УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

РОТАЦИОНЕ ХИПЕРПОВРШИ ВИШЕДИМЕНЗИОНИХ СФЕРА

МАСТЕР РАД

Аутор
Наташа Добријевић

Ментор
др Мирослава Антић

Београд, 2019.

Апстракт

У овом раду су дефинисане ротационе хиперповрши вишедимензионих сфера $S^{n+1}(c)$ по узору на дефиниције ротационих хиперповрши у реалним просторним формама кривине c у раду [9]. Проучена су и основна својства ових ротационих хиперповрши и анализирани су главни правци и две разне главне кривине од којих је једна кодимензије један. Скреће се пажња на природно дефинисану структуру уврнутог (warped) производа. Наведени су неки од довољних услова да произвољна хиперповрш сфере $x : M^n \hookrightarrow S^{n+1}(1)$ буде ротациона. Дате су анализе параметризације ротационих хиперповрши константне средње кривине, посебно минималних и показано је да су координатне функције које дефинишу хиперповрш решења нелинеарне диференцијалне једначине. У неколико специјалних случајева дата су и нека од решења. Изложен је доказ из [19] да су једине компактно уложене минималне $n-$димензионе ротационе хиперповрши јединичне сфере $S^{n+1}(1)$ сфере S^n и Клифордов торус $S^{n-1}\big(\sqrt{\frac{n-1}{n}}\big) \times S^1\big(\sqrt{\frac{1}{n}}\big)$, штавише, ослањајући се на рад [15], показано је да су једине компактно уложене $n-$димензионе ротационе хиперповрши јединичне сфере $S^{n+1}(1)$, чија је нормализована $m-$та симетрична функција главних кривина ($1 \leq m \leq n-1$) једнака нули, $S^{n-1}\big(\sqrt{\frac{n-m}{n}}\big) \times S^1\big(\sqrt{\frac{m}{n}}\big)$ и сфере S^n.

Кључне речи: ротационе хиперповрши, вишедимензионе сфере, уложене хиперповрши, минималне хиперповрши, константна средња кривина

Abstract

In this paper, rotational hypersurfaces of $(n+1)-$dimensional spheres $S^{n+1}(c)$ are defined using the definition from [9] of the rotational hypersurfaces in the space forms of constant curvature c. General properties of such hypersurfaces are studied and their principal directions are analysed as well as their two principal curvatures where one of them has at least multiplicity $n-1$. It is shown that such rotational hypersurfaces have naturally defined warped product structure. Some sufficient conditions for an arbitrary hypersurface $x : M^n \hookrightarrow S^{n+1}(1)$ to be a rotational surface are given. Parametrization of the rotational hypersurfaces with constant mean curvature are analysed, in particular the minimal ones. A non-linear differential equation that yields these hypersurfaces is determined. In few special cases the equation is solved. It is shown that Clifford tori $S^{n-1}\big(\sqrt{\frac{n-1}{n}}\big) \times S^1\big(\sqrt{\frac{1}{n}}\big)$ and round geodesic spheres S^n are the only compact minimal embedded rotational hypersurfaces in the unit sphere $S^{n+1}(1)$ using [19]. Furthermore, it is proven in [15] that $S^{n-1}\big(\sqrt{\frac{n-m}{n}}\big) \times S^1\big(\sqrt{\frac{m}{n}}\big)$ and round geodesic spheres S^n are the only compact $n-$dimensional embedded rotational hypersurfaces with $H_m = 0$ $(1 \leq m \leq n-1)$ in the unit sphere $S^{n+1}(1)$.

Keywords: rotational hypersurfaces, $n-$dimensional spheres, embedded hypersurfaces, minimal hypersurfaces, constant mean curvature

Садржај

Предговор

Основна идеја овог рада је да се прошири класична дефиниција ротационих површи у тродимензионом еуклидском[1] простору $\mathbb{R}^3$ на хиперповрши $(n+1)$-димензионих сфера $S^{n+1}(c)$, реалних просторних форми са константном кривином $c>0$. У раду [9] аутори до Кармо[2] и Дајчер[3] су дефинисали ротационе хиперповрши у реалним просторним формама кривине c произвољне димензије, фокусирајући се првенствено на хиперболичке просторе.

У §1 наведене су дефиниције основних појмова диференцијалне геометрије као и нека од основних тврђења која су значајна за даљи рад. У §2 је дата дефиниција ротационих хиперповрши вишедимензионих сфера $S^{n+1}(c)$ и обрађена су њихова основна својства. Без умањења општости, у наставку се посматрају јединичне вишедимензионе сфере ($c=1$). Један од циљева овог рада је да се пронађе њихова експлицитна параметризација. Грубо говорећи, настају померањем $(n-1)$-димензионих умбиличких подмногострукости $\Sigma \subset S^{n+1}(1)$ дуж одређене криве. Разне позиције подмногострукости Σ се називају *паралеле* ротационе хиперповрши. Анализирани су главни правци и главне кривине ових хиперповрши и показано је да постоје две различите главне кривине λ и μ, од којих је једна кодимензије један. Бишоп[4] и О'Нил[5] су у [2] показали да се код неких многострукости јавља на природни начин дефинисана структура уврнутог производа, што је и случај и са овим ротационим хиперповршима и то ће бити показано.

Идентификовањем одређеног својства у форми $f(\lambda,\mu)=0$ постављена је диференцијална једначина која одређује фамилију ротационих хиперповрши са тим одређеним својством. Конкретно у овом раду, постављене су обична диференцијална једначина другог реда за ротациону хиперповрш када је позната нормализована $m-$та симетрична функција главних кривина $(1 \leq m < n)$ и диференцијална једначина првог реда када је средња кривина константна. Уопштено, за сваку ротациону хиперповрш M^n постоји једно-параметарска фамилија различитих решења.

Неки довољни услови да произвољна хиперповрш $x : M^n \hookrightarrow S^{n+1}(1)$, за $n \geq 3$, буде ротациона хиперповрш изложени су у §3. Показано је да ако за главне кривине $k_1, ..., k_n$ ове хиперповрши важи $k_1 = ... = k_{n-1} = -\lambda \neq 0$, $k_n = -\mu = -\mu(\lambda)$ и $\lambda - \mu \neq 0$, тада је $x(M^n)$ садржана у ротационој хиперповрши, што је закључак до којег су дошли аутори у [9]. Ово тврђење не важи за $n=2$ и представља уопштење резултата за минималне хиперповрши до којег је дошао Отсуки[6] у [19]. Последица овог тврђења је да је *конформно равна* хиперповрш $x : M^n \hookrightarrow S^{n+1}(1)$ за $n \geq 4$, за коју важи $\mu = \mu(\lambda)$, $\lambda \neq 0$, $\lambda - \mu \neq 0$ садржана у ротационој хиперповрши. Један од довољних услова бави се хиперповршима $x : M^n \hookrightarrow S^{n+1}(1)$ које су инваријанте $l-$параметарске групе изометрија сфере $S^{n+1}(1)$. Показано је да ако l узима максималну дозвољену вредност тада или x има две главне кривине λ и μ, од којих је једна кодимензије један или је x садржана у изопараметричкој фамилији сфере $S^{n+1}(1)$.

Интересантна су питања класификације и карактеризације посебних фамилија ротационих хиперповрши. Делони[7] је 1841. године описао класу површи у еуклидском простору које представљају прве примере површи, осим сфере, са константном средњом кривином. Он их је описао као ротационе површи котрљања коника. У §4 разматрају се ротационе хиперповрши вишедимензионих сфера са константном средњом кривином као уопштења Делонијевих површи у тродимензионом простору. У овом поглављу се разматра пар специјалних случајева ротационе хиперповрши са константном средњом кривином, ротациона хиперповрш сфере $S^{n+1}(1)$ када је први интеграл диференцијалне једначине која одређује ову површ једнак нули и минималне ротационе хиперповрши S^3.

Класификацијом комплетних ротационих хиперповрши са константном скаларном кривином у просторним формама бавила се Леите[8] у раду [13]. Нешто касније, Палмас[9] је у [21] обрадио ротационе хиперповрши са константном нормализованом $m-$том симетричном функцијом у просторним формама. Показао је да постоји доста имерзованих (потопљених) компактних ротационих хипер-

[1] Еуклид из Александрије (4.век п.н.е.) - антички математичар

[2] Manfredo Perdigo do Carmo (1928 – 2018) - бразилски математичар, дао значајан допринос на пољу диференцијалне геометрије.

[3] Marcos Dajczer - бразилски математичар аргентинског порекла, бави се проучавањем геометрије и топологије.

[4] Richard Lawrence Bishop - амерички математичар

[5] Barrett O'Neill (1924 – 2011) - амерички математичар

[6] Tominosuke Otsuki - јапански математичар

[7] Charles Eugne Delaunay (1816 – 1872) - француски астроном и математичар, његова изучавања лунарног кретања су допринела развоју теорије кретања планета и математици.

[8] Maria Luiza Leite - бразилска математичарка

[9] Oscar Palmas - мексички математичар

површи сфере S^{n+1}. У својим радовима, почевши од [19], Отсуки се бавио уложеним ротационим минималним хиперповршима сфере $S^{n+1}(1)$. Са другог гледишта, Брито[10] и Леите су у [3] такође разматрали уложеност компактних минималних ротационих хиперповрши. Интересантно је питање да ли постоје још неке $n-$димензионе компактно уложене ротационе хиперповрши од $S^{n+1}(1)$ које имају $H_m = 0$ $(1 \leq m \leq n-1)$ осим сфера S^n и Римановог производа $S^{n-1}(\sqrt{\frac{n-m}{n}}) \times S^1(\sqrt{\frac{m}{n}})$. Поглавље §5 даје одговор на ово питање и представља резултате до којих су дошли Ли[11] и Веи[12] у раду [15].

Посебно се захваљујем свом ментору проф. др Мирослави Антић и члановима комисије проф. др Тијани Шукиловић и проф. др Срђану Вукмировићу на помоћи и сугестијама.

[10] Fabiano Britto - бразилски математичар
[11] Haizhong Li - кинески математичар
[12] Guoxin Wei - кинески математичар

1 Увод

Пре него што дефинишемо ротационе хиперповрши вишедимензионих сфера, реалних просторних форми позитивне кривине, наведимо неке основне појмове и тврђења која ћемо користити у даљем раду.

Дефиниција 1.1. Непрекидно бијективно пресликавање тополошких простора $f : U \to V$ такво да је инверзно пресликавање f^{-1} такође непрекидно се назива **хомеоморфизам**. Кажемо да су U и V *хомеоморфни* ако постоји хомеоморфизам из U у V.

Дефиниција 1.2. Тополошки простор M је **n−димензиона тополошка многострукост** ако задовољава следеће услове:

1. M је **Хауздорфов**[13] **тополошки простор** тј. за сваки пар различитих тачака $p, q \in M$ постоје дисјунктни отворени подскупови $U, V \subset M$ такви да $p \in U$ и $q \in V$.

2. Постоји пребројива база топологије на M.

3. За сваку тачку $p \in M$ постоји њена околина $U \subset M$ и хомеоморфизам ϕ који слика U у неки отворени подскуп од $\mathbb{R}^n$.

Дату многострукост означавамо и са M^n. Уређени пар (U, ϕ) називамо **локалном картом** или **локалним координатним системом** многострукости M^n, а пресликавање ϕ^{-1} **локалном параметризацијом**. Скуп локалних координатних система $\{(U_\alpha, \phi_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ таквих да важи $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$ зовемо **атласом**.

Напомена 1.1. За тополошки простор који поседује атлас кажемо да је **локално еуклидски**. Неке од дефиниција многострукости подразумевају да је M локално еуклидски тополошки простор.

Нека је (U, ϕ) једна карта многострукости M^n и нека су $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$ координатне пројекције тј. $\pi_i(x_1, ..., x_n) = x_i$. Композиција $x_i = \pi_i|_{\phi(U)} \circ \phi : U \to \mathbb{R}$ која слика сваку тачку $p \in U$ у $i-$ту координату њене слике $\phi(U)$ зовемо **координатним функцијама** или **локалним координатама.**

Дефиниција 1.3. Нека је $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ атлас $n-$димензионе тополошке многострукости M^n такав да је за сваке две његове карте (U_α, ϕ_α) и (U_β, ϕ_β) пресликавање

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}|_{\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

дифеоморфизам класе C^∞. Тада је $\mathcal{A}$ **диференцијабилни атлас класе** C^∞.

Унија два диференцијабилна атласа је такође атлас, али не мора бити диференцијабилан. Уколико је унија два диференцијабилна атласа такође диференцијабилни атлас, кажемо да су та два атласа **еквивалентна**. Унија свих еквивалентних атласа који задају дату структуру се назива **максимални диференцијабилни атлас многострукости**.

Дефиниција 1.4. Тополошка многострукост заједно са класом еквиваленције диференцијабилних атласа је **диференцијабилна многострукост**.

Нека су M и N диференцијабилне многострукости. Пресликавање $f : M \to N$ је **непрекидно пресликавање** ако за сваки отворен скуп $V \subset N$ важи да је $f^{-1}(V)$ отворен у M.

Дефиниција 1.5. Нека су M и N диференцијабилне многострукости и $f : M \to N$ непрекидно пресликавање. Ако постоје диференцијабилни атласи $\{(U_\alpha, \phi_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ и $\{(V_\beta, \psi_\beta) \mid \beta \in B\}$ многострукости M и N респективно такви да је пресликавање

$$\psi_\beta \circ f \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta)) \to \psi_\beta(V_\beta)$$

диференцијабилно за све $\alpha \in A$, $\beta \in B$ за које је $U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta) \neq \emptyset$, онда је f **диференцијабилно пресликавање**.

[13] Felix Hausdorff (1868 – 1942) - немачки математичар, један од оснивача топологије.

Дефиниција 1.6. Диференцијабилно бијективно пресликавање $f : M \to N$ је **дифеоморфизам**, ако је $f^{-1} : N \to M$ такође диференцијабилно пресликавање.

Дефиниција 1.7. Нека је G група и M диференцијабилна многострукост. Кажемо да G **дејствује** на M ако постоји пресликавање $\varphi : G \times M \to M$ са следећим особинама:

а) за свако $g \in G$ пресликавање $\varphi_g : M \to M$ дато са $\varphi_g(p) = \varphi(g,p)$ је дифеоморфизам,

б) φ_e, где је e неутрал групе G, је идентичко пресликавање,

в) за свака два елемента $g_1, g_2 \in G$ важи $\varphi_{g_1 g_2} = \varphi_{g_1}\varphi_{g_2}$.

Орбита елемента $p \in M$ при дејству групе G на многострукост M је скуп $\{\varphi_g(p) \,|\, g \in G\}$.

Околина једне тачке p диференцијабилне многострукости M је репрезентована неком картом (U_α, ϕ_α), $\phi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$, па тангентни простор можемо идентификовати са векторским простором $\mathbb{R}^n$, а тангентни вектор многострукости M репрезентујемо неким тангентним вектором $X_\alpha \in \mathbb{R}^n$. Међутим, постоји више разних сагласних карата које покривају неку околину тачке p. Дифеоморфизам $f = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}|_{\phi(U_\alpha \cap U_\beta)}$ слика два отворена подскупа $\mathbb{R}^n$ један у други. Диференцијал тог пресликавања, у свакој тачки, је линеарно пресликавање једне копије векторског простора $\mathbb{R}^n$ у другу копију и представљен је квадратном матрицом

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

где су x_i и y_i, $i = 1, ..., n$ одговарајуће координате у $\mathbb{R}^n$, а $f_i = y_i \circ f$.

Дефиниција 1.8. Нека је M^n многострукост са диференцијабилним атласом $\{(U_\alpha, \phi_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ и нека су (U_α, ϕ_α) и (U_β, ϕ_β) две карте које покривају отворену околину тачке p. Означимо са $f = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$. Два представника тангентних вектора који одговарају овим картама, X_α и X_β, су еквивалентна ($X_\alpha \sim X_\beta$) уколико се линеарним пресликавањем $df_{\phi_\alpha(p)}$ један пресликава у други тј.

$$X_\beta = df_{\phi(p)}(X_\alpha) = d(\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})_{\phi_\alpha(p)}(X_\alpha).$$

Дефиниција 1.9.

1. Нека је $[X_\alpha]$ класа еквиваленције представника X_α. Тада је $[X_\alpha]$ **тангентни вектор** у тачки p на многострукости M.

2. **Тангентни простор** у тачки p, T_pM, је скуп свих тангентних вектора у тачки p и репрезентован је векторским простором $\mathbb{R}^n$.

Са $\mathcal{F}(M)$ означимо скуп свих диференцијабилних пресликавања из диференцијабилне многострукости M у $\mathbb{R}$. Може се показати да је скуп $\mathcal{F}(M)$ алгебра над пољем $\mathbb{R}$.

Дефиниција 1.10. Нека је p тачка диференцијабилне многострукости M. Ако постоји околина $U \subset M$ тачке p у којој је дефинисана функција $f : U \to \mathbb{R}$ која је диференцијабилна на U тј. припада алгебри $\mathcal{F}(U)$, онда кажемо да је f **диференцијабилна** у p. Скуп свих диференцијабилних функција у тачки p означавамо са $\mathcal{F}(p)$ и две функције које се поклапају на некој околини тачке p идентификујемо.

Дефиниција 1.11. Нека је $I \subset \mathbb{R}$ отворен интервал и M диференцијабилна многострукост. Пресликавање

$$\alpha : I \to M$$

зове се **крива на многострукости**. Ако је α диференцијабилно пресликавање, тада је крива диференцијабилна.

Ако је $t_0 \in I$, један тангентни вектор на $\mathbb{R}$ је $(\frac{\partial}{\partial t})|_{t_0}$, а његова слика на многострукости у тачки $\alpha(t_0) = p$ је

$$T_\alpha|_p(f) := \frac{\partial(f \circ \alpha)}{\partial t}|_{t=t_0},$$

где је $f \in \mathcal{F}(p)$. Овај вектор зовемо **тангентним вектором криве** α у p. Може се показати да за сваки вектор $X_p \in T_pM$ где је p тачка диференцијабилне многострукости M, постоји глатка крива α на M која садржи p таква да је вектор X_p тангентан на њу тј. да је тангентни простор многострукости M у тачки p скуп свих тангенти на криве од M које садрже p, у тој тачки.

Дефиниција 1.12. Дисјунктна унија тангентних простора диференцијабилне многострукости M

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_pM$$

зове се **тангентно раслојење** многострукости M.

Дефиниција 1.13. **Векторско поље** X диференцијабилне многострукости M је глатко пресликавање $X : M \to TM$ такво да је $X(p) := X_p \in T_pM$. Скуп свих векторских поља многострукости M означавамо са $\chi(M)$.

Дефиниција 1.14. **Котангентни простор** многострукости M у тачки p је дуални простор тангентног простора T_pM и означавамо га са T_p^*M. Елементи котангентног простора су **ковектори** у p тј. линеарне функције $\omega_p : T_pM \to \mathbb{R}$.

Дефиниција 1.15. **Котангентно раслојење** многострукости M је дисјунктна унија

$$T^*M = \bigsqcup_{p \in M} T_p^*M.$$

Дефиниција 1.16. **Ковекторско поље** је глатко пресликавање $\sigma : M \to T^*M$ за које важи да $\forall p \in M$, $\sigma(p) \in T_p^*M$. Скуп свих ковекторских поља обележавамо са $\chi^*(M)$.

Дефиниција 1.17. Нека је $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ максимални диференцијабилни атлас многострукости M^n и нека је N подскуп диференцијабилне многострукости M. Ако за сваку тачку $p \in N$ постоји карта (U_p, ϕ_p) атласа $\mathcal{A}$ таква да је $p \in U_p$ и $\phi_p(U_p \cap N) = \phi_p(U_p) \cap (\mathbb{R}^l \times \{0\})$ тада је N **подмногострукост** многострукости M димензије l, односно **кодимензије** $n - l$. Кажемо и да је M **амбијентни простор** многострукости N. Ако је N подмногострукост диференцијабилне многострукости M^n кодимензије 1, односно $\dim N = n - 1$, тада кажемо да је подмногострукост N^{n-1} **хиперповрш** M^n.

Нека је $f : N^n \to M^m$ диференцијабилно пресликавање две многострукости и нека је p тачка многострукости N. Дефинишемо следеће појмове.

Дефиниција 1.18. **Диференцијал** пресликавања f у тачки $p \in N$ је линеарно пресликавање $(f_*)_p : T_pN \to T_{f(p)}M$ дефинисано на следећи начин: за свако $X_p \in T_pN$ изаберимо криву α на N тако да је X_p тангентни вектор на α у тачки $p = \alpha(t_0)$. Тада је $(f_*)_p(X_p)$ тангентни вектор на криву $f(\alpha)$ у тачки $f(p) = f(\alpha(t_0))$.

Може се показати да $(f_*)_p$ не зависи од изабране криве. Ако је g глатка функција у околини $f(p)$ тј. $f \in \mathcal{F}(f(p))$, тада важи

$$(f_*)_p(X_p)(g) = X_p(g \circ f).$$

На овај начин пресликавање $f : N^n \to M^m$ индукује пресликавање $(f_*)_p : T_pN \to T_{f(p)}M$.

Дефиниција 1.19.

1. Пресликавање f има **ранг** r у тачки p ако је димензија векторског простора $f_*(T_pN)$ једнака r.

2. Ако је ранг пресликавања f у свакој тачки једнак димензији многострукости M онда кажемо да је f **субмерзија**[14].

3. Ако за сваку тачку $p \in N$ важи да је $(f_*)_p$ ранга n, односно $(f_*)_p$ је injективно, онда кажемо да је f **имерзија**[15] или **потапање** (f не мора да буде injективно).

[14]енгл. submersion
[15]енгл. immersion

4. Уколико је имерзија f инјективна и још је f хомеоморфизам између N и $f(N)$ који наслеђује топологију из M, онда кажемо да је f **смештање** или **улагање**[16].

Дефиниција 1.20. Нека је M^n $n-$димензиона диференцијабилна многострукост. **Дистрибуција** димензије k је пресликавање које свакој тачки p многострукости додељује $k-$димензиони потпростор D_p од T_pM, тако да у некој околини U_p сваке тачке p постоје векторска поља $X_1, ..., X_k$ која у свакој тачки $q \in U_q$ разапињу простор D_q. Тада, рестрикцију дистрибуције D на U_p означавамо и са $\mathfrak{L}(X_1, ..., X_k)$.

Дистрибуцију димензије k можемо да видимо и као векторско раслојење над многострукошћу, где је влакно у тачки $p \in M$ $k-$димензиони потпростор простора T_pM.

Дефиниција 1.21. Линеарна конексија или **линеарна повезаност** је пресликавање $\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$ за које важи

1. $\nabla_Y(X_1 + X_2) = \nabla_Y X_1 + \nabla_Y X_2$,
2. $\nabla_Y(fX) = Y(f)X + f\nabla_Y X$,
3. $\nabla_{Y_1+Y_2}X = \nabla_{Y_1}X + \nabla_{Y_2}X$,
4. $\nabla_{fY}X = f\nabla_Y X$,

где $X, Y, X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \chi(M),\ f \in \mathcal{F}(M)$.
Векторско поље $\nabla_Y X$ је **коваријантни извод** сечења X у правцу векторског поља Y.

Дефиниција 1.22. Коваријантни извод функције f у односу на X је

$$\nabla_X f = fX.$$

Дефиниција 1.23. Нека је M диференцијабилна многострукост. Симетрично, $\mathcal{F}(M)-$билинеарно пресликавање $g : \chi(M) \times \chi(M) \to \mathcal{F}(M)$ за које важи

$$g(X,X)(p) \geq 0, \qquad g(X,X)(p) = 0 \Leftrightarrow X_p = 0, \forall p \in M$$

назива се **метрика** на многострукости. Многострукост на којој је дефинисана метрика назива се **Риманова**[17] **многострукост**.

Стандардан скаларни производ $\langle , \rangle$ простора $\mathbb{R}^n$ јесте метрика и чини $\mathbb{R}^n$ Римановом многострукошћу. Дату метрику зовемо **стандардном**. Претходно смо дефинисали криву на многострукости. Уведимо сада следеће појмове.

Дефиниција 1.24. Параметризована диференцијабилна крива $\alpha : I \to M$ на Римановој многострукости M је **регуларна** ако је $\frac{d\alpha}{dt} = \alpha'(t) \neq 0$ за свако $t \in I$.

Дужина лука регуларне криве α на интервалу $(t_1, t_2) = I$ се дефинише са

$$l(t) = \int_{t_1}^{t_2} ||\alpha'(t)||dt,$$

где је $||\alpha'(t)|| = \sqrt{g(\alpha'(t), \alpha'(t))}$. Параметар дат са $s(t) = l(t) = \int_{t_1}^{t_2} ||\alpha'(t)||dt$ назива се природни параметар и тада кажемо да је крива **природно параметризована** тј. **параметризована дужином лука криве**. Можемо да видимо да је регуларна крива $\alpha : I \to M$ природно параметризована ако и само ако је $||\alpha'(t)|| = 1$ за свако $t \in I$.

Нека је M Риманова многострукост. За $f \in \mathcal{F}(M)$, **градијент функције** f је векторско поље $gradf \in \chi(M)$ такво да је

$$g(gradf, X) = Xf, \qquad \text{за све } X \in \chi(M).$$

Ако је $gradf \equiv 0$ онда је f константна функција.

[16] енгл. embedding
[17] George Friedrich Bernhard Riemann (1826 – 1866) - немачки математичар, остварио значајан допринос у областима математичке анализе, диференцијалне геометрије и теорије бројева.

Дефиниција 1.25. Нека је ∇ линеарна конексија многострукости M. **Торзија** повезаности ∇ је пресликавање $T : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$ дато са

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], \tag{1}$$

при чему је за прозвољно $f \in \mathcal{F}(M)$

$$[X, Y](f) = X(Yf) - Y(Xf).$$

Ако је пресликавање T идентички једнако нули на M, кажемо да је повезаност ∇ без торзије.

Дефиниција 1.26. Кривина линеарне повезаности ∇ многострукости M је пресликавање $R : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$ дато са

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

Може се показати да је ово пресликавање $\mathcal{F}(M)-$линеарно по све три компоненте и да је $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$ за све $X, Y, Z \in \chi(M)$.

Дефиниција 1.27. Линеарна конексија је **Риманова конексија** или **метричка конексија** уколико је метрика g **паралелна** у односу на ∇ тј. ако важи

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z),$$

за све $X, Y, Z \in \chi(M)$.

Теорема 1.1. *На Римановој многострукости постоји тачно једна Риманова конексија без торзије. Та конексија назива се* ***Леви-Чивита***[18] ***конексија***.

Дефиниција 1.28. Нека је ∇ Леви-Чивита конексија на Римановој многострукости M. **Риманова кривина** многострукости M је пресликавање $R : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \to \mathbb{R}$ дато са

$$R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W).$$

Може се показати да Риманова кривина задовољава следеће релације:

$$\begin{aligned} &R(X, Y, Z, W) = R(Z, W, X, Y), \\ &R(X, Y, Z, W) = -R(X, Y, W, Z), \\ &R(X, Y, Z, W) = -R(Y, X, Z, W), \\ &R(X, Y, Z, W) + R(Y, Z, X, W) + R(Z, X, Y, W) = 0. \end{aligned}$$

Дефиниција 1.29. Риманова многострукост је **равна** ако је њена кривина идентички једнака нули.

Дефиниција 1.30. Нека је Π дводимензиони потпростор тангентног простора T_pM. Нека је X, Y једна ортонормирана база равни Π. **Секциона кривина** равни Π је

$$K_p(\Pi) = \frac{R(X, Y, Y, X)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2}.$$

Дефиниција секционе кривине не зависи од избора ортонормиране базе равни Π. Уколико је $K_p(\Pi)$ константно за све $p \in M$ и равни Π из T_pM , тада се M назива простор константне секционе кривине или **реална просторна форма**. Важи следећа теорема.

Теорема 1.2. *(Шур*[19]*) Нека је M просто повезана Риманова многострукост димензије $m \geq 3$. Ако у свакој тачки $p \in M$ секциона кривина дводимензионог потпростора T_pM не зависи од избора тог потпростора, онда је секциона кривина константна на целој многострукости.*

[18] Tullio Levi-Civita (1873 – 1941) - италијански математичар, бавио се развојем тензорског рачуна.

[19] Ernest Viktor Axel Schur (1891 – 1930) - немачки математичар, бавио се диференцијалним једначинама и геометријом.

За реалну просторну форму константне кривине c, $M(c)$, важи да је њен тензор кривине једнак

$$R(X,Y)Z = c(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y).$$

Дефиниција 1.31. Нека су N и M Риманове многострукости са метрикама g и $\overline{g}$ респективно. Пресликавање $f : N \to M$ је **изометрија** у тачки $p \in N$ ако је

$$g(X_p, Y_p) = \overline{g}((f_*)_p(X_p), (f_*)_p(Y_p)), \qquad \forall X_p, Y_p \in T_pN.$$

Теорема 1.3. *Нека је $f : N \to M$ инјективна имерзија две многострукости, где је N компактна многострукост. Тада је f улагање.*

Доказ: Како је f диференцијабилно, онда је и $f : N \to f(N)$ непрекидно пресликавање. Пресликавање $f^{-1} : f(N) \to N$ је такође непрекидно јер се затворени скуп X у N, који је самим тим компактан, слика у компактан скуп $f(X)$ који је затворен у M. Дакле, инверз f^{-1} слика затворене скупове у затворене. ∎

У овом случају $(f_*)_p$ је инјективно јер $(f_*)_p(X_p) = 0$ повлачи $X_p = 0$. Уколико је f изометрија у свакој тачки из N онда је f имерзија и зове се **изометријска имерзија**. Нека је $f : (N, g) \to (M, \overline{g})$ изометријска имерзија. Због једноставности идентификоваћемо X са његовом сликом $(f_*)(X)$ и обе метрике ћемо означити са g. Означимо са TN и TM тангентна раслојења многострукости N и M респективно.

Дефиниција 1.32. Тангентни вектор $\xi_p \in TM$ многострукости M у тачки $p \in N$ за који важи

$$g(X_p, \xi_p) = 0$$

за произвољан $X_p \in T_pN$, зовемо **нормалним вектором** подмногострукости N у M, а са $T^{\perp}N$ означавамо векторско раслојење свих нормалних вектора из N у M. Тада важи

$$TM|_N = TN \oplus T^{\perp}N.$$

Ако су X и Y векторска поља тангентна на N и $\overline{\nabla}$ Леви-Чивита повезаност на M тада је

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y), \tag{2}$$

при чему је $\nabla_Y X$ тангентна компонента, а $h(X,Y)$ нормална компонента од $\overline{\nabla}_Y X$. Формула (2) се зове **Гаусова**[20] и за њу важи следећа теорема:

Теорема 1.4. *Нека је $\overline{\nabla}$ Леви-Чивита конексија на Римановој многострукости $(M, \overline{g})$, пресликавање $f : (N, g) \to (M, \overline{g})$ изометричка имерзија и ∇ и h дати формулом (2). Тада је ∇ Леви-Чивита повезаност у односу на индуковану метрику g на N, а $h(X,Y)$ је симетрична квадратна форма са вредностима у нормалном раслојењу и назива се **друга фундаментална форма** многострукости N.*

Нека је ξ нормално, а X тангентно векторско поље на N. Тада важи

$$\overline{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + \nabla^{\perp}_X \xi, \tag{3}$$

где су редом $-A_\xi X$ и $\nabla^{\perp}_X \xi$ тангентна и нормална компонента од $\overline{\nabla}_X \xi$. Може се показати да је A_ξ симетрична линеарна трансформација тангентног простора у свакој тачки подмногострукости N која се назива **оператор облика**, а $\nabla^{\perp}$ метричка конексија нормалног раслојења $T^{\perp}N$ у односу на индуковану метрику $T^{\perp}N$ и назива се **нормална конексија**. Формула (3) је позната и као **Вајнгартенова**[21] **формула**. Веза између оператора облика и друге фундаменталне форме може се представити следећом лемом.

Лема 1.1. *Нека су X и Y тангентна, а ξ нормално векторско поље на многострукости M. Тада важи*

$$g(A_\xi X, Y) = g(h(X,Y), \xi). \tag{4}$$

[20] Johan Carl Friedrich Gauss (1777 – 1875) - немачки математичар и физичар

[21] Julius Weingarten (1836 – 1910) - немачки математичар, значајно допринео на пољу диференцијалне геометрије.

Доказ: Диференцирањем $g(Y,\xi)=0$ и коришћењем (2) и (3) следи

$$\begin{aligned}0 &= g(\overline{\nabla}_X Y,\xi)+g(Y,\overline{\nabla}_X\xi)\\ &= g(\nabla_X Y,\xi)+g(h(X,Y),\xi)-g(Y,A_\xi X)+g(Y,\nabla^\perp_X\xi)\\ &= g(h(X,Y),\xi)-g(A_\xi X,Y).\end{aligned}$$

∎

Дефиниција 1.33. Нека је A_ξ оператор облика у тачки $p\in N$ тј. $A_\xi : T_pN\to T_pN$. **Главне кривине** многострукости N у тачки p су сопствене вредности оператора A_ξ, а **главни правци** или **вектори главне кривине** су сопствени вектори оператора A_ξ и они чине једну ортонормирану базу T_pN.

Дефиниција 1.34. **Линије кривине** су криве које су увек тангентне на главни правац тј. тангенте тих кривих у свакој тачки имају правац једног од главних праваца.

Подмногострукост N Римановe многострукости M је **тотално геодезијска** уколико су геодезијске линије многострукости N уједно и геодезијске линије амбијентне многострукости M.

Теорема 1.5. *Нека је $f:N\to M$ изометријско потапање Риманове многострукости N у Риманову многострукост M. N је тотално геодезијска у M ако и само ако је $h=0$ тј. $A_\xi=0$ за свако $\xi\in T^\perp N$.*

Дефиниција 1.35. Ако је за нормално векторско поље ξ на N, A_ξ пропорционално идентичком пресликавању тј. важи

$$A_\xi=\rho\, id$$

за неку функцију ρ, онда је ξ **умбиличко сечење**, а N **умбиличка подмногострукост** у односу на ξ. Ако је N умбиличка у односу на свако нормално векторско поље онда је N **тотално умбиличка**.

Нека је N^n хиперповрш Риманове многострукости M^{n+1}. Тада дефинишемо следеће појмове.

Дефиниција 1.36.

1. Нека су $k_1,...,k_n$ главне кривине хиперповрши N^n. **Нормализована m−та симетрична функција главних кривина** H_m хиперповрши N^n је дата са

$$C^n_m H_m=\sum_{1\le i_1<...<i_m\le n} k_{i_1}k_{i_2}...k_{i_m},$$

где је

$$C^n_m=\binom{n}{m}=\frac{n(n-1)...(n-m+1)}{m(m-1)...1}.$$

2. За $m=1$, функција

$$H=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n k_i$$

зове се **средња кривина** хиперповрши N^n. Ако је H идентички једнака нули кажемо да је N **минимална** хиперповрш од M.

Дефиниција 1.37. Нека је M Риманова многострукост и ∇ Леви-Чивита конексија на M. Подсетимо се да за неку тачку $p\in M$ и $X_p\in T_pM$ постоји јединствена геодезијска крива $\gamma: I\to M$ таква да је $\gamma(0)=p$ и $T_\gamma|_0=X_p$.

1. Пресликавање $exp:\mathcal{O}\to M$, дато са $exp_p(X_p)=\gamma(1)$, где је $\mathcal{O}$ нека околина координатног почетка зове се **експоненцијално пресликавање**.

2. Околина U координатног почетка у простору T_pM таква де је рестрикција exp_p на U дифеоморфизам између U и $exp_p(U)$ зове се **нормална околина** у T_pM, а $exp_p(U)$ **нормална околина тачке** p.

3. Нека су $e_1, ..., e_n$ вектори ортонормиране базе T_pM и $x_1, ..., x_n$ одговарајуће координате. Тада је $(exp_p(U), exp_p^{-1})$ једна карта околине тачке p са координатним функцијама $x_1, ..., x_n$. Координате $x_1, ..., x_n$ у околини $exp_p(U)$ зову се **нормалне** координате центриране у p.

Може се показати да су локално на $n-$димензионој сфери нормалне координате угаоне координате.

Дефиниција 1.38. Риманова многострукост (M, g) је **конформно равна** ако за сваку тачку $p \in M$ постоји околина U и диференцијабилно пресликавање f дефинисано на U такво да је подмногострукост $(U, e^{2f}g)$ равна.

2 Основна својства ротационих хиперповрши вишедимензионих сфера

2.1 Дефиниција

Нека је $\mathbb{R}^n$ Риманов простор тј. $\mathbb{R}^n = \{(x_1, ..., x_n) | x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, ..., n\}$ са стандардном Римановом метриком $g(x, y) = \sum_{i=0}^{n} x_i y_i,\ x = (x_1, ..., x_n),\ y = (y_1, ..., y_n)$. Разматраћемо $(n+1)$-димензионе сфере

$$S^{n+1}(c) = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+2} \,|\, g(x, x) = \frac{1}{c} \right\}, \quad c > 0.$$

Ортогонална трансформација простора $\mathbb{R}^{n+2}$ је линеарно пресликавање које чува билинеарну форму g. Може се видети да ортогоналне трансформације индукују, рестрикцијом, све изометрије сфера $S^{n+1}(c)$. Са $\mathbf{P^k}$ означићемо $k-$димензиони потпростор простора $\mathbb{R}^{n+2}$ који пролази кроз координатни почетак, а са $\mathbf{O}(\mathbf{P^k})$ скуп ортогоналних трансформација на $\mathbb{R}^{n+2}$ са позитивном детерминантом које тачка-по-тачка фиксирају P^k. Такође, користићемо $[v_1, ..., v_k]$ да означимо потпростор генерисан векторима $v_1, ..., v_k$. Простор $\mathbb{R}^{n+2}$ ћемо звати ***амбијентни простор*** сфере $S^{n+1}(c)$.

Дефиниција 2.1. Нека су P^2 и P^3 такви да је $P^2 \subset P^3$ и нека је α регуларна крива на пресеку $P^3 \cap S^{n+1}(c) = S^2(c)$ која нема додирних тачака са P^2. Орбита криве α услед дејства $O(P^2)$ се назива **ротациона хиперповрш** $M^n \subset S^{n+1}(c),\ c > 0$ генерисана кривом α око P^2.

Дефиниција 2.2. Нека је $M^n \subset S^{n+1}(c),\ c > 0$ ротациона хиперповрш генерисана кривом α око P^2 из Дефиниције 2.1. Ако $\sigma \in O(P^2)$, крива $\sigma(\alpha)$ је **меридијан** хиперповрши M^n, а орбита неке тачке са криве α при дејству $O(P^2)$ је **паралела** хиперповрши M^n.

Напомена 2.1. У даљем раду ћемо, без умањења општости, разматрати јединичне вишедимензионе сфере позитивне кривине ($c = 1$).

2.2 Параметризација

Потребно је да покажемо да је M^n, из Дефиниције 2.1, заиста хиперповрш од $S^{n+1}(1)$. То ћемо урадити тако што ћемо одредити експлицитну параметризацију M^n. За то нам је потребно да опишемо $O(P^2)$.

Изаберимо ортонормирану базу $e_1, e_2, ..., e_{n+2} \in \mathbb{R}^{n+2}$ тако да важи:

1) P^2 је раван $[e_{n+1}, e_{n+2}]$ генерисана векторима e_{n+1} и e_{n+2},

2) Матрица елемента $O(P^2)$ се може записати у бази као

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{n/2} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & I \end{bmatrix} \text{ ако је } n \text{ паран,}$$

или

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{(n-1)/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \text{ ако је } n \text{ непаран,}$$

где 0 означава нула-матрице одговарајућих димензија, I је јединична 2×2 матрица, а матрице A_i су 2×2 матрице које имају следећу форму:

$$A_i = R(\theta_i) = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & \sin\theta_i \\ -\sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}, \text{ за } i \geq 1.$$

Може се показати да је ова група трансформација $\frac{n(n-1)}{2}-$параметарска. Сада смо спремни да параметризујемо орбиту криве α из Дефиниције 2.1. Простор $P^3 \supset P^2$ можемо да изразимо у претходно изабраној бази са $P^3 = [e_1, e_{n+1}, e_{n+2}]$ и нека је I отворен интервал у $\mathbb{R}$ који садржи нулу. Параметризујмо криву α са

$$y_1 = y_1(s), \quad y_{n+1} = y_{n+1}(s), \quad y_{n+2} = y_{n+2}(s), \quad s \in I.$$

За неко фиксирано $s = s_0$, обележимо са $U(s_0)$ пресек $S^{n+1}(1)$ са $n-$димензионом равни која пролази кроз тачку $(0, 0, ..., 0, y_{n+1}(s_0), y_{n+2}(s_0))$ и паралелна је са $[e_1, ..., e_n]$. Јасно је да је $O(P^2)$, такође, група изометрија пресека $U(s_0)$. Можемо да видимо да је $U(s_0)$ у ствари орбита тачке $(y_1(s_0), 0, 0, ..., 0, y_{n+1}(s_0), y_{n+2}(s_0))$ под дејством $O(P^2)$ тј. да је $U(s_0)$ паралела хиперповрши M^n и да је то нека $(n-1)-$димензиона сфера. Одатле можемо да одредимо параметризацију M^n тако што посматрамо параметризацију $U(s_0)$ и пустимо да s_0 варира.

Нека је $\varphi(t_1, ..., t_{n-1}) = (\varphi_1, ..., \varphi_n)$ ортогонална параметризација јединичне $(n-1)-$димензионе сфере у бази $[e_1, ..., e_n]$. Одатле следи да је

$$\begin{gathered} x : M^n \hookrightarrow S^{n+1}(1) \subset R^{n+2}, \\ (s, t_1, ..., t_{n-1}) \mapsto (y_1(s)\varphi_1, ..., y_1(s)\varphi_n, y_{n+1}(s), y_{n+2}(s)), \\ \varphi_i = \varphi_i(t_1, ..., t_{n-1}), \quad \varphi_1^2 + ... + \varphi_n^2 = 1 \end{gathered} \tag{5}$$

параметризација ротационе хиперповрши генерисане кривом α око $P^2 = [e_{n+1}, e_{n+2}]$. Да би пресликавање (5) било имерзија (потапање) неопходно је да $y_1(s) > 0$ на интервалу I. Како крива $y_1 = y_1(s)$, $y_{n+1} = y_{n+1}(s)$, $y_{n+2} = y_{n+2}(s)$ припада $S^{n+1}(1)$ и бирајући параметар s као дужину лука криве имамо

$$y_1^2(s) + y_{n+1}^2(s) + y_{n+2}^2(s) = 1, \quad \dot{y}_1^2(s) + \dot{y}_{n+1}^2(s) + \dot{y}_{n+2}^2(s) = 1, \tag{6}$$

где смо са тачком изнад означили извод по промењивој s. Одатле можемо изразити $y_{n+1}(s)$ и $y_{n+2}(s)$ као функције од $y_1(s)$. Штавише, можемо записати

$$\begin{aligned} y_{n+1}(s) &= \sqrt{1 - y_1^2(s)}\sin\phi(s), \\ y_{n+2}(s) &= \sqrt{1 - y_1^2(s)}\cos\phi(s), \end{aligned} \tag{7}$$

где је

$$\begin{aligned} \dot{y}_{n+1}(s) &= -\frac{2y_1\dot{y}_1}{2\sqrt{1 - y_1^2(s)}}\sin\phi(s) + \sqrt{1 - y_1^2}\cos\phi(s)\dot{\phi}(s), \\ \dot{y}_{n+2}(s) &= -\frac{2y_1\dot{y}_1}{2\sqrt{1 - y_1^2(s)}}\cos\phi(s) - \sqrt{1 - y_1^2}\sin\phi(s)\dot{\phi}(s), \end{aligned}$$

тј.

$$1 = \dot{y}_1^2 + \dot{y}_{n+1}^2 + \dot{y}_{n+2}^2 = \dot{y}_1^2 + \frac{y_1^2\dot{y}_1^2}{1 - y_1^2} + (1 - y_1^2)\dot{\phi}^2.$$

Одатле је

$$\phi(s) = \int_0^s \frac{\sqrt{1 - y_1^2 - \dot{y}_1^2}}{1 - y_1^2}d\sigma. \tag{8}$$

Уколико није другачије наглашено, сматрамо да су све многострукости повезане и класе C^∞.

2.3 Главни правци и главне кривине

Лема 2.1. *Нека је M^n ротациона хиперповрш сфере $S^{n+1}(1)$. Тада су главне кривине k_i хиперповрши M^n дате са*

$$k_i = \lambda = -\frac{\sqrt{1 - y_1^2 - \dot{y}_1^2}}{y_1}, \tag{9}$$

за $i = 1, 2, ..., n-1$, *и*

$$k_n = \mu = \frac{\ddot{y}_1 + y_1}{\sqrt{1 - y_1^2 - \dot{y}_1^2}}. \tag{10}$$

Одатле је вишеструкост λ *бар* $n-1$.

Доказ: Из (5) следи:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial s} &= (\dot{y}_1\varphi_1, ..., \dot{y}_1\varphi_n, \dot{y}_{n+1}, \dot{y}_{n+2}),\\
\frac{\partial x}{\partial t_i} &= (y_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_i}, ..., y_1\frac{\partial \varphi_n}{\partial t_i}, 0, 0), \qquad i = 1, ..., n-1,
\end{aligned}$$

и φ је ортогонална параметризација, па закључујемо

$$g(\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial x}{\partial s}) = 1, \quad g(\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial x}{\partial t_i}) = 0, \quad g(\frac{\partial x}{\partial t_i}, \frac{\partial x}{\partial t_j}) = \alpha_{ij}y_1^2, \tag{11}$$

где су $\alpha_{ij} = \sum_{k=1}^{n} g(\frac{\partial \varphi_k}{\partial t_i}, \frac{\partial \varphi_k}{\partial t_j})$. Директним рачуном добија се да је јединично нормално поље N дато са:

$$N = (\varphi(\dot{y}_{n+1}y_{n+2} - \dot{y}_{n+2}y_{n+1}), (\dot{y}_{n+2}y_1 - \dot{y}_1 y_{n+2}), (\dot{y}_1 y_{n+1} - \dot{y}_{n+1}y_1))$$

и можемо израчунати

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} &= (\ddot{y}_1\varphi_1, ..., \ddot{y}_1\varphi_n, \ddot{y}_{n+1}, \ddot{y}_{n+2}),\\
\frac{\partial^2 x}{\partial s \partial t_i} &= (\dot{y}_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_i}, ..., \dot{y}_1\frac{\partial \varphi_n}{\partial t_i}, 0, 0),\\
\frac{\partial^2 x}{\partial t_i \partial t_j} &= (y_1\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_i \partial t_j}, ..., y_1\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial t_i \partial t_j}, 0, 0).
\end{aligned}$$

С обзиром да је $g(\frac{\partial^2 x}{\partial s \partial t_i}, N) = g(\frac{\partial^2 x}{\partial t_i \partial t_j}, N) = 0$, за $i \neq j$ следи да су координатне криве линије кривине. Користећи

$$y_{n+2} = \sqrt{1 - y_1^2}\sin\phi \quad \text{и} \quad y_{n+1} = \sqrt{1 - y_1^2}\cos\phi,$$

главне кривине дуж координатних криви t_i су дате са

$$\lambda = \frac{g(h(\frac{\partial x}{\partial t_i}, \frac{\partial x}{\partial t_i}), N)}{||\frac{\partial x}{\partial t_i}||^2} = \frac{g(\frac{\partial^2 x}{\partial t_i \partial t_i}, N)}{||\frac{\partial x}{\partial t_i}||^2} = -\frac{(\dot{y}_{n+1}y_{n+2} - \dot{y}_{n+2}y_{n+1})}{y_1} = -\frac{\sqrt{1 - y_1^2 - \dot{y}_1^2}}{y_1}.$$

Сада можемо израчунати μ,

$$\begin{aligned}
\mu &= \frac{g(h(\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial x}{\partial s}), N)}{||\frac{\partial x}{\partial s}||^2} = g(\frac{\partial^2 x}{\partial s \partial s}, N)\\
&= \big(\ddot{y}_1(\dot{y}_{n+1}y_{n+2} - \dot{y}_{n+2}y_{n+1}) + \ddot{y}_{n+1}(\dot{y}_{n+2}y_1 - \dot{y}_1 y_{n+2}) + \ddot{y}_{n+2}(\dot{y}_1 y_{n+1} - \dot{y}_{n+1}y_1)\big)\\
&= \big(\ddot{y}_1(\dot{y}_{n+1}y_{n+2} - \dot{y}n + 2y_{n+1}) + \dot{y}_1(\ddot{y}_{n+2}y_{n+1} - \ddot{y}_{n+1}y_{n+2}) + y_1(\dot{y}_{n+2}\ddot{y}_{n+1} - \ddot{y}_{n+2}\dot{y}_{n+1})\big)\\
&= \frac{\ddot{y}_1 + y_1}{\sqrt{1 - y_1^2 - \dot{y}_1^2}}.
\end{aligned}$$

∎

Последица 2.1. *Прва и друга фундаментална форма ротационе хиперповрши* M^n *дате су са:*

$$I = ds^2 + y_1^2(s)\sum_i \alpha_{ii}dt_i^2, \tag{12}$$

$$II = \mu(s)ds^2 + \lambda(s)y_1^2(s)\sum_i \alpha_{ii}dt_i^2, \tag{13}$$

респективно.

Напомена 2.2. Потребно је проверити добру дефинисаност μ у тачкама у којим је $\lambda = 0$. Посматрајмо ротациону хиперповрш M^n од $S^{n+1}(1)$. Из (7) следи да

$$\ddot{\phi}(s) = -\frac{\dot{y}_1(y_1 + \ddot{y}_1)}{(1 - y_1^2)\sqrt{1 - y_1^2 - \dot{y}_1^2}} + \frac{\sqrt{1 - y_1^2 + \dot{y}_1^2}}{(1 - y_1^2)^2} 2y_1\dot{y}_1.$$

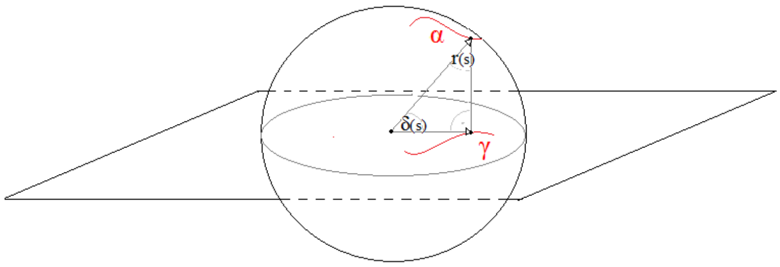
Сада, ако је $\lambda(s_0) = 0$ тада је и други сабирак једнак нули, а следи да $\dot{y}_1(s_0) \neq 0$. Одатле

$$\ddot{\phi}(s_0) = \frac{\dot{y}_1(s_0)}{(1 - y_1^2)} \frac{\ddot{y}_1(s_0) + y_1(s_0)}{\sqrt{1 - y_1^2(s_0) - \dot{y}_1^2(s_0)}} = \frac{\dot{y}_1(s_0)}{1 - y_1^2(s_0)} \mu(s_0).$$

Зато следи да је $\mu(s_0)$ добро дефинисана Лемом 2.1.

Пројекцијом профилне криве α на P^2 тј. пројекцијом $S_+^2 = \{(y_1, y_{n+1}, y_{n+2}) \,|\, y_1 \geq 0,\, y_1^2 + y_{n+1}^2 + y_{n+2}^2 = 1\}$ на јединични диск $D = \{(y_{n+1}, y_{n+2}) \,|\, y_{n+1}^2 + y_{n+2}^2 \leq 1\}$ добијамо раванску криву (*осу револуције*) γ. Посматрајмо угао $\delta(s)$ између вектора положаја тачке $\alpha(s)$ и правца ка пројекцији те тачке на γ тј. правца ка тачки $(0, 0, ..., y_{n+1}(s), y_{n+2}(s))$ (видети слику 2.1). Ако са $r(s)$ означимо функцију такву да је $\delta(s) = \frac{\pi}{2} - r(s)$, можемо записати:

$$\begin{aligned} y_1(s) &= \cos r(s), \\ y_{n+1}(s) &= \sin r(s) \sin \phi(s), \\ y_{n+2}(s) &= \sin r(s) \cos \phi(s). \end{aligned} \tag{14}$$



Слика 2.1 Илустрација пројекције.

Из тога можемо закључити да

$$\dot{r}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 r = 1. \tag{15}$$

Из једначине (15) следи да је $\dot{r}^2 \leq 1$. Како је $\sqrt{1 - y_1^2} = \sin r$ тј. $\dot{r}^2 = \frac{\dot{y}_1^2}{1 - y_1^2}$, имамо

$$\dot{y}_1^2 + y_1^2 \leq 1. \tag{16}$$

У овом случају раванску криву γ можемо записати као

$$y_{n+1}(s) = \sin r(s) \sin \phi(s), \qquad y_{n+2}(s) = \sin r(s) \cos \phi(s). \tag{17}$$

2.4 Структура уврнутог (warped) производа

Појам уврнутог[22] производа има велику улогу у геометрији, али и у физици, посебно у општој теорији релативности. Многа решења Ајнштајнових[23] једначина поља, као што је Шварцшилдово[24] решење, имају структуру уврнутог производа, па се тако може и представити геометрија простор-времена око неке велике звезде или црне рупе. Многострукости са структуром уврнутог производа се изучавају веома дуго, док је наука о подмногострукостима са овом структуром почела да се развија тек крајем прошлог века.

[22] енгл. warped

[23] Albert Einstein (1879 – 1955) - немачки теоријски физичар, формулисао је специјалну и општу теорију релативности, допринео напретку квантне теорије и статистичке механике.

[24] Karl Schwarzschild (1873 – 1916) - немачки астрофизичар и астроном, дошао је до познатог решења Ајнштајнових једначина поља које је описало геометрију простор-времена око тачкасте масе.

Дефиниција 2.3. Нека су (M_1, g_1) и (M_2, g_2) две Риманове многострукости такве да $\dim M_1 = m$ и $\dim M_2 = n - m$, $1 < m < n$ и нека је f позитивна функција на M_1. Посматрајмо производ многострукост $M = M_1 \times M_2$ и нека су $\pi_1 : M_1 \times M_2 \to M_1$ и $\pi_2 : M_1 \times M_2 \to M_2$ природне пројекције. **Уврнути**[25] производ $\tilde{M} = M_1 \times_f M_2$ је многострукост $M = M_1 \times M_2$ са метриком $g = g_1 \times_f g_2$. Тачније

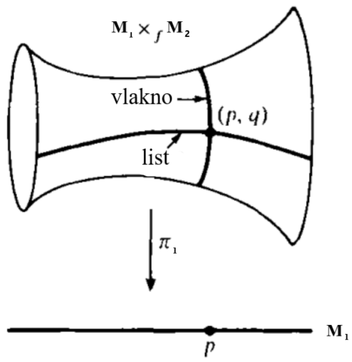
$$g = g_1 \times_f g_2 = \pi_{1*}(g_1) + (f \circ \pi_1)^2 \pi_{2*}(g_2),$$

тј.

$$\langle x, x \rangle = \langle d\pi_1(x), d\pi_1(x) \rangle + f^2(p) \langle d\pi_2(x), d\pi_2(x) \rangle$$

за сваки вектор x тангентан на $M = M_1 \times M_2$ у некој тачки (p, q).

M_1 се назива **база** уврнутог производа $\tilde{M}$, а за сваку тачку $(p, q) \in M_1 \times M_2$, $\{p\} \times M_2 = {\pi_1}^{-1}(p)$ су **влакна**[26], а $M_1 \times \{q\} = {\pi_2}^{-1}(q)$ се називају **листови**.



Слика 2.2 Пример уврнутог производа.[27]

Нека је $x : M^n \hookrightarrow S^{n+1}(1)$ параметризација ротационе хиперповрши дата са (5) где је профилна крива $\alpha(s)$ природно параметризована са

$$y_1 = y_1(s) > 0, \quad y_{n+1} = y_{n+1}(s), \quad y_{n+2} = y_{n+2}(s), \quad s \in I.$$

Како је $\varphi(t_1, ..., t_{n-1}) = (\varphi_1, ..., \varphi_n)$ ортогонална параметризација јединичне $(n-1)-$димензионе сфере из (12) можемо да видимо да та хиперповрш има природно дефинисану структуру уврнутог производа тј.

$$M^n = I \times_{y_1} S^{n-1}(1).$$

Са друге стране, из (14) можемо да ротациону хиперповрш посматрамо као

$$M^n = \alpha \times_r S^{n-1}(1).$$

2.5 Једначина средње кривине

Нека је H_m нормализована $m-$та симетрична функција главних кривина хиперповрши M^n тј.

$$C_m^n H_m = \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_m \leq n} k_{i_1} k_{i_2} ... k_{i_m} \tag{18}$$

где је

$$C_m^n = \binom{n}{m} = \frac{n(n-1)...(n-m+1)}{m(m-1)...1},$$

а $k_i = \lambda$, $i = 1, ..., n-1$ и $k_n = \mu$ су главне кривине хиперповрши M^n, што знамо из Леме 2.1.

[25]енгл. warped
[26]енгл. fibers
[27]Слика преузета из [18].

Лема 2.2. *Ротациона хиперповрш M^n сфере $S^{n+1}(1)$ има задату кривину H_m $(m \leq n-1)$ ако и само ако $y_1(s)$ задовољава следећу диференцијалну једначину:*

$$nH_m{y_1}^m = (-1)^m\big((n-m)(1-y_1^2-\dot{y}_1^2)^{\frac{m}{2}} - m(1-y_1^2-\dot{y}_1^2)^{\frac{m-2}{2}}(\ddot{y}_1+y_1)y_1\big). \tag{19}$$

Доказ: Из Леме 2.1 знамо да су

$$k_1 = ... = k_{n-1} = \lambda = -\frac{\sqrt{1-y_1^2-\dot{y}_1^2}}{y_1},$$
$$k_n = \mu = \frac{\ddot{y}_1+y_1}{\sqrt{1-y_1^2-\dot{y}_1^2}}$$

главне кривине хиперповрши M^n. Од њих можемо изабрати m кривина, $m \leq n-1$, тако да су или свих m кривина међусобно једнаке и једнаке λ или да је њих $m-1$ једнако λ и једна је једнака μ.

Због тога из (18) следи да је

$$\begin{aligned}
nH_m y_1^m &= \cancel{n}\frac{m(m-1)...1}{\cancel{n}(n-1)...(n-m+1)}y_1^m \sum_{1\leq i_1<...<i_m\leq n} k_{i_1}k_{i_2}...k_{i_m}\\
&=\frac{m(m-1)...1}{(n-1)...(n-m+1)}y_1^m\left(\binom{n-1}{m}\lambda^m + \binom{n-1}{m-1}\lambda^{m-1}\mu\right)\\
&=(-1)^m(n-m)(1-y_1^2-\dot{y}_1^2)^{\frac{m}{2}} + (-1)^{m-1}m(1-y_1^2-\dot{y}_1^2)^{\frac{m-1}{2}-\frac{1}{2}}(\ddot{y}_1+y_1)y_1\\
&=(-1)^m\big((n-m)(1-y_1^2-\dot{y}_1^2)^{\frac{m}{2}} - m(1-y_1^2-\dot{y}_1^2)^{\frac{m-2}{2}}(\ddot{y}_1+y_1)y_1\big).
\end{aligned}$$

∎

Лема 2.3. *Једначина (19) је еквивалентна са њеним интегралом првог реда*

$$G_m(y_1,\dot{y}_1) = y_1^{n-m}\big((1-y_1^2-\dot{y}_1^2)^{\frac{m}{2}} - H_m{y_1}^m\big) = a = const. \tag{20}$$

за $m \leq n-1$.

Доказ: То добијамо множењем једначине (19) са $(-1)^m{y_1}^{n-m-1}$, а затим њеним интеграљењем. ∎

Користићемо технике описане у радовима [21] и [13] да изучимо (20). Једначина (20) нам говори да локално решење y_1 једначине (19) упарено са изводом тог решења, што означавамо $(y_1, \dot{y}_1)$, јесте нивоска крива[28] функције G_m дефинисане са

$$G_m(u,v) = u^{n-m}\big((1-u^2-v^2)^{\frac{m}{2}} - H_m u^m\big), \tag{21}$$

за $u > 0$ и $u^2+v^2 \leq 1$.

Напомена 2.3. У (16) смо показали да важи да је $y_1 + \dot{y}_1 \leq 1$.

Специјално за $m = 1$ функција $H_1 = H = H(s)$ представља средњу кривину хиперповрши M^n. Ако нам је задата функција средње кривине $H = H(s)$, из (19) можемо написати нелинеарну диференцијалну једначину чија су решења координатне функције које дефинишу ротациону хиперповрш M^n тј.

$$y_1\ddot{y}_1 + (n-1)\dot{y}_1^2 + ny_1^2 - (n-1) = nHy_1\sqrt{1-y_1^2-\dot{y}_1^2}. \tag{22}$$

[28] Нивоска крива (ниво-крива, ниво-скуп) реално-вредоносне функције f која зависи од n промењивих је скуп $L_c(f) = \{(x_1,...x_n)\,|\,f(x_1,...x_n) = c\}$ тј. скуп тачака у којима функција узима одређену константну вредност.

3 Довољни услови да хиперповрш буде ротациона

Питамо се када је произвољна хиперповрш $x : M^n \hookrightarrow S^{n+1}(1)$, за $n \geq 3$, ротациона хиперповрш. Следеће тврђење представља главну теорему о довољним условима да хиперповрш од $S^{n+1}(1)$, $n \geq 3$ буде ротациона.

Теорема 3.1. *Нека је $x : M^n \to S^{n+1}(1)$, $n \geq 3$ произвољна хиперповрш. Претпоставимо да су главне кривине $k_1, ..., k_n$ од x такве да $k_1 = k_2 = ... = k_{n-1} = -\lambda \neq 0$, $k_n = -\mu = -\mu(\lambda)$ и $\lambda - \mu \neq 0$. Тада је слика $x(M^n)$ садржана у некој ротационој хиперповрши.*

Доказ:

Познато је из [23] да се хиперповрш M^n може поделити на листове[29] инволутивних дистрибуција D_λ и D_μ одређених сопственим векторима који одговарају сопственим вредностима λ и μ, респективно, где је λ константна дуж листова дистрибуције D_λ. Нека је $p \in M$ произвољна тачка и означимо са Σ_p листове дистрибуције D_λ, а са L_p листове дистрибуције D_μ који пролазе кроз p. Изаберимо, у некој околини тачке p, $U = U(p)$, координате $u_1, ..., u_{n-1}$ и t такве да су $u_1, ..., u_{n-1}$ локалне координате у Σ_p и t је координата у L_p. Означимо са $V_i = \frac{\partial}{\partial u_i}$, $T = \frac{\partial}{\partial t}$ и са N јединични нормалан вектор имерзије x. Показаћемо да је x ротациона хиперповрш у околини тачке p.

Прво ћемо показати да је Σ_p умбиличка у $S^{n+1}(1)$. Нека је са $\overline{\nabla}$ означен коваријантни извод од $S^{n+1}(1)$. Тада

$$\overline{\nabla}_{V_i} N = \lambda V_i, \quad \overline{\nabla}_T N = \mu T.$$

Како је $V_i(\lambda) = 0$ и $\mu = \mu(\lambda)$, тада је $V_i(\mu) = 0$ и важи

$$\overline{\nabla}_T \overline{\nabla}_{V_i} N = \lambda' V_i + \lambda \overline{\nabla}_T V_i, \quad \overline{\nabla}_{V_i} \overline{\nabla}_T N = \mu \overline{\nabla}_{V_i} T.$$

Из чињенице да $S^{n+1}(1)$ има константну секциону кривину и $[V_i, T] = 0$, можемо закључити да

$$0 = (\overline{\nabla}_T \overline{\nabla}_{V_i} - \overline{\nabla}_{V_i} \overline{\nabla}_T) N = \lambda' V_i + (\lambda - \mu) \overline{\nabla}_{V_i} T.$$

Како p није умбиличка тачка, важи

$$\overline{\nabla}_{V_i} N = \lambda V_i, \quad \overline{\nabla}_{V_i} T = -\frac{\lambda'}{\lambda - \mu} V_i,$$

па следи да Σ_p јесте умбиличка на $S^{n+1}(1)$.

Одатле је $\Sigma_p \subset \overline{P}^n \cap S^{n+1}(1)$, где је $\overline{P}^n$ n-димензиони потпростор амбијентног простора. Желимо да покажемо да су простори $\overline{P}^n$ који су у кореспонденцији са одређеним листовима Σ_p, паралелни у амбијентном простору.

Нека је r позициони вектор од $S^{n+1}(1)$ у амбијентном простору и нека су ∇ и g, коваријантни извод и метрика, респективно, амбијентног простора. Нека је W векторско поље дуж Σ_p дефинисано са $W = \frac{\lambda' N}{(\lambda - \mu)} + \lambda T$. Тада, $g(W, V_i) = 0$ и

$$\overline{\nabla}_{V_i} W = \frac{\lambda'}{\lambda - \mu} \overline{\nabla}_{V_i} N + \lambda \overline{\nabla}_{V_i} T = 0.$$

Одатле, $\nabla_{V_i} W = \alpha r$, где је

$$\alpha = g(\nabla_{V_i} W, r) = -g(W, \nabla_{V_i} r) = -g(W, V_i) = 0.$$

Следи да је W константно дуж Σ_p и ортогонално на $\overline{P}^n$.

Нека је сада $A = -r + \frac{N}{\lambda}$. Тада је $g(A, V_i) = 0$ и

$$\nabla_{V_i} A = -V_i + \frac{1}{\lambda} \nabla_{V_i} N = -V_i + \frac{1}{\lambda} \overline{\nabla}_{V_i} N = 0,$$

што значи да је A, такође, константно дуж Σ_p и ортогонално на $\overline{P}^n$. Пошто су W и A линеарно независни, узећемо у обзир раван $\Pi = [W, A]$ генерисану са W и A. Π је потпростор ортогоналан на

[29] енгл. foliation

$\overline{P}^n$ и да бисмо доказали да су $\overline{P}^n$ паралелни довољно је да покажемо да су Π паралелни. Морамо показати да $\nabla_T A$ и $\nabla_T W$ припадају Π.

Пошто је $[T, V_i] = 0$ закључујемо

$$\nabla_{V_i}\nabla_T A = \nabla_T \nabla_{V_i} A = 0, \quad \nabla_{V_i}\nabla_T W = \nabla_T \nabla_{V_i} W = 0.$$

Зато су $\nabla_T A$ и $\nabla_T W$ константни дуж Σ_p. Важи још и

$$g(\nabla_T A, V_i) = -g(A, \nabla_T V_i) = -g(A, \overline{\nabla}_T V_i) = -g(A, \overline{\nabla}_{V_i} T) = 0$$

и

$$g(\nabla_T W, V_i) = -g(W, \overline{\nabla}_{V_i} T) = 0.$$

Следи да су и $\nabla_T W$ и $\nabla_T A$ константни вектори дуж Σ_p и ортогонални на $\overline{P}^n$, па припадају Π, што смо и желели да покажемо.

Сада изаберимо ортонормирану базу $e_1, ..., e_{n+2}$ амбијентног простора, такву да је $\overline{P}^n$ паралелан са $[e_1, ..., e_n]$. Означићемо $[e_{n+1}, e_{n+2}] = P^2$. Како се $\overline{P}^n$ помера дуж листа L_p, његов пресек са $S^{n+1}(1)$ описује ротациону хиперповрш око P^2 која је баш $x(M^n)$ што смо и желели да докажемо.

∎

Напомена 3.1. Теорема 3.1 не важи у случају $n = 2$.

Последица 3.2. *Нека је $x : M^n \to S^{n+1}(1)$, $n \geq 3$, минимална*[30] *хиперповрш која има две главне кривине λ и μ, где једна од њих, на пример λ, је вишеструкости бар $(n-1)$. Тада је $x(M^n)$ садржана у катеноиду*[31]*.*

Доказ:

Због минималности, x је аналитичка. Ако постоји околина умбиличких тачака, x је тотално геодезијска и последица важи. У супротном, постоји околина неумбиличких тачака и можемо применити Теорему 3.1 на ову околину. Због аналитичности, $x(M^n)$ је садржана у катеноиду.

∎

Последица 3.3. *Нека је $x : M^n \to S^{n+1}(1), n \geq 4$, конформно равна хиперповрш*[32]*. Претпоставимо да важи $\lambda \neq 0$, $\mu = \mu(\lambda)$, $\lambda - \mu \neq 0$. Тада је $x(M^n)$ садржана у ротационој хиперповрши.*

Доказ:

Како је $x : M^n \to S^{n+1}(1), n \geq 4$ конформно равна хиперповрш, бар $n-1$ од њених главних кривина су једнаке и нека су, без умањења општости, једнаке $-\lambda$. Нека је друга главна кривина означена са $-\mu$. Доказ следи директно из Теореме 3.1.

∎

Последица 3.4. *Нека је $x : M^n \to S^{n+1}(1)$, $n \geq 4$, конфорно равна минимална хиперповрш. Тада је $x(M^n)$ садржана у катеноиду.*

Доказ:

Како је $x : M^n \to S^{n+1}(1), n \geq 4$ конформно равна хиперповрш, бар $n-1$ од њених кривина су једнаке. Доказ је, дакле, исти као и за Последицу 3.3. ∎

Следећа теорема се бави питањем одређивања које хиперповрши од $S^{n+1}(1)$ су инваријанте l-параметарске подгрупе изометрија од $S^{n+1}(1)$. Грубо речено, показаћемо да ако занемаримо хиперповрши које имају константне главне кривине и претпоставимо да је l максимална дозвољена вредност, тада је $x(M)$ ротациона хиперповрш.

Погодно нам је да са $\mathcal{C}(n)$ означимо скуп свих хиперповрши од $S^{n+1}(1)$ које имају константне главне кривине.

[30] Карактеризација и класификација минималних ротационих хиперповрши сфере $S^{n+1}(1)$ је детаљније обрађена у §5.

[31] Како је (22) за $H = 0$, $c = 0$ тј. у $\mathbb{R}^{n+1}$, једначина катеноида параметризованог дужином лука, тада ћемо сва решења ове једначине за $H = 0$ и у нашем случају звати (сферним) *катеноидима*.

[32] У [17] је показано да је за $n \geq 4$ хиперповрш $x : M^n \to S^{n+1}(1)$ конформно равна ако и само ако су бар $n-1$ од њених главних кривина једнаке.

Теорема 3.5. *Нека је $n \geq 3$ фиксирано и нека је $x : M^n \to S^{n+1}(1)$ хиперповрш која је инваријанта l-параметарске подгрупе изометрија од $S^{n+1}(1)$. Претпоставимо да $x \notin \mathcal{C}$. Тада максимална вредност l је $l_{max} = n(n-1)/2$ и ако је $l = l_{max}$, тада x има две главне кривине λ, μ, где једна од њих, на пример λ, је вишеструкости бар $n-1$. Ако је, додатно, $\lambda \neq 0$, $\mu = \mu(\lambda)$ и $\mu - \lambda \neq 0$, онда је $x(M^n)$ ротациона хиперповрш.*

Доказ:

Да бисмо доказали први део ове теореме, показаћемо да је $l_{max} = n(n-1)/2$. Из самог постојања ротационе хиперповрши следи да се ова вредност може достићи, потребно је још доказати да је она и максимална. Нека је $p \in M^n$ и нека је Σ_p орбита тачке p под дејством l_{max}-параметарске подгрупе изометрија од $S^{n+1}(1)$. Претпоставимо да $l_{max} > n(n-1)/2$. Тада је $\dim \Sigma_p = n$, у супротном димензија групе изометрија од Σ_p је највише $n(n-1)/2$. Како је $\dim \Sigma_p = n$, због хомогености, $\Sigma_p = M^n$. Али тада $M^n \in \mathcal{C}$. Ово је контрадикција са претпоставком и одатле следи да $l_{max} = n(n-1)/2$.

Показали смо да $l = l_{max} = n(n-1)/2$. Желимо да покажемо и да x има две главне кривине и да је једна од њих вишеструкости барем $n-1$. Нека је опет $p \in M^n$ и нека је Σ_p орбита тачке p под дејством l-параметарске подгрупе. Пошто $x \notin \mathcal{C}$, $\dim \Sigma_p = n-1$. Ако је p умбиличка тачка теорема важи, па претпоставимо да p није умбиличка.

Нека су $e_1, ..., e_n$ јединични главни вектори у тачки p са главним кривинама $k_1, ..., k_n$, респективно. Прво ћемо показати да тангентни простор $T_p(\Sigma_p)$ од Σ_p у тачки p садржи $n-1$ главних вектора. Показаћемо да за јединични вектор $v = \sum \alpha_i e_i$, $\sum \alpha_i^2 = 1$, који припада $T_p(\Sigma_p)$, односно који је ортогоналан на нормални вектор равни $(A_1, \ldots, A_n)$ тј. $\sum A_i \alpha_i = 0$, важи да је бар за једно i, $\alpha_i = 0$. Подмногострукост $T_p(\Sigma_p)$ је дефинисана једначинама

$$\begin{cases} G(\alpha_1, ..., \alpha_n) = \sum \alpha_i^2 - 1 = 0, \\ H(\alpha_1, ..., \alpha_n) = \sum A_i \alpha_i = 0. \end{cases}$$

Нормална кривина у правцу вектора v је $F(\alpha_1, ..., \alpha_n) = \sum k_i \alpha_i^2$. Како је група која дејствује на Σ_p максимална група изометрија и $n > 2$, све нормалне кривине у правцима садржаним у $T_p(\Sigma_p)$ су једнаке и рестрикција F на $T_p(\Sigma_p)$ је константна. Коришћењем Лагранжеве[33] мултипликативне методе, добија се да за неке реалне бројеве λ и β, $grad\ (F + \lambda G + \beta H) = 0$. Одатле

$$2\alpha_i(k_i + \lambda) + \beta A_i = 0, \quad i = 1, .., n,$$

за сваки једнинични вектор из $T_p(\Sigma_p)$. Ако је $\beta \neq 0$, а како постоји $A_i \neq 0$, следи да је

$$\alpha_i(k_i + \lambda) = -\frac{\beta A_i}{2} \neq 0.$$

С обзиром да можемо наћи два јединична вектора са различитим α_i следи да $(k_i + \lambda) = 0$, што је контрадикција.

Зато је $\beta = 0$ и $\alpha_i(k_i + \lambda) = 0$. Ако је v вектор чија је $i-$та координата различита од нуле следи $k_i = -\lambda$. Зато постоји i такво да је за сваки вектор v његова i-та координата једнака нули, јер би иначе све кривине биле једнаке. Без умањења општости можемо узети $n = i$. Дакле, сви вектори v су ортогонални на e_n (то је вектор нормалан на $T_p(\Sigma_p)$). Како је $T_p(\Sigma_p)$ димензије $n-1$, за све остале i, постоји v такво да је $\alpha_i \neq 0$, те су све остале кривине једнаке $-\lambda$.

Ако је $\lambda \neq 0$, $\mu = \mu(\lambda)$ и $\mu - \lambda \neq 0$, онда из Теореме 3.1 следи да је $x(M^n)$ ротациона хиперповрш. ∎

Напомена 3.2. Класа $\mathcal{C}(n, c)$ је класа изопараметричке[34] фамилије од $S^{n+1}(1)$ у смислу Картана[35]. Картан је показао у [4] да неопходан и довољан услов за фамилију паралелних хиперповрши неке

[33] Joseph-Louis comte de Lagrange (1736 – 1813) - италијанско-француски математичар и астроном, дао је важан допринос на свим пољима анализе и теорије бројева као и класичне и небеске механике.

[34] Изопараметричка фамилија на некој Римановој многострукости M је колекција ниво-крива неке неконстантне функције f са особином да су функције $F_1(f) = |grad f|^2$, $F_2(f) = \triangle f$ константне на сваком нивоу. Са $\triangle f$ представљен је Лаплас-Белтрами оператор који представља дивергенцију градијента.

[35] Elie Cartan (1869 – 1951) - француски математичар, дао значајан допринос у теорији Лијевих група, изучавању диференцијалних система и диференцијалне геометрије.

Римановe многострукости да буде параметричка јесте да свака хиперповрш има константну средњу кривину.[36] Иако су за просторне форме константне кривине $c \leq 0$ фамилије класификоване у [4] и нема их пуно, у нашем случају, за $c > 0$ комплетан опис класе $\mathcal{C}(n)$ је још увек отворен проблем. Нису сви елементи $\mathcal{C}(n, c), c > 0$, инваријанте l-параметарске подгрупе групе изометрија од $S^{n+1}(c)$. Ако би се класификација могла добити под овим додатним рестрикцијама Теорема 3.5 би била експлицитнија.

[36] Преузето из [8].

4 Ротационе хиперповрши сфера са константном средњом кривином

4.1 Карактеризација ротационих CMC хиперповрши

Посебну фамилију ротационих хиперповрши $S^{n+1}(1)$ представљају оне са константном средњом кривином тзв. ротационе CMC[37] хиперповрши и оне су уопштење Делонијевих површи тродимензионог простора. Делони је дефинисао и окарактерисао комплетне површи са константном средњом кривином у $\mathbb{R}^3$ у свом раду [7]. Кажемо да је површ константне средње кривине у $\mathbb{R}^3$ комплетна ако није део веће такве површи. Показао је да се свака таква површ добија ротацијом тзв. рулета конике[38] око осе рулета, где се рулет конике добија када котрљамо конику непрекидно по фиксираној правој. Иако минималне ротационе хиперповрши вишедимензионе сфере ($H = 0$) јесу подскуп CMC фамилије, често се сматрају специјалним случајем.

Када је $H = const$, диференцијална једначина (22) се може упростити. Од значаја нам је следеће тврђење.

Лема 4.1. *Нека је H константа. Тада је први интеграл од (22) дат са*

$$\dot{y}_1^2 = 1 - y_1^2 - (Hy_1 - \frac{a}{y_1^{n-1}})^2, \qquad a = const. \tag{23}$$

Доказ: Обележимо са $z = \sqrt{1 - y_1^2 - \dot{y}_1^2}$ ради лакшег рачуна. Тада је

$$z\dot{z} = -\dot{y}_1(y_1 + \ddot{y}_1).$$

Из (22) можемо изразити $\ddot{y}_1$ и добијамо

$$z\dot{z} = -\dot{y}_1(nHz + \frac{(n-1)z^2}{y_1}),$$
$$\dot{z} = -\frac{\dot{y}_1}{y_1}((n-1)z + nHy_1).$$

Нека је сада $f = z + Hy_1$. Како је H константа, из претходног следи да је $\dot{f}y_1 = -(n-1)f\dot{y}_1$, па је одатле $f = \frac{a}{y_1^{n-1}}$, где је a нека константа. Одатле важи

$$z^2 = (f - Hy_1)^2 = 1 - y_1^2 - \dot{y}_1^2,$$

што доказује ову лему. ∎

Напомена 4.1. Лему 4.1 смо могли доказати и користећи (20) за $m = 1$.

4.2 Неки специјални случајеви

Претходно смо анализирали параметризације ротационих хиперповрши вишедимензионих сфера константне средње кривине и показали смо да су решења нелинеарне диференцијалне једначине првог реда координатне функције које дефинишу ове хиперповрши. Следи детаљна анализа у пар специјалних случајева.

4.2.1 Ротационе хиперповрши од $S^{n+1}(1) : H = const,\ a = 0;$

Када је $H = const$, $a = 0$, једначина (23) се своди на следећу диференцијалну једначину коју желимо да решимо:

$$\dot{y}_1^2 = 1 - y_1^2(1 + H^2). \tag{24}$$

[37] енгл. constant-mean-curvature

[38] круг, елипса, хипербола, парабола

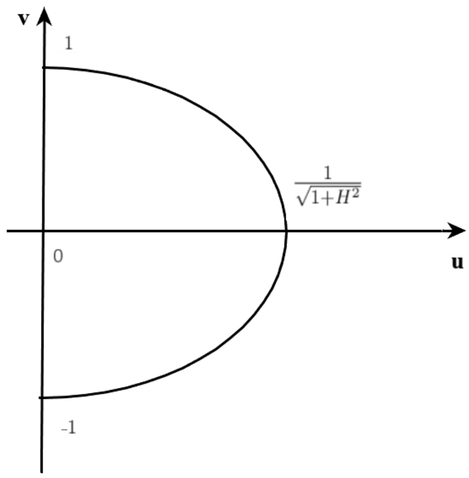
Користећи (21) можемо посматрати нивоску криву

$$G_1 = u^{n-1}\big(\sqrt{(1-u^2-v^2)} - Hu\big) = 0,$$

тј.

$$(1+H^2)u^2 + v^2 = 1.$$

Пошто је $u > 0$ та нивоска крива је половина елипсе.



Слика 4.1 Нивоска крива за $G_1 = 0$.

Ако узмемо да је почетни услов $y_1(0) = 0$, решавањем једначине (24) добијамо

$$y_1(s) = \frac{\sin(\sqrt{1+H^2}s)}{\sqrt{1+H^2}}.$$

Можемо да видимо да ће одговарајућа хиперповрш бити нека сфера параметризована са:

$$y_1(s) = \frac{\sin(\sqrt{1+H^2}s)}{\sqrt{1+H^2}},$$
$$\phi(s) = -\arctan\big(\frac{\cos(\sqrt{1+H^2}s)}{H}\big).$$

4.2.2 Минималне ротационе хиперповрши од $S^3(1)$

Посматрајмо минималне хиперповрши сфере за $n = 2$. Из дефиниције знамо да је хиперповрш минимална ако је средња кривина идентички једнака нули. Једначина (22) се за $H = 0$ своди на

$$y_1\ddot{y}_1 + \dot{y}_1 = 1 - 2y_1^2. \tag{25}$$

Ако ставимо да је $z = 1 - 2y_1^2$, видимо да је $\ddot{z} = -4z$, уз почетни услов $\dot{y}_1(0) = 0$ добијамо да су решења (25)

$$y_1(s) = \sqrt{1/2 + b\cos(2s)},$$
$$y_3(s) = \sqrt{1-y_1^2}\sin\phi(s),$$
$$y_4(s) = \sqrt{1-y_1^2}\cos\phi(s),$$

где је $b = const$ и $-\frac{1}{2} < b < \frac{1}{2}$ из

$$\begin{aligned}\phi(s) &= \int_0^s \frac{\sqrt{(1-y_1^2-\dot{y}_1^2}}{1-y_1^2}ds \\ &= \sqrt{(1/4-b^2)}\int_0^s \frac{1}{\sqrt{(1/2+b\cos(2s))(1/2-b\cos(2s))}}ds.\end{aligned} \tag{26}$$

Када $\mathbf{b = 0}$ добијамо константно решење $y_1(s) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Оно одговара Клифордовој[39] минималној дводимензионој хиперповрши тј. Клифордовом торусу $S^1(\sqrt{\frac{1}{2}}) \times S^1(\sqrt{\frac{1}{2}})$.

Када $\mathbf{b \to -\frac{1}{2}}$ овај случај се поклапа са случајем (24) када је $H = 0$ и $n = 2$ јер

$$y_1(s) = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\cos^2 s - \sin^2 s)} = \sin s,$$

и одговарајућа ротациона хиперповрш је јединична сфера S^2.

Слично се добија и у случају $\mathbf{b \to \frac{1}{2}}$ јер је тада решење $y_1(s) = \cos s$, а $\phi = const$, па је α велики круг који генерише $S^2(1)$.

Теорема 4.1. *Нека је $x : M^2 \hookrightarrow S^3(1)$ комплетан катеноид. Тада је x смештање (улагање).*

Доказ: Можемо да видимо да је за $s \neq 0$, $\dot{y}_1(s) \neq 0$ и да ако важи $y_1(s_1) = y_1(s_2)$ тада $s_2 = \pm s_1$. Потребно је да покажемо још да или y_3 или y_4 задовољава следећи услов

$$y_{2+i}(s) \neq y_{2+i}(-s) \text{ за све } s \neq 0,\ i = 1, 2. \tag{27}$$

Приметимо из (26) да је $\phi(s)$ непарна функција и да је $y_1(s) = y_1(-s)$ због парности функције cos. Из тога

$$y_3(-s) = \sqrt{1-y_1^2(-s)}\sin\phi(-s) = \sqrt{1-y_1^2(s)}(\sin(-\phi(s)) = -y_3(s),$$

за свако $s \neq 0$.

Тиме је овај доказ завршен. ∎

Минималним уложеним ротационим хиперповршима вишедимензионих јединичних сфера се бавио Отсуки и показао је следећу теорему чији је доказ изложен у следећем поглављу.

Теорема 4.2. *Једине компактне минималне уложене ротационе хиперповрши од S^{n+1} су Клифордов торус $S^1(\sqrt{\frac{1}{n}}) \times S^{n-1}(\sqrt{\frac{n-1}{n}})$ и геодезијске сфере S^n.*

[39] William Kingdon Clifford (1845 – 1879) - енглески математичар и филозоф, допринео је настанку геометријске алгебре.

5 Компактно уложене ротационе хиперповрши са $H_m = 0$

5.1 Карактеризација ротационих хиперповрши са $H_m = 0$

У §1 смо дефинисали H_m, нормализовану $m-$ту симетричну функцију главних кривина. Желимо да видимо како изгледају $n-$димензионе ротационе хиперповрши сфера $S^{n+1}(1)$ код којих је $H_m = 0$, $(1 \le m < n)$ и да испитамо које од њих су компактно уложене ротационе хиперповрши.

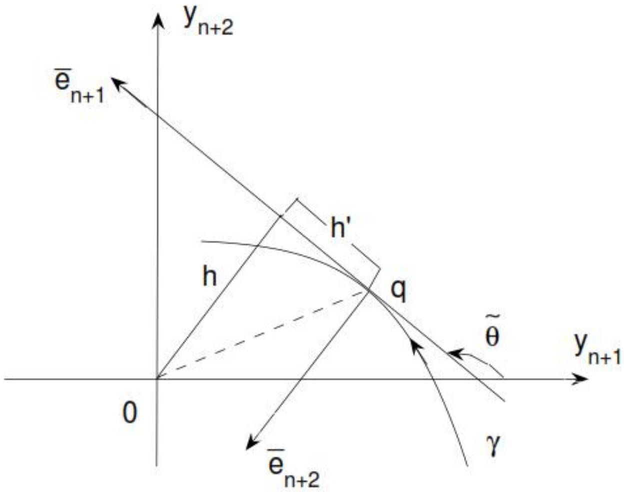
Нека је α профилна крива параметризована са (14) и нека је

$$x : M^n \hookrightarrow S^{n+1}(1) \subset \mathbb{R}^{n+2},$$
$$(s, t_1, ..., t_{n-1}) \mapsto (y_1(s)\varphi_1, ..., y_1(s)\varphi_n, y_{n+1}(s), y_{n+2}(s)),$$
$$\varphi_i = \varphi_i(t_1, ..., t_{n-1}), \quad \varphi_1^2 + ... + \varphi_n^2 = 1,$$

параметризација ротационе хиперповрши генерисане кривом α око $P^2 = [e_{n+1}, e_{n+2}]$. Раванску криву γ, која представља осу револуције, добили смо пројектовањем профилне криве на P^2. Можемо изабрати параметар $\tilde{s}$ као дужину лука криве γ. Нека је $\tilde{\theta}$ оријентисани угао између y_{n+1} осе и тангентног правца криве γ и нека је $h(\tilde{s})$ support функција криве γ (видети слику 5.1). Из (6) можемо закључити да

$$(d\tilde{s})^2 = (dy_{n+1})^2 + (dy_{n+2})^2 = (ds)^2 - (dy_1)^2, \tag{28}$$

$$\tan\tilde{\theta} = \frac{\dot{y}_{n+2}(s)}{\dot{y}_{n+1}(s)}. \tag{29}$$



Слика 5.1 Раванска крива γ.[40]

Ако је $H_m = 0$ $(m < n)$, онда из (18) важи

$$0 = C_m^n H_m = C_{m-1}^{n-1}\lambda^{m-1}\mu + C_m^{n-1}\lambda^m = 0,$$

тј.

$$\lambda^{m-1}\big((n-m)\lambda + m\mu\big) = 0. \tag{30}$$

Означимо са $y(s) = y_1(s)$.

Лема 5.1. *Ротациона хиперповрш M^n сфере $S^{n+1}(1)$ има $H_m = 0$ $(m < n)$ ако и само ако $y(s)$ задовољава следећу диференцијалну једначину:*

$$(n-m)(1 - y^2 - \dot{y}^2)^{\frac{m}{2}} - m(1 - y^2 - \dot{y}^2)^{\frac{m-2}{2}}(\ddot{y} + y)y = 0. \tag{31}$$

Доказ: Следи из (19) за $H_m = 0$. ∎

[40]Слика преузета из [15].

Лема 5.2. *Једначина (31) је еквивалентна са интегралом првог реда*

$$G_m(y,\dot{y}) = y^{n-m}(1-y^2-\dot{y}^2)^{\frac{m}{2}} = a = const. \tag{32}$$

за $m<n$.

Доказ: Следи из (20) за $H_m = 0$. ∎

Користимо рад [15] да изучимо (32). Посматрајмо нивоске криве функције G_m

$$G_m(u,v) = u^{n-m}(1-u^2-v^2)^{\frac{m}{2}}, \tag{33}$$

за $u>0$ и $u^2+v^2 \le 1$.
Мапирајмо отворену полураван $\{(u,v)\,|\,u>0\}$ са нивоском кривом $G_m = a$ (видети слику 5.2). Свака крива је глатка унија два графика

$$v = \pm\sqrt{1-u^2-\left(\frac{a}{u^{n-m}}\right)^{2/m}}, \tag{34}$$

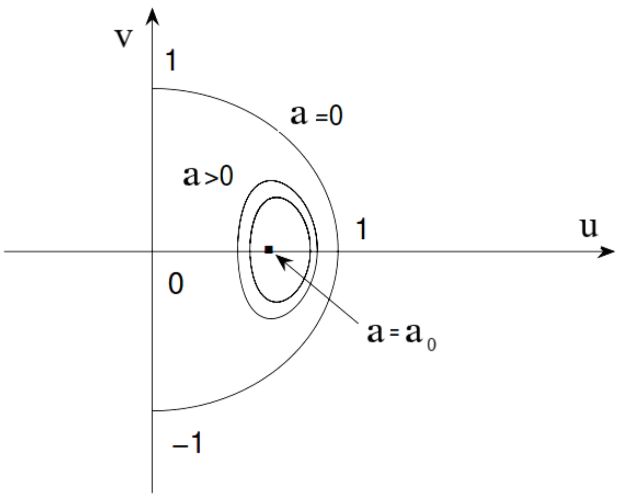
осим за ниво a_0 који одговара константном решењу $y=y_0$ једначине (31), где су

$$y_0^2 = \frac{n-m}{n}, \quad a_0 = \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}\left(\frac{n-m}{n}\right)^{\frac{m(n-m)}{2n}}. \tag{35}$$

Нивоска крива $G_m = a_0$ садржи јединствену критичну тачку криве G_m, која се налази на хоризонталној оси, што се може видети из градијента

$$grad\, G_m(u,v) = u^{n-m-1}(1-u^2-v^2)^{\frac{m-2}{2}}\big((n-m)(1-v^2)-nu^2, -muv\big). \tag{36}$$

За $a=0$, нивоска крива $u^2+v^2=1$ је полукружница. За $a \neq 0$, можемо видети да је нивоска крива затворена у отвореној полуравни, штавише, налази се у региону одређеном полукружницом.



Слика 5.2 Нивоске криве за $a \ge 0$.[41]

Разматраћемо раслојење на листове[42] отворене полуравни нивоским кривама $G_m = a$. Како G_m има максимум у a_0, имамо да $a \in [0, a_0]$. Можемо да закључимо да је свака крива на неком средњем нивоу a затворена и ограничена, па и **компактна** и њој одговарајуће решење $r(s)$ достиже јединствени минимум у $r_1 > 0$. Сада морамо размотрити следећа три случаја:

[41] Слика преузета из [15].
[42] енгл. foliation

5.1.1 Случај 1: $H_m = 0,\ a = a_0$;

Вредност $a = a_0$ из везе (35) имплицира да је

$$y = y_0, \qquad y_0 = \sqrt{\frac{n-m}{n}},$$

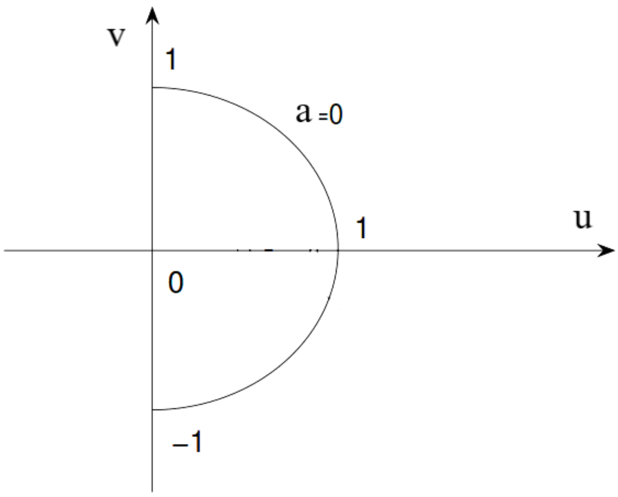
константно решење једначине (31), па су главне кривине једнаке

$$k_1 = ... = k_{n-1} = \lambda = -\sqrt{\frac{m}{n-m}},\ k_n = \mu = \sqrt{\frac{n-m}{m}},$$

из Леме 2.1 и (35).

Одговарајућа ротациона хиперповрш M^n одговара Римановом производу $S^{n-1}\big(\sqrt{\frac{n-m}{n}}\big) \times S^1\big(\sqrt{\frac{m}{n}}\big)$, што је показано у [19]. У претходној глави смо видели да је за $m = 1, n = 2$ одговарајући производ $S^1\big(\sqrt{\frac{1}{2}}\big) \times S^1\big(\sqrt{\frac{1}{2}}\big)$ Клифордов торус.

5.1.2 Случај 2: $H_m = 0,\ a = 0$;



Слика 5.3 Нивоска крива за $a = 0$.

Вредност $a = 0$, па из једначине (32) следи да је $y^2 + \dot{y}^2 = 1$. Интеграцијом $y^2 + \dot{y}^2 = 1$ уз почетни услов $y(0) = 0$, добијамо да је

$$y = \sin s,$$
$$\phi = const,$$

па је профилна крива велики круг који генерише тотално геодезијску $n-$сферу S^n.

5.1.3 Случај 3: $H_m = 0,\ a \in (0, a_0)$;

Ако је $a \in (0, a_0)$, тада имамо

$$y^2 + \dot{y}^2 < 1, \quad 0 < y < 1, \quad y \neq const. \tag{37}$$

Из $y(s) = y_1(s) = \cos r(s)$ следи да

$$0 < \cos r < 1, \quad 0 < \sin r < 1. \tag{38}$$

Користећи $y(s) = \cos r(s)$, једначина (15) се може записати као

$$\dot{\phi}^2 = \frac{1 - \dot{r}^2}{\sin^2 r} = \frac{1 - y^2 - \dot{y}^2}{(1 - y^2)^2}, \tag{39}$$

из (37) и (39) можемо закључити да

$$\dot{\phi} \neq 0, \quad \dot{r} < 1. \tag{40}$$

Можемо да видимо из (37) и Леме 2.1 да је $\lambda = -\frac{\sqrt{1-y^2-\dot{y}^2}}{y} \neq 0$, па из (30) следи да

$$(n-m)\lambda + m\mu = 0. \tag{41}$$

Из Леме 2.1 и (41) и чињенице да је $y(s) = y_1(s) = \cos r(s)$ закључујемо да је

$$\ddot{r} = (1-\dot{r}^2)(\cot r - \frac{n-m}{m}\tan r). \tag{42}$$

Без умањења општости, из (28), (38) и (40) имамо

$$\frac{d\tilde{s}}{ds} = \sqrt{1-\sin^2 r(\phi)\dot{r}^2} > 0. \tag{43}$$

Из (29) добијамо

$$\frac{d\tilde{\theta}}{ds} = \frac{\ddot{y}_{n+2}\dot{y}_{n+1} - \dot{y}_{n+2}\ddot{y}_{n+1}}{\dot{y}_{n+1}^2 + \dot{y}_{n+2}^2}.$$

Стога

$$\frac{d\tilde{\theta}}{d\tilde{s}} = \frac{d\tilde{\theta}}{ds}\frac{ds}{d\tilde{s}} = -\frac{B}{\sqrt{1-\dot{r}^2\sin^2 r}(\dot{y}_{n+1}^2 + \dot{y}_{n+2}^2)}, \tag{44}$$

где је $B := \ddot{y}_{n+2}\dot{y}_{n+1} - \dot{y}_{n+2}\ddot{y}_{n+1}$.

Даље ћемо доказати да је $\frac{d\tilde{\theta}}{d\tilde{s}} \neq 0$ да бисмо показали да можемо изабрати $\tilde{\theta}$ као параметар раванске криве γ. Из (44) следи да је довољно доказати да је $B \neq 0$. Директним рачуном, из (14), добијамо

$$\dot{y}_{n+1} = \dot{r}\cos r\cos\phi - \dot{\phi}\sin r\sin\phi, \quad \dot{y}_{n+2} = \dot{r}\cos r\sin\phi + \dot{\phi}\sin r\cos\phi,$$
$$B = \dot{r}^2\dot{\phi} + \dot{r}^2\dot{\phi}\cos^2 r + \dot{r}\ddot{\phi}\sin r\cos r - \ddot{r}\dot{\phi}\sin r\cos r + \dot{\phi}^3\sin^2 r. \tag{45}$$

Комбинујући (45) са (15), добијамо

$$B = \dot{\phi} + \dot{r}^2\dot{\phi}\cos^2 r + \dot{r}\ddot{\phi}\sin r\cos r - \ddot{r}\dot{\phi}\sin r\cos r. \tag{46}$$

Диференцирањем (15) добијамо

$$\dot{r}\ddot{r} + \dot{r}\dot{\phi}^2\sin r\cos r + \dot{\phi}\ddot{\phi}\sin^2 r = 0. \tag{47}$$

Морамо да размотримо два подслучаја.

Подлучај 3.1: $\dot{r} = 0$.

Ако заменимо $\dot{r} = 0$ у једначини (15), из (38) и (40) добијамо

$$\begin{aligned} B &= \dot{\phi} - \ddot{r}\dot{\phi}\sin r\cos r \\ &= \dot{\phi}\big(1 - \sin r\cos r(\cot r - \frac{n-m}{m}\tan r)\big) \\ &= \frac{n}{m}\dot{\phi}\sin^2 r \neq 0. \end{aligned}$$

Подлучај 3.2: $\dot{r} \neq 0$.

Ако је $\dot{r} \neq 0$, из (47) добијамо

$$\ddot{r} = -\frac{\sin^2 r}{\dot{r}}\dot{\phi}\ddot{\phi} - \dot{\phi}^2\sin r\cos r. \tag{48}$$

Тада из (15),(46) и (48) видимо да

$$\begin{aligned}B &= \dot\phi + \dot r^2\dot\phi\cos^2 r + \dot r\ddot\phi\sin r\cos r + \dot\phi\sin r\cos r\big(\frac{\sin^2 r}{\dot r}\dot\phi\ddot\phi + \dot\phi^2\sin r\cos r\big)\\ &= \dot\phi + \dot\phi\cos^2 r + \ddot\phi\big(\dot r\sin r\cos r + \frac{\sin^3 r\cos r}{\dot r}\dot\phi^2\big)\\ &= \dot\phi(1+\cos^2 r) + \ddot\phi\big(\dot r\sin r\cos r + \frac{\sin r\cos r}{\dot r}(1-\dot r^2)\big)\\ &= \dot\phi(1+\cos^2 r) + \ddot\phi\frac{\sin r\cos r}{\dot r}.\end{aligned}$$

Комбинујући (42) и (48), добијамо

$$\ddot\phi = -\frac{\dot r\dot\phi}{\sin r\cos r}(2\cos^2 r - \frac{n-m}{m}\sin^2 r). \tag{49}$$

Када заменимо (49) у претходну једначину, можемо да закључимо да

$$\begin{aligned}B &= \dot\phi(1+\cos^2 r) + \ddot\phi\frac{\sin r\cos r}{\dot r}\\ &= \dot\phi(1+\cos^2 r) - \dot\phi(2\cos^2 r - \frac{n-m}{m}\sin^2 r)\\ &= \frac{n}{m}\dot\phi\sin^2 r \neq 0.\end{aligned}$$

Стога закључујемо да $\frac{d\tilde\theta}{d\tilde s} \neq 0$.

Сада желимо да видимо како ће изгледати ротациона хиперповрш у овом случају. Како је $\frac{d\tilde\theta}{d\tilde s} \neq 0$, раванска крива γ се може записати у форми $h = h(\tilde\theta)$ (видети слику 5.1). Нека су са h' и h'' означени $\frac{dh}{d\tilde\theta}$ и $\frac{d^2h}{d\tilde\theta^2}$ респективно. Из дефиниције h имамо да је

$$h = (y_{n+1} - \frac{1}{\tan\tilde\theta}y_{n+2})\sin\tilde\theta = y_{n+1}\sin\tilde\theta - y_{n+2}\cos\tilde\theta,$$

па следи из претходног и из (29) да $h' = y_{n+1}\cos\tilde\theta + y_{n+2}\sin\tilde\theta$, одатле

$$y_{n+1} = h\sin\tilde\theta + h'\cos\tilde\theta,\ y_{n+2} = -h\cos\tilde\theta + h'\sin\tilde\theta$$

и тачке криве γ, $q(\tilde\theta)$, су дате са

$$\begin{aligned}q(\tilde\theta) &= (0,...,0,y_{n+1}(\tilde s), y_{n+2}(\tilde s))\\ &= (0,...,0,h\sin\tilde\theta + h'\cos\tilde\theta, h'\sin\tilde\theta - h\cos\tilde\theta).\end{aligned} \tag{50}$$

Из (50) следи

$$y_{n+1}^2(\tilde s) + y_{n+2}^2(\tilde s) = h^2 + (h')^2. \tag{51}$$

Из (6) и (51) имамо да је $y = y_1 = \sqrt{1-h^2-(h')^2}$.
Можемо да закључимо из (37) и (51) да

$$0 < h^2 + (h')^2 < 1. \tag{52}$$

Нека је $(\overline{e_1}, \overline{e_2}, ..., \overline{e_{n+2}})$ **покретни ортонормирани репер** простора $\mathbb{R}^{n+2}$ који испуњава следеће услове :

$$\overline{e_n} = (\varphi_1, ..., \varphi_n, 0, 0), \quad \varphi_1^2 + ... + \varphi_n^2 = 1, \tag{53}$$

$$\overline{e_{n+1}} = (0,...,0,\cos\tilde\theta, \sin\tilde\theta), \quad \overline{e_{n+2}} = (0,...,0,-\sin\tilde\theta,\cos\tilde\theta), \tag{54}$$

где је $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ ортогонална параметризација јединичне сфере. Нека је сада

$$d\overline{e_i} = \sum_{j=1}^{n}\overline\omega_{ij}\overline e_j, \quad \overline\omega_{ij} + \overline\omega_{ji} = 0. \tag{55}$$

Тада из (5), (50), (53) и (54) знамо да се позициони вектор p ротационе хиперповрши M^n у површи $S^{n+1}(1)$ може записати као

$$p = y\overline{e}_n + h'\overline{e}_{n+1} - h\overline{e}_{n+2} = q + y\overline{e}_n. \tag{56}$$

Дужина лука $\tilde{s}$ криве γ је дата са

$$d\tilde{s} = (h + h'')d\tilde{\theta}. \tag{57}$$

Користећи $\overline{e}_{n+1}$ и $\overline{e}_{n+2}$, имамо

$$q = h'\overline{e}_{n+1} - h\overline{e}_{n+2}, \quad dq = \overline{e}_{n+1}d\tilde{s}. \tag{58}$$

Из (54), (55) и (58) имамо

$$dp = y\sum_{j=1}^{n-1}\overline{\omega}_{nj}\overline{e}_j + dy\overline{e}_n + (h + h'')d\tilde{\theta}\overline{e}_{n+1}.$$

Ако ставимо да је

$$\begin{aligned} e_j &= \overline{e}_j, \quad e_n = \frac{y'\overline{e}_n + (h + h'')\overline{e}_{n+1}}{\sqrt{(y')^2 + (h + h'')^2}}, \\ \omega_j &= y\overline{\omega}_{nj},\ \omega_n = \sqrt{(y')^2 + (h + h'')^2}d\tilde{\theta}, \end{aligned} \tag{59}$$

где је $y' = \frac{dy}{d\tilde{\theta}}$ и $1 \leq j \leq n-1$.

Претходна једначина се може записати

$$dp = \sum_{i}^{n}\omega_i e_i. \tag{60}$$

Из (51), директним рачуном добијамо

$$h'(h + h'') + yy' = 0, \tag{61}$$

па из (61) следи

$$(y')^2 + (h + h'')^2 = \frac{1 - h^2}{y^2}(h + h'')^2.$$

Дакле, ω_n и e_n се могу записати као

$$\omega_n = \frac{\sqrt{1 - h^2}}{y}(h + h'')d\tilde{\theta} = \frac{\sqrt{1 - h^2}}{y}d\tilde{s}, \tag{62}$$

$$e_n = \frac{1}{\sqrt{1 - h^2}}(-h'\overline{e}_n + y\overline{e}_{n+1}). \tag{63}$$

Једноставним рачунањем, можемо да изаберемо јединични нормални вектор од M^n у S^{n+1} са

$$e_{n+1} = -\frac{h}{\sqrt{1 - h^2}}(y\overline{e}_n + h'\overline{e}_{n+1}) - \sqrt{1 - h^2}\overline{e}_{n+2}. \tag{64}$$

Ако узмемо $e_{n+2} = -p$ као нормални јединичан вектор од $S^{n+1}(1)$ у $\mathbb{R}^{n+2}$, тада је $\{e_1, ..., e_{n+2}\}$ база у $\mathbb{R}^{n+2}$ исте оријентације као $\{\overline{e}_1, ..., \overline{e}_{n+2}\}$.
Из (59) и (63) можемо да закључимо да

$$\begin{aligned} \omega_{jn+1} &= -\langle e_j, De_{n+1}\rangle = -\langle e_j, de_{n+1}\rangle \\ &= \frac{hy}{\sqrt{1 - h^2}}\langle e_j, d\overline{e}_n\rangle = \frac{hy}{\sqrt{1 - h^2}}\overline{\omega}_{nj} = \frac{h}{\sqrt{1 - h^2}}\omega_j, \end{aligned}$$

тј.

$$\omega_{jn+1} = \lambda\omega_j, \quad \lambda = \frac{h}{\sqrt{1 - h^2}}, \tag{65}$$

где је $1 \leq j \leq n-1$, а D означава коваријантни извод на $S^{n+1}(1)$. Тада добијамо

$$\begin{aligned}\omega_{nn+1} &= -\langle e_n, De_{n+1}\rangle = -\langle e_n, de_{n+1}\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-h^2}}\langle -h'\bar{e}_n + y\bar{e}_{n+1}, d(-e_{n+1})\rangle \\ &= \Big(\frac{h}{1-h^2}(yh''-y'h') - y\Big)d\tilde{\theta}.\end{aligned}$$

Користећи (61) добијамо

$$\omega_{nn+1} = \Big(\frac{h(h+h'')}{y} - \frac{y}{1-h^2}\Big)d\tilde{\theta} = \mu\omega_n. \tag{66}$$

Из (62) и (66), имамо

$$\mu = \frac{h}{\sqrt{1-h^2}} - \frac{1-h^2-(h')^2}{(h+h'')\sqrt{(1-h^2)^3}}. \tag{67}$$

Ако узмемо у обзир (65) и (67), услов (41) се може преформулисати са

$$(n-m)\frac{h}{\sqrt{1-h^2}} + m\Big(\frac{h}{\sqrt{1-h^2}} - \frac{1-h^2-(h')^2}{(h+h'')\sqrt{(1-h^2)^3}}\Big) = 0.$$

Тада важи

$$\frac{n}{m}h(1-h^2)h'' + (h')^2 + h^2 - 1 + \frac{n}{m}h^2(1-h^2) = 0. \tag{68}$$

Обратно, ако функција $h(\tilde{\theta})$ која задовољава (68) даје раванску криву у $\mathbb{R}^{n+2}$ са (50), тада са (56) добијамо ротациону хиперповрш $M^n \hookrightarrow S^{n+1}(1)$ са $H_m = 0$. Особине ове хиперповрши M^n у потпуности зависе од особина $h(\tilde{\theta})$.

У даљем раду, изучаваћемо особине обичних диференцијалних једначина (68) другог реда. Писаћемо $F = h^2 + (h')^2$. Из (52) закључујемо да $0 < F < 1$. Директним рачуном, имамо

$$\frac{1}{2}\frac{dF}{d\tilde{\theta}} = hh' + h'h'' = \frac{mh'}{nh(1-h^2)}(1-F),$$

одатле

$$\frac{dF}{1-F} = \frac{2m}{n}\Big(\frac{1}{h} + \frac{1}{2(1-h)} - \frac{1}{2(1+h)}\Big)dh. \tag{69}$$

Интеграљењем (69) добијамо

$$1 - F = C\Big(\frac{h^2}{1-h^2}\Big)^{-\frac{m}{n}}, \quad C = constant > 0,$$

тј.

$$\Big(\frac{dh}{d\tilde{\theta}}\Big)^2 = 1 - h^2 - C\Big(\frac{1}{h^2} - 1\Big)^{\frac{m}{n}}. \tag{70}$$

У овом случају, можемо закључити из $\lambda = \frac{h}{\sqrt{1-h^2}} \neq 0$ да је $h > 0$. Из (52) имамо да је $h < 1$. Одатле, посматрамо само она решења (68) за која важи

$$0 < h(\tilde{\theta}) < 1, \quad 0 < h^2 + (h')^2 < 1. \tag{71}$$

Из (37) имамо да $h \neq const$, у супротном $y \approx const$, а то је контрадикција. За неконстантна решења $h(\tilde{\theta})$ од (70) са условом (71), важи

$$1 - h^2 - C\Big(\frac{1}{h^2} - 1\Big)^{\frac{m}{n}} \geq 0,$$

тј. $R_0 \leq h \leq R_1$, $0 < R_0 < R_1 < 1$, где су R_0 и R_1 два решења једначине

$$1 - h^2 - C\Big(\frac{1}{h^2} - 1\Big)^{\frac{m}{n}} = 0.$$

Следи да

$$R_0 < \sqrt{\frac{m}{n}} < R_1.$$

Лема 5.3. *Функција $h(\tilde{\theta})$ је периодична функција у односу на параметар $\tilde{\theta}$.*

Доказ:

Било које решење $h(\theta)$ једначине (68) такво да је $0 < h < 1$ се може добити интеграцијом следеће једначине

$$\Big(\frac{dh}{d\tilde{\theta}}\Big)^2 = 1 - h^2 - C\Big(\frac{1}{h^2} - 1\Big)^{\frac{m}{n}},$$

где је C позитивна константа. Како је распон x када важи

$$1 - x - C\Big(\frac{1}{x} - 1\Big)^{\frac{m}{n}} \geq 0, \quad 0 < x < 1 \tag{72}$$

одређен тачкама криве $y = \big(\frac{1}{x} - 1\big)^{\frac{m}{n}}$ $(0 < x < 1)$ испод праве $y = \frac{1}{C}(1 - x)$, лако се види да ова крива сече праву кроз $(1, 0)$ у две тачке када

$$0 < C < (1 - \alpha)^{1-\alpha}\alpha^{\alpha}, \tag{73}$$

где је $\alpha = \frac{m}{n}$. Нека су $x-$координате те две тачке пресека x_0 и x_1, тада

$$0 < x_0 < \alpha < x_1 < 1. \tag{74}$$

Одатле добијамо

$$R_0 = \sqrt{x_0} \leq h(\tilde{\theta}) \leq R_1 = \sqrt{x_1}.$$

Минимум и максимум $h(\tilde{\theta})$ морају да буду баш R_0 и R_1 зато што у тим тачкама је $h'(\tilde{\theta}) = 0$. Штавише, $y = h(\tilde{\theta})$ је симетрична функција у односу на $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}_0,\ \tilde{\theta}_1$, где су $R_0 = h(\tilde{\theta}_0), R_1 = h(\tilde{\theta}_1)$. Из (70) можемо лако да закључимо да је $h(\tilde{\theta})$ периодична и да је њен минималан позитиван период дат са

$$T(C) = 2\int_{R_0}^{R_1} \frac{dh}{\sqrt{1 - h^2 - C(\frac{1}{h^2} - 1)^{\frac{m}{n}}}}. \tag{75}$$

∎

Означимо решење од (70) са $h(\tilde{\theta}, C)$ и хиперповрш коју ова функција потапа у $S^{n+1}(1)$ са $M^n(C)$.

$M^n(C)$ је компактно уложена ротациона хиперповрш у $S^{n+1}(1)$ ако и само ако минимални позитивни период $T(C)$ решења $h(\tilde{\theta}, C)$ јесте $\frac{2\pi}{k}$ $(k = 1, 2, ...)$.

5.2 Класификација уложених ротационих хиперповрши са $H_m = 0$

Теорема 5.1. *Не постоји ни једна друга компактно уложена ротациона хиперповрш S^{n+1} која има $H_m = 0\ (1 \leq m \leq n-1)$ осим сфера S^n и Римановог производа $S^{n-1}(\sqrt{\frac{n-m}{n}}) \times S^1(\sqrt{\frac{m}{n}})$, где је H_m нормализована m-та симетрична функција главних кривина, а $S^{n-1}(R)$ означава сферу димензије $(n-1)$ полупречника R.*

Доказ:

Довољно је да докажемо да је $\pi < T(C) < 2\pi$.

$\mathbf{T(C)} > \pi$:

Ако означимо са $h^2 = x,\ (R_0)^2 = x_0,\ (R_1)^2 = x_1,\ \frac{m}{n} = \alpha < 1$, добијамо

$$T(C) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x) - Cx^{1-\alpha}(1-x)^{\alpha}}}. \tag{76}$$

Нека је

$$g(x) = x(1-x) - Cx^{1-\alpha}(1-x)^{\alpha},$$

тада

$$g'(x) = 1 - 2x - \frac{C(1-\alpha-x)}{x^{\alpha}(1-x)^{1-\alpha}}, \tag{77}$$

$$g''(x) = -2 + \frac{C\alpha(1-\alpha)}{x^{1+\alpha}(1-x)^{2-\alpha}} > -2 \tag{78}$$

и

$$\{x \,|\, g(x) \geq 0,\ 0 < x < 1\} = [x_0, x_1].$$

Из (77) јасно је да функција $g(x)$ достиже максимум на интервалу $[x_0, x_1]$ у некој тачки x_2, $x_0 < x_2 < x_1$. Нека је $g(x_2) = b > 0$. Ако је сада

$$L(x) = (g'(x))^2 + 4g(x),$$

добијамо

$$L'(x) = 2(g''(x) + 2)g'(x).$$

Дакле, из (77) и (78) можемо да видимо да функција $L(x)$ расте на $[x_0, x_2]$, а опада на $[x_2, x_1]$ и њен максимум је у тачки x_2 тј. $L(x_2) = 4g(x_2) = 4b$, стога $(g')^2 < 4(b-g)$ на (x_0, x_2) и (x_2, x_1). Одатле добијамо

$$\begin{aligned} T(C) &= \int_{x_0}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{g(x)}} + \int_{x_2}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{g(x)}} \\ &= \int_{x_0}^{x_2} \frac{g'(x)dx}{\sqrt{g(x)(g'(x))^2}} - \int_{x_2}^{x_1} \frac{g'(x)dx}{\sqrt{g(x)(g'(x))^2}} \\ &> \int_0^b \frac{dg}{\sqrt{g(b-g)}} = \sin^{-1}\frac{2g-b}{b}\Big|_0^b = \pi. \end{aligned}$$

$\mathbf{T(C) < 2\pi}$:

Ако означимо са $h^2 = x,\ (R_0)^2 = x_0,\ (R_1)^2 = x_1,\ \frac{m}{n} = \alpha < 1$, добијамо

$$T(C) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x) - C\psi(1-x)}}, \tag{79}$$

где су

$$\psi(x) = x^{\alpha}(1-x)^{1-\alpha}, \quad \text{за } 0 < x < 1 \tag{80}$$

и

$$C = \psi(x_0) = \psi(x_1), \quad 0 < x_0 < \alpha < x_1 < 1. \tag{81}$$

Јасно је да

$$\psi(x)\psi(1-x) = x(1-x), \tag{82}$$

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = \frac{\alpha - x}{x(1-x)}\psi(x), \tag{83}$$

$$\frac{d\psi(1-x)}{dx} = \frac{1-\alpha-x}{x(1-x)}\psi(1-x). \tag{84}$$

Видимо да је $\psi(x)$ монотоно растућа на $0 < x < \alpha$ и монотоно опадајућа на $\alpha < x < 1$. Нека су $X_0(u)$ и $X_1(u)$ инверзне функције од функције $u = \psi(x)$ на $0 < x < \alpha$ и $\alpha < x < 1$ респективно.

Тада

$$\begin{aligned} T(C) &= \int_{x_0}^{\alpha} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x) - C\psi(1-x)}} + \int_{\alpha}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x) - C\psi(1-x)}} \\ &= \int_{x_0}^{\alpha} \frac{\sqrt{x^{1-\alpha}(1-x)^{\alpha}}}{\sqrt{x^{\alpha}(1-x)^{1-\alpha} - C}} x^{\alpha-1}(1-x)^{-\alpha} dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_{\alpha}^{x_1}\frac{\sqrt{x^{1-\alpha}(1-x)^{\alpha}}}{\sqrt{x^{\alpha}(1-x)^{1-\alpha}-C}}x^{\alpha-1}(1-x)^{-\alpha}dx\\
&=\int_{x_0}^{\alpha}\frac{\sqrt{x(1-x)}}{(\alpha-x)\sqrt{x^{\alpha}(1-x)^{1-\alpha}\big(x^{\alpha}(1-x)^{1-\alpha}-C\big)}}(\alpha-x)x^{\alpha-1}(1-x)^{-\alpha}dx\\
&+\int_{\alpha}^{x_1}\frac{\sqrt{x(1-x)}}{(\alpha-x)\sqrt{x^{\alpha}(1-x)^{1-\alpha}\big(x^{\alpha}(1-x)^{1-\alpha}-C\big)}}(\alpha-x)x^{\alpha-1}(1-x)^{-\alpha}dx\\
&=\int_{C}^{A}\frac{\sqrt{X_0(u)(1-X_0(u))}}{(\alpha-X_0(u))\sqrt{u(u-C)}}du+\int_{A}^{C}\frac{\sqrt{X_1(u)(1-X_1(u))}}{(\alpha-X_1(u))\sqrt{u(u-C)}}du\\
&=\int_{C}^{A}\frac{\sqrt{X_0(u)(1-X_0(u))(A-u)}}{(\alpha-X_0(u))\sqrt{u}}\frac{du}{\sqrt{(A-u)(u-C))}}\\
&+\int_{A}^{C}\frac{\sqrt{X_1(u)(1-X_1(u))(A-u)}}{(X_1(u)-\alpha)\sqrt{u}}\frac{du}{\sqrt{(A-u)(u-C))}}.
\end{aligned}
$$

Сада, претпоставимо да

$$
\frac{\sqrt{X_i(u)(1-X_i(u))(A-u)}}{|\alpha-X_i(u)|\sqrt{u}}<k_i \tag{85}
$$

за $C<u<A,\ i=0,1$. Добијамо

$$
T(C)<(k_0+k_1)\int_{C}^{A}\frac{du}{\sqrt{(A-u)(u-C)}}=(k_0+k_1)\pi. \tag{86}
$$

Доказаћемо да можемо да изаберемо вредности k_0 и k_1 тако да $k_0=k_1=1$.
Неједнакост (85) је еквивалентна са

$$
\sqrt{x(1-x)(A-\psi(x))}<k_i\,|\alpha-x|\,\sqrt{\psi(x)} \tag{87}
$$

за $x_0<x<\alpha$ и $\alpha<x<x_1$ респективно. Ако узмемо да је $\lambda=k_i$, (87) се може написати

$$
x(1-x)(A-\psi(x))<\lambda^2(\alpha-x)^2\psi(x),
$$

тј.

$$
x(1-x)A<\psi(x)\big(\lambda^2(\alpha-x)^2+x(1-x)\big). \tag{88}
$$

Ако ставимо да је $f_\lambda(x)=\frac{\lambda^2(\alpha-x)^2+x(1-x)}{\psi(1-x)}$, по (82), неједнакост (88) се може записати

$$
A<f_\lambda(x). \tag{89}
$$

Како функција $f_\lambda(x)$ узима позитивне вредности када је $0<x<1$ за свако $\lambda>0$, имамо

$$
f_\lambda(\alpha)=A \tag{90}
$$

и

$$
\begin{aligned}
\frac{f'_\lambda}{f_\lambda}&=\frac{-2\lambda^2(\alpha-x)+1-2x}{\lambda^2(\alpha-x)^2+x(1-x)}-\frac{1-\alpha-x}{x(1-x)}\\
&=\frac{g_\lambda(x)}{x(1-x)\big(\lambda^2(\alpha-x)^2+x(1-x)\big)},
\end{aligned}
$$

где су

$$
f'_\lambda=\frac{d(f_\lambda)}{dx},\quad g_\lambda(x)=(\alpha-x)\big(-\lambda^2\alpha(1-\alpha)+(1-\lambda^2)x(1-x)\big). \tag{91}
$$

Ако је $\lambda=1$ добијамо

$$
g_\lambda(x)=(x-\alpha)\alpha(1-\alpha). \tag{92}
$$

Када је $x \in (x_0, \alpha)$, добијамо да је $g_\lambda(x) < 0$ и тада је $f_\lambda(x)$ строго монотоно опадајућа функција по x на (x_0, α). Када је $x \in (\alpha, x_1)$, добијамо да је $g_\lambda(x) > 0$ и тада је $f_\lambda(x)$ строго монотоно растућа функција по x на (α, x_1). Дакле,

$$f_\lambda(x) > f_\lambda(\alpha) = A, \text{ за } x \in (x_0, \alpha) \bigcup (\alpha, x_1).$$

Дакле добили смо да

$$\pi < T(C) < 2\pi.$$

Из **Случаја 1**, **Случаја 2** и **Случаја 3** добијамо тражени резултат. ∎

Напомена 5.1. Како смо видели да је функција средње кривине нормализована прва симетрична функција главних кривина тј. $H = H_1$, доказ Теореме 4.2 се своди на доказ на Теореме 5.1 за $m = 1$.

Напомена 5.2. Леите [13] је доказала да постоји много комплетних имерзованих ротационих хиперповрши површи S^{n+1} са константном скаларном кривином $n(n-1)$ тј. $H_2 = 0$. Такође се бавила проблемом да ли постоје друге уложене хиперповрши од S^{n+1} са $H_2 = 0$ осим производа сфера. Теорема 5.1 даје парцијално решење овог проблема.

Последица 5.2. *Не постоје друге компактне уложене ротационе хиперповрши M од S^{n+1} са константном скаларном кривином $n(n-1)$ осим геодезијских сфера S^n и Римановог производа $S^{n-1}(\sqrt{\frac{n-2}{n}}) \times S^1(\sqrt{\frac{2}{n}})$.*

Доказ: Пошто је $H_2 = 0$ еквивалентно са чињеницом да M има константну скаларну кривину $n(n-1)$, доказ ове последице следи из Теореме 5.1. ∎

Закључак

У овом раду су дефинисане ротационе хиперповрши вишедимензионих сфера, реалних просторних форми константне кривине $c > 0$ и проучене су њихове основне особине. Тиме су генерализоване добро изучене ротационе дводимензионе површи у еуклидском простору $\mathbb{R}^3$ што представља основну сврху овог рада.

Израчунате су главне кривине ротационих хиперповрши од којих је једна вишеструкости бар $n-1$. Такође је показано да се за сваку одређену особину ових хиперповрши може поставити нелинеарна диференцијална једначина чија решења одређују ту хиперповрш.

Изложени су неки довољни услови да произвољна хиперповрш M^n, $n \geq 3$ вишедимензионе сфере буде ротациона. Главни резултат показује да ако за главне кривине $k_1, ..., k_n$ ове хиперповрши важи $k_1 = ... = k_{n-1} = -\lambda \neq 0$, $k_n = -\mu = -\mu(\lambda)$ и $\lambda - \mu \neq 0$, тада је $x(M^n)$ садржана у ротационој хиперповрши. Последица овог тврђења је да је *конформно равна* хиперповрш $x : M^n \hookrightarrow S^{n+1}(1)$ за $n \geq 4$, за коју важи $\mu = \mu(\lambda),\ \lambda \neq 0,\ \lambda - \mu \neq 0$ садржана у ротационој хиперповрши. За хиперповрши $x : M^n \hookrightarrow S^{n+1}(1)$ које су инваријанте $l-$параметарске групе изометрија сфере $S^{n+1}(1)$ је показано да ако l узима максималну дозвољену вредност тада или x има две главне кривине λ и μ, од којих је једна кодимензије један или је x садржана у изопараметричкој фамилији сфере $S^{n+1}(1)$.

Хиперповрши реалних просторних форми са константном средњом кривином су један од најстаријих предмета изучавања диференцијалне геометрије. У раду је дата детаљна анализа неких специјалних случајева оваквих хиперповрши, минималних ротационих хиперповрши S^3 и ротационих хиперповрши сфере $S^{n+1}(1)$ када је први интеграл диференцијалне једначине која одређује ову површ једнак нули.

Један од главних резултата овог рада је да су сфере S^n и Риманов производ $S^{n-1}(\sqrt{\frac{n-m}{n}}) \times S^1(\sqrt{\frac{m}{n}})$ једине $n-$димензионе компактно уложене ротационе хиперповрши од $S^{n+1}(1)$ са $H_m = 0$ $(1 \leq m \leq n-1)$. Специјално када је $m = 1$, једине компактно уложене минималне $n-$димензионе ротационе хиперповрши јединичне сфере $S^{n+1}(1)$ су сфере S^n и Клифордов торус $S^{n-1}\big(\sqrt{\frac{n-1}{n}}\big) \times S^1\big(\sqrt{\frac{1}{n}}\big)$.

Значајни математичари су се бавили класификацијом и карактеризацијом посебних фамилија ротационих хиперповрши, упркос томе постоји још увек велики број отворених питања и случајева који нису детаљно проучени.

Индекс појмова

Литература

[1] Bendito E., Bowick M.J., Medina A., *Delaunay Surfaces*, The Journal of Geometry and Symmetry in Physics **33** (2014), 27-45.

[2] Bishop R. L., O'Neill B., *Manifolds of negative curvature*, Transactions of the American Mathematical Society **145** (1969), 685-709.

[3] Brito F., Leite M.L., *A remark on rotational hypersurfaces of S^n*, Bulletin de la Socit Mathmatique de Belgique - Tijdschrift van het Belgisch Wiskundig Genootschap **42** (1990), 303-318.

[4] Cartan E., *Familles de surfaces isoparamtriques dans les espaces courbure constant*, Annali di Matematica Pura ed Applicata **17** (1938), 177-191.

[5] Chen B. Y., *Differential geometry of submanifolds of warped product manifolds $I \times_f S^{m-1}(k)$*, Journal of Geometry **91** (2009), 21-42.

[6] Cheng S.Y., Yau S.T., *Hypersurfaces with constant scalar curvature*, Mathematische Annalen **225** (1977), 195-204.

[7] Delaunay C. H., *Sur les surfaces de revolution dont la courbure moyenne est constante*, Journal de mathmatiques pures et appliques **6** (1841), 309-320.

[8] Dillen F.J.E., Versrtaelen L.C.A., *Handbook of Differential Geometry*, Nort Holland Elsevier, Amsterdam (1999).

[9] do Carmo M.P., Dajczer M., *Rotation hypersurfaces in spaces of constant curvature*, Transactions of the American Mathematical Society **277** (1983), 685-709.

[10] Hua Hou Z., *Hyperurfaces in a sphere with constant mean curvature*, Proceedings of the American Mathematical Society, **125** (1997), 1193-1196.

[11] Hynd R., Park S., McCuan J., *Symemtric Surfaces of constant mean curvature in S^3*, Pacific Journal of Mathematics **241** (2009), 69-115.

[12] Lawson H.B., *Complete minimal surfaces in S^3*, Annals of Mathematics **92** (1970), 335-374.

[13] Leite M.L., *Rotational hypersurfaces of space forms with constant scalar curvature*, Manuscripta Matematica **67** (1990), 285-304.

[14] Li H., *Hypersurfaces with constant scalar curvature in space forms*, Annals of Mathematics **305** (1996), 665-672.

[15] Li H., Wei G., *Compact embedded rotation hypersurfaces of S^{n+1}*, Boletim da Sociedade Brasileira de Matemtica **38** (2007), 81-99.

[16] Mori H., *Rotational hypersurfaces in S^n and H^n with constant scalar curvature*, Yokohama Mathematical Journal **39** (1992), 151-162.

[17] Nishikawa S., Maeda Y., *Conformally flat surfaces in a conformally flat Riemannian manifold*, Tohoku Mathematical Journal **26** (1974), 159-168.

[18] O'Neill B., *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press, San Diego, USA (1983).

[19] Otsuki T., *Minimal hypersurfaces in a Riemannian manifold of constant curvature*, American Journal of Mathematics **92** (1970), 145-173.

[20] Otsuki T., *On integral inequalities related with a certain non-linear differential equation*, Proceedings of the Japan Academy **48** (1972), 9-12.

[21] Palmas O., *Complete rotation hypersurfaces with H_k constant in space forms*, Boletim da Sociedade Brasileira de Matemtica **30** (1999), 139-161.

[22] Perdomo O. M., *Rotational Surfaces in S^3 with constant mean curvature*, Journal of Geometric Analysis (2012).

[23] Ryan P., *Homogeneity and curvature conditions for hypersurfaces*, Tohoku Mathematical Journal **21** (1969), 363-388.

[24] Sultana N., *Explicit Parametrization of Delaunay Surfaces in Space Forms via Loop Group Methods*, Department of Mathematics, Kobe University, Japan (2005).

[25] Wei G., *Rotational hypersurfaces of the sphere*, Proceedings of the Eleventh International Workshop of Diff. Geom.**11** (2007), 225-232.

[26] Антић М., *Диференцијална геометрија многострукости*, Математички факултет, Универзитет у Београду (2015).

[27] Хакоја М., *Ротационе површи константне средње кривине*, мастер рад, Математички факултет, Универзитет у Београду (2017).