alpha)]$$

$$= [(\sin(a \cdot \alpha) \cdot \cos(b \cdot \alpha) + \cos(a \cdot \alpha) \cdot \sin(b \cdot \alpha)) \cdot \vec{u},$$

$$\cos(a \cdot \alpha) \cdot \cos(b \cdot \alpha) - \sin(a \cdot \alpha) \cdot \sin(b \cdot \alpha)].$$

Sa druge strane:

$$q^a \cdot q^b = \exp(a \cdot \log q) \cdot \exp(b \cdot \log q) \quad (\text{Po (51)})$$

$$= \exp(a \cdot [\alpha \cdot \vec{u}, 0]) \cdot \exp(b \cdot [\alpha \cdot \vec{u}, 0]) \quad (\text{Po (49)})$$

$$= \exp([a \cdot \alpha \cdot \vec{u}, 0]) \cdot \exp([b \cdot \alpha \cdot \vec{u}, 0])$$

$$= [\sin(a \cdot \alpha) \cdot \vec{u}, \cos(a \cdot \alpha)] \cdot [\sin(b \cdot \alpha) \cdot \vec{u}, \cos(b \cdot \alpha)] \quad (\text{Po (50)})$$

$$= [(\sin(a \cdot \alpha) \cdot \vec{u}) \times (\sin(b \cdot \alpha) \cdot \vec{u}) + \cos(b \cdot \alpha) \cdot (\sin(a \cdot \alpha) \cdot \vec{u})$$

$$+ \cos(a \cdot \alpha) \cdot (\sin(b \cdot \alpha) \cdot \vec{u}), \cos(a \cdot \alpha) \cdot \cos(b \cdot \alpha) -$$

$$< \sin(a \cdot \alpha) \cdot \vec{u}, \sin(b \cdot \alpha) \cdot \vec{u} >]$$

$$= [\vec{0} + (\sin(a \cdot \alpha) \cdot \cos(b \cdot \alpha) + \cos(a \cdot \alpha) \cdot \sin(b \cdot \alpha)) \cdot \vec{u},$$

$$\cos(a \cdot \alpha) \cdot \cos(b \cdot \alpha) - \sin(a \cdot \alpha) \cdot \sin(b \cdot \alpha) \cdot 1]$$

$$= [(\sin(a \cdot \alpha) \cdot \cos(b \cdot \alpha) + \cos(a \cdot \alpha) \cdot \sin(b \cdot \alpha)) \cdot \vec{u},$$

$$\cos(a \cdot \alpha) \cdot \cos(b \cdot \alpha) - \sin(a \cdot \alpha) \cdot \sin(b \cdot \alpha)].$$

Dakle, važi  $q^{a+b} = q^a \cdot q^b$ .

b)

$$(q^a)^b = (\exp(a \cdot \log(q)))^b \quad (\text{Po (51)})$$

$$= \exp(b \cdot \log(\exp(a \cdot \log(q)))) \quad (\text{Po (51)})$$

$$= \exp(b \cdot a \cdot \log(q)) \quad (\text{Jer log i exp inverzne})$$

$$= q^{b \cdot a} \quad (\text{Po (51)})$$

$$= q^{a \cdot b}.$$

□

**Stav 12.** Ako su  $q$  i  $p$  jedinični kvaternioni onda za svako  $t \in \mathbb{R}$  važi

$$q \cdot p^t \cdot \bar{q} = (q \cdot p \cdot \bar{q})^t. \quad (52)$$

*Dokaz.* Pošto je  $p$  jedinični onda se on može napisati kao  $p = [\sin \alpha \cdot \vec{u}, \cos \alpha]$ .

$$\begin{aligned}
(q \cdot p \cdot \bar{q})^t &= \exp(t \cdot \log(q \cdot p \cdot \bar{q})) \\
&= \exp(t \cdot \log(q \cdot [\sin \alpha \cdot \vec{u}, \cos \alpha] \cdot q^{-1})) \\
&= \exp(t \cdot \log([\sin \alpha \cdot \vec{u}, \cos \alpha])) && \text{(Stav 8)} \\
&= \exp(t \cdot [\alpha \cdot \vec{u}, 0]) && \text{(Po (49))} \\
&= \exp([t \cdot \alpha \cdot \vec{u}, 0]) \\
&= [\sin(t \cdot \alpha) \cdot \vec{u}, \cos(t \cdot \alpha)]. && \text{(Po (50))}
\end{aligned}$$

Takođe, važi i da je:

$$\begin{aligned}
q \cdot p^t \cdot \bar{q} &= q \cdot (\exp(t \cdot \log p)) \cdot \bar{q} && \text{(Po (51))} \\
&= q \cdot (\exp(t \cdot \log[\sin \alpha \cdot \vec{u}, \cos \alpha])) \cdot q^{-1} \\
&= q \cdot (\exp(t \cdot [\alpha \cdot \vec{u}, 0])) \cdot q^{-1} && \text{(Po (49))} \\
&= q \cdot (\exp([t \cdot \alpha \cdot \vec{u}, 0])) \cdot q^{-1} \\
&= q \cdot ([\sin(t \cdot \alpha) \cdot \vec{u}, \cos(t \cdot \alpha)]) \cdot q^{-1} && \text{(Po (50))} \\
&= [\sin(t \cdot \alpha) \cdot \vec{u}, \cos(t \cdot \alpha)]. && \text{(Stav 8)}
\end{aligned}$$

Dakle, važi da je  $q \cdot p^t \cdot \bar{q} = (q \cdot p \cdot \bar{q})^t$ . □

U izvođenjima vezanim za Slerp interpolaciju od velike važnosti biće kako naći izvod od  $q^t$  po  $t$ . Pre toga, potrebno je prvo precizirati šta je to izvod kvaterniona. Pošto kvaternion posmatramo kao vektor u  $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$  onda će njegov izvod biti izvod vektorske funkcije  $q(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$  (gde je  $t$  promenljiva koja se pojavljuje u kvaternionu i po kojoj tražimo izvod).

**Stav 13.** *Neka je  $q$  proizvoljan jedinični kvaternion i  $m, t \in \mathbb{R}$ . Onda važi*

$$\frac{d}{dt} q^{m \cdot t} = m \cdot q^{m \cdot t} \cdot \log q. \quad (53)$$

*Dokaz.* Pošto je  $q$  jedinični onda se može napisati u obliku  $q = [\sin \alpha \cdot \vec{u}, \cos \alpha]$ .

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} q^{m \cdot t} &= \frac{d}{dt} \exp(m \cdot t \cdot \log[\sin \alpha \cdot \vec{u}, \cos \alpha]) \\
&= \frac{d}{dt} \exp(m \cdot t \cdot [\alpha \cdot \vec{u}, 0]) \\
&= \frac{d}{dt} \exp([m \cdot t \cdot \alpha \cdot \vec{u}, 0]) \\
&= \frac{d}{dt} [\sin(m \cdot t \cdot \alpha) \cdot \vec{u}, \cos(m \cdot t \cdot \alpha)] \\
&= [m \cdot \alpha \cdot \cos(m \cdot t \cdot \alpha) \cdot \vec{u}, -m \cdot \alpha \cdot \sin(m \cdot t \cdot \alpha)].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m \cdot q^{m \cdot t} \cdot \log q &= m \cdot \exp(m \cdot t \cdot \log q) \cdot [\alpha \cdot \vec{u}, 0] \\
&= m \cdot \exp([m \cdot t \cdot \alpha \cdot \vec{u}, 0]) \cdot [\alpha \cdot \vec{u}, 0] \\
&= m \cdot [\sin(m \cdot t \cdot \alpha) \cdot \vec{u}, \cos(m \cdot t \cdot \alpha)] \cdot [\alpha \cdot \vec{u}, 0] \\
&= m \cdot [(\sin(m \cdot t \cdot \alpha) \cdot \vec{u}) \times (\alpha \cdot \vec{u}) + \cos(m \cdot t \cdot \alpha) \cdot \alpha \cdot \vec{u} + 0 \cdot \sin(m \cdot t \cdot \alpha) \cdot \vec{u}, \\
&\quad 0 \cdot \cos(m \cdot t \cdot \alpha) - \langle \sin(m \cdot t \cdot \alpha) \cdot \vec{u}, \alpha \cdot \vec{u} \rangle] \\
&= m \cdot [\vec{0} + \alpha \cdot \cos(m \cdot t \cdot \alpha) \cdot \vec{u} + \vec{0}, 0 - \alpha \cdot \sin(m \cdot t \cdot \alpha) \cdot 1] \\
&= [m \cdot \alpha \cdot \cos(m \cdot t \cdot \alpha) \cdot \vec{u}, -m \cdot \alpha \cdot \sin(m \cdot t \cdot \alpha)].
\end{aligned}$$

Dakle, važi  $\frac{d}{dt}q^{m \cdot t} = m \cdot q^{m \cdot t} \cdot \log q$  za proizvoljno  $m \in \mathbb{R}$  čime je ovaj dokaz završen.  $\square$

Što se tiče oznake za diferenciranje u daljem radu će češće biti korišćena oznaka  $q'(t)$  umesto oznake  $\frac{d}{dt}q(t)$ .

## 5.2 Algebarska definicija SLERP-a

Linearna interpolacija kvaternionima je dala korektan rezultat u interpolaciji između dve orijentacije međutim, za početak, nema konstantnu brzinu a to je svakako zahtev koga se ne treba lako odreći. Nastavljena je potraga za idealnom interpolacionom krivom na sferi jediničnih kvaterniona i prirodno su se tu nametnuli veliki krugovi. Interpolacija između dve orijentacije koje su predstavljene jediničnim kvaternionima  $q_1$  i  $q_2$  takva da je kvaternion  $q_t$  koji određuje orijentaciju u vremenskom trenutku  $t \in [0, t_u]$  dobijen ravnomernim kretanjem po kraćem luku velikog kruga koji prolazi kroz  $q_1$  i  $q_2$  na jediničnoj sferi kvaterniona naziva se **SLERP interpolacija**. Ovo je suština SLERP interpolacije, međutim SLERP se definiše preko algebarskog izraza, a geometrijsko predstavljanje se izvodi kao posledica.

**Definicija 17.** *Neka su početna i krajnja orijentacija određene jediničnim kvaternionima  $q_1$  i  $q_2$ . Interpolacija takva da se kvaternion  $q_t$  koji određuje orijentaciju u vremenskom trenutku  $t \in [0, t_u]$  računa po formuli*

$$q_t = q_1 \cdot (\overline{q_1} \cdot q_2)^{\frac{t}{t_u}} \quad (54)$$

*naziva se **SLERP interpolacija**.*

Uočimo odmah da je početni kvaternion

$$q_0 = q_1 \cdot (\overline{q_1} \cdot q_2)^{\frac{0}{t_u}} = q_1 \cdot (\overline{q_1} \cdot q_2)^0 = q_1 \cdot 1 = q_1$$

a krajnji kvaternion

$$q_{t_u} = q_1 \cdot (\overline{q_1} \cdot q_2)^{\frac{t_u}{t_u}} = q_1 \cdot (\overline{q_1} \cdot q_2)^1 = (q_1 \cdot \overline{q_1}) \cdot q_2 = 1 \cdot q_2 = q_2$$

što je bilo neophodno da bi interpolacija bila korektna.

Trebalo bi napomenuti da postoje i drugi izrazi (u kojima takođe figuriše stepenovanje jediničnih kvaterniona realnim brojem) kojima je moguće definisati SLERP a ne samo izraz (54). Preciznije, može se pokazati da su izrazi:

1.  $q_1 \cdot (\overline{q_1} \cdot q_2)^{\frac{t}{t_u}}$
2.  $(q_1 \cdot \overline{q_2})^{1 - \frac{t}{t_u}} \cdot q_2$
3.  $(q_2 \cdot \overline{q_1})^{\frac{t}{t_u}} \cdot q_1$
4.  $q_2 \cdot (\overline{q_2} \cdot q_1)^{1 - \frac{t}{t_u}}$

gde su  $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ , a  $t \in [0, t_u]$  jednaki izrazi.



Jednakost 1. i 3.

$$\begin{aligned}
q_1 \cdot (\overline{q_1} \cdot q_2)^{\frac{t}{t_u}} &= q_1 \cdot (\overline{q_1} \cdot q_2)^{\frac{t}{t_u}} \cdot (\overline{q_1} \cdot q_1) && (\overline{q_1} \cdot q_1 = 1 \text{ jer } q_1 \in \mathbb{H}_1) \\
&= (q_1 \cdot (\overline{q_1} \cdot q_2)^{\frac{t}{t_u}} \cdot \overline{q_1}) \cdot q_1 && (\text{Asocijativnost}) \\
&= (q_1 \cdot \overline{q_1} \cdot q_2 \cdot \overline{q_1})^{\frac{t}{t_u}} \cdot q_1 && (\text{Stav 12}) \\
&= (1 \cdot q_2 \cdot \overline{q_1})^{\frac{t}{t_u}} \cdot q_1 && (q_1 \cdot \overline{q_1} = 1) \\
&= (q_2 \cdot \overline{q_1})^{\frac{t}{t_u}} \cdot q_1.
\end{aligned}$$

Jednakost 2. i 4.

$$\begin{aligned}
(q_1 \cdot \overline{q_2})^{1-\frac{t}{t_u}} \cdot q_2 &= (q_2 \cdot \overline{q_2}) \cdot (q_1 \cdot \overline{q_2})^{1-\frac{t}{t_u}} \cdot q_2 && (\overline{q_2} \cdot q_2 = 1 \text{ jer } q_2 \in \mathbb{H}_1) \\
&= q_2 \cdot (\overline{q_2} \cdot (q_1 \cdot \overline{q_2})^{1-\frac{t}{t_u}} \cdot q_2) && (\text{Asocijativnost}) \\
&= q_2 \cdot (\overline{q_2} \cdot (q_1 \cdot \overline{q_2})^{1-\frac{t}{t_u}} \cdot \overline{q_2}) && (\text{Stav 3 c}) \\
&= q_2 \cdot (\overline{q_2} \cdot q_1 \cdot \overline{q_2} \cdot \overline{q_2})^{1-\frac{t}{t_u}} && (\text{Stav 12}) \\
&= q_2 \cdot (\overline{q_2} \cdot q_1 \cdot 1)^{1-\frac{t}{t_u}} && (\overline{q_2} \cdot \overline{q_2} = 1) \\
&= q_2 \cdot (\overline{q_2} \cdot q_1)^{1-\frac{t}{t_u}}.
\end{aligned}$$

Jednakost 2. i 1.

$$\begin{aligned}
(q_1 \cdot \overline{q_2})^{1-\frac{t}{t_u}} \cdot q_2 &= (q_1 \cdot \overline{q_2})^{1+(-\frac{t}{t_u})} \cdot q_2 \\
&= (q_1 \cdot \overline{q_2})^1 \cdot (q_1 \cdot \overline{q_2})^{(-\frac{t}{t_u})} \cdot q_2 && (\text{Stav 11 a}) \\
&= q_1 \cdot \overline{q_2} \cdot (q_1 \cdot \overline{q_2})^{-1 \cdot (\frac{t}{t_u})} \cdot q_2 \\
&= q_1 \cdot \overline{q_2} \cdot ((q_1 \cdot \overline{q_2})^{-1})^{\frac{t}{t_u}} \cdot q_2 && (\text{Stav 11 b}) \\
&= q_1 \cdot \overline{q_2} \cdot (\overline{q_1 \cdot \overline{q_2}})^{\frac{t}{t_u}} \cdot q_2 && (q_1 \cdot \overline{q_2} \in \mathbb{H}_1) \\
&= q_1 \cdot \overline{q_2} \cdot (\overline{\overline{q_2} \cdot q_1})^{\frac{t}{t_u}} \cdot q_2 && (\text{Stav 3 b}) \\
&= q_1 \cdot \overline{q_2} \cdot (q_2 \cdot \overline{q_1})^{\frac{t}{t_u}} \cdot q_2 && (\text{Stav 3 c}) \\
&= q_1 \cdot (\overline{q_2} \cdot (q_2 \cdot \overline{q_1})^{\frac{t}{t_u}} \cdot q_2) && (\text{Asocijativnost}) \\
&= q_1 \cdot (\overline{q_2} \cdot q_2 \cdot \overline{q_1} \cdot q_2)^{\frac{t}{t_u}} && (\text{Stav 12}) \\
&= q_1 \cdot (1 \cdot \overline{q_1} \cdot q_2)^{\frac{t}{t_u}} && (\overline{q_2} \cdot q_2 = 1) \\
&= q_1 \cdot (\overline{q_1} \cdot q_2)^{\frac{t}{t_u}}.
\end{aligned}$$

Iz navedenih jednakosti sledi jednakost svih izraza (zbog tranzitivnosti relacije "jednako").

### 5.3 Geometrizacija SLERP-a

Za SLERP interpolaciju iz Definicije 17 želimo da vidimo kako izgleda interpolaciona kriva.

**Teorema 7.** Slika preslikavanja  $q(t) = q_t : [0, t_u] \rightarrow \mathbb{H}_1$  iz Definicije 17 je kraći od kružnih lukova koji spajaju kvaternione  $q_1$  i  $q_2$  na velikom krugu jedinične sfere kvaterniona koji prolazi kroz  $q_1$  i  $q_2$ .

*Dokaz.*  $\mathbb{H}_1$  je kodomen za  $q(t)$  jer

$$\begin{aligned}
\|q(t)\| &= \|q_1 \cdot (\overline{q_1} \cdot q_2)^{\frac{t}{t_u}}\| \\
&= \|q_1\| \cdot \|(\overline{q_1} \cdot q_2)^{\frac{t}{t_u}}\| && \text{(Stav 4 a)} \\
&= 1 \cdot \|(\overline{q_1} \cdot q_2)^{\frac{t}{t_u}}\| && (q_1 \text{ jedinični}) \\
&= \|(\overline{q_1} \cdot q_2)^{\frac{t}{t_u}}\| \\
&= 1. && \text{(Domen i kodomen za stepenu je } \mathbb{H}_1)
\end{aligned}$$

Dakle,  $q(t)$  pripada sferi jediničnih kvaterniona i  $\{q(t) \mid t \in [0, t_u]\}$  je neka kriva na toj sferi. Da bismo pokazali da je ta kriva luk koji pripada velikom krugu dovoljno je iskoristiti karakterizaciju koja kaže ako je drugi izvod vektora položaja (koji je u ovom slučaju predstavljen kvaternionom  $q(t)$ ) paralelan sa samim vektorom položaja ali suprotnog smera za svaku vrednost parametra (za  $t \in [0, t_u]$ ) onda je ta kriva deo velikog kruga. Dakle, dovoljno je pokazati da  $q''(t) = k \cdot q(t)$  za svako  $t \in [0, t_u]$ , pri čemu je  $k < 0$ .

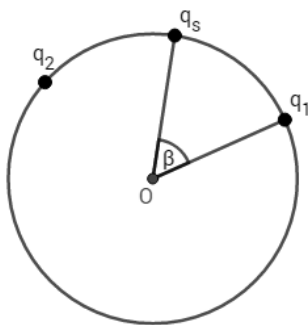
$$\begin{aligned}
q''(t) &= \left( q_1 \cdot (\overline{q_1} \cdot q_2)^{\frac{t}{t_u}} \right)'' \\
&= q_1 \cdot \left( (\overline{q_1} \cdot q_2)^{\frac{t}{t_u}} \right)'' \\
&= q_1 \cdot \left( \frac{1}{t_u} \cdot (\overline{q_1} \cdot q_2)^{\frac{t}{t_u}} \cdot \log(\overline{q_1} \cdot q_2) \right)' && \text{(Stav 13)} \\
&= q_1 \cdot \frac{1}{t_u} \cdot \left( (\overline{q_1} \cdot q_2)^{\frac{t}{t_u}} \right)' \cdot \log(\overline{q_1} \cdot q_2) \\
&= q_1 \cdot \frac{1}{t_u} \cdot \frac{1}{t_u} \cdot (\overline{q_1} \cdot q_2)^{\frac{t}{t_u}} \cdot \log(\overline{q_1} \cdot q_2) \cdot \log(\overline{q_1} \cdot q_2) && \text{(Stav 13)} \\
&= \left( \frac{1}{t_u} \right)^2 \cdot q_1 \cdot (\overline{q_1} \cdot q_2)^{\frac{t}{t_u}} \cdot (\log(\overline{q_1} \cdot q_2))^2 \\
&= \left( \frac{1}{t_u} \right)^2 \cdot q(t) \cdot (\log(\overline{q_1} \cdot q_2))^2.
\end{aligned}$$

Ako pokažemo da je  $(\log(\overline{q_1} \cdot q_2))^2$  kvaternion koji predstavlja negativnu realnu konstantu onda je traženo negativno  $k = \left( \frac{1}{t_u} \right)^2 \cdot (\log(\overline{q_1} \cdot q_2))^2 < 0$ . Pošto  $\overline{q_1} \cdot q_2 \in \mathbb{H}_1$  onda  $\overline{q_1} \cdot q_2 = [\sin \alpha \cdot \vec{u}, \cos \alpha]$

za  $\alpha \in (-\pi, \pi]$  i  $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$  takav da  $\|\vec{u}\| = 1$ .

$$\begin{aligned}
 (\log(\overline{q_1} \cdot q_2))^2 &= (\log([\sin \alpha \cdot \vec{u}, \cos \alpha]))^2 \\
 &= ([\alpha \cdot \vec{u}, 0])^2 \\
 &= [\alpha \cdot \vec{u}, 0] \cdot [\alpha \cdot \vec{u}, 0] \\
 &= [(\alpha \cdot \vec{u}) \times (\alpha \cdot \vec{u}) + 0 \cdot \alpha \cdot \vec{u} + 0 \cdot \alpha \cdot \vec{u}, 0 \cdot 0 - \langle \alpha \cdot \vec{u}, \alpha \cdot \vec{u} \rangle] \\
 &= [\vec{0} + \vec{0} + \vec{0}, -\alpha^2 \cdot 1] \\
 &= [\vec{0}, -\alpha^2] \\
 &= -\alpha^2.
 \end{aligned}$$

Ostaje da se odluči koji od dva kružna luka koji spajaju  $q_1$  i  $q_2$  na velikom krugu kroz njih ustvari predstavlja SLERP. U pitanju je kraći luk. To ćemo pokazati tako što ćemo posmatrati kvaternion  $q_s$  koji odgovara sredini interpolacije, odnosno vremenu  $t = \frac{t_u}{2}$  i posmatrati ugao između  $q_1$  i  $q_s$  (slika 4).



Slika 4: Sredina SLERP interpolacije

Neka je  $\beta = \angle(q_1 O q_s)$ . Da je kružni luk na kome se nalazi  $q_s$  kraći je ekvivalentno sa tim da je  $\angle(q_1 O q_2)$  (pri čemu on sadrži  $q_s$ ) manji ili jednak sa  $\pi$ , odnosno ako bi se vodilo računa i o orijentaciji tog ugla onda je  $-\pi \leq \angle(q_1 O q_2) \leq \pi$ . Pošto  $q_s$  predstavlja sredinu interpolacije i kretanje po sferi je konstantnom ugaonom brzinom onda će važiti da je  $\beta = \frac{\angle(q_1 O q_2)}{2}$ . Dakle, dovoljno je pokazati da je  $-\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$  što je ekvivalentno sa tim da je  $\cos \beta \geq 0$ .

$$\begin{aligned}
 \cos \beta &= \langle q_1, q_s \rangle && (q_1 \text{ i } q_s \text{ jedinični}) \\
 &= \langle q_1, q_1 \cdot (\overline{q_1} \cdot q_2)^{\frac{1}{2}} \rangle.
 \end{aligned}$$

Razlomak  $\frac{1}{2}$  u stepenu je jer  $q_s$  odgovara sredini interpolacije pa je  $\frac{t}{t_u} = \frac{1}{2}$ . Pošto je kvaternion  $\overline{q_1} \cdot q_2$  takođe jedinični onda se on može napisati u obliku  $\overline{q_1} \cdot q_2 = [\sin \gamma \cdot \vec{g}, \cos \gamma]$  gde je  $\gamma \in (-\pi, \pi]$

a  $\vec{g} \in \mathbb{R}^3$  takav da  $\|\vec{g}\| = 1$ . Sledi da je

$$\begin{aligned}
\cos \beta &= \langle q_1, q_1 \cdot ([\sin \gamma \cdot \vec{g}, \cos \gamma])^{\frac{1}{2}} \rangle \\
&= \langle q_1, q_1 \cdot \exp\left(\frac{1}{2} \cdot \log([\sin \gamma \cdot \vec{g}, \cos \gamma])\right) \rangle \\
&= \langle q_1, q_1 \cdot \exp\left(\frac{1}{2} \cdot [\gamma \cdot \vec{g}, 0]\right) \rangle \\
&= \langle q_1, q_1 \cdot \exp\left(\left[\frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot \vec{g}, 0\right]\right) \rangle \\
&= \langle q_1, q_1 \cdot \left[\sin \frac{\gamma}{2} \cdot \vec{g}, \cos \frac{\gamma}{2}\right] \rangle \\
&= \langle q_1 \cdot [\vec{0}, 1], q_1 \cdot \left[\sin \frac{\gamma}{2} \cdot \vec{g}, \cos \frac{\gamma}{2}\right] \rangle && ([\vec{0}, 1] \text{ neutral za } \cdot) \\
&= \|q_1\|^2 \cdot \langle [\vec{0}, 1], \left[\sin \frac{\gamma}{2} \cdot \vec{g}, \cos \frac{\gamma}{2}\right] \rangle \\
&= 1 \cdot \langle [\vec{0}, 1], \left[\sin \frac{\gamma}{2} \cdot \vec{g}, \cos \frac{\gamma}{2}\right] \rangle \\
&= \langle \vec{0}, \sin \frac{\gamma}{2} \cdot \vec{g} \rangle + 1 \cdot \cos \frac{\gamma}{2} \\
&= \cos \frac{\gamma}{2} \\
&\geq 0. && (\gamma \in (-\pi, \pi] \text{ pa } \frac{\gamma}{2} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])
\end{aligned}$$

Važi da je  $\cos \beta \geq 0$ , pa jeste kraći luk i ovim je ovaj dokaz završen.  $\square$

## 5.4 Formula SLERP-a bez stepene funkcije

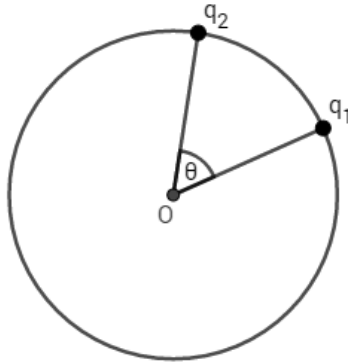
Moguće je dati još jednu formulu SLERP-a u kojoj se ne pojavljuje stepena kvaternionska funkcija i koja se čak češće koristi u računarskoj praksi.

**Stav 14.** *Neka su dati početni i krajnji kvaternion  $q_1$  i  $q_2$  u SLERP interpolaciji koja se izvršava za vreme  $t_u$ . Tada se kvaternion  $q(t)$  koji odgovara vremenskom trenutku  $t \in [0, t_u]$  može računati i po formuli*

$$q(t) = \frac{\sin\left(\left(1 - \frac{t}{t_u}\right) \cdot \theta\right)}{\sin \theta} \cdot q_1 + \frac{\sin\left(\frac{t}{t_u} \cdot \theta\right)}{\sin \theta} \cdot q_2 \quad (55)$$

gde je  $\theta$  ugao između kvaterniona  $q_1$  i  $q_2$ .

*Dokaz.* Za početak bi trebalo uočiti veliki krug na kome se nalaze dati kvaternioni (slika 5).

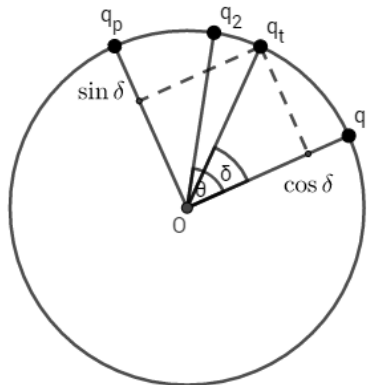


Slika 5: Početni i krajnji kvaternion u SLERP interpolaciji

Ugao  $\theta$  između njih će biti oštar (ako nije, umesto kvaterniona  $q_1$  uzmemo kvaternion  $-q_1$ ). Uočimo sada kvaternion  $q_p$  na velikom krugu koji je normalan na  $q_1$ , odnosno koji je takav da važi  $\langle q_1, q_p \rangle = 0$ . Kvaternion  $q(t)$  se može zapisati kao

$$q(t) = \cos \delta \cdot q_1 + \sin \delta \cdot q_p \quad (56)$$

gde je  $\delta$  ugao između kvaterniona  $q_1$  i  $q(t)$  (slika 6).



Slika 6: Kvaternion  $q(t)$  preko  $q_1$  i  $q_p$

Pošto SLERP ide ravnomernom ugaonom brzinom onda je  $\delta = \frac{t}{t_u} \cdot \theta$  pa prethodna formula se ustvari svede na

$$q(t) = \cos \left( \frac{t}{t_u} \cdot \theta \right) \cdot q_1 + \sin \left( \frac{t}{t_u} \cdot \theta \right) \cdot q_p. \quad (57)$$

Takođe, važi i da se  $q_p$  može zapisati kao

$$q_p = \alpha \cdot q_1 + \beta \cdot q_2 \quad (58)$$

gde su  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Ukoliko se (58) skalarno pomnoži sa  $q_p$  dobija se

$$\begin{aligned}
\langle q_p, q_p \rangle &= \langle \alpha \cdot q_1 + \beta \cdot q_2, q_p \rangle \\
&= \alpha \cdot \langle q_1, q_p \rangle + \beta \cdot \langle q_2, q_p \rangle && \text{(Linearnost skalarnog)} \\
&= \beta \cdot \langle q_2, q_p \rangle && (\langle q_1, q_p \rangle = 0) \\
&= \beta \cdot \cos(\angle(q_2, q_p)) \\
&= \beta \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\
&= \beta \cdot \sin \theta.
\end{aligned}$$

Takođe je i  $\langle q_p, q_p \rangle = \|q_p\|^2 = 1$  i onda se dobija da je

$$\beta = \frac{1}{\sin \theta}. \quad (59)$$

Ukoliko se (58) pomnoži skalarno sa  $q_1$  onda se dobije

$$\begin{aligned}
\langle q_p, q_1 \rangle &= \langle \alpha \cdot q_1 + \beta \cdot q_2, q_1 \rangle \\
&= \alpha \cdot \langle q_1, q_1 \rangle + \beta \cdot \langle q_2, q_1 \rangle && \text{(Linearnost skalarnog)} \\
&= \alpha \cdot 1 + \beta \cdot \cos \theta \\
&= \alpha \cdot 1 + \frac{1}{\sin \theta} \cdot \cos \theta. && \text{(Po (59))}
\end{aligned}$$

Pošto je  $\langle q_p, q_1 \rangle = 0$  onda se dobija da je

$$\alpha = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta}. \quad (60)$$

Konačno, kvaternion  $q_p$  se može napisati kao

$$q_p = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cdot q_1 + \frac{1}{\sin \theta} \cdot q_2 \quad (61)$$

i kada se prethodna jednačina zameni u (57) dobije se konačan izraz za SLERP.

$$\begin{aligned}
q(t) &= \cos\left(\frac{t}{t_u} \cdot \theta\right) \cdot q_1 + \sin\left(\frac{t}{t_u} \cdot \theta\right) \cdot q_p \\
&= \cos\left(\frac{t}{t_u} \cdot \theta\right) \cdot q_1 + \sin\left(\frac{t}{t_u} \cdot \theta\right) \cdot \left(-\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cdot q_1 + \frac{1}{\sin \theta} \cdot q_2\right) \\
&= \left(\cos\left(\frac{t}{t_u} \cdot \theta\right) - \sin\left(\frac{t}{t_u} \cdot \theta\right) \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta}\right) \cdot q_1 + \sin\left(\frac{t}{t_u} \cdot \theta\right) \cdot \frac{1}{\sin \theta} \cdot q_2 \\
&= \frac{\cos\left(\frac{t}{t_u} \cdot \theta\right) \cdot \sin \theta - \sin\left(\frac{t}{t_u} \cdot \theta\right) \cdot \cos \theta}{\sin \theta} \cdot q_1 + \frac{\sin\left(\frac{t}{t_u} \cdot \theta\right)}{\sin \theta} \cdot q_2 \\
&= \frac{\sin\left(\theta - \frac{t}{t_u} \cdot \theta\right)}{\sin \theta} \cdot q_1 + \frac{\sin\left(\frac{t}{t_u} \cdot \theta\right)}{\sin \theta} \cdot q_2 && \text{(Formula za sinus razlike)} \\
&= \frac{\sin\left(\left(1 - \frac{t}{t_u}\right) \cdot \theta\right)}{\sin \theta} \cdot q_1 + \frac{\sin\left(\frac{t}{t_u} \cdot \theta\right)}{\sin \theta} \cdot q_2.
\end{aligned}$$

□

## 5.5 SLERP i osobine dobre interpolacije

Vratimo se na priču sa početka vezanu za poželjne osobine dobre interpolacije.

- pouzdanost

SLERP interpolacija jeste pouzdana jer je zasnovana na kvaternionima koji omogućavaju jednoznačno predstavljanje orijentacije i ne dopuštaju mogućnost problema kao sto je “zaključan žiroskop” koji se pojavljuje pri interpolaciji sa Ojlerovim uglovima, pa nema ni neočekivanih trzaja.

- odvija se najkraćim putem i konstantnom brzinom

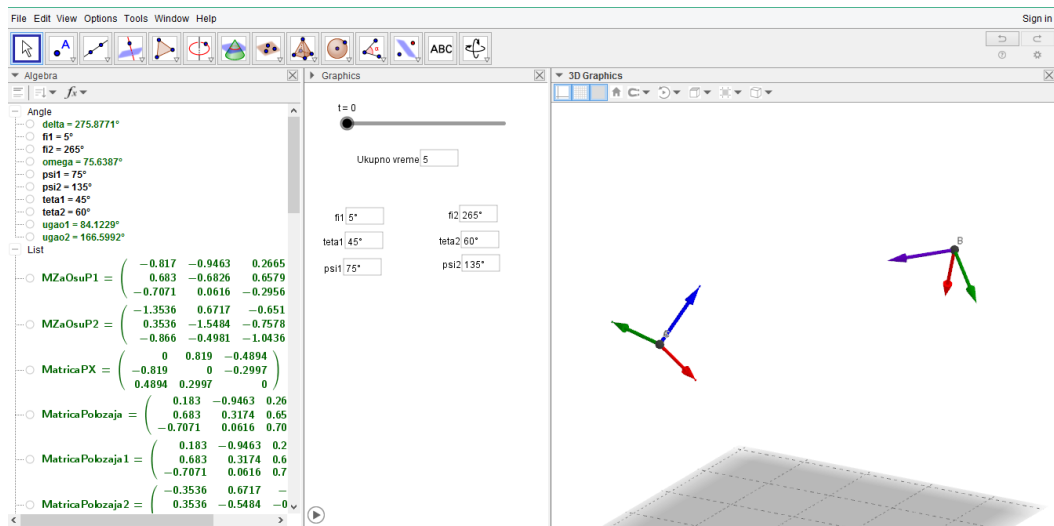
Interpolacija položaja kod SLERP interpolacije je određena jednačinom (38), kao i kod svih drugih interpolacija. U toj jednačini je opisano linearno kretanje, pa se centar objekta kreće po pravou koja spaja početnu i krajnju poziciju, a kretanje po pravou jeste kretanje najkraćim putem. Pored toga, brzina kretanja opisanog linearnom jednačinom je konstantna (prvi izvod linearne funkcije je konstanta).

Osim toga, može se pokazati da ova interpolacija poseduje i preostale dobre osobine:

- nema bespotrebnog uvrtnja,
- troši se najmanje energije.

## 6 Vizuelizacija SLERP-a u programskom paketu GeoGebra

Na kraju, SLERP interpolacija je vizuelizovana u programskom paketu GeoGebra. Dati su početni položaj repera čija je pozicija određena tačkom  $A$  a orijentacija trojkom Ojlerovih uglova  $\psi_1 = 75^\circ$ ,  $\theta_1 = 45^\circ$  i  $\phi_1 = 5^\circ$  i krajnji položaj čija je pozicija određena tačkom  $B$  a orijentacija trojkom Ojlerovih uglova  $\psi_2 = 135^\circ$ ,  $\theta_2 = 60^\circ$  i  $\phi_2 = 265^\circ$  (slika 7).



Slika 7: Početni i krajnji položaj

Bilo je reći o tome da interpolacija pozicije (centra objekta) ide linearno, odnosno koordinate centra  $C$  se dobijaju formulom (38). To je dosta lako implementirati u Geogebri. Mnogo teže je predstaviti interpolaciju orijentacije. Na samom početku, da bismo predstavili repere moramo prvo da nađemo matricu položaja. To radimo koristeći jednačinu (11). Slika vektora koji predstavlja  $x$ -osu je vektor koji predstavlja prvu kolonu matrice položaja, druga kolona je slika vektora koji predstavlja  $y$ -osu a treća je slika vektora koji predstavlja  $z$ -osu. Ovo je zato što je jedinični vektor koji predstavlja  $x$ -osu vektor  $(1 \ 0 \ 0)^T$  i kada se matrica položaja pomnoži ovim vektorom ostane samo prva njena kolona. Analogno i za ostala dva vektora. Dakle, da bismo sproveli SLERP interpolaciju dovoljno je da nađemo matricu položaja  $A(t)$  za svaki vremenski trenutak  $t \in [0, t_{\text{ukupno}}]$  gde je  $t_{\text{ukupno}}$  željeno trajanje interpolacije.

Put do toga nije uopšte kratak. Kao što smo videli za SLERP su potrebni početni i krajnji kvaternion a rezultat je kvaternion  $q(t)$  koji odgovara vremenskom trenutku  $t$  (kvaternion, a ne matrica položaja). Zato je do pronalaženja željene matrice  $A(t)$  potrebno proći kroz naredne korake:

1. pronalaženje kvaterniona  $q_1$  i  $q_2$  koji odgovaraju početnoj, odnosno krajnjoj orijentaciji;
2. primena formule za SLERP koja daje kvaternion  $q(t)$  koji odgovara položaju u vremenskom trenutku  $t$ ;
3. pronalaženje matrice položaja  $A(t)$  koja odgovara kvaternionu  $q(t)$ .

1. Pronalaženje kvaterniona koji odgovara trojci Ojlerovih uglova je ukratko predstavljeno narednom šemom.

$$\psi, \theta, \phi \rightarrow A \rightarrow \text{osa } p, \text{ ugao } \alpha \rightarrow \text{kvaternion } q$$

Prelazak iz Ojlerovih uglova u matricu položaja je objašnjen. Dobijanje ose  $p$  i ugla  $\alpha$  je pomoću takozvanog algoritma "A2AxisAngle" o kome je bilo reći u delu 1.2. Kao što je rečeno,  $p$  je normirani sopstveni vektor koji odgovara sopstvenoj vrednosti  $\lambda = 1$ . Pošto u Geogebri ne postoji komanda za pronalaženje sopstvenih vektora onda je najlakše iskoristiti to da se sopstveni vektor za sopstvenu vrednost  $\lambda = 1$  može dobiti tako što se vektorski pomnože prva i druga vrsta matrice  $A - E$ . Ostaje još da se normira dobijeni vektor i pronađena je osa  $p$ . Za pronalaženje ugla  $\alpha$  dovoljno je uzeti proizvoljan vektor  $u$  normalan na  $p$  (ja sam uzimao normiranu prvu vrstu matrice  $A - E$ ) i naći njegovu sliku  $u' = A \cdot u$ . Onda važi:

$$\begin{aligned} \langle u, u' \rangle &= \|u\| \cdot \|u'\| \cdot \cos \angle(u, u'), \\ \langle u, u' \rangle &= \|u\| \cdot \|u'\| \cdot \cos \alpha, & (\angle(u, u') = \alpha) \\ \langle u, u' \rangle &= \cos \alpha & (u \text{ i } u' \text{ jedinični}) \end{aligned}$$

odakle sledi da je  $\alpha = \arccos(\langle u, u' \rangle)$ . Treba samo voditi računa da je smer rotacije takav da za vektore  $u, u'$  i  $p$  važi da je mešoviti proizvod  $\langle (u \times u'), p \rangle$  veći od nule. Ukoliko nije, onda se umesto vektora  $p$  uzima vektor  $-p$ . U Geogebri je definisana naredba `if`, samo što je moguće staviti po jedan izraz `u then` i `else`. Dodela  $p = -p$  u Geogebri nije dozvoljena. Da bi se realizovala željena dodela, neophodno je da se uvede nova promenljiva npr.  $pPP$  (skraćeno od  $p$  pre proverene) i onda se zada  $p = \text{if}(\text{dot}(\text{cross}(u, u'), p) < 0, -1 * pPP, pPP)$ .

Prelaz `osa, ugao`  $\rightarrow$  kvaternion je mnogo lakši (on predstavlja i takozvani algoritam "AxisAngle2Q").

Traženi kvaternion je  $q = \left[ \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \vec{p}, \cos \frac{\alpha}{2} \right]$ .

Ovakav postupak se primenjuje analogno na trojku početnih i krajnjih Ojlerovih uglova i dobijaju se kvaternioni  $q_1$  i  $q_2$ .



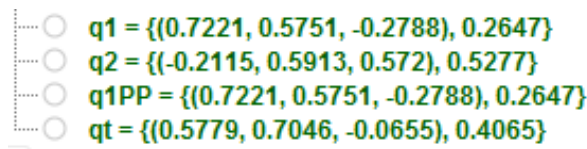
2. Na početku se prvo nalazi skalarni proizvod  $\langle q_1, q_2 \rangle$ . Ako je on negativan onda se umesto  $q_1$  koristi kvaternion  $-q_1$  da bi interpolacija bila po kraćem luku. Ponovo se nailazi na problem dodele  $q_1 = -q_1$  u Geogebri i on se rešava na apsolutno isti način kao u prethodnom slučaju (uvođenjem dodatne promenljive). Sada se ugao  $\theta$  između jediničnih kvaterniona  $q_1$  i  $q_2$  računa kao  $\theta = \arccos(\langle q_1, q_2 \rangle)$  i formula je

$$q(t) = \frac{\sin\left(\left(1 - \frac{t}{t_u}\right) \cdot \theta\right)}{\sin \theta} \cdot q_1 + \frac{\sin\left(\frac{t}{t_u} \cdot \theta\right)}{\sin \theta} \cdot q_2.$$

3. Pronalaženje matrice položaja  $A$  koja odgovara kvaternionu  $q$  je idejno predstavljeno narednom šemom.

kvaternion  $q \rightarrow$  osa  $p$ , ugao  $\alpha \rightarrow$  matrica  $A$

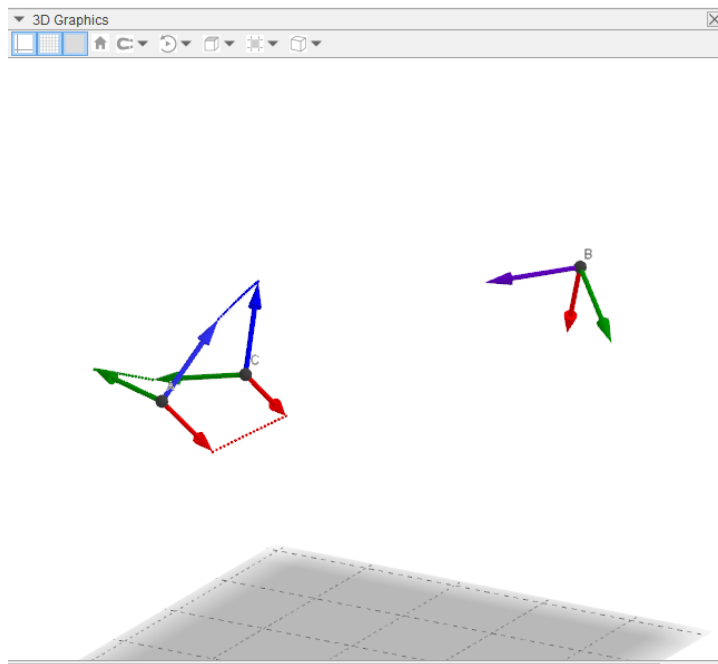
Neka je kvaternion  $q = [\vec{v}, w]$ . Tada se ugao  $\alpha$  računa po formuli  $\alpha = 2 \cdot \arccos w$  a  $p$  je normirani vektor  $v$ . Međutim, i ovde treba voditi računa o jednom izuzetku a to je kvaternion  $q = 1 = [\vec{0}, 1]$ . Nemoguće je normirati nula vektor a pošto će sinus biti nula onda se uzima proizvoljan jedinični vektor, npr  $(1, 0, 0)$ . Bitna stvar je kako će kvaternioni biti implementirani. Ja sam se odlučio za liste iz Geogebre i to takve da im je prvi element trodimenzioni vektor koji predstavlja imaginarni deo a drugi je realni deo (slika 8).



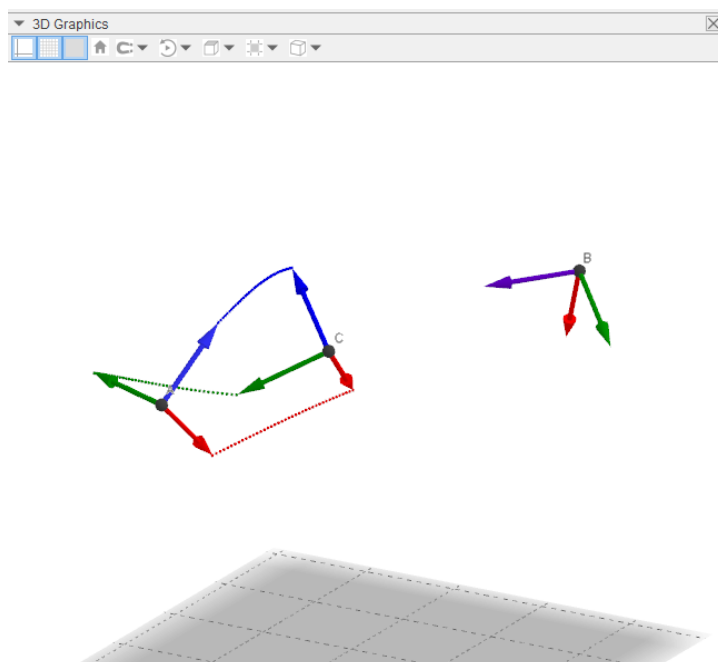
Slika 8: Kvaternioni kao liste u Geogebri

Dobijanje matrice položaja kada su poznati ugao i osa je određeno Rodrigezovom formulom (3) u delu 1.1.

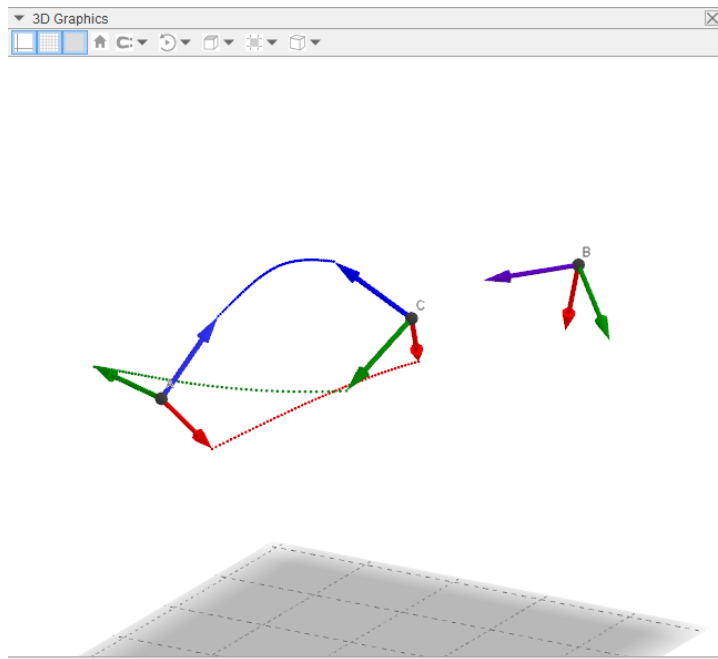
Geogebra SLERP animaciju možete pogledati na [7], a u nastavku su prikazani položaji repera iz te animacije nakon jedne, dve, tri, četiri i pet sekundi. U svrhu efektivnije vizuelizacije na tim slikama (slike 9, 10, 11, 12 i 13) prikazani su tragovi koje ostavljaju vrhovi jediničnih vektora sopstvenih osa.



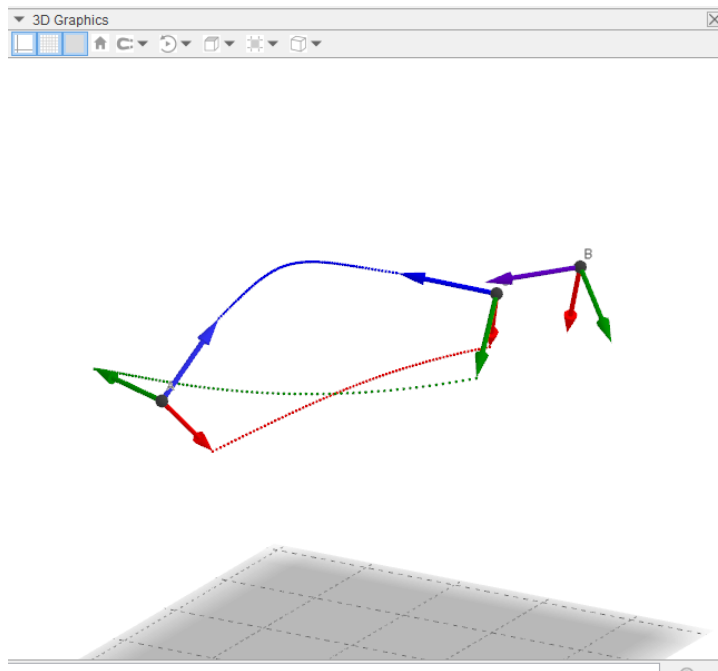
Slika 9: SLERP interpolacija nakon 1 sekunde



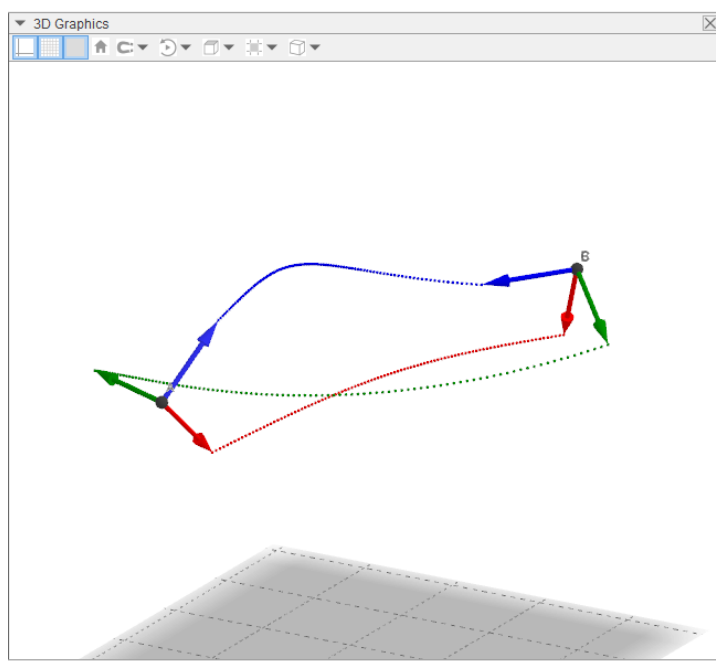
Slika 10: SLERP interpolacija nakon 2 sekunde



Slika 11: SLERP interpolacija nakon 3 sekunde

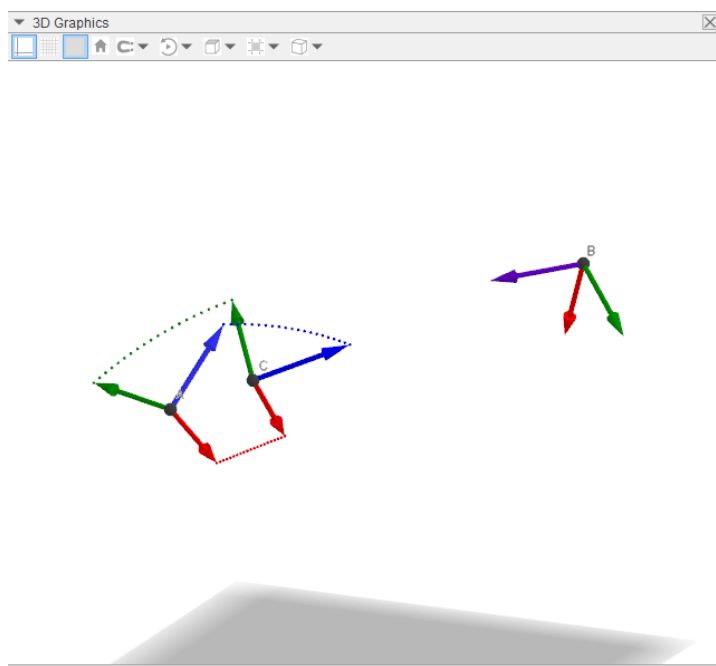


Slika 12: SLERP interpolacija nakon 4 sekunde

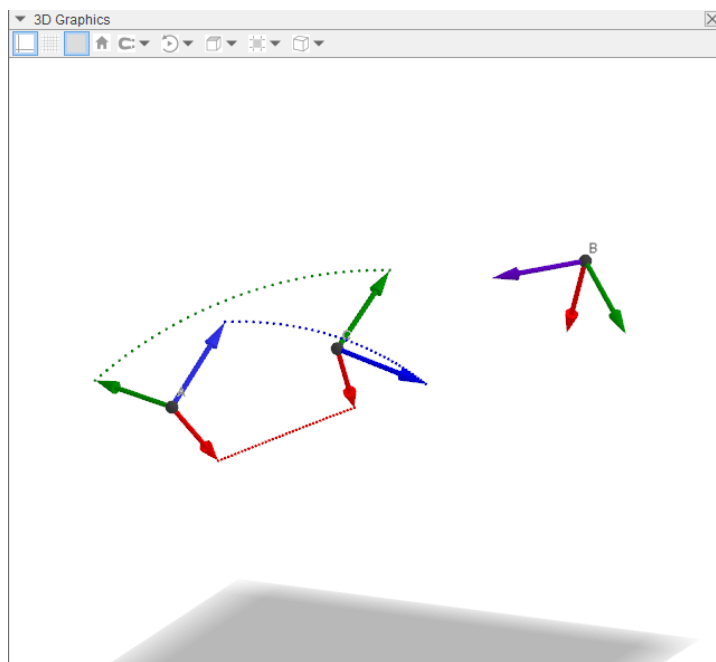


Slika 13: SLERP interpolacija nakon 5 sekundi

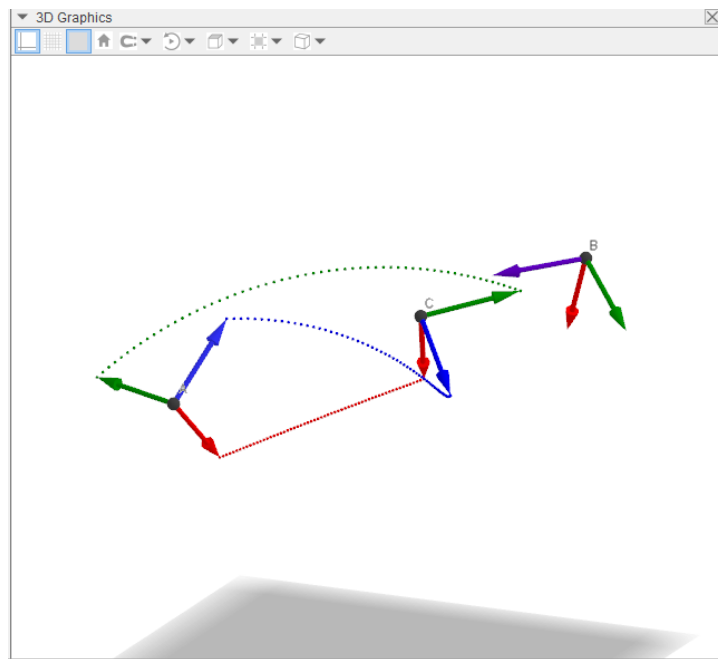
Poređenja radi, biće prikazana i Linearna interpolacija Ojlerovim uglovima primenjena na isti početni i krajnji položaj, koja traje takođe 5 sekundi. Položaji repera nakon jedne, dve, tri, četiri i pet sekundi u Linearnoj interpolaciji Ojlerovim uglovima prikazani su na slikama 14,15,16,17 i 18 (redom).



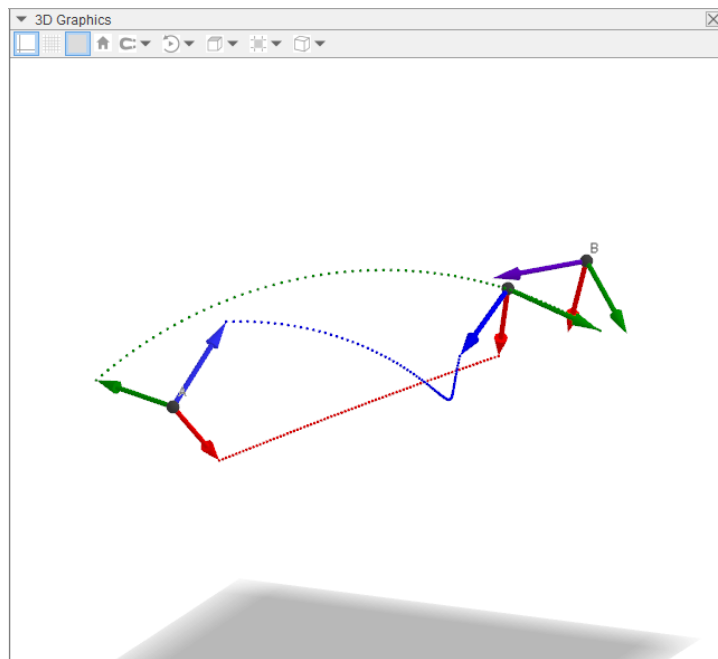
Slika 14: Linearna interpolacija Ojlerovim uglovima nakon 1 sekunde



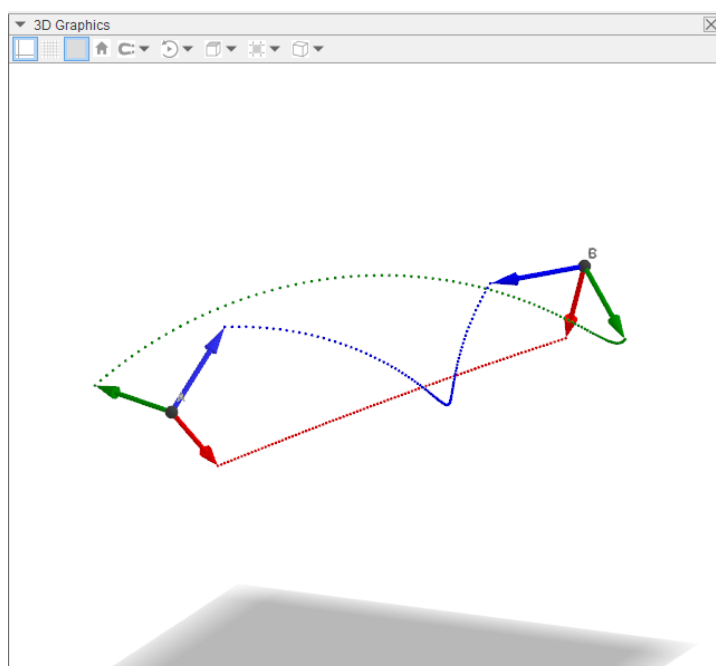
Slika 15: Linearna interpolacija Ojlerovim uglovima nakon 2 sekunde



Slika 16: Linearna interpolacija Ojlerovim uglovima nakon 3 sekunde

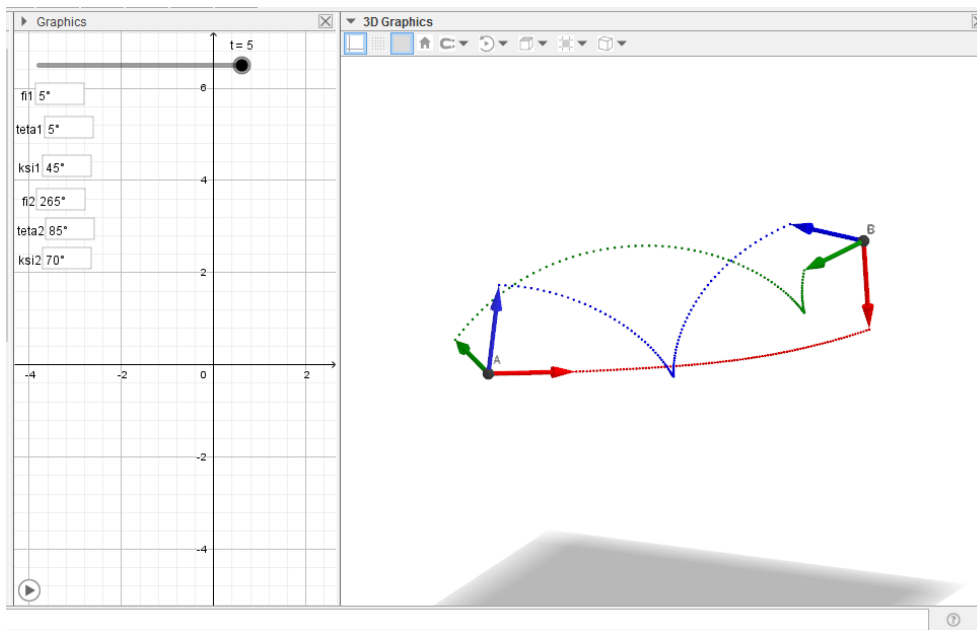


Slika 17: Linearna interpolacija Ojlerovim uglovima nakon 4 sekunde

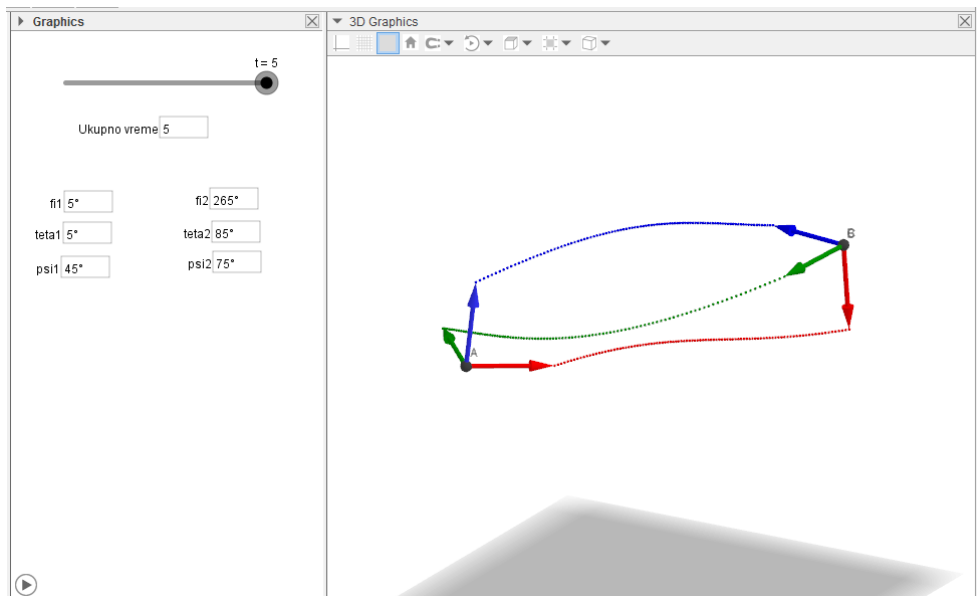


Slika 18: Linearna interpolacija Ojlerovim uglovima nakon 5 sekundi

Očigledno je da se jedinični vektor sopstvene  $z$ -ose mnogo manje uvrće prilikom SLERP interpolacije (uporediti plavi trag na slikama 13 i 18). Preciznije, trag vrha jediničnog vektora sopstvene  $z$ -ose (plavi trag) kod Linearne interpolacije Ojlerovim uglovima ima i “špic”. **To praktično znači da se  $z$ -osa neće kretati prirodno i da će postojati nagla promena pravca kretanja.** Ovakav problem sa linearnom interpolacijom je nekad izražen u manjoj meri, nekad u većoj meri. Uglavnom kada su orijentacije “bliske” (relativno mala razlika između Ojlerovih uglova na početku i na kraju) linearna interpolacija radi približno dobro kao SLERP a kad su orijentacije “daleke” onda ima puno bespotrebnog uvrtanja pa samim tim i utroška energije. Na slici 19 prikazana je Linearna interpolacija Ojlerovim uglovima za početni položaj  $\psi_1 = 45^\circ$ ,  $\theta_1 = 5^\circ$  i  $\phi_1 = 5^\circ$  i krajnji položaj  $\psi_2 = 70^\circ$ ,  $\theta_2 = 85^\circ$  i  $\phi_2 = 265^\circ$ , a na slici 20 prikazana je SLERP interpolacija za isti početni i krajnji položaj.



Slika 19: Linearna interpolacija Ojlerovim uglovima sa dosta uvrtnja



Slika 20: SLERP interpolacija

Poređenjem tragova sa slike 19 i slike 20, jasno je da je znatno manje uvrtnje prilikom SLERP interpolacije.



## 7 Zaključak

U ovom radu je predstavljena SLERP interpolacija koja je zasnovana na kvaternionima. Na samom početku je ukazano na važnost pronalaženja interpolacije između dva položaja nekog objekta trodimenzionog prostora. Pritom, ta interpolacija bi trebalo da ispunjava i određene zahteve: da je pouzdana, da se odvija najkraćim putem, da se odvija konstantnom brzinom, da nema bespotrebnog uvrtnja, da nema trzaja, da se pri tome troši najmanje energije. Da bi se uopšte mogao razmatrati problem interpolacije između dva položaja, definisano je prvo šta je pozicija a sta orijentacija. Analizirani su različiti načini kojima je moguće zapisati orijentaciju: matični zapis, zapis osom i uglom, zapis Ojlerovim uglovima i zapis kvaternionima. Nakon detaljnog poređenja došlo se do zaključka da su kvaternioni najbolji za predstavljanje orijentacije, prvenstveno zbog svoje pouzdanosti (nema problema “zaključan žiroskop”) i zbog toga što postoji interpolacija zasnovana na njima koja ispunjava sve zadate uslove. To je upravo SLERP interpolacija. Pre SLERP-a obrađene su različite linearne interpolacije: Linearna matična interpolacija, Linearna interpolacija osom i uglom, Linearna interpolacija Ojlerovim uglovima i Linearna interpolacija kvaternionima (LERP). Iako je za očekivati da one daju dosta dobre rezultate to se u praksi ne dešava uvek. Konkretno, za Linearnu interpolaciju je u Poglavlju 6 dat primer koji pokazuje kako kod ovakve interpolacije može postojati puno bespotrebnog uvrtnja, što intuitivno odmah povlači i veći utrošak energije potreban za sprovođenje te interpolacije. SLERP je u radu definisan algebarskim izrazom (54), mada je pokazano da postoje i drugi jednaki izrazi koji bi mogli da definišu ovu interpolaciju. Geometrijski, SLERP predstavlja kretanje po velikom krugu jedinične sfere kvaterniona koji prolazi kroz kvaternione koji predstavljaju početnu i krajnju orijentaciju i ovakvo geometrijsko predstavljanje jeste suština SLERP-a.

Na kraju, SLERP je vizuelizovan u programskom paketu Geogebra. Dati su početni položaj repa čija je pozicija određena tačkom  $A$  a orijentacija trojkom Ojlerovih uglova  $\psi_1 = 75^\circ$ ,  $\theta_1 = 45^\circ$  i  $\phi_1 = 5^\circ$  i krajnji položaj čija je pozicija određena tačkom  $B$  a orijentacija trojkom Ojlerovih uglova  $\psi_2 = 135^\circ$ ,  $\theta_2 = 60^\circ$  i  $\phi_2 = 265^\circ$ . Napravljena je animacija u kojoj se za zadate položaje vrši SLERP interpolacija. Da bi to bilo učinjeno moralo je da se prođe kroz više faza:

1. pronalaženje kvaterniona  $q_1$  i  $q_2$  koji odgovaraju početnoj, odnosno krajnjoj orijentaciji;
2. primena formule za SLERP koja daje kvaternion  $q(t)$  koji odgovara položaju u vremenskom trenutku  $t$ ;
3. pronalaženje matrice položaja  $A(t)$  koja odgovara kvaternionu  $q(t)$ .

U prvoj fazi se kreće od trojke Ojlerovih uglova koji se prebacuju u matični zapis pomoću koga se dobijaju osa i ugao rotacije. Kada su dobijeni osa i ugao rotacije onda je lako izračunati odgovarajući kvaternion. Druga faza je samo primena formule a treća faza se odvija tako što se kvaternion prebaci u zapis osom i uglom i onda se pomoću Rodrigezove formule dobije odgovarajuća matrica.

Pored SLERP-a vizuelizovana je i Linearna interpolacija Ojlerovim uglovima. Radi efikasnijeg poređenja vrhovi jediničnih vektora sopstvenih osa prilikom interpolacije ostavljaju trag i tako formiraju krive na osnovu kojih je moguće intuitivno se uveriti da je SLERP bolja interpolacija od Linearne interpolacije Ojlerovim uglovima.

Zbog svega navedenog SLERP se primenjuje u mnogim oblastima, a najviše u računarskoj grafici i pravljenju igrice, pa zato ne čudi činjenica da mnogi programi koji se koriste u tu svrhu imaju u svojoj biblioteci ugrađenu i SLERP funkciju.

## Literatura

- [1] Ken Shoemake, Animating Rotation with Quaternion Curves, Computer Graphics, 1985.
- [2] Erik B. Dam, Martin Koch, Martin Lillholm, Quaternions, Interpolation and Animation, University of Copenhagen, 1998.
- [3] James Diebel, Representing Attitude: Euler Angles, Unit Quaternions, and Rotation Vectors, Stanford University, 2006
- [4] <https://www.geometrictools.com/Documentation/RotationIssues.pdf>
- [5] <https://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Hamilton/Quatern2/Quatern2.pdf>
- [6] <http://www.cs.cmu.edu/cga/dynopt-15/readings/Rmetric.pdf>
- [7] Miloš Nešić, Slerp interpolacija u Geogebra, <https://www.geogebra.org/m/xhpzcldb>