Univerzitet u Beogradu

Dr Dragutin Đurović

MATEMATIČKA OBRADA ASTRONOMSKIH POSMATRANJA

BEOGRAD

MATEMATIČKA OBRADA ASTRONOMSKIH POSMATRANJA

PRIRODNO–MATEMATIČKI FAKULTET
UNIVERZITETA U BEOGRADU

Dr Dragutin Đurović

MATEMATIČKA OBRADA ASTRONOMSKIH POSMATRANJA

I izdanje

BEOGRAD, 1979.

P R E D G O V O R

Ova knjiga je namenjena studentima astronomije sa ciljem da im olakša savladjivanje nastavnog programa iz predmeta Matematička obrada astronomskih posmatranja. Neka poglavlja su izložena i malo šire nego što pomenuti program nalaže. Autor je imao u vidu da se u praktičnom radu astronoma oseća stalna potreba za knjigama ove vrste i da su one u literaturi vrlo retke, pa je želeo da malim povećanjem obima knjigu učini korisnom i za svršene astronome koji se bave obradom posmatranja.

Čitaoc će lako uočiti da se koncepcija ove knjige razlikuje od koncepcija drugih knjiga u kojima se izlažu ista poglavlja matematike. Za to postoji specifičan razlog. Naime, nastava iz predmeta Matematička obrada astronomskih posmatranja ima prevashodni cilj da studenti astronomije nauče kako se praktično koriste matematičke metode, a ne da svoju pažnju usmere ka izučavanju teorije tih metoda. Zbog toga su u ovoj knjizi date samo neizbežne teorijske osnove, najčešće bez uobičajenih matematičkih dokazivanja. Čitaoc koga ta dokazivanja interesuju upućuje se na odgovarajuću literaturu.

Ova knjiga se i po sadržaju razlikuje od ostalih specijalizovanih udžbenika matematike. Poglavlja koja su u njoj obradjena pripadaju različitim oblastima, a njihov izbor je izvršen tako da odgovaraju programu nastave iz predmeta Matematička obrada astronomskih posmatranja i najčešćim potrebama astronoma praktičara. Dakle, ova knjiga nije koncipirana kao uobičajeni udžbenik matematike, niti kao stručni priručnik, već kao knjiga koja je i jedno i drugo. Razume se, sa ovakvom koncepcijom neizbežno su izgubljeni poznati kvaliteti i jedne, i druge vrste knjiga. Medjutim, ako je ideja autora da primenu matematičkih metoda približi čitaocu makar i delimično ostvarena, ta cena nema nikakav značaj.

Primerima koji su detaljno razradjeni autor je želeo da učini jasnijom primenu nekih metoda koje se često koriste u praksi. U mnogim paragrafima primeri nedostaju, što je diktirano unapred odredjenim obimom knjige, ali se oni mogu naći u drugim matematičkim udžbenicima.

Autor je zahvalan dr Zoranu Ivkoviću i dr Jovanu Simovljeviću, profesorima Prirodno-matematičkog fakulteta u Beogradu, zbog dragocene stručne pomoći i saveta koji su nesumnjivo pomogli da se poboljša kvalitet ove knjige.

Beograd, 1978. Autor

SADRŽAJ

GLAVA II

OSNOVI MATRIČNE ALGEBRE

GLAVA III

OSNOVI TEORIJE VEROVATNOĆE I
MATEMATIČKE STATISTIKE

GLAVA IV

METODE FILTRIRANJA POSMATRANJA

PRILOZI

GLAVA I

OSNOVI NUMERIČKE ANALIZE

1. ZAOKRUGLJIVANJE BROJEVA. OPŠTA FORMULA ZA GREŠKU.

Iz posmatranja ponekad dobijamo brojeve sa više decimala nego što nam je potrebno za neki račun ili pak sa više decimala nego što sa instrumentom date tačnosti objektivno možemo da postignemo. Naprimer, trenutke posmatranja zvezda možemo registrovati sa tačnošću od hiljaditog ili desetohiljaditog dela sekunde, a zbog brojnih uticaja koji umanjuju tačnost instrumenta možemo verovati da su nam tek deseti i stoti delovi sekunde tačni. Jasno je da u takvim slučajevima nema smisla uzimati u obzir decimale višega reda. Zbog toga vršimo zaokrugljivanje brojeva koje se sastoji u tome da se izvestan broj cifara sa desne strane zameni nulom ili, ako se radi o decimalama, da se odbaci. Naprimer, broj 17231 se zaokrugljuje na 17230, ako nas interesuje tačnost do desetica, na 17200, ako nas interesuje tačnost do stotina, itd. Broj 12,54341 se zaokrugljuje na 12,5434, na 12,543, na 12,54, itd.

Prilikom zaokrugljivanja često je neizbežno da se poslednja cifra sa desne strane popravi za jedinicu. Ako, naprimer, broj 18576 zaokrugljujemo na desetice pisaćemo 18580, jer je broj 18576 bliži 18580 nego broju 18570, odnosno greška koja se čini zaokrugljavanjem uz popravku poslednje cifre koja ostaje je manja. Ako bismo taj isti broj zaokrugljivali na stotine, dobili bismo broj 18600, na hiljade - broj 19000, itd. Iz istih razloga, ako bismo zaokrugljavali broj 113,68789 dobili bismo brojeve: 113,6879, 113,688, 113,69 itd.

Ako je deo koji se prilikom zaokrugljavanja odbacuje, odnosno, zamenjuje nulom, manji od 0,5 jedinica poslednje decimale (cifre) koja ostaje, popravka te decimale (cifre) se ne vrši. Ako je veći - popravka se vrši. Naprimer, broj 12,553 se zaokrugljuje na 12,55 jer je deo koji se odbacuje 0,003, a on je manji od 0,5 x 0.01 = =0.005. Dalje, isti broj zaokrugljujemo na 12,6, jer je 0.053 veće od 0.5x0.1=0.05, itd.

Neodredjena situacija nastaje kada je deo koji se odbacuje jednak 0,5 jedinica poslednje cifre koja ostaje. Bilo da tu cifru popravimo, bilo da je ne popravimo, greška zaokrugljavanja će biti jednaka po apsolutnoj vrednosti. Da ta stvar ne bi ostala neodredjena, postignut je dogovor da se parne cifre ne popravljaju, a da se neparne popravljaju. Naprimer, brojevi 3,245 i 6,275 se zaokrugljuju na 3,24 i 6,28.

Rezultati dobijeni posle nekih računskih operacija sa približnim brojevima sadrže greške čija veličina zavisi od vrste računskih radnji i težina koje imaju približni brojevi. Naprimer, ako je broj $Z=X+Y$, a greške brojeva X i Y se nalaze u granicama $\pm E_x$ i $\pm E_y$, greška broja Z biće neko E_z koje zadovoljava nejednačinu $|E_z| \leq |E_x| + |E_y|$. Medjutim, greška broja $Z' = 100X+Y$ biće $|E_z'| \leq 100|E_x| + |E_y|$.

Neka su približni brojevi $x_1, x_2, \ldots, x_n$, čije su greške $\Delta x_1 = x_1' - x_1$, $\Delta x_2 = x_2' - x_2, \ldots$, $\Delta x_n = x_n' - x_n$ (x_i' - tačne vrednosti) argumenti neke funkcije $y=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Simbolom f, kao i kod opšte definicije funkcije, označen je neki skup operacija koje treba izvršiti sa brojevima x_i da bi se dobio broj y. Ako bismo te iste operacije izvršili sa brojevima x_i' dobili bismo neki broj $y' = f(x_1', x_2', \ldots, x_n')$. Razliku $y' - y$ možemo smatrati priraštajem funkcije kada se argumenti promene za Δx_i . Pretpostavimo da se ona može razviti u Tejlorov red:

$$f(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 + \ldots +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \Delta x_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \Delta x_1 \Delta x_2 + \ldots$$

Izvodi $\frac{\partial f}{\partial x_i}, \ldots$ se računaju za približne vrednosti argumenta: $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Priraštaji Δx_i su često dovoljno mali, a izvodi drugog i višeg reda funkcije $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ neveliki tako da se proizvodi $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j, \ldots$ mogu zanemariti. U takvim slučajevima, gornja granica greške je približno jednaka:

$$E_y = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \right| \qquad (1)$$

Da bismo znali sa koliko cifara treba računati funkciju y, potrebno je da se prethodno izračuna E_y. Ako, naprimer, utvrdimo da je greška E_y reda veličine 0.001, nema nikakvog opravdanja da y računamo sa više od četiri decimale.

U literaturi ćemo ponekad pročitati da se pojedine veličine daju sa tačnošću koja naizgled nema nikakvog smisla, jer je tačnost posmatranja tih veličina daleko manja. Naprimer, rektascenzija srednjeg sunca prema Njukombu je jednaka:

$$\alpha(t) = 18^h\, 38^m\, 45^s{,}836 + 236^s{,}555\,36049\, d + 0^s{,}0929\, T^2, \qquad (2)$$

u kojoj je T vreme izraženo u julijanskim stolećima (36525 srednjih dana) koje je proteklo od trenutka t_o=1900. godina, 0. januar, 12^h svetskog vremena (dan julijanske periode t_o=241 5020,0) do datog trenutka t, a d predstavlja isti taj interval izražen u srednjim sunčanim danima.

Drugi i treći član sa desne strane poslednje jednačine dati su sa tačnošću koja je za nekoliko redi veličine veća od tačnosti najsavremenijih posmatranja. Pitanje koje se nameće je: da li to ima smisla?

Ako bi drugi član bio dat na tri decimale ili ako bismo odbacili poslednjih pet decimala, prilikom računanja $\alpha(t)$ za t=1975. godina, 1. april, 0^h svetskog vremena (dan julijanske periode: t=244 2503.5) greška drugoga člana bi bila: $E_2 = 0^s{,}000\ 36049\,(244\ 2503{,}5 - 241\ 5020{,}0) = 9^s{,}908$. Ako se želi približno ista tačnost svih članova poslednje jednačine, što je jedino logično, njeni koeficijenti moraju imati različitu tačnost, jer su im "težine" ($1, d, T^2$) različite.

Pitanje koje se može postaviti je do kog datuma će greška drugog člana jednačine (2) ostati u granicama $\pm\, 0^s{,}0005$, koliko iznosi i tačnost prvog člana?

Odgovor na to pitanje se nalazi vrlo jednostavno. Pošto je poslednja decimala koeficijenta uz d netačna za najviše $\pm\, 0{,}000\ 000\ 005$, potrebno je da bude ispunjen uslov: $0^s{,}000\ 000\ 005 \cdot d \leq 0^s{,}0005$. Rezultat je: $d \leq 10^5$ dana. Drugim rečima, sve do trenutka t=241 5020,0+100 000=341 5020,0 tačnost drugoga člana će ostati u granicama od $\pm\, 0^s{,}000.5$.

U matematičkom smislu, gornja diskusija o tačnosti drugoga člana je iscrpljena. Medjutim, praktičar se mora još upitati kako da obezbedi tako veliku tačnost koeficijenata uz d i uz T^2.

Ako se posmatranja obavljaju više godina i ako su masovna, može se postići zadovoljavajuća tačnost. Pretpostavimo da su nam poznate rektascenzije Sunca sa tačnošću od samo $\pm\, 0^s{.}001$, ali u trenucima t_1 i t_2 koje deli razmak od, recimo, 10 godina (3652,5 dana). Ako se zanemari treći član jednačine (2), koeficijent uz d se može naći iz relacije: $k = (\alpha_2 - \alpha_1)/3652{,}5$. Pošto je greška brojitelja po apsolutnoj vrednosti manja ili jednaka $0^s{,}002$, greška k će biti manja od $0^s{,}002/3652{,}5 = 0^s{,}000\ 0005$. Dakle, u datom slučaju i te kako ima smisla da se koeficijent uz d računa sa 6 decimala.

Često je neophodno da se oceni tačnost koju treba obezbediti kod argumenata x_i da bi se dobila unapred zadata tačnost funkcije y.

U izrazu za E_y poznate su "težine" $P_i = \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|$ i sama greška E_y. Jasno je da se postavljeni zadatak ne može rešiti bez dopunskih uslova. Ako se ništa nezna o medjusobnim odnosima Δx_i, najlogičnije je da se podje od toga da je doprinos svakoga člana $P_i \ \Delta x_i$ isti: $P_i \ | \Delta x_i | = E_y/n$. Iz ove relacije možemo lako odrediti gornju granicu Δx_i greške svakog od argumenata.

Zadatak ovoga tipa rešavamo svaki put kada koristimo tablicu u kojoj je data funkcija $y=f(x)$ sa ciljem da odredimo argument x. Ako koristimo tablicu trigonometrijskih funkcija, tablicu logaritama, itd., moramo voditi računa o tome da se ove funkcije daju sa jednim brojem decimala u širim intervalima argumenta, a da tačnost argumenta neprekidno varira. Ako je, naprimer, tg x dat sa 5 decimala za $x_1=1^o$ i za $x_2=71^o$, tačnost x_1 i x_2, odredjenih iz tgx neće biti ista. Po formuli za grešku nalazimo $E_y=\sec^2 x \ E_x$, pa je $E_x=E_y \cos^2 x$. Pošto je y dato sa 5 decimala, $E_y=0{,}000\,005$, pa je $E_{x_1}=0{,}000\,005 \cdot 0{,}999696 = 0{,}000\,005$ radijana ili 1,"03, a $E_{x_2}=0{,}000\,005 \cdot 0{,}105\,994 = 0{,}000\,00053$ radijana ili 0,"11.

2. VERIŽNI (LANČANI) RAZLOMCI

Izraz oblika:

$$R = a_o + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \dots}}}$$

naziva se verižni ili lančani razlomak. Skraćeno, on se zapisuje u obliku: $R = [a_o; b_1/a_1, b_2/a_2, \dots]$. Obični razlomci: $a_o/1$, b_k/a_k ($k=1,2,\dots$) nazivaju se karikama lančanog razlomka.

Lančani razlomak može biti konačan ili beskonačan. Konačni razlomak od n karika se zapisuje kao: $[a_o; b_k/a_k]^n$, a beskonačni sa $[a_o; b_k/a_k]^{\infty}$.

Konačni lančani razlomci mogu da se transformišu u obične na taj način što se idući s desna postepeno obave naznačena sabiranja i delenja. Naprimer, prilikom rešavanja razlomka:

$$2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3}{5 + \cfrac{7}{2 + \cfrac{3}{5}}}}$$

redosled računskih radnji je sledeći: $2+\frac{3}{5}=\frac{13}{5}$, $7:\frac{13}{5}=\frac{35}{13}$, $5+\frac{35}{13}=\frac{100}{13}$, $3:\frac{100}{13}=\frac{39}{100}$, $2+\frac{39}{100}=\frac{239}{100}$, $1:\frac{239}{100}=\frac{100}{239}$, $2+\frac{100}{239}=\frac{578}{239}$.

Kada se govori o beskonačnim lančanim razlomcima značajno pitanje (kao i kod redova) je pitanje njihove konvergencije.

Uzmimo, naprimer, beskonačni razlomak $[a_o; b_1/a_1, b_2/a_2, \dots]$ i posmatrajmo njegov konačni deo $R_n = [a_o; b_1/a_1, \dots, b_n/a_n]$. Kao što smo napred pokazali, R_n se može predstaviti u obliku običnog razlomka : $R_n = P_n/Q_n$ ($n=1,2,3,\dots$). Ako posmatramo niz:

P_n/Q_n ($n=1,2,3,\ldots$) čiji je $\lim_{n\to\infty} P_n/Q_n$ jednak nekoj konačnoj vrednosti, kaže se da je verižni razlomak R_n konvergentan.

Prema Košijevom kriterijumu niz: P_1/Q_1, $P_2/Q_2, \ldots$ je konvergentan ako je za svaki ceo pozitivni broj k ispunjen uslov:

$$\left| \frac{P_{n+k}}{Q_{n+k}} - \frac{P_n}{Q_n} \right| < \varepsilon ,$$

gde je ε mali pozitivni broj.

Ovaj uslov ne mora biti ispunjen i za svako n, već počev od nekog $n > N_\varepsilon$.

Prilikom ispitivanja konvergencije lančanih razlomaka primenjuju se pravila konvergencije nizova. Ovde o njima nećemo govoriti.

Značaj lančanih razlomaka je naročito u tome što se neke funkcije mogu razlagati u lančane razlomke i odredjivanje vrednosti tih funkcija svesti na rešavanje verižnih razlomaka. Na taj način se mogu dobiti rešenja koja je teško postići drugim metodama.

Neka je $R(x)$ racionalna funkcija oblika:

$$R(x) = \frac{a_o+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n}{b_o+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n} .$$

$R(x)$ se može predstaviti u obliku:

$$R(x) = \frac{a_o}{b_o+xR_1(x)} ,$$

gde je $R_1(x)$ definisano jednačinom:

$$R_1(x) = \frac{(a_ob_1-b_oa_1)+(a_ob_2-b_oa_2)x+\ldots+(a_ob_n-b_oa_n)x^n}{a_o+a_1x+\ldots+a_nx^n} =$$

$$= \frac{c_o+c_1x+\ldots+c_nx^n}{a_o+a_1x+\ldots+a_nx^n} .$$

Nastavljajući ovaj postupak, $R_1(x)$ predstavljamo u obliku:

$$R_1(x) = \frac{c_o}{a_o + xR_2(x)} ,$$

gde je $R_2(x)$ jednako:

$$R_2(x) = \frac{d_o + d_1x + \ldots + d_nx^n}{c_o + c_1x + \ldots + c_nx^n} , \text{ itd.}$$

Na taj način dobijamo:

$$R(x) = \cfrac{a_o}{b_o + x \cfrac{c_o}{a_o + x \cfrac{d_o}{c_o + x \ldots\ldots}}}$$

Iz izloženog postupka logika formiranja koeficijenata c_i . d_i se jasno vidi.

U Teorijskoj astronomiji je poznata Hanzenova metoda odredjivanja odnosa površine sektora izmedju dva radijus potega planete i površine trougla obrazovanog tim radijus-potezima i duži koja spaja njihove vrhove. Ako se pomenuti odnos površina predstavi u obliku:

$$y = 1 + \gamma \quad ,$$

gde je γ mali pozitivni broj koji treba odrediti, i ako se tako dobijeno y stavi u poznatu Gausovu jednačinu, posle zanemarivanja članova III reda po γ, dolazi se do izraza:

$$\gamma\left(1 + \frac{11}{10}\gamma\right) = \frac{10}{9}h.$$

Obično se gornja jednačina rešava preko brzo konvergentnog verižnog razlomka:

$$\gamma = \cfrac{\frac{10}{9}h}{1 + \frac{11}{10}\gamma} = \cfrac{\frac{10}{9}h}{1 + \cfrac{\frac{11}{10}\,\frac{10}{9}h}{1 + \cfrac{\frac{11}{10}\,\frac{10}{9}h}{1 + \ldots\ldots\ldots}}}$$

Jasno je da se razlomak razvija tako što se umesto γ stavlja:

P_n/Q_n ($n=1,2,3,\ldots$) čiji je $\lim_{n\to\infty} P_n/Q_n$ jednak nekoj konačnoj vrednosti, kaže se da je verižni razlomak R_n konvergentan.

Prema Košijevom kriterijumu niz: P_1/Q_1, $P_2/Q_2, \ldots$ je konvergentan ako je za svaki ceo pozitivni broj k ispunjen uslov:

$$\left| \frac{P_{n+k}}{Q_{n+k}} - \frac{P_n}{Q_n} \right| < \varepsilon ,$$

gde je ε mali pozitivni broj.

Ovaj uslov ne mora biti ispunjen i za svako n, već počev od nekog $n \geq N_\varepsilon$.

Prilikom ispitivanja konvergencije lančanih razlomaka primenjuju se pravila konvergencije nizova. Ovde o njima nećemo govoriti.

Značaj lančanih razlomaka je naročito u tome što se neke funkcije mogu razlagati u lančane razlomke i odredjivanje vrednosti tih funkcija svesti na rešavanje verižnih razlomaka. Na taj način se mogu dobiti rešenja koja je teško postići drugim metodama.

Neka je $R(x)$ racionalna funkcija oblika:

$$R(x) = \frac{a_o+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n}{b_o+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n} .$$

$R(x)$ se može predstaviti u obliku:

$$R(x) = \frac{a_o}{b_o+xR_1(x)} ,$$

gde je $R_1(x)$ definisano jednačinom:

$$R_1(x) = \frac{(a_ob_1-b_oa_1)+(a_ob_2-b_oa_2)x+\ldots+(a_ob_n-b_oa_n)x^n}{a_o + a_1x + \ldots + a_nx^n} =$$

$$= \frac{c_o+c_1x+\ldots+c_nx^n}{a_o+a_1x+\ldots+a_nx^n} .$$

Nastavljajući ovaj postupak, $R_1(x)$ predstavljamo u obliku:

$$R_1(x) = \frac{c_o}{a_o + xR_2(x)} \text{ .,}$$

gde je $R_2(x)$ jednako:

$$R_2(x) = \frac{d_o + d_1 x + \ldots + d_n x^n}{c_o + c_1 x + \ldots + c_n x^n} \text{ , itd.}$$

Na taj način dobijamo:

$$R(x) = \cfrac{a_o}{b_o + x \cfrac{c_o}{a_o + x \cfrac{d_o}{c_o + x \ldots\ldots}}}$$

Iz izloženog postupka logika formiranja koeficijenata c_i . d_i se jasno vidi.

U Teorijskoj astronomiji je poznata Hanzenova metoda odredjivanja odnosa površine sektora izmedju dva radijus potega planete i površine trougla obrazovanog tim radijus-potezima i duži koja spaja njihove vrhove. Ako se pomenuti odnos površina predstavi u obliku:

$$y = 1 + \gamma \quad ,$$

gde je γ mali pozitivni broj koji treba odrediti, i ako se tako dobijeno y stavi u poznatu Gausovu jednačinu, posle zanemarivanja članova III reda po γ , dolazi se do izraza:

$$\gamma \left(1 + \frac{11}{10}\gamma\right) = \frac{10}{9} h.$$

Obično se gornja jednačina rešava preko brzo konvergentnog verižnog razlomka:

$$\gamma = \frac{\frac{10}{9} h}{1 + \frac{11}{10}\gamma} = \cfrac{\frac{10}{9} h}{1 + \cfrac{\frac{11}{10} \, \frac{10}{9} h}{1 + \cfrac{\frac{11}{10} \, \frac{10}{9} h}{1 + \ldots\ldots\ldots}}}$$

Jasno je da se razlomak razvija tako što se umesto γ stavlja:

$$\frac{\frac{10}{9}h}{1+\frac{11}{10}\nu}\,.$$

Do rešenja Hanzenove jednačine se dolazi uzimajući da je ispod poslednje razlomačke crte verižnog razlomka jedinica.

3. PRIBLIŽNO REŠAVANJE ALGEBARSKIH I TRANSCEDENTNIH JEDNAČINA. OPŠTE ODREDBE.

Poznato je da su opšte metode egzaktnog rešavanja jednačina primenljive na vrlo mali broj tipova jednačina, a da se u praksi srećemo sa problemom rešavanja i onih tipova jednačina na koje se ne mogu primeniti poznata opšta pravila. Čak ni kod običnih polinoma petog i višeg stepena nismo u stanju da odredimo nule u svim mogućim slučajevima. Prinudjeni smo da svaki konkretni slučaj posebno analiziramo i tražimo da li koeficijenti polinoma ispunjavaju odredjene posebne uslove na osnovi kojih bismo mogli da odredimo nule.

Osim nepostojanja opštih pravila za rešavanje svih mogućih jednačina koje srećemo u praksi, metode približnog rešavanja su interesantne i zbog toga što se ponekad do približnih rešenja zadovoljavajuće tačnosti dolazi brzo i lako. Osim toga, koeficijenti jednačina mogu da predstavljaju rezultate dobijene iz posmatranja - brojeve koji sadrže greške -, pa prilikom rešavanja takvih jednačina isterivanje nekakve visoke tačnosti nema mnogo smisla.

Tehnika iznalaženja realnih nula funkcije $y=f(x)$, definisane u intervalu $[a,b]$, sadrži dve etape. U prvoj etapi se odredjuju bliže okoline nula, a u drugoj etapi vrši se postepeno približavanje vrednostima nula. Ovde se pretpostavlja da se nule mogu razdvojiti. To znači da u jednoj konačno maloj okolini $[\alpha, \beta]$ ne postoje dve ili više nula.

U matematičkoj analizi je poznata teorema po kojoj ako neprekidna funkcija $y=f(x)$ ima suprotne znake u tačkama $x_1=\alpha$ i $x_2=\beta$, u intervalu $[\alpha, \beta]$ nalazi se bar jedna nula date funkcije. Neka je $f(\xi)=0$, pri čemu je $\xi \in [\alpha, \beta]$. Ako je u intervalu $[\alpha, \beta]$ $f(x)$ stalno rastuća ili stalno opadajuća funkcija, ξ je jedina nula u tom intervalu. Ovaj uslov ćemo izražavati nejednačinama: $f'(x)>0$ ili $f'(x)<0$, za svako $x \in [\alpha, \beta]$.

Praktična primena gornjih teorema počinje analizom znakova $f(x)$ za niz vrednosti argumenta. Neka su: $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n$ ($x_1 = a$, $x_n = b$) vrednosti argumenta za koje računamo $f(x_1)$, $f(x_2), \ldots, f(x_n)$. Nije značajno da li su x_i ekvidistantne vrednosti ili nisu, ali ako se nezna ništa bliže o rasporedu nula, najprirodnije je da x_i predstavljaju ekvidistantne vrednosti.

Sledeći korak je uporedjenje znakova $f(x_1)$ i $f(x_2)$, $f(x_2)$ i $f(x_3)$, itd. Čim se utvrdi da su znaci $f(x_k)$ i $f(x_{k+1})$ suprotni, to je signal da se u intervalu $[x_k, x_{k+1}]$ nalazi bar jedna nula. Ako smo identifikovali podintervale u kojima se nalaze sve nule $f(x)$, prva etapa računanja je završena.

U drugoj etapi, u kojoj se postiže odredjivanje bližih okolina nula, primenjuju se različite metode od kojih ćemo ukratko izložiti pet: grafičku, metodu delenja bliže okoline na jednake podintervale, metodu tetiva, metodu tangenti i metodu iteracije (sukcesivnih aproksimacija).

Pre nego što izložimo svaku od pomenutih metoda, pažnju čitaoca skrećemo na to da je ocena tačnosti odredjivanja nule prema kriterijumu koliko je $f(x)$ blizu nule nepravilna. Kod sporo rastućih funkcija u široj okolini tačne vrednosti nule $x = \xi$, $f(x)$ je blisko nuli. Kad bi $f(x)$ bila brzo rastuća funkcija u okolini $x = \xi$, sa malim odstupanjem od ξ dobili bismo $f(x)$ koje znatno odstupa od nule.

Za ocenu tačnosti približne nule x_o bolje je koristiti kriterijum koji sledi iz Lagranžove teoreme:

$$f(\xi) - f(x_o) = (\xi - x_o) f'(\eta) ,$$

gde je $\eta \in [x_o, \xi]$.

Pošto je $f(\xi) = 0$, to je:

$$x_o - \xi = \frac{f(x_o)}{f'(\eta)} \qquad (1)$$

Izvod $f'(\eta)$ se procenjuje ili se procenjuju granice u kojima se on nalazi, pa se pomoću jednačine (1) odredjuju granice mogućih odstupanja x_o od ξ.

3.1. GRAFIČKA METODA PRIBLIŽNOG REŠAVANJA JEDNAČINA

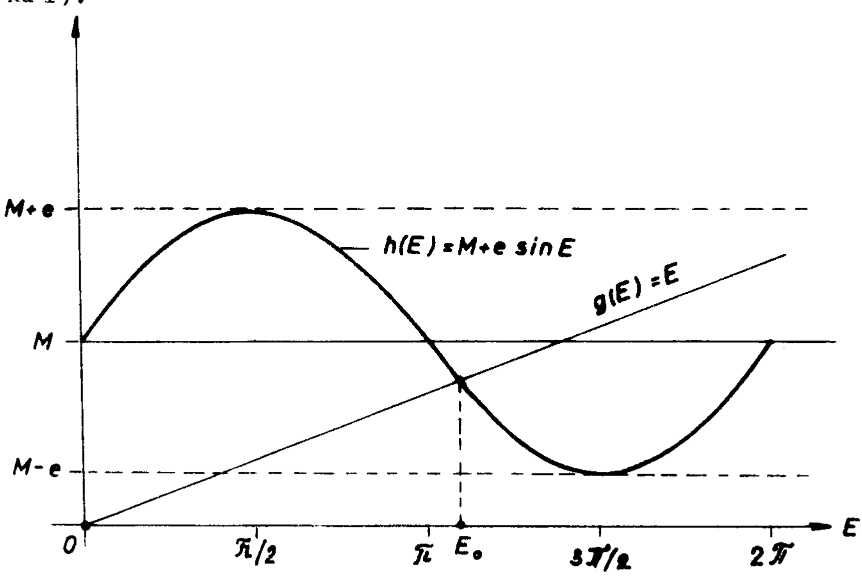
Ako se $f(x)=0$ može predstaviti u obliku:

$$g(x)=h(x),$$

gde su $g(x)$ i $h(x)$ dve funkcije koje se mogu jednostavno grafički predstaviti, nule funkcije $f(x)$ se mogu odrediti kao apscise tačaka preseka linije $y=g(x)$ i linije $y=h(x)$. Kao primer, uzećemo Keplerovu jednačinu:

$$E = M + e\sin E .$$

Kao što znamo, problem rešavanja ove jednačine sastoji se u tome da se za dato M i dato e nadje E koje zadovoljava tu jednačinu. Ako gornju jednačinu razložimo na $g(E)=E$ i $h(E)=M+e\sin E$, presek prave $y=E$ i sinusoide $y=M+e\sin E$ imaće apscisu E_o koja predstavlja približno rešenje Keplerove jednačine (vidi sliku 1).

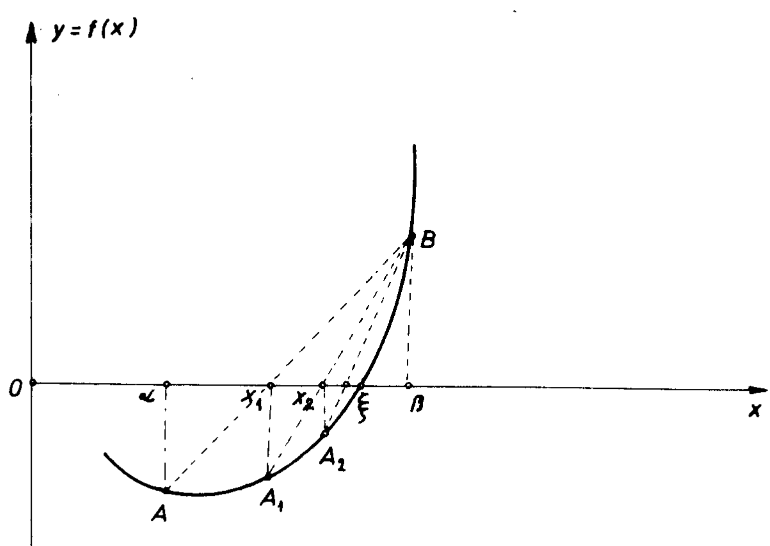


3.2. METODA DEOBE NA JEDNAKE PODINTERVALE

Ako su α i β granice intervala za koje je $f(\alpha)\ f(\beta) < 0$, odnosno, za koje $f(x)$ ima suprotne znake, u intervalu $[\alpha, \beta]$ se nalazi bar jedna nula $f(x)$. Da bismo našli tačnije rešenje, interval $[\alpha, \beta]$ delimo na dva jednaka dela i analiziramo znake $f(\alpha)$, $f(\frac{\alpha+\beta}{2})$ i $f(\beta)$. Ako su prve dve raznoznačne, nula se nalazi u intervalu $(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2})$. Postupak deobe poslednjeg podintervala se nastavlja na isti način i tako sve više sužava okolina prave nule ξ. To se radi sve dotle dok se ne postigne potrebni stepen tačnosti.

3.3. METODA TETIVA

Ako su $f(\alpha)$ i $f(\beta)$ dve raznoznačne vrednosti $f(x)$, nula funkcije se može približno odrediti ako se umesto deobe intervala $[\alpha, \beta]$ na dva jednaka dela izvrši deoba na delove koji su proporcionalni $f(\alpha)$ i $f(\beta)$ (vidi sliku 2):



Sl. 2.

$$\frac{x_1 - \alpha}{\beta - x_1} = \frac{f(\beta)}{f(\alpha)} \quad .$$

Ustvari, iz ove jednačine se odredjuje x_1 - prva približna vrednost nule.

Kada smo odredili x_1 analiziramo znake $f(x_1)$, $f(\alpha)$ i $f(\beta)$. U drugoj aproksimaciji "delimo" onaj podinterval na čijim granicama $f(x)$ ima suprotne znake. Neka je to podinterval $[\alpha, x_1]$. Tačnija vrednost nule x_2 se odredjuje iz relacije:

$$\frac{x_2 - \alpha}{x_1 - x_2} = \frac{f(\alpha)}{f(x_1)} \quad , \text{ itd.}$$

Ako je okolina nule $x = \xi$ dovoljno mala, luk krive AB će se skoro poklopiti sa tetivom AB, pa će i njihovi preseci sa x-osom biti blizu.

Relativno lako može da se dokaže da ovaj postupak, kao i prethodni, vodi ka rešenjima koja konvergiraju ka ξ.*
Ta se činjenica matematički iskazuje relacijom:

$$|x_n - \xi| < |x_{n-1} - \xi| \; ,$$

gde je x_n približna nula odredjena u n-toj deobi intervala $[\alpha, \beta]$.

3.4. METODA TANGENTI (NJUTNOVA METODA)

Ako je x_1 poznata približna vrednost nule neprekidne funkcije $f(x)$ čiji izvodi $f'(x)$ i $f''(x)$ ne menjaju znak na celom intervalu $[\alpha, \beta]$ u kome se nalazi prava nula ξ , sledeću tačniju vrednost nule možemo odrediti pomoću Tejlorovog reda u kome ćemo zanemariti drugi i više stepene $\Delta x = \xi - x_1$:

$$f(\xi) = f(x_1 + \Delta x) \approx f(x_1) + \Delta x_1 \, f'(x_1) = 0. \qquad (2)$$

---

* Demidovič B.P. - Maron I.A., Osnovi vičislitelnoj matematiki, Moskva, 1966.

Iz poslednje jednačine odredjujemo prvu popravku:

$$\Delta x_1 = - f(x_1)/f'(x_1).$$

Sa datim x_1 i Δx_1 nalazimo tačniju vrednost nule x_2:

$$x_2 = x_1 + \Delta x_1 = x_1 - f(x_1)/f'(x_1).$$

U sledećoj aproksimaciji, umesto x_1 u jednačinu (2) stavljamo x_2:

$$f(x_2) + \Delta x_2 f'(x_2) = 0$$

i odatle dobijamo drugu popravku Δx_2 i odgovarajuću vrednost nule x_3:

$$\Delta x_2 = - f(x_2)/f'(x_2).$$

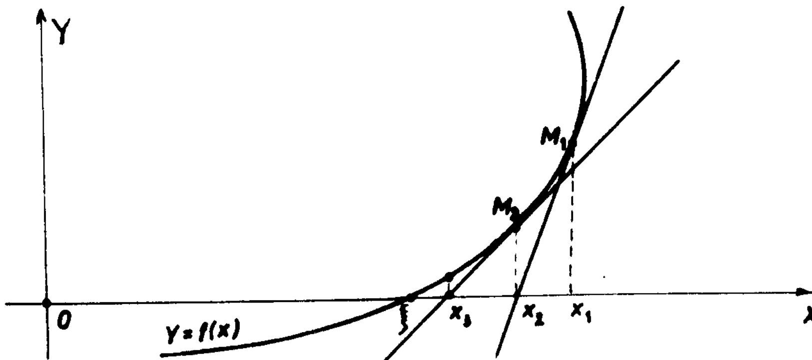
$$x_3 = x_2 + \Delta x_2.$$

Izmedju rešenja u n-toj i(n+1)-oj aproksimaciji postoji relacija:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n).$$

Dokaz da niz: $x_1, x_2, \ldots,$ teži ka tačnoj vrednosti nule čitaoc će naći u citiranoj knjizi Demidoviča-Marona i u drugim kursevima Numeričke analize.

Geometrijski, gornja metoda predstavlja nalaženje preseka x-ose i tangenti krive $y=f(x)$ u tačkama $M_1, M_2, \ldots$ čije su apscise rešenja iz prethodnih aproksimacija (vidi sliku 3).



Sl. 3.

Ako u tačci M_1, čija je apscisa x_1-prva približna vrednost nule-, konstruišemo tangentu, ta će tangenta preseći x-osu u tačci x_2 koja se nalazi izmedju tačaka x_1 i ξ (ako $f(x)$ ispunjava uslove koji su napred definisani). Dalje, ako u tačci M_2, čija je apscisa x_2, konstruišemo novu tangentu, presek te tangente i x-ose će biti neko x_3 koje je još bliže ξ. Ponavljanjem gornjeg postupka približićemo se tačnoj vrednosti do granica zadate tačnosti.

Jednačina tangente u nekoj tačci M_i, čije su koordinate x_i i $f(x_i)$ je:

$$y-f(x_i) = (x-x_i)\, f'(x_i)$$

Ako ovu jednačinu uporedimo sa jednačinom (2) videćemo da i jednačina (2) predstavlja isto: jednačinu tangente. Po tome je metoda i dobila ime.

3.5. METODA ITERACIJE (SUKCESIVNIH APROKSIMACIJA)

Ako se radi o funkcijama jedne nezavisno promenljive, ova metoda je primenljiva samo u slučajevima kada su, pored neprekidnosti i ograničenosti, ispunjena još i sledeća dva uslova:

1. Jednačina $f(x)=0$ može da se napiše i u obliku:

$$x = \varphi(x);$$

2. U okolini realne nule $x=\xi$ prvi izvod je, po apsolutnoj vrednosti manji od jedinice:

$$|\varphi'(x)| < 1.$$

Pretpostavimo da je x_o neka vrednost argumenta koja približno zadovoljava jednačinu $f(x)=0$. Stavljajući da je:

$$x_1 = \varphi(x_o),$$
$$x_2 = \varphi(x_1),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_{n+1} = \varphi(x_n),$$

dobićemo tačnija rešenja pomenute jednačine. Da je to tačno vidi se iz sledećih relacija:

$$\xi = \varphi(\xi)$$
$$x_1 = \varphi(x_o)$$
$$\xi - x_1 = \varphi(\xi) - \varphi(x_o) = (\xi - x_o)\,\varphi'(\eta_o) \quad , \quad \eta_o \in [x_o, \xi]$$

S obzirom da je $|\varphi'(\eta_o)| < 1$, ako uzmemo apsolutne vrednosti leve i desne strane poslednje jednačine dolazimo do sledeće relacije:

$$|\xi - x_1| < |\xi - x_o|,$$

odnosno, ako posmatramo n-tu i(n+1)-vu iteraciju dobijamo:

$$|\xi - x_{n+1}| < |\xi - x_n|.$$

Poslednjom nejednačinom se iskazuje činjenica da rešenja konvergiraju ka pravoj vrednosti nule.

Metoda iteracija ima široku primenu u astronomiji. Navešćemo samo dva primera.

1. Nulu poznate Keplerove jednačine, koju odredjujemo svaki put kada za dati trenutak t računamo položaj planete na putanji, nalazimo na sledeći način:

- u prvoj aproksimaciji uzimamo da je $E_1 = M = \frac{2\pi}{T}(t - t_o)$;
- u drugoj aproksimaciji: $E_2 = M + e \sin E_1$;

....

- u n-toj aproksimaciji: $E_n = M + e \sin E_{n-1}$.

Broj aproksimacija zavisi od tačnosti $\varepsilon' > 0$ sa kojom računamo E. Račun je završen onda kada je $|E_n - E_{n-1}| \leq \varepsilon'$.

2. Drugi primer je računanje vremenskog izjednačenja koje, kao što je poznato, ima dve komponente: "izjednačenje središta" - η_1 i "svodjenje na ekvator"- η_2.

Prva od njih je definisana jednačinom:

$$\eta_1 = L - \lambda_o = \omega + M - (\omega + v) = M - v = -2e\sin v + 3/4\ e^2 \sin 2v - \ldots, \quad (3)$$

gde je L longituda srednjeg ekliptičkog sunca, ω -longituda perigeja, λ_o -longituda pravog Sunca, e - ekscentricitet Zemljine putanje oko Sunca i ε - nagib ekliptike u odnosu na ekvator.

Pomoću Njukombovih formula:

$$L = 279^\circ 41' 48.''04 + 129602768''.13\ T + 1''.089\ T^2 \quad i$$

$$\omega = 281^\circ 13' 15''.0 + 6189''.03\ T + 1''.63\ T^2 + 0''.012\ T^3$$

računamo L i ω, a zatim i $M = L - \omega$.

U prvoj aproksimaciji (jednačina 3) uzimamo da je: $\nu_1 = M$,

u drugoj aproksimaciji: $\nu_2 = M + 2e\sin\nu_1 - 3/4\ e^2 \sin 2\nu_1 + \ldots\ldots$,

u trećoj aproksimaciji: $\nu_3 = M + 2e\sin\nu_2 - 3/4\ e^2 \sin 2\nu_2 + \ldots\ldots$, itd.

Sa ν_n iz poslednje aproksimacije računamo η_1, $\lambda_o = \omega + \nu_n$ i η_2. Poslednja veličina je data jednačinom:

$$\eta_2 = tg^2 \frac{\varepsilon}{2} \sin 2\lambda_o - 1/2\ tg^4 \frac{\varepsilon}{2} \sin 4\lambda_o + 1/6\ tg^6 \frac{\varepsilon}{2} \sin 6\lambda_o - \ldots$$

Vremensko izjednačenje η biće: $\eta = \eta_1 + \eta_2$.

Suncu i ε = nagib ekliptike u odnosu na ekvator.

4. INTERPOLACIJA

Prilikom korišćenja astronomskih efemerida i drugih tablica imamo čestu potrebu da polazeći od tabličnih vrednosti funkcije $y=f(x)$ odredimo i vrednosti koje nisu date u tablici. Zavisno od tačnosti koja je neophodna, kao i od oblika funkcije koja je data, $y=f(x)$ se obično zamenjuje polinomom $P(x)$ odredjenog stepena ili, ako se radi o periodičnim funkcijama, trigonometrijskim polinomom, ali tako da vrednosti polinoma za argumente iz tablice budu jednake utabličenim odgovarajućim vrednostima funkcije: $y_i=f(x_i)=P(x_i)$. Nije obavezno da $P(x)$ bude polinom. To, u principu, može da bude i neka funkcija čija se vrednost za dato x računa jednostavnije i lakše nego vrednost $f(x)$.

Gornji postupak je poznat pod imenom <u>interpolacija.</u>

Tačke čije su koordinate: (x_0,y_0), (x_1,y_1), ..., (x_n,y_n) date u tablici, a koje ćemo koristiti prilikom računanja koeficijenata interpolacionog polinoma, nazivaju se <u>čvorovi interpolacije.</u> Posle ove definicije možemo reći da interpolaciona kriva prolazi kroz čvorove interpolacije.

Pre nego što predjemo na izlaganje konkretnih metoda interpolacije, pažnju čitaoca skrećemo na dve stvari:

1. Ako je data sledeća tablica ekvidistantnih argumenata x_i (ekvidistantan znači da se nalazi na istoj distanci, a u konkretnom slučaju to znači da je: x_i-x_{i-1}=const. za svako i), odgovarajućih vrednosti funkcije y_i i razlika prvog, drugog, ... reda:

$$
\begin{array}{ccccc}
x_o & y_o & & & \\
 & & \Delta y_o & & \\
x_1 & y_1 & & \Delta^2 y_o & \\
 & & \Delta y_1 & & \Delta^3 y_o \\
x_2 & y_2 & & \Delta^2 y_1 & \\
 & & \Delta y_2 & & \Delta^3 y_1 \\
x_3 & y_3 & & \Delta^2 y_2 & \\
 & & \Delta y_3 & & \Delta^3 y_2 \\
x_4 & y_4 & & \Delta^2 y_3 & \\
 & & \Delta y_4 & & \Delta^3 y_3 \\
\vdots & \vdots & & \Delta^2 y_4 & \\
 & & \vdots & & \Delta^3 y_4 \\
x_{n-4} & y_{n-4} & & \vdots & \vdots \\
 & & \Delta y_{n-4} & & \\
x_{n-3} & y_{n-3} & & \Delta^2 y_{n-4} & \\
 & & \Delta y_{n-3} & & \Delta^3 y_{n-4} \\
x_{n-2} & y_{n-2} & & \Delta^2 y_{n-3} & \\
 & & \Delta y_{n-2} & & \Delta^3 y_{n-3} \\
x_{n-1} & y_{n-1} & & \Delta^2 y_{n-2} & \\
 & & \Delta y_{n-1} & & \\
x_n & y_n & & &
\end{array}
$$

pokazaćemo da izmedju y_j i razlika reda k - $\Delta^k y_i$ - postoji linearna veza u kojoj figurišu koeficijenti binomne formule $(a-b)^k$. Osim toga, indeks j uz prvo y sa desne strane jednak je zbiru gornjeg i donjeg indeksa razlike $\Delta^k y_i$ (y_{k+i}), a svaki sledeći indeks je manji od prethodnog za jedinicu. Ovo pravilo se može dokazati metodom matematičke indukcije. Mi ćemo samo ilustrovati njegovu tačnost na nekoliko sledećih primera:

$$\Delta y_o = y_1 - y_o$$

$$\Delta y_1 = y_2 - y_1$$

$$\Delta y_2 = y_3 - y_2$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\Delta^2 y_o = \Delta y_1 - \Delta y_o = y_2 - 2y_1 + y_o$$

$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 = y_3 - 2y_2 + y_1$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\Delta^3 y_o = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_o = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_o$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Prema pomenutom pravilu, izraz za razliku $\Delta^4 y_3$ dobićemo na sledeći način:

a) koeficijenti binomne formule četvrtog stepena sa naizmenično promenljivim znakom su:

1, -4, 6, -4, 1.

b) indeks uz prvo y biće j=4+3=7, pa sada možemo lako napisati izraz za $\Delta^4 y_3$:

$$\Delta^4 y_3 = 1 \cdot y_7 - 4y_6 + 6y_5 - 4y_4 + 1y_3 .$$

Za indeksiranje koje je drukčije od onoga koje smo usvojili prilikom formiranja naše tablice promeniće se samo onaj deo pravila koji se odnosi na način formiranja indeksa uz y_i.

2. Druga činjenica na koju skrećemo pažnju čitaoca je da su razlike n-toga reda algebarskog polinoma n-tog stepena $P(x)$ datog za ekvidistantne argumente konstantne.

Neka je:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_o .$$

Ako su x_o i $x_1 = x_o + h$ (h=const.) dve tablične vrednosti argumenta možemo pisati:

$$y_o = P(x_o) = a_n x_o^n + a_{n-1} x_o^{n-1} + \ldots + a_1 x_o + a_o ,$$

$$y_1 = P(x_1) = a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \ldots + a_1 x_1 + a_o =$$

$$= a_n (x_o + h)^n + a_{n-1} (x_o + h)^{n-1} + \ldots + a_1 (x_o + h) + a_o .$$

Razlika $\Delta y_o = y_1 - y_o$ je definisana sledećim izrazom:

$$\Delta y_o = a_n [(x_o + h)^n - x_o^n] + a_{n-1} [(x_o + h)^{n-1} - x_o^{n-1}] + \ldots +$$

$$+ a_1 [(x_o + h) - x_o]$$

koji se može napisati i u obliku:

$$\Delta y_o = n a_n x_o^{n-1} h + b_{n-2} x_o^{n-2} + \ldots + b_o .$$

....

Dakle, razlika Δy_o, kao i sve ostale razlike prvoga reda, predstavljaju polinome(n-1)-og stepena.

Ako na isti način odredimo Δy_1, a zatim i $\Delta^2 y_o$, dobićemo izraz:

$$\Delta^2 y_o = a_n n(n-1) h^2 x_o^{n-2} + c_{n-3} x^{n-3} + \ldots + c_o.$$

Nastavljajući ovaj postupak do razlika reda k uverićemo se da je:

$$\Delta^k y_o = a_n n(n-1)(n-2) \ldots (n-k+1) h^k x_o^{n-k} + d_{n-k-1} x^{n-k-1} + \ldots + d_o =$$

$$= a_n \binom{n}{k} h^k x_o^{n-k} + d_{n-k-1} x^{n-k-1} + \ldots + d_o.$$

Posle gornjih relacija je jasno da će razlika $\Delta^n y_o$ biti:

$$\Delta^n y_o = a_n n! h^n = \text{const.} \qquad (1)$$

Teorema koju smo napred citirali je time dokazana. Takodje, važi i obrnuta teorema: ako su razlike n-toga reda konstantne, funkcija na koju se one odnose je polinom n-tog stepena.

Prilikom odredjivanja stepena polinoma kojim ćemo interpolovati datu funkciju poslednja teorema igra presudnu ulogu. Ako imamo jednu konkretnu tablicu $y_i = f(x_i)$, prvi korak u ispitivanju te funkcije treba da bude računanje razlika $\Delta^k y_i$. Ako tom prilikom uočimo da su razlike m-tog reda skoro konstantne (strogo uzevši, one će biti konstantne samo ako je $f(x)$ polinom) normalno je da se opredelimo za interpolaciju polinomom m-tog stepena.

U teoriji interpolacije značajno mesto pripada dvema Vajerštrasovim* teoremama:

<u>1. Teorema</u>: Za svaku funkciju $y=f(x)$ koja je neprekidna u intervalu $[a,b]$ može se odrediti odgovarajući polinom $P(x)$ takav da za svako $x \in [a,b]$ razlika $f(x)-P(x)$ po apsolutnoj vrednosti ne bude veća od nekog unapred zadatog $\varkappa$: $|f(x)-P(x)| \leq \varkappa$.

---

* Veierstrass K. (1815-1897) nemački matematičar.

2. Teorema: za svaku periodičnu funkciju sa periodom 2π koja je neprekidna u intervalu $[a,b]$ može se odrediti trigonometrijski polinom $Q(x)$ takav da je: $|f(x)-Q(x)| \leq \chi_1$ za svako $x \in [a,b]$, gde je, kao i u prethodnoj teoremi, χ_1 mali pozitivni broj koji je unapred zadat.

4.1. GREGORI-NJUTNOV OBRAZAC (I NJUTNOV OBRAZAC)

Oblik interpolacionog polinoma je sledeći:

$$P(x)=a_o+a_1(x-x_o)+a_2(x-x_1)(x-x_o)+\dots+$$

$$+a_n(x-x_{n-1})(x-x_{n-2})\dots(x-x_o) \qquad (2)$$

Koeficijente $a_i\,(i=0,1,2,\dots,n)$ odredjujemo iz sledećih $n+1$ uslova:

$y_o=f(x_o)=P(x_o)$,

$y_1=P(x_1)$,

$y_2=P(x_2)$,

....

$y_n=P(x_n)$.

Imajući u vidu da je: $x_1=x_o+h$, $x_2=x_1+h=x_o+2h$, $x_3=x_o+3h,\dots,x_n=x_o+nh$ i stavljajući u jednačini (2) umesto x sledeće vrednosti: $x_o, x_1, \dots, x_n$ dobijamo:

$y_o=P(x_o)=a_o$ (svi članovi osim prvog sadrže činioc $x-x_o$, pa se anuliraju),

$y_1=P(x_1)=a_o+a_1(x_1-x_o)=a_o+a_1h$, itd.

Iz poslednje jednačine sledi da je:

$a_1=(y_1-y_o)/h = \Delta y_o/h$.

Veierstrass K. (1815-1897) nemački matematičar.

....

4.2. II NJUTNOV OBRAZAC (NJUTNOV OBRAZAC SA UZLAZNIM RAZLIKAMA)

Umesto polinoma (2) koristi se polinom oblika:

$$P(x)=a_o+a_1(x-x_n)+a_2(x-x_n)(x-x_{n-1})+\ldots\ldots+$$

$$+a_n(x-x_n)(x-x_{n-1})\ldots\ldots(x-x_1) \qquad (4)$$

Koeficijenti $a_o, a_1, \ldots, a_n$ se odredjuju iz uslova:

$$y_n=P(x_n)=a_o,$$

$$y_{n-1}=P(x_{n-1})=a_o+a_1(x_{n-1}-x_n),$$

$$y_{n-2}=P(x_{n-2})=a_o+a_1(x_{n-2}-x_n)(x_{n-2}-x_{n-1}),$$

....

$$y_o=a_o+a_1(x_o-x_n)+a_2(x_o-x_n)(x_o-x_{n-1})+\ldots+$$

$$+a_n(x_o-x_n)(x_o-x_{n-1})\ldots(x_o-x_1).$$

Imajući u vidu da je: $x_{n-1}-x_n=-h$, $x_{n-2}-x_n=-2h$, itd., dolazimo do sledećih izraza za a_i:

$$a_o=y_n,$$

$$a_1=\frac{y_n-y_{n-1}}{h}=\frac{\Delta y_{n-1}}{h},$$

$$a_2=\frac{y_n-2y_{n-1}+y_{n-2}}{2!\,h^2}=\frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!\,h^2},$$

$$a_3=\frac{y_n-3y_{n-1}+3y_{n-2}+y_{n-1}}{3!\,h^3}=\frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3!\,h^3}, \text{ itd.}$$

Prema tome, polinom (4) je odredjen relacijom:

$$P(x)=y_n+\frac{\Delta y_{n-1}}{n\,h}(x-x_n)+\frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!\,h^2}(x-x_n)(x-x_{n-1})+\ldots+$$

$$+\frac{\Delta^n y_o}{n!\,h^n}(x-x_n)(x-x_{n-1})\ldots(x-x_1) \qquad (5)$$

Razlike koje figurišu u polinomu (5) se u datoj šemi stepenasto penju, pa se zbog toga ovaj obrazac i naziva Njutnov obrazac sa uzlaznim razlikama.

Jasno je da se ovaj obrazac ne može koristiti ako se x nalazi na početku tablice.

Da bi se sa što manjim stepenom polinoma (prema tome, sa što manjim računskim poslom) postigla što veća tačnost, u I Njutnovoj formuli se za x_o i x_1 uzimaju one dve tablične vrednosti argumenta izmedju kojih se nalazi x za koje računamo P(x). U II Njutnovoj formuli x je izmedju x_n i x_{n-1}.

4.3. GAUSOVE, BESELOVA I STIRLINGOVA FORMULA

Sve ove formule su poznate kao formule sa središnjim razlikama. Da bismo pojednostavili izlaganje obrazaca sačinićemo novu šemu sa indeksiranjem koje će se razlikovati od onoga koje smo usvojili prilikom izvodjenja I i II Njutnove formule. Pomenuta šema je:

$$
\begin{array}{llllll}
\cdots\cdots & & & & & \\
x_{-4} & y_{-4} & & & & \\
 & & \Delta y_{-4} & & & \\
x_{-3} & y_{-3} & & \Delta^2 y_{-4} & & \\
 & & \Delta y_{-3} & & \Delta^3 y_{-4} & \\
x_{-2} & y_{-2} & & \Delta^2 y_{-3} & & \Delta^4 y_{-4} \\
 & & \Delta y_{-2} & & \Delta^3 y_{-3} & \\
x_{-1} & y_{-1} & & \Delta^2 y_{-2} & & \Delta^4 y_{-3} \\
 & & \Delta y_{-1} & & \Delta^3 y_{-2} & \\
x_o & y_o & & \Delta^2 y_{-1} & & \Delta^4 y_{-2} \\
 & & \Delta y_o & & \Delta^3 y_{-1} & \\
x_1 & y_1 & & \Delta^2 y_o & & \Delta^4 y_{-1} \\
 & & \Delta y_1 & & \Delta^3 y_o & \\
x_2 & y_2 & & \Delta^2 y_1 & & \Delta^4 y_o \\
 & & \Delta y_2 & & \Delta^3 y_1 & \\
x_3 & y_3 & & \Delta^2 y_2 & & \\
 & & \Delta y_3 & & & \\
x_4 & y_4 & & & & \\
\cdots\cdots & & & & &
\end{array}
$$

Prvi Gausov obrazac se izvodi polazeći od polinoma oblika:

$$P(x)=a_o+a_1(x-x_o)+a_2(x-x_o)(x-x_1)+a_3(x-x_{-1})(x-x_o)\cdot$$

$$\cdot(x-x_1)+a_4(x-x_{-1})(x-x_o)(x-x_1)(x-x_2)+\ldots.+$$

$$+a_{2n-1}(x-x_{-n+1})(x-x_{-n+2})\ldots(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})+$$

$$+a_{2n}(x-x_{-n+1})(x-x_{-n+2})\ldots(x-x_n) \qquad (6)$$

Na isti način kao i prilikom izvodjenja Njutnovih obrazaca dolazimo do sledećih opštih formula za koeficijente $P(x)$:

$$a_{2k}=\frac{\Delta^{2k}y_{-k}}{(2k)!\,h^{2k}},$$

$$a_{2k-1}=\frac{\Delta^{2k-1}y_{-k+1}}{(2k-1)!\,h^{2k-1}},$$

gde je $k=0,1,2,\ldots.$

Posle smene:

$$q=(x-x_o)/h$$

$P(x)$ se može izraziti u obliku:

$$P(x)=y_o+q\,\Delta y_o+\frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1}+\frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1}+$$

$$+\frac{(q+1)q(q-1)(q-2)}{4!}\Delta^4 y_{-2}+\ldots. \qquad (7)$$

Jednačina (7) se naziva I Gausova formula. U njoj figurišu samo centralne razlike : Δy_o, $\Delta^2 y_{-1}$, $\Delta^3 y_{-1}$, $\Delta^4 y_{-2}$,...

Na sličan način dobija se i II Gausova formula koja sadrži centralne razlike: Δy_{-1}, $\Delta^2 y_{-1}$, $\Delta^3 y_{-2}$, $\Delta^4 y_{-2}$, $\Delta^5 y_{-3}$, $\Delta^6 y_{-3}$,...

Ona glasi:

$$P(x)=y_o+q\,\Delta y_{-1}+\frac{(q+1)q}{2!}\,\Delta^2 y_{-1}+\frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\,\Delta^3 y_{-2}+\ldots\ldots \qquad (8)$$

Opšti izrazi za članove polinoma (7) i (8) su:

a) I Gausova formula:

$$\frac{(q+n-1)\,(q+n-2)\ldots\ldots(q-n+1)}{(2n-1)\,!}\quad \Delta^{2n-1} y_{-n+1}\,,$$

(sa razlikama neparnog reda)

i

$$\frac{(q+n-1)(q+n-2)\ldots\ldots(q-n)}{(2n)\,!}\quad \Delta^{2n} y_{-n}\,,$$

(sa razlikama parnog reda)

b) II Gausova formula:

$$\frac{(q+n-1)(q+n-2)\ldots(q-n+1)}{(2n-1)\,!}\quad \Delta^{2n-1} y_{-n}\,,$$

(sa razlikama neparnog reda)

i

$$\frac{(q+n)(q+n-1)\ldots(q-n+1)}{(2n)\,!}\quad \Delta^{2n} y_{-n}\,,$$

(sa razlikama parnog reda).

Stirlingova formula se može izvesti direktno iz Gausovih ako se uzme srednja vrednost tih formula:

$$P(x)=y_o+q\frac{\Delta y_{-1}+\Delta y_o}{2}+\frac{q^2}{2!}\,\Delta^2 y_{-1}+\frac{q(q^2-1^2)}{3!}$$

$$\frac{\Delta^3 y_{-2}+\Delta^3 y_{-1}}{2}+\frac{q^2(q^2-1^2)}{4!}\,\Delta^4 y_{-2}+\ldots\ldots \qquad (9)$$

Opšti izrazi za članove Stirlingove formule su:

a) sa razlikama neparnog reda:

$$\frac{q(q^2-1^2)(q^2-2^2)\ldots[q^2-(n-1)^2]}{(2n-1)\,!}\;\frac{\Delta^{2n-1} y_{-n}+\Delta^{2n-1} y_{-n+1}}{2}\;;$$

b) sa razlikama parnog reda:

$$\frac{q^2(q^2-1^2)(q^2-2^2)\dots[q^2-(n-1)^2]}{(2n)!}\ \Delta^{2n} y_{-n}\ .$$

Kao što vidimo iz prethodnih izraza, Gausovi polinomi 2n-tog stepena sadrže 2n+1 koeficijent a_i, pa, razume se, za njihovo odredjivanje treba imati 2n+1 čvor.

Beselova formula može da se izvede iz II Gausove.

Neka su data 2n+2 ekvidistantna čvora i to za argumente: $x_{-n}, x_{-n+1}, \dots, x_o, \dots, x_{n+1}$. Ako za početne vrednosti u Gausovoj formuli uzmemo x_1 i y_1 i iskoristimo čvorove (x_{1+k}, y_{1+k}) $(k=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n)$ formula će glasiti:

$$P(x)=y_1+(q-1)\,\Delta y_o+\frac{q(q-1)}{2!}\,\Delta^2 y_o+\frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\,\Delta^3 y_{-1}+\dots \qquad (10)$$

Medjutim, ako za početne uslove uzmemo x_o i y_o dobićemo:

$$P(x)=y_o+q\,\Delta y_{-1}+\frac{(q+1)q}{2!}\,\Delta^2 y_{-1}+\frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\,\Delta^3 y_{-2}+\dots\dots \qquad (11)$$

Razlike u koeficijentima koji množe $\Delta^r y_s$ potiču otuda što je:

$$q'=\frac{x-x_1}{h}=\frac{x-(x_o+h)}{h}=\frac{x-x_o}{h}-1=q-1$$

Srednja vrednost polinoma (10) i (11), posle elementarnih transformacija, može da se predstavi u obliku:

$$P(x)=\frac{1}{2}(y_o+y_1)+\left(q-\frac{1}{2}\right)\Delta y_o+\frac{q(q-1)}{2}\ \frac{\Delta^2 y_{-1}+\Delta^2 y_o}{2}\ +\dots\dots \qquad (12)$$

Opšti izrazi za članove Beselove formule su:

a) sa razlikama parnog reda:

$$\frac{q(q-1)(q+1)(q-2)(q+2)\dots(q-n)(q+n-1)}{2n\,!}\ \frac{\Delta^{2n} y_{-n}+\Delta^{2n} y_{-n+1}}{2}\ ;$$

b) sa razlikama neparnog reda:

$$\frac{\left(q-\frac{1}{2}\right)q(q-1)(q+1)(q-2)(q+2)\dots(q-n)(q+n-1)}{(2n+1)\,!}\ \Delta^{2n+1} y_{-n}\,.$$

Posle izlaganja različitih interpolacionih formula nameće se sledeće pitanje: koje su prednosti jedne od njih u odnosu na drugu? Detaljnijom analizom interpolacionih formula dolazi se do zaključka da je za $|q| \leq 0.25$ najcelishodnije primenjivati Stirlingovu formulu, a za $0.25 < |q| \leq 0.75$ - Beselovu formulu; Njutnovi obrasci su jedino rešenje za interpolaciju na samim krajevima tablice.

4.4. LAGRANŽOVA FORMULA INTERPOLACIJE ZA NEEKVIDISTANTNE ARGUMENTE

Iz niza objektivnih razloga astronomska posmatranja se u većini slučajeva obavljaju tako da srednje epohe posmatranja dele nejednaki intervali vremena. Sama ta činjenica je dovoljna da pokaže kako je interpolacija sa neekvidistantnim argumentima računski posao za koji u praksi postoji česta potreba.

Pretpostavimo da u intervalu $[a,b]$ imamo n+1 čvor: (x_o,y_o), (x_1,y_1), ..., (x_n,y_n). Izvodjenje Lagranžove formule svodi se na odredjivanje koeficijenata interpolacionog polinoma:

$$\begin{aligned} P(x) &= a_o(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n) + \\ &+ a_1(x-x_o)(x-x_2)\ldots(x-x_n) + \\ &+ a_2(x-x_o)(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_n) + \ldots \\ &+ a_n(x-x_o)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}) . \end{aligned} \tag{13}$$

Ako u jednačini (13) stavljamo redom:

$$\begin{aligned} y_o &= P(x_o) = a_o(x_o-x_1)(x_o-x_2)\ldots(x_o-x_n) , \\ y_1 &= P(x_1) = a_1(x_1-x_o)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n) , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= P(x_n) = a_n(x_n-x_o)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1}) \end{aligned}$$

možemo lako odrediti sve koeficijente a_i.

Kad se rešenja poslednjih jednačina zamene u jednačini (13) dobija se sledeći izraz za $P(x)$:

$$P(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_o-x_1)(x_o-x_2)\dots(x_o-x_n)}\,y_o+$$

$$+\frac{(x-x_o)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_o)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)}\,y_1+$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+\frac{(x-x_o)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_o)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})}\,y_n=$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\frac{\Pi_{n+1}(x)}{(x-x_i)\,\Pi'_{n+1}(x_i)}\,y_i \qquad (14)$$

gde je:

$$\Pi_{n+1}(x)=(x-x_o)(x-x_1)\dots(x-x_n) \quad i \qquad (15)$$

$$\Pi'_{n+1}(x_j)=(x_j-x_o)(x_j-x_1)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots$$

$$\dots(x_j-x_n) \qquad (16)$$

U odnosu na prethodne formule, Lagranžova je opštija. Ona se može primeniti i u slučaju interpolacije sa ekvidistantnim argumentima. Veoma je laka za programiranje, ali ako se obrada podataka ne vrši pomoću elektronskih računara, račun je glomazniji nego kad se koriste Njutnove, Gausove, Beselova i Stirlingova formula.

4.5. TAČNOST INTERPOLACIJE ALGEBARSKIM POLINOMIMA. TAČNOST LAGRANŽOVE FORMULE

Neka je $u(x)$ funkcija definisana relacijom:

$$u(x)= f(x) -P(x)- k\,\Pi_{n+1}(x)\,,$$

gde je $f(x)$ tablično data funkcija, $P(x)$- Lagranžov interpolacioni polinom, k - konstanta koju ćemo definisati malo kasnije i $\Pi_{n+1}(x)$ - proizvod $(n+1)$. reda (jednačina 15).

Primetimo da su $x_o, x_1, \ldots, x_n$ nule funkcije $u(x)$ jer za ove vrednosti argumenta je: $f(x_i) = P(x_i)$ i $\Pi_{n+1}(x_i) = 0$.

Koeficijent k ćemo odrediti tako da(n+2)-ga nula $u(x)$ bude neko proizvoljno izabrano ξ , ali tako da bude $\xi \neq x_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$ i $\xi \in [a,b]$ - intervala kome pripada svih n+1 čvorova. Dakle, k odredjujemo iz jednačine:

$$f(\xi) - P(\xi) - k\,\Pi_{n+1}(\xi) = 0. \qquad (17)$$

Pošto je $\xi \neq x_i$, $\Pi_{n+1}(\xi) \neq 0.$, pa je k odredjeno jednačinom:

$$k = \frac{f(\xi) - P(\xi)}{\Pi_{n+1}(\xi)}$$

Na granicama svakog podintervala: $[x_o, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $[x_k, \xi]$, $[\xi, x_{k+1}]$, ... , $[x_{n-1}, x_n]$ funkcija $u(x)$ je jednaka nuli. Ako pretpostavimo da je $f(x)$ neprekidna u intervalu $[a,b]$ i da ima neprekidne sve izvode do zaključno (n+2)-og reda, i $u(x)$ je neprekidna i ima neprekidne izvode, pa se može primeniti Rolova teorema* po kojoj izmedju dve nule funkcije $u(x)$ mora da se nalazi bar jedna nula funkcije $u'(x)$. Pošto $u(x)$ ima n+2 nule, $u'(x)$ će imati najmanje n+1 nulu, $u''(x)$- najmanje n nula, itd. Najzad, (n+1)-vi izvod $u(x)$ imaće bar jednu nulu koju ćemo označiti sa η : $u^{(n+1)}(\eta) = 0$.

Pošto je (n+1)-vi izvod polinoma $P(x) = 0$, a (n+1)-vi izvod $\Pi_{n+1}(x)$ jednak $(n+1)!$ imaćemo relaciju:

$$u^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - k(n+1)!\ .$$

Pošto je $u^{(n+1)}(\eta) = 0$, iz poslednje relacije sledi:

$$k = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} = \frac{f(\xi) - P(\xi)}{n+1} \quad \text{i}$$

$$f(\xi) - P(\xi) = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}\,\Pi_{n+1}(\xi)\ .$$

---

*) Smirnov V.I.: Kurs visšej matematiki, tom II, Moskva, 1974., str. 149.

Pošto je ξ proizvoljno izabrani broj, različit od x_i, umesto ξ možemo pisati x, pa poslednja relacija postaje:

$$u(x) = f(x) - P(x) = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} \prod_{n+1}(x), \ldots (x \neq x_i) \tag{18}$$

Broj η zavisi od izbora $x \in [a,b]$ i može biti bilo koji broj intervala $[a,b]$, uključujući i x_i.

Ako je poznat analitički izraz za $f(x)$, ocena greške $u(x)$ vrši se majorizacijom $f^{(n+1)}(\eta)$. Neka je:

$$A = \max f^{(n+1)}(x), \quad x \in [a,b].$$

Greška $u(x)$ mora zadovoljiti nejednačinu:

$$u(x) \leq \frac{A}{(n+1)!} \prod_{n+1}(x). \tag{19}$$

4.6. TAČNOST NJUTNOVIH, STIRLINGOVE I BESELOVE FORMULE

Jednačina (18) može da se primeni i na druge interpolacione formule.

Stavljajući $\frac{x-x_o}{h} = q$, odnosno $x-x_o = qh$, $x-x_1 = x-x_o - (x_1-x_o) = h(q-1)$, $x-x_2 = h(q-2)$, ..., $x-x_n = h(q-n)$, greška za I Njutnovu formulu će biti:

$$u(x) = h^{n+1} \frac{q(q-1)(q-2)\ldots(q-n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\eta). \tag{20}$$

Za II Njutnovu formulu, posle smene $q = \frac{x-x_n}{h}$ dobijamo izraz:

$$u(x) = h^{n+1} \frac{q(q+1)(q+2)\ldots(q+n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\eta) \tag{21}$$

Ako pretpostavimo da su razlike $\Delta^{n+1}y$ konstantne u granicama tačnosti sa kojom radimo i ako je h dovoljno malo, biće zadovoljena relacija:

$$f^{(n+1)}(\eta) \approx \frac{\Delta^{n+1} y_o}{h^{n+1}},$$

pa se ostaci za I i II Njutnovu formulu mogu izračunati pomoću sledećih približnih izraza:

$$u(x) \approx \frac{q(q-1)(q-2)\dots(q-n)}{(n+1)!} \Delta^{n+1} y_o \text{ , (za I Njutnovu formulu)} \quad (22)$$

i

$$u(x) \approx \frac{q(q+1)(q+2)\dots(q+n)}{(n+1)!} \Delta^{n+1} y_n \text{ , (za II Njutnovu formulu)} \quad (23)$$

Ako se za Stirlingov obrazac koriste razlike reda $2n$, ostatak se može izračunati na sličan način kao i u prethodnim formulama, polazeći od jednačine:

$$u(x) = f(x) - P(x) = \frac{f^{(2n+1)}(\eta)}{(2n+1)!} (x-x_o)(x-x_1)(x-x_{-1})\dots(x-x_n)(x-x_{-n}) \text{ .}$$

Ova jednačina je dobijena od jednačine (18) , s tom razlikom što je $\Pi_{n+1}(x)$ definisano tako da njegove nule budu za sledeće vrednosti x: $x_{-n}, x_{-n+1}, \dots, x_o, \dots, x_n$.

Pošto je $x-x_o=qh$, $x-x_1=h(q-1)$, $x-x_{-1}=h(q+1)$, ..., $x-x_n=h(q-n)$, $(x-x_{-n})=h(q+n)$, poslednji izraz za $u(x)$ postaje:

$$u(x) = \frac{h^{2n+1} f^{(2n+1)}(\eta)}{(2n+1)!} q(q^2-1^2)(q^2-2^2)\dots(q^2-n^2) \quad (24)$$

Ako neznamo analitički izraz za $f(x)$, a h je dovoljno malo možemo staviti da je:

$$f^{(2n+1)}(\eta) \approx \frac{1}{2} \frac{\Delta^{2n+1} y_{-(n+1)} + \Delta^{2n+1} y_{-n}}{h^{2n+1}} \text{ ,}$$

pa se približna vrednost ostatka dobija iz relacije:

$$u(x) \approx \frac{\Delta^{2n+1} y_{-(n+1)} - \Delta^{2n+1} y_{-n}}{2(2n+1)!} q(q^2-1^2)(q^2-2^2)\dots(q^2-n^2) \quad (25)$$

Ostatak Beselove formule koja sadrži razlike $(2n+1)$.reda približno je jednak:

$$u(x) \approx \frac{h^{2n+2} f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!} q(q^2-1^2)(q^2-2^2)\dots(q^2-n^2)[q-(n+1)] \text{ .} \quad (26)$$

Ovu formulu nećemo dokazivati. Čitaoc koji je za taj dokaz zainteresovan može ga naći u raznim kursevima numeričke analize*.

Tačnost interpolacije ne zavisi samo od stepena interpolacionog polinoma, već i od rasporeda čvorova u intervalu $[a,b]$. Veličina $u(x)$ (jednačina 18) zavisi od proizvoda dva činioca: $f^{(n+1)}(\eta)$, na koji se ne može uticati, i od $\Pi_{n+1}(x)$, koji zavisi samo od izbora čvorova interpolacije. Kad se radi bez nekih odredjenih kriterijuma, pomenuti izbor čvorova može da bude nepovoljan i da uzrokuje veliku grešku $u(x)$. Dobrim rasporedom čvorova može se postići da $\Pi_{n+1}(x)$ bude vrlo malo.

Problemom minimizacije $\Pi_{n+1}(x)$ bavio se i rešio ga ruski matematičar Čebišev. On je dokazao da se optimalni izbor čvorova postiže ako se x_i odrede iz relacije:

$$x_i = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(b-a)\zeta_i , \tag{27}$$

gde je ζ_i jednako:

$$\zeta_i = -\cos\frac{2i+1}{2n+2}\pi , \quad (i=0,1,2,\ldots,n) \tag{28}$$

Ako se x_i odrede iz gornjih relacija, biće zadovoljena nejednačina:

$$|\Pi_{n+1}(x)| \leq 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1}$$

Ako se analiziraju jednačine (27) i (28) dolazi se do zaključka da se u optimalnom rasporedu čvorovi zgušnjavaju idući ka granicama intervala $[a,b]$.

Ako je analitički izraz za $f(x)$ nepoznat, stroga ocena greške interpolacionog polinoma nije moguća. Odstupanja polinoma od $f(x)$ u intervalima izmedju čvorova mogu da budu i vrlo velika, bez obzira na gustinu čvorova. Da bi ocena greške bila koliko toliko valjana, kriva $y=f(x)$ treba da bude relativno glatka, bez "ekscesnih" varijacija izmedju čvorova. Kada kažemo "relativno glatka" mislimo na to da je gustina čvorova takva da se u intervalu interpolacije $f(x)$ dobro aproksimira polinomom.

---

*) Berezin I.S.-Žitkov N.P.: Numerička analiza, prevod s

4.7. INTERPOLACIJA TRIGONOMETRIJSKIM POLINOMIMA

Ako funkcija $f(t)$ koja nam je zadata tabelarno na intervalu $[a,b]$ ima osobinu: $f(a)=f(b)$ ona se formalno može smatrati periodičnom sa periodom $P=b-a$. Da bismo uprostili izlaganje interpolacije trigonometrijskim polinomima smatraćemo da je izvršena smena: $x=\frac{2\pi}{P}t$, tako da je dobijena funkcija $f(x)$ koja je periodična sa periodom $P=2\pi$.

Da bi se postigla veća tačnost, periodične funkcije se interpoluju trigonometrijskim, a ne algebarskim polinomima.

Neka je dato $2n+1$ čvorova: $(x_o,y_o),(x_1,y_1),\ldots\ldots,$ (x_{2n},y_{2n}) koji pripadaju intervalu $[0,2\pi]$ i neka je $T_n(x)$ polinom oblika:

$$T_n(x)=a_o+\sum_{k=1}^{n} a_k\cos kx+b_k\sin kx\,. \tag{29}$$

Razume se, pretpostavljamo da $T_n(x)$ zadovoljava osnovni uslov interpolacije:

$$T_n(x_i)=f(x_i),\quad (i=0,1,2,\ldots,2n).$$

Uslovi iz kojih se odredjuju koeficijenti a_k, b_k su:

$$f(x_o)=a_o+\sum a_k\cos kx_o+b_k\sin kx_o\,,$$

$$f(x_1)=a_o+\sum a_k\cos kx_1+b_k\sin kx_1\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f\,x_{2n}=a_o+\sum a_k\cos x_{2n}+b_k\sin x_{2n}\,.$$

Ako jednačinu (29) pridružimo poslednjem sistemu i leve strane svih tih jednačina pomnožimo sa $z=1$ dobijamo sistem koji se formalno može smatrati sistemom algebarskih linearnih homogenih jednačina po nepoznatim $z,a_o,a_1,b_1,\ldots$ uz koje su koeficijenti: 1, $\cos kx$, $\sin kx$, $\cos kx_o$, $\sin kx_o,\ldots,\cos x_{2n},\sin x_{2n},T_n(x)$, $f(x_o)$, $f(x_1),\ldots,f(x_{2n})$. Za taj sistem možemo sigurno tvrditi da ima netrivijalna rešenja (svi a_k i b_k nisu jednaki nuli), jer već znamo da

Berezin I.S.-Židkov N.P.: Numerička analiza, prevod s "nepoznata" uz koeficijente $T_n(x)$, $f(x_o)$, $f(x_1), \ldots, f(x_{2n})$ jednaka -1. Posledica toga je da determinanta sistema:

$$D = \begin{vmatrix} T_n(x) & 1 & \cos x & \sin x \ldots & \cos nx & \sin nx \\ f(x_o) & 1 & \cos x_o & \sin x_o \ldots & \cos nx_o & \sin nx_o \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f(x_{2n}) & 1 & \cos x_{2n} & \sin x_{2n} \ldots & \cos nx_{2n} & \sin nx_{2n} \end{vmatrix}$$

mora biti jednaka nuli. Ako D razvijemo po elementima prve kolone dobićemo jednačinu:

$$T_n(x)\Delta - f(x_o)\Delta_o - f(x_1)\Delta_1 - f(x_2)\Delta_2 - \ldots - f(x_{2n})\Delta_{2n} = 0$$

Pošto determinante Δ_i imaju istu strukturu kao i Δ, posle skraćivanja koja su očigledna, dobija se jednačina:

$$T_n(x) = \sum_{i=1}^{2n} f(x_i) \frac{\sin 1/2(x-x_o)\ \sin 1/2(x-x_1) \ldots\ldots \sin 1/2(x-x_{i-1})}{\sin 1/2(x_i-x_o)\ \sin 1/2(x_i-x_1) \ldots \sin 1/2(x_i-x_{i-1})} \cdot$$

$$\cdot \frac{\sin 1/2(x-x_{i+1}) \ldots \sin 1/2(x-x_{2n})}{\sin 1/2(x_i-x_{i+1}) \ldots \sin 1/2(x_i-x_{2n})} \qquad (30)$$

Sa desne strane jednačine imamo trigonometrijski polinom u obliku zbira proizvoda od 2n činilaca oblika $\sin 1/2(x-x_k)$ koji se množe koeficijentima $\frac{f(x_i)}{\Pi_{2n}}$, gde je Π_{2n} proizvod 2n činilaca oblika $\sin 1/2(x_i-x_k)$, $(k \neq i)$.

Ovaj polinom predstavlja formulu koja se može primeniti bez obzira na to da li je $f(x)$ parna ili neparna funkcija i bez obzira na to da li su argumenti x_i ekvidistantni ili nisu.

U slučajevima kada su x_i ekvidistantni koriste se šeme koje omogućuju da se brže i lakše izračunaju koeficijenti a_k i b_k. Te šeme se daju i analiziraju u okviru harmonijske analize. Mi se u ovom kursu nećemo na njima zadržavati, jer je upotreba elektronskih računara danas vrlo raširena, a programiranje opštih formula jednostavnije od programiranja šema. Čitaoc koji nije u mogućnosti da koristi jedan od takvih računara, u raznim kursevima numeričke analize* može naći jednostavne šeme pomoću kojih se može računati i sa malim stonim računarima (šema 12 ordinata, šema 24 ordinate, itd.) .

Ako je f(x) parna funkcija zadata u intervalu $[0,2\pi]$ normalno je da za osnovni sistem interpolacionih funkcija uzmemo samo parne funkcije: 1, cosx, cos2x, ..., cosnx.

Neka su na poluintervalu $[0,\pi]$ dati čvorovi: (x_o,y_o), $(x_1,y_1),\dots,(x_n,y_n)$. Zadatak koji rešavamo je odredjivanje koeficijenata polinoma $T_n(x)$ koji ispunjava uslove:

$$T_n(x_i)= T_n(-x_i)= f(x_i)\ , \quad (i=0,1.2,\dots,n)$$

Kad se u izrazu za $T_n(x)$ grupišu članovi uz $f(x_i)$ i uz $f(-x_i)$ i kad se izvrše transformacije:

$$\sin 1/2(x-x_k)\sin 1/2(x+x_k)= 1/2(\cos x_k-\cos x) \text{ i}$$

$$\sin 1/2(x_i-x_j)\sin 1/2(x_i+x_j) = 1/2(\cos x_j - \cos x_i)$$

za $T_n(x)$ se dobija izraz:

$$T_n(x)= \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\frac{(\cos x-\cos x_o)(\cos x-\cos x_1)\dots(\cos x-\cos x_{i-1})}{(\cos x_i-\cos x_o)(\cos x_i-\cos x_1)\dots(\cos x_i-\cos x_{i-1})}\,\cdot$$

$$\cdot\frac{(\cos x-\cos x_{i+1})\dots\dots(\cos x-\cos x_n)}{(\cos x_i-\cos x_{i+1})\dots\dots(\cos x_i-\cos x_n)}\ . \qquad (31)$$

Ako je f(x) neparna funkcija koristi se osobina: $T_n(x_i)= -T_n(-x_i)$, pa se posle grupisanja članova uz suprotne y_i dolazi do izraza:

$$T_n(x)= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\frac{\sin x(\cos x-\cos x_1)(\cos x-\cos x_2)\dots(\cos x-\cos x_{i-1})}{\sin x_i(\cos x_i-\cos x_1)(\cos x_i-\cos x_2)\dots\dots}\,\cdot$$

$$\cdot\frac{(\cos x-\cos x_{i+1})\dots\dots(\cos x-\cos x_n)}{(\cos x_i-\cos x_{i-1})(\cos x_i-\cos x_{i+1})\dots\dots(\cos x_i-\cos x_n)} \qquad (32)$$

---

* Berezin I.S.-Žitkov N.P.: Numerička analiza, Beograd, 1963, Vitaker E.-Robinson G.: Tečaj numeričke matema-

Ako pažljivije proučimo izraze (30) - (32) uverićemo se u to da praktična primena tih formula zahteva obiman računski posao. Ako raspolažemo nekim od savremenih kompjutera probleme te vrste ne predstavljaju nešto zbog čega se treba zabrinuti.

5. INVERZNA INTERPOLACIJA

Inverznom interpolacijom se naziva postupak odredjivanja argumenta x koji odgovara zadatoj vrednosti funkcije f(x) na osnovu tablično datih $y_k=f(x_k)$. Jedan primer inverzne interpolacije je odredjivanje razlike izmedju svetskog i efemeridskog vremena iz posmatranja Meseca, Sunca i planeta.

Vremenska jedinica koja služi kao argument u Nebeskoj mehanici je à priori konstantna. Dogadjaji koji se predvidjaju (misli se na odredjene vrednosti koordinata nebeskih tela) obeležavaju trenutke jedne ravnomerne skale vremena. S druge strane, vreme koje "čitamo" posmatrajući zvezde - svetsko vreme UTO koje se popravlja za kretanje polova i za sezonske neravnomernosti Zemljine rotacije te se dobija svetsko vreme UT2 - je definisano na bazi Zemljine rotacije koja nije ravnomerna. Drugim rečima, trajanje jednog Zemljinog obrta, koje se uzima za osnovnu jedinicu, nije konstantno, pa ni vremenska skala koju čine takve jedinice neće biti ravnomerna(jednak broj jedinica uzetih u različitim oblastima te skale ne predstavlja vremenski interval istog trajanja). Uprkos tome, posmatranja Sunca i planeta iz drugih razloga vrše se u sistemu svetskog vremena.

Pretpostavimo da smo u trenutku t_o sistema svetskog vremena UT2 iz posmatranja odredili longitudu Meseca λ_o. Iz ranijih posmatranja odredjene su diferencijalne promene koordinata i njihovom integracijom na osnovi zakona Njutnove mehanike odredjene te koordinate za godine koje dolaze, pa i za nekoliko trenutaka t_e pre i posle t_o. Neka su λ_e efemeridske (utabličene) longitude Meseca. Potrebno je da se u efemeridskoj skali vremena ET odredi trenutak T_e koji odgovara efemeridskoj longitudi L_e jednakoj posmatranoj longitudi λ_o koja, u opštem slučaju, nije jednaka nijednoj utabličenoj vrednosti. Pretpostavimo da smo taj trenutak odredili. Razlika T_e-t_o potiče otuda što istom dogadjaju (istom trenutku), koji predstavlja dati iznos posmatrane longitude, odgovaraju dva čitanja u dve skale vremena koje se ne poklapa-

Kada su argumenti ekvidistantni, u praksi se najčešće koriste sledeće dve metode inverzne interpolacije: metoda iteracije i metoda inverzije reda.

Pretpostavimo da se data vrednost funkcije $y=f(x)$ nalazi izmedju sledeće dve tablične: $y_o=f(x_o)$ i $y_1=f(x_1)$ i da su nam poznati koeficijenti I Njutnove formule:

$$y=y_o+\frac{\Delta y_o}{1!\,h}(x-x_o)+\frac{\Delta^2 y_o}{2!\,h^2}(x-x_o)(x-x_1)+\ldots=y_o+\frac{q}{1!}\Delta y_o+\frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_o+\ldots$$

Poslednja jednačina se može napisati i u obliku:

$$q=\frac{y-y_o}{\Delta y_o}-\frac{q(q-1)}{2!}\frac{\Delta^2 y_o}{\Delta y_o}-\ldots=\varphi(q).$$

Osnovni zadatak inverzne interpolacije je rešen ako se odredi vrednost q koja zadovoljava poslednju jednačinu.

Prvi uslov za primenu metode iteracije u cilju odredjivanja q je ispunjen. Da bi rešenja konvergirala ka tačnoj vrednosti, potrebno je da bude ispunjen i uslov: $|\varphi'(q)|<1$. U velikom broju slučajeva oba uslova su ispunjena.

U prvoj aproksimaciji se uzima:

$$q_o=\frac{y-y_o}{\Delta y_o},$$

u drugoj aproksimaciji:

$$q_1=\frac{y-y_o}{\Delta y_o}-\frac{q_o(q_o-1)}{2!}\frac{\Delta^2 y_o}{\Delta y_o}-\ldots=\varphi(q_o).$$

U m-toj aproksimaciji je:

$$q_m=\varphi(q_{m-1}).$$

Kada se postigne da razlika q_m-q_{m-1} bude u granicama potrebne tačnosti, argument x se odredjuje iz relacije:

$$x=x_o+q_m h.$$

Metoda iteracije se koristi na sličan način i kada su u pitanju druge formule: Stirlingova, Beselova, itd.

Neka je dat konvergentan red oblika:

$$y=a_o+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots . \tag{1}$$

Za odredjivanje x koje zadovoljava poslednju jednačinu može se primeniti metoda inverzije reda.

Desnu stranu jednačine (1) smatraćemo Maklorenovim redom koji odgovara razvoju funkcije $y=f(x)$. Isto tako, pretpostavićemo da se inverzijom funkcije $y=f(x)$ dobija funkcija $x=\varphi(y)$ koja se u okolini tačke $y=y_o$ može razviti u Tejlorov red:

$$x=x_o+\frac{y-y_o}{1!}\varphi'(y_o)+\frac{(y-y_o)^2}{2!}\varphi''(y_o)+\ldots .$$

gde je y_o vrednost y za $x=0$: $y_o=a_o$.

Ako drugi član sa desne strane poslednje jednačine pomnožimo i podelimo sa a_1, treći član pomnožimo i podelimo sa a_1^2, itd., a imamo u vidu da su $x_o, \varphi'(y_o)/1!$, $\varphi''(y_o)/2!, \ldots$ konstante, ta jednačina se može napisati u obliku:

$$x=C_o+C_1\frac{y-a_o}{a_1}+C_2\left[\frac{y-a_o}{a_1}\right]^2+C_3\left[\frac{y-a_o}{a_1}\right]^3+\ldots$$

Ako u izrazu (1) umesto x pišemo desnu stranu poslednjega reda dobićemo:

$$\begin{aligned} y=a_o&+a_1\left\{C_o+C_1\frac{y-a_o}{a_1}+C_2\left[\frac{y-a_o}{a_1}\right]^2+\ldots\right\}+\\ &+a_2\left\{C_o+C_1\left[\frac{y-a_o}{a_1}\right]+C_2\left[\frac{y-a_o}{a_1}\right]^2+\ldots\right\}^2+\\ &+a_3\left\{C_o+C_1\frac{y-a_o}{a_1}+C_2\left[\frac{y-a_o}{a_2}\right]^2+\ldots\right\}^3+\ldots \end{aligned} \tag{2}$$

Ako uvedemo smenu: $\xi=\dfrac{y-a_o}{a_1}$ red (2) će postati:

$$\xi = (C_o + C_1\xi + C_2\xi^2 + \ldots) +$$

$$+ \frac{a_2}{a_1}(C_o + C_1\xi + C_2\xi^2 + \ldots)^2 +$$

$$+ \frac{a_3}{a_1}(C_o + C_1\xi + C_2\xi^2 + \ldots)^3 + \ldots \qquad (3)$$

Možemo smatrati da poslednji izraz predstavlja jednakost dva polinoma po ξ, pa se izjednačavanjem koeficijenata uz iste stepene ξ mogu odrediti konstante C_i.

Izjednačenjem nezavisnih članova s leve i s desne strane dobijamo:

$$0 = C_o + \frac{a_2}{a_1} C_o^2 + \frac{a_3}{a_1} C_o^3 + \ldots\ldots =$$

$$= C_o\left(1 + \frac{a_2}{a_1} C_o + \frac{a_3}{a_1} C_o^2 + \ldots\right) .$$

Jedno rešenje poslednje jednačine je $C_o = 0$. Pretpostavka da bi izraz u zagradi mogao biti nula otpada jer se radi o beskonačnom redu. Naime, traži se egzaktno rešenje, a ne rešenje koje bi obezbedilo da red konvergira nuli.

Ako u izraz (3) stavimo $C_o = 0$ dobićemo:

$$\xi = (C_1\xi + C_2\xi^2 + \ldots) +$$

$$+ \frac{a_2}{a_1}(C_1\xi + C_2\xi^2 + \ldots)^2 + \ldots.$$

Izjednačenjem koeficijenata uz ξ se dobija:

$C_1 = 1,$

pa je:

$$\xi = (\xi + C_2\xi^2 + C_3\xi^3 + \ldots) +$$

$$+ \frac{a_2}{a_1}(\xi + C_2\xi^2 + C_3\xi^3 + \ldots)^2 + \ldots$$

Iz poslednje relacije možemo formirati jednačine za odredjivanje ostalih C_i:

$$0=C_2+\frac{a_2}{a_1},$$

$$0=C_3+2C_2\frac{a_2}{a_1}+\frac{a_3}{a_1}, \text{ itd.}$$

S obzirom da se konstante C_i izražavaju preko a_i, interpolacioni polinom (Njutnov, Beselov i bilo koji drugi) se prethodno dovede na oblik Maklorenovog reda, pa se potom računaju C_i. Primera radi, uzmimo Gregori-Njutnov obrazac do razlika IV reda:

$$y=y_o+q\frac{\Delta y_o}{1!}+q(q-1)\frac{\Delta^2 y_o}{2!}+q(q-1)(q-2)\frac{\Delta^3 y_o}{3!}.$$

Grupisanjem članova uz iste stepene q dobija se:

$$y=y_o+q\left(\Delta y_o-\frac{\Delta^2 y_o}{2}+\frac{\Delta^3 y_o}{3}\right)+q^2\left(\frac{\Delta^2 y_o}{2}-\frac{\Delta^3 y_o}{2}\right)+q^3\frac{\Delta^3 y_o}{6}=$$

$$=a_o+a_1q+a_2q^2+a_3q^3,$$

gde je:

$$a_o=y_o,$$

$$a_1=\Delta y_o-\frac{\Delta^2 y_o}{2}+\frac{\Delta^3 y_o}{3},$$

$$a_2=\frac{\Delta^2 y_o}{2}-\frac{\Delta^3 y_o}{2} \quad \text{i}$$

$$a_3=\frac{\Delta^3 y_o}{6}.$$

Sa poznatim a_o, a_1, a_2 i a_3 vršimo inverziju po nepoznatoj q:

$$a=\frac{y-a_o}{a_1}+C_2\left[\frac{y-a_o}{a_1}\right]^2+C_3\left[\frac{y-a_o}{a_1}\right]^3+\dots$$

Kada je poznato q koje odgovara datoj vrednosti funkcije, nezavisno promenljiva x se dobija iz relacije: $x=x_o+qh$.

Ukoliko se traži x koje odgovara datoj vrednosti y, a argumenti x_k nisu ekvidistantni, koristi se Lagranžov polinom u kome funkciju treba zameniti nezavisno promenljivom, a umesto

$$x=\sum_{k=0}^{n} \frac{\Pi_{n+1}(y)}{(y-y_k)\,\Pi'_{n+1}(y_k)} \cdot$$

Inverzna interpolacija može da se primeni i u cilju odredjivanja približnih vrednosti nula funkcije $y=f(x)$, što u praksi ima veliki značaj. Ovaj zadatak se rešava tako što se inverznom interpolacijom odredjuje argument x_o koji odgovara vrednosti $f(x_o)=0$.

6. NUMERIČKO DIFERENCIRANJE

Ako je potrebno da se na osnovi tablično zadate funkcije $y=f(x)$, čiji nam je analitički izraz nepoznat, odrede izvodi, pristupa se tkz. numeričkom diferenciranju. Ono se praktikuje i kada je analitički izraz poznat, ali nepodesan za lako računanje izvoda.

Princip ove metode sastoji se u tome da se $f(x)$ zameni interpolacionim polinomom $P(x)$ i odrede izvodi $P'(x)$, $P''(x)$,....

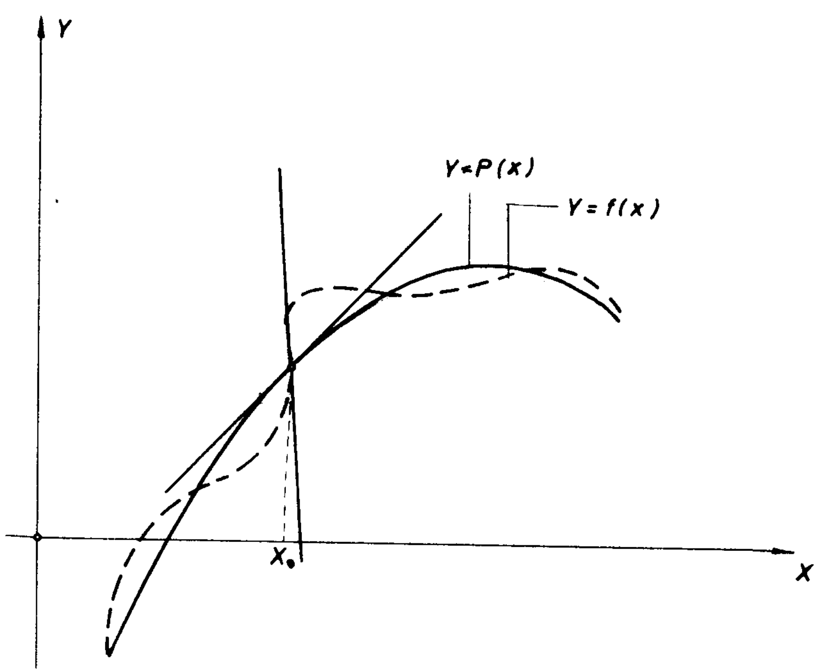
Ako je poznata greška interpolacije:

$u(x) = f(x) - P(x)$,

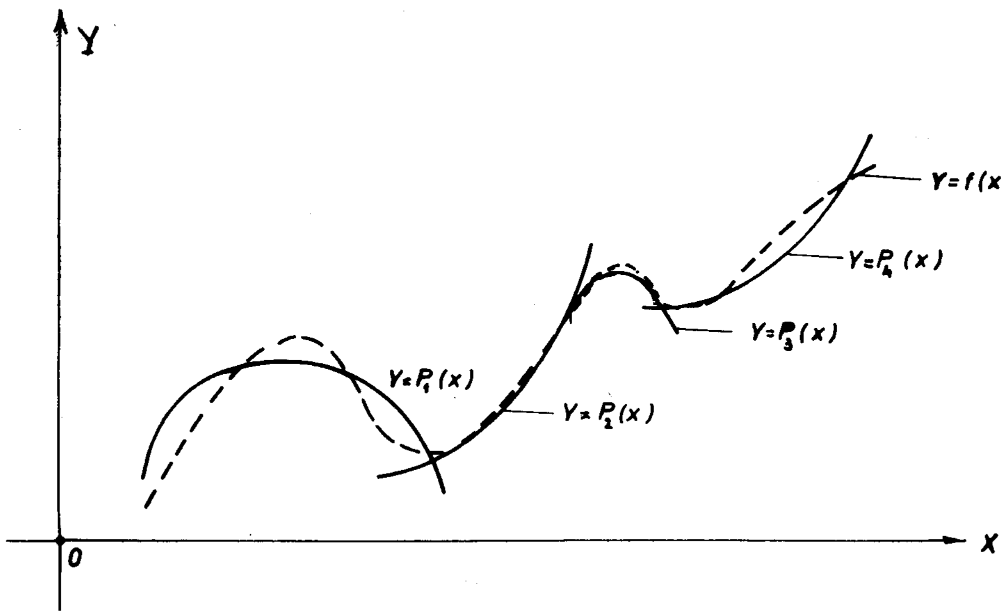
greška izvoda se odredjuje diferenciranjem leve i desne strane poslednje jednačine:

$u'(x) = f'(x) - P'(x)$.

Posebno treba naglasiti činjenicu da bliskost $f(x)$ i $P(x)$ u nekoj tačci $x=x_o$ ne garantuje uvek da će $f'(x_o)$ biti blisko $P'(x_o)$ ili da će $f''(x_o)$ biti blisko $P''(x_o)$ (vidi sliku 1) .



Dobri rezultati se postižu samo onda kada je kriva $y=f(x)$ dovoljno glatka. Kada govorimo o interpolaciji, inverznoj interpolaciji, numeričkom diferenciranju i numeričkoj integraciji implicitno pretpostavljamo da $y=f(x)$ predstavlja glatku krivu ili krivu koja se može podeliti na konačan broj glatkih segmenata koji se sa zadovoljavajućom tačnošću mogu predstaviti polinomima $P_1(x)$, $P_2(x)$, itd. (slika 2) .



Sl. 2.

Konkretna formula pomoću koje se računa numerička vrednost izvoda zavisi od izbora interpolacionog polinoma.

Za I Njutnov obrazac:

$$y(x)=y_0+q\,\Delta y_0+\frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0+\frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0+\ldots.. \qquad (1)$$

u kome je, kao što znamo, $q=\dfrac{x-x_0}{h}$, prvi izvod se dobija iz relacije:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dq}\,\frac{dq}{dx} = \frac{1}{h}\,\frac{dy}{dq}\,,$$

ili konkretno:

$$y'(x) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_o + \frac{2q-1}{2}\,\Delta^2 y_o + \frac{3q^2-6q+2}{6}\,\Delta^3 y_o + \dots\right] \qquad (2)$$

Izraz za drugi izvod će biti:

$$y''(x) = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_o + (q-1)\,\Delta^3 y_o + \dots\right] \qquad (3)$$

Kao i u slučaju interpolacije, x_o (figuriše u q) predstavlja onu tabličnu vrednost argumenta koja je najbliža i manja od datog x.

Ako se izvod računa za neku tabličnu vrednost argumenta, izrazi za izvode su još jednostavniji. Ako u izraze za izvode stavimo $x=x_o$ i $q=0$, dobićemo:

'(x,

$$y'(x_o) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_o - \frac{1}{2}\,\Delta^2 y_o + \frac{1}{3}\,\Delta^3 y_o - \dots\right]\,,$$

$$y''(x_o) = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_o - \Delta^3 y_o + \dots\right]\,, \text{ itd.}$$

Ocena greške izvoda vrši se preko izvoda funkcije u (q)

$$u(q) = h^{n+1}\,\frac{q(q-1)(q-2)\dots(q-n)}{(n+1)!}\,f^{(n+1)}(\eta)\,,$$

X

$$\frac{d}{dx}\left[u(q)\right] = \frac{d}{dq}\left[u(q)\right]\,\frac{dq}{dx} =$$

$$= \frac{h^n}{(n+1)!}\left\{f^{(n+1)}(\eta)\,\frac{d}{dq}\left[q(q-1)(q-2)\dots(q-n)\right] + \right.$$

$$\left. + q(q-1)(q-2)\dots(q-n)\,\frac{d}{dq}\,f^{(n+1)}(\eta)\right\}.$$

Ako se radi o tabličnoj vrednosti argumenta ($x=x_o$) poslednja jednačina postaje:

$$u'(x_o) = (-1)^n\,\frac{h^n}{n+1}\,f^{(n+1)}(\eta)\,.$$

Poslednja jednačina je dobijena vodeći računa o tome da je:

$$\frac{d}{dq}\Big[q(q-1)(q-2)\ldots(q-n)\Big]_{q=0} = (-1)^n\, n! \ .$$

Ako je analitički izraz za f(x) nepoznat, a h dovoljno malo, ocena greške se može dobiti i bez $f^{(n+1)}(\eta)$ smatrajući da je:

$$f^{(n+1)}(\eta) \approx \frac{\Delta^{n+1} y_o}{h^{n+1}} \ .$$

Dakle, približni izraz za grešku prvog izvoda će biti:

$$u'(x_o) \approx \frac{(-1)^n \Delta^{n+1} y_o}{h\,(n+1)} \tag{4}$$

Na sličan način odredjuju se greške izvoda višega reda.

U slučaju kad je interpolacioni obrazac Stirlingov, prvi i drugi izvod se računaju pomoću relacija:

$$y'(x) = \frac{1}{h}\Big(\Delta y_{-1/2} + q\,\Delta^2 y_{-1} + \frac{3q^2-1}{6}\,\Delta^3 y_{-3/2} + \frac{2q^3-q}{12}\,\Delta^4 y_{-2} + \ldots\Big) \ , \tag{5}$$

$$y''(x) = \frac{1}{h^2}\Big(\Delta^2 y_{-1} + q\,\Delta^3 y_{-3/2} + \frac{6q^2-1}{12}\,\Delta^4 y_{-2} + \ldots\Big) \ . \tag{6}$$

Gornje veze su dobijene posle smena:

$$\Delta y_{-1/2} = \frac{1}{2}(\Delta y_{-1} + \Delta y_o) \quad \text{i}$$

$$\Delta^3 y_{-3/2} = \frac{1}{2}(\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}) \ .$$

Ako računamo izvode u slučaju ekvidistantnih argumenata postoji mogućnost da se računanje tabličnih razlika $\Delta^k y_l$ izbegne. To je naročito interesantno ako se račun obavlja na elektronskom računaru.

Ako podjemo od Lagranžovog polinoma:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\Pi_{n+1}(x)}{(x-x_i)\Pi'_{n+1}(x_i)} y_i \ ,$$

u kome je:

$$\Pi_{n+1}(x) = (x-x_o)(x-x_1)\ldots(x-x_n) =$$

$$= q(q-1)(q-2)\ldots(q-n)\,h^{n+1} \quad \text{i}$$

$$\Pi'_{n+1}(x_i) = (x_i-x_o)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n) =$$

$$= h^n\, i(i-1)(i-2)\ldots 1(-1)(-2)\ldots[-(n-1)] =$$

$$= (-1)^{n-i}\, h^n\, i!\,(n-i)!$$

možemo lako dokazati da je:

$$y(x) \approx P(x) = q(q-1)\ldots(q-n)\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-i} y_i}{(q-i)\, i!\,(n-i)!} \ .$$

Diferenciranjem po q, a zatim po x dobija se sledeća formula za $y'(x)$:

$$y'(x) = \frac{1}{h} \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!\,(n-i)!}\, y_i \frac{d}{dq} \frac{q(q-1)\ldots(q-n)}{(q-i)} \tag{7}$$

Primera radi, izračunaćemo prvi izvod polazeći od Lagrangova polinoma drugog reda:

$$P(x) = \frac{1}{2} y_o (q-1)(q-2) - y_1\, q(q-2) + \frac{1}{2} y_2\, q(q-1) \ .$$

Izvod ovog polinoma po x će biti:

$$P'(x) = \frac{1}{h}\left[\frac{1}{2} y_o(2q-3) - y_1(2q-2) + \frac{1}{2} y_2(2q-1)\right]$$

Ako je x jednako nekoj tabličnoj vrednosti, poslednja jednačina se još pojednostavljuje:

$$y'(x_o) = \frac{1}{2h}(-3y_o + 4y_1 - y_2)\ , \quad \text{za } x=x_o$$

$$y'(x_1) = \frac{1}{2h}(-y_o + y_2)\ , \quad \text{za } x=x_1$$

$$y'(x_2) = \frac{1}{2h}(y_o - 4y_1 + 3y_2)\ , \quad \text{za } x=x_2, \text{ itd.}$$

7. NUMERIČKA INTEGRACIJA

Pošto se primitivna funkcija može odrediti samo za relativno mali broj tipova integranada, metode približne integracije, s obzirom na mogućnosti njihove široke primene, imaju značajnu ulogu. Numerička integracija se vrši i onda kada je analitički izraz za podintegralnu funkciju $f(x)$ nepoznat, kada nema smisla ni govoriti o primitivnoj funkciji, ali kada je $f(x)$ zadato tablično. To je veoma značajno za eksperimentalna istraživanja, jer najčešće se posmatraju pojave čiji se tokovi ne mogu predstaviti poznatim analitičkim izrazima.

Rešavanje odredjenog jednostrukog integrala ili kvadratura u intervalu $[a,b]$ vrši se na taj način što se podintegralna funkcija $f(x)$ zameni interpolacionim polinomom $P(x)$, a zatim se integrali taj polinom:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P(x)dx \, .$$

7.1. NJUTN-KOTESOVA FORMULA

Neka je tačkama: $x_o=a$, x_1, x_2, ..., $x_n=b$ interval $[a,b]$ podeljen na n jednakih podintervala veličine $h=(b-a)/n$ i neka su poznate vrednosti $y_i=f(x_i)$ neke neprekidne funkcije. Približna vrednost integrala te funkcije u intervalu $[a,b]$ može da se izračuna na taj način što se $f(x)$ zameni Lagranžovim polinomom. Rešenje se može dobiti u obliku:

$$\int_{x_o}^{x_n} f(x)\,dx \approx \sum_{i=o}^{n} A_i y_i \, ,$$

gde su A_i konstante koje ćemo definisati malo kasnije.

Iz prethodnog paragrafa znamo da se u slučaju ekvidistantnih argumenata Lagranžov polinom može predstaviti u obliku:

$$P(x) = \sum_{i=o}^{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!\,(n-i)!} \; \frac{q^{[n+1]}}{q-i} \; y_i \;,$$

u kome je:

$$q^{[n+1]} = q(q-1)(q-2) \ldots (q-n)$$

Imajući u vidu da je $q = \frac{x-x_o}{h}$, $dq = \frac{dx}{h}$ i da je za $x=x_o$, $q=0$, a za $x=x_n$, $q=n$, integracijom po promenljivoj q dolazimo do sledećih izraza:

$$\int_{x_o}^{x_n} P(x)dx = \int_{x_o}^{x_n} \sum_{i=o}^{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!\,(n-i)!} \; \frac{q^{[n+1]}}{q-i} \; y_i \, dx =$$

$$= \sum_{i=o}^{n} \int_{o}^{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \; \frac{q^{[n+1]}}{q-i} \; y_i \, h \, dq =$$

$$\sum_{i=o}^{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \, hy_i \int_{o}^{n} \frac{q^{[n+1]}}{q-i} \, dq \,. \qquad (1)$$

Posle smene:

$$A_i = h \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_{o}^{n} \frac{q^{[n+1]}}{q-i} \, dq \qquad (2)$$

dobija se jednačina koju je i trebalo dokazati.

Koeficijenti:

$$H_i = \frac{A_i}{b-a}$$

zovu se Kotesovi koeficijenti. Pošto je b-a=nh, H_i se definišu formulom:

$$H_i = \frac{1}{n} \; \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_{o}^{n} \frac{q^{[n+1]}}{q-i} \, dq \,. \qquad (3)$$

Konačno, Njutn-Kotesov izraz za približnu vrednost integrala ima sledeći oblik:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{i=0}^{n} H_i\, y_i \, . \tag{4}$$

Ako analiziramo koeficijente H_i uverićemo se da imaju sledeće dve osobine:

1. $\sum_{i=0}^{n} H_i = 1$ i

2. $H_i = H_{n-i}$.

Prva osobina može da se iskoristi za kontrolu računanja H_i, a druga omogućuje da se računski posao svede skoro na polovinu.

7.2. SIMPSONOVA FORMULA

Simpsonova formula se dobija direktno iz formula (3) i (4) za n=2. Na osnovi formule (3) Kotesovi koeficijenti H_o, H_1 i H_2 su:

$$H_o = \frac{1}{2}\,\frac{(-1)^2}{0!2!}\int_o^2 \frac{q(q-1)(q-2)}{q}\, dq = \frac{1}{6} \, ,$$

$$H_1 = -\frac{1}{2}\int_o^2 q(q-2)\,dq = \frac{2}{3} \quad \text{i}$$

$$H_2 = \frac{1}{4}\int_o^2 q(q-1)\, dq = \frac{1}{6} \, .$$

Prema tome, izraz za traženi integral će biti:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{i=0}^{2} H_i y_i =$$

$$= nh(H_o y_o + H_1 y_1 + H_2 y_2) =$$

$$= \frac{h}{3}\,(y_o + 4y_1 + y_2) \, . \tag{5}$$

Ako imamo na umu da je za n=2 polinom P(x) drugoga stepena, jasno nam je da jednačina (5) izražava jednakost površina isčvorove: $(x_o,y_o),(x_1,y_1)$ i (x_2,y_2) omedjene još x-osom i pravim $y=a$ i $y=b$.

Simpsonovo pravilo, koje se izražava jednačinom (5), leži u osnovi jedne druge Simpsonove formule koja je mnogo opštija.

Pretpostavimo da je broj ekvidistantnih čvorova u intervalu $[a,b]$ paran: $n=2k$. Ako formulu (5) primenimo redom na svaka dva susedna elementarna intervala (granice integracije će biti: $(x_o, x_2), (x_2, x_4), \ldots (x_{2k-2}, x_{2k})$) dobićemo sledeću jednačinu:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_o + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2+4y_3+y_4) + \ldots\ldots + \frac{h}{3}(y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k}).$$

Grupisanjem članova sa istim koeficijentima i sabiranjem graničnih ordinata dobija se <u>opšta Simpsonova formula</u> koja glasi:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[(y_o+y_{2k})+4(y_1+y_3+\ldots+y_{2k-1})+2(y_2+y_4+\ldots+y_{2k-2})\right] \qquad (6)$$

Posle smena:

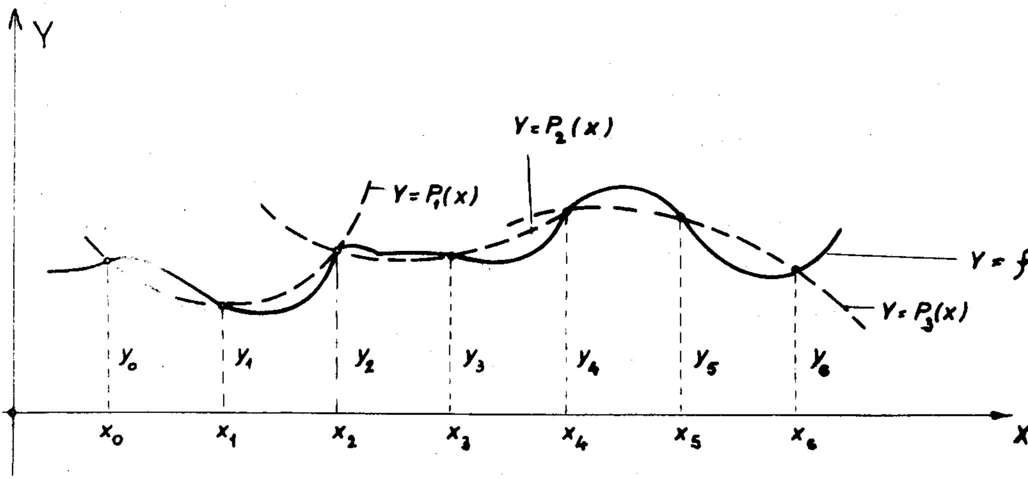
$s_1=y_1+y_3+\ldots+y_{2k-1}$ i

$s_2=y_2+y_4+\ldots+y_{2k-2}$,

Simpsonova formula dobija sledeći jednostavniji oblik:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(y_o+y_{2k}+4s_1+2s_2). \qquad (6)'$$

Geometrijski gledano, Simpsonovim pravilom se postiže zamena krive $y=f(x)$ lucima parabola koji su na slici 1 označeni isprekidanim linijama.



Sl. 1.

Pitanje tačnosti, koje je za praktičara od velike važnosti, diskutovaćemo polazeći od jednačine (5) smatrajući da je ostatak R, koji je definisan jednačinom:

$$R = \int_{x_o}^{x_2} f(x)dx - \frac{h}{3}(y_o+4y_1+y_2),$$

funkcija elementarnog razmaka izmedju čvorova (h).

Poslednji izraz za R napisaćemo u malo drukčijem obliku:

$$R(h) = \int_{x_1-h}^{x_1+h} f(x)dx - \frac{h}{3}\left[f(x_1-h)+ 4f(x_1)+f(x_1+h)\right]. \qquad (7)$$

Ako je F(x) primitivna funkcija za f(x), R(h) se može predstaviti u obliku:

$$R(h)=F(x_1+h)-F(x_1-h)-\frac{h}{3}\left[f(x_1-h)+4f(x_1)+f(x_1+h)\right].$$

Diferenciranjem po h dobijamo:

$$R'(h)=f(x_1+h)+f(x_1-h)-\frac{1}{3}\left[f(x_1-h)+4f(x_1)+f(x_1+h)\right]-\frac{h}{3}\left[-f'(x_1-h)+\right.$$

$$\left.+f'(x_1+h)\right].$$

Na jednostavan način može da se dokaže da je treći izvod funkcije R(h) jednak:

$$R'''(h) = -\frac{h}{3}\left[f'''(x_1+h) - f'''(x_1-h)\right] \tag{8}$$

ili, na osnovu Lagranžove teoreme o srednjoj vrednosti:

$$R'''(h) = -\frac{h}{3}\,2h\, f^{(IV)}(\xi), \tag{9}$$

gde je $\xi \in [x_1-h,\ x_1+h]$.

Osim toga, može se lako uočiti da je:

$$R(O) = R'(O) = R''(O).$$

Vraćajući se unazad, tj. integraleći R'''(h) u granicama od 0 do h dobićemo:

$$\int_o^h R'''(t)dt = R''(h) - R''(0) = 0 .$$

S obzirom na jednačinu (9), poslednji izraz se može napisati u obliku:

$$R''(h) = R''(0) - \frac{2}{3}\int_o^h t^2 f^{(IV)}(\xi)\; dt =$$

$$= -\frac{2}{9}h^3 f^{(IV)}(\xi) . \tag{10}$$

Nastavljajući integraciju drugog i prvog izvoda doćićemo do sledećeg izraza za grešku:

$$R(h) = -\frac{h^5}{90}\; f^{(IV)}(\eta),\ \eta \in [x_1-h,\ x_1+h] . \tag{11}$$

Ako saberemo sve ostatke R(h), kojih ima k, dobićemo ukupnu grešku opšte Simpsonove formule:

$$R(h) = -\frac{h^5}{90}\sum_{i=1}^{k} f^{(IV)}(\eta_i)$$

Pošto je, po pretpostavci, f(x) neprekidna funkcija, u intervalu $[a,b]$ uvek se može naći neko η_o koje zadovoljava relaciju:

$$f^{(IV)}(\eta_o) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} f^{(IV)}(\eta_i) .$$

Na jednostavan način može da se dokaže da je treći izvod funkcije R(h) jednak:

$$R'''(h) = -\frac{h}{3}\left[f'''(x_1+h) - f'''(x_1-h)\right] \qquad (8)$$

ili, na osnovu Lagranžove teoreme o srednjoj vrednosti:

$$R'''(h) = -\frac{h}{3}\, 2h\, f^{(IV)}(\xi), \qquad (9)$$

gde je $\xi \in [x_1-h,\ x_1+h]$.

Osim toga, može se lako uočiti da je:

$$R(O) = R'(O) = R''(O).$$

Vraćajući se unazad, tj. integraleći $R'''(h)$ u granicama od 0 do h dobićemo:

$$\int_o^h R'''(t)dt = R''(h) - R''(0) = 0.$$

S obzirom na jednačinu (9), poslednji izraz se može napisati u obliku:

$$R''(h) = R''(0) - \frac{2}{3}\int_o^h t^2 f^{(IV)}(\xi)\ dt =$$

$$= -\frac{2}{9} h^3 f^{(IV)}(\xi). \qquad (10)$$

Nastavljajući integraciju drugog i prvog izvoda doćićemo do sledećeg izraza za grešku:

$$R(h) = -\frac{h^5}{90} f^{(IV)}(\eta), \eta \in [x_1-h,\ x_1+h]. \qquad (11)$$

Ako saberemo sve ostatke R(h), kojih ima k, dobićemo ukupnu grešku opšte Simpsonove formule:

$$R(h) = -\frac{h^5}{90}\sum_{i=1}^{k} f^{(IV)}(\eta_i)$$

Pošto je, po pretpostavci, f(x) neprekidna funkcija, u intervalu $[a,b]$ uvek se može naći neko η_o koje zadovoljava relaciju:

$$f^{(IV)}(\eta_o) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} f^{(IV)}(\eta_i).$$

S obzirom na poslednju konstataciju, R(h) se može dobiti iz relacije:

$$R(h) = -\frac{kh^5}{90} f^{(IV)}(\eta_o)$$

ili:

$$R(h) = \frac{-(b-a)h^4}{180} f^{(IV)}(\eta_o)\,. \tag{12}$$

Iz poslednje jednačine je jasno da greška zavisi od veličine intervala, od osobina funkcije (na koje se ne može uticati) i od gustine čvorova. Jasno je da sa povećanjem gustine čvorova f(x) se bolje aproksimira parabolama drugog reda, pa je i greška manja. Da bi se greška R(h) svela ispod nivoa nekog unapred zadatog R_o, mora se izvršiti odgovarajući izbor h. Taj izbor je moguć ako je poznata gornja granica apsolutne vrednosti $f^{(IV)}(\eta_o)$:

$$Q = \max_{x \in [a,b]} \left| f^{(IV)}(x) \right|$$

Pod gornjim uslovima odredjujemo h iz relacije:

$$(b-a)\frac{h^4}{180}\, Q < R_o.$$

7.3. TRAPEZNO PRAVILO

<u>Trapezno pravilo</u> (ili <u>trapezna formula</u>), kao i Simpsonova, predstavlja specijalan slučaj Njutn-Kotesove. Za n=1 dobija se trapezna formula:

$$\int_{x_o}^{x_1} f(x)dx \approx H_o y_o + H_1 y_1 =$$

$$= \frac{h}{2}(y_o + y_1)\,. \tag{13}$$

Polazeći od izraza:

$$R(h) = \int_{x_o}^{x_1} f(x)dx - \frac{h}{2}\left[f(x_o) + f(x_o + h)\right] \quad ,$$

koji dva puta diferenciramo, a zatim, kao i prilikom izvodjenja izraza za grešku Simpsonove formule, izvršimo integraciju, možemo dokazati da je:

$$R(h) = -\frac{h^3}{12} f''(\eta) . \qquad (14)$$

Opšta trapezna formula se dobija primenom relacije (13) na svakom od n elementarnih intervala: $[x_o, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}(y_o+y_1) + \frac{h}{2}(y_1+y_2) + \dots + \frac{h}{2}(y_{n-1}+y_n) \qquad (15)$$

Greška opšte trapezne formule predstavlja zbir grešaka na svim elementarnim intervalima. Za nju se dobija sledeći izraz:

$$R(h) = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\eta_o) \qquad (16)$$

u kome je $\eta_o \in [a,b]$.

Tri formule numeričke integracije koje smo izložili (Njutn-Kotesova, Simpsonova i trapezna) nisu jedine, ali se u praksi najčešće koriste. Kvalitet svake od njih zavisi od reda veličine greške: $R = R(h^m)$, gde je m prirodni broj. Formula se smatra tačnijom ako je m veće. Tako, naprimer, Simpsonova formula ($m=4$) se smatra tačnijom od trapezne ($m=2$). Medjutim, od ovog pravila postoje izuzetci, jer tačnost numeričke integracije u velikoj meri zavisi i od rasporeda čvorova. Kada kriva $y=f(x)$ nije dovoljno glatka, integracija se mora vršiti na većem broju segmenata, kako aproksimacija $f(x)$ polinomom ne bi bila suviše gruba.

7.4. GAUSOVA FORMULA

Ako se formulama koje smo napred izložili ne može postići zadovoljavajuća tačnost numeričke integracije, treba pokušati još i sa Gausovom formulom koja se smatra najtačnijom, ali se u praksi izbegava zvog većeg obima računskog posla. Medjutim, savremeni računari nam omogućuju da taj problem lako prevazidjemo.

Suštinska novina u Gausovom postupku numeričke integracije je odredjivanje rasporeda vrednosti argumenta koji iz datog broja ordinata osigurava najtačniju vrednost integrala. Dakle, Gausova metoda se ne odnosi na slučajeve ekvidistantnih vrednosti argumenta. Kao što ćemo kasnije videti, vrednosti argumenta su raspoređjene po parovima koji su simetrični u odnosu na sredinu intervala integracije.

Pretpostavimo da nam je postavljen zadatak da izračunamo integral:

$$I = \int_a^b f(x)dx .$$

Iz razloga koji će postati evidentni kasnije, izvršićemo smenu promenljive tako da granice integracije budu -1 i 1:

$$x = \frac{b-a}{2}\,u + \frac{a+b}{2} .$$

Iz ove smene sledi:

$$dx = \frac{b-a}{2}\,du \quad i$$

$$I = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}\,u + \frac{a+b}{2}\right)du =$$

$$= \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} g(u)du .$$

Pretpostavimo da se g(u) može razviti u Maklorenov red:

$$g(u) = a_o + a_1u + a_2u^2 + \dots$$

koji konvergira za svako $u \in [-1,1]$. Na osnovi ove pretpostavke možemo pisati:

$$\int_{-1}^{1} g(u)du = \int_{-1}^{1} (a_o + a_1 u + a_2 u^2 + \ldots) du =$$

$$= 2\left(a_o + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{5} + \ldots\right) \qquad (17)$$

S druge strane, poslednji integral se može egzaktno izraziti preko konačnog broja vrednosti $g(u_i)$ $(i=1,2,\ldots,n)$:

$$\int_{-1}^{1} g(u)du = \sum_{i=1}^{n} C_i g(u_i) \ , \qquad (18)$$

gde su C_i konstante koje treba odrediti. Takodje, treba odrediti i u_i. Dakle, broj nepoznatih iznosi 2n.

Uporedjenjem jednačina (17) i (18) dolazimo do sledećih relacija:

$$2\left(a_o + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{5} + \ldots + \frac{a_k}{k+1}\right) = C_1\, g(u_1) + C_2\, g(u_2) + \ldots .$$

$$+ C_n g(u_n) =$$

$$= C_1(a_o + a_1 u_1 + a_2 u_1^2 + \ldots) +$$

$$+ C_2(a_o + a_1 u_2 + a_2 u_2^2 + \ldots) + \ldots$$

$$+ C_n(a_o + a_1 u_n + a_2 u_n^2 + \ldots) \ . \qquad (19)$$

Izjednačavanjem članova uz iste koeficijente a_i dolazimo do sledećeg sistema od 2n jednačina:

$$\begin{aligned}
&C_1 + C_2 + \ldots + C_n = 2 \\
&C_1 u_1 + C_2 u_2 + \ldots + C_n u_n = 0 \\
&C_1 u_1^2 + C_2 u_2^2 + \ldots + C_n u_n^2 = \frac{2}{3} \qquad (20) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&C_1 u_1^{2n-2} + C_2 u_2^{2n-2} + \ldots + C_n u_n^{2n-2} = \frac{2}{2n-1} \\
&C_1 u_1^{2n-1} + C_2 u_2^{2n-1} + \ldots + C_n u_n^{2n-1} = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Ako smatramo da 2n-1 član reda dovoljno tačno predstavlja g(u), sistem (20) ima 2n jednačina sa 2n nepoznatih: C_i, u_i

Sistem (20) nije linearan, pa njegovo rešavanje opštim algebarskim metodama nije sasvim jednostavno. Ležandr je dokazao da su u_i nule polinoma definisanih jednačinama:

$$P_n(x)= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n, \ (n=0,1,2,\ldots)$$

$P_n(x)$ se naziva Ležandrovim polinomom n-tog stepena. On ima tu osobinu da su mu svi koreni realni i različiti. Pošto su u_i nule Ležandrovog polinoma n-tog stepena, možemo ih odrediti iz relacije:

$$\frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{du^n} (u^2-1)^n = 0,$$

odnosno iz relacije:

$$\frac{d^n}{du^n} (u^2-1)^n = 0 . \tag{21}$$

Primera radi, uzmimo da je n=3. Jednačina (21) će postati:

$$\frac{d^3}{du^3}(u^2-1)^3 = \frac{d^3}{du^3} (u^6-3u^4+3u^2-1) = 0$$

Posle diferenciranja dobija se jednačina:

$$120\, u^3 - 72\, u = 0$$

iz koje sledi:

$$u_{1,3} = \pm\sqrt{\frac{3}{5}} \ ,$$

$$u_2 = 0 .$$

Vidimo da se obistinilo ono što smo napred rekli o rasporedu vrednosti argumenta: u_2 predstavlja sredinu intervala $[-1,1]$ a u_1 i u_3 čine par vrednosti simetričnih u odnosu na sredinu intervala integracije.

Kada se na gornji način odrede $u_1, u_2, \ldots, u_n$ i zamene u prvih n jednačina sistema (20), dobija se sistem od n linearnih jednačina sa n nepoznatih C_i. U konkretnom primeru, imaćemo sledeći sistem:

$$C_1+C_2+C_3=2$$

$$\sqrt{\frac{3}{5}}C_1-\sqrt{\frac{3}{5}}C_3=0$$

$$\frac{3}{5}C_1+\frac{3}{5}C_3=\frac{2}{3}.$$

Rešenja ovoga sistema su: $C_1=C_3=\frac{5}{9}$, $C_2=\frac{8}{9}$.

Na isti način dobijaju se i vrednosti date u tablici 1 koje smo pozajmili iz citirane knjige Demidoviča-Marona (str. 602).

TABLICA 1.

Vrednosti argumenata u_i i konstanata C_i u Gausovoj formuli.

n	i	u_i	C_i
4	1,4	0.861 13631	0.347 85484
	2,3	0.339 98104	0.652 14516
5	1,5	0.906 17985	0.236 92688
	2,4	0.538 46931	0.478 62868
	3	0	0.568 88889
6	1,6	0.932 46951	0.171 32450
	2,5	0.661 20939	0.360 76158
	3,4	0.238 61919	0.467 91394
7	1,7	0.949 10791	0.129 48496
	2,6	0.741 53119	0.279 70540
	3,5	0.405 84515	0.381 83006
	4	0	0.417 95918
8	1,8	0.960 28986	0.101 22854
	2,7	0.796 66648	0.222 38104
	3,6	0.525 53242	0.313 70664
	4,5	0.183 43464	0.362 68378

8. NUMERIČKO REŠAVANJE OBIČNIH DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA

Kao i u slučaju rešavanja odredjenog integrala, u matematičkoj analizi daju se rešenja opšteg integrala u konačnom obliku samo za neke tipove diferencijalnih jednačina. Osim toga, teorijska analiza ponekad daje ta rešenja u obliku koji je neupotrebljiv u praktičnim radovima. Naprimer, u obliku:

$$y = \log \frac{x}{y} + \sin x + x \ .$$

iz kojega nismo u stanju da odredimo tačnu vrednost y za dato x. Zbog ova dva razloga metode numeričke analize, kao daleko opštije i prilagodljivije praktičnim potrebama, imaju veliki značaj. Njihova opšta karakteristika i suštinska odlika je odredjivanje partikularnih rešenja, a ne opštih rešenja diferencijalnih jednačina.

Iz relativno velikog broja metoda numeričkog rešavanja diferencijalnih jednačina mi ćemo izdvojiti samo tri: Ajlerovu, modifikovanu Ajlerovu i metodu Runge-Kuta, jer se one najčešće koriste u praksi.

8.1. AJLEROVA METODA

Neka je data diferencijalna jednačina oblika:

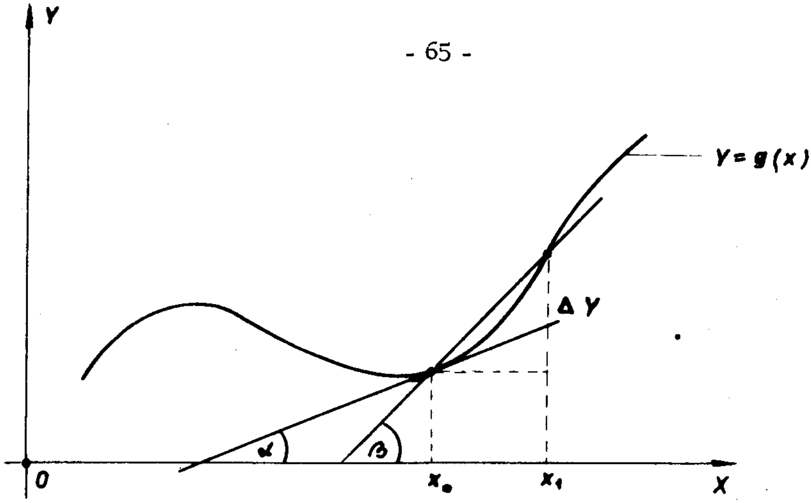
$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{1}$$

čiji se partikularni integral traži za date početne uslove: $x=x_o$ i $y=y_o$. Pretpostavimo da je $y=g(x)$ partikularni integral date jednačine za date uslove (slika 1) .

Za $x=x_1$ priraštaj funkcije $\Delta y=y_1-y_o$ se može izraziti kao:

$$\Delta y=(x_1-x_o) \ \mathrm{tg}\,\beta \ ,$$

gde je β ugao izmedju sečice i x-ose. Ako je korak integracije $x_1-x_o=h$ dovoljno mali, biće:



Sl. 1.

$$\Delta y \approx h\left(\frac{dy}{dx}\right)_o ,$$

gde indeks "o" označava da se radi o izvodu za $x=x_o$ i $y=y_o$. Taj izvod računamo stavljajući na desnoj strani jednačine (1) x_o umesto x, i y_o umesto y:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_o = f(x_o, y_o) .$$

Jasno je da sa datim početnim uslovima možemo izračunati prvu sledeću vrednost partikularnog integrala:

$$y_1 = y_o + \Delta y \approx$$

$$\approx y_o + hf(x_o, y_o) . \qquad (2)$$

Kada smo izračunali y_1, za nove početne uslove uzimamo x_1, y_1 i računamo y_2:

$$y_2 = y_1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 h =$$

$$= y_1 + hf(x_1, y_1) ,$$

$$y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) , \text{ itd.}$$

U principu, opisanim postupkom može se izračunati tablica $y_i (i=1,2,\ldots)$ koja predstavlja partikularno rešenje diferencijalne jednačine dato diskretno, u vidu tablice.

Opisana metoda naziva se Ajlerova metoda.

Usled akumulacije grešaka ovaj jednostavni postupak može nas odvesti daleko od tačnih vrednosti, jer treba imati na umu da je svaki korak baziran na prethodnim rezultatima koji već sadrže greške.

Znatno tačnija rešenja daje modifikovana Ajlerova metoda.

U prvoj aproksimaciji, y_1, koje ćemo označiti sa y_{11}, se računa kao i u Ajlerovoj metodi:

$$y_{11}=y_o + h\left(\frac{dy}{dx}\right)_o .$$

Sa datim y_{11} računa se u prvoj aproksimaciji $\frac{dy}{dx}$ za kraj prvog koraka integracije:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{11} = f(x_1,y_{11}) .$$

U drugoj aproksimaciji, y_1, koje ćemo označiti sa y_{12}, se računa po formuli:

$$y_{12} = y_o + \frac{1}{2}h\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)_o + \left(\frac{dy}{dx}\right)_{11}\right]. \qquad (3)$$

Suštinska izmena u odnosu na prethodnu metodu su: a) izvod $\left(\frac{dy}{dx}\right)_o$ zamenjuje srednjom vrednošću izvoda na krajevima koraka; b) y_i se računaju metodom aproksimacija.

Vrednost izvoda u drugoj aproksimaciji se dobija iz jednačine:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{12} = f(x_1,y_{12}) .$$

U trećoj aproksimaciji vrednost y za kraj koraka se računa po formuli:

$$y_{13} = y_o + \frac{1}{2}h\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)_o + \left(\frac{dy}{dx}\right)_{12}\right] . \qquad (4)$$

Ovaj postupak se nastavlja sve dok se ne postigne da u granicama tačnosti ne bude zadovoljen uslov:

$$y_{1k} = y_{1k-1} .$$

Konačna vrednost y_{1k}, koju ćemo označiti sa y_1, i x_1 se uzimaju za nove početne uslove i tek sada računa sledeća tablična vrednost partikularnog integrala: y_2. Na taj način možemo izračunati niz vrednosti y_i.

Može se dokazati da modifikovana Ajlerova metoda daje tačnije rezultate od Ajlerove. Mi se u taj dokaz nećemo upuštati.

8.2. METODA RUNGE-KUTA

Metoda Runge-Kuta, jednako kao i modifikovana Ajlerova, često se koristi u praksi.

Ako podjemo od diferencijalne jednačine:

$y' = f(x, y)$

i želimo da izračunamo y_1, po metodi Runge-Kuta moramo prethodno izračunati sledeća četiri parametra:

$$\begin{aligned} p_1 &= hf(x_o, y_o) , \\ p_2 &= hf(x_o + \frac{h}{2} , y_o + \frac{p_1}{2}) , \\ p_3 &= hf(x_o + \frac{h}{2} , y_o + \frac{p_2}{2}) \text{ i} \\ p_4 &= hf(x_o + h, y_o + p_3) . \end{aligned} \tag{5}$$

Ako pažljivije pogledamo gornje formule, videćemo da je p_1 priraštaj funkcije od $x = x_o$ do $x = x_1$ u prvoj aproksimaciji, da je p_2 priraštaj funkcije u drugoj aproksimaciji računat tako što se umesto izvoda za početak koraka $\left(\frac{dy}{dx}\right)_o$ uzima izvod za sredinu koraka:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = f(x_o + \frac{h}{2}, y_o + \frac{p_1}{2}) \text{ , itd.}$$

Priraštaj funkcije se računa po formuli:

$$\Delta y = y_1 - y_o = \frac{1}{6}(p_1 + 2p_2 + 2p_3 + p_4) . \tag{6}$$

Kad znamo Δy, znamo i y_1, pa x_1 i y_1 možemo uzeti za

Pokazaćemo kako se metoda Runge-Kuta može primeniti i u slučajevima kada rešavamo sisteme diferencijalnih jednačina. Neka je dat sistem:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,y,t)$$
$$\frac{dy}{dt} = g(x,y,t). \tag{7}$$

i neka su početni uslovi: $t=t_o$, $x=x_o$ i $y=y_o$ takodje dati. Po metodi Runge-Kuta računamo sledećih osam parametara:

$$p_1=hf(x_o,y_o,t_o), \quad q_1=hg(x_o,y_o,t_o),$$

$$p_2=hf(x_o+\frac{p_1}{2}, y_o+\frac{q_1}{2}, t_o+\frac{h}{2}), \quad q_2=hg(x_o+\frac{p_1}{2}, y_o+\frac{q_1}{2}, t_o+\frac{h}{2})$$

$$p_3=hf(x_o+\frac{p_2}{2}, y_o+\frac{q_2}{2}, t_o+\frac{h}{2}), \quad q_3=hg(x_o+\frac{p_2}{2}, y_o+\frac{q_2}{2}, t_o+\frac{h}{2})$$

$$p_4=hf(x_o+p_3, y_o+q_3, t_o+h), \quad q_4=hg(x_o+p_3, y_o+q_3, t_o+h).$$

Analogno prethodnim slučajevima, h predstavlja korak integracije: $h=t-t_o$.

Priraštaji funkcija x i y se računaju po formulama:

$$\Delta x = \frac{1}{6}(p_1+2p_2+2p_3+p_4) \text{ i}$$
$$\Delta y = \frac{1}{6}(q_1+2q_2+2q_3+q_4). \tag{9}$$

Za sledeći priraštaj (od $t=t_1$ do $t=t_2$) za početne uslove se uzima: $x_1=x_o+\Delta x$, $y_1=y_o+\Delta y$ i t_1. Nastavljajući ovaj postupak možemo izračunati dve tablice: jednu tablicu vrednosti $x=x(t)$ i tablicu vrednosti $y=y(t)$.

Ako je u pitanju diferencijalna jednačina n-tog reda, teorijska analiza daje dokaze po kojima se njeno rešavanje može svesti na rešavanje sistema od n diferencijalnih jednačina prvog reda. Takodje, može se postupiti i obrnuto: rešavanje sistema svesti na rešavanje jedne jednačine n-tog reda.

Primera radi, uzmimo diferencijalnu jednačinu:

$y'' = f(x,y,y')$.

Smenom $y' = y_1$ dobijamo sistem od dve diferencijalne jednačine prvog reda:

$$\frac{dy}{dx} = y_1,$$

$$\frac{dy_1}{dx} = f(x,y,y_1).$$

Kao što smo videli u ovom paragrafu, metode numeričkog rešavanja običnih diferencijalnih jednačina su dovoljno opšte. One se mogu primeniti i na sisteme diferencijalnih jednačina, odnosno, i na rešavanje diferencijalnih jednačina višega reda.

Metode koje smo izložili u ovom paragrafu primenljive su samo u slučajevima kada se diferencijalna jednačina može rešiti po izvodu najvišega reda.

GLAVA II

OSNOVI MATRIČNE ALGEBRE

9. DEFINICIJE

Skup m n brojeva rasporedjenih u obliku jedne pravougaone tablice kao što je:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{bmatrix}$$

naziva se <u>brojna matrica</u>. Brojevi a_{ij} zovu se <u>elementi</u> matrice A. Matrica A često se skraćeno zapisuje u obliku:

$$A = [a_{ij}] \quad (i=1,2,\dots,m; \; j=1,2,\dots,n)$$

ili

$$A = [a_{ij}]_{mn} \; .$$

Kaže se da je matrica A tipa mxn . Ako je m=n, matrica je <u>kvadratna.</u>

Kvadratna matrica oblika:

$$A_1 = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 \dots 0 \\ 0 & \alpha_{22} \dots 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \quad \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

zove se <u>dijagonalna</u>. U slučaju kada je: $\alpha_{11} = \alpha_{22} = \dots = \alpha_{nn} = 1$ matrica je <u>jedinična.</u> Označićemo je sa E:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 \dots 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots 1 \end{bmatrix}$$

10. ALGEBARSKE OPERACIJE SA MATRICAMA

Operacije sabiranja i oduzimanja izvode se samo sa matricama istoga tipa.

Zbir (razlika) dve matrice $A=[a_{ij}]$ i $B=[b_{ij}]$ je matrica $C=[c_{ij}]$ čiji elementi predstavljaju zbirove (razlike) elemenata matrica A i B:

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$$

Proizvodom matrica A i B naziva se matrica C čiji su elementi c_{ik} definisani relacijama:

$$c_{ik} = \sum_{j} a_{ij} \; b_{jk} \; . \tag{1}$$

Prema tome, mogu se množiti samo one matrice kod kojih je ispunjen uslov: broj kolona u prvoj matrici jednak je broju vrsta u drugoj matrici. Matrica C će imati i vrsta (koliko i prva s leva) i k kolona (koliko ih ima druga).

Radi jasnijeg shvatanja operacije množenja pretpostavimo da je matrica A tipa 2x3, a matrica B tipa 3x4:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{bmatrix}$$

Matrica C će imati i=2 vrste i k=4 kolone. Elementi c_{ik} biće definisani jednačinama:

$$c_{11}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} \qquad ,(i=1,k=1)$$

$$c_{23}=a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33} \qquad ,(i=2,k=3)$$

$$c_{12}=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} \qquad ,(i=1,k=2)$$

itd.

Mogu se lako dokazati sledeće osobine proizvoda matrica:

a) $A \cdot B \neq B \cdot A$

b) $(A+B)C = AC + BC$

c) $C(A+B) = CA + CB$.

Osobina pod a) ne važi za neke matrice. Naime, postoje specijalni slučajevi kada je zakon komutacije primenljiv i na proizvode matrica. U opštem slučaju, nije svejedno da li jednu matricu množimo drugom s leva ili s desna.

Ako u matrici A vrste i kolone izmenjaju mesta, dobiće se takozvana transponovana matrica:

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Relativno lako mogu se dokazati sledeće osobine transponovanih matrica:

a) $A'' = (A')' = A$

b) $(A+B)' = A' + B'$

c) Ako su elementi kvadratne matrice koji su simetrični u odnosu na glavnu dijagonalu uzajamno jednaki (simetrična matrica), transponovana matrica jednaka je osnovnoj.

d $ABCD\ldots' = \ldots D'C'B'A'$.

Za datu matricu A tipa nxn inverzna matrica A^{-1} je ona koja zadovoljava relaciju:

$A\,A^{-1} = A^{-1}A = E$ (jedinična matrica) .

Pitanje koje se nameće je sledeće: kako se odredjuju elementi matrice A^{-1}?

Pre nego što damo odgovor na postavljeno pitanje podsetićemo se nekih operacija i nekih definicija u vezi sa determinantama.

Ako u determinanti koja odgovara kvadratnoj matrici A tipa nxn ($\Delta = \det A$) izostavimo i-tu vrstu i j-tu kolonu dobićemo de-

a_{ij}. Označićemo ga sa D^*_{ij}.

<u>Algebarski komplement</u> elementa a_{ij} se definiše na sledeći način:

$$D_{ij}=(-1)^{i+j}D^*_{ij} \quad .$$

Kao što znamo, determinanta Δ se može razviti po elementima bilo koje vrste ili kolone na taj način što će se predstaviti kao zbir proizvoda $a_{ij}D_{ij}$. Naprimer, ako se razvoj vrši po elementima prve vrste, možemo pisati:

$$\Delta=a_{11}D_{11}+a_{12}D_{12}+\dots+a_{1n}D_{1n}.$$

Ako se, medjutim, saberu proizvodi elemenata jedne vrste (kolone) a_{ij} i algebarskih komplemenata elemenata neke druge vrste (kolone) D_{kj}, rezultat je nula.

Ako u determinanti Δ elemente vrste i zamenimo brojevima: $c_1,c_2,\dots,c_n$ ostavljajući sve ostalo nepromenjeno, dobićemo determinantu Δ' koja se može razviti na sledeći način:

$$\Delta'=c_1D_{11}+c_2D_{12}+\dots+c_nD_{1n}$$

Ako su elementi c_i jednaki odgovarajućim elementima neke vrste k $c_i=a_{kj}$, Δ' će biti jednako nuli, jer će odgovarajući elementi vrsta i i k biti jednaki.

Ako umesto c_i stavimo odgovarajuće a_{ki}, poslednja jednačina postaje:

$$\Delta'=a_{k1}D_{11}+a_{k2}D_{12}+\dots+a_{kn}D_{1n}=0.$$

Poslednjom jednačinom dokazali smo gornje tvrdjenje.

Na isti način može se dokazati da će i zbir proizvoda elemenata jedne kolone i algebarskih komplemenata odgovarajućih elemenata neke druge kolone biti jednak nuli.

Sada ćemo se vratiti na pitanje inverzije date kvadratne matrice.

Pretpostavili smo da je matrica A kvadratna tipa nxn. Matricu čiji su elementi jednaki algebarskim komplementima elemenata A označićemo sa $\bar{A}$.

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \dots & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} \dots & D_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ D_{n1} & D_{n2} \dots & D_{nn} \end{bmatrix}$$

Ako elemente matrice $\bar{A}$ podelimo sa Δ=detA, a zatim tako dobijenu matricu transponujemo, dobićemo:

$$A_o = \begin{bmatrix} \frac{D_{11}}{\Delta} & \frac{D_{22}}{\Delta} \dots & \frac{D_{n1}}{\Delta} \\ \frac{D_{12}}{\Delta} & \frac{D_{22}}{\Delta} \dots & \frac{D_{n2}}{\Delta} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{D_{1n}}{\Delta} & \frac{D_{2n}}{\Delta} \dots & \frac{D_{nn}}{\Delta} \end{bmatrix}$$

Proizvod matrica A i A_o je matrica C čiji elementi su definisani jednačinom (1):

$$c_{11}=a_{11}\frac{D_{11}}{\Delta}+a_{12}\frac{D_{12}}{\Delta}+\dots+a_{1n}\frac{D_{1n}}{\Delta}=\frac{1}{\Delta}(a_{11}D_{11}+a_{12}D_{12}+\dots+a_{1n}D_{1n}).$$

Izraz u zagradi jednak je Δ, pa je $c_{11}=1$. Na isti način se dokazuje da su i ostali elementi na glavnoj dijagonali jednaki jedinici. Elementi van glavne dijagonale jednaki su nuli. To ćemo pokazati samo na jednom primeru.

Element c_{12} jednak je:

$$c_{12}=\frac{1}{\Delta}(a_{11}D_{21}+a_{12}D_{22}+\dots+a_{1n}D_{2n}).$$

Kao što smo ranije pokazali, zbir u zagradi jednak je nuli, jer predstavlja zbir proizvoda elemenata prve vrste i algebarskih komplemenata koji odgovaraju elementima druge vrste.

Na osnovi gornjih dokaza zaključujemo da je A_o inverzna matrica u odnosu na A, jer je:

$$A\,A_o = E.$$

Vrlo lako može da se dokaže da je i:

Ne upuštajući se u dokaze navešćemo samo nekoliko osnovnih osobina inverzne matrice.

1. Determinanta inverzne matrice jednaka je recipročnoj vrednosti determinante osnovne matrice.

2. Inverzna matrica proizvoda kvadratnih matrica jednaka je proizvodu inverznih matrica činilaca, ali u obrnutom poretku:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

3. Transponovana inverzna matrica jednaka je inverznoj matrici od transponovane:

$$(A^{-1})' = (A')^{-1}.$$

Ako su elementi matrice funkcije neke promenljive x ili funkcije više promenljivih, matrica se naziva <u>funkcionalnom.</u> Kod funkcionalnih matrica definišu se izvod i integral matrice i to:

1. Izvod matrice je matrica čiji svaki element predstavlja izvod odgovarajućeg elementa osnovne matrice.

2. Integral matrice je matrica čiji elementi predstavljaju integrale odgovarajućih elemenata osnovne matrice.

GLAVA III

OSNOVI TEORIJE VEROVATNOĆE I MATEMATIČKE STATISTIKE

11. OSNOVNI POJMOVI

Teorija verovatnoće je matematička nauka koja izučava zakonitosti u slučajnim pojavama. Izučavajući prirodu i društvo često se srećemo sa pojavama čiji se ishod ne može unapred odrediti, mada za mnoge od njih poznajemo neke (ali ne i sve) uslove koji ih odredjuju. Takve pojave nazivamo slučajnim pojavama.

U astronomiji i nekim drugim naukama bavimo se merenjima rastojanja, uglova, brzina, temperatura, itd., a rezultati ponovljenih merenja su različiti uprkos tome što se trudimo da uslovi posmatranja ostaju neizmenjeni i što se posmatrana veličina ne menja u toku jedne serije ponovljenih posmatranja (eksperimenata) . Ma koliko nastojali da u jednoj seriji posmatranja održimo iste uslove, u tome, strogo uzevši, ne uspevamo jer, u opštem slučaju, i ne poznajemo sve uslove koji odredjuju ishod (rezultat) posmatranja, pa ih i ne možemo održati konstantnim.

Neka je Ω neprazan skup svih mogućih ishoda jedne serije posmatranja i neka su ω elementi toga skupa. Ako kod bacanja kocke rezultatom smatramo broj tačkica sa gornje strane, bez obzira na broj bacanja (eksperimenata) skup Ω ima samo 6 elemenata: 1,2,3,4,5,6 . On je prebrojiv. Medjutim, ako izaberemo jedan konačan skup zvezda i odredjujemo njihovu masu, izmedju najmanje moguće mase m_1 i najveće moguće mase m_2 (koje se mogu unapred odrediti) možemo očekivati bilo koji rezultat. U ovom slučaju skup Ω je beskonačan.

Beskonačni skupovi Ω, kao što znamo, mogu biti neprebrojivi (kao u poslednjem primeru) i prebrojivi. Jedan primer prebrojivog beskonačnog skupa čine brojevi zvezda koje treba posmatrati do identifikacije zvezde koja ima kolor indeks (color index) CI=0.36. Broj posmatranih zvezda do identifikacije pomenute zvezde može da ima bilo koji od ishoda: 0,1,2,... . Ako se ima u vidu beskonačnost vasione i ako se pretpostavi da se mogu posmatrati beskonačno daleke zvezde, broj elemenata skupa Ω je beskonačan.

Slučajnim dogadjajem naziva se neki podskup skupa Ω. Pojavljivanje parnog broja pri bacanju kocke predstavlja slučajni dogadjaj koji se realizuje svaki put kad je ishod jedan od elemenata podskupa: $\{2,4,6\}$. Često se elementi skupa Ω nazivaju elementarni dogadjaji.

Ako podskupovi A i B skupa Ω nemaju zajedničkih elemenata kaže se da su uzajamno isključivi (disjunktni), jer to znači da realizacija jednoga od njih isključuje realizaciju drugoga.

Ako podskup B sadrži sve elemente podskupa A kaže se da dogadjaj A implicira dogadjaj B. Drugim rečima, ishodi podskupa A predstavljaju jednovremeno pojavljivanje slučajnih dogadjaja A i B. Primera radi, neka pri bacanju kocke pojavljivanje neparnog broja predstavlja dogadjaj A: $\{1,3,5\}$, a pojavljivanje broja sa kojim je deljivo 30 - dogadjaj B: $\{1,2,3,5,6\}$. Jasno je da A implicira B.

Izvestan (siguran) dogadjaj je onaj koji će se u datoj seriji posmatranja sigurno desiti. Ako tražimo zvezdu čija je temperatura T veća od $200^{\circ}K$ sigurno ćemo je naći, jer je kod svake zvezde $T > 200^{\circ}K$. Siguran dogadjaj možemo definisati kao skup Ω.

Ako dogadjaj C predstavlja prazan podskup $\emptyset$ skupa Ω naziva se nemoguć dogadjaj.

Pretpostavimo da se dogadjaj $\bar{A}$ realizuje samo onda kad se ne realizuje dogadjaj A. Kaže se da su $\bar{A}$ i A suprotni dogadjaji. Pri bacanju kocke parni broj se pojavi samo onda kad se ne pojavi

Za podskup $\bar{A}$ se kaže da predstavlja komplement podskupa A u Ω.

Ishodi jedne slučajne pojave ne moraju biti brojevi. Oni mogu biti boje, slova, slike, itd. Svakom ishodu - svakom elementu skupa Ω - može se pomoću neke funkcije X dodeliti realni broj $X(\omega)$. $X(\omega)$ se naziva slučajna promenljiva.

Ako utvrdjujemo spektralnu klasu jednog skupa zvezda elementi skupa Ω su: $\{0, B, A, F, \ldots\}$. Svakom ovom ishodu možemo dodeliti jedan broj, kao naprimer: $X(0) = 1^2$, $X(B) = 3^2$, $X(A) = 5^2$, itd., pa će slučajna promenljiva X imati sledeće vrednosti: $1^2, 3^2, 5^2, \ldots$.

Slučajna promenljiva $X(\omega)$ iz poslednjeg primera je diskretnog tipa (prekidna), jer ne može da ima svaku vrednost iz zadatog intervala. Iz primera koji se odnosi na mase zvezda videli smo da m može da ima bilo koju vrednost iz intervala $[m_1, m_2]$, pa se kaže da je m kontinuirana (neprekidna) slučajna promenljiva.

Prilikom ponavljanja eksperimenta N puta u neizmenjenim uslovima zapaža se da odnos broja ishoda N_A koji znače realizaciju slučajnog dogadjaja A i ukupnog broja ishoda N $(f_A = N_A/N)$, koji se zove relativna učestanost ili statistička verovatnoća, sa povećanjem broja N "teži" nekom broju p_A koji se naziva verovatnoća dogadjaja A.

Izraz "teži" nema isti smisao kao u Matematičkoj analizi. Kad u Analizi kažemo da x_n teži ka x_o sa povećanjem n, to znači da za svako $n \geqslant n_o$ važi relacija: $|x_n - x_o| \leq \varepsilon$, gde je ε proizvoljno mali i unapred zadati broj. Izmedju učestanosti i verovatnoće, strogo uzevši, takav odnos ne postoji. Sa povećanjem broja ogleda razlika izmedju brojeva f_A i p_A se ne mora obavezno smanjiti, ali analogija sa prigušenim oscilacijama postoji. Naprimer, ako 100 puta bacimo dinar može se desiti da relativna učestanost lika bude 0.49, a da posle 110 bacanja ona bude 0.48. Dakle, dalje od verovatnoće $p_A = 0.50$. Medjutim, osobina "stabilizacije" relativne učestanosti pri povećanju broja eksperimenata je jedna od najizrazitijih zakonitosti u slučajnim pojavama. Švajcarski matematičar Jakov Bernuli (1654-1705) je dokazao da pri neograničenom povećanju broja eksperimenata u stabilnim uslovima relativna učestanost nekog dogadjaja će se proizvoljno malo razlikovati od u tome što znajući p_A možemo predvideti koliko puta će se realizovati dogadjaj A.

Verovatnoću p_A često ne možemo odrediti na osnovi eksperimenata, što je astronomima dobro poznato , već na osnovi razmatranja uslova koji odredjuju ishode pojave. Polazeći od toga da su stranice kocke simetrične u odnosu na centar teže, da se bacanjem kocke ne daje prednost jednom odredjenom ishodu, itd., nalazimo da je svaki ishod jednako verovatan.

Pojam verovatnoće koji je napred dat nije matematički definisan (data definicija se vezuje za ime Mizesa*) . U Teoriji verovatnoće se daju sledeće definicije:

1. Za prebrojiv skup Ω verovatnoća je nenegativna numerička funkcija P zadata na skupu Ω tako da zbir verovatnoća svih ishoda ω bude:

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1.$$

Verovatnoća dogadjaja A se definiše pomoću relacije:

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega).$$

Ako je ishoda neprebrojivo mnogo, verovatnoća se definiše kao funkcija nad skupom dogadjaja koja ima sledeće osobine:

1. $P(A) \geq 0$,
2. $P(\Omega) = 1$ (normiranost)
3. $P \bigcup_k A_k = \sum_k P(A_k)$, ako su A_k disjunktni.

Iz gornjih definicija sledi:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$

2. $P(\emptyset) = 0$.

Za ishode ω koji predstavljaju realizaciju dogadjaja A ($\omega \in A$) se kaže da su povoljni za dogadjaj A. Ako su svi ishodi $\omega \in A$ jednakoverovatni $P(\omega) = 1/n$ i uzajamno isključivi, verovat-

---

* [illegible] A. A., [illegible] 1976

noća dogadjaja A može se definisati kao odnos broja povoljnih ishoda (n_A) i broja svih mogućih ishoda (n): $p_A = n_A/n$. Ovo je tzv. klasična definicija verovatnoća koja je održiva samo ako je skup Ω prebrojiv i konačan.

Za skup Ω, koji sadrži sve moguće ishode jedne slučajne pojave, koristićemo i termin: potpuni (celi) skup ishoda ili potpuni (celi) skup elementarnih dogadjaja.

Verovatnoća $P(\Omega)$ predstavlja verovatnoću izvestnog dogadjaja ili uslov normiranosti verovatnoće.

12. TEOREME ZBIRA I PROIZVODA VEROVATNOĆA. NEZAVISNI DOGADJAJI. USLOVNA VEROVATNOĆA.

Zbirom dogadjaja A, B, C, ... naziva se dogadjaj $W = A \cup B \cup C$ ... koji se realizuje samo onda kad se realizuje bar jedan od dogadjaja A, B, C, ... ili više njih zajedno (ako nisu uzajamno isključivi). Primera radi, zamislimo da nasumice biramo zvezde i odredjujemo njihove temperature T (Kelvinovim stepenima . Neka svi rezultati $T \in [6000^{\circ}, 16000^{\circ}]$ predstavljaju dogadjaj A, a svi rezultati $T \in [10000^{\circ}, 20000^{\circ}]$ - dogadjaj B. Svi ishodi $T \in [6000^{\circ}, 20000^{\circ}]$ predstavljaju zbir dogadjaja A i B koji smo označili sa W. Jasno je da se W realizuje kad je $T \in [6000^{\circ}, 9000^{\circ}]$ (dogadjaj A), $T \in [17000^{\circ}, 20000^{\circ}]$ (dogadjaj B), $T \in [10000^{\circ}, 16000^{\circ}]$ (dogadjaji A i B), itd.

U gornjem primeru dogadjaji A i B nisu uzajamno isključivi.

Pretpostavimo da su A, B, C, ... uzajamno isključivi dogadjaji. Dokazaćemo da je verovatnoća zbira uzajamno isključivih dogadjaja jednaka zbiru verovatnoća tih dogadjaja. Ova teorema se izražava na sledeći način:

$$P(W) = P(A \cup B \cup C \ldots) = P(A) + P(B) + P(C) + \ldots$$

Radi jednostavnijeg dokaza teoreme posmatraćemo dva konačna podskupa A i B jednog potpunog skupa Ω čiji su elementi jednako verovatni ishodi. Neka A i B nemaju zajedničkih elemenata.

Za dogadjaj W povoljno je n_A ishoda koji čine podskup A i n_B ishoda koji čine podskup B. Iz klasične definicije verovatnoće sledi:

$$P(W) = \frac{n_A + n_B}{n} = \frac{n_A}{n} + \frac{n_B}{n} = P(A) + P(B).$$

Dokaz ove teoreme se izvodi na isti način i kada se radi o zbiru više slučajnih dogadjaja.

Pošto suprotni dogadjaji A i $\bar{A}$ čine potpuni skup, s obzirom na teoremu zbira verovatnoća važi relacija:

$$P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

Dogadjaji A i B su medjusobno nezavisni ako se verovatnoća jednoga od njih ne menja (ne zavisi) bez obzira na drugi. Kada kažemo "bez obzira" podrazumevamo da nije bitno da li se dogadjaj realizovao ili nije i da li imamo neku informaciju o drugom dogadjaju ili nemamo. Pojava lika, naprimer, u sedmom bacanju dinara je 1/2, bez obzira da li se on pojavio 6 puta u prethodnih 6 bacanja ili nijedanput i bez obzira da li mi znamo koliko puta se on pojavio u prethodnim bacanjima.

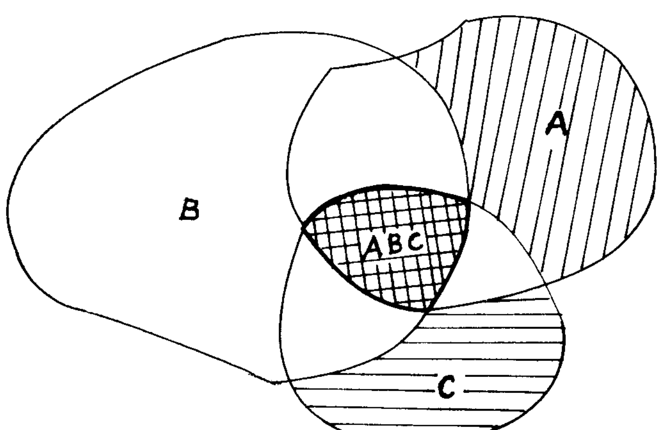
Iz neke zatvorene kutije u kojoj se nalaze 2 bele i 3 crne kuglice istih dimenzija, iste težine, iste površinske obrade, itd. dva puta izvlačimo po jednu kuglicu. Neka dogadjaj A predstavlja izvlačenje bele kuglice u prvom, a dogadjaj B - izvlačenje bele kuglice u drugom izvlačenju. Ako se posle prvog izvlačenja kuglica vraća u kutiju, verovatnoća dogadjaja B je $P(B) = 2/5$, bez obzira kakav je ishod prvog izvlačenja. A i B su nezavisni dogadjaji. Medjutim, ako se posle prvog izvlačenja kuglica ne vraća i ako znamo ishod prvog izvlačenja, P(B) će zavisiti od tog ishoda. Ako je poznato da je A realizovan, u kutiji su ostale 3 crne i 1 bela kuglica, pa je $P(B) = 1/4$, a ako nije realizovan, u kutiji su ostale 2 bele i 2 crne kuglice, pa je $P(B) = 1/2$.

Kad verovatnoća dogadjaja B zavisi od realizacije ili nerealizacije (koja nam je poznata) dogadjaja A kaže se da je B zavisan od A. Verovatnoća zavisnog dogadjaja ili uslovna verovatnoća se označava sa $P(B/A)$ ili sa $P(B/\bar{A})$, a čita: "verovatnoća B pod uslovom A(A realizovan) ili "verovatnoća B pod uslovom A"(A nije realizovan .

Nezavisnost dogadjaja A i B izražava se sledećim relacijama:

$$P(A/B) = P(A/\bar{B}) = P(A) \text{ ili}$$
$$P(B/A) = P(B/\bar{A}) = P(B).$$

Proizvodom dogadjaja A, B, C,... naziva se dogadjaj $W = ABC\ldots$ čija realizacija znači realizaciju i A, i B, i C,........ Podskupovi A, B, C,... skupa Ω mogu da imaju zajedničkih elemenata. Svaki ishod iz njihovog zajedničkog preseka predstavlja realizaciju svih tih dogadjaja zajedno (vidi sliku 1).



Sl. 1.

Verovatnoća proizvoda dva dogadjaja jednaka je proizvodu verovatnoće jednoga od njih i uslovne verovatnoće drugoga pod oslovom da je prvi realizovan:

$P(AB) = P(A)\ P(B/A)$ ili:

$P(AB) = P(B)\ P(A/B)$.

Neka je: n-broj elemenata potpunog skupa jednakoverovatnih ishoda Ω, n_A-broj elemenata podskupa A, n_B-broj elemenata podskupa B i n_{AB}- broj elemenata preseka podskupova A i B.

Verovatnoća dogadjaja W=AB iznosi:

$P(AB) = n_{AB}/n = (n_A/n)(n_{AB}/n_A) = P(A)\ n_{AB}/n_A$.

Pretpostavimo da je A realizovan. Kolika je verovatnoća B?

Realizacija A podrazumeva bilo koji od n_A ishoda podskupa A. Od tih n_A ishoda za B je povoljno samo n_{AB}, pa je:

$P(B/A) = n_{AB}/n_A$.

Iz gornjih relacija sledi:

$P(AB) = P(A)\ P(B/A)$.

Na isti način mogli smo dokazati da je:

$P(AB) = P(B)\ P(A/B)$.

Ako su A i B nezavisni dogadjaji, važi relacija:

$P(AB) = P(A)\ P(B)$.

U opštijem slučaju, dokazuje se da je:

$P(ABCD\ldots) = P(A)\ P(B/A)\ P(C/AB)\ P(D/ABC)\ldots,$

odnosno, za slučaj nezavisnih dogadjaja:

$P(ABCD\ldots) = P(A)\ P(B)\ P(C)\ P(D)\ldots$

Broj $P(D/ABC)$ predstavlja verovatnoću dogadjaja D odredjenu pod uslovom da je dogadjaj W=ABC realizovan.

Na osnovi teoreme proizvoda dokazuje se i sledeće pravilo: ako je dogadjaj A nezavisan u odnosu na dogadjaj B i dogadjaj B je nezavisan od dogadjaja A.

Iz teoreme proizvoda sledi:

$P(AB) = P(B)\ P(A/B) = P(B)\ P(A)$,

$P(AB) = P(A)\,P(B/A).$

Pošto su leve strane poslednjih jednačina jednake, jednake su i desne:

$P(A)\,P(B) = P(A)\,P(B/A).$

Ova relacija je moguća samo ako je:

$P(B/A) = P(B),$

što izražava ništa drugo do nezavisnost B od A.

13. FUNKCIJA RASPODELE I GUSTINA RASPODELE VEROVATNOĆE

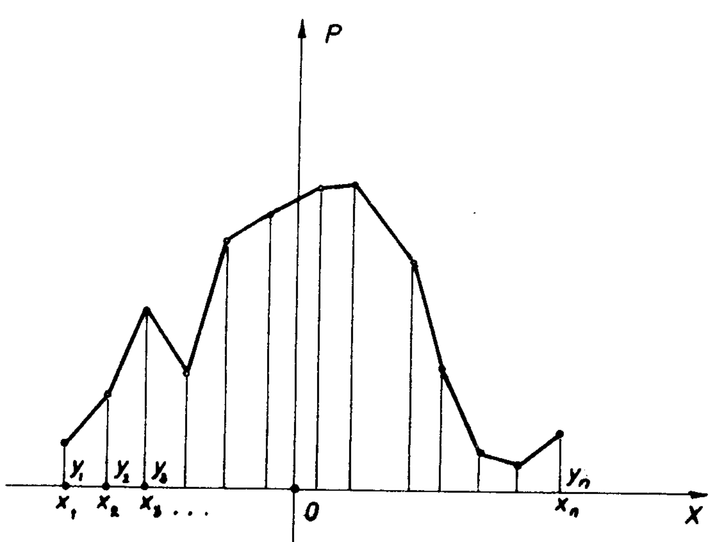
Neka je $S_x = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ prebrojiv i potpun skup ishoda slučajne promenljive X (skup realnih brojeva) i neka je $p_i = P(x_i)$ verovatnoća ishoda x_i. Sa stanovišta Teorije verovatnoće X je odredjeno ako je za svako $x_i \in S_x$ poznato odgovarajuće p_i ili, drugim rečima, ako je poznat potpuni skup parova realnih brojeva (x_i, p_i). Tada se kaže da je poznata raspodela verovatnoće.

Raspodela verovatnoća može da se dâ na razne načine:

a) u obliku niza raspodele:

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \ldots & x_n \\ p_1 & p_2 & p_3 \ldots & p_n \end{matrix} ;$$

b) u obliku mnogougaonika raspodele (slika 1): na apscisnu osu Dekartovog koordinatnog sistema nanose se vrednosti x_i, a na ordinatnu - odgovarajuće verovatnoće p_i i tako dobijene tačke spoje izlomljenom linojom.



Ako je X slučajna promenljiva neprekidnog tipa, predstavljanje raspodele verovatnoća na gornja dva načina je nemoguće. Uobičajeno je da se posmatra verovatnoća $F(x)$ dogadjaja $X < x$, a ne verovatnoća $P(x) = P(X = x)$.

Funkcija $F(x) = P(X < x)$ predstavlja verovatnoću da slučajna promenljiva X ima neku vrednost iz intervala: $(-\infty, x)$. $F(x)$ se naziva funkcija raspodele verovatnoće, integralna funkcija raspodele ili integralni zakon raspodele verovatnoće.

U praktičnom rešavanju različitih zadataka često se traži verovatnoća da X ima neku vrednost iz intervala $[\alpha, \beta)$. Neka je dogadjaj A realizovan kad je $X < \beta$, dogadjaj B - kad je $X < \alpha$ i dogadjaj C - kad je $X \in [\alpha, \beta)$. Dogadjaji B i C su uzajamno isključivi, a dogadjaj A predstavlja njihov zbir, pa je:

$$P(A) = P(B) + P(C)$$

ili, s obzirom na definiciju $F(x)$:

$$F(\beta) = F(\alpha) + P(\alpha \leq X < \beta).$$

Pošto je X neprekidna slučajna promenljiva, verovatnoća da X ima neku odredjenu vrednost, recimo, $X = \alpha$, je nula (to ćemo kasnije pokazati), pa $P(\alpha \leq X < \beta)$ možemo zameniti sa $P(\alpha \leq X \leq \beta)$ ili $P(\alpha < X < \beta)$. Prema tome, poslednju jednačinu možemo napisati u obliku:

$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = F(\beta) - F(\alpha). \qquad (1)$$

Kad kažemo da je verovatnoća $X = \alpha$ (X - neprekidna slučajna promenljiva) jednaka nuli, to ne znači da je taj dogadjaj nemoguć. Verovatnoća da brzina zvezde bude tačno 30 km/sec jednaka je nuli, jer, strogo uzevši, nikada nismo u stanju da saznamo da li je taj dogadjaj proizišao ili nije. Zbog ograničene preciznosti naših instrumenata u stanju smo da odredimo samo granice užeg ili šireg intervala u kome se nalazi pomenuta brzina, a to ne znači da ona ne može da bude i tačno 30 km/sec.

Ako je u intervalu $[\alpha, \beta]$ $F(x)$ neprekidna funkcija, dokaz gornjeg tvrdjenja se lako izvodi:

$$P(X = \alpha) = \lim_{\alpha \to \beta} P(\alpha \leq X \leq \beta) = \lim_{\alpha \to \beta} [F(\beta) - F(\alpha)] = 0.$$

Verovatnoća da X ima neku vrednost izmedju x i $x+\Delta x$ je jednaka:

$$P(x \leq X \leq x+\Delta x) = F(x+\Delta x) - F(x).$$

Srednja verovatnoća na intervalu $[x, x+\Delta x]$ se dobija deobom leve i desne strane poslednje jednačine sa veličinom intervala: Δx. Ako postoji:

$$\lim_{x \to o} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x),$$

kao što znamo iz Analize, važi relacija:

$$F'(x) = f(x).$$

Funkcija $f(x)$ se naziva gustina verovatnoće. Ona predstavlja verovatnoću da X pripada jediničnom intervalu oko x. U užoj okolini dx broja x može se smatrati da je $f(x)$konstantno, pa proizvod $f(x)dx$ predstavlja verovatnoću da X pripada toj užoj okolini ili, kako se drukčije kaže, $f(x)dx$ predstavlja elementarnu verovatnoću ili element verovatnoće.

Iz definicija $F(x)$ i $f(x)$ sledi:

$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} F'(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx .$$

S obzirom da je:

$$F(x) = P(X < x)$$

ili:

$$F(x) = P(-\infty < X < x)$$

izmedju $F(x)$i $f(x)$važi relacija:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx . \qquad (2)$$

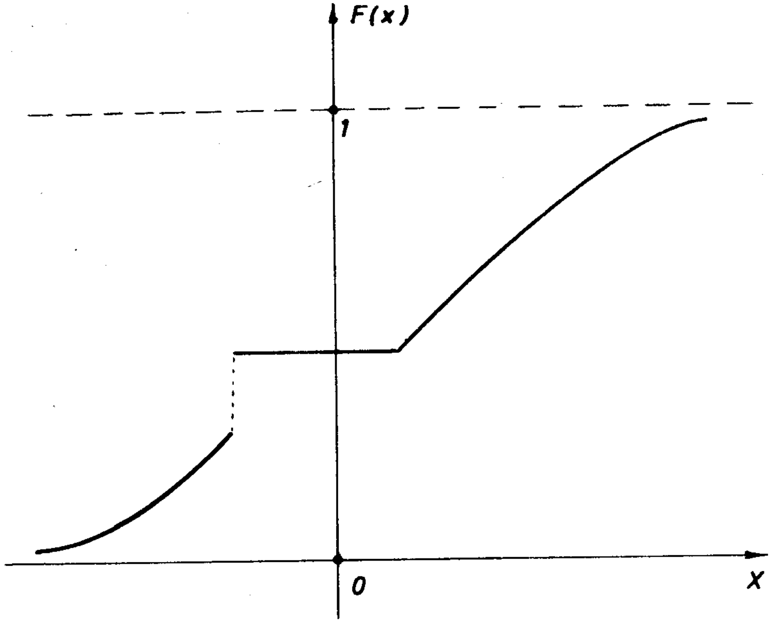
Kriva linija koja grafički predstavlja funkciju $y = F(x)$ (slika 2) naziva se kriva raspodele verovatnoće.

Navešćemo nekoliko najvažnijih osobina funkcije raspodele i gustine raspodele verovatnoća i to:

a) $F(x)$ je nenegativna i neopadajuća funkcija x (slika 2). Po definiciji, $F(x)$ predstavlja verovatnoću, pa je po prvoj osobini verovatnoće (strana 79) $F(x) \geq 0$.

Ako je $x_2 \geqslant x_1$ možemo pisati:

$$P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 < X \leq x_2)$$



Sl. 2.

Pošto je $P(x_1 \leq X \leq x_2) \geq 0$, to je:

$F(x_2) - F(x_1) \geq 0$.

Dakle, za svako $x_2 \geq x_1$, $F(x_2) \geq F(x_1)$, odnosno $F(x)$je neopadajuća funkcija x.

b) Kada $x \to -\infty$, $F(x) \to 0$, a kada $x \to +\infty$, $F(x) \to 1$.

Ova osobina sledi direktno iz definicije $F(x)$ i definici - je verovatnoće.

c) Gustina raspodele $f(x)$ je nenegativna funkcija x. Iz Analize je poznato da izvod neopadajuće funkcije mora biti veći ili jednak nuli. Pošto je $F'(x) = f(x)$, $f(x) \geq 0$.

d) Integral funkcije $f(x)$ u intervalu: $(-\infty, \infty)$ iznosi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

Pošto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = P(-\infty < X < \infty)$$

predstavlja verovatnoću izvestnog dogadjaja, to je pomenuti integral

14. BROJNE KARAKTERISTIKE SLUČAJNIH PROMENLJIVIH: MATEMATIČKO OČEKIVANJE, MODA, MEDIJANA, DISPERZIJA, MOMENTI.

Jedna od osnovnih karakteristika slučajne promenljive je njen položaj na brojnoj osi: interval u kome se nalaze sve moguće vrednosti slučajne promenljive i eventualno ona njena vrednost oko koje se grupišu ti rezultati ili, pak, ona vrednost koja ima središnji položaj. Srednja vrednost slučajne promenljive može da predstavlja korisnu informaciju o slučajnoj promenljivoj. U Teoriji verovatnoće definisan je pojam matematičko očekivanje koje se drukčije zove teorijska srednja vrednost slučajne promenljive, a koje predstavlja pouzdaniju informaciju o položaju slučajne promenljive na brojnoj osi.

Neka je X slučajna promenljiva diskretnog tipa zadata na konačnom skupu S_x sa sledećim elementima: $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ kojima odgovaraju verovatnoće: $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. Srednja aritmetička vrednost se definiše pomoću relacije:

$$M'(X) = \frac{x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n} = \frac{\sum_i x_ip_i}{\sum_i p_i} .$$

Ako je S_x potpuni skup, $\sum_i p_i = 1$, pa je:

$$M'(X) = M(X) = \sum_i x_ip_i \tag{1}$$

M(X) se (pod gornjim uslovom) naziva matematičko očekivanje. Prema tome, za datu diskretnu slučajnu promenljivu X sa konačno mnogo ishoda, matematičko očekivanje se definiše kao zbir proizvoda svih ishoda i odgovarajućih verovatnoća.

U principu, srednja aritmetička vrednost i matematičko očekivanje su dva različita parametra, mada pri velikom broju merenja srednja vrednost teži matematičkom očekivanju.

Logički smisao srednje aritmetičke vrednosti videćemo iz sledećeg primera:

Pretpostavimo da smo u toku jedne noći na istom instrumentu i pod istim drugim uslovima (isti katalog, približno isti meteorološki uslovi, itd.) posmatrali 5 grupa zvezda sa ciljem da odredimo trenutnu širinu φ_m. Neka je u prvoj grupi bilo n_1 zvezda, u drugoj n_2, u trećoj n_3, itd. Neka su: $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_5$ srednje širine po grupama. Pridajući jednak značaj posmatranju svake zvezde, srednju širinu za datu posmatračku noć računamo po formuli:

$$\varphi_m = \frac{\varphi'_1 + \varphi'_2 + \ldots + \varphi'_{n_1} + \varphi'_{n_1+1} + \ldots + \varphi'_{n_1+n_2} + \varphi'_{n_1+n_2+n_3+n_4+n_5}}{n_1+n_2+\ldots+n_5}$$

u kojoj su φ'_k širine dobijene iz posmatranja pojedinih zvezda.

Pošto je:

$$\varphi_1 = \frac{1}{n_1}(\varphi'_1 + \varphi'_2 + \ldots + \varphi'_{n_1})$$

ili:

$$n_1 \varphi_1 = \varphi'_1 + \varphi'_2 + \ldots + \varphi'_{n_1} \,,$$

zatim,

$$n_2 \varphi_2 = \varphi'_{n_1+1} + \varphi'_{n_1+2} + \ldots + \varphi'_{n_1+n_2} \,, \text{ itd.}$$

izraz za φ_m može se napisati u sledećem obliku:

$$\varphi_m = \frac{n_1 \varphi_1 + n_2 \varphi_2 + \ldots + n_5 \varphi_5}{n_1+n_2+\ldots+n_5} \qquad (2)$$

Ako ukupan broj posmatranih zvezda uzmemo za jedinicu $(\sum_k n_k = 1)$, a $n_1, n_2, \ldots$ zamenimo sa: $n'_1 = n_1/\sum n'_k$, $n'_2 = n_2/\sum n_k, \ldots$ jednačina (2) postaje:

$$\varphi_m = n'_1 \varphi_1 + n'_2 \varphi_2 + \ldots + n'_5 \varphi_5 = \sum_k n'_k \varphi_k \qquad (3)$$

Sličnost izraza (1) i (3) je očigledna. Pošto skup $\{\varphi_i\}$ nije potpuni, poslednja jednačina definiše srednju aritmetičku vrednost, a ne matematičko očekivanje, kako bi se moglo zaključiti na osno-

Ako je: $m=M(X)$, razlike x_1-m, x_2-m, ... predstavljaju odstupanja pojedinih vrednosti X od konstante. Verovatnoće tih odstupanja jednake su verovatnoćama odgovarajućih x_k. Dizanjem na kvadrat svake od razlika x_k-m dobićemo skup ishoda nove slučajne promenljive za koju je raspodela verovatnoće ista kao i u slučaju promenljive X. Pomenutim algebarskim operacijama nisu promenjene verovatnoće. Da bismo to lakše shvatili razmotrićemo primer bacanja kocke.

Slučajna veličina X, koja predstavlja broj sa gornje strane može da ima sledeće ishode: $\{1,2,3,4,5,6\}$. Verovatnoća svakoga od tih ishoda je 1/6. Ako umesto X posmatramo slučajnu promenljivu $Y=X^2$, ona može imati sledeće ishode: $\{1,4,9,16,25,36\}$. Verovatnoća bilo kog od ovih ishoda jednaka je količniku broja povoljnih i ukupnog broja rezultata. Dakle, jednaka je 1/6 ili, možemo reći, jednaka je verovatnoći odgovarajućeg ishoda slučajne promenljive X.

Slučajna promenljiva $(X-m)^2$ može da ima sledeće ishode:

$$(X-m)^2: \begin{matrix} (x_1-m)^2, & (x_2-m)^2, & \dots & (x_n-m)^2 \\ p_1 & p_2 & & p_n \end{matrix}$$

Sa p_i, kao i ranije, označili smo odgovarajuće verovatnoće.

Disperzija slučajne promenljive X se definiše kao matematičko očekivanje $(X-m)^2$. Za promenljivu diskretnog tipa zadatu na konačnom potpunom skupu S_x disperzija se izražava jednačinom:

$$D(X)=M(X-m)^2=\frac{p_1(x_1-m)^2+p_2(x_2-m)^2+\dots+p_n(x_n-m)^2}{p_1+p_2+\dots+p_n}$$

ili:

$$D(X)=\sigma_x^2=\frac{\sum_i p_i(x_i-m)^2}{\sum_i p_i} \qquad (4)$$

Navešćemo samo neke osobine matematičkog očekivanja i

...je (one koje ćemo koristiti u daljem izlaganju Teorije verovatnoće i Matematičke statistike).

a) Matematičko očekivanje neke konstante jednako je toj konstanti:

$$M(k) = k .$$

b) Matematičko očekivanje zbira dve slučajne promenljive jednako je zbiru matematičkih očekivanja tih veličina.

Neka su X i Y dve slučajne promenljive sa konačnim potpunim skupovima ishoda:

$$X: \left| \begin{array}{lll} x_1, x_2, \ldots, & & x_n \\ p_1 & p_2 & p_n \end{array} \right. \qquad Y: \left| \begin{array}{lll} y_1, y_2, \ldots, & & y_m \\ p'_1 & p'_2 & p'_m \end{array} \right.$$

Kada X ima vrednost x_k, Y može da ima bilo koju od datih m vrednosti. Prema tome, slučajna promenljiva $Z=X+Y$ ima onoliko ishoda koliko se parova x_i+y_j može sastaviti od n ishoda X i m ishoda Y. Taj broj je mn:

$$Z: \left| \begin{array}{lllllll} x_1+y_1, & x_1+y_2, \ldots, & x_1+y_m; & x_2+y_1, & x_2+y_2, \ldots & x_2+y_m, \ldots & x_n+y_n \\ p_{11} & p_{12} & p_{1m} & p_{21} & p_{22} & p_{2m} & p_{nm} \end{array} \right.$$

gde su p_{kl} verovatnoće zbirova x_k+y_l. Verovatnoće p_{kl} predstavljaju verovatnoće jednovremenog pojavljivanja x_k i y_l (proizvoda dogadjaja). Prema tome, važiće jednačine:

$$p_{kl} = P(x_k)\, P(y_l/x_k) = P(y_l)\, P(x_k/y_l) .$$

Gornja šema u kojoj su predstavljeni ishodi slučajne promenljive $Z=X+Y$ često se piše i u obliku:

	x_1	$x_2 \ldots$	x_n
y_1	p_{11}	p_{12}	p_{1n}
y_2	p_{21}	p_{22}	p_{2n}
..	.....	.....	.....
y_n	p_{m1}	p_{m2}	p_{mn}

Matematičko očekivanje slučajne promenljive Z, po definiciji, iznosi:

$$M(X+Y)=\sum_k \sum_l (x_k+y_l)\, p_{kl} \ .$$

Poslednja relacija može da se napiše i u obliku:

$$M(X+Y)=\sum_k P(x_k)\, x_k \sum_l P(y_l/x_k)+\sum_l P(y_l)\, y_l \sum_k P(x_k/y_l)$$

ili:

$$M(X+Y)=\sum_k P(x_k)\, x_k + \sum_l P(y_l)\, y_l = M(X)+ M(Y). \qquad (5)$$

Jednačina (5) je izvedena pod uslovima:

$$\sum_l P(y_l/x_k) = 1 \quad \text{i}$$

$$\sum_k P(x_k/y_l) = 1 \ .$$

Gornji uslovi predstavljaju verovatnoću barem jednoga ishoda y_l pod uslovom x_k i verovatnoću jednoga x_k pod uslovom y_l. Pošto se u prvom slučaju sabiranje vrši po svim mogućim indeksima l, a u drugom slučaju po svim mogućim k i pošto se radi o potpunim skupovima ishoda, pomenuti uslovi su uvek ispunjeni.

Relacija (5) važi bez obzira da li su X i Y uzajamno nezavisne slučajne promenljive.

c) Matematičko očekivanje proizvoda nezavisnih slučajnih veličina jednako je proizvodu njihovih matematičkih očekivanja.

Proizvod X Y može imati sledećih m n vrednosti:

$$X\,Y : \begin{array}{|cccccccccc} x_1y_1, & x_1y_2, & \ldots, & x_1y_m; & x_2y_1, & x_2y_2, & \ldots, & x_2y_m; & \ldots, & x_ny_m \\ p_{11} & p_{12} & & p_{1m} & p_{21} & p_{22} & & p_{2m} & & p_{mn} \end{array}$$

Pošto su X i Y uzajamno nezavisni, $p_{kl}=P(x_k)\, P(y_l)$. Matematičko očekivanje slučajne promenljive $Z = XY$ biće:

$$M(XY)=\sum_k \sum_l P(x_k)\, P(y_l)\, x_k y_l \quad \text{ili:}$$

$$M(XY)=\sum_k P(x_k)\, x_k \sum_l P(y_l)\, y_l = M(X)\, M(Y) \qquad (6)$$

d) Disperzija slučajne promenljive jednaka je razlici izmedju matematičkog očekivanja kvadrata te slučajne veličine i

Ako je x_o matematičko očekivanje X, disperzija D(X) jednaka je:

$$D(X) = M(X-x_o)^2 = M(X^2 - 2Xx_o + x_o^2) =$$
$$= M(X^2) - 2x_o M(X) + M(x_o^2) =$$
$$= M(X^2) - 2x_o^2 + x_o^2 =$$
$$= M(X^2) - x_o^2$$

ili:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 \qquad (7)$$

Poslednja veza ima veliki praktični značaj, jer omogućuje računanje D(X) i bez prethodnog računanja razlika $x_i - x_o$ i njihovih kvadrata.

e) Disperzija konstante k jednaka je nuli:

$D(k) = 0$

f) Disperzija zbira ili razlike dve nezavisne slučajne promenljive jednaka je zbiru njihovih disperzija. Ako slučajne promenljive nisu nezavisne, disperzija zbira jednaka je zbiru disperzija i dvostrukog korelacionog momenta ovih veličina. Definiciju korelacionog momenta daćemo kasnije.

Pošto je:

$M(X+Y) = x_o + y_o,$

na osnovu jednačine (7) možemo pisati:

$$D(X+Y) = M(X+Y)^2 - [M(X+Y)]^2 =$$
$$= M(X^2) + 2M(XY) + M(Y^2) - (x_o + y_o)^2$$

ili:

$$D(X+Y) = M(X^2) - x_o^2 + M(Y^2) - y_o^2 + 2M(XY) - 2x_o y_o .$$

Dakle:

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2[M(XY) - x_o y_o] . \qquad (8)$$

Pošto je matematičko očekivanje konstante jednako konstanti i pošto je matematičko očekivanje zbira ili razlike slučajnih veličina jednako zbiru, odnosno, razlici njihovih matematičkih očekivanja, važiće sledeće relacije:

$$M(XY)-x_o y_o = M(XY-x_o y_o) = M(XY-x_o Y-y_o X+x_o y_o) =$$
$$= M[X(Y-y_o)-x_o(Y-y_o)] = M[(Y-y_o)(X-x_o)] \ .$$

Izraz:

$$K_{xy} = M[(X-x_o)(Y-y_o)] \qquad (9)$$

definiše tzv. korelacioni moment slučajnih veličina X i Y.

Iz jednačina (8) i (9) proizilazi da je disperzija zbira jednaka:

$$D(X+Y) = D(X)+D(Y)+2K_{xy}. \qquad (10)$$

Ako su X i Y uzajamno nezavisni, $M(XY)=M(X)M(Y)$, pa se jednačina (8) može napisati u obliku:

$$D(X+Y) = D(X)+D(Y)+2(x_o y_o - x_o y_o)$$

ili:

$$D(X+Y) = D(X)+D(Y). \qquad (11)$$

Na potpuno isti način može se dokazati da je:

$$D(X-Y) = D(X)+D(Y)-2K_{xy} \qquad (12)$$

ili

$$D(X-Y) = D(X)+D(Y), \qquad (13)$$

zavisno od toga da li su X i Y uzajamno zavisne ili nezavisne slučajne promenljive.

g) Ako je U slučajna promenljiva definisana kao:

$U = kX$,

gde je k konstanta, a X slučajna promenljiva, disperzija U zadovoljava relacije:

$$D(kX) = M(k^2X^2)-[M(kX)]^2 = k^2M(X^2)-[kM(X)]^2 = k^2[M(X^2)-M^2(X)].$$

S obzirom na jednačinu (7), izraz u poslednjoj velikoj zagradi predstavlja disperziju X, pa možemo pisati:

$$D(kX) = k^2D(X) \ . \qquad (14)$$

h) Ako je W slučajna promenljiva definisana jednačinom:

$W = aX+bY+cZ+\ldots+k$,

gde su a, b, c, ... konstante, disperzija W može da se izračuna pomoću jednačine:

$$D(W) = a^2D(X)+b^2D(Y)+c^2D(Z)+\ldots \qquad (15)$$

Poslednja jednačina implicira hipotezu o uzajamnoj nezavisnosti $X, Y, Z, \ldots$

Neka je U funkcija nezavisno promenljivih slučajnih veličina: $X, Y, Z, \ldots$ čije su disperzije: $\sigma_x^2, \sigma_y^2, \sigma_z^2 \ldots$:

$$U = f(X, Y, Z, \ldots) .$$

Ako se $f(X, Y, Z, \ldots)$ može razviti u Maklorenov red:

$$U = f(X_o, Y_o, Z_o, \ldots) + (X - X_o)\left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)_o + (Y - Y_o)\left(\frac{\partial f}{\partial Y}\right)_o + (Z - Z_o)\left(\frac{\partial f}{\partial Z}\right)_o + \ldots$$

izmedju disperzije σ_u^2 i disperzija nezavisno promenljivih važiće relacija:

$$\sigma_u^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)_o^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial Y}\right)_o^2 \sigma_y^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial Z}\right)_o^2 \sigma_z^2 + \ldots . \qquad (16)$$

Ako su priraštaji drugog i višeg reda mali i ako su izvodi drugog i višeg reda ograničeni, poslednja relacija može da posluži za računanje σ_u^2 kad su poznate disperzije nezavisno promenljivih.

i) Disperzija proizvoda centriranih i nezavisnih slučajnih promenljivih jednaka je proizvodu njihovih disperzija.

Ako je x_o matematičko očekivanje X, slučajna promenljiva $X - x_o$ naziva se centriranom slučajnom promenljivom.

Za dve uzajamno nezavisne slučajne promenljive X i Y važi relacija:

$$D(XY) = D(X)D(Y) + [M(X)]^2 D(Y) + [M(Y)]^2 D(X). \qquad (17)$$

Neka je $Z = XY$ nova slučajna promenljiva čije je matematičko očekivanje $M(Z) = z_o$. Pošto su, po pretpostavci, X i Y uzajamno nezavisni, $z_o = x_o y_o$, pa možemo pisati sledeću relaciju:

$$D(XY) = D(Z - z_o)^2 = M(XY - x_o y_o)^2 = M(X^2Y^2) - 2x_o y_o M(XY) + x_o^2 y_o^2 = M(X^2Y^2) - x_o^2 y_o^2 .$$

Pošto su X i Y uzajamno nezavisne slučajne promenljive, kvadrati X^2 i Y^2 su, takodje, uzajamno nezavisne slučajne promenljive. Polazeći od ove postavke, dolazimo do jednačina:

$$M(X^2Y^2)=M(X^2)M(Y^2)\ ,$$

$$M(XY)=x_oy_o\ ,$$

$$D(XY)=M(X^2)M(Y^2)-x_o^2y_o^2\ ,$$

$$D(X)=M(X^2)-x_o^2 \quad \text{i}$$

$$D(Y)=M(Y^2)-y_o^2\ .$$

Zamenom $M(X^2)$ i $M(Y^2)$ u trećoj jednačini odgovarajućom desnom stranom poslednje dve jednačine dobijamo traženi izraz za $D(XY)$:

$$D(XY)=\left[D(X)+x_o^2\right]\left[D(Y)+y_o^2\right]-x_o^2y_o^2=$$

$$=D(X)D(Y)+\left[M(X)\right]^2D(Y)+\left[M(Y)\right]^2D(X).$$

Za centrirane slučajne promenljive $X'=X-x_o$ i $Y'=Y-y_o$ poslednja relacija ima oblik:

$$D(X'Y')=D(X')D(Y')\ , \tag{18}$$

jer su matematička očekivanja centriranih slučajnih promenljivih jednaka nuli.

Disperzija slučajne promenljive ili srednje kvadratno odstupanje je parametar koji karakteriše rasipanje rezultata u odnosu na matematičko očekivanje. Drugim rečima, ona je pokazatelj stepena skoncentrisanosti rezultata oko matematičkog očekivanja. Ako se radi o merenjima, disperzija odražava preciznost instrumenta kojim se meri, stabilnost uslova merenja, kvalitet posmatrača, itd.

Umesto disperzije, rasipanje rezultata se češće karakteriše srednjom kvadratskom greškom ili standardnom devijacijom:

$$\sigma_x=\sqrt{D(X)}\ .$$

Kao parametar koji predstavlja meru simetrije raspodele slučajne promenljive u odnosu na matematičko očekivanje služi asimetrija. Ona se definiše jednačinom:

$$\alpha_a=\sum_i p_i(x_i-x_o)^3\ .$$

Ukoliko su rezultati nekog eksperimenta simetrični u odnosu na x_o, tj. ako svakom pozitivnom rezultatu x_i odgovara jedan negativni i po apsolutnoj veličini jednak rezultat x_j, α_a će biti blisko nuli.

Parametar α_a zavisi od jedinica u kojima se izražavaju rezultati x_i, što otežava uporedjenje simetričnosti gustina raspodele. Zbog toga se češće koristi koeficijent asimetrije koji se definiše relacijom:

$$\beta_a = \frac{\alpha_a}{\sigma_x^3} \tag{19}$$

Srednje odstupanje je karakteristika koja ima istu svrhu kao i srednja kvadratska greška: da se njime izrazi koliko je rasipanje rezultata u odnosu na matematičko očekivanje. Ono se definiše kao matematičko očekivanje apsolutnog odstupanja od matematičkog očekivanja:

$$\varepsilon_x = M\left(|X - x_o|\right). \tag{20}$$

ε_x se zove još i srednja greška.

Moda slučajne promenljive X je ona vrednost koja ima najveću verovatnoću. Ako je X neprekidna promenljiva, sa normalnom raspodelom, moda je apscisa maksimuma gustine verovatnoće.

Medijana slučajne veličine X je neka vrednost L za koju važi sledeća relacija:

$$P(X < L) = P(X > L).$$

Verovatnoća da slučajna promenljiva ima neku vrednost manju od medijane jednaka je verovatnoći da ima neku vrednost veću od medijane. Ako je X promenljiva neprekidnog tipa, L je apscisa one tačke čija ordinata deli površinu izmedju x ose i krive gustine na dva jednaka dela.

Matematičko očekivanje slučajne promenljive X-a, gde je a neka konstanta, na nekom stepenu s naziva se inicijalni moment slučajne promenljive X (u odnosu na inicijalnu vrednost a) reda s. Ako X ima konačno mnogo ishoda, inicijalni moment se definiše relacijama:

$$m_s = M(X-a)^s = \sum_i p_i (x_i - a)^s . \tag{21}$$

Ako se ne kaže u odnosu na koju vrednost se daje inicijalni moment, podrazumevaćemo da je $a=0$.

Inicijalni moment prvoga reda u odnosu na $a=0$ predstavlja matematičko očekivanje X.

Ako je inicijalna vrednost a jednaka matematičkom očekivanju x_o, moment se naziva centralnim. Dakle, centralni moment reda s predstavlja matematičko očekivanje $(X-x_o)^s$:

$$\mu_s = M(X-x_o)^s = \sum_i p_i (x_i - x_o)^s \; . \tag{22}$$

Iz definicije centralnog momenta sledi: $\mu_1=0$, $\mu_2=\sigma^2$ i $\mu_3=\alpha_a$.

U daljem izlaganju biće korišćen i termin osnovni moment, recimo, reda s. On se definiše pomoću relacije:

$$\nu_s = \frac{\mu_s}{\sigma^s} \tag{23}$$

U vezi sa momentima definisaćemo još jedan pojam koji će nam biti kasnije potreban: pojam ekscesa. Kao što ćemo ilustrovati u paragrafu 23, eksces predstavlja meru zaobljenosti maksimuma krive gustine. Računa se pomoću jednačine:

$$\gamma = \nu_4 - 3$$

Za tzv. normalnu raspodelu (o kojoj ćemo kasnije govoriti) važe relacije: $\beta_a=0$, $\nu_4=3$, $\gamma=0$.

Ako je $\beta_a < 0$, kriva gustine je strmija sa desne strane (sa strane većih vrednosti X), a ako je $\beta_a > 0$, ona je strmija sa leve strane. Dakle, parametar β_a predstavlja meru iskošenosti krive gustine.

Ako je $\gamma < 0$, maksimum krive gustine je ravniji od maksimuma krive normalne gustine. Ako je $\gamma > 0$, maksimum je šiljastiji.

Napomene koje su date u vezi sa parametrima β_a i γ važe za raspodele slične normalnoj (jednomodalne raspodele) .

Ako je X slučajna promenljiva neprekidnog tipa čiji potpuni skup ishoda čine vrednosti iz intervala $[a,b]$ i čija je gustina verovatnoće $f(x)$, matematičko očekivanje, disperzija i momenti se definišu relacijama:

$$M(X)=x_o=\int_a^b x\, f(x)dx\,, \tag{24}$$

$$D(X)=\sigma^2=\int_a^b (x-x_o)^2 f(x)dx, \tag{25}$$

$$m_s=\int_a^b (x-a)^s f(x)dx\,, \tag{26}$$

$$\mu_s=\int_a^b (x-x_o)^s f(x)dx\,, \text{ itd.} \tag{27}$$

Drugim rečima, sabiranje se zamenjuje integracijom i umesto verovatnoća p_i u ranije date izraze se stavlja $f(x)$- verovatnoća u tački.

S obzirom da svi ishodi pripadaju intervalu $[a,b]$, vrednosti parametara $M(X)$, $D(X)$, m_s, μ_s, itd. se neće promeniti ako umesto a i b granice integracije budu: $-\infty$ i $+\infty$. Dakle, matematičko očekivanje i disperzija se mogu definisati i sledećim izrazima:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)dx\,,$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty} (x-x_o)^2 f(x)dx$$

Osobine ovih parametara koje smo dokazali za diskretnu promenljivu važe i za neprekidnu. U to se možemo lako uveriti slede-ći isti put dokaza.

Ako je $g(x)$ jednoznačna i neprekidna funkcija od x definisana u intervalu $[a,b]$. matematičko očekivanje ove funkcije će biti:

$$M[g(x)]=\int_a^b g(x)f(x)dx\,.$$

Verovatnoća da X ima neku vrednost u beskonačno maloj okolini tačke $x=x_m$ jednaka je verovatnoći da $g(x)$ima neku vrednost beskonačno blisku $g(x_m)$, tj. slučajna promenljiva $Z=g(x)$ ima isti zakon raspodele verovatnoće kao i X. Od ovde sledi da je poslednja relacija korektna.

15. PONAVLJANJE OPITA I IZVODJENJE FORMULE LAPLASA-GAUSA

Pretpostavimo da se jedan opit ponavlja n puta i da je svaki njegov rezultat C nezavisan u odnosu na prethodne rezultate, tj. da verovatnoća dogadjaja C u bilo kojem opitu ne zavisi od rezultata prethodnih opita. Primer: moneta se baca 100 puta. Verovatnoća grba u 93 bacanju ne zavisi od toga koliko se puta on pojavio u prethodna 92 bacanja.

Označimo sa C rezultat pojavljivanja datog dogadjaja i sa $\bar{C}$ rezultat nepojavljivanja dogadjaja, a njihove verovatnoće, respektivno, sa p i q. Jasno je da se dogadjaj mora pojaviti ili nepojaviti. C i $\bar{C}$ su dakle suprotni dogadjaji, pa je: $p+q=1$.

Dogadjaj C može se desiti k puta, ali u više različitih redosleda. Naprimer, možemo imati sledeća dva redosleda:

$$C, C, \bar{C}, \bar{C}, C, \bar{C}, C, C, \bar{C}, \ldots$$
$$p \quad p \quad q \quad q \quad p \quad q \quad p \quad p \quad q \qquad \text{i}$$
$$\bar{C}, C, C, C, \bar{C}, C, \bar{C}, \bar{C}, C, \ldots$$
$$q \quad p \quad p \quad p \quad q \quad p \quad q \quad q \quad p.$$

Verovatnoća prvog redosleda, kao verovatnoća složenog dogadjaja, jednaka je:

$$P(A_1) = p\,p\,q\,q\,p\,q\,p\,p\,q \ldots = p^k q^{n-k},$$

a verovatnoća drugoga:

$$P(A_2) = q\,p\,p\,p\,q\,p\,q\,q\,p \ldots = p^k q^{n-k}.$$

Ukupan broj različitih redosleda u kojima će se C pojaviti k puta jednak je broju načina (broju kombinacija) na koje se k elemenata može rasporediti na n mesta. Po teoremi sabiranja verovatnoća, pojavljivanje C k puta ima verovatnoću jednaku zbiru verovatnoća svih mogućih redosleda:

$$P_{k,n} = C_n^k\, p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\, p^k q^{n-k}$$

Ako je n veliki broj, računanje faktorijela može se uprostiti i umesto stroge formule koristiti približna formula Laplasa-Gausa:

$$P_{k,n} = \frac{1}{\sqrt{n\,p\,q}}\;\frac{1}{2\pi}\;\exp -\frac{(k-np)^2}{2\,n\,p\,q}$$

Ova jednačina je izvedena korišćenjem približne formule Stirlinga za računanje faktorijela:

$$m! \approx \sqrt{2\pi}\; m^m e^{-m} \sqrt{m}\,.$$

16. NORMALNI ZAKON RASPODELE VEROVATNOĆE. IZVODJENJE FORMULE ZA GUSTINU VEROVATNOĆE.

U astronomskoj praksi, u fizici i drugim naukama najčešće se analiziraju slučajne promenljive koje imaju tzv. normalnu raspodelu verovatnoće. Često se kaže da one slede normalni ili Gausov zakon raspodele verovatnoće.

Rezultati naših merenja po pravilu su odredjeni dejstvom velikog broja slučajnih uzroka. Može se smatrati da svaki rezultat predstavlja "rezultantu" velikog broja elementarnih odstupanja. U Teoriji verovatnoće dokazuje se teorema po kojoj zbir većeg broja slučajnih promenljivih, koje se, u najopštijem slučaju, pokoravaju različitim zakonima raspodele je slučajna promenljiva čiji je zakon raspodele blizak normalnom zakonu. To predstavlja objašnjenje pojave da većina naših merenja daje rezultate čije verovatnoće imaju normalnu raspodelu. Zbog izuzetno velikog značaja normalnog zakona mi ćemo ga izvesti, ali se pritom nećemo služiti strogim dokazom (pomoću teoreme Ljapunova), već ćemo iskoristiti uprošćeni - Pirsonov dokaz.

Pretpostavimo da su ispunjena sledeća tri uslova:

1. Odstupanje u slučajne promenljive X od neke konstante a ($u=X-a$) je uzrokovano dejstvom n faktora od kojih svaki daje jedno elementarno odstupanje $+\varepsilon$ ili $-\varepsilon$;

2. Elementarna odstupanja ε, koja su jednaka po apsolutnoj veličini, su jednako verovatna, tj. $P(+\varepsilon)=P(-\varepsilon)=\frac{1}{2}$;

3. Uzroci koji izazivaju elementarna odstupanja su uzajamno nezavisni. To znači da verovatnoća da jedan odredjeni uzrok daje odstupanje $+\varepsilon$ ili $-\varepsilon$ ne zavisi od toga kakva odstupanja su dali drugi uzroci.

Prva pretpostavka nema neko suštinsko značenje za karakter raspodele verovatnoće, a znatno olakšava izvodjenje izraza za normalnu raspodelu. Medjutim, poslednje dve pretpostavke (one su zasnovane na iskustvu stečenom u mnogobrojnim eksperimentima) bitno odredjuju karakter raspodele.

Neka je svaki od k uzroka dao jedno odstupanje ε , a svaki od preostalih n-k uzroka po jedno odstupanje $-\varepsilon$. "Rezultantno" odstupanje u, koje ćemo označiti sa u_k, biće:

$$u_k = k\varepsilon + (n-k)(-\varepsilon) = (2k-n)\varepsilon .$$

Verovatnoća u_k može da se izračuna po formuli za $P_{k,n}$ iz prethodnog paragrafa:

$$P_{k,n} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\left(\frac{1}{2}\right)^n .$$

Verovatnoća da će k+1 uzrok dati po $+\varepsilon$ ili verovatnoća ishoda:

$$u_{k+1} = (k+1)\varepsilon + (n-k-1)(-\varepsilon) = (2k+2-n)\varepsilon$$

biće:

$$P_{k+1,n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} .$$

Označimo sa:

$$\Delta u = u_{k+1} - u_k = 2\varepsilon \quad \text{i}$$

$$u = \frac{1}{2}(u_{k+1} + u_k) = (2k-n+1)\varepsilon .$$

Ako je ε dovoljno malo, verovatnoća da slučajna promenljiva u ima vrednost iz intervala $[u_k, u_{k+1}]$ je približno jednaka srednjoj vrednosti $P_{k,n}$ i $P_{k+1,n}$:

$$P = \frac{1}{2}(P_{k,n} + P_{k+1,n}) .$$

Srednja gustina verovatnoće u datom intervalu je jednaka:

$$y = \frac{P}{\Delta u} .$$

Pošto je Δu konstantno, iz poslednje jednačine sledi da je promena gustine Δy data izrazom:

$$\Delta y = \frac{\Delta P}{\Delta u} .$$

Deobom poslednje dve jednačine nalazimo da priraštaj $\Delta P = P_{k+1,n} - P_{k,n}$ i priraštaj Δy zadovoljavaju relaciju:

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta P}{P} .$$

Iz prethodnih definicija P i ΔP sledi:

$$\Delta P = \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{n!\,(n-2k-1)}{(k+1)!\,(n-k)!} ,$$

$$P = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \frac{n!\,(n+1)}{(k+1)!\,(n-k)!.} .$$

Prema tome, relativni priraštaj gustine iznosi:

$$\frac{\Delta y}{y} = 2\,\frac{n-2k-1}{n+1} = \frac{(n-2k-1)\varepsilon \cdot 2\varepsilon}{(n+1)\,\varepsilon^2} .$$

Da bismo našli izraz za gustinu verovatnoće slučajne promenljive u, potrebno izvesti relaciju izmedju y i u.

Pošto je $(n-2k-1)\varepsilon = -u$ i $2\varepsilon = \Delta u$, imaćemo:

$$\frac{dy}{y} = \frac{-u\ \Delta u}{(n+1)\,\varepsilon^2} .$$

Kada je n konačno, ovo je približna veza izmedju y i u i njihovih priraštaja. Ako $n \to \infty$, $\varepsilon \to 0$, jer je u_k konačno. Ako ε nebi težilo nuli, odstupanja u_k bi bila beskonačno velika. Takvi slučajevi nas ne interesuju.

Pored poslednje pretpostavke, učinićemo još jednu: da $(n+1)\,\varepsilon^2$ teži konačnoj vrednosti σ^2 koja je različita od nule.

U graničnom slučaju, poslednja jednačina postaje:

$$\frac{dy}{y} = \frac{-udu}{\sigma^2} .$$

Integracijom ove jednačine dobija se:

$$y = C \exp -\frac{u^2}{2\sigma^2} .$$

Konstanta C odredjuje se iz uslova:

$$\int_{-\infty}^{\infty} C\, e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}\, du = 1 .$$

Smenom: $\frac{u}{\sigma} = t$ poslednji integral postaje:

$$C\sigma \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = 1.$$

Iz Analize znamo da je poznati integral Ojlera-Puasona:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2\int_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad \text{, pa je:}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi} \, .$$

Sada možemo pisati:

$$C\sigma\sqrt{2} \quad = 1$$

ili:

$$C = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \, .$$

Prema tome, konačni izraz za gustinu verovatnoće normalnog zakona raspodele biće:

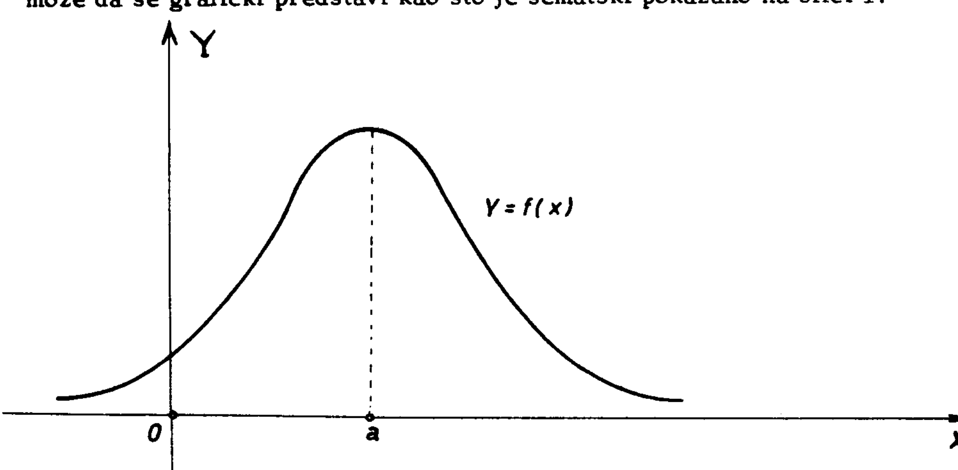
$$\boxed{y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \; e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}} \tag{1}$$

Pošto je $u = X - a$ (a=const.), jednačina (1) se može napisati i u obliku:

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \quad \exp -\frac{{X-a}^{2}}{2\,\sigma^2} \tag{2}$$

Kao što je rečeno, brojna iskustva iz raznih naučnih oblasti pokazuju da se greške merenja najčešće pokoravaju normalnom zakonu. U takvim slučajevima, ocena tačnosti merenja i odredjivanje verovatnostnih parametara (kao što ćemo malo kasnije videti) ne predstavljaju ozbiljne probleme.

Ispitivanjem funkcije y dolazimo do zaključka da njen tok može da se grafički predstavi kao što je šematski pokazano na slici 1.



Iz Analize znamo da je poznati integral Ojlera-Puasona.

Kriva ima maksimum za $X=a$ koji iznosi: $y_{max}=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$. Sa udaljavanjem od a, funkcija y opada i asimptotski teži nuli. Kriva ima dve prevojne tačke čije su apscise: $u_{1,2}=\pm\sigma$.

16.1. PARAMETRI NORMALNOG ZAKONA: MATEMATIČKO OČEKIVANJE I DISPERZIJA SLUČAJNE PROMENLJIVE. DISPERZIJA SREDNJE VREDNOSTI.

Matematičko očekivanje i disperzija neprekidne slučajne promenljive X koja ima normalnu raspodelu su definisani jednačinama:

$$M(X)=\bar{x}=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx \quad \text{i}$$

$$D(X)=\sigma_x^2=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\bar{x})^2\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx.$$

Posle smene: $t=\frac{x-a}{2}$ prva jednačina se transformiše u sledeću:

$$M(X)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma\sqrt{2}\,t+a)e^{-t^2}dt=\frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} te^{-t^2}dt+\frac{a}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2}dt$$

Posle smene $t^2=u$ prvi integral se svodi na $-\frac{1}{2}e^{-t^2}\Big|_{-\infty}^{\infty}$ koji je jednak nuli. Drugi integral je poznati Ojler-Puasonov integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt=2\int_{0}^{\infty} e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}.$$

Na osnovi poslednjih relacija možemo pisati:

$$M(X)=\frac{a}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi}=a\,. \tag{3}$$

Drugim rečima, matematičko očekivanje slučajne promenljive X predstavlja parametar a.

Pošto je $\bar{x}=a$, jednačina koja definiše disperziju postaje:

$$D(X)=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2}dt.$$

Parcijalnom integracijom se dobija:

$$D(X)=\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} t\, 2t\, e^{-t^2} dt=\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\left\{-te^{-t^2}\Big|_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt\right\}.$$

Prvi član u zagradi jednak je nuli, jer je:

$$\lim_{t\to\infty} te^{-t^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{t^2}}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2t\, e^{t^2}}=0.$$

Prema tome, konačni izraz za disperziju biće:

$$D(X)=\sigma_x^2=\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt=\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi}=\sigma^2 \qquad (4)$$

Dakle, možemo tvrditi da parametar σ^2 u izrazu za gustinu verovatnoće normalne raspodele predstavlja disperziju slučajne promenljive.

Pretpostavimo da raspolažemo skupom od n vrednosti slučajne promenljive X: $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Neka je $\bar{x}$ srednja vrednost ovoga skupa:

$$\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\ldots+x_n).$$

Ako na slučajan način (bez nekih odredjenih kriterijuma) formiramo m podskupova x_i (m slučajnih uzoraka), srednja vrednost $\bar{x}_m$ će slučajno varirati od podskupa do podskupa.

U Teoriji verovatnoće dokazuje se teorema koja glasi: ako je X slučajna veličina koja se pokorava normalnom zakonu i $\bar{x}$ je takodje slučajna promenljiva sa normalnom raspodelom verovatnoće. Ovu teoremu nećemo dokazivati, već je samo spominjemo zbog toga što će nam kasnije biti potrebna.

Ako $\bar{x}$ smatramo slučajnom promenljivom koja je funkcija $x_1, x_2, \ldots, x_n$, s obzirom na relacije izvedene u paragrafu (14) možemo pisati:

$$D(\bar{x})=\sigma_o^2=\frac{1}{n^2}\sigma_1^2+\frac{1}{n^2}\sigma_2^2+\ldots+\frac{1}{n^2}\sigma_n^2$$

gde je: σ_1^2 disperzija X u prvom uzorku, σ_2^2 - u drugom, itd.

Ako su disperzije σ_i^2 medjusobno jednake, važiće relacija:

$$\sigma_o^2=\frac{n\sigma^2}{n^2}=\frac{\sigma^2}{n},$$

u kojoj je σ^2 disperzija jednog (bilo kojeg) x_i.

Ako je skup rezultata posmatranja $S_x = \{x_i\}$ nepotpun, tačne vrednosti disperzije i matematičkog očekivanja se ne mogu izračunati. Umesto njih dobijaju se ocene pomenutih parametara - približne vrednosti parametara.

Srednja vrednost i srednje kvadratno odstupanje predstavljaju korisne pokazatelje položaja slučajne promenljive na brojnoj osi i koherentnosti rezultata (skoncentrisanosti rezultata oko srednje vrednosti). Pritom moraju biti ostvarena sledeća dva uslova:

1. Matematičko očekivanje je konstanta, tj. ono se ne menja u toku posmatranja.

2. Preciznost posmatranja se takodje ne menja u toku posmatranja.

Ako je X slučajna promenljiva koja ima gausovsku raspodelu sa matematičkim očekivanjem $x_o=0$ i disperzijom $\sigma^2=1$, gustina verovatnoće će biti:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}. \qquad (5)$$

Ovaj oblik f(x) naziva se standardni oblik.

Za funkcije F(x), f(x), kao i za izvode $f^k(x)$ data je posebna tablica (Tablica I). Tablice koje se odnose na standardni oblik gustine mogu da se koriste i kad su: $x_o \neq 0$ i $\sigma^2 \neq 1$. Smenom:

$$\xi = \frac{X-x_o}{\sigma}$$

dobija se slučajna promenljiva čije je matematičko očekivanje $\xi_o=0$ i disperzija $\sigma_1^2 = 1$.

16.2. BAJESOVA TEOREMA. OCENA PARAMETARA NORMALNOG ZAKONA.

Neka dogadjaj A može da proistekne posle realizacije jedne od sledećih k hipoteza: $\{H_1, H_2, \ldots, H_k\}$, pri čemu skup $\{H_k\}$ predstavlja celi skup uzajamno isključivih hipoteza. Verovatnoće hipoteza označićemo sa: $\{P_1, P_2, \ldots, P_k\}$, a verovatnoće dogadjaja A računate pod pretpostavkama $H_1, H_2, \ldots, H_k$ (uslovne verovatnoće) označićemo sa: $p_1, p_2, \ldots, p_k$.

Kao što znamo, verovatnoća dogadjaja A pod uslovom da je došlo do ishoda H_1 jednaka je:

$$P(H_1A) = P(H_1)P(A/H_1) = P_1p_1.$$

Dogadjaji tipa H_kA su isključivi jer su hipoteze isključive , pa je cela verovatnoća dogadjaja A (bez obzira na hipotezu) jednaka zbiru svih proizvoda P_1p_1:

$$P(A) = \sum_s P_s p_s.$$

Razmotrimo sledeći zadatak: dogadjaj A je proizišao. Kolike su verovatnoće različitih hipoteza?

S obzirom na teoremu proizvoda verovatnoća, važi relacija:

$$P(AH_1) = P(A)P(H_1/A).$$

Iz prethodnih relacija sledi:

$$P(H_1/A) = \frac{P(AH_1)}{P(A)} = \frac{P(H_1A)}{\sum_s P_s p_s}.$$

Poslednja jednačina može da se napiše i u obliku:

$$p(H_1/A) = \frac{P_1p_1}{\sum_{s=1}^{k} P_s p_s} \qquad \text{(teorema Bajesa)} \qquad (6)$$

Verovatnoće P_k su verovatnoće hipoteza à priori, a $P(H_1/A)$ su verovatnoće hipoteza à posteriori.

Primer: neka se u zatvorenoj kutiji nalaze crne i bele kuglice (istih dimenzija, iste težine, itd.). Znamo da ih ima 5. O sadržaju kutije možemo činiti sledeće jednako verovatne hipoteze (jednako verovatne jer nemamo nikakvih drugih informacija iz kojih bi sledilo da je jedna hipoteza verovatnija od druge) :

H_1: 4 bele i 1 crna (verovatnoća bele kuglice $p_1=\frac{4}{5}$),

H_2: 3 bele i 2 crne (verovatnoća bele kuglice $p_2=\frac{3}{5}$),

H_3: 2 bele i 3 crne (verovatnoća bele kuglice $p_3=\frac{2}{5}$),

H_4: 1 bela i 4 crne (verovatnoća bele kuglice $p_4=\frac{1}{5}$).

Do opita svaka od 4 hipoteze ima verovatnoću $\frac{1}{4}$: $P_1=P_2=P_3=P_4=\frac{1}{4}$.

Pretpostavimo da smo izvukli jednu kuglicu i da je ona bela. Po formuli (6) verovatnoće hipoteza à posteriori su:

$$P(H_1\ /\text{bela})=\frac{\frac{1}{4}\ \frac{4}{5}}{\frac{1}{4}\left(\frac{4}{5}+\frac{3}{5}+\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\right)}=\frac{4}{10}\ ,$$

$$P(H_2/\text{bela})=\frac{3}{10}\ ,$$

$$P(H_3/\text{bela})=\frac{2}{10}\quad \text{i}$$

$$P(H_4/\text{bela})=\frac{1}{10}\ .$$

Pretpostavimo da raspolažemo slučajnim uzorkom (podskupom ishoda koji su na slučajan način izdvojeni iz potpunog skupa) od k ishoda slučajne promenljive X koja ima normalnu raspodelu i čije je matematičko očekivanje a. Pitanje koje ima veliki praktični značaj je sledeće: koji od datih rezultata ili od rezultata koji nisu dati ali koji se mogu odrediti na osnovu datih, najmanje odstupa od a?

Za veličinu a možemo činiti razne hipoteze: da je jednako nekom a_1, nekom a_2, itd. Ako je $\{x_i\}$ pomenuti slučajni uzorak, za svaku hipotezu o a dobija se odgovarajući skup odstupanja $\delta_{kj}=x_k-a_j$ $(k=1,2,3,\ldots)$. Verovatnoća da odstupanje δ ima neku vrednost iz intervala $[\delta_{kj},\ \delta_{kj}+\Delta\delta]$ odredjena je relacijom:

$$P(\delta_{kj}<\delta<\delta_{kj}+\Delta\delta)=P_k(\delta\approx\delta_{kj}/a_j)=\frac{\Delta\delta}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}}\ ,$$

gde je σ^2 disperzija za koju se pretpostavlja da je poznata.

Verovatnoća celoga podskupa $\{\delta_{kj}\}$ je verovatnoća proizvoda dogadjaja i može se izračunati po formuli:

$$P(\delta \approx \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k / a_j) = \prod_{i=1}^{k} P_i = \left(\frac{\Delta\delta}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^k \exp - \frac{\sum_{s=1}^{k} \delta_s^2}{2\sigma^2}$$

Verovatnoća P je jednaka verovatnoći da pod pretpostavkom $a = a_j$ naša merenja daju podskup rezultata $\{x_i\}$. Prema tome, poslednja jednačina se može napisati i u obliku:

$$P(X = x_1, x_2, \ldots, x_k / a_j) = \left(\frac{\Delta\delta}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^k \exp - \frac{\sum_s (x_s - a_j)^2}{2\sigma^2}$$

Pošto ne raspolažemo nikakvim informacijama o verovatnoćama pojedinih hipoteza, najlogičnije je da ih à priori smatramo jednako verovatnim. Njihove verovatnoće à posteriori su proporcionalne uslovnim verovatnoćama dogadjaja A (u Bajesovoj formuli P_l i $\sum_s P_s p_s$ su konstante , pa će važiti relacija:

$$P(a_j / x_1, x_2, \ldots, x_k) = C\left(\frac{\Delta\delta}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^k \exp - \frac{\sum_s (x_s - a_j)^2}{2\sigma^2} ,$$

Poslednja jednačina jasno izražava zavisnost verovatnoće P od a_j. Ta verovatnoća je najveća ako je:

$$S(a) = \sum_{s=1}^{k} (x_s - a)^2 = \text{minimum.}$$

Pošto je:

$$\frac{dS(a)}{da} = 2 \sum_{s=1}^{k} (x_s - a) = 0 \quad \text{ako je}$$

$$a = \frac{1}{k} \sum_{s=1}^{k} x_s \tag{7}$$

zaključujemo da najveću verovatnoću ima ona hipoteza o a po kojoj je to a jednako srednjoj vrednosti datih slučajnih rezultata: $a = \bar{x}$. Drugim rečima, ako raspolažemo podskupom $\{x_i\}$, najverovatnije je da matematičko očekivanje slučajne promenljive X iznosi koliko i srednja vrednost za dati uzorak.

Pretpostavimo sada da ni σ nije poznato. U tom slučaju, možemo smatrati da verovatnoća P zavisi od dva uslova:

$$P(X=x_1, x_2, \ldots, x_n / a, \sigma) = \left(\frac{\Delta\delta}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \sigma^{-n} \exp - \frac{S(a)}{2\sigma^2} \quad ,$$

tj. da je funkcija dve nezavisno promenljive: a i σ.

Iz jednačina:

$$S(a) = \sum_k (x_k - a)^2 = \sum_k \left[(x_k - \bar{x}) + (\bar{x} - a)\right]^2 =$$

$$= \sum_k (x_k - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - a)^2$$

sledi da je:

$$P(X=x_1, x_2, \ldots, x_n / a, \sigma) = \left\{ \left(\frac{\Delta\delta}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}} \sigma^{1-n} \exp - \frac{\sum_k (x_k - \bar{x})^2}{2\sigma^2} \right\} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \exp - \frac{(a - \bar{x})^2}{2 \frac{\sigma^2}{n}} \right\} .$$

Pretpostavimo da su sve hipoteze o a $(-\infty < a < \infty)$ jednako verovatne. Da bismo našli najverovatnije σ pomnožićemo levu i desnu stranu poslednje jednačine sa da i izvršićemo integraciju po promenljivoj a u granicama: $-\infty, \infty$. Imajući na umu teoremu zbira verovatnoća, jasno nam je da će leva strana novodobijene jednačine predstavljati verovatnoću datog skupa $\{x_i\}$ pri svim mogućim hipotezama o a i sa datom hipotezom o σ (prilikom pomenute integracije smatra se σ=const.). Sa desne strane integrali se samo drugi činioc u velikoj zagradi, jer jedino on sadrži promenljivu a.

Pošto je $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ srednja kvadratska greška srednje vrednosti $(\bar{x})$, drugi činioc predstavlja gustinu verovatnoće slučajne promenljive x koja ima normalnu raspodelu verovatnoće. Zbog toga će integral date funkcije u granicama: $-\infty$, ∞ biti jednak jedinici.

Imajući u vidu analitički oblik integranda, jasno je da se integracijom po promenljivoj a i integracijom po promenljivoj $\bar{x}$ dobija isti rezultat. Prema tome, možemo pisati:

$$P(X=x_1,x_2,\ldots,x_n/\sigma)=\left(\frac{\Delta\delta}{\sqrt{2\pi}}\right)^n\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}\,\sigma^{-n+1}\exp-\frac{\bar{S}}{2\sigma^2}\,,$$

gde je:

$$\bar{S}=\sum_{k=1}^{n}(x-\bar{x})^2\,.$$

Sa leve strane pretposlednje jednačine izostavljen je uslov a, jer verovatnoća datoga niza x_i posle integracije ne zavisi više od a.

Verovatnoća date hipoteze o σ, po Bajesovoj teoremi, može da se izračuna pomoću relacije:

$$P(\sigma/x_1,x_1,\ldots,x_n)=C'\,\sigma^{-n+1}\exp-\frac{\bar{S}}{2\sigma^2}$$

u kojoj je C' konstanta.

Da bismo našli maksimum funkcije $P=P(\sigma)$ logaritmovaćemo poslednju jednačinu:

$$\ln P=(1-n)\ln\sigma-\frac{\bar{S}}{2\sigma^2}+\ln C'\,.$$

Diferenciranjem dobijamo:

$$\frac{dP}{P}=(1-n)\frac{d\sigma}{\sigma}+\frac{\bar{S}}{\sigma^3}\,d\sigma\,,$$

$$\frac{1}{P}\,\frac{dP}{d\sigma}=\frac{1-n}{\sigma}+\frac{\bar{S}}{\sigma^3}\,,$$

$$-\frac{1}{P^2}\left(\frac{dP}{d\sigma}\right)^2+\frac{1}{P}\,\frac{d^2P}{d\sigma^2}=\frac{n-1}{\sigma^2}-3\,\frac{\bar{S}}{\sigma^4}\,.$$

Iz uslova $\frac{dP}{d\sigma}=0$ naćićemo apscise ekstremuma funkcije $P(\sigma)$:

$$\frac{1-n}{\sigma}+\frac{\bar{S}}{\sigma^3}=0$$

ili:

$$\sigma^2=\frac{\bar{S}}{n-1}=\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2}{n-1} \qquad (8)$$

Stavljajući tako dobijeno σ u izraz za drugi izvod funkcije P, dolazimo do zaključka da je taj izvod negativan, odnosno, da $P(\sigma)$ ima maksimum za σ dobijeno iz jednačine (8) :

$$\frac{1}{P}\,\frac{d^2P}{d\sigma^2} = \frac{-2(n-1)^2}{\bar{S}} < 0.$$

Jednačina (8) ima veliki praktični značaj. Ona omogućuje da na osnovi rezultata kojima raspolažemo (koji ne čine potpuni skup)odredimo najverovatniju vrednost disperzije. Na osnovi datog slučajnog uzorka $\{x_i\}$ zaključujemo da je najverovatnija hipoteza da disperzija σ^2 ima vrednost jednaku desnoj strani jednačine (8).

Da bismo teorijsku vrednost disperzije σ^2 razlikovali od najverovatnije vrednosti(ocene disperzije) , ovu poslednju ćemo označiti sa s^2.

Možemo smatrati da s^2 predstavlja slučajnu promenljivu, jer od jednog do drugog slučajnog uzorka ono varira na slučajan način. Dakle, s^2 ima i odredjeni zakon raspodele verovatnoće, pa se mogu definisati poznate brojne karakteristike kao što su: matematičko očekivanje, disperzija, itd.

Ako se s^2 računa po formuli (8) može se dokazati da je matematičko očekivanje*:

$$M(s^2) = \sigma^2 \tag{9}$$

i to bez obzira na zakon raspodele slučajne promenljive X.

---

*Hudson J. D.: STATISTICS, Geneva 1964.(ruski prevod, str. 72.)

U slučaju normalne raspodele, važi relacija:

$$\sigma_s = \sqrt{\frac{2}{n-1}}\;\sigma^2 \tag{10}$$

u kojoj je σ_s^2 disperzija slučajne promenljive s^2.

Na kraju ovoga paragrafa napomenućemo još i to da u slučaju normalne raspodele verovatnoće izmedju srednje kvadratske greške σ i srednje greške ε postoji sledeća približna veza[*]:

$$\varepsilon \approx \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} = 0.79788\;\sigma$$

ili:

$$\sigma \approx \varepsilon \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1.25331\;\varepsilon.$$

---

[*] Mitropoljskij A.K.: TEHNIKA STATISTIČESKIH VIČISLENIJ, Moskva, 1961, str. 113.

17. PRIPREMA POSMATRAČKOG MATERIJALA ZA OBRADU. ŠEPERDOVE POPRAVKE.

Posmatrački materijal koji tretiramo u statističkom smislu najčešće sadrži veliki broj podataka. Računske operacije sa velikim brojem podataka predstavljaju glomazan posao koji se ponekad može izbeći. Pretpostavimo da raspolažemo skupom brojeva $S_x=\{x_1, x_2,\ldots,x_n\}$, gde je n veliki broj. Često će se desiti da su pojedini x_i medjusobno jednaki (rećićemo da se neko x_j pojavljuje n_j puta), pa umesto da tretiramo svaki element skupa S_x tretiraćemo elemente skupa $S'_x=\{x_i,x_j,\ldots,x_k\}$ kojima odgovaraju učestanosti: $\{l_i,l_j,\ldots,l_k\}$. Ako i skup S'_x sadrži veliki broj elemenata S_x možemo urediti po rastućim x_i, formirati podskupove (klase) koji nemaju zajedničkih elemenata (ovaj postupak je poznat kao razbijanje skupa) i za svaki takav podskup izračunati srednju vrednost koju ćemo označiti sa X_k $(k=1,2,\ldots)$. U daljem izlaganju smatraćemo da X_k predstavljaju srednje vrednosti po klasama, a n_k odgovarajuće brojeve elemenata u njima.

Broj klasa zavisi od disperzije rezultata, od obima posmatračkog materijala, od tačnosti računanja, itd. Obično se formira 10-15 klasa.

Razvrstavanje posmatračkog materijala po klasama, računanje srednjih vrednosti X_k i odgovarajućih učestanosti n_k nazvali smo uredjivanje ili sredjivanje posmatračkog materijala za statističku obradu.

Sa datim X_k i n_k računaju se momenti na sledeći način (videti paragraf 14 , jednačine 21-27):

$$m_s=\sum_{k=1}^{N}\frac{n_k}{n}(X_k-a)^s ,$$

$$\overline{X}=\sum_{k=1}^{N}\frac{n_k}{n}X_k ,$$

$$\mu_s = \sum_{k=1}^{N} \frac{n_k}{n} (X_k - \bar{X})^s ,$$

$$\sigma = \sqrt{\mu_2} ,$$

$$V_s = \frac{\mu_s}{\sigma^s} , \quad \text{itd.}$$

Prilikom računanja momenata višega reda može se desiti da su proizvodi $n_k X_k^s$ veliki brojevi, nepogodni za praktično računanje. Umesto X_k mogu se tretirati odstupanja od nekog broja X_o (koga smo nazvali inicijalna vrednost) koji se bira tako da odstupanja $x_k = X_k - X_o$ budu što manja. Obično se za X_o uzima neki broj koji je blizu opšte srednje vrednosti. Veličina odstupanja x_k zavisi od jedinica u kojima su izraženi X_k, pa i ona mogu da budu veliki brojevi. Zbog toga se može učiniti još jedna zamena slučajne promenljive x_k:

$$\xi_k = \frac{x_k}{h} = \frac{X_k - X_o}{h} ,$$

gde je h tzv. srednja veličina klase koja se dobija kad se razlika izmedju najveće i najmanje vrednosti X_k podeli brojem klasa:

$$h = \frac{X_{max} - X_{min}}{N} .$$

S obzirom da broj klasa N nije suviše veliki, odstupanja $X_k - X_o$ izražena u jedinicama h nisu veliki brojevi. Razlika $X_{max} - X_{min}$ je jednaka N h ili N jedinica, pa će najveće razlike $X_k - X_o$ biti blizu N/2.

Posle uvodjenja gornjih smena nameće se sledeće pitanje: kako se računaju momenti slučajne promenljive $X = \{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ kad su poznati momenti slučajne promenljive $\xi = \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$?

Polazeći od poznatih definicija možemo pisati:

$$\bar{\xi} = \sum_{k=1}^{N} \frac{n_k}{n} \xi_k = \sum_{k=1}^{N} \frac{n_k}{n} \frac{X_k - X_o}{h} = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{N} \frac{n_k}{n} X_k - X_o \sum_{k=1}^{N} \frac{n_k}{n} =$$

$$= \frac{1}{h} (\bar{X} - X_o)$$

ili:

$$\bar{X} = X_o + h\bar{\xi} , \qquad (1)$$

$$\mu'_s = \sum_{k=1}^{N} \frac{n_k}{n} (\xi_k - \bar{\xi})^s = \sum_{k=1}^{N} \left[\frac{X_k - X_o}{h} - \frac{\bar{X} - X_o}{h} \right]^s \frac{n_k}{n} =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \left[\frac{X_k - \bar{X}}{h} \right]^s \frac{n_k}{n} = \frac{1}{h^s} \sum_{k=1}^{N} \frac{n_k}{n} (X_k - \bar{X})^s = \frac{1}{h^s} \mu_s$$

ili:

$$\mu_s = h^s \mu'_s \qquad (2)$$

$$\sigma = \sqrt{\mu_2} = \sqrt{h^2 \mu'_2} = h \sigma'$$

$$\nu_s = \frac{\mu_s}{\sigma^s} = \frac{h^s \mu'_s}{h^s \sigma'^s} = \nu'_s \qquad (3)$$

itd.

Jednačine (1), (2) i (3) omogućuju da se sa poznatim momentima slučajne promenljive ξ lako izračunaju momenti slučajne promenljive X.

Ako je broj elemenata skupa S_x mali, a širina klasa (razlika izmedju brojeva koji predstavljaju granice klasa) velika, momenti m''_s, μ''_s i ν''_s koji se računaju iz neposrednih posmatranja (x_i) i momenti m_s, μ_s i ν_s - računati sa srednjim vrednostima po klasama (X_i) - mogu da se značajno razlikuju. Razlike momenata su uzrokovane time što se relativne učestanosti n_k/n odnose na srednje vrednosti nezavisno promenljive.

Iz originalnih podataka (x_i) inicijalni moment m_s u odnosu na inicijalnu vrednost $a=0$ se računa po formuli:

$$m''_s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^s ,$$

a iz osrednjenih podataka:

$$m_s = \sum_{k=1}^{N} \frac{n_k}{n} X_k .$$

Razlike izmedju m''_s i m_s mogu da dostignu značajne iznose* :

$$\begin{aligned} m''_1 &= m_1 \\ m''_2 &= m_2 - \frac{h^2}{12} \\ m''_3 &= m_3 - \frac{h^2}{4} m_1 \\ m''_4 &= m_4 - \frac{h^2}{2} m_2 + \frac{7}{240} h^4 , \quad \text{itd.} \end{aligned} \tag{4}$$

Ako je poznata neprekidna funkcija gustina f(x) , teorijska vrednost momenta m_s se računa iz relacije:

$$m''_s = \int_{-\infty}^{\infty} x^s f(x)\, dx ,$$

dok se praktična ocena m_s sa srednjim vrednostima X_k računa pomoću jednačine:

$$m_s = \sum_{k=1}^{N} X_k^s \int_{x-\frac{h}{2}}^{x+\frac{h}{2}} f(x)\, dx .$$

Izmedju m''_s i m_s računatih pomoću poslednje dve jednačine postoje razlike definisane relacijama 4 ili:

---

*Trumpler J.R. and Weaver F.H.: Statistical Astronomy, University California Press, Berkeley, 1953, str. 191 - 193.

$$m_1 = m_1''$$
$$m_2 = m_2'' + \frac{h^2}{12}$$
$$m_3 = m_3'' + \frac{h^2}{4}\, m_1'' \qquad (5)$$
$$m_4 = m_4'' + \frac{h^2}{2}\, m_2'' + \frac{h^4}{80}, \ldots$$
$$m_k = m_k'' + \frac{h^2}{3!2^2}\, k(k-1)\, m_{k-2}'' + \frac{h^4}{5!2^4}\, k(k-1)(k-2)(k-3)\, m_{k-4}'' + \ldots\ldots$$

Izmedju momenata μ_s'' i μ_s važe iste relacije kao i izmedju m_s'' i m_s.

Popravke momenata m_s i μ_s koje treba primeniti da bi se oni redukovali na vrednosti koje odgovaraju originalnim podacima x_i su poznate pod imenom Šeperdove popravke. Za njihovu primenu moraju da budu ispunjeni odredjeni uslovi. Čitaoca koji želi da se sa tim detaljnije upozna upućujemo na knjigu: Kendall G.M. and Stuart A.: The Advanced Theory of Statistics, vol. 1, London, 1962 (ruski prevod str. 111-113). Praktično, Šeperdove popravke omogućuju da se izračunaju tačnije vrednosti momenata ako funkcija gustine f(x) ima dodir sa x-osom višega reda. Za raspodele sa beskonačnim granicama uslov je da f(x) opada tako da na granicama konačnog intervala bude bliska nuli (kao, naprimer, f(x) normalnog zakona).

Da bismo imali predstavu o veličini Šeperdovih popravki navešćemo sledeće podatke* : ako je $h \approx 0.49\sigma$, popravka $\sqrt{\mu_2}$ je oko 1%, a ako je $h \approx 0.4\sigma$ popravka μ_4 je reda 1%. Zbog ograničenosti posmatračkog materijala greške momenata često premašuju veličinu Šeperdovih popravki, pa njihovo računanje nema smisla. Medjutim, ako su širine klasa velike, njih ne treba zanemariti.

---

* Mitropoljskij A.K.: Tehnika statističeskih vičislenij, Moskva, 1961, str. 72.

18. GRUBE GREŠKE

U toku posmatranja može da dodje do skokovite promene uslova koji utiču na rezultate, pa se, kao posledica toga, mogu pojaviti i rezultati koji grubo odstupaju od ostalih. Medjutim, takvi rezultati se ne smeju proizvoljno eliminisati i zaključci "štimovati". Mi moramo nastojati da budemo što objektivniji. To ćemo postići ako znamo sa kolikim rizikom odbacujemo neko posmatranje ili neki rezultat posmatranja, odnosno, mi moramo znati sa kojom verovatnoćom oni predstavljaju grube greške. Ovo pitanje može da se i drukčije formuliše i to: u kojim granicama, odredjenim sa unapred zadatim verovatnoćama, se nalaze rezultati čija odstupanja od srednje ili neke izravnate vrednosti mogu da se smatraju posledicom normalnog slučajnog kolebanja uslova koje je karakteristično za dati skup rezultata (koje se izražava srednjom kvadratnom greškom σ) ? Ako su zadate verovatnoće male, rezultati van odgovarajućih granica su malo verovatni, pa se mogu smatrati posledicom grubih poremećaja uslova posmatranja.

Neka je X slučajna promenljiva koja ima normalnu raspodelu verovatnoće, matematičko očekivanje $m_x=0$ i disperziju $\sigma^2=1$. Verovatnoća da će se neki rezultat nalaziti u granicama $[-\alpha, \alpha]$ jednaka je:

$$P(-\alpha \le X < \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = F(\alpha) - F(-\alpha).$$

Pošto je podintegralna funkcija parna, gornja jednačina se može napisati i u obliku:

$$P(-\alpha \le X < \alpha) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\alpha} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2\phi(\alpha) = 2[F(\alpha) - F(0)]$$

Ako tražimo verovatnoću da X ima neku vrednost iz intervala $[-1,1]$ pomoću Tablice I nalazimo $\phi(1)=0.34134$, pa je

$P(-1 \leq X \leq 1)=0.68268$. Ako je $\alpha=2$, $P(-2 \leq X \leq 2)=0.95450$. Znači, sa verovatnoćom $P=0.95$ ili $P=95\%$ očekujemo da će rezultat posmatranja biti u granicama od ± 2 jedinice ili u granicama od $\pm 2\sigma$ (ako promenljiva nije svedena na standardni oblik). Ovo pravilo se zove "pravilo dve sigme". U astronomskoj praksi kao granice normalnih odstupanja smatraju se: $\pm 2.5\sigma$ i $\pm 3\sigma$.

Kada su u datom skupu $\{x_i\}$ identifikovane grube greške, svi parametri koji karakterišu dati skup moraju se ponovo izračunati.

Intervali u kojima se odstupanja smatraju normalnim (ne predstavljaju grube greške) zovu se intervali pouzdanosti ili intervali poverenja.

Ako je slučajna promenljiva X neprekidnog tipa odredjivanje granica intervala pouzdanosti na način koji je napred opisan nije moguće jer u bilo kojim granicama broj ishoda je beskonačno veliki.

Pretpostavimo da raspolažemo sa podskupovima S_x od konačnog broja elemenata. Verovatnoća P' da u intervalima $(-\infty, -\alpha)$ i (α, ∞) nema nijednog rezultata zavisi od broja elemenata datog podskupa. Sa povećanjem broja elemenata, P' se smanjuje. Naprimer, veća je verovatnoća da će se u podskupu od 1000 elemenata naći bar jedan koji pripada intervalu $(-\infty, -\alpha)$, nego u podskupu od svega 10 elemenata.

Američki matematičar Šovene je predložio sledeći kriterijum za odredjivanje granica intervala pouzdanosti* :

$$1 - P' = P \leq \frac{1}{2n}$$

ili:

$$1 - P \geq \frac{2n-1}{2n},$$

gde je n broj elemenata podskupa S_x, a P - verovatnoća da intervali $(-\infty, -\alpha)$ i (α, ∞) sadrže elemente S_x (bar jedan element).

---

* Čebotarev A.C.: Sposob najmenših kvadratov i osnovi teorii verojatnostej, Moskva, 1958, str. 522.

Osnovanost ovoga kriterijuma je u činjenici da sa povećanjem n statistička verovatnoća teži teorijskoj. Proizvod nP predstavlja broj elemenata datoga podskupa koji pripadaju intervalima $(-\infty, -\alpha)$ i (α, ∞).

Ako grubu grešku definišemo kao odstupanje koje je nemoguće ukoliko su svi rezultati homogeni, odnosno, ukoliko u toku merenja nije dolazilo do sporadičnih skokovitih promena uslova od kojih zavise rezultati merenja, ona se može identifikovati na osnovu relacije:

$$nP = 0.$$

Pošto proizvod nP , u opštem slučaju, nije ceo broj, a, s druge strane, broj pojavljivanja ili nepojavljivanja nekog rezultata nije decimalan, nP se zaokrugljuje na najbliži ceo broj. Zbog toga se smatra da neko odstupanje predstavlja grubu grešku ako njegova verovatnoća P zadovoljava relaciju:

$$nP \leq 0.5 = \frac{1}{2}$$

ili:

$$P \leq \frac{1}{2n} .$$

U graničnom slučaju, $P_o = \frac{1}{2n}$.

Odredivši graničnu verovatnoću P_o i znajući zakon raspodele verovatnoće slučajne promenljive F(x), možemo lako odrediti granice normalnih odstupanja: $\pm\alpha$. α predstavlja argument funkcije F(x) odredjen iz uslova $F(\alpha) = P_o$.

Iz citirane knjige Čebotareva pozajmili smo Tablicu 1 u kojoj su za izvestan broj vrednosti n date granice α za standardnu normalnu raspodelu:

TABLICA 1.

Granice intervala pouzdanosti po kriterijumu Šovene

n	α	n	α	n	α	n	α
3	1.38	11	2.00	19	2.22	40	2.49
4	1.53	12	2.03	20	2.24	50	2.58
5	1.65	13	2.07	21	2.26	75	2.71
6	1.73	14	2.10	22	2.28	100	2.81
7	1.80	15	2.13	23	2.30	200	3.02
8	1.86	16	2.15	24	2.31	500	3.29
9	1.92	17	2.17	25	2.33		
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]		

Tačnost odredjivanja rektascenzija zvezda na savremenim meridijanskim instrumentima se kreće od $\pm 0^s.015 \sec\delta$ do $020 \sec\delta$*. Pretpostavimo da ova druga vrednost karakteriše preciznost našeg instrumenta i pretpostavimo da smo jednu ekvatorsku zvezdu posmatrali 11 puta. U datom podskupu jedan rezultat odstupa od srednje vrednosti za $u = 0^s.042$. Da li taj rezultat sadrži grubu grešku?

Uz pomoć Tablice 1 za n=11 nalazimo $\alpha = 2.oo$. To znači da je maksimalno normalno odstupanje $u_{max} = 2.00 \times 0^s.020 \sec\delta = 0^s.040$. Prema tome, pomenuti rezultat sadrži grubu grešku.

Kriterijum Šovene je strog. Skrećemo pažnju čitaoca na to da postoje i blaži kriterijumi (naprimer, kriterijum Šarlijea koji je objašnjen citiranoj u knjizi Čebotareva).

---

* Djurović D.: Bull. Obs. Astron. Beograd, 127, 1976.

19. METODA NAJMANJIH KVADRATA. APROKSIMACIJA POSMATRANJA OBIČNIM I ORTOGONALNIM POLINOMIMA.

Neka je $\{y_i\}$ $(i=1,2,\ldots,n)$ skup rezultata posmatranja slučajne promenljive y koja je funkcija od x i parametara: $a,b,c,\ldots$ koje treba odrediti. Analitički, ta beza se izražava jednačinom:

$$y = \psi(x: a,b,c,\ldots)$$

Nepoznati parametri $a,b,c,\ldots$ mogu se odrediti raznim metodama, ali u tom cilju se najčešće koristi princip najmanjih kvadrata ili metoda najmanjih kvadrata koja je zasnovana na tom principu. Razlog za najčešće korišćenje principa najmanjih kvadrata leži u njegovom verovatnostnom opravdanju. Naime, francuski matematičar Ležandr* je pokazao da u slučaju kada greške merenja imaju normalnu raspodelu, parametri $a,b,c,\ldots$ odredjeni metodom najmanjih kvadrata imaju najveće moguće verovatnoće. Drugim rečima, najverovatnije vrednosti $a,b,c,\ldots$ dobijaju se iz uslova:

$$U = \sum_i [y_i - \psi(x_i: a,b,c,\ldots)]^2 = \min.$$

Princip najmanjih kvadrata je opšti matematički princip. Često se njegova primena pogrešno uslovljava normalnom raspodelom. Medjutim, on se može primeniti i kada greške merenja imaju drukčiju raspodelu, ali se ne sme zaboraviti da u tim slučajevima $a,b,c,\ldots$ mogu odstupati od najverovatnijih vrednosti.

Funkcija U zavisi od promenljivih $a,b,c,\ldots$ (pošto činimo razne hipoteze o iznosima $a,b,c,\ldots$, smatraćemo ih nezavisno promenljivim veličinama), pa se minimum funkcije U odredjuje iz uslova:

$$\frac{\partial U}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial c} = 0, \ldots.$$

---

* Legendre A.M., 1752 - 1797 .

ili iz jednačina:

$$\sum_{i=1}^{n} [y_i - \psi(x_i: a,b,c,\ldots)] \left(\frac{\partial\psi}{\partial a}\right)_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} [y_i - \psi(x_i: a,b,c,\ldots)] \left(\frac{\partial\psi}{\partial b}\right)_i = 0, \quad \text{itd.}$$

Indeks "i" znači da se izvodi odnose na dato x_i.

Poslednjih jednačina ima onoliko koliko i nepoznatih. Zovu se normalne jednačine. Jednačine oblika:

$$v_i = y_i - \psi(x_i: a,b,c,\ldots)$$

zovu se jednačine grešaka ili uslovne jednačine.

Ako je $\psi(x: a,b,c,\ldots)$ linearna funkcija a,b,c,.... i normalne jednačine su linearne jednačine tih parametara, pa je njihovo rešavanje jednostavno. Ako nisu linearne, primenjuje se postupak "linearizacije" na koji ćemo se kasnije osvrnuti.

Ako iz nekih teorijskih razmatranja neznamo oblik funkcije $y=\psi(x: a,b,c,\ldots)$, što je vrlo čest slučaj u praksi, na osnovu analize grafikona ili tabličnih razlika posmatranih vrednosti, odredjujemo funkciju koja će se na najbolji mogući način prilagoditi datom rasporedu tačaka $Q_i\ (x_i, y_i)$ ili datim tabličnim iznosima funkcije.

Osnovni nedostatak metode najmanjih kvadrata je u tome što smo najčešće prisiljeni da subjektivno odredjujemo funkciju $\psi(x: a,b,c)$. U odnosu na dati analitički oblik funkcije odredjujemo a,b,c,... tako da zbir kvadrata grešaka (koje se zovu još i rezidui) bude minimalan. U odnosu na neku drugu funkciju, taj minimum neće biti isti, neće ni koeficienti a,b,c,... biti isti. Neke druge metode, kao, naprimer, metoda Vitakera-Robinsona-Vondraka* nemaju taj nedostatak, ali, nažalost, nisu slobodne od drugih nedostataka. Do danas nije pronadjena metoda optimalne aproksimacije posmatranja dovoljno opšta i dovoljno objašnjena sa aspekata teorije verovatnoće.

---

* Vondrak J. 1969 : Bulletin of The Astronomical Institutes of Czechoslovakia, 20, 6.

Aproksimacije $\{y_i\}$ polinomima i trigonometrijskim funkcijama su vrlo česte u astronomskoj praksi. Navešćemo dva primera:

1. Razlike svetskog vremena UT1 i svetskog koordiniranog vremena UTC (koje se dobija linearnom transformacijom atomskog vremena A3) sadrže sekularni član, koji se predstavlja polinomom, i periodične varijacije koje imaju sezonske i plimske komponente (izazvane deformacijama Zemlje pod dejstvom privlačnih sila Sunca i Meseca). Na intervalima do nekoliko godina UT1-UTC se dovoljno tačno može predstaviti jednačinom:

$$UT1-UTC=a+bt+ct^2+d\sin 2\pi t+e\cos 2\pi t+f\sin 4\pi t+g\cos 4\pi t,$$

gde je t vreme u godinama računato od neke inicijale epohe $t_o=0$.

2. Sistematske greške $\Delta\alpha_\alpha$ nekog kataloga predstavljaju se zbirom nezavisnog člana (ne zavisi od α) i dve "harmonike":

$$\Delta\alpha_\alpha=a_1+b_1\sin\alpha+c_1\cos\alpha+d_1\sin 2\alpha+e_1\cos 2\alpha \quad .$$

Pod izrazom: "aproksimirati" podrazumeva se predstavljanje datog skupa $\{y_i\}$ jednim drugim skupom $\{\bar{y}_i\}$ dobijenim računskim putem ili pak predstavljanje funkcijom $y=\psi(x:a,b,c,\ldots)$ čiji su parametri odredjeni na neki način na osnovu datih y_i.

Kada se iz teorijskih razmatranja nezna tačan oblik funkcije $y=\psi(x:a,b,c,\ldots)$ često se aproksimacija posmatranja vrši polinomima.

Pretpostavimo da $\{y_i\}$ aproksimiramo polinomom reda r:

$$y=\theta_o+\theta_1 x+\theta_2 x^2+\ldots+\theta_r x^r \quad .$$

Rezultati naših merenja y_i sadrže greške ε_i, pa će jednačine grešaka biti:

$$\varepsilon_1=y_1-(\theta_o+\theta_1 x_1+\theta_2 x_1^2+\ldots+\theta_r x_1^r) \ ,$$

$$\varepsilon_2=y_2-(\theta_o+\theta_1 x_2+\theta_2 x_2^2+\ldots+\theta_r x_2^r) \ ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varepsilon_n=y_n-(\theta_o+\theta_1 x_n+\theta_2 x_n^2+\ldots+\theta_r x_n^r) \ ,$$

Ako uvedemo sledeće oznake za matrice:

$$\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon_n \end{vmatrix}, \qquad Y = \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{vmatrix}, \qquad \theta = \begin{vmatrix} \theta_o \\ \theta_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \theta_r \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \dots & x_1^r \\ 1 & x_2 & x_2^2 \dots & x_2^r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 \dots & x_n^r \end{vmatrix}$$

jednačine grešaka se sažeto predstavljaju u obliku:

$$\varepsilon = Y - A\theta \ .$$

Ako su ε' i θ' transponovane matrice u odnosu na ε i θ, zbir kvadrata grešaka se izražava u obliku:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \varepsilon'\varepsilon = (Y-A\theta)'(Y-A\theta) = \\ = Y'Y - \theta'A'Y - Y'A\theta + \theta'A'A\theta \ .$$

Pošto je $Y'A\theta$ matrica koja ima samo jedan element ona je jednaka transponovanoj: $Y'A\theta = \theta'A'Y$, pa jednačina za S postaje:

$$S = Y'Y - 2\theta'A'Y + \theta'A'A\theta \ \dots\dots \qquad (1)$$

Ako S diferenciramo po svakom θ_i i te parcijalne izvode izjednačimo s nulom, dobićemo sistem normalnih jednačina:

$$-2A'Y + A'A\theta + \theta'A'A = 0$$

ili:

$$-2A'Y + 2A'A\theta = 0 \ .$$

Iz poslednje jednačine sledi:

$$(A'A)\theta = A'Y, \qquad (2)$$

pa se rešenja normalnih jednačina, koja ćemo označiti sa $\hat{\theta}$, dobijaju iz relacije:

$$\hat{\theta} = (A'A)^{-1} A'Y \ . \ \dots\dots\dots\dots\dots \qquad (3)$$

Jednačina (3) dobijena je množenjem s leva matricom $(A'A)^{-1}$.

Ako izračunate vrednosti $\hat{\theta}_i$ stavimo u jednačine grečaka umesto θ_i, možemo izračunati greške ε_i i minimalni zbir njihovih kvadrata koji ćemo označiti sa R (da bismo ga razlikovali od zbira kvadrata grešaka u opštem slučaju) . Za R ćemo izvesti izraz koji omogućuje da se ono izračuna bez prethodnog računanja rezidua uslovnih jednačina. Polazeći od definicije R, možemo pisati jednačine:

$$R=(Y-A\hat{\theta})'(Y-A\ \theta)=Y'Y-2Y'A\hat{\theta}+\hat{\theta}'A'A\hat{\theta}=$$

$$=Y'Y-2Y'A(A'A)^{-1}A'Y+Y'A(A'A)^{-1}A'A(A'A)^{-1}A'Y.$$

Očigledno, poslednja jednačina je dobijena posle zamene $\hat{\theta}$ sa desnom stranom jednačine (3) u izrazu za R.

Pošto je $(A'A)^{-1}A'A$ jedinična matrica (množenjem neke matrice jediničnom ne menja se vrednost te matrice), izraz za R se može još uprostiti:

$$R=Y'Y-Y'A\ A'A\ ^{-1}A'Y\ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

ili, posle zamene sa 0 :

$$R=Y'Y-Y'A\hat{\theta}\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\qquad(4)$$

Pošto je $\hat{\theta}$ linearna funkcija od Y (jednačina 3) izmedju disperzija $D(\hat{\theta})$ i $D(Y)$ važi relacija:

$$D(\hat{\theta})=(A'A)^{-1}A'D(Y)[(A'A)^{-1}A']'\ .$$

Ovu relaciju lakše ćemo shvatiti ako se poslužimo sledećim prostim razmatranjem:

Neka je Z slučajna promenljiva koja je linearna funkcija n slučajnih promenljivih y_i:

$$Z=k_1Y_1+k_2Y_2+\ldots+k_nY_n\ .$$

U matričnoj formi, ova jednačina može da se napiše:

$$Z=KY,$$

gde su K i Y matrice definisane na sledeći način:

$$K=|k_1,k_2,\ldots,k_n|\qquad Y'=|Y_1,Y_2,\ldots,Y_n|\ .$$

Ako je: $D(Y_1)=D(Y_2)=\ldots=D(Y_n)=\sigma_y^2$,

$D(Z)=\sigma_y^2\sum k_i^2$ ili, u matričnoj formi:

$$D(Z)=KK'\ \sigma_y^2=K\ \sigma_y^2K'\ ,$$

jer je proizvod KK' matrica od jednog jedinog elementa.

Izraz za $D(\hat{\theta})$ može se napisati u obliku:

$$D(\hat{\theta}) = \sigma_y^2 (A'A)^{-1} A'(A^{-1}A'^{-1}A')'.$$

Pošto je: $(A')^{-1}A' = E$, poslednja jednačina se može još uprostiti:

$$D(\hat{\theta}) = \sigma_y^2 (A'A)^{-1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Poslednja jednačina se koristi za ocenu tačnosti koeficijenata $\hat{\theta}$, odnosno, za ocenu tačnosti računatih vrednosti posmatrane funkcije (tačnosti prognoze).

Bez dokaza navešćemo da se najverovatnija vrednost σ_y^2 može izračunati pomoću jednačine:

$$\sigma_y^2 = R/(n-p),$$

gde je $p=r+1$ broj nepoznatih parametara koji se računaju metodom najmanjih kvadrata.

Prilikom aproksimacija polinomima jedan od problema suštinskog značaja je izbor stepena polinoma. Cilj aproksimacije je eliminacija slučajnih grešaka. Potrebno je odrediti najmanji stepen polinoma kojim se postiže taj osnovni cilj. Za to ne postoji neki opšti kriterijum. U praksi se stepen polinoma r postepeno povećava i računaju odgovarajuće disperzije $\sigma_y^2(r)$. Sa povećanjem r, $\sigma_y(r)$ će opadati, ali samo dok r ne postane jednako nekom r_o. Za optimalan stepen polinoma r_o usvaja se minimum funkcije $\sigma_y^2(r)$ ili ono r od kojega $\sigma_y^2(r)$ počinje da stagnira. Naravno, ovde se misli na najbliže celobrojne vrednosti r.

Ukoliko je stepen polinoma veliki, računanje nepoznatih sa varijabilnim r (da bi se dobila funkcija $\sigma_y^2(r)$) predstavlja glomazan računski posao, jer se za svako r mora računati matrica $A'A$ u kojoj se x javlja na stepenu $2r$. Da bi se smanjio uticaj grešaka zaokrugljivanja koje mogu doći do izražaja zbog stepenovanja velikim izložiocima, mora se obezbediti dovoljan broj decimala, što takodje otežava računski posao.

U slučajevima kada iz nekih teorijskih razmatranja ili prethodnih analiza nije poznat stepen aproksimirajućeg polinoma, pogodnije su aproksimacije ortogonalnim polinomima ili polinomima Čebiševa. Kao što ćemo videti kasnije, matrica sistema A'A ne mora se cela računati za svako povećanje r.

Pretpostavimo da smo funkciju y(x) za koju imamo skup rezultata $\{y_i\}$ aproksimirali polinomom:

$$y(x)=K_o+K_1G_1(x)+K_2G_2(x)+\ldots+K_rG_r(x).\ldots \tag{6}$$

u kome svako $G_j(x)$ predstavlja polinom reda j oblika:

$$G_j(x)=k_{jo}+k_{j1}x+\ldots+k_{jj-1}x^{j-1}+x^j.$$

Ako se koeficijenti $k_{jo}, k_{j1}, \ldots$ odrede iz uslova:

$$\sum_m G_i(x_m)\,G_j(x_m)=0, \quad (i\neq j)$$

kaže se da su polinomi $G_i(x)$ i $G_j(x)$ ortogonalni. Ukupan broj jednačina za odredjivanje k_{ji} $(i=0,1,2,\ldots j-1)$ je j:

$$\sum_i G_o(x_i)\,G_j(x_i)=0$$

$$\sum_i G_1(x)\,G_j(x)=0 \tag{7}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sum_i G_{j-1}(x_i)\,G_j(x_i)=0.$$

Ako se ima u vidu jednačina (6) jasno je da se podrazumeva da je: $G_o(x)=1$.

Matrica sistema normalnih jednačina je:

$$B'B=\begin{vmatrix} \sum_i G_o^2(x_i) & \sum_i G_o(x_i)G_1(x_i)\ldots & \sum_i G_o(x_i)G_r(x_i) \\ \sum_i G_1(x_i)G_o(x_i) & \sum_i G_1^2(x_i)\ldots & \sum_i G_1(x_i)\,G_r(x_i) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \sum_i G_r(x_i)G_o(x_i) & \sum_i G_r(x_i)G_1(x_i)\ldots & \sum_i G_r^2(x_i) \end{vmatrix}$$

Iz definicije ortogonalnih polinoma sleduje da su svi nedijagonalni elementi matrice B'B jednaki nuli, pa je:

$$B'B = \begin{vmatrix} \sum_i G_o^2(x_i) & 0 \ldots & 0 \\ 0 & \sum_i G_1^2(x_i) \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 \ldots & \sum_i G_r^2(x_i) \end{vmatrix}$$

$B'B$ predstavlja kvadratnu matricu dimenzija $(r+1)\times(r+1)$.

Ako stepen polinoma povećamo za jedinicu, na glavnoj dijagonali ćemo imati samo jedan novi element. Nova matrica sistema normalnih jednačina biće:

$$CC' = \begin{vmatrix} B'B & 0 \\ \ldots & \ldots \\ 0 & \sum_i G_{r+1}^2(x_i) \end{vmatrix}$$

Očigledno je da povećanje stepena polinoma za jedinicu iziskuje računanje samo jednog elementa: $\sum G_{r+1}^2(x_i)$, umesto računanja cele matrice sistema koje bi bilo neizbežno kod običnih polinoma.

Odredjivanje koeficijenata polinoma $G_j(x)$ podrazumeva rešavanje sistema od j linearnih jednačina sa j nepoznatih: k_{jl} $(l=0,1,\ldots,j-1)$. Broj takvih sistema jednak je broju polinoma (r). Medjutim, ovaj glomazni računski posao može se obaviti po znatno kraćem postupku. To se postiže ako umesto $G_j(x)$ koristimo ortonormirane polinome $Q_j(x)$ na koje se može primeniti Forsajtova rekurentna formula.

Neka je:

$$y(x) = \omega_o Q_o(x) + \omega_1 Q_1(x) + \ldots + \omega_r Q_r(x) . \qquad (8)$$

Pretpostavimo da polinomi $Q_j(x)$:

$$Q_j(x) = q_{jo} + q_{j1}x + \ldots + q_{jj}x^j$$

i punjavaju uslov ortogonalnosti i uslov normiranosti koji se definiše kao:

$$\sum_i Q_j^2(x_i) = 1.$$

Rekurentna Forsajtova formula* glasi:

$$\lambda Q_j(x) = xQ_{j-1}\, x - \beta\, Q_{j-1}(x) - \Upsilon Q_{j-2}(x) \qquad (9)$$

Konstante β i Υ se odredjuju iz jednačina:

$$\beta = \sum_i x_i Q^2_{j-1}(x_i) \qquad \text{i}$$

$$\Upsilon = \sum_i x_i Q_{j-1}(x_i) Q_{j-2}(x_i) \; .$$

Konstanta λ odredjuje se iz uslova normiranosti. Ako levu i desnu stranu jednačine (9) dignemo na kvadrat, a obzirom na pomenuti uslov normiranosti, dobićemo jednačinu pomoću koje se odredjuje λ:

$$\lambda^2 = \sum_i \left[x_i Q_{j-1}(x_i) - \beta\, Q_{j-1}(x_i) - \Upsilon Q_{j-2}(x_i)\right]^2 \; .$$

Proizvod: $Q_{j-1}(x_i) Q_{j-2}(x_i)$ u izrazu za Υ, u opštem slučaju, nije jednak nuli. To može da unese izvestnu zabunu. Zbog toga ističemo da uslov ortogonalnosti nameće da zbir takvih proizvoda za sve date x_i bude jednak nuli, a ne svaki pojedinačni sabirak. Osim toga, ako je zbir proizvoda $Q_{j-1}(x_i)\, Q_{j-2}(x_i)$ i jednak nuli, zbir proizvoda $x_i Q_{j-1}(x_i) Q_{j-2}(x_i)$ ne mora da bude jednak nuli.

Kada se jedanput odrede konstante β, Υ i λ, računanje polinoma $Q_j(x)$ je vrlo jednostavno (jednačina 9) . To se radi na sledeći način:

Iz uslova normiranosti prvo se izračuna $Q_o(x) = q_{oo}$:

$$\sum_{i=1}^{n} Q_o^2(x_i) = \sum_{i=1}^{n} q_{oo}^2 = 1$$

ili:

$$q_{oo} = \frac{1}{\sqrt{n}} \; .$$

Iz uslova ortogonalnosti i uslova normiranosti odredjuju se koeficijenti q_{10} i q_{11} polinoma $Q_1(x)$:

$$\sum_{i=1}^{n} Q_o(x_i) Q_n(x_i) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (q_{10} + q_{11} x_i) = 0 \qquad \text{i}$$

---

* Hudson J.D. 1964 : STATISTICS, Geneva, str. 161-164 (ruski prevod)

$$\sum_{i=1}^{n} Q_1^2(x_i) = (q_{10}+q_{11}x)^2 = 1$$

Posle toga, računaju se β, γ i λ. $Q_2(x)$ se dobija iz jednačine (9).

Parametri β, γ i λ zavise od j, pa se računaju za svako $j \geq 2$.

Polinomi višega reda ($j \geq 3$) se, takodje, računaju pomoću jednačine (9).

Metodom najmanjih kvadrata dobijaju se sledeće vrednosti koeficijenata ω_j :

$$\hat{\omega}_j = \sum_i y_i Q_j(x_i) . \tag{10}$$

Ova jednačina je dobijena množenjem jednačine (8) odgovarajućim $Q_j(x)$ i sabiranjem po svim raspoloživim y_i. Imajući u vidu uslov ortogonalnosti, izvodjenje datog izraza za $\hat{\omega}_j$ je vrlo jednostavno.

Što se tiče statističkih ocena parametara, lako se dokazuju sledeće relacije:

1. Zbir kvadrata rezidua uslovnih jednačina pri aproksimaciji ortogonalnim polinomima do reda r je:

$$R_r = \sum_i y_i^2 - \sum_j \hat{\omega}_j^2 .$$

2. Disperzija y :

$$\sigma_y^2 = \frac{R_r}{n-(r+1)} .$$

Ako se stepen polinoma poveća za jedinicu, važiće sledeće relacije:

$$\hat{\omega}_{r+1} = y_i Q_{r+1}(x_i) ,$$

$$R_{r+1} = R_r - \hat{\omega}_{r+1}^2 \quad \text{i}$$

$$\sigma_y^2 = \frac{R_{r+1}}{n-r-2} .$$

Vrednosti funkcije y(x) računate pomoću jednačine (8)

$$\sum_{i=1}^{n} Q_1^2(x_i) = (q_{10}+q_{11}x)^2 = 1$$

Posle toga, računaju se β , γ i λ . $Q_2(x)$ se dobija iz jednačine (9) .

Parametri β , γ i λ zavise od j, pa se računaju za svako $j \geq 2$.

Polinomi višega reda ($j \geq 3$) se, takodje, računaju pomoću jednačine (9) .

Metodom najmanjih kvadrata dobijaju se sledeće vrednosti koeficijenata ω_j :

$$\hat{\omega}_j = \sum_i y_i \, Q_j(x_i) . \tag{10}$$

Ova jednačina je dobijena množenjem jednačine (8) odgovarajućim $Q_j(x)$ i sabiranjem po svim raspoloživim y_i. Imajući u vidu uslov ortogonalnosti, izvodjenje datog izraza za $\hat{\omega}_j$ je vrlo jednostavno.

Što se tiče statističkih ocena parametara, lako se dokazuju sledeće relacije:

1. Zbir kvadrata rezidua uslovnih jednačina pri aproksimaciji ortogonalnim polinomima do reda r je:

$$R_r = \sum_i y_i^2 - \sum_j \hat{\omega}_j^2 .$$

2. Disperzija y :

$$\sigma_y^2 = \frac{R_r}{n-(r+1)} .$$

Ako se stepen polinoma poveća za jedinicu, važiće sledeće relacije:

$$\hat{\omega}_{r+1} = y_i Q_{r+1}(x_i) ,$$

$$R_{r+1} = R_r - \hat{\omega}_{r+1}^2 \quad \text{i}$$

$$\sigma_y^2 = \frac{R_{r+1}}{n-r-2} .$$

Vrednosti funkcije y(x) računate pomoću jednačine (8) posle zamene ω_j sa $\hat{\omega}_j$ predstavljaju skup rezultata $\hat{y}_i = \hat{y}(x_i)$ nove slučajne promenljive $\hat{y}(x)$. Ako bismo $\hat{\omega}_j$ računali iz više slučajnih uzoraka, za svako j dobili bismo skup slučajnih ishoda $\hat{\omega}_j$, a samim tim i za svako x_i dobili bismo skup slučajnih vrednosti $\hat{y}_i = \hat{y}(x_i)$. Pouzdanost aproksimacije karakteriše se disperzijom $D[\hat{y}(x)]$:

$$D[y(x)] = 6_y^2 \sum_{j=o}^{r} Q_j^2(x) .$$

Za bilo koje x iz oblasti definisanosti y(x) možemo odrediti odgovarajuće D[y(x)] koje se često naziva <u>greška prognoze</u>.

U slučajevima kada uslovne jednačine nisu linearne u odnosu na nepoznate parametre može se desiti da je odgovarajući sistem normalnih jednačina nerešiv. U takvim slučajevima se pristupa "linearizaciji" uslovnih jednačina.

Pretpostavimo da y_i predstavljaju posmatrane vrednosti funkcije y koja zavisi od k nepoznatih parametara θ_j :

$$y = y(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k) .$$

Pretpostavimo još da se u okolini $y^o = y(\theta_1^o, \theta_2^o, \ldots, \theta_k^o)$ y može razviti u Tejlorov red. θ_j^o su poznate približne vrednosti θ_j .

Uzimajući u obzir samo članove prvoga reda po $\theta_j - \theta_j^o$, možemo napisati sledeću relaciju:

$$\Delta y_i = y_i - y_i^o \approx \sum_{j=1}^{k} (\theta_j - \theta_j^o) \left(\frac{\partial y}{\partial \theta_j}\right)^o$$

Kao što se vidi, Δy_i su linearne funkcije θ_j, pa se θ_j mogu izračunati metodom najmanjih kvadrata. Naravno, dobijaju se približne vrednosti nepoznatih, jer su u Tejlorovom redu zanemareni članovi višega reda razlika $\theta_j - \theta_j^o$.

Rezultati iz prve aproksimacije koriste se kao inicijalne vrednosti u drugoj. Popravke Δy_i u drugoj aproksimaciji predstavljaju razlike $y_i - y'_i$, gde je $y'_i = y(\theta'_1, \theta'_2, \ldots, \theta'_k)$, a θ'_j - rezultati iz prve aproksimacije. Osim toga, u uslovnim jednačinama se umesto [illegible] $\left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^o$ u kome su θ zamenjeni sa θ^o

koristi izvod $\left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)'$ u kome su θ_j zamenjeni sa θ'_j .

Iterativni postupak se sprovodi dok razlike nepoznatih iz poslednje i pretposlednje aproksimacije ne postanu zanemarljive. Nažalost, dosta često se dogadja da opisani postupak ne daje konvergentna rešenja. Neki autori su pokazali da se odredjenom modifikacijom iterativnog postupka postiže konvergentnost u dovoljno opštim uslovima. Čitaoce koji se za taj problem više interesuju upućujemo na rad: Hartley H.O.: Technometrics,3, 269, 1961 . U okviru ovoga kursa u to nećemo ulaziti.

U bibliotekama savremenih elektronskih računara mogu se naći gotovi programi za inverziju matrice, pa čak i programi za aproksimaciju ortogonalnim i ortonormiranim polinomima. Tada je primena matričnog računa veoma pogodna. Medjutim, ako se radi pomoću malih računara na kojima se ne može programirati i ako su sistemi normalnih jednačina relativno mali, upotreba Gausovih algoritama može znatno olakšati posao.

Pretpostavimo da jednačine grešaka sadrže samo tri nepoznate:

$$\varepsilon_1 = a_1x+b_1y+c_1z+f_1$$

$$\varepsilon_2 = a_2x+b_2y+c_2z+f_2$$

....

$$\varepsilon_n = a_nx+b_ny+c_nz+f_n$$

gde su x,y, i z nezavisno promenljive koje treba odrediti iz posmatranja funkcije f, a ε_1, $\varepsilon_2, \ldots,$ ε_n greške posmatranja.

Ako dignemo na kvadrat leve i desne strane gornjih jednačina i saberemo ih dobićemo:

$$S = \sum_i \varepsilon_i^2 = \sum_i (a_ix+b_iy+c_iz+f_i)^2$$

Veoma lako se dokazuje da će parcijalni izvodi S po x,y i z, koji predstavljaju normalne jednačine, biti:

$$x\sum a_i^2+y\sum a_ib_i+z\sum a_ic_i+\sum a_if_i = 0$$

$$x\sum b_ia_i+y\sum b_i^2+z\sum b_ic_i+\sum b_if_i = 0$$

$$x \sum c_i a_i + y \sum c_i b_i + z \sum c_i^2 + \sum c_i f_i = 0$$

I kada je broj nepoznatih veći, iz gornjeg primera jasna je logika formiranja normalnih jednačina.

Ako upotrebimo Gausove oznake za zbirove, poslednji sistem se piše u obliku:

$$\begin{aligned} [aa]x + [ab]y + [ac]z + [af] &= 0 \\ [ab]x + [bb]y + [bc]z + [bf] &= 0 \\ [ac]x + [bc]y + [cc]z + [cf] &= 0 \end{aligned} \tag{11}$$

Za nepoznatu x iz prve jednačine nalazimo:

$$x = -y \frac{[ab]}{[aa]} - z \frac{[ac]}{[aa]} - \frac{[af]}{[aa]} \tag{12}$$

Zamenom x u drugoj i trećoj jednačini sistema (11) dobijaju se sledeće dve jednačine:

$$\begin{aligned} [bb\cdot 1]\, y + [bc\cdot 1]\, z + [bf\cdot 1] &= 0 \text{ i} \\ [bc\cdot 1]\, y + [cc\cdot 1]\, z + [cf\cdot 1] &= 0 \end{aligned} \tag{13}$$

u kojima nove oznake predstavljaju:

$[bb\cdot 1] = [bb] - [ab][ab]/[aa]$,

$[bc\cdot 1] = [bc] - [ab][ac]/[aa]$,

$[bf\cdot 1] = [bf] - [ab][af]/[aa]$,

$[cc\cdot 1] = [cc] - [ac][ac]/[aa]$ i

$[cf\cdot 1] = [cf] - [ac][af]/[aa]$.

Ako prvu jednačinu sistema (13) re˘imo po y, dobićemo:

$$y = -z[bc\cdot 1]/[bb\cdot 1] - [bf\cdot 1]/[bb\cdot 1] \; . \tag{14}$$

Zamenom u drugoj jednačini sistema (13) dobija se jednačina sa jednom nepoznatom:

$$[cc\cdot 2]\, z + [cf\cdot 2] = 0 \; ,$$

odnosno:

$$z = -[cf\; 2] \;/\; [cc\; 2] \; . \tag{15}$$

Simboli $[cc\cdot 2]$ i $[cf\cdot 2]$ predstavljaju:

$[cc\cdot 2] = [cc\cdot 1] - [bc\cdot 1][bc\cdot 1] \;/\; [bb\cdot 1]$ i

$[cf\cdot 2] = [cf\cdot 1] - [bc\cdot 1][bf\cdot 1] \;/\; [bb\cdot 1]$.

Simboličke oznake koje smo gore uveli su proste i jednoobrazne. Poznate su pod imenom Gausovi algoritmi. U opštem slučaju, algoritam predstavlja skraćenu oznaku nekog skupa operacija.

Svaki algoritam koji smo uveli može da se rastavi na dva sabirka sastavljena od algoritama čiji je red za jedinicu niži. Prvi sabirak je isti kao i algoritam koji se rastavlja, samo za jedinicu nižeg reda. Drugi član je razlomak čiji je imenitelj kvadratni koeficijent poslednje isključene nepoznate. Kvadratni koeficijenti uz nepoznatu y, naprimer, su: [bb], [bb·1], [bb 2], itd. Brojitelj je proizvod dva algoritma: slovna oznaka prvog je sastavljena od prvog slova imenitelja i prvog slova algoritma koji se razlaže, a slovna oznaka drugog činioca je sastavljena od drugog slova imenitelja i drugog slova algoritma koji se razlaže. Tako, naprimer, ako bismo imali sistem uslovnih jednačina sa četiri nepoznate u kome su d_i koeficijenti uz četvrtu nepoznatu, algoritam [df·3] bi se razvio na sledeći način:

prvi član - isti algoritam nižeg reda: [df·2] ;

imenitelj drugog sabirka je kvadratni koeficijent uz treću nepoznatu: [cc 2] ;

brojitelj čini proizvod algoritama drugog reda čije oznake su sastavljene od slova cc i df : [cd·2] i [cf 2] .

Prilikom sastavljanja i rešavanja normalnih jednačina na svakom koraku mora se kontrolisati tačnost računa. Jedan od načina da se to postigne izložićemo u narednim redovima.

Neka je:

$$
\begin{array}{l}
a_1+b_1+c_1+f_1=s_1 \\
a_2+b_2+c_2+f_2=s_2 \\
\dots\dots\dots\dots \\
a_n+b_n+c_n+f_n=s_n
\end{array}
$$

Množenjem gornjih jednačina respektivno sa $a_1, a_2, \dots, a_n$, a zatim sabiranjem dobija se jednačina:

$[aa]+[ab]+[ac]+[af]=[as]$.

Na sličan način, posle množenja sa $b_1, b_2, \ldots, b_n$, odnosno, sa $c_1, c_2, \ldots, c_n$, dobijaju se i jednačine:

$[ab]+[bb]+[bc]+[bf]=[bs]$ i

$[ac]+[bc]+[cc]+[cf]=[cs]$.

Poslednje tri jednačine služe kao kontrola sastavljanja normalnih jednačina.

Rešavanje normalnih jednačina može se vršiti po sledećoj šemi koja sadrži nekoliko etapa:

Etapa No 1:

Sadrži dve linije: u prvoj liniji su koeficijenti prve normalne jednačine, u drugoj proizvodi tih koeficijenata i $-1/[aa]$:

$[aa]$	$[ab]$	$[ac]$	$[af]$	$[as]$
-1	$-[ab]/[aa]$	$-[ac]/[aa]$	$-[af]/[aa]$	$-[as]/[aa]$.

U poslednjoj koloni su kontrolni koeficijenti. Jasno je da zbir prva četiri koeficijenta na svakoj liniji mora biti jednak petom.

Etapa No 2 :

Ova etapa sadrži 4 linije. U prvoj liniji su koeficijenti druge normalne jednačine bez prvoga. U drugoj liniji su proizvodi drugog koeficijenta prve normalne jednačine i odgovarajućih članova druge linije iz prve etape. Zbirovi članova ove dve linije predstavljaju algoritme prvoga reda. Oni se množe recipročnom vrednošću prvoga od njih sa promenjenim znakom i tako dobijeni rezultati upisuju na četvrtoj liniji. Šematski, druga etapa izgleda:

$[bb]$	$[bc]$	$[bf]$	$[bs]$
$-[ab][ab]/[aa]$	$-[ab][ac]/[aa]$	$-[ab][af]/[aa]$	$-[ab][as]/[aa]$
$[bb\cdot 1]$	$[bc\cdot 1]$	$[bf\cdot 1]$	$[bs\cdot 1]$
-1	$-[bc\cdot 1]/[bb\cdot 1]$	$-[bf\cdot 1]/[bb\cdot 1]$	$-[bs\cdot 1]/[bb\cdot 1]$.

Etapa No 3 :

Ova etapa može da se šematski predstavi sa 5 linija. U prvoj su koeficijenti treće normalne jednačine bez prva dva, u drugoj su proizvodi trećeg koeficijenta prve normalne jednačine i odgovarajućih članova na drugoj liniji u prvoj etapi. Na trećoj liniji su proizvodi $[bc\cdot 1]$ i odgovarajućih članova na poslednjoj liniji prethodne etape.

Zbirovi koeficijenata u istim kolonama na ove tri linije predstavljaju algoritme drugoga reda. Ovi algoritmi se upisuju u četvrtoj vrsti. Petu vrstu ili petu liniju čine proizvodi koeficijenata četvrte linije i recipročne vrednosti prvoga od njih sa promenjenim znakom. Šematski, ova etapa se može predstaviti kao:

[cc]	[cf]	[cs]
-[ac][ac]/[aa]	-[ac][af]/[aa]	-[ac][af]/[aa]
-[bc·1][bc·1]/[bb·1]	-[bc·1][bf·1]/[bb·1]	-[bc·1][bs·1]/[bb·1]
[cc·2]	[cf·2]	[cs·2]
- 1	-[cf·2]/[cc·2]	-[cs·2]/[cc·2]

Iz gornjeg primera je jasno koje bismo koeficijente računali u četvrtoj i svakoj narednoj etapi. Ako se radi o sistemu od svega tri normalne jednačine, gornja šema sadrži sve elemente koji su neophodni za računanje nepoznatih.

Nepoznate x,y i z se računaju iz jednačina 15 , 14 i 12 i to prvo z, zatim y i najzad x.

Kontrola dobijenih vrednosti za nepoznate je takodje jednostavna kao i kontrola računa u šemi koju smo pokazali. Kontrola računanja u gornjoj šemi je zasnovana na činjenici da su zbirovi koeficijenata na poslednje dve linije jednaki koeficijentu u poslednjoj koloni.

Neka su ξ , η i ζ nove promenljive koje zadovoljavaju uslove:

$$x = \xi + 1\ ,$$
$$y = \eta + 1 \text{ i}$$
$$z = \zeta + 1\ .$$

Ako u prvu normalnu jednačinu umesto x,y i z stavimo desne strane poslednjih jednačina dobićemo:

$$[aa]\xi + [ab]\eta + [ac]\zeta + \{[aa]+[ab]+[ac]+[af]\} = 0\ .$$

Očigledno, član u velikoj zagradi jednak je $[as]$.
Ako zamenu izvršimo u sve tri normalne jednačine, dobićemo sledeći sistem jednačina:

$$\begin{aligned} [aa]\xi + [ab]\eta + [ac]\zeta + [as] &= 0 \\ [ab]\xi + [bb]\eta + [bc]\zeta + [bs] &= 0 \\ [ac]\xi + [bc]\eta + [cc]\zeta + [cs] &= 0 \qquad (16) \end{aligned}$$

Uporedjujući sisteme 11 i 16 vidimo da se nepoznate ξ, η i ζ mogu jednostavno izračunati zamenjujući [af] sa [as], [bf] sa [bs] i [cf] sa [cs]. Ako se koristi data šema Gausovih algoritama, pri računanju ξ, η i ζ brojeve iz pretposlednje kolone treba zameniti brojevima sa iste linije poslednje kolone.

Kada izračunamo x, y, z, ξ, η i ζ proveravamo da li su zadovoljene relacije: $x = \xi + 1$, $y = \eta + 1$ i $z = \zeta + 1$.

Za rešavanje sistema normalnih jednačina koriste se i Kramerove formule:

$$x = \frac{D_x}{D},$$

$$y = \frac{D_y}{D} \quad \text{i}$$

$$z = \frac{D_z}{D},$$

u kojima D predstavlja determinantu sistema, a D_x, D_y i D_z determinante uz nepoznate. Kao što znamo, one se dobijaju kada se odgovarajuća kolona u D (prva za x, druga za y i treća za z) zameni kolonom čiji su elementi nezavisni članovi normalnih jednačina.

Korišćenje determinanti za rešavanje sistema normalnih jednačina je pogodno i zbog jednostavnog odredjivanja disperzija nepoznatih: σ_x^2, σ_y^2 i σ_z^2.

Neka je $\sigma_f^2 = \sigma_o^2$ disperzija posmatrane funkcije:

$$\sigma_o^2 = \sum \varepsilon_i^2 / (n-p),$$

gde je p broj nepoznatih (u konkretnom primeru, p=3).

Rezidui ε_i dobijaju se posle zamene računatih vrednosti x, y i z u uslovnim jednačinama.

U kursevima u kojima se obradjuje metoda najmanjih kvadrata* dokazuju se sledeće relacije:

---

* Šćigolev B.M.: Matematičeskaya obrabotka nabljudenij, str. 264-270, Moskva, 1960.

$$\sigma_x^2 = \frac{D_{11}}{D}\sigma_o^2,$$

$$\sigma_y^2 = \frac{D_{22}}{D}\sigma_o^2,$$

$$\sigma_z^2 = \frac{D_{33}}{D}\sigma_o^2,$$

u kojima D_{11}, D_{22} i D_{33} predstavljaju algebarske komplemente, respektivno, prvog, drugog i trećeg dijagonalnog elementa determinante D.

Ako se koristi data šema Gausovih algoritama, dokazuje se da je (čitaoc se upućuje na pomenuti kurs Šćigoleva) :

$$\sigma_z^2 = \sigma_o^2 / [cc \cdot 2].$$

Promenom redosleda nepoznatih lako se dobijaju još dve relacije koje omogućuju računanje σ_y^2 i σ_x^2. Naprimer, ako uslovne jednačine napišemo u obliku:

$$c_i z + a_i x + b_i y + f_i = \varepsilon_i$$

važiće relacija:

$$\sigma_y^2 = \frac{\sigma_o^2}{[bb \cdot 2]}.$$

Kao što znamo, $[bb \cdot 2]$ se može razviti kao:

$$[bb \cdot 2] = [bb \cdot 1] - [ab \cdot 1][ab \cdot 1]/[aa \cdot 1],$$

gde je:

$$[aa \cdot 1] = [aa] - \frac{[ca][ca]}{[cc]} = [aa] - \frac{[ac][ac]}{[cc]}.$$

Na način koji je ranije opisan dobijaju se i ostali algoritmi.

Z A D A T A K

U Tablici 1 date su srednje koordinate zvezda spektralnog tipa 0. Položaji ovih zvezda su i grafički predstavljeni na slici 1 .

Pretpostavljajući da su odstupanja zvezda spektralnog tipa 0 od galaktičkog ekvatora slučajna, izračunati njegov nagib u odnosu na nebeski ekvator I i rektascenziju uzlaznog čvora A .

Ako su α_m i δ_m ekvatorske koordinate tačke Σ koja se nalazi na galaktičkom ekvatoru (slika 2) , važi relacija:

$$\sin \alpha_m - A = \mathrm{ctg} I \, \mathrm{tg}\, \delta_m, \text{ odnosno:}$$

$$\mathrm{tg}\, \delta_m = \mathrm{tg} I \sin(\alpha_m - A) .$$

Zbog toga što se nepoznata A nalazi u argumentu sinusa, "posmatrana" funkcija $\mathrm{tg}\, \delta_m$ nije linearna u odnosu na nepoznate tgI i A.

Pomoću slike 1 nalazimo prvu početnu vrednost A, kao vrednost argumenta za koju je funkcija jednaka nuli:

$$A_o = 6^h\!.5 = 97^\circ\!.5$$

ili:

$$A_o = 18^h\!.5 = 277^\circ\!.5,$$

zavisno od toga da li se radi o uzlaznom ili silaznom čvoru(posle uzlaznog čvora sa porastom δ raste i α .

Ako sa ΔA označimo popravku A_o, polazna jednačina se može transformisati na sledeći način:

$$\begin{aligned} \mathrm{tg}\, \delta_m &= \mathrm{tg} I \sin(\alpha_m - A_o - \Delta A) = \\ &= \mathrm{tg} I \left[\sin(\alpha_m - A_o) \cos \Delta A - \cos(\alpha_m - A_o) \sin \Delta A\right] \approx \\ &\approx \mathrm{tg} I \sin(\alpha_m - A_o) - \Delta A \, \mathrm{tg} I \cos(\alpha_m - A_o) . \end{aligned}$$

Do poslednje jednačine došli smo "linearizacijom" tačne veze i to stavljajući:

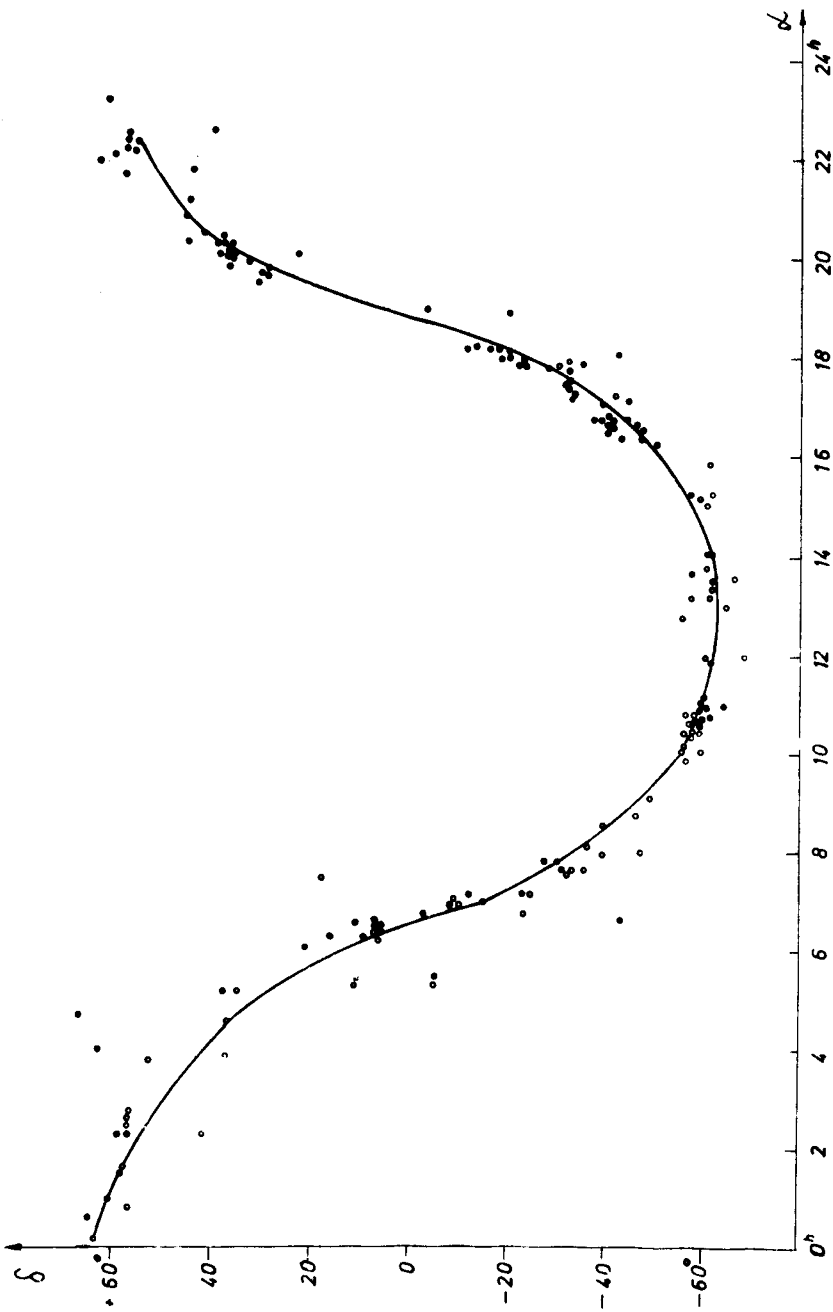
$$\cos \Delta A = 1 \quad \text{i}$$

$$\sin \Delta A = \Delta A .$$

Smenama:

$$z_i = \mathrm{tg}\, \delta_m ,$$

$$x_i = \sin(\alpha_m - A_o) ,$$



sl. 1

$y_i = \cos(\alpha_m - A_o)$,

$a = \mathrm{tg} I$ i

$b = -\Delta A \;\mathrm{tg}\, I$

dobijaju se "jednačine posmatranja" oblika:

$$z_i = ax_i + by_i + \varepsilon_i .$$

Račun smo obavili uzimajući da je $A_o = 97^\circ.5$ (silazni čvor) i to po šemi:

	z_i	x_i	y_i	$x_i x_i$	$x_i y_i$	$y_i y_i$	$x_i z_i$
1	1.536	-0.958	0.287	0.917764	-0.274946	0.082369	-1.471488
2	0.722	-0.476	0.879	0.226576	-0.418404	0.772641	-0.343672
...	...	...	...	...	...	...	...

	$y_i z_i$	s_i	$x_i s_i$	$y_i s_i$
1	0.440832	-2.207	2.114306	-0.633409
2	0.634638	-0.319	0.151844	-0.280401
...	...	...	...	...

Zbirovi po kolonama iznose:

$[z]=-5.301$, $[x]=1.941$, $[y]=-1.215$, $[xx]=6.095121$, $[xy]=0.653407$, $[yy]=9.902845$, $[xz]=-11.072453$, $[yz]=-0.299546$, $[s]=6.027$, $[xs]=17.820981$ i $[ys]=10.855798$.

Rešenja normalnih jednačina ćemo tražiti koristeći šemu Gausovih algoritama:

a	b	f=-z	s
6.095121	0.653407	11.072453	17.820981
-1.000 000	-0.107202	-1.816609	-2.923811
	9.902845	0.299546	10.855798
	-0.070046	-1.186985	-1.910445
	9.832799	- 0.887439	8.945353
	-1.000000	0.090253	-0.909746

Nepoznate a i b i kontrolne nepoznate nalazimo na sledeći način:

b	a	η	ξ
0.090253	-1.816609	-0.909747	-2.923811
	-0.107202 b		+0.097527
	-1.826284		-2.826284

Kontrola je: $a - \xi = 1.000\,000$ i $b - \eta = 1.000\,000$.

Rešenja koja smo tražili su:

$tg I = -1.826284$ ($I = -61\overset{\circ}{.}297$) i

$\Delta A = 0.049419$ radijana $= 0\overset{h}{.}189$.

Rektascenzija silaznog čvora i nagib su:

$A = 6^h\, 41\overset{m}{.}3$,

$I = 61^\circ 17'.8$.

Iz podataka datih u knjizi: Zonn V. i Rudnickij K.: ZVEZDNAJA ASTRONOMIJA, Moskva, 1959., date su sledeće vrednosti:

$A = 6^h\, 44^m$

$I = 62\overset{\circ}{.}5$

U sledećoj aproksimaciji za A_o usvaja se vrednost iz prethodne ($A_o = 6^h 41\overset{m}{.}3$) i ceo račun se ponavlja na isti način. S obzirom da radna hipoteza implicira da gustina zvezda spektralnog tipa 0 opada eksponencijalno i to sa kvadratom daljine od galaktičkog ekvatora (tj. da su odstupanja od galaktičkog ekvatora gausovska) netačna, isterivanje visoke tačnosti računanja A i I nema smisla.

T A B L I C A 1

Ekvatorske koordinate zvezda spektralnog tipa 0

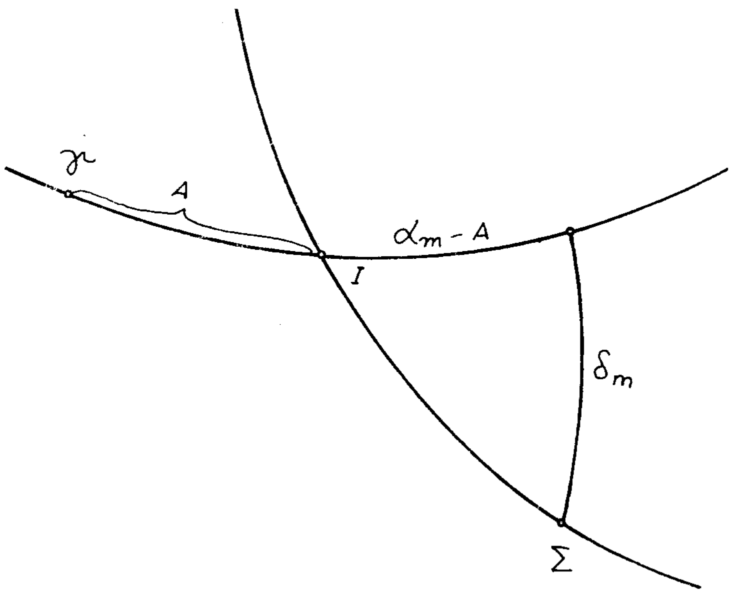
epoha: 1900.0 .

HD	α_m	δ_m
108 - 16691	$1\overset{h}{.}612$	$56\overset{\circ}{.}93$
17638-37022	4.603	35.84
37043 -47839	6.317	7.36
48099 -57061	6.981	-15.75
60848 -73882	7.904	-30.94
76536 -92740	10.088	-56.48
92809 -95435	10.746	-59.11
96548 -115473	11.862	-61.53
117297 -136488	14.119	-61.51
137603 -153233	16.428	-47.76
152270 -158860	17.059	-39.80
159176 -165688	17.845	-28.93
165763 -184738	18.457	-14.01
186943 -192103	19.963	28.66
192163 -206267	20.541	41.39
208320 -219460	22.352	53.89

α_m i δ_m su srednje vrednosti α i δ 10 uzastopnih zvezda spiska koji je dat u knjizi: Atanasijević I. i Milogradov-Turin J.: IZABRANA POGLAVLJA IZ ZVEZDANE ASTRONOMIJE (praktikum za studente Prirodno-matematičkog fakulteta u Beogradu).

Pomenuti spisak je sačinjen na osnovi radova Cecilia Payne Gapoškin: "STARS OF HIGH LUMINOSITY" (New York and London, 1939), Astrophysical Journal, 67, 1962. i Henry Draper Catalogue HD .

U kolonama HD dati su brojevi prve i poslednje zvezde pomenutog spiska po HD catalogu.



sl. 2

Z A D A T A K

U Tablici 2 data su sistematska odstupanja $\Delta\delta_{\alpha}$ nekoliko kataloga u odnosu na srednji katalog koji je iz njih izveden.

Metodom najmanjih kvadrata aproksimirati $\Delta\delta_{\alpha}$ poznatom relacijom:

$$\Delta\delta_{\alpha} = a \sin\alpha + b \cos\alpha + c \sin 2\alpha + d \cos 2\alpha \quad .$$

Podaci koji se odnose na ovaj zadatak su pozajmljeni iz rada Zverjeva M. S. i Položenceva D. D. 1957 : Trudy 12-oj astrometričeskoj konferenciji SSSR, Leningrad, str. 156-164.

T A B L I C A 2.

Sistematska odstupanja $\Delta\delta_{\alpha}$ (epoha: 1950.0) u odnosu na srednji sistem deklinacija. Jedinica: 0"01.

h	Kiev	Kazan 1942	Vroclav	Moskva	Kazan 1950	Golosejev	Odesa
0.5	-19	11	10	7	4	7	- 2
1.5	- 7	6	-11	4	12	1	- 7
2.5	- 4	3	14	-6	-10	0	4
3.5	- 7	- 1	23	2	- 8	- 4	- 4
4.5	9	4	- 2	15	-20	-12	4
5.5	7	- 1	29	-7	-18	2	- 9
6.5	-11	6	-12	3	0	6	8
7.5	1	- 3	-31	38	- 1	0	- 3
8.5	- 1	12	-14	1	6	- 4	4
9.5	- 3	- 2	-21	11	22	- 8	- 1
10.5	9	8	-54	15	9	1	14
11.5	1	- 9	17	24	-15	-12	- 8
12.5	10	- 4	5	3	-13	-15	14
13.5	18	-11	10	-21	-11	15	2
14.5	-14	3	12	5	2	- 6	0
15.5	4	- 4	- 2	0	- 3	9	- 2
16.5	18	9	4	-13	-15	4	- 7
17.5	11	-11	- 4	14	-13	3	- 1
18.5	3	-14	19	-14	8	15	-13
19.5	- 6	2	11	-10	11	- 1	- 3
20.5	9	- 1	6	-14	10	- 1	-11
21.5	7	- 3	8	- 9	1	- 5	- 1
22.5	7	- 4	- 4	-20	14	1	4
23.5	-27	4	-11	- 4	17	15	8
	± 9	± 9	±20	±14	± 6	± 8	± 6

Rezultati su sledeći:

	a	b	c	d	σ
Kiev	-0".038	-0".059	-0".001	-0".037	±0".035
Kazan 1942	+ 38	+ 20	+ 1	+ 9	22
Vroclav	- 65	+ 65	+ 107	- 33	57
Moskva	+ 92	- 77	- 14	- 12	44
Kazan 1950	- 21	+ 42	- 97	+ 44	38
Golosejev	-34	+ 26	+ 12	- 13	26
Odesa	+ 27	- 20	- 5	+ 38	22

U Tablici 2 data je i srednja kvadratska greška jedne tablične vrednosti σ .

19.1. APROKSIMACIJA POSMATRANJA NEJEDNAKE TAČNOSTI

Izučavanja dugoperiodičnih fenomena kao što su: precesija, nutacija, kretanja dvojnih zvezda, pomračenja, itd. dovode nas u situaciju da koristimo posmatranja koje dele dosta dugi intervali vremena i koja se, iz razumljivih razloga, razlikuju po tačnosti. Osim toga, poznato je da se posmatranja mnogih pojava vrše simultano na više opservatorija instrumentima čija preciznost nije jednaka. Jasno je da tretiranje ovakvih nehomogenih podataka nameće potrebu uvodjenja težina. Uzećemo jedan primer da bismo to ilustrovali.

Neka je izvršeno n_1 posmatranja slučajne veličine X iz kojih je za njenu najverovatniju vrednost dobijen rezultat x_1. Neka druga, treća,... r-ta serija posmatranja sadrže $n_2, n_3, \dots, n_r$ pojedinačnih rezultata i neka su $x_2, x_3, \dots, x_r$ najverovatnije vrednosti X po serijama. Dalje, pretpostavimo da je svako pojedinačno posmatranje iste tačnosti koja se može reprezentovati disperzijom σ^2.

Na osnovu ranije dokazanih relacija, disperzije srednjih vrednosti po grupama* (disperzije $x_1, x_2, \dots, x_r$) biće:

---

* Strogo uzevši, ne radi se o disperzijama, već o približnim vrednostima disperzije računate po uzorcima ili, kako se drukčije kaže, radi se o ocenama disperzije.

$$\sigma_k^2 = \frac{\sigma^2}{n_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r).$$

Pošto σ_k^2 ima različite vrednosti od grupe do grupe, x_k se ne mogu smatrati jednako tačnim.

U opštem slučaju, tačnost rezultata ne zavisi samo od broja posmatranja n_k, već i od preciznosti instrumenta kojim je dobijena data serija rezultata, od stabilnosti uslova posmatranja, od zalaganja i bioloških kvaliteta posmatrača, itd.

Pri obradi posmatranja nejednake tačnosti veoma je udobno uvodjenje pojama <u>težine</u> - broja obrnuto proporcionalnog disperziji:

$$p_k = \frac{c^2}{\sigma_k^2},$$

gde je c^2 proizvoljan pozitivni broj.

Fiktivni ili realni rezultat čije je σ_k^2 jednako c^2 ima težinu jednaku jedinici. Zbog toga se kaže da to σ_k predstavlja <u>srednju grešku jedinice težine.</u>

Izmedju srednjih vrednosti x_k i rezultata neposrednih posmatranja x_i' postoje relacije:

$$n_1 x_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i'$$

$$n_2 x_2 = \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} x_i', \quad \ldots.$$

$$n_r x_r = \sum_{n-n_r+1}^{n} x_i',$$

gde je $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r$.

Opšta srednja vrednost ili, kao što smo ranije videli, najverovatnija vrednost matematičkog očekivanja slučajne promenljive X jednaka je:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1' + x_2' + \ldots + x_{n_1}' + x_{n_1+1}' + \ldots + x_{n_1+n_2}' + \ldots + x_n') =$$

$$= (n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots + n_r x_r) / (n_1 + n_2 + \ldots + n_r).$$

Ako je σ^2 disperzija slučajne veličine X, disperzija srednjih vrednosti x_k biće:

$$\sigma_k^2 = \sigma^2 / n_k . \tag{17}$$

S obzirom na definiciju težine, iz poslednje jednačine sledi:

$$n_k = \sigma^2 / \sigma_k^2 = p_k ,$$

pa se najverovatnija vrednost X dobija iz formule:

$$\bar{x} = \sum_i p_i x_i \,/ \sum_i p_i =$$

$$= \sum_i p_i x_i \,/\, p \, \ldots\ldots\ldots \tag{18}$$

Srednja vrednost $\bar{x}$ se ne bi promenila ako bismo svaku od težina p_k pomnožili nekim brojem q. Drugim rečima, za računanje srednje težinske vrednosti $\bar{x}$, kako se ona drukčije zove, nije neophodno da se zna kolika je srednja kvadratska greška σ^2.

Kao što smo rekli, težine se mogu izračunati po formuli:

$$p_k = c^2 / \sigma_k^2 ,$$

u kojoj konstanta c^2 može biti proizvoljna i, prema tome, ne mora imati bilo kakve veze sa posmatranjima. Medjutim, u praksi se p_k računaju drukčije. O tome ćemo govoriti malo kasnije.

U vezi sa srednjom težinskom vrednošću, navešćemo samo jednu važnu relaciju:

$$\sum_{k=1}^{n} p_k \delta_k = 0,$$

gde je $\delta_k = x_k - \bar{x}$.

Dokaz ove relacije je vrlo jednostavan:

$$\sum_k p_k \delta_k = \sum_k p_k (x_k - \bar{x}) = \sum_k p_k x_k - p\bar{x} = p\bar{x} - p\bar{x} = 0 .$$

Ako znamo srednju grešku jedinice težine i zbir težina p_k možemo izračunati srednju kvadratsku grešku opšte srednje vrednosti i to na sledeći način:

Izraz za $\bar{x}$ možemo napisati u obliku:

$$\bar{x} = p_1x_1/p + p_2x_2/p + \ldots + p_rx_r/p .$$

Imajući u vidu odgovarajuću teoremu paragrafa 14 , jasno je da srednja kvadratska greška $\sigma_{\bar{x}}$ zadovoljava relaciju:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \sigma_1^2(p_1/p)^2 + \sigma_2^2(p_2/p)^2 + \ldots + \sigma_r^2(p_r/p)^2 .$$

S obzirom na 17 , poslednja jednačina postaje:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \sigma^2/p_1(p_1/p)^2 + \sigma^2/p_2(p_2/p)^2 + \ldots + \sigma^2/p_r(p_r/p)^2 .$$

Dakle, $\sigma_{\bar{x}}^2$ se jednostavno računa i to pomoću jednačine:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \sigma^2/p \tag{19}$$

Da bi se reprezentovala tačnost rezultata x_i koji imaju različite težine najnormalnije je da se to čini pomoću nekog parametra koji se odnosi na jedinicu težine. Takav parametar je srednja greška jedinice težine. Osvrnućemo se na problem njenog odredjivanja i to: a) kada su date srednje kvadratske greške σ_i i odgovarajuće težine p_i; b) kada su date samo težine p_i.

Ako raspolažemo sa σ_i i p_i, u principu, srednju grešku jedinične težine σ možemo odrediti iz bilo koje od relacija:

$$p_i = \sigma^2/\sigma_i^2, \qquad (i = 1,2,\ldots,r).$$

Zbog ograničenog broja podataka iz kojih se računaju, σ_i su pogrešni za neke iznose. Zbog toga se od svih mogućih iznosa σ^2 izračuna najverovatnija vrednost - srednja vrednost rezultata dobijenih iz gornjih jednačina:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{r} p_i\,\sigma_i^2/r. \tag{20}$$

Medjutim, ako su poznate samo težine p_i, σ^2 se odredjuje iz relacije:

$$\sigma^2 = \sum_i p_i\,\delta_i^2/(r-1), \tag{20'}$$

u kojoj, kao i ranije, δ_i predstavljaju odstupanja x_i od srednje vrednosti: $\delta_i = x_i - \bar{x}$. Sa datim x_i i p_i može se izračunati x.

Dokazaćemo relaciju 20' :

Posmatrajmo niz: $\xi_1 = x_1\sqrt{p_1}$, $\xi_2 = x_2\sqrt{p_2}, \ldots, \xi_r = x_r\sqrt{p_r}$.

Skup$\{\xi_i\}$ sastavljen je od rezultata jednake tačnosti jer su srednje kvadratske greške ξ_i jednake:

$$\sigma_1'^2 = p_1\sigma_1^2,$$

$$\sigma_2'^2 = p_2\sigma_2^2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sigma_r'^2 = p_r\sigma_r^2.$$

Iz definicije težina $p_i = \sigma^2/\sigma_i^2$ proizilazi da su proizvodi $p_i\sigma_i^2$ jednaki nekoj konstanti σ^2. Dakle, svako $\sigma_i'^2 = \sigma^2$, odnosno svako $\xi_i = x_i\sqrt{p_i}$ ima jediničnu težinu.

Srednja kvadratska greška jednoga ξ_i ili jednog rezultata jedinične težine biće:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{r}(\xi_i - \bar{\xi})^2}{r-1},$$

gde je $\bar{\xi}$ srednja vrednost ξ_i.

Poslednju jednačinu možemo transformisati na sledeći način:

$$(r-1)\sigma^2 = \sum_i \xi_i^2 - 2\bar{\xi}\sum_i \xi_i + r\bar{\xi}^2.$$

Pošto je: $\sum \xi_i = r\bar{\xi}$, biće:

$$(r-1)\sigma^2 = \sum_i \xi_i^2 - r\bar{\xi}^2,$$

ili, posle zamene ξ_i u prvom članu sa desne strane sa $x_i\sqrt{p_i}$:

$$(r-1)\sigma^2 = \sum_i p_i x_i^2 - r\bar{\xi}^2. \tag{21}$$

S druge strane, ako kvadriramo δ_i, pomnožimo sa p_i odgovarajuće kvadrate i sve ih saberemo, dobićemo:

$$\sum_i p_i\delta_i^2 = \sum_i p_i(x_i - \bar{x})^2 =$$

$$= \sum_i p_i x_i^2 - p\bar{x}^2. \tag{22}$$

Ako u jednačini 21 $\sum_i p_i x_i^2$ zamenimo odgovarajućim izrazom iz jednačine 22 , dobićemo:

$$(r-1)\sigma^2 = \sum_i p_i \delta_i^2 + p\bar{x}^2 - r\bar{\xi}^2$$

ili:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_i p_i \delta_i^2}{r-1} + \frac{p\bar{x}^2 - r\bar{\xi}^2}{r-1} \tag{23}$$

Dokazaćemo da je drugi član sa desne strane poslednje jednačine zanemarljiv kada je r relativno veliko. Inače, kada su skupovi $\{x_i\}$ mali nema smisla računati σ^2 .

Iz definicija imamo:

$$\bar{\xi} = \sum_i x_i \sqrt{p_i}/r \quad i$$

$$\bar{x} = \sum_i x_i p_i \,/\, p \ .$$

Ako je p_m srednja vrednost skupa $\{p_i\}$ $(p_m = p/r)$, možemo pisati jednačine:

$$\frac{\bar{x}}{\bar{\xi}} = \frac{r\sum_i x_i p_i}{r p_m \sum_i x_i \sqrt{p_i}} =$$

$$= \frac{\sum_i x_i p_i}{\sqrt{p_m}\sum_i \sqrt{p_i p_m}\, x_i} \ .$$

Ako ne postoji sistematska zavisnost izmedju p_i i x_i, tj. ako većim x_i ne odgovaraju i veće težine p_i, i ako u skupu $\{p_i\}$ nema elemenata koji su mnogo veći od svih ostalih ili od većine ostalih, biće $\sum_i x_i p_i \approx \sum_i \sqrt{p_m p_i}\, x_i$.

Pošto je: $\sum_i x_i p_i \approx \sum x_i \sqrt{p_m p_i}$, količnik $\bar{x}/\bar{\xi} = 1/\sqrt{p_m}$, odnosno, $\bar{x}/\bar{\xi} = \sqrt{r/p}$. Posle očigledne transformacije nalazimo da

$$p\,\bar{x}^2 \approx r\,\bar{\xi}^{\,2},$$

pa se zanemarivanjem drugog člana sa desne strane jednačine 23 za σ^2 dobija izraz 20' koji je i trebalo dokazati.

U ovom paragrafu smo videli da su proizvodi $x_i\sqrt{p_i}$ jednake tačnosti. Kada se radi o nejednakoj tačnosti kod tkz. posrednih odredjivanja nepoznatih ili o posmatranjima funkcija i odredjivanjima nepoznatih parametara tih funkcija, postupa se na sličan način kao i kod neposrednih odredjivanja.

Neka posmatrana funkcija f_i ima težinu p_i. Kaže se da i odgovarajuća jednačina grešaka:

$$\varepsilon_i = a_i x + b_i y + c_i z + f_i$$

ima težinu p_i. Ako leve i desne strane svih uslovnih jednačina pomnožimo odgovarajućim $\sqrt{p_i}$ dobićemo novi sistem uslovnih jednačina jednakih težina:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1' &= \varepsilon_1\sqrt{p_1} = a_1'x + b_1'y + c_1'z + f_1' \\
\varepsilon_2' &= \varepsilon_2\sqrt{p_2} = a_2'x + b_2'y + c_2'z + f_2' \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\varepsilon_n' &= \varepsilon_n\sqrt{p_n} = a_n'x + b_n'y + c_n'z + f_n'
\end{aligned} \tag{24}$$

Koeficijenti: a_i', b_i', c_i' i f_i' dobijeni su množenjem a_i, b_i, c_i i f_i sa $\sqrt{p_i}$: $a_1' = a_1\sqrt{p_1}$, $a_2' = a_2\sqrt{p_2}, \dots$

Sistem 24 rešava se, kao i ranije, pri uslovu:

$$S' = \sum_i \varepsilon_i'^2 = \min,$$

odnosno:

$$S' = \sum_i p_i\,\varepsilon_i^2 = \min.$$

Odgovarajuće normalne jednačine će biti:

$$\begin{aligned}
[paa]x + [pab]y + [pac]z + [paf] &= 0 \\
[pab]x + [pbb]y + [pbc]z + [pbf] &= 0 \\
[pac]x + [pbc]y + [pcc]z + [pcf] &= 0 .
\end{aligned} \tag{25}$$

Dokazuje se da rezultati $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ dobijeni rešavanjem jednačina 25 predstavljaju najverovatnije vrednosti nepoznatih parametara x,y,z. U taj dokaz mi nećemo ulaziti. Čitaoca upućujemo na citirani kurs Šćigoleva.

20. LANČANA METODA

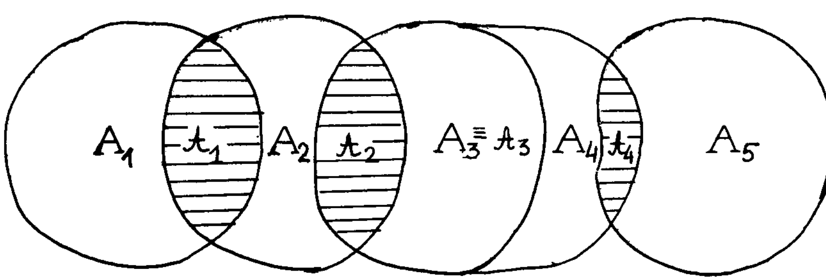
U astronomiji i nekim drugim naukama (naprimer, u geodeziji) pojave se posmatraju u ciklusima koji ponekad traju i više godina. U toku dužih vremenskih perioda uslovi posmatranja mogu da se čak i drastično promene. Menjaju se posmatrači, menjaju se meteorološki uslovi, instrumenti se mehanički habaju, menja se sastav posmatranih zvezda, pa prema tome i greške njihovih koordinata, itd. Zbog pomenutih i drugih uzroka mi nismo u stanju da rezultate posmatranja date veličine izrazimo u odnosu na jedan jedinstveni koordinatni početak - nulpunkt.

Uzmimo primer odredjivanja geografske širine na datoj opservatoriji. Da bi se iz posmatranja mogli odrediti polugodišnji, godišnji i Čendlerov član (kao što znamo, njegova perioda je $P \approx \approx 1.2$ godina) neophodno je vršiti sistematska posmatranja najmanje 6 godina, koliko iznosi najkraći ciklus u kome se periode pomenutih članova sadrže ceo broj puta. Kao što ćemo videti u paragrafu 30 ovaj uslov je neophodan da bi se oni mogli tačno razdvojiti.

U rezultatima posmatranja pomenuti članovi će biti izmenjeni ("deformisani"), jer se posmatrane širine ne odnose na isti koordinatni sistem. Usled grešaka sopstvenih kretanja zvezda menjaju se greške njihovih deklinacija tako da poslednje godine sistem deklinacija faktički nije isti kao i prve godine. Tome doprinose i greške astronomskih konstanata koje se koriste u računu prividnog položaja. Sistematske greške instrumenta koje imaju sezonski karakter uzrokovaće nepolarne periodične varijacije širina koje će interferovati sa polarnim promenama. Mogli bismo nabrojiti još mnogo uzroka koji menjaju nulpunkt, ali smatramo da su navedeni primeri dovoljno ilustrativni.

Da bi se rešio ili bar ublažio problem konzerviranja jednog sistema u kome izražavamo rezultate, posmatranja se obavljaju lančanom metodom.

Lančana metoda podrazumeva da su posmatranja obavljena tako da se prema nulpunktu na koji se odnose svi rezultati mogu svrstati u izvestan broj skupova realnih brojeva A_i $(i=1,2,\ldots,n)$ takvih da u svakom skupu A_i postoji podskup $\mathcal{A}_i$ čiji elementi predstavljaju rezultate posmatranja jedne ili više nepoznatih na koje se odnose i rezultati nekog podskupa $\mathcal{A}_{i-1}$ skupa A_{i-1} (ovi rezultati su izraženi u odnosu na drugi nulpunkt), a elementi jednog drugog podskupa $\mathcal{A}'_i$ skupa A_i predstavljaju rezultate merenja jedne ili više nepoznatih na koje se odnose i elementi nekog podskupa $\mathcal{A}_{i+1}$ skupa A_{i+1}. Šematski, skupovi A_k mogu da se predstave kao na slici 1.



Sl. 1.

Neka su l_{ij} elementi skupa A_i koji predstavljaju rezultate posmatranja slučajne veličine X dobijeni u i-toj seriji posmatranja. Svaki od ovih rezultata se sastoji od tri komponente: prva je pomeranje nulpunkta posmatranja ρ_i u odnosu na onaj koji smo usvojili po definiciji, druga komponenta je prava vrednost slučajne veličine x_r ili vrednost u odnosu na teorijski nulpunkt i to bez slučajne i sistematske greške i treća komponenta je slučajna greška merenja ε_{ij}.

Za prvu seriju posmatranja (čine je elementi skupa A_1 možemo sastaviti sledeći sistem jednačina:

$$\begin{aligned} &\rho_1+x_1+\ \varepsilon_{11}=\ell_{11}\\ &\rho_1+x_2+\ \varepsilon_{12}=\ell_{12}\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &\rho_1+x_s+\ \varepsilon_{1s}=\ell_{1s}.\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &\rho_1+x_k+\ \varepsilon_{1k}=\ell_{1k} \end{aligned} \tag{1}$$

Rezultati druge serije posmatranja (skup A_2)zadovoljavaju jednačine:

$$\begin{aligned} &\rho_2+x_s+\ \varepsilon_{2s}=\ell_{2s}\\ &\rho_2+x_{s+1}+\ \varepsilon_{2s+1}=\ell_{2s+1}\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &\rho_2+x_k+\ \varepsilon_{2k}=\ell_{2k}\\ &\rho_2+x_{k+1}+\ \varepsilon_{2k+1}=\ell_{2k+1}\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &\rho_2+x_r+\ \varepsilon_{2r}=\ell_{2r}\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &\rho_2+x_\ell+\ \varepsilon_{2\ell}=\ell_{2\ell}\ . \end{aligned} \tag{2}$$

Vidimo da se prvih k-s+1 elemenata skupa A_2 i isto toliko elemenata skupa A_1 odnosi na merenja istih nepoznatih: $x_s, x_{s+1}, \dots, x_k$.

Rezultati skupa A_3 zadovoljiće treći sistem u kome će izvestan broj jednačina sadržati nepoznate: $x_r, x_{r+1}, \dots, x_\ell$.

Ako sve gornje sisteme (kojih ima n) sastavimo, dobićemo jedan sistem (sistem I) od N jednačina sa M nepoznatih x_i($M < N$) i n nepoznatih ρ_j :

$$\begin{aligned} &\rho_1+x_1+\ \varepsilon_{11}=\ell_{11}\\ &\rho_1+x_2+\ \varepsilon_{12}=\ell_{12}\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &\rho_1+x_s+\ \varepsilon_{1s}=\ell_{1s} \end{aligned}$$

$$\rho_1 + x_k + \varepsilon_{1k} = \ell_{1k} \qquad (I)$$
$$\rho_2 + x_s + \varepsilon_{2s} = \ell_{2s}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\rho_2 + x_\ell + \varepsilon_{2\ell} = \ell_{2\ell}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\rho_n + x_M + \varepsilon_{nM} = \ell_{nM}$$

Bez obzira na to da li je $M+n \leq N$ ili je $M+n > N$, sistem I je neodredjen. U to se možemo uveriti na sledeći način: pretpostavimo da su sve greške ε_{ij} jednake nuli i da su nam poznate vrednosti ρ_i i x_j koje zadovoljavaju sve jednačine sistema. Ako od ρ_i oduzmemo proizvoljnu vrednost $\Delta\rho_i$ i dodamo je odgovarajućim x_j ($\rho_i' = \rho_i - \Delta\rho_i$, $x_j' = x_j + \Delta\rho_i$) sistem će opet biti zadovoljen i sa novim vrednostima nepoznatih: ρ_i' , x_j' .

Za dobijanje jednoznačnih rešenja, kao što ćemo kasnije videti, potrebna su još dva dopunska uslova od kojih jedan definiše nulpunkt.

Sistem I može da se rešava na dva načina: a) redukcijom svih posmatranja na jedan jedinstveni nulpunkt; b) eliminacijom nepoznatih ρ_i koja se postiže formiranjem uzastopnih razlika jednačina koje se odnose na isto nepoznato ρ .

Uzmimo , naprimer, da smo za opšti nulpunkt izabrali baš ρ_1. Eliminacijom zajedničkih nepoznatih x_j kojima odgovaraju elementi ℓ_{ij} i ℓ_{i+1j} skupova A_i i A_{i+1} $(i=1,2,\dots,n-1)$ odredjuju se razlike: $\rho_2 - \rho_1$, $\rho_3 - \rho_2$, ..., $\rho_n - \rho_{n-1}$.

Primera radi, videćemo kako se računa $\rho_2 - \rho_1$. Imajući u vidu sisteme 1 i 2 , možemo pisati jednačine:

$$\rho_2 - \rho_1 + \varepsilon_{2s} - \varepsilon_{1s} = \ell_{2s} - \ell_{1s}$$
$$\rho_2 - \rho_1 + \varepsilon_{2s+1} - \varepsilon_{1s+1} = \ell_{2s+1} - \ell_{1s+1} \qquad (3)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\rho_2 - \rho_1 + \varepsilon_{2k} - \varepsilon_{1k} = \ell_{2k} - \ell_{1k}.$$

Ako saberemo leve i desne strane gornjih jednačina i podelimo ih njihovim ukupnim brojem (k-s+1) dobićemo:

$$\rho_2 - \rho_1 = \frac{1}{k-s+1} \sum_{i=s}^{k} [\, \ell_{2i} - \ell_{1i} - (\varepsilon_{2i} - \varepsilon_{1i})]$$

Ako je broj jednačina sa zajedničkom nepoznatom $\rho_2 - \rho_1$ dovoljno veliki, sa zadovoljavajućom tačnošću se može usvojiti da je:

$$\rho_2 - \rho_1 \approx \frac{1}{k-s+1} \sum_{i=s}^{k} \ell_{2i} - \ell_{1i} = m_1$$

poznata veličina.

Na isti način dobijaju se i ostale razlike $\rho_{i+1} - \rho_i$. Dakle, može se formirati sistem jednačina:

$$\begin{aligned} \rho_2 - \rho_1 &= m_1 \\ \rho_3 - \rho_2 &= m_2 \\ &\dots\dots\dots\dots \\ \rho_n - \rho_{n-1} &= m_{n-1} \,. \end{aligned} \tag{4}$$

Ako tačnost posmatranja i broj zajedničkih nepoznatih varira od jednog do drugog para serija, podrazumeva se da težine jednačina sistema 4 nisu jednake. Radi jednostavnijeg izlaganja osnovnih operacija mi ćemo pretpostaviti da su pomenute težine jedinične.

Rešenje sistema 4 su:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \rho_1 \\ \rho_2 &= \rho_1 + m_1 \\ \rho_3 &= \rho_1 + m_1 + m_2 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ \rho_n &= \rho_1 + m_1 + m_2 + \dots + m_{n-1} \end{aligned} \tag{5}$$

Zamenom ρ_k ($k \neq 1$) iz sistema I desnom stranom odgovarajuće jednačine poslednjeg sistema, umesto sistema I dobićemo novi sistem u kome su sva posmatranja izražena u odnosu na nulpunkt ρ_1.

Potreban je dakle još jedan uslov iz koga bi se mogao odrediti izn[illegible] [illegible] uslov je bio: $\frac{1}{k-s+1} \sum_{i=s}^{k} (\varepsilon_{2i} - \varepsilon_{1i}) = 0$.

Kod nekih astronomskih posmatranja se à priori zna da varijacije nulpunkta imaju sezonski karakter ili se na datom intervalu nezavisno promenljive ta kolebanja mogu aproksimirati nekom sinusoidom. Zbog toga se posmatrački ciklusi biraju tako da bude zadovoljen uslov:

$$\sum_{i} \rho_i = 0 \, .$$

Sabiranjem levih strana jednačina sistema 5 dobijamo:

$$\sum_{i=1}^{n} \rho_i = n\,\rho_1 + (n-1)m_1 + (n-2)m_2 + \ldots + m_{n-1}$$

ili, s obzirom na poslednji uslov:

$$\rho_1 = -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) m_k .$$

To je jedan od načina da se definiše nulpunkt u odnosu na koga se izražavaju sve nepoznate. U opštem slučaju, definicija nulpunkta zavisi od karaktera pojave i uslova posmatranja.

Druga od pomenute dve metode za rešavanje sistema I sastoji se u postupnoj eliminaciji svih ρ_i.

Polazeći od jednačina posmatranja možemo formirati razlike nepoznatih koje su izražene u odnosu na isti nulpunkt i na taj način dobiti sledeći sistem.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= \Delta\varepsilon_{12} + \Delta\rho_{12} \\ x_2 - x_3 &= \Delta\varepsilon_{23} + \Delta\rho_{23} \\ &\ldots\ldots \\ x_{M-1} - x_M &= \Delta\varepsilon_{M-1M} + \Delta\rho_{M-1M} \end{aligned} \qquad (6)$$

gde su: [illegible] $\Delta\rho_{[illegible]} = \rho_{ki} - \rho_{ki+1}$

([illegible]).

[illegible] jer se za neke razlike $x_j - x_{j+1}$ jednačine formiraju dva puta. To je slučaj sa nepoznatim koje su zajedničke serijama [illegible] jednostavnosti, pretpostavićemo da je svaka gornja razlika već pomnožena kvadratnim korenom odgovarajuće težine i da, prema tome, svaka od njih ima jediničnu težinu.

Sistem 6 može se napisati i u obliku:

$$
\begin{aligned}
&x_1 - x_1\\
&x_2 = x_1 - (\Delta\varepsilon_{12} + \Delta\ell_{12})\\
&x_3 = x_1 - (\Delta\varepsilon_{12} + \Delta\ell_{12}) - (\Delta\varepsilon_{23} + \Delta\ell_{23}) \qquad\qquad (7)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&x_M = x_1 - (\Delta\varepsilon_{12} + \Delta\ell_{12}) - (\Delta\varepsilon_{23} + \Delta\ell_{23}) - \dots - (\Delta\varepsilon_{M-1M} + \Delta\ell_{M-1}
\end{aligned}
$$

Sabiranjem levih i desnih strana gornjih jednačina i deobom sa M dobijamo:

$$\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} x_i = x_1 - \frac{M-1}{M}(\Delta\varepsilon_{12} + \Delta\ell_{12}) - \frac{M-2}{M}(\Delta\varepsilon_{23} + \Delta\ell_{23}) -$$

$$- \dots - \frac{1}{M}(\Delta\varepsilon_{M-1\,M} + \Delta\ell_{M-1M}) =$$

$$= x_1 - \frac{1}{M}\sum_{r=1}^{M-1}(M-r)(\Delta\varepsilon_{rr+1} + \Delta\ell_{rr+1}) .$$

Pretpostavljajući da je:

$$\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} x_i = x_m$$

poznata veličina, i da je:

$$\frac{1}{M}\sum_{r=1}^{M-1}(M-r)\,\Delta\varepsilon_{rr+1} = 0 ,$$

možemo jednoznačno odrediti x_1:

$$x_1 = x_m + \frac{1}{M}\sum_{r=1}^{M-1}(M-r)\,\Delta\ell_{rr+1} .$$

Uslov da je x_m poznato definiše nulpunkt, jer kada znamo x_1 pomoću jednačina 7 računamo i ostale x_i u istom sistemu. Razumljivo je da će slučajne greške posmatranja $\Delta\varepsilon_{ij}$ biti sadržane u nepoznatim x_i, jer se pri rešavanju sistema 7 pretpostavlja da su zbirovi $\Delta\varepsilon_{ij}$ jednaki nuli. Obično se posmatranja jedne nepoznate

x_i ponavljaju više puta i prilikom sastavljanja jednačina sistema A uzimaju srednje vrednosti rezultata. Kada je broj posmatranja dovoljno veliki, nivo slučajnih grešaka je zanemarljiv u odnosu na sistematske varijacije tipa ρ_i.

Srednja kvadratska greška nepoznate x_i odredjuje se iz relacije*

$$\sigma_x^2 = \frac{(M-1)^2 - 1}{12(M-1)} \quad \sigma_{\Delta \ell}^2$$

gde je $\sigma_{\Delta \ell}$ srednja kvadratska greška razlike: $\Delta \ell_{i\ i+1} = \ell_{ki} - \ell_{ki+1}$.

Radi provere stabilnosti rešenja, posmatrački ciklus se obično završava ponovnim odredjivanjem nepoznate x_1 ili ponovnim odredjivanjem nekoliko nepoznatih. U prvom slučaju, sistemu 6 dodaje se još i jednačina:

$$x_M - x_1' = \varepsilon_{M\,M+1} + \Delta \ell_{M\,M+1}$$

Ako je $x_1 = x_1'$, zbir levih strana svih jednačina sistema 6 i poslednje jednačine jednak je nuli. Medjutim, često se dešava da je taj zbir jednak nekom $S \neq 0$ koje se zove <u>greška zatvaranja ciklusa</u> ili <u>greška vezivanja</u>. U slučajevima kada ona nije zanemarljiva, od desnih strana jednačina 6 oduzima se $\Delta \ell_{ij} = \frac{P_i \Delta S}{\Sigma P_i}$, gde su P_i težine pojedinih jednačina, a zatim se računaju nepoznate x_i.

Objašnjenje greške zatvaranja je u sledećem:

Epohe posmatranja nepoznate x_s u seriji 1 i seriji 2, u opštem slučaju, se ne poklapaju. Za te nepoznate se pretpostavlja da su stabilne od serije do serije. Medjutim, može se desiti da hipoteza o njihovoj stabilnosti, strogo uzevši, nije realna. S druge strane, moguće je da u jednoj seriji postoje male promene ρ_k. Zbog toga unutar sistema dolazi do rezidua koji nemaju slučajni karakter i koji daju S, kao konačni rezultat. Osim toga, i pretpostavka o medjusobnoj kompenzaciji (poništavanju) slučajnih grešaka često nije ispunjena.

---

* Nemiro A.A.: Trudy 15-oj astrometričeskoj konferencii SSSR, Leningrad, [illegible], str. [illegible]-190.

Ako je $S = 0$ to još uvek ne znači da su rešenja sistema korektna. Rezidui koji imaju sistematski karakter mogu i da se uzajamno ponište u toku jednog posmatračkog ciklusa. Ako je $S \;\; 0$ to samo znači da se ne isključuje hipoteza o korektnosti rešenja, a ako je $S \neq 0$, ta se hipoteza nasigurno isključuje.

U astronomiji ima mnogo primera primene lančane metode. Navešćemo samo jednu od njih: metodu pulkovskog astronoma Nemira** koja je namenjena za odredjivanje rektascenzija zvezda iz posmatranja časovnih službi opremljenih pasažnim instrumentom.

Pretpostavimo da raspolažemo popravkama (stanjima) časovnika dobijenim iz posmatranja N grupa zvezda u toku n posmatračkih noći. Grupe su nepromenljivog sastava, a posmatranja se obavljaju lančanom metodom. Izvestnog broja noći posmatraju se grupe No 1 i No 2, zatim se grupa No 1 napušta i posmatraju grupe No 2 i No 3, i tako redom dok se ne isposmatraju sve grupe posmatračkog programa. Nastoji se da svaka grupa bude posmatrana jednak broj puta i, osim toga, jednak broj puta sa prethodnom i sledećom grupom.

Neka je C'_{ij} stanje časovnika iz posmatranja zvezde i u toku noći j. C'_{ij} sadrži dve sistematske greške: jedna je greška rektascenzije $\Delta\alpha_i$, a druga - greška zbog netačnog azimuta. Greška azimuta ΔA_j može da se smatra konstantom za datu grupu i za datu posmatračku noć j.

Poznati Majerov obrazac može da se napiše u obliku:

$$C'_{ij} = \alpha'_{ij} - T_{ij} - N_i \beta_{ij} - R \sec \delta_i - M_i A'_{ij} + \varepsilon_{ij} =$$

$$= \alpha_{ij} + \Delta\alpha_i - [T_{ij} + N_i \beta_{ij} + M_i (A_{ij} + \Delta A_j) + \varepsilon_{ij} =$$

$$= C_{ij} + \Delta\alpha_i - M_i \, \Delta A_j + \varepsilon_{ij} \, , \qquad (8)$$

gde je α_{ij} tačna prividna rektascenzija, A_{ij} - tačan azimut, C_{ij} - tačno stanje časovnika, α'_{ij} - prividna rektascenzija računata polazeći od srednje rektascenzije osnovnog kataloga, A'_{ij} - azimut računat u sistemu osnovnog kataloga (računanje A'_{ij} biće objašnjeno kasnije), T_{ij} - registrovani trenutak prolaza zvezde kroz ravan bez kolimacije, β_{ij} - nagib obrtne ose instrumenta, ε_{ij} - greška posmatranja i R - konstanta koja sadrži nekoliko uticaja: dnevnu aberaciju, širinu kontakta mikrometra, itd.

Ako je zvezda i posmatrana još i u toku noći j+1, poznato je stanje časovnika C'_{ij+1}. Prema tome, razlika stanja za noći j i j+1 iznosi:

$$C'_{ij+1}-C'_{ij}=(C_{ij+1}-C_{ij})-M_i(\Delta A_{j+1}-\Delta A_j). \qquad (9)$$

Nepoznate su: $x=C_{ij+1}-C_{ij}$ (hod časovnika) i $y=\Delta A_{j+1}-\Delta A_j$ (razlika grešaka azimuta). Prva nepoznata je nezavisna od grešaka kataloga.

Iz posmatranja zvezda koje su zajedničke za noći j i j+1 formira se sistem uslovnih jednačina 9 i metodom najmanjih kvadrata odrede nepoznate. Neka su ℓ_i i m_i rešenja toga sistema. Za n posmatračkih noći možemo formirati još dva sistema jednačina:

$$\begin{aligned} C_2-C_1&=\ell_1\\ C_3-C_2&=\ell_2\\ &\dots\dots\\ C_n-C_{n-1}&=\ell_{n-1}\end{aligned} \qquad (10) \qquad\qquad \begin{aligned}\Delta A_2-\Delta A_1&=m_1\\ \Delta A_3-\Delta A_2&=m_2\\ &\dots\dots\\ \Delta A_n-\Delta A_{n-1}&=m_{n-1}\end{aligned} \qquad (11)$$

gde su: $C_1, C_2, \dots, C_n$ stanja časovnika (nezavisna od osnovnog kataloga), a $\{\Delta A_1, \Delta A_2, \dots, \Delta A_n\}$ greške azimuta (zavisne od $\Delta\alpha_i$ osnovnog kataloga).

Sistemi 10 i 11 se rešavaju uz dva dopunska uslova:

$$\frac{1}{n}\sum_i C_i = C_o \quad \text{i} \qquad (12)$$

$$\frac{1}{n}\sum_i \Delta A_i = \delta A$$

Ako težine nepoznatih nisu jednake, umesto prostih srednjih vrednosti treba uzeti srednje težinske vrednosti.

** Nemiro A.A.: Izv. Glav. Astron. Obs. Pulkovo, 157, 1957.

Za C_o se obično uzima srednje stanje časovnika za ceo posmatrački ciklus računato samo iz zenitskih zvezda (zadajući C_o mi odredjujemo nulpunkt u odnosu na koji izražavamo C_i , a δA je srednje svodjenje na apsolutni azimut.

Na paralelu Beograda i na severnijim opservatorijama za računanje azimuta mogu se koristiti ekvatorske i severne zvezde od kojih se jedan manji procenat posmatra i u donjoj kulminaciji. Iz posmatranja severnih i ekvatorskih zvezda u gornjoj kulminaciji računaju se azimuti A'_{ij} :

$$A'_{ij} = \frac{U_E - U_N}{M_E - M_N} \quad ,$$

gde je $U = \alpha'_{ij} - T_{ij} - N_i \, \beta_{ij} - R \sec \delta_i$. Indeks "E" se odnosi na ekvatorske, a indeks "N" na severne zvezde.

Azimut A'_{ij} sadrži sistematsku grešku koja je uzrokovana greškom tipa $\Delta\alpha_\delta$ osnovnog kataloga.

Iz posmatranja severnih zvezda u gornjoj i u donjoj kulminaciji (podrazumeva se da jedne i druge pripadaju jednoj istoj užoj deklinacijskoj zoni) računa se kvaziapsolutni azimut (u odnosu na greške tipa $\Delta\alpha_\delta$ on je nezavisan od ktaloga ali nije nezavisan od grešaka $\Delta\alpha_\alpha$:

$$A''_{ij} = \frac{U_N - U'_N}{M_N - M'_N} \quad .$$

U'_N i M'_N se odnose na donju kulminaciju.

A''_j sadrže velike slučajne greške (slike zvezda koje se posmatraju blizu horizonta su nemirne i rasplinute) zbog kojih se ne primenjuju u preliminarnoj redukciji posmatranja i sadrže sistematsku grešku ΔA_α koja potiče od greške $\Delta\alpha_\alpha$ kataloga. Pošto jedan posmatrački ciklus traje ceo broj godina (obično 1-3 godine) [illegible] ΔA_α može aproksimirati zbirom:

$$\Delta A_\alpha = \sum_k a_k \sin k\alpha + b_k \cos k\alpha \quad ,$$

(u kome se za gornju granicu k uzima obično k=2 ili k=3), [illegible] dnost razlika $\delta A_{ij} = A''_j - A'_j$, koju smo označili sa [illegible] nezavisna od grešaka tipa $\Delta\alpha_\alpha$.

Sa poznatim C_o i δA rešavaju se jednačine (12) i (13), a zatim i jednačine (10) i (11). Pošto je broj posmatranja u jednom ciklusu veliki, popravka δA će imati zanemarljivo malu komponentu koja se može objasniti slučajnim greškama. Iz svega što smo napred rekli proizilazi da će popravka azimuta δA biti uzrokovana samo greškama $\Delta\alpha_\delta$ osnovnog kataloga, koja je sadržana u A'_{ij}. Inače, A'_{ij} ne sadrže grešku ΔA_α jer se za njihovo odredjivanje koriste zvezde bliske po α.

Stanja časovnika C_i i azimuti $A_{ij}=A'_{ij} - \Delta A_j$ koje smo na opisani način izračunali su nezavisni u odnosu na osnovni katalog.

U jednačini 8 nepoznate su $\Delta\alpha_i$ i ε_{ij}. Ako svaku zvezdu posmatramo više puta i uzmemo srednju vrednost levih i desnih strana jednačina tipa 8 dobićemo:

$$\Delta\alpha_i = \frac{1}{K}\sum_{j=1}^{k}(C'_{ij} - C_{ij} + M_i\,\Delta A_j) - \frac{1}{K}\sum_{j=1}^{k}\varepsilon_{ij} \approx$$

$$\approx \frac{1}{K}\sum_{j=1}^{k}(C'_{ij} - C_{ij} + M_i\,\Delta A_j),$$

gde je K broj posmatranja date zvezde.

Poslednja jednačina predstavlja dokaz da se popravke rektascenzija zvezda koje su posmatrane lančanom metodom mogu odrediti nezavisno od slučajnih grešaka i sistematskih grešaka $\Delta\alpha_\alpha$ i $\Delta\alpha_\delta$ osnovnog kataloga.

ZADATAK:

U Tablici 1 koja je sastavljena od podataka objavljenih u publikaciji: RAPPORT ANNUEL POUR 1969. Medjunarodnog biroa za vreme (Bureau International de l'Heure ili skraćeno: BIH) date su trenutne širine φ_j opservatorije u Otavi po grupama posmatranih zvezda: 1,2,...8 .

Posmatranja koja su data predstavljaju rezultate dela jednogodišnjeg posmatračkog ciklusa realizovanog na fotografskoj zenitskoj tubi PZT .

Posmatranja su grupisana po parovima susednih grupa posmatranih istih noći.

Lančanom metodom odrediti sistematska odstupanja grupa u odnosu na srednji sistem koji se definiše pomoću uslova:

$$\sum_{k=1}^{8} \Delta\varphi_k = 0$$

gde je $\Delta\varphi_k$ sistematsko odstupanje širine dobijene iz posmatranja grupe sa rednim brojem k.

TABLICA 1.

$\Delta\varphi_i = \varphi_i - 45^\circ 23'$ za opservatoriju Otava. Godina posmatranja: 1969.

j	k: 1	2	j	2	3	4
1	37".280	37".315	6	37".309	37".273	37".200
2	229	459	7	355	493	390
3	369	380	8	357	385	160
4	400	354	9	376	310	256
5	411	319	10	320	345	381
k:	4	5		5	6	
11	390	278	16	370	475	
12	160	320	17	490	416	
13	256	307	18	488	412	
14	381	388	19	420	310	
15	258	397	20	408	323	
k:	6	7		7	8	
21	384	540	26	464	530	
22	517	583	27	497	383	
23	558	580	28	518	469	
24	539	417	29	383	409	
25	467	387	30	388	508	
k:	8	1				
31	381	423				

32	370	300
33	408	520
34	380	350
35	464	398

NAPOMENA: U toku noći j=6-10 posmatrane su 3 grupe: 2,3,4.

Realna je pretpostavka da u toku posmatranja grupe k i grupe k+1 u toku iste noći j sistematska greška poznata pod imenom "greška noći" ostaje konstantna i da su odstupanja posmatranih širina $\Delta\varphi_k$ od tačne vrednosti uzrokovana uglavnom greškama deklinacija i greškama koje zavise od deklinacija (greška obrta i druge). Pošto se sastav grupa ne menja, može se smatrati da su greške širina koje zavise od zvezda konstantne.

Pošto su u toku noći j=1,2,...,5 posmatrane grupe N^o 1 i N^o 2 , za svaku od ovih noći možemo sastaviti dve jednačine:

$$\rho_1 + \varphi_1 + \varepsilon_{11} = 37''280 \text{ i}$$
$$\rho_2 + \varphi_1 + \varepsilon_{21} = 37''315. \qquad (\text{za } j=1)$$

Dakle, sa promenom grupe menja se i nulpunkt ρ_k.

Za j=2 imaćemo relacije:

$$\rho_1 + \varphi_2 + \varepsilon_{12} = 37''229,$$
$$\rho_2 + \varphi_2 + \varepsilon_{22} = 37''459\ ,$$

za j=3:

$$\rho_1 + \varphi_3 + \varepsilon_{13} = 37''369\ ,$$
$$\rho_2 + \varphi_3 + \varepsilon_{23} = 37''380\ , \text{ itd.}$$

Ako formiramo razlike jednačina koje sadrže iste nepoznate φ_j dobićemo:

$$\rho_2 - \rho_1 + \varepsilon_{21} - \varepsilon_{11} = 0''135$$
$$\rho_2 - \rho_1 + \varepsilon_{22} - \varepsilon_{12} = 0''230$$
$$\rho_2 - \rho_1 + \varepsilon_{23} - \varepsilon_{13} = 0''011, \ldots$$

Broj jednačina u kojima figuriše $\rho_2 - \rho_1$ jednak je broju noći u toku kojih su posmatrane grupe $N_o 1$ i $N_o 2$ (u konkretnom slučaju, on je jednak pet) .

Posmatranja druge i treće grupe omogućuju da se na isti način sastavi pet jednačina sa nepoznatom $\rho_3 - \rho_2$ i tako redom do sistema koji sadrže $\rho_8 - \rho_7$ i $\rho_1 - \rho_8$.

Srednje vrednosti levih i desnih strana pomenutih sistema približno su jednake (termin "približno" je upotrebljen zbog pretpostavke da se slučajne greške uzajamno poništavaju) :

$$
\begin{aligned}
\rho_2 - \rho_1 &= 0''028 \quad (31) \\
\rho_3 - \rho_2 &= \quad 18 \quad (21) \\
\rho_4 - \rho_3 &= -\ 84 \quad (-81) \\
\rho_5 - \rho_4 &= \quad 49 \quad (52) \\
\rho_6 - \rho_5 &= -\ 48 \quad (-45) \\
\rho_7 - \rho_6 &= \quad 8 \quad (11) \\
\rho_8 - \rho_7 &= \quad 10 \quad (13) \\
{}_1 - \rho_8 &= -\ 2 \quad (1) .
\end{aligned}
$$

Kada bi bilo tačno da sistematske greške koje zavise od sastava grupa ne variraju u toku vremena, poslednji sistem jednačina bi bio korektan. U tom slučaju, zbir levih strana jednak je nuli, pa bi i zbir desnih strana trebao da bude jednak nuli. De facto, taj zbir iznosi $S=-0''021$ (dakle, postoji greška zatvaranja) . U matematičkom smislu, bilo bi korektno da se poslednji sistem jednačina piše u obliku:

$$
\begin{aligned}
\rho_2 - \rho_1 &= 0''028 \\
\rho_3 - \rho'_2 &= \quad 18 \\
\rho_4 - \rho'_3 &= -\ 84, \ldots
\end{aligned}
$$

jer se, strogo uzevši, nulpunkt menja posmatranjem iste grupe zvezda u raznim epohama. Srednji trenutak posmatranja grupe k sa grupom k-1 i srednji trenutak posmatranja grupe k sa grupom k+1 se razlikuju, pa ćemo za grupu k imati dva nulpunkta: ρ_k i ρ'_k .

Kao što smo rekli, S se raspodeljuje na sve jednačine srazmerno njihovim težinama. Pošto u datom zadatku o težinama nije ništa rečeno, a broj sirovih posmatranja iz kojih rezultira svaka od njih je isti, uzimamo da su težine jednake i desnim stranama oduzimamo iznos $S/8=-0''003$. Na taj način smo dobili brojeve date u zagradama. Posle toga, možemo formirati sledeći sistem jednačina:

$$\rho_1 = \rho_1$$
$$\rho_2 = \rho_1 + 0''031$$
$$\rho_3 = \rho_1 + 0''031 + 0''021 = \rho_1 + 0''052$$
$$\rho_4 = \rho_1 + 0''052 - 0''081 = \rho_1 - 0''029$$
$$\rho_5 = \rho_1 - 0''029 + 0''059 = \rho_1 + 0''023$$
$$\rho_6 = \rho_1 + 0''023 - 0''045 = \rho_1 - 0''022$$
$$\rho_7 = \rho_1 - 0''022 + 0''011 = \rho_1 - 0''011$$
$$\rho_8 = \rho_1 - 0''011 + 0''013 = \rho_1 + 0''002.$$

Pod uslovom: $\sum_{k=1}^{8} \rho_k = 0$ iz poslednjeg sistema dobijamo (sabiranjem levih i desnih strana jednačina):

$$0=8\,\rho_1+0''031+0''052-0''029+0''023-0''022-0''011+0''002$$

ili:

$$\rho_1 = -\,0''046/8 \approx -\,0''006.$$

Sada je veoma jednostavno da se izračunaju i ostali ρ_i: $\rho_2=-0''006+0''031=0''025$, $\rho_3=+0''046$, $\rho_4=-0''035$, $\rho_5=+0''017$, $\rho_6=-0''028$, $\rho_7=-0''017$ i $\rho_8=-0''004$.

Popravljajući posmatrane širine φ_j za odgovarajuće ρ_j dobijamo širine izražene u odnosu na jedan jedini nulpunkt:

$$\varphi_{11}= \varphi_1+ \varepsilon_{11}=37''280- \rho_1=37''286,$$
$$\varphi_{12}= \varphi_1+ \varepsilon_{21}=37''315- \rho_2=37''290,\ldots$$

Zadatak smo mogli rešiti i na taj način što bismo za neko ρ_k, recimo, ρ_1 uzeli proizvoljnu vrednost, naprimer $\rho_1=0$.

Uslov: $\sum \rho_k=0$ je ekvivalentan uslovu: $\sum\Delta\varphi_k=0$, jer $\Delta\varphi_k$ i ne predstavljaju drugo do greške širina zbog varijacija nulpunkta.

Zadatak smo mogli rešiti i na drugi način. Eliminacijom ρ_k koja se postiže formiranjem razlika onih jednačina koje se odnose na posmatranja iste grupe zvezda raznih noći:

$$\varphi_2- \varphi_1+ \varepsilon_{12}- \varepsilon_{11} = 37''229-37''280,$$
$$\varphi_2 - \varphi_1 + \varepsilon_{22}- \varepsilon_{21} = 37''459-37''315,$$

$$\varphi_3 - \varphi_2 + \varepsilon_{13} - \varepsilon_{12} = 37''.369 - 37''.229,$$
$$\varphi_3 - \varphi_2 + \varepsilon_{23} - \varepsilon_{22} = 37''.380 - 37''.459, \ldots$$

Nepoznata $\varphi_{j+1} - \varphi_j$ se javlja u dve jednačine. Srednja vrednost njihovih levih i desnih strana daje jednu jednačinu sistema:

$$\varphi_2 - \varphi_1 \approx 0''.046,$$
$$\varphi_3 - \varphi_2 \approx 0''.030, \ldots$$

Rešavanje poslednjeg sistema jednačina je veoma prosto ako se zada uslov koji definiše nulpunkt (ili, što je ekvivalentno, ako se zada bar jedno φ_k).

Polazeći od poslednjeg sistema, sve širine možemo izraziti, naprimer, preko φ_1:

$$\varphi_1 = \varphi_1$$
$$\varphi_2 = \varphi_1 + 0''.046,$$
$$\varphi_3 = \varphi_2 + 0''.030 = \varphi_1 + 0''.046 + 0''.030, \ldots$$

Ako odredimo φ_1 iz poslednjeg sistema dobićemo i ostale φ_k.

21. IZRAVNANJE POSMATRANJA METODOM KLIZEĆE SREDNJE VREDNOSTI

Amplitude pojava koje posmatramo često su male u odnosu na disperzije rezultata, pa je analiza njihovog toka dosta otežana. Da bismo odredili analitički izraz kojim se pojava može aproksimirati (naprimer, metodom najmanjih kvadrata) poželjno je da se umanji uticaj slučajnih grešaka posmatranja. Nekada je to i neophodno. Osim toga, često nije ni potrebno da se zna pomenuti analitički izraz, već je dovoljno da se posmatrane vrednosti funkcije samo "očiste" od slučajnih grešaka. U tom cilju koriste se različite metode od kojih ćemo spomenuti samo dve: metodu klizeće srednje vrednosti i metodu prostog osrednjavanja procesa u odredjenim intervalima nezavisno promenljive. Ova poslednja je toliko jednostavna da nema potrebe da se na njoj zadržavamo. Spomenućemo samo to da postoje dve njene varijante. U jednoj se rezultati grupišu tako da težine srednjih vrednosti budu jednake ili bar približno jednake, a u drugoj je cilj da se dobiju ekvidistantne srednje vrednosti, bez obzira na težine (osrednjavanje se vrši na jednakim intervalima nezavisno promenljive).

Prostim osrednjavanjem se smanjuje gustina podataka, pa se zbog toga mora voditi računa da li se u intervalima izmedju srednjih vrednosti dogadjaju neka kolebanja fenomena koji proučavamo koja ne smemo "izravnati". Ako je gustina sirovih rezultata (neizravnatih rezultata) dovoljna da se identifikuju sva kolebanja koja nas interesuju, ova metoda je pogodna iz sledećeg razloga: ako su sirovi rezultati uzajamno nezavisni i njihove srednje vrednosti su takodje medjusobno nezavisne, pa propagacija (prostiranje) grešaka sirovih rezultata ne postoji (sa problemom propagacije grešaka upoznaćemo se kad budemo izlagali metodu klizeće srednje vrednosti). Medjutim, ako je gustina osnovnih podataka nedovoljna ili ako želimo da pratimo tok pojave sa korakom koji je manji od intervala osrednjavanja možemo da koristimo metodu klizeće srednje vrednosti

Pretpostavimo da je funkcija $y=y(x)$ zadata na skupu $S_y=\{y_1,y_2,\dots,y_n\}$. uredjenom po rastućim vrednostima argumenta: $\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$. Radi jednostavnijeg izlaganja metode, pretpostavimo da su y_i ekvidistantne vrednosti funkcije $y=y(x)$.

Ako se u elementarnim intervalima $[x_i,x_{i+1}]$ funkcija ne menja ili se menja linearno, svaki rezultat neposrednog posmatranja y_r može da se transformiše u $y'_r=1/2(y_r+y_{r-1})$ kome odgovara nezavisno promenljiva $x'_r=1/2(x_r+x_{r-1})$. Na taj način se neće odstupiti od pravog toka pojave, ali će slučajne greške da se uzajamno kompenzuju.

Iz datog primera vidimo da je skala x'_r "skliznula" u odnosu na skalu x_r za polovinu elementarnog intervala.

Ako izvršimo još jedno izravnanje - izravnanje niza y'_r - dobićemo novi niz vrednosti funkcije $y=y(x)$:

$$y''_r = \frac{1}{2}(y'_r + y'_{r-1}) =$$

$$= \frac{1}{2^2}(y_r + y_{r-1} + y_{r-1} + y_{r-2}) =$$

$$= \frac{1}{2^2}(y_r + 2y_{r-1} + y_{r-2}) .$$

Gornjem nizu će odgovarati sledeće vrednosti argumenta:

$$x''_r = \frac{1}{2^2}(x_r + 2x_{r-1} + x_{r-2}) .$$

Nastavimo li dalje sa izravnanjem dobićemo nove nizove u kojima se izravnate vrednosti funkcije izražavaju preko posmatranih uz koje su koeficijenti Njutnovog binoma reda k, jednakog redu izravnanja, pomnoženi konstantom $C=1/2^k$. Indeks prvog sabirka u zagradi jednak je indeksu odgovarajuće izravnate vrednosti, a idući udesno indeksi opadaju za jedinicu. Primera radi, uzmimo da y_r^4 predstavlja skup izravnatih vrednosti IV reda. Ispred zagrade će biti koeficijent $1/2^4=1/16$, a koeficijenti Njutnova binoma IV reda su: 1,4,6,4,1. Prema tome, izraz za y_r^4 će biti:

$$y_r^4 = \frac{1}{16}(y_r + 4y_{r-1} + 6y_{r-2} + 4y_{r-3} + y_{r-4}). \qquad (1)$$

Za r=7, naprimer, gornja jednačina postaje:

$$y_7^4 = \frac{1}{16}(y_7 + 4y_6 + 6y_5 + 4y_4 + y_3).$$

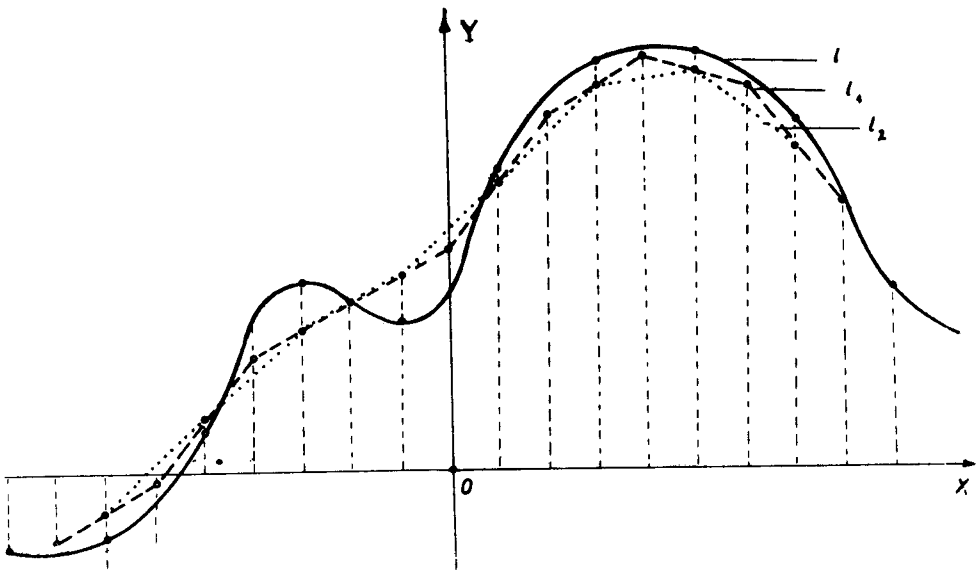
Neka sirova posmatranja y_s koja figurišu u izrazu za y_7^4 nalazimo i u izrazima za y_5^4, y_6^4, y_8^4 i y_9^4, pa izravnate vrednosti nisu uzajamno nezavisne čak i kad su sirovi rezultati uzajamno nezavisni. Ako posmatranje y_7, naprimer, ima relativno veliku slučajnu grešku ε_7 ona može bitno uticati na sve izravnate vrednosti od y_7^4 do y_{11}^4. Kaže se da se greška ε_7 prostire preko svih vrednosti y od y_7 do y_{11}.

Propagacija grešaka posmatranja predstavlja osnovni nedostatak metode klizeće srednje vrednosti.

Što se tiče izbora najvišeg reda izravnanja, ne postoji neko opšte pravilo pomoću kojega bismo mogli da ga odredimo. Red izravnanja zavisi od nivoa slučajnih grešaka, od amplitude pojave, od karaktera pojave, itd, Skrećemo pažnju čitaocu da se sa povećanjem reda izravnanja šire intervali koje pokrivaju neposredna posmatranja (broj članova razvijenog Njutnovog binoma se povećava sa povećanjem reda binoma) .

Ako funkcija y=y(x) nije linearna na intervalima osrednjavanja, sa širenjem intervala sve više dolazi do izražaja odstupanje izravnatih od odgovarajućih tačnih vrednosti funkcije.

Neka na slici 1. kriva ℓ realno predstavlja y=y(x). Ako pretpostavimo da su slučajne greške zanemarljivo male, izravnanjem prvoga reda dobićemo izlomljenu liniju ℓ_1, a izravnanjem drugoga reda - izlomljenu liniju ℓ_2, itd. Kao što se sa slike vidi, sistematsko odstupanje ℓ_2 do ℓ može biti veće nego sistematsko odstupanje ℓ_1 od ℓ. Ovo će postati jasno kada u paragrafu 29 budemo izložili teorijske osnove transformacija tipa $\Pi(Y)$, jer jednačina (1) i ne predstavlja ništa drugo do jednu varijantu pomenutih transformacija.



Sl. 1.

U metodi koju smo napred opisali y_i^k smo zamenjivali srednjom vrednošću para: y_i^{k-1} i y_{i-1}^{k-1} . Ponavljanjem izravnanja do odredjenog reda smanjuje se nivo slučajnih grešaka, ali se pritom zaoštrava jedan drugi problem: sa povećanjem reda izravnanja težine neposrednih posmatranja postaju sve disparatnije (raznolikije) . Posmatranje sa relativno velikom slučajnom greškom u jednom trenutku se množi sa najvećim mogućim koeficijentom, pa se može desiti da slučajne greške ostalih posmatranja ne mogu da kompenzuju slučajnu grešku pomenutog posmatranja. Ovaj problem može da se izbegne na taj način što se ne ide na povećanje reda izravnjanja, već na proširenje intervala izravnanja (intervala osrednjavanja) .

Umesto računanja srednjih vrednosti parova i ponavljanja postupka više puta, u prvom izravnanju se startuje sa većim brojem sirovih rezultata, recimo, sa pet:

$$y'_r = \frac{1}{5}(y_{r-2} + y_{r-1} + y_r + y_{r+1} + y_{r+2}) \tag{2}$$

Izravnanje sirovih posmatranja pomoću jednačina tipa (2) predstavljaju slučajeve transformacija s_m o kojima ćemo govoriti u paragrafu 28.

Kada se ocenjuje tačnost izravnatih vrednosti y'_r ili y^k_r ne sme se zaboraviti činjenica da susedne vrednosti nisu medjusobno nezavisne. Ako skup $\{y'_r\}$ razložimo na dva podskupa: $S_1 = \{y'_1, y'_3, \ldots, y'_{2s-1}\}$ i $S_2 = \{y'_2, y'_4, \ldots, y'_{2s}\}$ formalno možemo da ih tretiramo kao da se oni odnose na dve slučajne promenljive: Y_1 i Y_2. Kao što znamo, disperzija razlike $Y_1 - Y_2$ je jednaka:

$$D(Y_1 - Y_2) = D(Y_1) + D(Y_2) - 2K_{yy} =$$

$$= 2D(Y) - 2K_{yy}. \tag{3}$$

Ocenu korelacionog momenta možemo dobiti pomoću relacije:

$$K_{yy} = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}(y'_{2i-1} - \bar{y}_1)(y'_{2i} - \bar{y}_2)$$

u kojoj $\bar{y}_1$ predstavlja srednju vrednost y'_r sa neparnim indeksima, a $\bar{y}_2$ - srednju vrednost y'_r sa parnim indeksima.

Ako su promene $y=y(x)$ na elementarnim intervalima zanemarljivo male, ili, pak, ako se one prethodno eliminišu, iz razlika uzastopnih vrednosti: $y'_2 - y'_1$, $y'_4 - y'_3$, $y'_6 - y'_5$, ... može se dobiti približna vrednost $D(Y_1 - Y_2)$:

$$D(Y_1 - Y_2) = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}(y'_{2i} - y'_{2i-1})^2$$

Sa poznatim K_{yy} i $D(Y_1 - Y_2)$ lako odredjujemo $D(Y)$ (jednačina 3).

U astronomiji su poznati neki posebni slučajevi metode klizeće srednje vrednosti od kojih ćemo pomenuti samo dva: metodu "klizećeg težišta" trougla i metodu "klizećeg težišta" petougaonika. Prva se izražava jednačinom:

$$y_r = \frac{1}{3}(y'_{r-1} + y'_r + y'_{r+1}),$$

a druga se izražava jednačinom (2).

Metoda klizeće srednje vrednosti se ne primenjuje samo u cilju izravnanja posmatranja, već i u cilju eliminacije nekih nepoželjnih sistematskih komponenti. Kao primer može da posluži poznata metoda Orlova za računanje tzv. srednje geografske širine posmatračke stanice.

Po definiciji, srednja širina ne sadrži polugodišnji, godišnji, Čendlerov član (perioda $P \approx 1.2$ godina) i Kimurin z-član. Pretpostavimo da je z-član eliminisan i da su širine φ_t (indeks t označava trenutak na koji se odnosi dato φ) date za deseti deo godine počev od nekog inicijalnog trenutka $t=0$. Poluzbirovi:

$$u_t = \frac{1}{2}(\varphi_t + \varphi_{t+5})$$

ne sadrže godišnji član jer φ_t i φ_{t+5} deli 6 meseci. S druge strane, poluzbirovi:

$$w_t = \frac{1}{2}(u_t + u_{t+6}) =$$

$$= \frac{1}{4}(\varphi_t + \varphi_{t+5} + \varphi_{t+6} + \varphi_{t+11})$$

ne sadrže Čendlerov član, jer se epohe u_t i u_{t+6} razlikuju za 0.6 godina, odnosno, za polovinu Čendlerove periode.

Srednja vrednost od 5 uzastopnih w_t ne sadrži ni polugodišnji član, pa, prema tome, ona predstavlja srednju širinu:

$$\varphi_m = \frac{1}{20}\sum_{t=0}^{4}(\varphi_t + \varphi_{t+5} + \varphi_{t+6} + \varphi_{t+11})$$

Kulikov K.A.: Izmenjaemost širot i dolgot, Moskva, 1962., str. 198-204 za epohu t_m=7.5. Ako se trenutak t poveća za 0.1 godine, dobićemo srednju širinu za trenutak t_m=8.5, itd. Srednja vrednost prve dve širine predstavljaće srednju širinu za t_m=8.0.

Gornji primer ilustruje jedan slučaj klizeće srednje vrednosti - slučaj u kome se sirovi rezultati ne uzimaju redom, već sa preskokom od 5 elementarnih intervala.

22. UPOREDJENJE TEORIJSKE I EMPIRIJSKE RASPODELE VEROVATNOĆE. KRITERIJUMI SAGLASNOSTI.

U paragrafu 16 je rečeno da greške merenja najčešće imaju normalnu raspodelu. Medjutim, to saznanje nas ne oslobadja od obaveze da rezultate naših posmatranja redovno podvrgnemo nekom testu na osnovu koga bismo proverili da li oni zaista imaju normalnu ili neku drugu raspodelu.

U vezi sa pitanjem analize raspodele mogu se rešavati sledeća tri zadatka:

a) Uporedjenje sasvim odredjenog zakona raspodele $F(x)$ sa empirijskom raspodelom;

b) Odredjivanje parametara zakona raspodele $F(x)$, čiji analitički oblik (klasa funkcija) je sasvim izvestan, na osnovu rezultata eksperimenta. Zadatak ovoga tipa rešavali smo u paragrafu 16 (jednačine 7 i 8).

c) Odredjivanje i oblika funkcije raspodele $F(x)$, i parametara ove funkcije.

Razrada kriterijuma za proveru hipoteza o saglasnosti rezultata posmatranja i datih teorijskih raspodela verovatnoće predstavlja jedan od važnih zadataka Matematičke statistike. Pomenuti kriterijumi zovu se kriterijumi saglasnosti.

Neka je D neka mera odstupanja empirijske funkcije raspodele $F'(x)$ od teorijske $F(x)$. Mera D se može definisati na razne načine i tako dobiti razni kriterijumi saglasnosti.

Pretpostavimo da je neka odredjena hipoteza o raspodeli $F(x)$ tačna. Tada se može naći i zakon raspodele slučajne promenljive D.

Neka je $\varepsilon > 0$ verovatnoća da će D biti veće od D_o: $P(D > D_o) = \varepsilon$. Ako znamo zakon raspodele slučajne promenljive D, sa poznatom verovatnoćom ε možemo lako odrediti D_o. Ako je ε

toliko malo da $P(D > D_o) = \varepsilon$ predstavlja verovatnoću praktično nemogućeg dogadjaja, a desi se da je D, odredjeno iz uporedjenja hipotetične i empirijske raspodele, veće od D_o, to znači da je došlo do pojave nemogućeg dogadjaja. To takodje znači da je pretpostavka F(x) uzrokovala praktično nemoguć dogadjaj. U takvom slučaju se kaže da hipoteza nije u saglasnosti sa rezultatima eksperimenta, pa je treba odbaciti. Skrećemo pažnju čitaoca da uslov $D < D_o$ ne predstavlja dokaz da je F(x) pravi zakon raspodele, već predstavlja dokaz da hipoteza F(x) nije u suprotnosti sa rezultatima eksperimenta.

D_o se naziva <u>granica značajnosti</u>, a proizvoljno izabrani pozitivni broj ε - <u>nivo značajnosti</u>.

22.1. PIRSONOV χ^2 KRITERIJUM

Neka je skup rezultata eksperimenta $\{x_i\}$ uredjen po rastućim x_i (i=1,2,...,n) i neka su $S_1, S_2, \ldots, S_r$ podskupovi toga skupa koji nemaju zajedničkih elemenata. Ako je n_i broj elemenata podskupa S_i, n_i/n predstavlja statističku verovatnoću da slučajna promenljiva X, čiji su nam neki ishodi poznati, pripada S_i. Pošto su elementi osnovnog skupa S pre razlaganja na podskupove bili uredjeni po rastućim x_i, n_i/n predstavlja priraštaj empirijske funkcije raspodele na podskupu S_i. Ako sa p_i označimo teorijsku verovatnoću (koju računamo sa pretpostavljenim zakonom raspodele) da X pripada podskupu S_i, Pirsonova* mera D se definiše na sledeći način:

$$D = \chi^2_{r-1} = \sum_{i=1}^{r} \frac{n}{p_i}\left(\frac{n_i}{n} - p_i\right)^2 \qquad (1)$$

ili:

$$\chi^2_{r-1} = \sum_{i=1}^{r} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} \quad .$$

---

* Pearson Karl , 1857-1936, engleski matematičar i filozof.

toliko malo da $P(D>D_o) = \varepsilon$ predstavlja verovatnoću praktično nemogućeg dogadjaja, a desi se da je D, odredjeno iz uporedjenja hipotetične i empirijske raspodele, veće od D_o, to znači da je došlo do pojave nemogućeg dogadjaja. To takodje znači da je pretpostavka F(x) uzrokovala praktično nemoguć dogadjaj. U takvom slučaju se kaže da hipoteza nije u saglasnosti sa rezultatima eksperimenta, pa je treba odbaciti. Skrećemo pažnju čitaoca da uslov $D < D_o$ ne predstavlja dokaz da je F(x) pravi zakon raspodele, već predstavlja dokaz da hipoteza F(x) nije u suprotnosti sa rezultatima eksperimenta.

D_o se naziva granica značajnosti, a proizvoljno izabrani pozitivni broj ε - nivo značajnosti.

22.1. PIRSONOV χ^2 KRITERIJUM

Neka je skup rezultata eksperimenta $\{x_i\}$ uredjen po rastućim x_i ($i=1,2,\dots,n$) i neka su $S_1, S_2, \dots, S_r$ podskupovi toga skupa koji nemaju zajedničkih elemenata. Ako je n_i broj elemenata podskupa S_i, n_i/n predstavlja statističku verovatnoću da slučajna promenljiva X, čiji su nam neki ishodi poznati, pripada S_i. Pošto su elementi osnovnog skupa S pre razlaganja na podskupove bili uredjeni po rastućim x_i, n_i/n predstavlja priraštaj empirijske funkcije raspodele na podskupu S_i. Ako sa p_i označimo teorijsku verovatnoću (koju računamo sa pretpostavljenim zakonom raspodele) da X pripada podskupu S_i, Pirsonova* mera D se definiše na sledeći način:

$$D = \chi^2_{r-1} = \sum_{i=1}^{r} \frac{n}{p_i}\left(\frac{n_i}{n} - p_i\right)^2 \qquad (1)$$

ili:

$$\chi^2_{r-1} = \sum_{i=1}^{r} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} \quad .$$

---

* Pearson Karl , 1857-1936, engleski matematičar i filozof.

χ_r^2 je slučajna promenljiva sa r stepeni slobode. Jednaka je zbiru kvadrata r nezavisnih slučajnih promenljivih od kojih svaka ima normalnu raspodelu, sa matematičkim očekivanjem m=0 i disperzijom $\sigma^2=1$. Raspodelu χ^2 proučio je Pirson. Gustina verovatnoće ove slučajne promenljive je jednaka:

$$f_r(x) = \frac{1}{2^{\frac{r}{2}} \cdot \Gamma(\frac{r}{2})} x^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \qquad \text{za } x > 0 \quad \text{i}$$

$$f_r(x) = 0 \qquad \text{za } x < 0 \quad ,$$

gde je $\Gamma(x)$ poznata gama funkcija (Tablica II u prilozima). Kao što se zna, ona se definiše pomoću integrala:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} u^{x-1} e^{-u} du .$$

Pirson je dokazao teoremu* po kojoj, bez obzira na oblik hipotetične funkcije raspodele F(x) slučajne promenljive X, kada broj elemenata n teži beskonačnosti veličina D, definisana pomoću jednačine 1 , teži ka χ^2 sa r-1 stepenom slobode. Mi nećemo ulaziti u dokaz Pirsonove teoreme, niti u izvodjenje zakona raspodele, χ^2, već ćemo samo objasniti kako se ti dokazi koriste u rešavanju zadataka koje smo napred formulisali.

Sa brojem ε koji se unapred zada i koji je toliko mali da se dogadjaj sa verovatnoćom $P(X)=\varepsilon$ smatra praktično nemogućim, u tablici raspodele χ^2 (Tablica III u prilozima) sa argumentima r-1 i ε nadje odgovarajuće χ_ε^2 . S druge strane, posmatrački materijal se uredi i raspodeli po podskupovima S_i, za svaki podskup se izračunaju teorijska i statistička verovatnoća p_i i n_i/n i, najzad, pomoću jednačine 1 izračuna se χ^2. Ako se desi da je $\chi^2=D>\chi_\varepsilon^2$, to znači da se desio nemoguć dogadjaj, odnosno, to znači da je hipoteza F(x) dovela do nemogućeg dogadjaja, pa je treba odbaciti. U slučaju da je $\chi^2<\chi_\varepsilon^2$, hipoteza je prihvatljiva.

---

* Kramer G.: Matematičeskije metodi statistiki, Moskva, 1948.

Prilikom formiranja podskupova S_i ne postoji neko opšte pravilo odredjivanja granica podskupova ili broja elemenata u njima. Kriterijum Pirsona daje dobre rezultate u svim slučajevima kada je ispunjen uslov:

$$np_i \geq 10 , \qquad (i = 1,2,\ldots, r).$$

Granice podskupova S_i ne moraju biti ekvidistantne.

22.2. KRITERIJUM KOLMOGOROVA

Kriterijum Kolmogorova se odnosi samo na neprekidne slučajne veličine. Kao mera saglasnosti hipotetične teorijske i empirijske raspodele služi moduo najveće razlike $F'(x)$ i $F(x)$:

$$D = \sup |F'(x) - F(x)| .$$

Kolmogorov je dokazao da kada broj elemenata $n \to \infty$ važe sledeće relacije*:

$$P(\sqrt{n}\, D \geq x) = \begin{cases} 1 - \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2x^2}, & \text{za } x > 0 \text{ i} \\ 1, & \text{za } x \leq 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Leva strana gornjih jednačina predstavlja verovatnoću ispunjenja uslova: $\sqrt{n}\, D \geq x$. Za izvestan broj vrednosti argumenta $\lambda = \sqrt{n}\, D$ u Tablici 1 date su verovatnoće $P(\lambda)$ računate pomoću date jednačine.

TABLICA 1.

Verovatnoće $P(\lambda)$ na osnovi teoreme Kolmogorova

λ	$P(\lambda)$	λ	$P(\lambda)$	λ	$P(\lambda)$
0.0	1.000	0.7	0.711	1.4	0.040
0.1	1.000	0.8	0.544	1.5	0.022
0.2	1.000	0.9	0.393	1.6	0.012
0.3	1.000	1.0	0.270	1.7	0.006
0.4	0.997	1.1	0.178	1.8	0.003
0.5	0.964	1.2	0.112	1.9	0.002
0.6	0.864	1.3	0.068	2.0	0.001

* Kovalenko I.N., Filipova A.A.: Teorija verojatnostei i matematičeskoj statistiki, Moskva, 1973.

Računska šema za primenu kriterijuma Kolmogorova je vrlo prosta. Računaju se integralne funkcije raspodele $F'(x)$ i $F(x)$, a zatim i $\lambda = \sqrt{n} \sup |F'(x) - F(x)|$. Potsećamo čitaoca da $F'(x_0)$ predstavlja zbir svih relativnih učestanosti n_i/n do argumenta x_0 (za sve $x < x_0$). Sa argumentom λ u Tablici 1 nalazimo odgovarajuće $P(\lambda)$. Ako je $P(\lambda)$ vrlo malo, to znači da je proizišao malo verovatan dogadjaj, odnosno, to znači da hipoteza $F(x)$ i rezultati eksperimenta nisu u saglasnosti.

Za razliku od kriterijuma Pirsona, kriterijum Kolmogorova ne treba primenjivati u slučajevima kada se parametri $F(x)$ odredjuju iz eksperimentalnih podataka, već samo onda kada je $F(x)$ odredjeno na neki drugi način. Ukoliko se ovo pravilo ne poštuje, kriterijum Kolmogorova daje osetno veće iznose $P(\lambda)$ nego što oni faktički jesu, pa se rizikuje da se usvoji i neka hipoteza koju bi trebalo odbaciti.

22.3. KRITERIJUM MIZESA

Pretpostavimo da je funkcija raspodele $F(x)$ odredjena i da treba da se ona uporedi sa empirijskom funkcijom raspodele. Kao meru saglasnosti hipoteze i rezultata eksperimenta Mizes je predložio kriterijum ω^2 (videti knjigu Kovalenko-Filipova koju smo citirali):

$$D = \omega^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [F'(x) - F(x)]^2 \, d\, F(x) .$$

Ako se rezultati urede po rastućim vrednostima: $x_1 < x_2 < x_3 \dots < x_n$, ω^2 se može izračunati pomoću jednačine*:

$$\omega^2 = \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left[F(x_k) - \frac{2k-1}{2n} \right]^2 . \qquad (3)$$

Smirnov je dokazao da je već pri $n > 40$ raspodela slučajne promenljive $n\omega^2$ veoma bliska graničnoj raspodeli (za $n \to \infty$).

---

*Smirnov N.V. i Dunin-Barkovskij I.V.: Kurs teoriji verojatnostej i matematičeskoj statistiki, Moskva, 1965, str. 280.

Ta granična raspodela neće biti ovde objašnjena.

Raspodela ω^2 ne zavisi od tipa F(x). To znači da kriterijum ima opštu primenu.

U Tablici 2, koja je pozajmljena iz pomenute knjige Smirnova-Barkovskog, date su verovatnoće:

$$P\,(n\omega^2 > z_\varepsilon) = \varepsilon\,.$$

Računska šema za primenu kriterijuma Mizesa je sledeća:

Skup $\{x_i\}$ uredi se po rastućim x_i i pomoću jednačine (3) izračuna ω^2, a zatim $n\omega^2$. Sa zadatim nivoom značajnosti ε (naprimer, $\varepsilon = 0.01$) u Tablici 2 nalazimo odgovarajuće $z_{0.01} = 0.7435$. Ako je $n\omega^2 > z_\varepsilon$ to znači da je došlo do pojave malo verovatnog dogadjaja, pa se hipoteza F(x) odbacuje.

T A B L I C A 2,

Granica značajnosti po kriterijumu Mizesa.

ε	z_ε	ε	z_ε
0.50	0.1184	0.05	0.4614
0.40	0.1467	0.03	0.5489
0.30	0.1843	0.02	0.6198
0.20	0.2412	0.01	0.7435
0.10	0.3473	0.001	1.1679

Kriterijum Mizesa ili kriterijum ω^2 ima nekoliko preimućstava u odnosu na Pirsonov χ^2 kriterijum. Prvo, kriterijum Mizesa potpunije koristi informacije što ih sadrže neposredna merenja. Drugo, raspodela ω^2 brže teži svom graničnom slučaju (kada broj elemenata $n \to \infty$) nego χ^2 raspodela.

str. 280.

Z A D A T A K

U Tablici 3. data je raspodela apsolutne zvezdane veličine M za 4755 sjajnijih zvezda Galaksije i raspodela M za 1342 zvezda spektralnih tipova izmedju G8 i K7 (uključujučujući i granice).

Ispitati da li su ove raspodele normalne. Ispitivanje izvršiti pomoću Pirsonovog i Mizesovog kriterijuma .

Podaci koji su dati u Tablici 3 su pozajmljeni iz knjige: Trumpler R.J. and Weaver H.F.: STATISTICAL ASTRONOMY, University California Press, 1953.

T A B L I C A 3.

Raspodela zvezdane veličine M sjajnijih zvezda Galaksije (M - visuelna apsolutna veličina).

M_1	M_2	M_i	n_i (opšti skup)	n_i (podskup G8-K7)
-	-6	-	7	-
-6	-5	-5.5	37	2
-5	-4	-4.5	125	27
-4	-3	-3.5	216	46
-3	-2	-2.5	225	32
-2	-1	-1.5	426	121
-1	0	-0.5	1020	278
0	1	0.5	1205	534
1	2	1.5	694	147
2	3	2.5	387	82
3	4	3.5	255	25
4	5	4.5	80	0
5	6	5.5	40	16
6	7	6.5	29	23
7	8	7.5	9	9
			4755	1342

Da bismo rešili postavljeni zadatak polazimo od hipoteze da su date empirijske raspodele normalne i računamo odgovarajuće parametre normalnog zakona (disperziju i matematičko očekivanje). Pošto su nam date granice intervala kojima pripada M, kao osnovne podatke uzećemo sredine tih intervala (3-ća kolona). Podatke koji se odnose na prvi interval ćemo odbaciti jer je leva granica otvorena i, sem toga, učestanost je veoma mala.

str. 280.

Srednje vrednosti zvezdanih veličina su:

$$\overline{M} = \frac{1}{4748} (37x-5.5+125x-4.5+\ldots+9x7.5) = 0.233 \quad \text{i}$$

$$\overline{M}' = \frac{1}{1342} (2x-5.5+27x-4.5+\ldots+9x7.5) = 0.291.$$

Standardne devijacije ćemo računati pomoću jednačine:

$$(N-1)\, s^2 = \sum_{i=1}^{10} n_i M_i^2 - N\overline{M}^2,$$

u kojoj je $N = \sum n_i$.

Rezultati su sledeći:

$$s^2 = \frac{1}{4747} \times 20883 - 1.0002 \times 0.054 = 4.3449 \text{ (za opšti skup)} ,$$

$$s'^2 = \frac{1}{1341} \times 4957.5 - 1.0007 \times 0.085 = 3.6121 \text{ (za podskup G8-K7)}$$

Da bismo mogli da koristimo Tablicu I granice M moramo svesti na standardni oblik:

$$M_i'' = \frac{M_i - \overline{M}}{s} \quad .$$

Osim gornje transformacije, spojićemo prva dva i poslednja četiri intervala (sa ciljem da u svakom intervalu bude dovoljan broj elemenata). Granice novih intervala su date u prvim dvema tablicama koje slede .

Da bismo pomoću Tablice I odredili teorijske verovatnoće p_i za granice svakog intervala ćemo odrediti vrednost funkcije verovatnoće F(M). Pošto F(x) nije dato za negativne vrednosti argumenta, poslužićemo se sledećim relacijama:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{-x} f(t)dt + \int_{-x}^{x} f(t)dt = F(-x) + 2\int_{0}^{x} f(t)dt =$$

$$= F(-x) + 2F(x) - 2F(0)$$

ili:

$$F(-x) = 2F(0) - F(x) = 1 - F(x).$$

Tako, naprimer, $F(-3.00) = 1 - F(3.00) = 1 - 0.999 = 0.001$.

Teorijska verovatnoća da slučajna promenljiva M pripada intervalu $[M_1, M_2]$ je jednaka:

$$p = F(M_2) - F(M_1) \ .$$

Teorijske učestanosti $\bar{n}_i$ se dobijaju množenjem p_i sa ukupnim brojem ishoda slučajne promenljive: $\bar{n}_i = Np_i$.

Računanje neophodnih parametara za data dva skupa zvezda pokazano je pomoću sledećih tabela:

M_1	M_2	M_1''	M_2''	n_i	$F(M_1'')$	$F(M_2'')$	$\bar{n}_i$	$\frac{(n_i-\bar{n}_i)^2}{\bar{n}_i}$	
-6	-4	-3.00	-2.04	162	0.001	0.021	0.020	99.0	47.25
-4	-3	-2.04	-1.55	216	0.021	0.061	0.040	189.9	3.59
-3	-2	-1.55	-1.07	225	0.061	0.142	0.081	384.6	66.23
-2	-1	-1.07	-0.59	426	0.142	0.278	0.136	645.7	74.75
-1	0	-0.59	-0.11	1020	0.278	0.456	0.178	845.1	36.20
0	1	-0.11	0.37	1205	0.456	0.644	0.188	892.6	109.34
1	2	0.37	0.85	694	0.644	0.802	0.158	750.2	4.21
2	3	0.85	1.33	387	0.802	0.908	0.106	503.3	26.87
3	4	1.33	1.81	255	0.908	0.965	0.057	270.6	0.90
4	8	1.81	3.73	158	0.965	1.000	0.035	166.2	0.40
									369.74

M_1	M_2	M_1''	M_2''	n_i	$F(M_1'')$	$F(M_2'')$	p_i	$\bar{n}_i$	$(n_i-\bar{n}_i)^2/\bar{n}_i$
-6	-4	-3.31	-2.26	29	0.000	0.012	0.012	16.1	10.34
-4	-3	-2.26	-1.73	46	0.012	0.042	0.030	40.3	0.81
-3	-2	-1.73	-1.21	32	0.042	0.113	0.071	95.3	42.05
-2	-1	-1.21	-0.68	121	0.113	0.248	0.135	181.2	20.00
-1	0	-0.68	-0.15	278	0.248	0.440	0.192	257.7	1.60
0	1	-0.15	0.37	534	0.440	0.644	0.204	273.8	247.28
1	2	0.37	0.90	147	0.644	0.816	0.172	230.8	30.43
2	3	0.90	1.43	82	0.816	0.924	0.108	144.9	27.30
3	4	1.43	1.95	25	0.924	0.974	0.050	67.1	26.41
4	8	1.95	4.06	48	0.974	1.000	0.026	34.9	4.92
									411.14

Sa verovatnoćom $P = 0.05$ i brojem stepeni slobode $r-1=9$ u Tablici III nalazimo:

$$\chi_P^2 = 16.919.$$

Pošto je u oba slučaja $\chi^2 = \sum_{i=1}^{10} (n_i - \bar{n}_i)^2/\bar{n}_i > \chi_P^2$, to znači da se desio dogadjaj koji je protivrečan osnovnim podacima. Do toga je dovela hipoteza da su date empirijske raspodele normalne, pa je treba odbaciti. Drugim rečima, raspodela zvezdane veličine M nije gausovska.

Isti zadatak ćemo rešiti pomoću Mizesovog kriterijuma. Da bismo izračunali ω^2 i $N\omega^2$ moramo, kao i u prethodnom slučaju, intervale M zameniti središnjim vrednostima.

Formula 3 paragrafa 22 nije direktno primenljiva, pa ćemo je transformisati.

S obzirom da je broj N u jednom i drugom slučaju veliki, prvi član sa desne strane jednačine 3 ćemo zanemariti. Prema tome, formula koju ćemo koristiti je:

$$N\omega^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[F(M_i'') - \frac{2i-1}{2N}\right]^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} F^2(M_i'') - \frac{1}{N}(2i-1)\,F(M_i'') + \frac{(2i-1)^2}{4N^2}$$

Za datih 10 intervala M poslednja jednačina postaje:

$$N\omega^2 = \sum_{k=1}^{10} n_k F^2(M_k'') - \frac{1}{N}\Big[F(M_1'')\sum_{i=1}^{N}(2i-1) + F(M_2'')\sum_{i=N+1}^{N}(2i-1) +$$

$$+ \dots + F(M_{10}'')\sum_{i=N+1}^{N}(2i-1)\Big] + \frac{1}{4N^2}\sum_{i=1}^{N}(2i-1)^2,$$

gde je $N_k = \sum_{i=1}^{k} n_i$.

Poslednji izraz se može još uprostiti:

$$N\omega^2 = \frac{1}{4N^2}\sum_{i=1}^{N}(2i-1)^2 + \sum_{k=1}^{10} n_k F^2(M_k'') - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{10} F(M_k'')\sum_{i=\ell_1}^{\ell_2}(2i-1)\ ,$$

gde je:

$$\ell_2 = N_k \qquad i$$
$$\ell_1 = N_{k-1}+1$$

Imajući u vidu da je:

$$\sum_{i=\ell_1}^{\ell_2}(2i-1)=(\ell_2-\ell_1+1)\frac{(2\ell_1-1)+(2\ell_2-1)}{2}=(\ell_2-\ell_1+1)(\ell_2+\ell_1-1) \quad \text{i}$$

$$\sum_{i=1}^{N}(2i-1)^2=\frac{N(4N^2-1)}{3}$$

tražena relacija će biti:

$$N\omega^2=\frac{4N^2-1}{12N}+\sum_{k=1}^{10} n_k F^2(M_k'')-\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{10}(\ell_2-\ell_1-1)(\ell_2+\ell_1-1)\,F(M_k'') .$$

U šemama koje slede drugi član sa desne strane poslednje jednačine obeležen je sa A, a treći sa B.

k	M_k	M_k''	$F(M_k'')$	ℓ_1	ℓ_2	A	B
1	-5.0	-2.52	0.006	1	162	0.0	157.5
2	-3.5	-1.79	0.037	163	378	0.3	4315.7
3	-2.5	-1.31	0.095	379	603	2.0	20968.9
4	-1.5	-0.83	0.203	604	1029	17.6	141132.1
5	-0.5	-0.35	0.363	1030	2049	134.4	1139660.0
6	0.5	0.13	0.552	2050	3254	367.2	3527343.4
7	1.5	0.61	0.729	3255	3948	387.4	3643679.0
8	2.5	1.09	0.862	3949	4335	287.6	2763159.1
9	3.5	1.57	0.942	4336	4590	226.3	2143874.2
10	6.0	2.77	0.997	4591	4748	157.1	1470977.7
						1580	14855268

k	M_k	M_k''	$F(M_k'')$	ℓ_1	ℓ_2	A	B
1	-5.0	-2.78	0.003	1	29	0.0	2.5
2	-3.5	-2.00	0.023	30	75	0.0	110.0
3	-2.5	-1.47	0.071	76	107	0.2	413.5
4	-1.5	-0.94	0.174	108	228	3.7	7053.1
5	-0.5	-0.42	0.337	229	506	31.6	68765.5
6	0.5	0.11	0.544	507	1040	158.0	449106.8
7	1.5	0.64	0.739	1041	1187	80.3	241925.7
8	2.5	1.16	0.877	1188	1269	63.1	176620.8
9	3.5	1.69	0.954	1270	1294	22.8	61127.6
10	6.0	3.00	0.999	1295	1342	47.9	126401.5
						408	1131527

Iz gornjih podataka dobili smo sledeće vrednosti $N\omega^2$:

$$N\omega^2=\begin{cases}1583+1580-14855268/4748=34.2 & \text{(za opšti skup)}\\ 447+408-1131527/1342=11.8 & \text{(za podskup G8-K7)}\end{cases}$$

Dobijene vrednosti $N\omega^2$ su veće od z_ε iz Tablice 2 čak i kad je $\varepsilon=0.001$. Prema tome, hipoteza o normalnoj raspodeli zvezdane veličine M mora biti odbačena.

23. APROKSIMACIJA EMPIRIJSKE RASPODELE VEROVATNOĆE ŠARLIJEOVIM FUNKCIJAMA TIPA A I PIRSONOVIM FUNKCIJAMA TIPA I-VII.

U paragrafu 16 videli smo, kako se odredjuju najverovatnije vrednosti parametara funkcije gustine $f(x)$ matematičko očekivanje i disperzija u slučajevima kada se zna da je zakon raspodele verovatnoće normalni zakon. U ovome paragrafu videćemo kako se u opštijem slučaju odredjuje zakon raspodele - u slučaju kada analitički izraz za $f(x)$ nije poznat.

Pretpostavimo da empirijska gustina raspodele $\overset{*}{f}(x)$ ima sličnost sa funkcijom $f(x)$ normalnog zakona. Može se desiti da je kriva $y=\overset{*}{f}(x)$ nesimetrična u odnosu na pravu $y=L$, gde je L moda, da ima širi ili uži maksimum, itd., ali neka sličnost izmedju $f(x)$ i $\overset{*}{f}(x)$ ipak postoji. Naprimer, postojanje samo jednog maksimuma (jednomodalna kriva), asimptotsko približavanje ka x-osi sa udaljavanjem od mode, itd. U takvim slučajevima aproksimacija empirijske raspodele Šarlijeovom funkcijom tipa A daje vrlo dobre rezultate:

$$f_A(x) = f(x) = \frac{\nu_3}{6} f^3(x) + \frac{\nu_4 - 3}{24} f^4(x) - \frac{\nu_5 - 10 \frac{\nu_3}{3}}{120} f^5(x) + \dots \qquad (1)$$

gde je $f(x)$ gustina normalne raspodele, $f^k(x)$ njen izvod reda k i ν_k - osnovni moment reda k.

Najčešće, zadovoljavajuća tačnost aproksimacije postiže se samo sa prva tri člana jednačine 1 :

$$f_A(x) = f(x) - \frac{\nu_3}{6} f^3(x) + \frac{\nu_4 - 3}{24} f^4(x) \ . \qquad (2)$$

Računanje momenata reda višeg od četvrtog najčešće se izbegava jer greške momenata rastu sa rastom njihovoga reda.

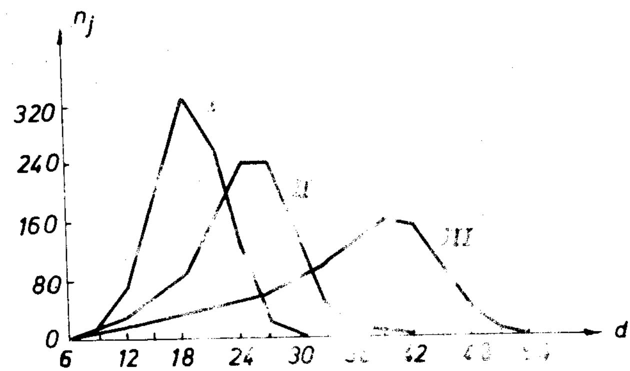
Funkcija $f(x)$ i njeni izvodi dati su u Tablici I u prilozima.

Da bismo bolje shvatili značenje drugog i trećeg člana sa desne strane jednačina 1 i 2 iz citirane knjige Mitropoljskog pozajmili smo slike 1 i 2 i Tablice 1 i 2 koje prezentiramo u ovom paragrafu. I ostale slike i Tablice koje će nam pomoći da lakše shvatimo problem aproksimacije empirijske raspodele su pozajmljene iz iste knjige.

U Tablici 1 data je dužina vlakna d tri vrste pamuka I, II, III merene prilikom nekih industrijskih ispitivanja i odgovarajuće uečstanosti n_j. Ti rezultati su i grafički predstavljeni na slici 1. Uporedjenje koeficijenta asimetrije β, koji je dat u Tablici 1, sa izgledom odgovarajuće krive na slici 1 vrlo ilustrativno ukazuje na smisao parametra β.

TABLICA 1.

		n_j	
d mm	I	II	III
9	15	9	6
12	65	27	14
15	195	49	25
18	338	85	33
21	268	156	39
24	101	244	49
27	17	241	61
30	1	135	81
33		43	105
36		10	132
39		1	163
42			153
45			94
48			38
51			7
β	-0.150	-0.453	-0.727



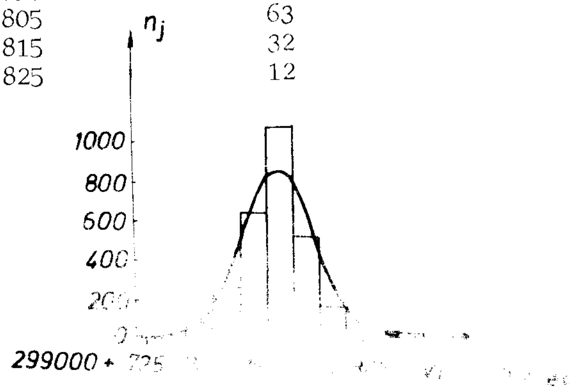
Sl. 1.

U Tablici 2 i na slici 2 dati su rezultati odredjivanja brzine svetlosti v_j i odgovarajuće učestanosti n_j. Zbog oštrijeg maksimuma empirijske raspodele u odnosu na krivu normalne gustine, eksces $\gamma = 1.075$.

T A B L I C A 2.

Rezultati merenja brzine svetlosti V=299 000 + c km/sec.

c	n_j
725	4
735	10
745	84
755	270
765	658
775	1095
785	506
795	152
805	63
815	32
825	12



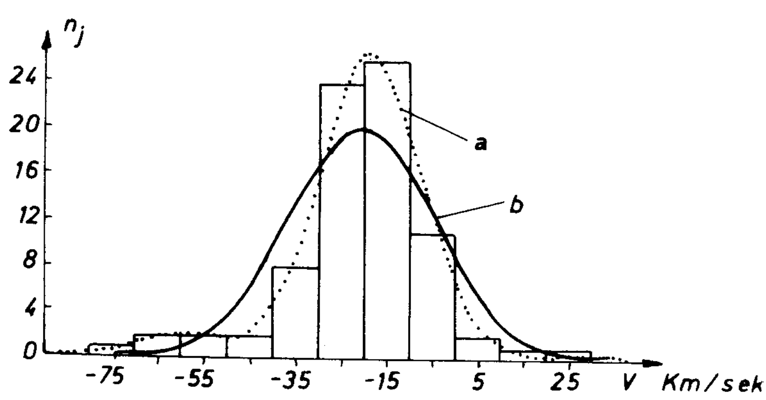
Dakle, posle datih definicija parametara β i γ i posle datih primera, postalo nam je jasnije koje vrste "poremećaja" normalne raspodele izražavaju drugi i treći član sa desne strane jednačina 1 i 2.

U Tablici 3 i na slici 3 date su radijalne brzine zvezda u intervalu rektascenzija izmedju $\alpha = 17^h40^m$ i $\alpha = 18^h40^m$ i intervalu deklinacija izmedju $\delta = 20^o$ i $\delta = 40^o$. Iz ovih podataka izračunata je funkcija $f_A(x)$ koja je na slici 3 predstavljena krivom a. Funkcija $f(x)$ je predstavljena krivom b. Očigledno je da se kriva a bolje prilagodjava histogramu koji odgovara empirijskoj raspodeli nego kriva b.

TABLICA 3.

Radijalne brzine zvezda u zoni: $17^h40^m \leq \alpha \leq 18^h40^m$, $20^o \leq \delta \leq 40^o$.

v km/sec	n_j	nf(x)	$nf_A(x)$
- 75	1	0.1	0.7
- 65	2	0.5	1.7
- 55	2	2.1	2.2
- 45	2	6.5	2.3
- 35	8	13.6	9.1
- 25	24	19.3	22.6
- 15	26	18.5	25.0
- 5	11	12.1	12.7
5	2	5.4	2.7
15	1	1.6	0.4
25	1	0.3	0.4



Sl.3.

Kada empirijska raspodela znatnije odstupa od normalne, zadovoljavajuća tačnost aproksimacije može da se postigne pomoću Pirsonovih funkcija tipa I-VII. Teoriju Pirsonovih funkcija i nekih drugih funkcija koje se koriste u istom cilju čitaoc može da upozna pomoću citirane knjige Kendala-Stjuarta*. Mi se na toj teoriji nećemo zadržavati.

Tip funkcije bira se prema vrednosti parametra:

$$\varkappa = \frac{s+2}{16\, s+1} \quad ,$$

gde je:

$$s = \frac{6\,(\nu_4 - \nu_3^2 - 1)}{3\,\nu_3^2 - 2\,\nu_4 + 6} \quad .$$

Iz posmatračkih podataka prvo se izračunaju momenti ν_3 i ν_4, a posle toga s i $\varkappa$.

TIP I

Ako je $\varkappa < 0$, aproksimacija se vrši funkcijom tipa I koja se definiše izrazom:

$$f_I(x) = f_{I,0}\left(1 + \frac{x}{\ell_1}\right)^{q_1}\left(1 - \frac{x}{\ell_2}\right)^{q_2} \qquad (3)$$

Oblast odredjenosti $f_I(x)$ je: $-\ell_1 < x < \ell_2$. Zbog prirode funkcije gustine u obzir uzimamo samo nenegativne vrednosti $f_I(x)$, pa se pojam "oblast odredjenosti" razlikuje od pojma "oblast definisanosti".

Značenja pojedinih parametara iz jednačine 3 su:

x predstavlja odstupanje slučajne promenljive X od mode L izraženo u jedinicama srednje veličine klase:

$$x = \frac{X-L}{h} \quad .$$

---

* Kendall M.G. and Stuart A.: The Advanced Theory of Statistics, tome I, [illegible], 1962.

Moda L se računa pomoću jednačine:

$$L = \overline{X} - \frac{\sigma \nu_3}{2} \; \frac{s+2}{s-2} \quad .$$

Takozvani <u>raspon raspodele</u> $\ell = \ell_1 + \ell_2$, koji će nam biti kasnije potreban, definiše se pomoću izraza:

$$\ell = 2\sigma \sqrt{(s+1)(1-\varkappa)}$$

ili:

$$\ell = \frac{\sigma t}{2} \quad .$$

Pomoćni parametar t se računa iz:

$$t = \sqrt{\nu_3^2 (s+2)^2 + 16(s+1)} \; .$$

Eksponenti q_1 i q_2, granice ℓ_1 i ℓ_2 i konstanta $f_{I,0}$ se računaju pomoću jednačina:

$$\left.\begin{matrix} q_1 \\ q_2 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left[(s-2) \pm s\,(s+2)\frac{\nu_3}{t}\right] ,$$

$$\ell_1 = \frac{\ell q_1}{s-2}$$

$$\ell_2 = \frac{\ell q_2}{s-2} \qquad \text{i}$$

$$f_{I,0} = \frac{1}{\ell} \; \frac{q_1^{\,q_1} \; q_2^{\,q_2}}{(s-2)^{s-2}} \; \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(q_1+1)\,\Gamma(q_2+1)}$$

gde je $\Gamma(s)$ poznata gama funkcija (Tablica III) .

Momenti ν_3 i ν_4 se odnose na slučajnu promenljivu a ne na promenljivu x. Osim toga, σ^2 je imenovana veličina (σ je u jedinicama u kojima je izraženo X) .

Eksponenti q_1 i q_2 moraju da budu veći od -1. Zavisno od njihovih iznosa razlikujemo tri slučaja:

1. $q_1, q_2 > 0$,
2. $q_1 < 0,\ q_2 > 0$, ili $q_2 < 0,\ q_1 > 0$ i
3. $q_1, q_2 < 0$.

U svakom od gornja tri slučaja razlikujemo podslučaje-

i to:

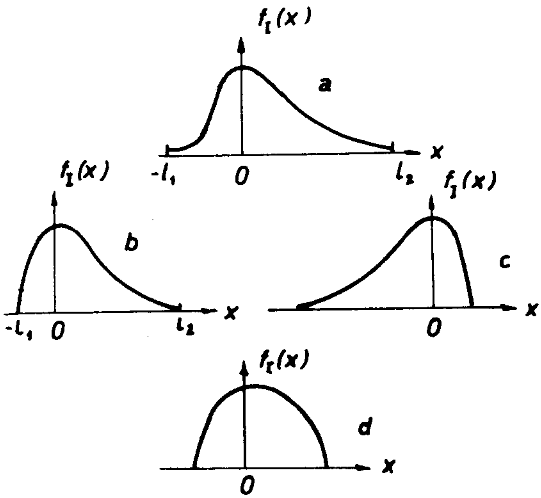
Slučaj 1 (slika 4) :

a) $q_1 > 1$, $q_2 > 1$ (kriva a)

b) $0 < q_1 < 1$, $q_2 > 1$ (kriva b)

c) $q_1 > 1$, $0 < q_2 < 1$ (kriva c)

d) $0 < q_1 < 1$, $0 < q_2 < 1$ (kriva d)



Sl.4.

Slučaj 2 (slika 5) :

Jednačina 3 ima drukčiji oblik:

$$f_I(x) = f_{I,0}\left(1+\frac{x}{\ell_1}\right)^{-q_1}\left(1-\frac{x}{\ell_2}\right)^{q_2} .$$

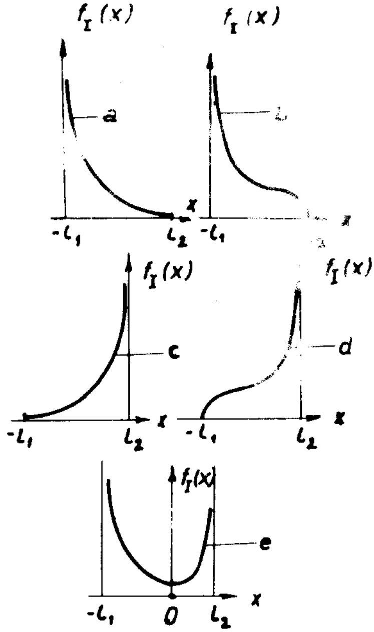
U slučaju 2 razlikujemo sledeće podslučajeve:

a) $-1 < q_1 < 0$, $q_2 > 1$ (kriva a)

b) $-1 < q_1 < 0$, $0 < q_2 < 1$ (kriva b)

c) $q_1 > 1$, $-1 < q_2 < 0$ (kriva c) i

d) $0 < q_1 < 1$, $-1 < q_2 < 0$ (kriva d) .



Sl.5.

Slučaj 3 (slika 5):

Za negativne q_1 i q_2 jednačina 3 ima oblik

$$f_I(x)= f_{I,0}\left(1+\frac{x}{\ell_1}\right)^{-q_1}\left(1-\frac{x}{\ell_2}\right)^{-q_2} .$$

U ovom slučaju nema tzv. podslučajeva. Dak

$-1 < q_1 < 0$ i $-1 < q_2 < 0$ dobija se funkcija $f_I(x)$ predst

krivom e na slici 5.

TIP II

Ako je: $\varkappa=0$, $\gamma_3=0$ i $\gamma_4 < 3$ aproksimacija se

funkcijom tipa II koja predstavlja specijalan slučaj $f_I(x)$:

$$f_{II}(x)= f_{II,0}\left(1-\frac{x^2}{\ell'^2}\right)^{q} . \qquad (5)$$

Kriva koja predstavlja $f_{II}(x)$ je simetrična u odnosu na osu.

U poslednjoj jednačini x, q i ℓ' su definisani na sledeći način:

$$x = \frac{X-\bar{X}}{h} ,$$

$$q = \frac{5\gamma_4-9}{2(3-\gamma_4)} \quad \text{i}$$

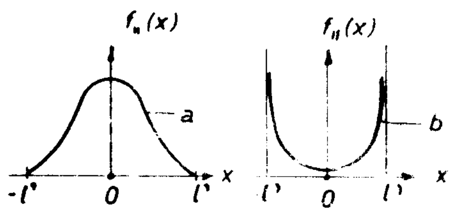
$$\ell'^2 = \frac{2\sigma^2\gamma_4}{3-\gamma_4} .$$

Oblast odredjenosti $f_{II}(x)$ je: $-\ell' < x < \ell'$.

Ako je $\gamma_4 = 1.8$, $q=0$. Za sve $\gamma_4 < 1.8$, $q < 0$, pa $f_{II}(x)$ ima oblik:

$$f_{II}(x) = f_{II,0}\left(1-\frac{x^2}{\ell'^2}\right)^{-q} .$$

Kriva a na slici 6 predstavlja $f_{II}(x)$ kada je $q > 0$, a kriva b - kada je $q < 0$.



Sl. 6.

$f_{II,0}$ se računa pomoću jednačine:

$$f_{II,0} = \frac{1}{2^{2q+1}} , \frac{\Gamma(2q+2)}{\Gamma^2(q+1)}$$

Poslednja jednačina se dobija kad se u izraz za $f_{I,0}$ stavi: $q_1=q_2=q$ i $\ell_1=\ell_2=\ell'$.

TIP III :

Ako je $x = \pm\infty$ jednačina aproksimirajuće krive je:

$$f_{III}(x) = f_{III,0}\left(1 + \frac{x}{\ell_1}\right)^p \exp - \frac{px}{\ell_1} \quad . \qquad (7)$$

Oblast odredjenosti je: $-\ell_1 \leq x \leq \infty$.

Pojedine oznake iz gornje jednačine imaju sledeća značenja:

$x = X - L$ (razlikuje se od x iz prethodna dva tipa) ,

$$p = \frac{4}{\gamma_3^2} - 1 ,$$

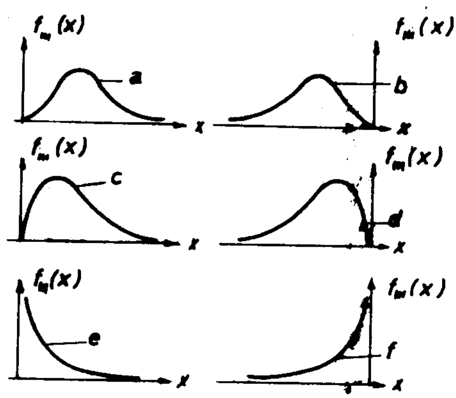
$$\ell_1 = \sigma\left(\frac{2}{\gamma_3} - \frac{\gamma_3}{2}\right) ,$$

$$L = \overline{X} - \frac{\sigma\gamma_3}{2} \quad \text{i}$$

$$f_{III,0} = \frac{1}{\ell_1}\,\frac{p^{p+1}}{e^p\,\Gamma(p+1)} \quad .$$

Zavisno od vrednosti parametara p i ℓ_1 razlikujemo šest slučajeva tipa III koji su grafički predstavljeni na slici 7:

1. $p > 1$, $\ell_1 > 0$ (kriva a) ,
2. $p > 1$, $\ell_1 < 0$ (kriva b) ,
3. $0 < p < 1$, $\ell_1 > 0$ (kriva c) ,
4. $0 < p < 1$, $\ell_1 < 0$ (kriva d) ,
5. $-1 \leq p < 0$, $\ell_1 > 0$ (kriva e) i
6. $-1 \leq p < 0$, $\ell_1 < 0$ (kriva f).



Sl. 7.

TIP IV:

Parametar $\varkappa$ se nalazi u granicama: $0 < \varkappa < 1$, a aproksimacija vrši funkcijom:

$$f_{IV}(x) = f_{IV,0}\left(1+\frac{x^2}{\ell^2}\right)^{\frac{1}{2}(s-2)} \exp - z \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\ell} \quad .$$

Oblast odredjenosti $f_{IV}(x)$ je: $-\infty < x < \infty$.

Nepoznate iz poslednje jednačine su definisane na sledeći način:

$$z = \frac{s(s+2)\,\nu_3}{Q} \quad , \text{ gde je } \quad Q = \left[-16(s+1) - \nu_3^2(s+2)^2\right]^{\frac{1}{2}} \; .$$

$$\ell = \frac{\sigma}{4}\; Q ,$$

$$x = \frac{X-\overline{X}}{h} + \frac{z\ell}{s} \quad \text{i}$$

$$f_{IV,0} = \frac{1}{\ell}\;\frac{1}{G(s,z)} \quad .$$

Znak uz z je suprotan znaku uz ν_3.

Funkcija $G(s,z)$ je definisana izrazom*:

Pearson K: Tables for Statisticians and Biometricians, str. LXXXI, Cambridge University Press, 1931.

$$G(s,z) = e^{-\frac{1}{2}\pi z} \int_0^{\pi} \frac{e^{z\theta}}{\sin^s \theta} \, d\theta \; .$$

Ako je $-s$ veliko, $G(s,z)$ se može aproksimirati izrazom:

$$G(s,z) = \sqrt{\frac{-2\pi}{s}} \; \frac{(\cos\phi)^{1-s}}{\exp\left\{\phi \, s \, \mathrm{tg}\, \phi + \frac{1}{12s} - \frac{\cos^2\phi}{3s}\right\}}$$

u kome je $\mathrm{tg}\,\phi = -\frac{z}{s}$.

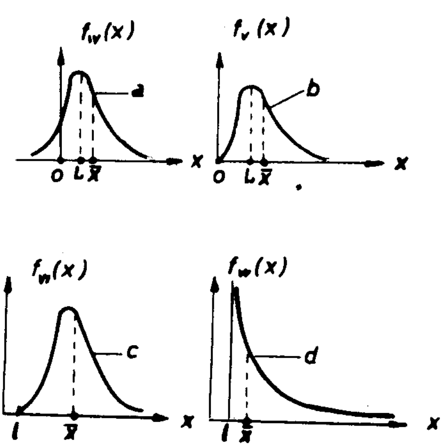
U Tablici IV dati su desetni logaritmi funkcije $G(s,z)$. Ovu tablicu smo pozajmili iz citirane knjige Mitropoljskog.

Ako su tablične razlike $\log G(s,z)$ suviše velike, treba koristiti neke druge tablice, npr. Tables for Statisticians and Biometricians koje smo citirali u kojima su dati i logaritmi funkcije $H(s,z)$ definisane relacijom:

$$G(s,z) = \frac{e^{z\phi}(\cos\phi)^{1-s}}{\sqrt{-(s+1)}} \; H(s,z)$$

Tablične razlike $\log H(s,z)$ su manje.

Funkcija $f_{IV}(x)$ je predstavljena krivom a na slici 8.



Sl. 8.

TIP V:

Za $\varkappa=1$ aproksimacija se vrši funkcijom:

$$f_V(x)= f_{V,0}\, x^{-p} \exp\left\{\frac{\eta}{x}\right\} . \qquad (9)$$

Promenljiva x mora da se nalazi u granicama: $0 \leq x < \infty$. Konstante p i η su definisane relacijama:

$$p = 4 + \frac{8+4\sqrt{4+ \gamma_3^2}}{\gamma_3^2} \qquad i$$

$$\eta = \sigma\,(p-2)\;(p-3)\;.$$

Znak korena u izrazu za p je suprotan znaku γ_3.

Promenljiva x i konstanta $f_{V,0}$ predstavljaju:

$$x = \frac{X-\bar{X}}{h} + \frac{\eta}{p-2} \qquad i$$

$$f_{V,0} = \frac{\eta^{p-1}}{p-1} \quad .$$

$f_V(x)$ je predstavljeno krivom b na slici 8.

TIP VI:

Ako se $\varkappa$ nalazi u granicama: $1 < \varkappa < \infty$, aproksimacija empirijske raspodele se vrši funkcijom oblika:

$$f_{VI}(x) = f_{VI,0}(x-\ell)^{q_1}\; x^{-q_2} \qquad (10)$$

$f_{VI}(x)$ je neograničena s desne strane, ali je s leve strane ograničena pravom $x=\ell$. Drugim rečima, oblast odredjenosti $f_{VI}(x)$ je: $\ell \leq x < \infty$.

Ako je $q_1 > 0$ funkcija ima jedan maksimum, a ako je $q_1 < 0$, kriva koja je predstavlja liči na hiperbolu.

Parametri q_1 , q_2 i ℓ su definisani jednačinama:

$$\left.\begin{matrix} q_1 \\ \\ q_2 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left[\frac{s(s+2)}{t} \pm (s-2)\right] \quad \text{i}$$

$$\ell = \frac{\sigma t}{2} \quad .$$

Promenljiva x i konstanta $f_{VI,0}$ se računaju iz relacija:

$$x = \frac{X-\bar{X}}{h} + \frac{q_2-1}{q_2-q_1-2} \qquad \text{i}$$

$$f_{VI,0} = \frac{\ell^{q_2-q_1-1}\,\Gamma(q_2)}{\Gamma(q_1+1)\,\Gamma(q_2-q_1-1)} \quad .$$

Kriva c na slici 8 predstavlja $f_{VI}(x)$ za $q_1 > 0$, a kriva d - za $q_1 < 0$.

T I P VII :

Ako je: $\varkappa=0$, $\nu_3=0$ i $\nu_4 > 3$ aproksimirajuća funkcija je:

$$f_{VII}(x) = f_{VII,0}\left(1+\frac{x^2}{\ell'^2}\right)^{-q} . \tag{11}$$

Oblast odredjenosti: $-\infty < x < \infty$.

Parametri poslednje jednačine i promenljiva x su definisani na sledeći način:

$$x = \frac{X-L}{h} \quad ,$$

$$q = \frac{5\nu_4-9}{2(\nu_4-3)} > 0,$$

$$\ell = \sigma\sqrt{\frac{2\nu_4}{\nu_4-3}} \qquad \text{i}$$

$$f_{VII,0} = \frac{1}{\ell}\;\frac{\Gamma(q)}{\Gamma(q-1/2)\,\Gamma(1/2)} \quad .$$

Funkcija gustine normalne raspodele je specijalan slučaj familije krivih tipa VII. Za $\varkappa=0$, $\nu_3=0$ i $\nu_4=3$ dobijamo:

$$f_{VII}(x)=f_{VII,0}\, e^{-x^2/2\sigma^2} ,$$

gde je:

$$f_{VII,0}=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} .$$

ZADATAK

Ispitati da li se raspodela apsolutne zvezdane veličine M sjajnijih zvezda Galaksije (Tablica 3, stranica 187) može aproksimirati Šarlijeovom funkcijom tipa A.

U zadatku koji smo rešili u paragrafu 22 našli smo da srednja vrednost apsolutne zvezdane veličine M i srednja kvadratska greška s iznose:

$\overline{M}=0.233$ i

$s=2.085.$

Prvi korak u rešavanju ovoga zadatka je svodjenje slučajne promenljive na standardni oblik:

$$x_k=\frac{M_k-0.233}{2.085} .$$

S obzirom da je standardno odstupanje nove promenljive $s_x=1$, osnovni momenti jednaki su centralnim:

$$\nu_r=\mu_r \quad (r=1,2,\ldots)$$

Izravnate (aproksimirajuće) učestanosti po intervalima M_k računaćemo pomoću jednačine:

$$\overline{n}_k=\frac{nf_A(x_k)}{s} ,$$

u kojoj je sa n obeležen ukupni broj osnovnih podataka (n=4748).

Funkcija $f_A(x_k)$ predstavlja gustinu verovatnoće ili verovatnoću da slučajna promenljiva pripada jediničnom intervalu oko x_k. Prema tome, broj $n\,f_A(x_k)$ je računati broj elemenata datoga skupa $\{x\}$ koji pripadaju pomenutom jediničnom intervalu. Pošto je $s=2.085$ zvezdanih veličina uzeto za jedinicu, $n\,f_A(x_k)$ je broj elemenata u intervalu od 2.085 zvezdanih veličina. Pošto veličine datih intervala M_k iz Tablice 3 iznose 1 zvezdanu veličinu, učestanosti po intervalima M_k se dobijaju deobom $nf_A(x_k)$ sa 2.085.

Račun nepoznatih koeficijenata jednačine 1 izvršićemo po šemi koja je niže data.

M_k	n_k	x_k	$n_k x_k^3$	$n_k x_k^4$	$f(x_k)$	$f'''(x_k)$	$f^{IV}(x_k)$
-5.5	37	-2.750	- 769.5	2116.1	0.00909	0.11410	-0.13473
-4.5	125	-2.270	-1462.1	[illegible]319.1	0.03034	0.14826	-0.04141
-3.5	216	-1.790	-1238.8	[illegible]217.5	0.08038	0.02937	-0.47893
-2.5	225	-1.310	- 505.8	662.6	0.16915	-0.28449	-0.73606
-1.5	426	-0.831	- 244.5	203.1	0.28265	-0.54207	-0.18624
-0.5	1020	-0.352	- 44.5	15.7	0.37497	-0.37960	0.85189
0.5	1205	0.128	2.5	0.3	0.39647	0.15111	1.14823
1.5	694	0.608	156.0	94.8	0.33161	0.53032	0.32064
2.5	387	1.087	497.1	540.3	0.22097	0.43677	-0.59510
3.5	255	1.567	981.2	1537.5	0.11687	0.09972	-0.66655
4.5	80	2.047	686.2	1404.6	0.04909	-0.11960	-0.22502
5.5	40	2.526	644.7	1628.5	0.01642	-0.14022	0.08912
6.5	29	3.006	787.7	2367.8	0.00435	-0.07898	0.13247
7.5	9	3.485	380.9	1327.6	0.00092	-0.02931	0.07140

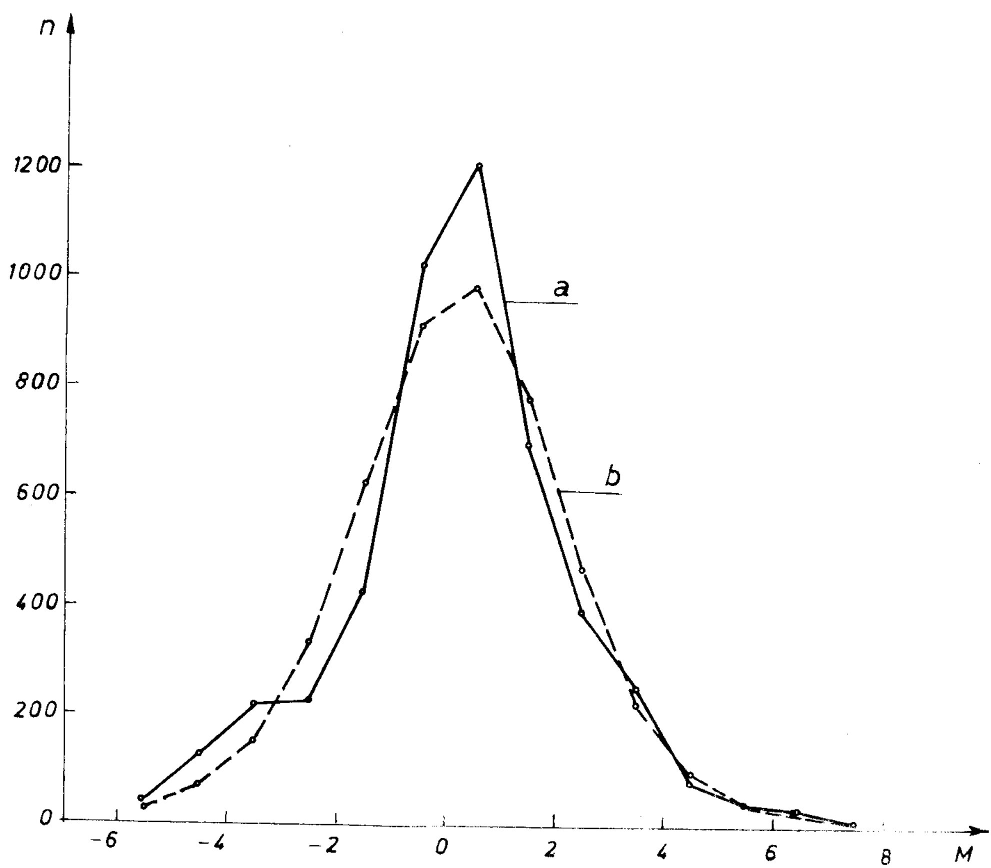
$-\frac{\nu_3}{6} f'''(x_k)$	$\frac{\nu_4-3}{24} f^{IV}(x_k)$	$f_A(x_k)$	$\bar{n}_k$	$f_A^1(x_k)$	$\bar{n}_k^1$
0.00052	0.00377	0.01338	30.5	0.01409	32.1
0.00067	-0.00116	0.02985	68.0	0.03553	80.9
0.00013	-0.01341	0.06710	152.8	0.07516	171.2
-0.00128	-0.02062	0.14725	335.3	0.14581	332.0
-0.00245	-0.00522	0.27498	626.2	0.25834	588.3
-0.00171	0.02386	0.39712	904.3	0.39035	888.9
0.00068	0.03216	0.42931	977.6	0.43552	991.8
0.00240	0.00898	0.34299	781.1	0.36206	824.5
0.00197	-0.01667	0.2[illegible]7	469.7	0.21537	490.4
0.00045	-0.01867	0.0[illegible]5	224.6	0.09331	212.5
-0.00054	-0.00630	0.04[illegible]25	96.2	0.03448	78.5
-0.00063	0.00250	0.0[illegible]29	41.7	0.01551	35.3
-0.00036	0.00371	0.0[illegible]70	17.5	0.00838	19.1
-0.00013	0.00200	0.0[illegible]29	6.4	0.00388	8.8
		0.9[illegible]61	4731.9	1.00134	4754.3

Na kraju 11. i 13. kolone dati su zbirovi tabličnih vrednosti $f_A(x_k)$ i $f_A^1(x_k)$ podeljeni sa 2.035. S obzirom da oni predstavljaju verovatnoće da M bude manje od 7.5 zvezdanih veličina, ovi brojevi treba da budu bliski jedinici.

Izraz kojim aproksimiramo gustinu verovatnoće je:

$$f_A(x) = f(x) + 0.00452\, f'''(x) + 0.02801\, f^{IV}(x).$$

Empirijske i teorijske učestanosti predstavljene su na slici 9 krivim a i b, respektivno.



Sl.9.

Poslednji korak u rešavanju postavljenog zadatka je ispitivanje da li su odstupanja empirijske raspodele od aproksimirajuće raspodele statistički značajna ili nisu. U tom cilju koristili smo Pirsonov kriterijum. Za χ^2 smo dobili sledeći rezultat: $\chi^2 = 283.1$.

Sa verovatnoćom $P = 0.05$ i brojem stepeni slobode $\nu = 13$ u Tablici III nalazimo $\chi_p^2 = 22.362$. Pošto je $\chi^2 > \chi_p^2$, hipoteza da $f_A(x)$ predstavlja gustinu verovatnoće nije saglasna sa osnovnim podacima. S obzirom da je broj pomenutih podataka prilično veliki ima smisla da se izračunaju i momenti petoga reda. Stoga, uzećemo još i sledeći član funkcije $f_A(x)$:

$$f_A^1(x) = f_A(x) - \frac{\nu_5 - 10\,\nu_3}{120} f^V(x).$$

Peti izvod funkcije $f(x)$ smo uzeli iz jedne tablice pozajmljene iz citirane knjige Mitropoljskog.

Rezultati koje smo dobili za $f_A^1(x)$ dati su u pretposlednjoj koloni šeme (u poslednjoj su odgovarajuće učestanosti). Nova vrednost χ^2 je 237.5. Prema tome, ni sa momentima petoga reda nismo postigli zadovoljavajuću aproksimaciju.

Pošto elementarni interval h slučajne promenljive X nije mali ($h=1$), može se pretpostaviti da netačnost momenata predstavlja uzrok zbog kojega se data empirijska raspodela ne može aproksimirati Šarlijeovom funkcijom tipa A. Zbog toga je neophodno da se momenti koji figurišu u toj funkciji preračunaju.

Primenom Šeperdovih popravki (paragraf 17 , jednačine 4) dobili smo sledeće tačnije vrednosti momenata:

$$\mu_1^* = \mu_1 = 0.000$$

$$\mu_2^* = \mu_2 - \frac{1}{12} = 0.999199 - 0.083333 \; 0.915866$$

$$s_x^* = \sqrt{\mu_2^*} = 0.957$$

$$\mu_3^* = \mu_3 - \frac{1}{4}\mu_1^* = -0.027148 - 0.25 \times 0.000 = -0.027148$$

$$\mu_4^* = \mu_4 - \frac{1}{2}\mu_2^* + \frac{7}{240} = 3.672178 - 0.5 \times 0.91[illegible] +$$

$$+0.029167 = 3.24[illegible]$$

$$\nu_3 = \frac{-0.027148}{0.957^3} = -0.030974$$

$$\nu_4 = \frac{3.243412}{0.957^4} = 3.866821.$$

Sa tačnijim vrednostima momenata ν_3^* i ν_4^* dobili smo $f_A^2(x)$ koje u odnosu na $f_A(x)$ manje odstupa od empirijske raspodele, ali su i ta odstupanja suviše velika (χ^2=268.0) da bismo $f_A^2(x)$ mogli prihvatiti kao zakon raspodele slučajne promenljive M.

U odnosu na funkciju gustine normalne raspodele f(x) χ^2=295. Bez obzira na to što nije postignuta zadovoljavajuća tačnost aproksimacije empirijske raspodele, primećuje se smanjivanje χ^2 sa svakim korakom u cilju povećanja tačnosti. Ako reziimiramo gornje rezultate možemo ih prikazati u vidu sledeće tablice koja sadrži oznaku aproksimirajuće funkcije i odgovarajuću vrednost χ^2:

	χ^2
$f(x)$	295
$f_A(x)$	283
$f_A(x)$	268
$f_A(x)$	238.

Z A D A T A K

U Tablici 4 date su vrednosti slučajne promenljive X i odgovarajuće učestanosti n_j. Potrebno je da se data empirijska raspodela verovatnoće aproksimira nekom Pirsonovom funkcijom tipa I-VII.

T A B L I C A 4

X_j	n_j	X'_j	$X'_j-\bar{X}$	$n_j(X'_j-\bar{X})^2$	$n_j(X'_j-\bar{X})^3$	$n_j(X'_j-\bar{X})^4$
20	11	-6	-4.087	183.739	-750.944	3069.110
25	93	-5	-3.087	886.250	-2735.846	8445.562
30	163	-4	-2.087	709.958	-1481.683	3092.273
35	178	-3	-1.087	210.319	- 228.618	248.503
40	176	-2	-0.087	1.332	- 0.116	0.010
45	132	-1	0.913	110.031	100.458	91.713
50	100	0	1.913	365.957	700.076	1339.240
55	67	1	2.913	568.533	1656.140	4824.328
60	40	2	3.913	612.463	2396.568	9377.760
65	24	3	4.913	579.302	2846.112	13982.952
70	12	4	5.913	419.563	2480.868	14669.400
75	3	5	6.913	143.369	991.104	6851.490
80	1	6	7.913	62.616	495.477	3920.710
				4853.432	6469.596	69913.06[illegible]

$\bar{X} = -1.913$ $\qquad \sigma = 2.203$

$\mu_2 = 4.853432$ $\qquad \nu_3 = 0.605$

$\mu_3 = 6.469596$ $\qquad \nu_3^2 = 0.366$

$\mu_4 = 69.913061$ $\qquad \nu_4 = 2.968$

Radi lakšeg računanja momenata i ostalih pa[illegible] jima smo napred govorili, izvršićemo sledeću [illegible]

$$X' = \frac{X-50}{5} .$$

Račun momenata je obavljen po šemi koja je data u [illegible] 4. Iz poslednjih podataka sledi:

$$s = \frac{6(2.968 - 0.366 - 1)}{3 \times 0.366 - 2 \times 2.968 + 6} = 8.272,$$

$$\varkappa = - \frac{0.366 \times 10.272^2}{16 \times 9.272} = - 0.260$$

S obzirom na to da je $\varkappa$ negativno, aproksimirajuća funkcija je tipa I.

Ostali parametri imaju sledeće vrednosti:

$$L = -1.913 - \frac{2.203 \times 0.605 \times 10.272}{2 \times 6.272} = -3.004,$$

$$t = 13.674$$

$$\ell = \frac{2.203 \times 13.674}{2} = 15.062,$$

$$\left.\begin{matrix} q_1 \\ q_2 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left(6.272 \mp 8.272 \times 10.272 \times \frac{0.605}{13.674}\right) = \begin{cases} 1.256 \\ 5.016 \end{cases}$$

$$\ell_1 = \frac{1.256 \times 15.062}{6.272} = 3.016$$

$$\ell_2 = \frac{5.016 \times 15.062}{6.272} = 12.046$$

Za računanje $f_{I,0}$ biće nam potrebne vrednosti gama funkcije koje se ne nalaze u Tablici II. Zbog toga ćemo se poslužiti Stirlingovom formulom:

$$\ln \Gamma(x) = -x + \frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + x \ln x + \frac{1}{2} \ln \frac{2\pi}{x} .$$

Pomoću poslednje formule dobili smo rezultate date u sledećoj šemi:

- ln 15.062	=	- 2.712
5.016 ln 5.016	=	8.039
1.256 ln 1.256	=	0.286
-6.272 ln 6.272	=	-11.516
ln (8.272)	=	9.079
- ln (6.016)	=	- 4.815
- ln (2.256)	=	- 0.128
$\ln f_{I,0}$	=	- 1.717
$f_{I,0}$	=	0.1796.

Prema tome, aproksimirajuća funkcija gustine verovatnoće je:

$$f_I(x) = 0.1796\left(1 + \frac{x}{3.016}\right)^{1.256}\left(1 - \frac{x}{12.046}\right)^{5.016} .$$

Promenljiva x iz poslednje jednačine predstavlja:

$$x = \frac{X'-L}{h} = \frac{X'+3.004}{1.000} = X'+3.004.$$

Izravnate učestanosti $n_j = n\, f_I(x_j)$ računamo na sledeći način:

x_j	$A_1 = 1+\frac{x}{3.016}$	$A_2 = 1-\frac{x}{12.046}$	$q_1 \ln A_1$	$q_2 \ln A_2$	$f_I(x)$	$\bar{n}_j$
-2.996	-	-	-	-	-	13.2
-1.996	0.338	1.166	-1.362	0.770	0.0993	99.3
-0.996	0.670	1.082	-0.503	0.395	0.1612	161.2
0.004	1.001	1.000	0.001	0.000	0.1798	179.8
1.004	1.333	0.917	0.361	- 0.435	0.1668	166.8
2.004	1.664	0.834	0.640	- 0.911	0.1370	137.0
3.004	1.996	0.751	0.868	- 1.436	0.1018	101.8
4.004	2.328	0.668	1.061	- 2.024	0.0686	68.6
5.004	2.659	0.585	1.228	- 2.689	0.0417	41.7
6.004	2.991	0.502	1.376	- 3.457	0.0224	22.4
7.007	3.322	0.419	1.508	- 4.363	0.0103	10.3
8.004	3.654	0.336	1.628	- 5.471	0.0038	3.8
9.004	3.985	0.253	1.736	- 6.894	0.0010	1.0

Podrazumeva se da X_j predstavlja sredine intervala, pa, prema tome, prva vrednost X_j je sredina intervala [17.5, 22.5], a odgovarajuća vrednost x_j - sredina intervala [-3.496, -2.496]. Empirijska učestanost n_j=11 se odnosi na ceo poslednji interval. Pošto funkcija $f_I(x)$ nije definisana za $x < -\ell_1 = -3.016$, veličina prvog intervala je: $-2.496+3.016 = 0.520$ jedinica. Teorijsku učestanost u ovom "okrnjenom" intervalu ćemo izračunati linearno interpolujući $f_I(x)$ na granicama tog intervala i množeći odgovarajuće n_j sa 0.520:

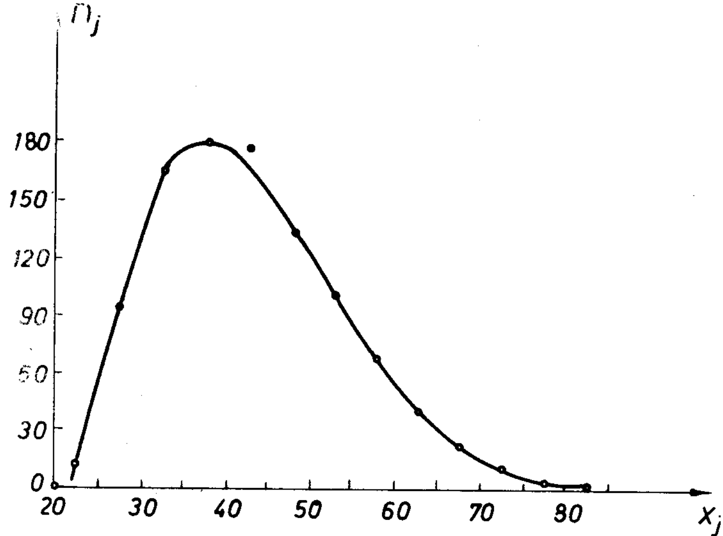
$$f_I(x) = \frac{1}{2}\left[f_I(-3.016) + f_I(-2.496)\right] = 0.0253.$$

U jediničnom intervalu čija je sredina $x = \frac{1}{2}(-3.016-2.496) = -2.756$ srednja učestanost bi bila 25.3. Pošto je prvi interval 0.520 jedinica, teorijska učestanost je: $0.520 \times 25.3 = 13.2$.

Na slici 10* kružićima su predstavljene posmatrane učestanosti n_j, a neprekidnom linijom - aproksimirajuće učestanosti $\bar{n}_j$.

Na zakon verovatnoće koji smo dobili na gornji način treba primeniti neki od kriterijuma koje smo opisali u 22-om paragrafu i oceniti da li je postignuta zadovoljavajuća tačnost aproksimacije.

* Slika 10 i podaci n_j, X_j su pozajmljeni iz citirane knjige Mitropoljskog



Sl. 10

24. IDENTIFIKACIJA SISTEMATSKIH GREŠAKA. ABEOV KRITERIJUM.

U ovom paragrafu ćemo razmatrati najčešći slučaj u astronomskoj praksi: slučajni uzorak $S = \{x_i\}$ predstavlja deo gausovske populacije. Pitanje na koje treba naći odgovor je: da li su elementi x_i uzajamno nezavisni ili, što je ekvivalentno, da li elementi x_i sadrže sistematske greške?

Ako postoje greške koje se ponavljaju u više x_i, onda ti x_i nisu uzajamno nezavisni, pa se pitanje uzajamne nezavisnosti rezultata poistovećuje sa pitanjem egzistencije sistematskih grešaka.

Neka je $\gamma(n)$ (n-broj elemenata skupa S) definisano jednačinom:

$$\gamma(n) = \frac{\dfrac{1}{2n-1} \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^2}{\dfrac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2},$$

gde je $\bar{x}$ srednja vrednost x_i.

Polazeći od hipoteze da je zakon raspodele slučajne promenljive X (čiji su nam ishodi x_i poznati) normalni zakon, može se doći do zakona raspodele slučajne promenljive γ i do verovatnoće $P(\gamma < \gamma_o)$, gde je γ_o neka granica izabrana tako da P bude vrlo malo.

U knjizi Halda* je pokazano da za $n \geqslant 20$ $\gamma(n)$ predstavlja slučajnu promenljivu sa normalnom raspodelom. Matematičko očekivanje $M[\gamma(n)]$ i disperzija $D[\gamma(n)]$ su:

$$M[\gamma(n)] = 1$$

$$D[\gamma(n)] = \frac{n-2}{(n-1)(n+1)}.$$

---

*Hald A.: Statistical Theory with Engineering Applications, New York, 1952.

Ako se desi da je $\gamma(n) < \gamma_o(n)$ hipoteza o uzajamnoj neza-
...sti x_i se odbacuje.

Za $n > 20$ $\gamma_o(n)$ se računa po formuli:

$$\gamma_o(n) = 1 + \frac{u_q}{\sqrt{n + 0.5(1 + u_q^2)}} ,$$

a za $n \leq 20$ ono je dato u Tablici 1

U poslednoj jednačini u_q predstavlja kvantil reda q standardne normalne raspodele.

Kvantil reda q je granica u_q odredjena verovatnoćom da slučajna promenljiva X bude manja od u_q:

$$P(X < u_q) = q.$$

Za standardnu normalnu raspodelu u_q je dato u Tablici VI. Ako se traži u_q za $q < 0.5$ važi relacija:

$$u_q = - u_{1-q} \quad .$$

TABLICA 1.

Vrednosti $\gamma_o(n)$.

P:	0.05	0.01	0.001
n			
4	0.390	0.313	0.295
5	410	269	208
6	445	281	182
7	468	307	185
8	491	331	202
9	512	354	221
10	531	376	241
11	548	396	260
12	564	414	278
13	578	431	295
14	591	447	311
15	603	461	327
16	614	475	341
17	624	487	355
18	633	499	368
19	642	510	381
20	650	520	393

Z A D A T A K :

U Tablici 2 data su sistematska odstupanja posmatranih geografskih širina vašingtonske opservatorije od medjunarodnog sistema "sistem BIH 1968" koja smo računali po formuli:

$$RF_i = \varphi_i - \varphi_o - x_{BIH} \cos\lambda - Y_{BIH} \sin\lambda \quad .$$

U gornjoj jednačini φ_i i φ_o predstavljaju trenutnu i inicijalnu širinu, a X_{BIH} i Y_{BIH} pravougle koordinate pola koje je objavio BIH u cirkularima D .

T A B L I C A 2

Sistematska odstupanja RF_i vašingtonske opservatorije. DJ - julijanski datum.

DJ	RF_i	DJ	RF_i
2439489.5+			
17	0".34	745	0".33
47	29	778	26
72	22	806	21
104	14	836	13
137	26	867	16
164	30	896	26
1967 196	29	1969 921	31
225	45	959	41
256	46	986	52
[illegible]	52	1017	53
312	45	1047	37
344	38	1079	35
369	37		
385	40	1115	32
414	30	1141	20
441	24	1174	17
470	20	1201	21
1968 499	29	1970 1231	30
532	32	1259	28
561	34	1290	33
592	35	1322	52
620	45	1349	39
649	41	1376	38
679	41	1416	41
715	39	1439	34

Da li odstupanja $d_i = RF_i - RF_o$ (RF_o - srednja vrednost RF_i) sadrže sistematske komponente ili su čisto slučajnog karaktera?

Račun obaviti odvojeno za dva intervala: 1967-1968 i 1969-1970.

Za zbirove kvadrata koji figurišu u izrazu za $\gamma(n)$ dobili smo sledeće iznose:

interval	$\sum_i (RF_i - RF_o)^2$	$\sum_i (RF_{i+1} - RF_i)^2$
1967-1968	0."2031	0."0847
1969-1970	.2849	.1631

Na osnovi gornjih vrednosti, statistika $\gamma(n)$ će biti:

$$\gamma(n) = \frac{\frac{1}{50-1}\ 0.''0847}{\frac{1}{24}\ 0.''2031} = 0.204 \quad i \qquad (1967\text{-}1968)$$

$$\gamma(n) = \frac{\frac{1}{48-1}\ 0.''1631}{\frac{1}{23}\ 0.''2849} = 0.280. \qquad (1969\text{-}1970)$$

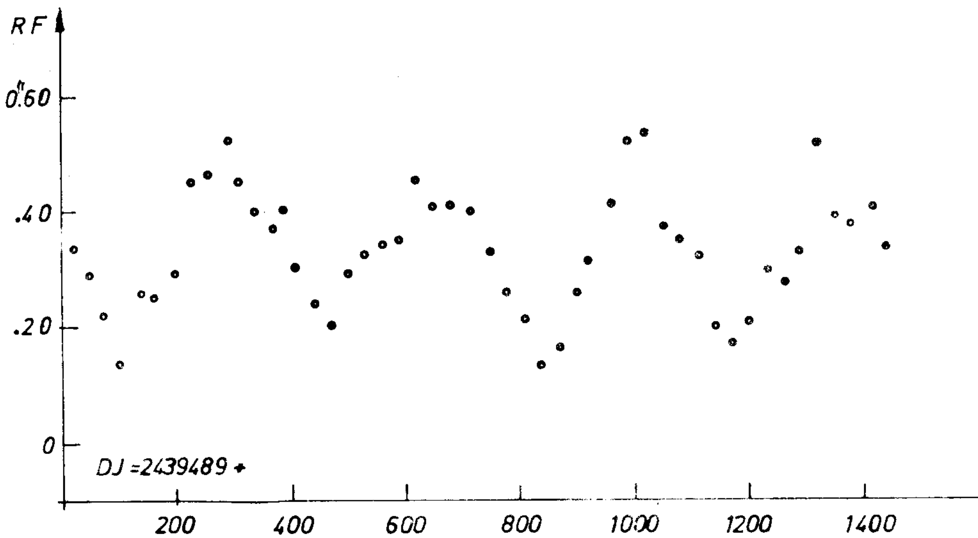
Pošto je u oba slučaja $n>20$, moramo računati $\gamma_o(n)$. Uzmimo da je $q=0.05$. Sa argumentom $1-q$ u Tablici VI nalazimo: $u_{0.05}=-u_{0.95}=-1.64485$. Dalji račun se obavlja po šemi:

$$1+u_q^2 = 3.706$$

$$n+0.5(1+u_q^2)=\begin{cases} 26.853 & (1967\text{-}1968) \\ 25.853 & (1969\text{-}1970) \end{cases}$$

$$\gamma_o(n) = \begin{cases} 1-0.317=0.683 \\ 1-0.324=0.676 \end{cases}$$

Kao što vidimo, u oba slučaja je: $\gamma(n) < \gamma_o(n)$. Iz te činjenice sledi zaključak da odstupanja $RF_i - RF_o$ nisu slučajnog karaktera. Do istog zaključka mogli smo doći i na osnovu analize grafika RF_i (slika 1) koji nam daje prve i najgrublje informacije o karakteru pojave. Medjutim, treba imati u vidu da su amplitude sistematskih komponenti često male u odnosu na slučajne greške i da se grubom analizom grafikona može doći do pogrešnog uverenja da pomenute komponente ne postoje. U takvim slučajevima pre-



sl. 1

25. ISPITIVANJE HOMOGENOSTI REZULTATA. STUDENTOV, FIŠEROV I VILKOKSONOV KRITERIJUM.

Radi tačnijeg odredjivanja zakona u prirodnim pojavama astronomi koriste posmatranja koja se obavljaju na raznim opservatorijama, različitim instrumentima i u različitim epohama. Prilikom jednovremenog statističkog tretiranja posmatračkog materijala koji je tako sakupljen analiza njegove homogenosti predstavlja obavezu koja se ne sme ignorisati.

Pitanje homogenosti može biti aktuelno i kad se radi o posmatranjima na jednom instrumentu i na jednoj opservatoriji. Kad posmatračke serije pokrivaju duže vremenske intervale moguće su promene instrumentskih konstanata, promene meteoroloških uslova, itd.

Kada govorimo o homogenosti mislimo na to da različiti uzorci pripadaju jednoj statističkoj populaciji, odnosno, da imaju isti zakon raspodele. Kad se zna da skupovi $S_x = \{x_i\}$ i $S_y = \{y_i\}$ imaju normalnu raspodelu, postavlja se pitanje da li su parametri te raspodele (matematičko očekivanje i disperzija) jednaki u jednom i drugom slučaju. Pošto, po pravilu, ne znamo parametre raspodele, već njihove ocene dobijene po uzorcima, zadatak koji treba rešiti je da li razlike srednjih vrednosti $\bar{x}-\bar{y}$ ili pak razlike srednjih kvadratskih grešaka $s_x - s_y$ imaju slučajan ili sistematski karakter. Ako utvrdimo da su razlike $\bar{x}-\bar{y}$ i $s_x - s_y$ slučajne, to je znak da se rezultati x_i i y_i, za koje se pretpostavlja da imaju normalnu raspodelu, mogu smatrati homogenim, odnosno, da su delovi jednog jedinog statističkog skupa.

U praksi se često zadovoljavamo da homogenost rezultata ocenjujemo samo sa aspekta jednakosti matematičkih očekivanja ili samo sa aspekta jednakosti disperzija.

Neka slučajna veličina X (čiji ishodi čine S_x) ima normalnu raspodelu sa matematičkim očekivanjem $M(X) = m_x$ i disperzijom $D(X) = \sigma_x^2$ koji su poznati. To ćemo zapisivati u obliku: $X \sim G(m_x, \sigma_x^2)$ (G - po Gausu). Iz elemenata S_x možemo odrediti ocene $\bar{x}$ i s_x^2.

Pitanje koje postavljamo je sledeće: da li je pri hipotezi H_o: $M(x) = m_x$ razlika $\bar{x}-m_x$ statistički značajna, odnosno, da li je verovatnoća hipoteze H_o toliko mala da se ona mora odbaciti?

Uvedimo novu promenljivu z:

$$z = \frac{(\bar{x} - m_x)\sqrt{n}}{\sigma_x}$$

gde je n broj elemenata skupa S_x.

Kao što smo rekli u paragrafu 15 za slučajnu promenljivu $X \sim G(m_x, \sigma_x^2)$ se dokazuje teorema po kojoj je matematičko očekivanje slučajne veličine $\bar{x}$ takodje jednako m_x (osobina centriranosti). Iz ove teoreme i teorema koje smo izložili u paragrafu 4 sleduje da je $z \sim G(0,1)$. Imajući ovo u vidu, iz tablica standardne normalne raspodele mogli bismo naći verovatnoću z koje smo izračunali po poslednjoj formuli. Ako bi se pokazalo da je ta verovatnoća suviše mala, hipoteza H_o je malo verovatna, pa bi se morala odbaciti kao nesaglasna sa eksperimentalnim podacima.

Umesto z posmatrajmo promenljivu t definisanu relacijom:

$$t = \frac{(\bar{x}-m_x)\sqrt{n}}{s_x} = \frac{(\bar{x}-m_x)\sqrt{n}}{\sigma_x} : \sqrt{\frac{s_x^2}{\sigma_x^2}} = B : \sqrt{I} \; .$$

s_x predstavlja ocenu σ_x dobijenu iz S_x.

Pošto je B=z, brojitelj ima raspodelu G(0,1). Što se tiče slučajne veličine I, dokazuje se da je ona proporcionalna $\chi^2_{n-1} : n-1$ *. Prema tome, t je količnik dve slučajne promenljive

---

* Hudson D.J.: Statistics, Genève, 1964.

čiji su zakoni raspodele poznati, pa se na osnovi poznatih teorema, koje nećemo u ovome kursu izvoditi, dolazi do zakona raspodele t. Taj zakon glasi:

$$g(t) = C\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}},$$

gde konstanta C zavisi samo od broja elemenata skupa S_x:

$$C = \frac{\frac{n-2}{2}\,!}{\sqrt{\pi(n-1)}\cdot\frac{n-3}{2}\,!}$$

U Tablici V date su granice t_p kao i verovatnoće da, pri datom broju stepeni slobode $\nu=n-1$, veličina t po apsolutnoj vrednosti predje t_p. Jasno je da su ti rezultati dobijeni pomoću gustine verovatnoća $g(t)$.

Promenljivu t prvi je definisao i odredio njen zakon raspodele $g(t)$ Student, pa se po njemu zakon raspodele $g(t)$ zove Studentov zakon.

Sada ćemo videti kako se zakon raspodele t može praktično iskoristiti za ispitivanje homogenosti skupova S_x i S_y sa aspekta jednakosti matematičkih očekivanja.

Neka je $Y \sim G(m_y, \sigma_y^2)$ pri čemu se pretpostavlja da je $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2$. Želimo da proverimo hipotezu $H_1: m_x = m_y$.

Ako je n broj elemenata skupa S_x i m-broj elemenata skupa S_y, disperzije slučajnih veličina $\bar{x}$ i $\bar{y}$ biće: σ^2/n i σ^2/m. Kada bi σ^2 bilo poznato, mogli bismo izračunati:

$$w = \frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{D(\bar{x}-\bar{y})}} \quad \frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\sigma^2/n+\sigma^2/m}}\;.$$

Razlika slučajnih veličina $\bar{x}$ i $\bar{y}$, koje imaju normalnu raspodelu, podeljena konstantom $\sqrt{D(\bar{x}-\bar{y})}$ je takodje normalno raspodeljena slučajna veličina: $w \sim G(0,1)$. Dakle, provera hipoteza H_1 se svodi na ispitivanje da li je w slučajno različito od nule ili nije. Ako datom w odgolvara mala verovatnoća, hipoteza H_1 se odbacuje kao malo verovatan dogadjaj. Naprotiv, ako je ta verovatnoća velika smatra se da S_x i S_y predstavljaju dva uzorka jednog statističkog skupa.

Kada obradjujemo naša posmatranja disperzija σ^2 je po pravilu nepoznata. Umesto nje koristi se ocena:

$$s^2 = \frac{\sum(x_i-\bar{x})^2 + \sum(y_i-\bar{y})^2}{m+n-2}$$

a umesto statističkog kriterijuma w koristi se t':

$$t' = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{s^2/n + s^2/m}} \tag{2}$$

Slučajna veličina u imenitelju poslednjeg razlomka ima raspodelu $\chi^2_{N-2} = \chi^2_{m+n-2}$. Broj stepeni slobode $\nu = m+n-2$.

Što se tiče izraza za ocenu σ^2, on se dobija iz sledećih razmatranja:

Neka je M_1 matematičko očekivanje zbira kvadrata $x_k - \bar{x}$:

$$M_1 = M\left\{\sum_{k=1}^{n} (x_k - \bar{x})^2\right\} .$$

Razvijajući kvadrat i primenjujući poznata pravila, dolazimo do relacija:

$$M_1 = M\left\{\sum x_k^2\right\} - n\,M\left\{\bar{x}^2\right\} =$$

$$= \sum M\left\{x_k^2\right\} - n\,M\left\{\bar{x}^2\right\} .$$

Pošto je:

$$D\{X\} = M\{X^2\} - [M(X)]^2 ,$$

to je:

$$M\{X^2\} = D\{X\} + [M(X)]^2 .$$

Ako poslednju relaciju primenimo na slučajne veličine X i $\bar{x}$ dobijamo:

$$M\{\bar{x}^2\} = \sigma_o^2 + m_x^2 = \sigma^2/n + m_x^2 ,$$

$$M\{X^2\} = \sigma^2 + m_x^2 .$$

Prema tome, M_1 je jednako:

$$M_1 = \sum_{1}^{n} (m_x^2 + \sigma^2) - n(m_x^2 + \sigma^2/n) = (n-1)\,\sigma^2 .$$

Na isti način se dokazuje da je i:

$$M_2 = M\left\{\sum_{k=1}^{m}(y_k-\bar{y})^2\right\} = (m-1)\sigma^2$$

Matematičko očekivanje dva gornja zbira kvadrata jednako je zbiru njihovih matematičkih očekivanja:

$$M = M_1 + M_2 = (m+n-2)\sigma^2.$$

Ako su m i n dovoljno veliki brojevi, zbirovi $\sum(x_k-\bar{x})^2$ i $\sum(y_k-\bar{y})^2$ su bliski odgovarajućim matematičkim očekivanjima M_1 i M_2, a

$$\sum(x_k-\bar{x})^2 + \sum(y_k-\bar{y})^2 \approx (m+n-2)\sigma^2$$

ili:

$$\sum(x_k-\bar{x})^2 + \sum(y_k-\bar{y})^2 \approx (m+n-2)\ s^2,$$

gde je $s^2 \approx \sigma^2$. Poslednja jednačina predstavlja izraz koji je i trebalo dokazati.

Računska šema za primenu Studentovog kriterijuma je sledeća:

1. Proveri se da li X i Y imaju normalnu raspodelu sa jednakim disperzijama (provera hipoteze o jednakosti disperzija biće izložena kasnije);
2. Računaju se s^2 i t';
3. Sa argumentom $(n+m-2)$ i datim t' nalazimo odgovarajuću verovatnoću P (Tablica V).

Ako je P malo, razlika $\bar{x}-\bar{y}$ se ne može smatrati slučajnom. Ovaj test se može i drukčije formulisati. Unapred se zada mala verovatnoća $P=\varepsilon$, toliko mala da se dogadjaj sa takvom verovatnoćom smatra praktično nemogućim. Sa datim ν i t' nalazimo tablični iznos t_p. Ako je t' iz eksperimenta veće od t_p (po apsolutnoj vrednosti), to znači da se dogodilo skoro "neverovatan" dogadjaj, odnosno, to znači da je hipoteza H_1 dovela do skoro nemogućeg dogadjaja, pa je treba odbaciti.

Osnovni nedostatak Studentovog kriterijuma je njegova primenljivost samo na slučajne veličine sa normalnom raspodelom. Medjutim, moguće je da se u praksi sretnemo i sa slučajnim veličinama koje nisu gausovske.

U rešavanju zadataka koji se odnose na provere hipoteza tipa H_1 može se primeniti kriterijum Vilkoksona* (po Wilcoxonu). U odnosu na Studentov kriterijum on ima tri značajne prednosti:

1. Može da se primeni i na populacije koje nemaju normalnu raspodelu;

2. Osetljiviji je od Studentovog kriterijuma (manje su šanse da se odbaci dobra ili usvoji pogrešna hipoteza) i

3. Može da se primeni i na skupove u kojima je broj elemenata relativno mali.

Od svih rezultata sadržanih u skupovima S_x i S_y sačini se jedan skup S uredjen po rastućim vrednostima. Svakom elementu skupa S odgovara odredjeni redni broj idući od manjih ka većim brojevima . Taj broj ćemo zvati rangom elementa. Neka je R_x zbir rangova svih elemenata skupa S_x, a R_y - zbir rangova svih elemenata skupa S_y. Ako ne postoji sistematska devijacija x_i u odnosu na y_i očekuje se da će R_x biti približno jednako R_y. Pošto su to dve slučajne promenljive moguća su njihova razilaženja čak i kad su S_x i S_y skupovi homogenih rezultata. Na osnovi ispitivanja raspodele zbira rangova mogu se definisati granice R_{min} i R_{max} u kojima se moraju nalaziti R_x i R_y ukoliko su rezultati homogeni. Naravno, te granice zavise od verovatnoća. R_{min} i R_{max} su definisani jednačinama (pri uslovu: $n < m$):

$$R_{min} = \frac{(n+m+1)\,n-1}{2} - u_{1-q}\sqrt{\frac{nm\,(n+m+1)}{12}} ,$$

$$R_{max} = (n+m+1)\,n - R_{min} ,$$

---

*Aivazian S.: Statističeskoje isledovanije zavisimostej, Moskva, 1970.

gde je u_{1-q} kvantil standardne normalne raspodele reda 1-q (Tablica VI).

Ako samo jedna od veličina R_x i R_y ne pripada intervalu (R_{min}, R_{max}) hipoteza o homogenosti skupova S_x i S_y se odbacuje.

Primetimo da figurisanje člana u_{1-q}, koji se odnosi na normalnu raspodelu, ne ograničava primenu kriterijuma na populacije koje nisu gausovske.

Tehnika računanja je sledeća:

1. Unapred se izabere broj q toliko mali da se dogadjaj sa verovatnoćom q praktično isključuje. Sa argumentom 1-q nalazimo u Tablici VI odgovarajuće u_{1-q}, a zatim po datim formulama računamo R_{min} i R_{max}

2. Formiramo S i računamo R_x i R_y. U ovoj etapi računanja moguće je da element x_s bude jednak elementu y_t i da nastane mala zabuna kod rangiranja elemenata. U toj situaciji se postupa na sledeći način: x_s i y_t (i ako ima još elemenata jednakih x_s) se stave na odgovarajuće mesto u skupu S u bilo kom redosledu. Svakom jednakom elementu se dodeli rang jednak srednjoj vrednosti rangova onih mesta u nizu koja oni zauzimaju. Uzmimo sledeći primer:

S_x : 10,34,13,18,10,3,6,8

S_y : 8,10,7,6,11,5

S:	3	5	6	6	7	8	8	10	10	10	11	13	18	34
R:	1	2	3.5	3.5	5	6.5	6.5	9	9	9	11	12	13	14

Idući redom za svaki broj skupa S_x i skupa S_y tražimo odgovarajući rang R i tako dobijamo:

$R_x = 9+14+12+13+9+1+3.5+6.5 = 68.0$ i

$R_y = 6.5+9+5+3.5+11+2 = 37.0$

Za q=0.05 u Tablici VI nalazimo $u_{1-q}=1.645$. Sa datim u_{1-q} računamo R_{min} (uzimajući da je n=6, m=8):

$R_{min} = 31.8,$

a posle toga i R_{max}:

$R_{max} = 58.2$

Pošto R_x ne pripada intervalu (R_{min}, R_{max}), hipoteza o homogenosti se odbacuje kao nesaglasna sa podacima.

Kada je broj elemenata u brojnijem skupu m manji od 25, umesto računanja R_{min} i R_{max} pomoću datih formula treba koristiti Tablicu VII .

Za gornji primer u Tablici VII nalazimo: $R_{min}=31$, $R_{max}=59.0$. Zaključak o nehomogenosti sledi i na osnovi ovih rezultata.

Kada je potrebno ispitati da li razlika ocena disperzije dve slučajne veličine sa normalnom raspodelom ima slučajni karakter (zbog grešaka tih ocena koje su posledica ograničenosti posmatračkog materijala) ili je rezultat nehomogenosti, može se primeniti Fišerov kriterijum.

Hipoteza koju proveravamo je: $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2$

Pošto se implicitno pretpostavlja da su elementi skupova S_x i S_y medjusobno nezavisni, s_x i s_y predstavljaju dve nezavisne ocene σ .

Pretpostavimo da je $s_x^2 > s_y^2$.

Umesto pozitivne razlike $s_x^2 - s_y^2$ Fišer je analizirao zakon raspodele slučajne veličine $\mathcal{F} = s_x^2 / s_y^2$.

Ranije smo već rekli da je $s_x^2 / \sigma^2 \sim \chi^2_{n-1} : (n-1)$. Pošto je σ^2 konstanta, to je i $s_x^2 \sim \chi^2_{n-1} : (n-1)$. Po istoj logici, $s_y^2 \sim \chi^2_{m-1} : (m-1)$. Dakle, rešavanje problema raspodele $\mathcal{F}$ svodi se na rešavanje problema raspodele količnika dve slučajne veličine čiji su zakoni raspodele poznati. Tako se dolazi do relacije po kojoj je gustina verovatnoće slučajne promenljive $\mathcal{F}$ jednaka:

$$h(\mathcal{F}) = \frac{C_1 \mathcal{F}^{\alpha}}{(n'\mathcal{F} + m')^{\beta}} , \qquad (6)$$

gde je:

$n' = n-1$

$m' = m-1$

$\alpha = n'/2-1,$

$\beta = (n'+m')/2,$

$C_1 = \Gamma(\beta)(m')^{\frac{m'}{2}}(n')^{\frac{n'}{2}} : \left[\Gamma(\frac{n'}{2})\Gamma(\frac{m'}{2})\right].$

$\Gamma(s)$ je gama funkcija.

Za korišćenje funkcije raspodele $h(\mathcal{F})$praktično je sastaviti tablicu kao što je Tablica VIII. Sa argumentima ν_1=n-1 i ν_2=m-1 (važno je držati se pravila da je n broj elemenata iz kojih se računa brojitelj, a m - broj elemenata iz kojih se računa imenitelj) i malom verovatnoćom Q nalazimo tabličnu vrednost $\mathcal{F}_t$. Ako je $\mathcal{F}$ koje smo izračunali iz posmatranja:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{n-1}\sum(x_i-\bar{x})^2 : \left[\frac{1}{m-1}\sum(y_i-\bar{y})^2\right]$$

veće od $\mathcal{F}_t$ to znači da je hipoteza $\sigma_x = \sigma_y$ dovela do pojave malo verovatnog dogadjaja, odnosno, da je nesaglasna sa posmatranjima.

Pažnju čitaoca skrećemo na činjenicu da osetljivost Fišerovog kriterijuma često ne zadovoljava praktične potrebe. To ćemo najbolje ilustrovati jednim primerom.

Neka je ν_1=12 i ν_2=13. Za Q=0.01 u Tablici VIII nalazimo $\mathcal{F}_t$=3.96$\approx$4. Da bismo odbacili hipotezu o jednakosti disperzija potrebno je da bude $s_x^2 \approx 4s_y^2$. Jasno je da ovakav odnos s_x^2 i s_y^2 i intuitivno dovodi do zaključka o nehomogenosti. Mi znamo da se ne treba oslanjati na intuiciju, makar ne suviše, pogotovu kada je broj elemenata iz kojih se računaju ocene disperzija mali. Medjutim, i kada su m i n relativno veliki, recimo, 50,60, ostaje činjenica da se hipoteza o homogenosti odbacuje kada je s_x^2 2-3 puta veće od s_y^2.

Kada je broj podataka dovoljno veliki skupovi S_x i S_y se "razbiju" na podskupove na slučajan način ili neki neslučajan način ali za koji se zna da ne utiče na s_x, odnosno, s_y. Za svaki takav podskup i izračuna se s_x^i, odnosno s_y^i. Ako razlike $s_x^i-s_y^i$ imaju sistematski karakter to je znak da se hipoteza $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$ mora odbaciti, čak i kad odnos $s_x^i/s_y^{i\,2}$ i nije toliko veliki koliko bi bilo potrebno po Fišerovom kriterijumu.

Raspodela $\mathcal{F}$ ima još jednu značajnu primenu. Pomoću nje se može oceniti da li su nepoznate koje se računaju metodom najmanjih k adrata slučajno različite od nule ili nisu. Takva ocena se često zahteva kad se aproksimacija vrši polinomima. Ako smo izračunali koeficijente polinoma reda r postavlja se pitanje da li bi polinom reda r+1 bolje aproksimirao posmatranja. Ako je koeficijent uz stepen r+1 slučajno različit od nule ili je nula, uvećanje stepena polinoma nema smisla.

Pretpostavimo da slučajna promenljiva ε, čije neke vrednosti predstavljaju rezidui uslovnih jednačina, ima normalnu raspodelu: $\varepsilon \sim G(0,\sigma)^2$. Na osnovu jednačine 10 paragrafa 17 vidimo da nepoznate $\hat{\omega}_j$ predstavljaju linearne kombinacije neposrednih posmatranja y_i, pa prema tome i $\hat{\omega}_j$ imaju normalnu raspodelu* : $\hat{\omega}_j \sim G(\omega_j, \sigma^2)$. Ako je $\omega_j = 0$ sledi $\hat{\omega}_j^2 \sim \sigma^2 \chi_1^2$. Pošto je σ^2 najčešće nepoznato, umesto njega koristi se ocena disperzije:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum \varepsilon_i^2}{n-p}$$

(ako je r stepen aproksimirajućeg polinoma, p=r+1). S obzirom i na ovu pretpostavku relacije koje nas interesuju su:

$$\frac{\hat{\omega}_j^2}{\hat{\sigma}^2} \sim \frac{\sigma^2 \chi_1^2}{\sigma^2 \chi_\nu^2} = \mathcal{F}_{1,\nu}$$

Sa zadatom malom verovatnoćom P i brojem $\nu = n-p$ u Tablici VIII nalazimo odgovarajuće $\mathcal{F}_{1,\nu}$. Ako je $\hat{\omega}_j^2 / \hat{\sigma}^2 > \mathcal{F}_{1,\nu}$ hipoteza da je $\omega_j = 0$ je protivrečna osnovnim podacima. U protivnom, ona se usvaja.

---

*Hudson D.J., 1970, str. 166 - ruski prevod.

po Fišerovom kriterijumu

Raspodela $\mathcal{F}$ ima još jednu značajnu primenu. Pomoću nje se može oceniti da li su nepoznate koje se računaju metodom najmanjih k adrata slučajno različite od nule ili nisu. Takva ocena se često zahteva kad se aproksimacija vrši polinomima. Ako smo izračunali koeficijente polinoma reda r postavlja se pitanje da li bi polinom reda $r+1$ bolje aproksimirao posmatranja. Ako je koeficijent uz stepen $r+1$ slučajno različit od nule ili je nula, uvećanje stepena polinoma nema smisla.

Pretpostavimo da slučajna promenljiva ε, čije neke vrednosti predstavljaju rezidui uslovnih jednačina, ima normalnu raspodelu: $\varepsilon \sim G(0,\sigma)^2$. Na osnovu jednačine 10 paragrafa 17 vidimo da nepoznate $\hat{\omega}_j$ predstavljaju linearne kombinacije neposrednih posmatranja y_i, pa prema tome i $\hat{\omega}_j$ imaju normalnu raspodelu*: $\hat{\omega}_j \sim G(\omega_j, \sigma^2)$. Ako je $\omega_j = 0$ sledi $\hat{\omega}_j^2 \sim \sigma^2 \chi_1^2$. Pošto je σ^2 najčešće nepoznato, umesto njega koristi se ocena disperzije:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum \varepsilon_i^2}{n-p}$$

(ako je r stepen aproksimirajućeg polinoma, $p=r+1$). S obzirom i na ovu pretpostavku relacije koje nas interesuju su:

$$\frac{\hat{\omega}_j^2}{\hat{\sigma}^2} \sim \frac{\sigma^2 \chi_1^2}{\sigma^2 \chi_\nu^2} = \mathcal{F}_{1,\nu}$$

Sa zadatom malom verovatnoćom P i brojem $\nu = n-p$ u Tablici VIII nalazimo odgovarajuće $\mathcal{F}_{1,\nu}$. Ako je $\hat{\omega}_j^2 / \hat{\sigma}^2 > \mathcal{F}_{1,\nu}$ hipoteza da je $\omega_j = 0$ je protivrečna osnovnim podacima. U protivnom, ona se usvaja.

---

*Hudson D.J., 1970, str. 166 - ruski prevod.

po Fišerovom kriterijumu

Z A D A T A K

Koristeći podatke iz Tablice 2 na stranici 217 ispitati da li odstupanja RF_i iz perioda 1967-1968 imaju sistematsku devijaciju u odnosu na RF_i iz perioda 1969-1970.

Rešavanje postavljenog zadatka se formuliše kao ispitivanje homogenosti RF_i. Zbog toga što odstupanje širine Vašingtona od sistema "BIH 1968" predstavlja funkciju vremena (slika 1 na stranici 219, primena Studentovog kriterijuma je isključena. Medjutim, za primenu Vilkoksonovog kriterijuma sistematska promena RF u funkciji vremena ne predstavlja ograničenje.

Prvi korak u rešavanju gornjeg zadatka je formiranje jednog skupa (od rezidua RF_i za data dva perioda) i njegovo uredjivanje po rastućim vrednostima slučajne promenljive RF. Da bismo znali kom podskupu pripada dati element, pored svakoga od njih ćemo staviti broj 1, ako pripada periodu 1967-1968, ili broj 2, ako pripada periodu 1969-1970. Na osnovu pomenute Tablice 2 opisanim postupkom smo dobili Tablicu 1.

T A B L I C A 1.

RF_i		R'_i	R_i	RF_i		R'_i	R_i	RF_i		R'_i	R_i
13	2	1	1	30	1	18	19	39	1	35	35.5
14	1	2	2	30	1	19	19	39	2	36	35.5
16	2	3	3	30	2	20	19	40	1	37	37
17	2	4	4	31	2	21	21	41	1	38	39.5
20	1	5	5.5	32	1	22	22.5	41	1	39	39.5
20	2	6	5.5	32	2	23	22.5	41	2	40	39.5
21	2	7	7.5	33	2	24	24.5	41	2	41	39.5
22	1	9	9	34	1	26	27	45	1	43	43
24	1	10	10	34	1	27	27	45	1	44	43
26	1	11	12	34	2	28	27	46	1	45	45
26	2	12	12	35	1	29	29.5	52	1	46	47
26	2	13	12	35	2	30	29.5	52	2	47	47
28	2	14	14	37	1	31	31.5	52	2	48	47
29	1	15	16	37	2	32	31.5	53	2	49	49
29	1	16	16	38	1	33	33.5				
29	1	17	16	38	2	34	33.5				

U poslednjoj tablici R' predstavlja redni broj elementa u uredjenom skupu, a R - rang elementa.

Neka je R_1 zbir R za prvi, a R_2 - za drugi podskup. Rezultati su sledeći:

$R_1 = 668.0$

$R_2 = 557.0.$

Neka je nivo rizika $\alpha = 0.05$. Pošto je broj elemenata brojnijeg podskupa m=25 ne moramo računati R_{min}, već ćemo njegovu vrednost uzeti iz Tablice VII: Za n=24 i m=25 nalazimo:

$R_{min} = 517.$

Gornja medja je:

$R_{max} = (25+24+1)24 - 517 = 683.$

Pošto se i R_1, i R_2 nalaze izmedju gornje i donje medje ($R_1, R_2 \in (R_{min}, R_{max})$) možemo smatrati da RF_i iz perioda 1967-1968. nisu sistematski varirali u odnosu na RF_i iz perioda 1969-1970. Kaže se da dati posmatrački instrument (u konkretnom slučaju, PZT) iz godine u godinu reprodukuje iste sistematske gre[illegible] Instrumenti koji ispunjavaju taj uslov smatraju se kvalitetnim.

Sa stanovišta Matematičke statistike, dva uzo[illegible] dva podskupa) predstavljaju delove iste populacije.

Z A D A T A K

U Tablici 2 i na slici 1 stranice 233 i 234 data je veza izmedju mase $\mathcal{M}$ i apsolutnog sjaja (M_{bol} - bolometrijska zvezdana veličina) visuelnih dvojnih zvezda i to za komponentu A i komponentu B. Ovi podaci su uzeti iz knjige: STRAND K. A_A: BASIC ASTRONOMICAL DATA, THE UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS, 1963.

Ispitati da li za obe komponente važi ista relacija izmedju $\mathcal{M}$ i M_{bol} ili se radi o dve različite relacije.

Na slici 1 tačke se odnose na komponentu A, a krstići na komponentu B.

Uz pomoć slike 1 zaključujemo da $y=M_{bol}$ predstavlja linearnu funkciju $x=\log\mathcal{M}$ (aproksimativno):

$y = ax + b.$

Da bismo rešili postavljeni zadatak, prvo ćemo metodom najmanjih kvadrata odrediti a i b za data dva podskupa y_i (jedan se odnosi na komponentu A, drugi - na komponentu B), standardne devijacije ovih koeficijenata, a zatim ćemo primenom Fišerovog kriterijuma ustanoviti da li su razlike nepoznatih za dva podskupa slučajno različite od nule ili nisu.

Pošto su odstupanja M_{bol} B komponenata zvezda N^o 9 i N^o 10 relativno velika (što se vidi na slici 1) nećemo ih uzeti u obzir prilikom rešavanja zadatka koji se odnosi na komponente B.

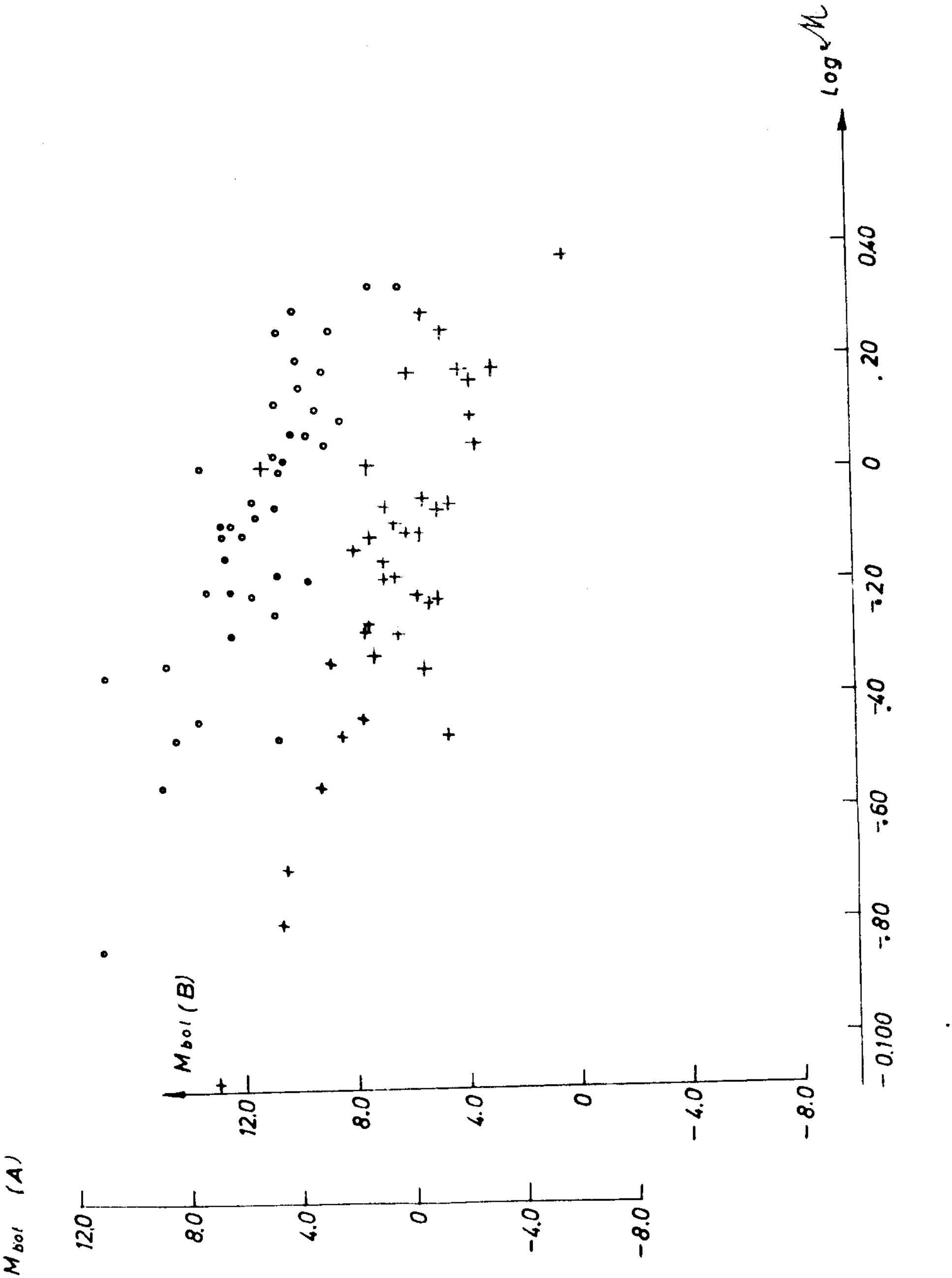
Normalne jednačine će biti:

$$[xx]\, a + [x]\, b - [xy] = 0$$

$$[x]\, a + n\, b - [y] = 0.$$

Računanje koeficijenata normalnih jednačina ćemo obaviti po šemi:

N^o	x_i	x_ix_i	y_i	x_iy_i	s_i	s_ix_i	ax_i	$\overline{y}_i$	$y_i-\overline{y}_i$
1	12	144	46	552	-28	-336	-9	37	9
2	-22	484	55	-1210	-76	1672	16	62	-7
3	-6	36	46	-276	-51	306	4	50	-4
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
Σ:	-382	32620	2166	-41846	-2502	74144			


Log M
M bol (B)
M bol (A)
0.40
.20
0
-.20
-.40
-.60
-.80
-0.100
12.0
8.0
4.0
0
-4.0
-8.0

T A B L I C A 2

Veza izmedju mase $\mathcal{M}$ i bolometrijske zvezdane veličine M_{bol} visuelnih dvojnih zvezda. M_{bol} je izraženo u desetim delovima zvezdane veličine.

N°	Ime po ADS/BD		log $\mathcal{M}$		M_{bol}	
	A	B	A	B	A	B
1	61	3062	0.12	0.28	46	53
2	520	395	- 22	- 22	55	56
3	671	Cas.	- 6	- 27	46	74
4	1865	A2329	- 44	- 44	75	76
5	-12°501	Cet	- 47	- 47	46	46
6	3093	Eri BC	- 36	- 71	108	104
7	3841	Aur	33	38	1	2
8	Ross614		- 85	-1.10	111	130
9	5423,Sirius		33	2	12	111
1o	6251,Procyon		25	- 19	26	126
11	6420	9 Pup	- 25	- 23	47	52
12	6650	Cnc AB	0	- 7	45	48
13	7114	U Ma BC	- 47	- 47	83	84
14	+42°1956	Kuiper	- 19	- 35	35	54
15	7284	3121	- 21	- 19	63	64
16	-39°3651	Vel	11	1o	31	36
17	8630	Vir	7	5	35	35
18	8804	Com	15	16	37	37
19	9031	1785	- 15	- 16	65	68
2o	-60°5483	Cen	2	- 5	43	54
21	9352	Hu 575	- 21	- 33	71	72
22	9413	Boo	- 8	- 14	54	69
23	9617	Grb	- 18	- 23	46	49
24	9716	0 298	- 11	- 11	58	60
25	9909	Sco AB	18	18	28	28
26	10075	2052	- 29	- 29	62	63
27	10157	Her	5	- 11	29	55
28	-8°4352	Kuiper	- 34	- 34	87	87
29	+45°2505	Kuiper	- 56	- 56	88	91
30	-34°11626	Melb 4	- 11	- 27	65	71
31	10598	2173	25	25	45	46
32	10660	26Dra	3	- 6	44	66
33	11046	70 Oph	- 5	- 18	55	68
34	11077	99 Her	7	- 16	40	68
35	11871	648	29	17	39	59
36	12889	2576	- 9	- 9	63	64
37	14773	Equ	20	18	39	40
38	14787	Cyg	9	- 6	22	48
39	-58°7893	283	1	1	73	73
40	15972	Kru 60	- 59	- 80	96	106
41	17175	85 Peg	-0.09	-0.12	52	73

Podaci koji su dati u gornjoj šemi odnose se na komponentu A.

Data šema je jasnija ako se ima u vidu i kontrola koeficijenata normalnih jednačina koja se sprovodi pomoću relacija:

$$[xx] + [x] - [xy] = [xs]$$

$$[x] + n - [y] = [s].$$

Pošto su gornje relacije zadovoljene, normalne jednačine su:

$$32620\,a - 382\,b = -41846$$

$$-382\,a + 41\,b = 2166\,.$$

Rešavanje ovih jednačina pomoću Kramerovih formula vrši se na sledeći način:

$$D = \begin{vmatrix} 32620 & -382 \\ -382 & 41 \end{vmatrix} = 1\,191\,496,$$

$$D_a = \begin{vmatrix} -41846 & -382 \\ 2166 & 41 \end{vmatrix} = -888\,274,$$

$$D_b = \begin{vmatrix} 32620 & -41846 \\ -382 & 2166 \end{vmatrix} = 54\,669\,748,$$

$$a = D_a/D = -0.746, \quad b = D_b/D = 45.9.$$

Prema tome, za komponentu A tražena relacija će biti:

$$M_{bol} = -0.746 \log \mathcal{M} + 45.9$$

Da nebi bilo zabune, skrećemo pažnju čitaoca da je M_{bol} izraženo u desetim delovima zvezdane veličine, a $\log \mathcal{M}$ u stotim delovima (jer smo ih tako izražavali u šemi koja je data) .

Kontrolne nepoznate ξ i η dobijamo ako u normalnim jednačinama $[xy]$ zamenimo sa $[xs]$, a $[y]$ sa $[s]$. Rezultati su sledeći:

$$D_\xi = \begin{vmatrix} 74144 & -382 \\ -2502 & 41 \end{vmatrix} = 2\,084\,140,$$

$$D_\eta = \begin{vmatrix} 32620 & 74144 \\ -382 & -2502 \end{vmatrix} = -53\,292\,232,$$

$\xi = D_\xi / D = 1.749, \quad \eta = D_\eta / D = -44.7.$

Kontrolne jednačine su: $\eta + b = 45.9 - 44.7 = 1.2$ i $\xi + a = 1.749 - 0.746 = 1.003$. Odstupanja desnih strana poslednjih jednačina od jedinice su posledica zaokrugljivanja. Možemo smatrati da smo dati sistem uslovnih jednačina tačno rešili.

Zbir kvadrata rezidua $\varepsilon_i = y_i - \bar{y}_i = y_i - ax_i - b$ iznosi:

$$\sum_i \varepsilon_i^2 = 6889,$$

pa je srednja kvadratska greška jednog "posmatranja" jednaka:

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{6889}{39}} = \pm 13.$$

Standardne devijacije koeficijenata dobijamo iz relacija:

$$\sigma_a^2 = \sigma_o^2 D_{11}/D = 169 \cdot 41 : 1\,191\,496 = 0.005\,815;$$

$\sigma_a = 0.076$ i $\sigma_b^2 = \sigma_o^2 D_{22}/D = 169 \cdot 32620 : 1\,191\,496 = 4.63;$
$\sigma_b = \pm 2.2.$

Na potpuno isti način za komponentu B dobijamo:

a) normalne jednačine:

$$46520\, a - 682\, b = -64687$$
$$-682\, a + 39\, b = 2429;$$

b) nepoznate:

$$a = -0.642$$
$$b = 51.1\ ;$$

c) standardne devijacije:

$$\sigma_o = \pm 13$$
$$\sigma_a = \pm 0.070$$
$$\sigma_b = \pm 2.4.$$

Kada smo izračunali a i b i njihove standardne devijacije postavlja se pitanje: da li su razlike $\Delta a = a(A) - a(B)$ i $\Delta b = b(A) - b(B)$ slučajno različite od nule ili nisu?

Ako sa $\sigma_{\Delta a}$ i $\sigma_{\Delta b}$ označimo standardne devijacije odgovarajućih razlika, na osnovi poznate relacije možemo pisati:

$$\sigma_{\Delta a} = \pm\sqrt{\sigma_a^2(A) + \sigma_a^2(B)} = \pm 0.103$$

$$\sigma_{\Delta b} = \pm\sqrt{\sigma_b^2(A) + \sigma_b^2(B)} = \pm 3.3.$$

Ako sa y_1 označimo prvu, a sa y_2 - drugu funkciju y, važiće sledeće relacije:

$$y_2 = -0.642\,x + 51.1,$$
$$y_1 = -0.746\,x + 45.9 \quad \text{i}$$

$$\Delta y = y_1 - y_2 = (-0.746+0.642)x + (45.9-51.1) = -0.104x + 5.2$$
$$\pm 0.103 \quad \pm 3.3$$

Rešenje postavljenog zadatka svodi se na ispitivanje koeficijenata poslednje jednačine u smislu da li su oni slučajno različiti od nule .

Na osnovi jednačine 3, paragrafa 19, a i b su dve slučajne promenljive koje imaju raspodele verovatnoće istoga tipa kao i $\varepsilon_i = y_i - \bar{y}_i$, jer su oni linearne funkcije "posmatranih" vrednosti funkcije y. Ako a i b imaju normalnu raspodelu, iz istog razloga će i Δa i Δb imati normalnu raspodelu.

Standardnu devijaciju razlike Δy odredjujemo iz relacije:

$$\sigma_o'^2 = \sigma_o^2(A) + \sigma_o^2(B) = 2\sigma_o^2 = 338; \quad \sigma_o' = \pm 18$$

Statistički parametar $\mathcal{F}$ (Fišerov kriterijum) ima sledeće vrednosti:

$$\mathcal{F}_{1,\nu} = \Delta a^2 / \sigma_o'^2 = 0.003 \quad \text{i}$$

$$\mathcal{F}'_{1,\nu} = \Delta b^2 / \sigma_o'^2 = 0.083.$$

Pošto je broj osnovnih podataka n=39, broj stepeni slobode $\nu = 39-2 = 37$. Sa verovatnoćom P=0.05, sa $\nu_1 = 1$ i $\nu_2 = 37$ u Tablici VIII nalazimo: $\mathcal{F}_{1,37} = 4.1$. Dakle, hipoteza da su Δa i

Δb slučajno različiti od nule je saglasna sa osnovnim podacima. Dakle, izmedju mase i apsolutnog sjaja visuelnih dvojnih zvezda postoji jedna jedinstvena relacija (jedna i za A, i za B komponentu). Za tu relaciju možemo usvojiti:

$$M_{bol} = - 0.694 \log \mathcal{M} + 48.5.$$

Koeficijenti poslednje jednačine predstavljaju srednje vrednosti za dva data podskupa.

26. ELEMENTARNA TEORIJA KORELACIJE. KOEFICIJENT KORELACIJE I KORELACIONI ODNOS.

Dve slučajne promenljive X i Y mogu da imaju izvestan broj zajedničkih uzroka, ali svaka od njih može biti odredjena još i drugim slučajnim faktorima. Zavisno od toga koliki je relativni udeo zajedničkih činilaca u formiranju svakog datog para rezultata (x_k, y_k) veza izmedju X i Y će biti manje ili više intenzivna.

Kada govorimo o parovima rezultata (x_k, y_k) imamo na umu da su oni u izvestnom smislu odgovarajući (korespondentni): odnose se na istu epohu posmatranja, imaju isti položaj u prostoru, dobijeni su pri jednoj vrednosti treće promenljive, itd.

U opštem slučaju, jednoj vrednosti X može da odgovara više vrednosti Y i obrnuto. Medjutim, radi jednostavnijeg izlaganja teorije korelacije mi ćemo tretirati samo parove (x_k, y_k), a iz primera koji ćemo navesti uverićemo se da izložena teorija važi i u opštem slučaju.

Ako zajednički faktori koji odredjuju kakav će biti ishod slučajnog dogadjaja imaju relativno značajan udeo u odnosu na druge, nezajedničke uzroke, X i Y neće biti uzajamno nezavisne čak i kad se pouzdano zna da izmedju njih ne postoji funkcionalna veza. Kaže se da X i Y predstavljaju dve <u>uzajamno korelisane</u> slučajne promenljive ili se kaže da izmedju X i Y postoji <u>korelaciona veza</u> ili <u>korelacija</u>.

Ako u jednom Dekartovom koordinatnom sistemu ucrtamo tačke $P_k(x_k, y_k)$ one će u slučaju nezavisnosti ravnomerno ispunjavati xOy ravan (slika 1), a u slučaju postojanja korelacione veze one će se kondenzovati oko neke linije (slika 2).

Kad smo govorili o posrednim merenjima, odstupanja tačaka od odredjenih linija (grafikona odgovarajućih funkcionalnih veza) bila su uzrokovana samo slučajnim greškama posmatranja. Da nije tih grešaka, jednoj vrednosti x_k bi odgovarala sasvim odredjena vrednost

y_k. U takvoj šemi uzajamne zavisnosti jedna promenljiva (naprimer, X) ne sadrži greške posmatranja ili su te greške zanemarljivo male. Drugim rečima, ona praktično nije slučajna promenljiva.

Medjutim, zavisnost može da postoji i izmedju slučajnih promenljivih. Odstupanja tačaka P_k od linije nisu posledica samo slučajnih grešaka prisutnih u x_k i y_k, već su ona u manjoj ili većoj meri uzrokovana i faktorima koji nisu zajednički. U tome se ogleda suštinska razlika izmedju funkcionalne i korelacione veze. U graničnom slučaju, kao što ćemo kasnije videti, funkcionalna veza predstavlja granični slučaj korelacione veze.

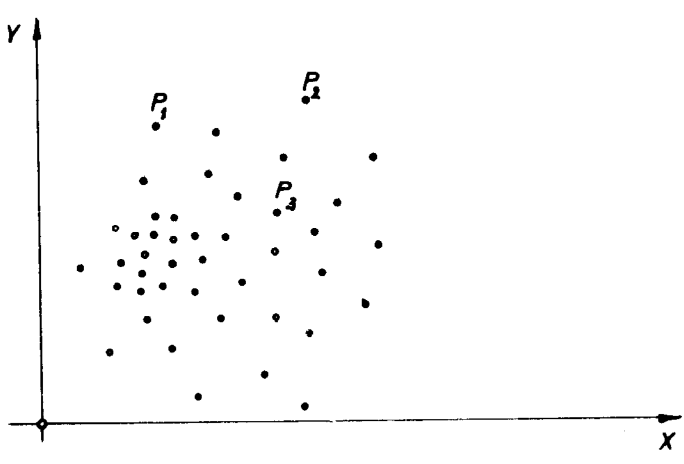
Posmatrajmo tzv. redukovane slučajne promenljive:

$$X' = \frac{X - m_x}{\sigma_x} \quad \text{i}$$

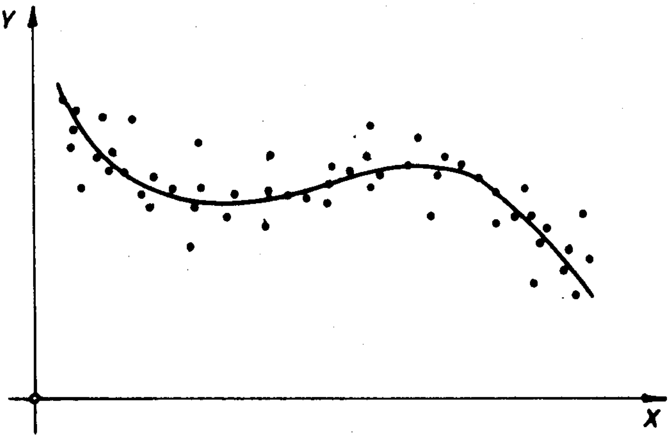
$$Y' = \frac{Y - m_y}{\sigma_y} ,$$

gde su m_x i m_y matematička očekivanja, a σ_x^2 i σ_y^2 - disperzije X i Y. Disperzije promenljivih X' i Y' su jedinične: $D(X') = D(Y') = 1$, a matematička očekivanja su jednaka nuli: $M(X') = M(Y') = 0$.

Na osnovu jedne teoreme paragrafa 14 možemo pisati:



Sl. 1.



Sl. 2.

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2K_{xy} \quad \text{i}$$
$$D(X' \pm Y') = 2(1 \pm \rho_{xy}) \qquad (1)$$

Korelacioni moment redukovanih centriranih slučajnih veličina zove se koeficijent korelacije ρ_{xy} .

Izmedju K_{xy} i ρ_{xy} postoji sledeća veza:

$$\rho_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

Vrednost korelacionog momenta K_{xy} zavisi od izbora jedinica u kojima se izražavaju promenljive. Medjutim, koeficijent korelacije je neimenovan broj i mnogo pogodniji za izražavanje stepena medjusobne zavisnosti X i Y.

Pošto su $D(X'+Y')$ i $D(X'-Y')$ pozitivni brojevi, $1+\rho_{xy}$ i $1-\rho_{xy}$ su, takodje, pozitivni. Drugim rečima, moraju biti zadovoljene nejednačine:

$$-1 \leq \rho_{xy} \leq 1 \,.$$

Kada je $\rho_{xy}=1$ ili $\rho_{xy}=-1$?

Iz relacije 1 sledi da pri uslovu: $\rho_{xy}=1$ mora biti ispunjen i uslov: $D(X'-Y')=0$. Polazeći od definicije disperzije, zaključujemo da $X'-Y'$ mora biti konstanta: $X'-Y'=C$. S druge strane, matematičko očekivanje $X'-Y'$ zadovoljava uslove: $M(X'-Y')=$ $=M(C)$ ili $M(X')-M(Y')=M(C)$. Pošto su $M(X')$ i $M(Y')$ jednaki nuli, sledi da je $C=0$. Dakle, iz uslova $\rho_{xy}=1$ sledi:

$$X'-Y'=0,$$

$$\frac{X-m_x}{\sigma_x}=\frac{Y-m_y}{\sigma_y},$$

$$Y=m_y+\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X-m_x) \qquad (2)$$

Znači, kada je $\rho_{xy}=1$ izmedju X i Y postoji linearna funk cionalna veza. Isti zaključak proizilazi kada se podje od uslova $\rho_{xy}=-1$.

Ako je $\rho_{xy}=0$ to ne predstavlja dokaz da su X i Y medjusobno nezavisni. Izmedju njih može postojati čak i funkcionalna veza. To se može proveriti ako se, naprimer, uzme $Y=aX^2$, izračunaju ekvidistantne vrednosti Y_i u nekom intervalu $(-L,L)$ i izračuna ρ_{xy}. Samo kad se à priori zna da izmedju X i Y može postojati linearna i nijedna druga veza, a utvrdi se da je ρ_{xy} veoma malo, sme se govoriti o tome da su X i Y medjusobno nezavisne. Drugim rečima, ρ_{xy} se koristi samo kao mera linearne zavisnosti. Jedno je sigurno: ako je ρ_{xy} blisko jedinici, X i Y nisu nezavisne.

Pretpostavimo da nam je postavljen zadatak da metodom najmanjih kvadrata odredimo koeficijente prave $Y=aX+b$:

$$S(a,b)=\sum_i(y_i-ax_i-b)^2=\min$$

Iz uslova:

$$\partial S/\partial a=0 \quad \text{i} \quad \partial S/\partial b=0$$

nalazimo koeficijente a i b:

$$a=\rho\,\sigma_y/\sigma_x$$

$$b=m_y-\rho\, m_x\,\sigma_y/\sigma_x$$

Računate vrednosti Y, koje ćemo označiti sa $\hat{Y}$, date su **jednačinom:**

$$\hat{Y} = m_y + \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X - m_x). \tag{3}$$

Na sličan način se pokazuje da je:

$$\hat{X} = m_x + \rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(Y - m_y). \tag{4}$$

U koordinatnom sistemu XOY poslednje dve jednačine pre- **dstavljaju jednačine pravih koje se seku u tačci** $P(m_x, m_y)$, a koje se **zovu <u>prave regresije</u>.**

Ako je $\rho_{xy} = \pm 1$ **prave regresije** će se poklopiti.

Pretpostavimo da imamo konkretan skup parova (x_k, y_k) **koji ne predstavlja celu grupu parova (u praksi** je ovaj slučaj najčešći **i da smo pomoću jednačina:**

$$\bar{x} = \sum p_i x_i / \sum p_i,$$

$$\bar{y} = \sum p_i' y_i / \sum p_i',$$

$$s_x^2 = \sum p_i (x_i - \bar{x})^2 / (n-1),$$

$$s_y^2 = \sum p_i' (y_i - \bar{y})^2 / (n-1), \quad \text{i}$$

$$\hat{\rho} = \frac{\sum P_i (x_i - x)(y_i - y)}{s_x s_y \sum P_i}$$

izračunali $\hat{\rho}$.

U gornjim jednačinama p_i i p_i' **su težine** x_i i y_i, a P_i te- **žine parova** (x_i, y_i).

Kada smo izračunali $\hat{\rho}$ prvo pitanje koje se nameće je: **da li dobijeni rezultat predstavlja slučajno** odstupanje od nule (zbog **ograničenog broja podataka) ili on objektivno** ukazuje na zavisnost **izmedju slučajnih promenljivih ?**

Raspodelu koeficijenta korelacije $\hat{\rho}$ izmedju promenlji- **vih koje se pokoravaju normalnom zakonu** ispitivao je Pirson. On je **pokazao da pri velikom broju parova** $\hat{\rho}$ sledi normalni zakon raspo- **dele sa matematičkim očekivanjem** $M(\hat{\rho})$ i disperzijom $\sigma^2(\hat{\rho})$:

$$M(\hat{\rho}) = \rho$$

$$\sigma^2(\hat{\rho}) = \frac{(1-\rho^2)^2}{n-1} \quad .$$

Ako n nije veliki broj, odstupanja od normalnog zakona nisu zanemarljiva. Medjutim, promenljiva:

$$\hat{t} = \frac{|\hat{\rho}|\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-\hat{\rho}^2}}$$

vrlo dobro sledi Studentov zakon raspodele sa n-2 stepena slobode, ali pod uslovom da važi hipoteza: $\rho = 0$. Ovu činjenicu ćemo iskoristiti na sledeći način:

Pretpostavimo da izmedju X i Y nema korelacije, tj. da je dobijeni rezultat slučajno različit od nule. Sa malom verovatnoćom p i sa n-2, kao argumentima, u Tablici V nalazimo odgovarajuće t_p. Ako je računato $\hat{t}$ veće od t_p to znači da je proizišao skoro nemoguć dogadjaj. Dakle, hipoteza $\rho = 0$ je dovela do takvog dogadjaja, pa je ona malo verovatna, odnosno, nesaglasna sa rezultatima eksperimenata. Drugim rečima, objektivnije je smatrati da $\hat{\rho}$ nije slučajno različito od nule, ili da je ono posledica uzajamne zavisnosti X i Y.

Ako izmedju slučajnih promenljivih postoji bilo kakva korelaciona veza (linearna ili nelinearna) intenzitet te veze može da se okarakteriše pomoću korelacionog odnosa - parametra koga je definisao Pirson:

$$\eta^2(Y/X) = 1 - \frac{\sigma^2(Y/X)}{\sigma^2(Y)}$$

ili:

$$\eta^2(X/Y) = 1 - \frac{\sigma^2(X/Y)}{\sigma^2(X)} \quad .$$

U poslednjim jednačinama $\sigma^2(Y/X)$ i $\sigma^2(X/Y)$ predstavljaju tzv uslovne disperzije.

Pretpostavimo da smo skup $S_x = \{x_k\}$ uredili po rastućim vrednostima i ceo interval na kome je zadato X podelili na izvestan broj podintervala koji se ne preklapaju, već se "dodiruju". Za svaki od tih podintervala možemo izračunati srednju vrednost $\bar{y}_k$, koju ćemo označiti sa $\bar{y}(x)$. Ukoliko postoji korelaciona veza izmedju X i Y, jasno je da će srednje vrednosti $\bar{y}_k$ u podskupovima skupa S_x imati sistematsku promenu u funkciji od x.

Disperzije $\sigma^2(Y/X)$ i $\sigma^2(Y)$su definiaane relacijama:

$$\sigma^2(Y/X) = M[Y-\bar{y}(X)]^2 \quad \text{i}$$

$$\sigma^2(Y) = M(Y-m_y)^2 .$$

Sa m_y označeno je matematičko očekivanje Y. Pri računanju η^2 umesto m_y koristi se opšta srednja vrednost:

$$\bar{y} = \frac{\sum p_i' y_i}{\sum p_i'}$$

Ako je $\sigma^2(Y/X) = \sigma^2(Y)$, korelacioni odnos $\eta^2(Y/X)$ je jednak nuli. Taj slučaj nastaje kad je:

$$M(Y-m_y)^2 = M[Y-\bar{y}(X)]^2$$

ili kada ocena disperzije, dobijena iz odstupanja $y_i - \bar{y}$, bude jednaka srednjoj vrednosti uslovnih disperzija. To znači da je:

$$\bar{y}(X) = \bar{y} = \text{const.}$$

U tom slučaju, kriva $y=\bar{y}(X)$, koja se zove kriva regresije, predstavlja horizontalnu pravu liniju.

Ako je $\sigma^2(Y/X) = 0$, $\eta^2(Y/X) = 1$. U ovom slučaju sve tačke $P_k(x_k, y_k)$ leže na jednoj liniji - na liniji $y=\bar{y}(X)$. Izmedju X i Y postoji funkcionalna veza.

Iz definicije korelacionog odnosa je jasno da u opštem slučaju $\eta^2(Y/X)$ nije jednako $\eta^2(X/Y)$.

Što se tiče raspodele $\hat{\eta}$ (računata vrednost η), ako X i Y imaju normalnu raspodelu i raspodela $\hat{\eta}$ je bliska normalnoj ili, bolje je reći, teži normalnoj kada se broj parova povećava. Matematičko očekivanje i disperzija poslednje promenljive su:

$$M(\hat{\eta}) = \eta \quad \text{i}$$

$$\sigma^2(\hat{\eta}) = \frac{(1-\hat{\eta}^2)^2}{n-1} .$$

Ako je broj n relativno mali (manji od 100) promenljiva:

$$\hat{t}_1 = \frac{|\hat{\eta}|\sqrt{n-2}}{1-\hat{\eta}^2}$$

brže teži svom graničnom slučaju - promenljivoj t koja ima Studentovu raspodelu. To znači da se statistička značajnost $\hat{t}_1$ može oceniti pomoću Tablice V i to na način na koji se ona ocenjuje kad je u pitanju $\hat{t}$.

Na kraju izlaganja osnova teorije korelacije napominjemo da u svim slučajevima korelacioni odnos ima apsolutnu vrednost veću od apsolutne vrednosti koeficijenta korelacije*.

---

* Smirnov i Dunin-Barkovskij: Kurs teoriji verojatnostej i matematičeskoj statistiki, Moskva, 1965, str. 323.

Z A D A T A K

U Tablici 1. data je raspodela ugla ekscentričnosti ψ =sine i nagiba putanjske ravni i 1729 prvih numerisanih malih planeta. Ovi podaci su pozajmljeni iz magistarskog rada Z. Kneževića koji je odbranjen na Prirodno-matematičkom fakultetu u Beogradu 1976. godine.

Date vrednosti i i ψ predstavljaju sredine dvostepenih intervala.

T A B L I C A 1.

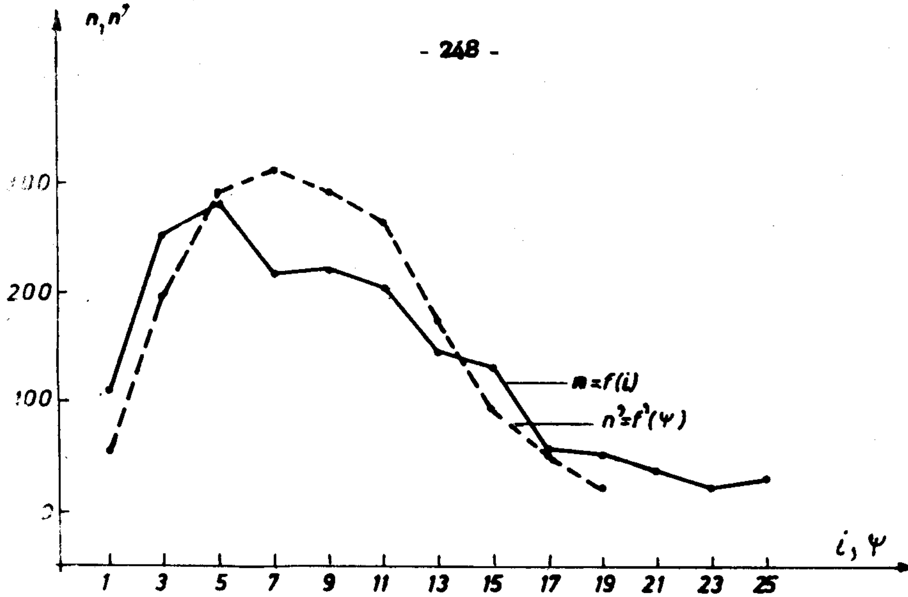
Raspodela i i ψ za 1729 asteroida.

ψ :	1°	3°	5°	7°	9°	11°	13°	15°	17°	19°	n
i											
1°	4	20	13	21	26	17	4	1	3	1	110
3	14	24	44	50	44	43	21	6	3	1	250
5	4	37	43	54	52	51	18	10	6	3	278
7	8	24	23	42	40	37	22	11	6	1	214
9	5	28	53	30	37	18	33	11	6	1	222
11	5	23	50	38	23	26	20	8	6	2	201
13	4	15	18	24	23	26	18	13	3	-	144
15	6	8	20	34	16	18	7	12	3	3	127
17	2	4	10	5	9	7	11	2	5	1	56
19	-	6	9	6	8	6	5	3	1	3	47
21	2	4	4	4	6	2	5	4	3	-	34
23	-	1	2	3	2	2	4	4	2	1	21
25°	-	2	-	-	4	7	2	7	2	1	25
n'	54	196	289	311	290	260	170	92	49	18	1729

Ispitati da li su i i ψ dve uzajamno nezavisne slučajne promenljive.

Našu analizu ćemo započeti posmatranjem grafika funkcija $n=f(i)$ i $n'=f'(\psi)$ (slika 3) , gde je n broj planetoida (asteroida) u datom intervalu i, a n'-broj planetoida u datom intervalu ψ .

Na osnovu grube informacije koju nam daje grafik zaključujemo da postoji sličnost date dve krive. Drugim rečima, raspodele promenljivih i i ψ su medjusobno slične. Medjutim, mi ne ispitujemo korelaciju izmedju n i n', već korelaciju izmedju argumenata tih funkcija. Medjusobna sličnost raspodela i i ψ i njihova



Sl. 3.

sličnost sa normalnom raspodelom su od značaja za rešenje ovoga zadatka iz jednog drugog razloga: u zadatku će se primenjivati formule koje imaju odredjeni smisao samo u slučajevima kada su raspodele normalne ili kada od normalne raspodele ne odstupaju drastično.

Tablica 1. predstavlja sažetu formu prikazivanja osnovnih podataka. Ona se može "razviti" i podaci predstaviti u obliku na koji smo više navikli: u obliku tablice sa dve kolone. U prvoj koloni bismo ispisivali i, a u drugoj odgovarajuće ψ. Tako bi tablica imala 2 kolone i 1729 vrsta (za i=1 bismo napisali 110 odgovarajućih vrednosti ψ i to: 4 puta $\psi=1$, 20 puta $\psi=3$, 13 puta $\psi=5, \ldots$) .

Uslovne srednje vrednosti se računaju kao, naprimer, za i=1:

$$\bar{\psi}_1 = \frac{1}{110}\,(4 \times 1 + 20 \times 3 + 13 \times 5 + 21 \times 7 + 26 \times 9 + 17 \times 11 + 4 \times 13 + 1 \times 15 + 3 \times 17 + 1 \times 19) = 7.58$$

Dakle, svako ψ se pomnoži odgovarajućom učestanošću n_{jk} koja je data u vrsti kojoj pripada dato i (vrsta j). Za računanje uslovnih srednjih vrednosti i $(\bar{i})$ svako i se množi odgovarajućim n_{kj} (iz kolone kojoj pripada ψ za koje se računa data uslovna srednja vrednost).

Na opisani način dobili smo sledeće rezultate:

i_k	S_k	$\bar{\psi}_k$	i_k	S_k	$\bar{\psi}_k$
1^o	834	7.58	15^o	1089	8.57
3	1958	7.83	17	534	9.54
5	2280	8.20	19	427	9.09
7	1828	8.54	21	314	9.24
9	1810	8.15	23	239	11.38
11	1603	7.98	25	303	12.12
13	1280	8.89			

ψ_k	S'_k	$\bar{i}_k$	ψ_k	S'_k	$\bar{i}_k$
1^o	440	8.15	11^o	2212	8.51
3	1604	8.18	13	1696	9.98
5	2553	8.83	15	1124	12.22
7	2597	8.35	17	551	11.24
9	2400	8.28	19	224	12.44

U gornjim tabelama S_k i S'_k su zbirovi $n_{jk}\psi$ i $n_{kj}i$.

Opšte srednje vrednosti izračunaćemo tako što ćemo sabrati sve S_k, odnosno, S'_k i podeliti ukupnim brojem asteroida:

$$\bar{\psi} = \frac{1}{1729}\,(834+1958+\ldots+303) = 8.386 \quad \text{i}$$

$$\bar{i} = \frac{1}{1729}\,(440+1604+\ldots+224) = 8.907.$$

Opšte disperzije σ^2 i σ'^2 i uslovne disperzije ε^2 i ε'^2 računaćemo po formulama:

$$(N-1)\sigma^2 = \sum_j\sum_k n_{jk}(\psi - \bar{\psi})^2 = \sum_j\sum_k n_{jk}\,\psi^2 - N\,\bar{\psi}^2 ,$$

$$(N-1)\,\sigma'^2 = \sum_k\sum_j n_{jk}\,(i-\bar{i})^2 = \sum_k\sum_j n_{jk}\, i^2 - N\,\bar{i}^2 ,$$

$$(n_j-1)\,\varepsilon_j^2 = \sum_k n_{jk}(\psi - \bar{\psi}_j)^2 = \sum_k n_{jk}\,\psi^2 - n_j\,\bar{\psi}_j^2 =$$

$$= R_j - n_j \bar{\psi}_j^2 \,,$$

$$(n_k-1)\,\varepsilon'^2_k = \sum_j n_{jk}(i-\bar{i}_k)^2 = \sum_j n_{jk}\,i^2 - n_k\,\bar{i}_k^2 =$$

$$= R_k - n_k\,\bar{i}_k^2 \,.$$

U gornjim jednačinama n_j predstavlja zbir n_{jk} u vrsti j, n_k - zbir n_{jk} u koloni k i N - zbir svih n_{jk} (N=1729).

Prvo ćemo računati zbirove R_k i R'_k, a potom ćemo njihovim sabiranjem dobiti zbirove koji figurišu u jednačinama za opšte disperzije.

Rezultati su sledeći:

i_j	R_j	n_j	$\bar{\psi}_j^2$	$R_j-n_j\bar{\psi}_j^2$	i_j	R_j	n_j	$\bar{\psi}_j^2$	$R_j-n_j.\bar{\psi}_j^2$
1°	7830	110	57.46	1509	15°	11551	127	73.44	2224
3	18674	250	61.31	3346	17	6224	56	91.01	1127
5	22550	278	67.24	3857	19	4839	47	82.63	955
7	18862	214	72.93	3255	21	3674	34	85.38	771
9	18374	222	66.42	3629	23	3125	21	129.50	406
11	15969	201	63.68	3169	25	4041	25	146.89	369
13	13608	144	79.03	2228					

ψ_k	R'_k	n_k	$\bar{i}_k^2$	$R'_k-n_k\bar{i}_k^2$	ψ_k	R'_k	n_k	$\bar{i}_k^2$	$R'_k-n_k\bar{i}_k^2$
1°	5118	54	66.42	1531	11°	27044	260	72.42	8215
3	18588	196	66.91	5474	13	21986	170	99.60	5054
5	29457	289	77.97	6924	15	17516	92	149.33	3778
7	29575	311	69.72	7892	17	8305	49	126.34	2114
9	28642	290	68.56	8760	19	3658	18	154.75	872

Za uslovne disperzije ε^2 i ε'^2 mogli bismo usvojiti srednje vrednosti ε_j^2, odnosno ε'^2_k, ali bismo morali da vodimo računa o činjenici da njihova tačnost nije jednaka. Drugim rečima, morali bismo u račun srednjih vrednosti uvesti težine. Da bismo to izbegli koristićemo jednačine:

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{N-p} \sum_{j=1}^{p} R_j - n_j \bar{\psi}_j^2 = \frac{1}{1729-13} \times 26845 = 15.64 \quad i$$

$$\varepsilon'^2 = \frac{1}{N-p'} \sum_{k=1}^{p'} R'_k - n_k \bar{i}_k^2 = \frac{1}{1729-10} \times 50614 = 29.44.$$

U poslednje dve tabele nalaze se i rezultati potrebni za računanje opštih disperzija. Sabiranjem R_j i R'_k dobijamo:

$$\sum_j R_j = 149321 \quad i$$

$$\sum_k R'_k = 189889.$$

Prema tome, opšte disperzije će biti:

$$\sigma^2 = \frac{1}{1728} (149321 - 1729 \times 8.386^2) = 16.0469 \quad i$$

$$\sigma'^2 = \frac{1}{1728} (189889 - 1729 \times 8.907^2) = 30.5089.$$

Račun korelacionog momenta K obavićemo pomoću relacije:

$$N \cdot K = \frac{1}{N} \sum_j \sum_k n_{jk} (\psi - \bar{\psi})(i - \bar{i}) = \sum_j \sum_k n_{jk} \psi \, i =$$
$$= Q - i \bar{\psi}.$$

Da bismo izračunali sumu Q potrebno je da se svako n_{jk} pomnoži odgovarajućim i_j i ψ_k (i iz vrste, a ψ iz kolone u čijem se preseku nalazi dato n_{jk}) i zatim saberu svi ti proizvodi. Zbog lakše kontrole računanja preporučujemo da se prvo izračunaju zbirovi pomenutih proizvoda bilo po vrstama, bilo po kolonama i posle toga oni saberu. Mi smo ih računali po vrstama i dobili smo sledeće rezultate:

i_j	Q_j	i_j	Q_j
1°	834	15°	16335
3	5874	17	9078
5	11400	19	8113
7	12796	21	6594
9	16290	23	5497
11	17633	25	7575
13	16640		

Iz poslednje jednačine i poslednje tabele sledi:

$$K = \frac{1}{1729}\,(134659 - 1729 \times 8.907 \times 8.386) = 3.188.$$

Koeficijent korelacije ρ i korelacioni odnosi $\eta(\psi/i)$ i $\eta(i/\psi)$ su jednaki:

$$\rho = \frac{K}{\sigma\sigma'} = \frac{3.188}{4.01 \times 5.52} = 0.144,$$

$$\eta(\psi/i) = \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{\sigma^2}} = \sqrt{1 - \frac{15.64}{16.05}} = 0.160 \quad \text{i}$$

$$\eta(i/\psi) = \sqrt{1 - \frac{\varepsilon'^2}{\sigma'^2}} = \sqrt{1 - \frac{29.44}{30.51}} = 0.187.$$

Iz gornjih rezultata vidimo da su zadovoljene poznate nejednakosti: $|\rho| < \eta(\psi/i)$ i $|\rho| < \eta(i/\psi)$

Kada se dobiju brojne vrednosti ρ ili η neophodno je izvršiti ispitivanje njihove statističke značajnosti. Ima dosta primera gde se slučajne promenljive smatraju uzajamno nezavisnim ako je ρ ili η manje od 0.5 ili se, pak, govori o "slaboj" korelaciji izmedju njih. Ovakve ocene "od oka" su neosnovane. Ako je broj poznatih ishoda veliki i disperzije male, vrednosti ρ ili η ne moraju biti veliki pa da objektivno odraze uzajamnu zavisnost slučajnih promenljivih.

Kao što smo rekli, za objektivnu ocenu statističke značajnosti ρ i η možemo koristiti Studentovu raspodelu:

$$\hat{t} = \frac{0.144\sqrt{1727}}{\sqrt{1 - 0.144^2}} = 6.047 ,$$

$$\hat{t}_1 = \frac{0.160\sqrt{1727}}{\sqrt{1 - 0.160^2}} = 6.824 \quad \text{za } \eta(\psi/i) \quad \text{i}$$

$$\hat{t}_1 = \frac{0.187\sqrt{1727}}{\sqrt{1 - 0.187^2}} = 8.053 \quad \text{za } \eta(i/\psi) \quad .$$

Sa verovatnoćom $P=0.05$ i brojem stepeni slobode $\nu=1727$ u Tablici V nalazimo $t_P=1.95996$. Pošto je: $\hat{t} > t_P$ i $\hat{t}_1 > t_P$, a verovatnoća takvih dogadjaja, računata pod pretpostavkom da su i i ψ uzajamno nezavisne slučajne promenljive, je svega 0.05, polazna hipoteza (nezavisnost i i ψ) je protivrečna osnovnim podacima. Drugim rečima, možemo smatrati da i i ψ nisu uzajamno nezavisne slučajne promenljive.

GLAVA IV

METODE FILTRIRANJA POSMATRANJA

27. OSNOVNE DEFINICIJE

Mnoge pojave koje astronomi posmatraju imaju periodični karakter (promene sjaja promenljivih zvezda, ciklusi Sunčeve aktivnosti, planetska kretanja oko zvezda i rotacije, precesija, nutacija itd.) pa je problem identifikacije i odredjivanja periodičnih komponenti iz posmatranja od izuzetno velike važnosti. Naprimer, periodične promene gravitacionog polja oko Zemlje, koje su posledice kretanja Meseca oko Zemlje i kretanja Zemlje oko Sunca, uzrokuju deformacije zemaljskog globusa i čitav spektar ubrzanja u rotaciji Zemlje. Odgovor Zemlje na dejstvo spoljašnje sile, odnosno, reakcija Zemlje, će se ogledati u spektru tih ubrzanja. Izgled spektra zavisi od unutrašnje strukture Zemlje kao tela. Posmatrajući rotaciju i razlažući ugaonu brzinu rotacije na komponente astronomi dolaze do informacija o fizičkim karakteristikama unutrašnjih slojeva planete.

Mnogobrojni drugi primeri, jednako kao i prethodni, ukazuju na osobitu važnost metoda razlaganja poliharmonijskih procesa - procesa koji sadrže komponente koje se mogu opisati sinusoidama.

Pretpostavimo da raspolažemo nizom ekvidistantnih vrednosti funkcije $y(x)$ zadate u obliku tablice:

$$y_{-r},\ y_{-r-1},\ldots,\ y_{-1},\ y_o,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_{r-1},\ y_r$$

$$x_{-r},\ x_{-r-1},\ \ldots,\ x_{-1},\ x_o,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_{r-1},\ x_r$$

i da funkcija $y(x)$ sadrži nepoznat broj članova oblika:

$$s_k(x) = a_k \sin\omega_k x + b_k \cos\omega_k x = A_k \sin(\omega_k x + \psi_k)\ ,$$

čije su amplitude, A_k, faze ψ_k i ugaone brzine ω_k takodje nepoznate. Članovi $s_k(x)$ nazivaju se elementarne sinusoide ili harmonijski članovi.

U brojnim radovima greške posmatranja y(x) su toliko velike da se grafičkim predstavljanjem rezultata i analizom grafikona može doći do pogrešnog zaključka o odsustvu harmonijskih članova i onda kada oni objektivno postoje. Medjutim, ako niz $\{y_i\}$ sadrži dovoljno veliki broj elemenata, kao što ćemo kasnije videti, postoji mogućnost medjusobne kompenzacije grešaka posmatranja i izdvajanja harmonijskih članova čije su amplitude za red veličine i više ispod nivoa grešaka posmatranja.

Funkcija y(x) može biti zadata i u obliku neprekidnog zapisa nekog registrujućeg aparata.

Pretpostavimo da funkcija y(x)sadrži samo harmonijske članove, čiji ćemo zbir označiti sa s(x), i greške u(x). Drugim rečima, y(x) ne sadrži (pored ostalih) sekularni član čija je pojava u rezultatima posmatranja vrlo česta.

U metodama filtriranja posmatranja za s(x) se koristi termin korisni signal, a za u(x) - smetnja ili šum. Jasno je da su ovi termini, kao i još neki koje ćemo koristiti u ovom paragrafu, pozajmljeni iz elektrotehnike.

Funkciju s(x) predstavljamo izrazom:

$$s(x) = \sum_{j=1}^{k} a_j \sin\omega_j x + b_j \cos\omega_j x \qquad (1)$$

Svaka elementarna sinusoida sadrži tri nepoznata parametra: a_j, b_j i ω_j. Prema tome, ukupan broj nepoznatih u jednačini 1 iznosi 3k. Kada bi k bilo poznato i kada bi u(x) bilo jednako nuli za svako x, za odredjivanje 3k nepoznatih parametara, u principu, bilo bi dovoljno 3k rezultata y_i. Jedinu teškoću moglo bi da predstavlja računanje ω_j, jer je očigledno da je s(x) transcedentna funkcija ω_j. Počev od Lagranža objavljen je niz radova u kojima se nude rešenja za gornji problem. Ta rešenja su dosta složena, ali to nije jedini razlog zbog kojega su korisnici tih metoda (praktičari) bili prinudjeni da traže rešenja u čijoj osnovi leži jedan drugi pristup. Uslov da je k poznato i uslov da je $u(x) \equiv 0$ ograničavaju primenu ovih metoda na relativno mali broj slučajeva.

Osnovna ideja novijih istraživanja harmonijskih članova sastoji se u tome da se $y(x)$ transformiše u neko $y^1(x)$ tako da se pojačaju amplitude jednih, a priguše amplitude drugih harmonijskih članova i šuma. Drugim rečima, cilj je da se postigne selektivna transformacija funkcije $y(x)$. Ovaj problem ne treba identifikovati sa problemom razvoja $s(x)$ u Furijeov red.

Potsetimo se da svako $y(x)$ koje u intervalu $x\in[a,b]$ zadovoljava Dirišleove uslove* (Dirichelet P.G.L., nemački matematičar francuskog porekla) može da se razvije u Furijeov red sastavljen od harmonijskih članova čije su periode celobrojni delovi intervala $[a,b]$ koji se zove osnovna perioda.

Medjutim, kada rešavamo problem identifikacije harmonijskih članova, osnovna perioda, u opštem slučaju, nema nikakvu fizičku vezu sa periodama komponenata $y(x)$, niti su, pak, njihove periode u nekakvoj medjusobnoj vezi.

Svaka selektivna transformacija predstavlja filter kroz koji se propušta signal $y(x)$ (ulazni signal) da bi se dobila transformisana funkcija $y^1(x)$ (izlazni signal).

Predloženo je mnogo metoda filtriranja posmatranja, ali sve one mogu da se svrstaju u dve klase: linearne i nelinearne transformacije.

Različite transformacije su različito efikasne. Cilj svakog istraživača je da za odredjenu vrstu istraživanja poliharmonijske funkcije nadje najoptimalniju transformaciju.

---

* Dirišleovi uslovi su: 1). $y(x)$ je neprekidna u intervalu $[a,b]$ ili ima konačan broj prekida; 2). u svakoj tački prekida $x=c$, $y(x)$ ima dve konačne vrednosti: y_1 kada $x\to c_+$ i y_2 kada $x\to c_-$; 3). interval $[a,b]$ može da se podeli na podintervale u kojima je $y(x)$ monotona.

Pretpostavimo da rešavamo zadatak koji se sastoji u izolaciji odredjenog harmonijskog člana: $s_j(x) = A_j \sin(\omega_j x + \psi_j)$. Ova sinusoida predstavlja korisni signal, a sve ostalo su smetnje. Najoptimalnija transformacija je ona koja u transformisanoj funkciji ostavlja samo korisni signal. Kao mera u kojoj je postignuto ovo idealno rešenje služi srednja kvadratska greška ε koja se definiše na sledeći način:

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} [y^1(x) - s_j(x)]^2 \, dx .$$

Najoptimalnijom transformacijom se smatra ona za koju je ε^2 = minimum.

Pretpostavlja se da je $y(x)$ integrabilna u intervalu $[-L, L]$.

U slučaju diskretno zadate funkcije, integracija se zamenjuje sabiranjem.

28. ELEMENTARNE TRANSFORMACIJE

U skupu $S_y=\{y_i\}$ od 2r+1 elemenata, koji su uredjeni po rastućim vrednostima (ovakve skupove ćemo nazivati i imenima: serija i niz), uočimo bilo koje y_s ili, radi jednostavnijeg pisanja formula koje ćemo izvesti, uočimo neko y_o i m vrednosti levo i desno od njega. Taj deo niza od 2m+1 članova je:

$$y_{-m}, y_{-m-1}, \ldots, y_{-1}, y_o, y_1, \ldots, y_{m-1}, y_m.$$

Neka je R_m definisano jednačinom:

$$R_m=k_o y_o+k_1(y_{-1}+y_1)+k_2(y_{-2}+y_2)+\ldots+k_m(y_{-m}+y_m)$$

ili:

$$R_m=k_o Y_o+k_1 Y_1+k_2 Y_2+\ldots+k_m Y_m, \qquad (1)$$

gde je: $Y_i=y_{-i}+y_i$, a koeficijenti k_i izabrani tako da R_m sadrži komponente iz uskog dijapazona perioda $T_i=\frac{2\pi}{\omega_i}$ ili, u idealnom slučaju, sadrži samo onu komponentu koju želimo da izolujemo.

Ako za svako y_i ($i+m \leq r$) po formuli 1 izračunamo odgovarajuće R_m dobićemo jedan drugi niz brojeva koji je nastao linearnom transformacijom prvoga niza.

S obzirom na to da R_m sadrži sabirke od y_{-m} do y_m, kaže se da je R_m linearna transformacija reda m.

Da bismo istakli selektivnost gornje transformacije uzećemo da je šum $u(x)\equiv 0$ i da je:

$$y(x)=a\sin(\omega x+\psi)+a'\sin(\omega' x+\psi')+a''\sin(\omega'' x+\psi'')+\ldots \qquad (2)$$

Zbir ordinata $y(x)$ koje odgovaraju apscisama x_o-m i x_o+m je:

$$y_m+y_{-m}=2a\cos\omega m\,\sin(\omega x_o+\psi)+2a'\cos\omega' m\,\sin(\omega' x_o+\psi')+\ldots \qquad (3)$$

Ako uporedo sa poslednjom jednačinom posmatramo i jednačinu:

$$y_o=a\sin(\omega x_o+\psi)+a'\sin(\omega' x_o+\psi')+\ldots,$$

koja izražava odgovarajuću vrednost netransformisane funkcije, uočićemo da u transformisanom nizu 3 faze elementarnih sinusoida ostaju nepromenjene, a amplitude su redukovane za različite iznose (zavisno od ω):

$$\alpha_m=2\cos\omega m,\quad \alpha'_m=2\cos\omega' m,\quad \alpha''_m=2\cos\omega'' m,\dots \qquad (4)$$

Zbir $y_{-m}+y_m$ može da se predstavi i u obliku:

$$Y_m=y_{-m}+y_m=\alpha_m a\sin(\omega x_o+\psi)+\alpha'_m a'\sin(\omega' x_o+\psi')+\dots\dots \qquad (3)'$$

Ako broju m dajemo vrednosti: 1,2,3,... , pomoću jednačine 3 ' dobićemo sve članove koji se nalaze s desne strane jednačine 1 . U tom slučaju, grupisanjem članova sa istim argumentom pod sinusom, izraz za R_m postaje:

$$R_m=(k_o+k_1\alpha_1,+\dots+k_m\alpha_m)\,a\sin(\omega x_o+\psi)+$$

$$+(k_o+k_1\alpha'_1+\dots\dots+k_m\alpha'_m)\,a'\sin(\omega' x_o+\psi')+\dots \qquad (5)$$

Iz jednačine 5 sledi da su amplitude transformisanih sinusoida jednake proizvodima amplituda netransformisanih sinusoida i brojeva:

$$\rho_m=k_o+k_1\alpha_1+\dots+k_m\alpha_m\,,$$

$$\rho'_m=k_o+k_1\alpha'_1+\dots+k_m\alpha'_m\,,\ \dots\dots$$

koji se zovu amplitudni multiplikatori.

Transformacije tipa 3 su selektivne jer amplitudni multiplikatori: $\alpha_m, \alpha'_m, \dots$ nisu medjusobno jednaki, već zavise od ugaone brzine: ω, ω', ...

Ako u pretposlednjoj jednačini umesto α_j stavimo $2\cos j\omega$ dobićemo:

$$\rho_m=k_o+2k_1\cos\omega+2k_2\cos2\omega+2k_3\cos3\omega+\dots+2k_m\cos m\omega=$$

$$=k_o+2\sum_{s=1}^{m}k_s\cos(s\omega). \qquad (6)$$

Formalno gledajući, poslednja jednačina predstavlja razvoj parne funkcije ρ_m u Furijeov red kod koga su svi članovi ranga višeg od m jednaki nuli. Ako skup multiplikatora: $\{\rho_m, \rho'_m, \ldots\}$ (koji se često naziva <u>filter</u>) predstavlja diskretno zadatu parnu funkciju $\rho = \rho(\omega)$ koja ispunjava Dirišleove uslove, iz teorije Furijeovih redova sledi:

$$k_s = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(s\omega)\, d\omega\,. \tag{7}$$

Prema tome, dati filter je definisan ako je data funkcija $\rho = \rho(\omega)$ (<u>funkcija selektivnosti</u>). Kriva linija koja predstavlja $\rho = \rho(\omega)$ zove se <u>kriva selektivnosti</u>.

U ovome paragrafu osvrnućemo se samo na <u>elementarne transformacije</u> ili tzv. <u>proste kombinacije ordinata</u> - transformacije tipa 1 u kojima koeficijenti: $k_o, k_1, \ldots, k_m$ imaju samo jednu od sledeće tri vrednosti: $-1, 0, 1$. Najprostije elementarne transformacije su one u kojima se y_i zamenjuje zbirom ili razlikom samo dve ordinate simetrične (po indeksima) u odnosu na y_i. Tako se, naprimer, y_o zamenjuje sa:

$$Y_m = y_m + y_{-m} \tag{8}$$

ili:

$$Z_m = \pm\, y_m - y_{-m}\,, \quad (m=1,2,\ldots) \tag{9}$$

Amplitudni multiplikatori transformacije Y_m su definisani relacijama (vidi jednačinu 4):

$$\alpha_m = 2\cos m\,\frac{2\pi}{n}, \quad \alpha'_m = 2\cos m\frac{2\pi}{n'}\,, \ldots \tag{10}$$

Periode n, n', n'' ,.... odgovaraju ugaonim brzinama $\omega, \omega', \omega'', \ldots$

Za transformaciju Z_m se može lako dokazati da se faze transformisanih harmonika razlikuju od faza netransformisanih za $\frac{\pi}{2}$ i da su amplitudni multiplikatori jednaki:

$$\beta_m = 2\sin\frac{2m\pi}{n}\,, \quad \beta'_m = 2\sin\frac{2m\pi}{n'}\,, \ldots \tag{11}$$

Na slikama* 1 i 2 grafički su predstavljeni amplitudni multiplikatori α_i i β_i za i=1,3,5,7 i 9 u funkciji periode n. Vidi se da svako dato α_i, odnosno, β_i varira sa promenom n prolazeći maksimum, nule, minimum, itd.

Na slici 3 data je kriva C i krive: $Y_1, Y_2, \ldots, Y_6$ koje predstavljaju krivu C posle transformacija: $Y_1, Y_2, \ldots$ Ova slika veoma ilustrativno pokazuje selektivna svojstva prostih transformacija i promenu tih svojstava sa promenom reda transformacije m.

U astronomiji, geofizici i drugim naukama često se, osim pomenutih, koriste i transformacije koje predstavljaju zbirove prostih transformacija sabiranja Y_m ili oduzimanja Z_m. Od njih ćemb pomenuti samo dve osnovne: transformaciju s_m i transformaciju T_m. Prva je definisana izrazom:

$$s_m = y_{-m} + y_{-m+1} + \ldots + y_o + \ldots + y_{m-1} + y_m = y_o + Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_m . \quad (12)$$

Amplitudni multiplikatori transformacije s_m su definisani relacijom**:

$$\sigma_m = 1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m = \frac{\sin \frac{2m+1}{n}\pi}{\sin \frac{\pi}{n}} \quad (13)$$

Iz poslednje jednačine sledi da je $\sigma_m = 0$ za svako $n = \frac{2m+1}{K}$ (K je ceo broj), pod uslovom da je istovremeno $\sin \frac{\pi}{n} \neq 0$. To znači da je za svaku periodu n koja je celobrojni deo intervala 2m+1 amplitudni multiplikator σ_m jednak nuli (pod uslovom: $\sin \frac{\pi}{n} \neq 0$).

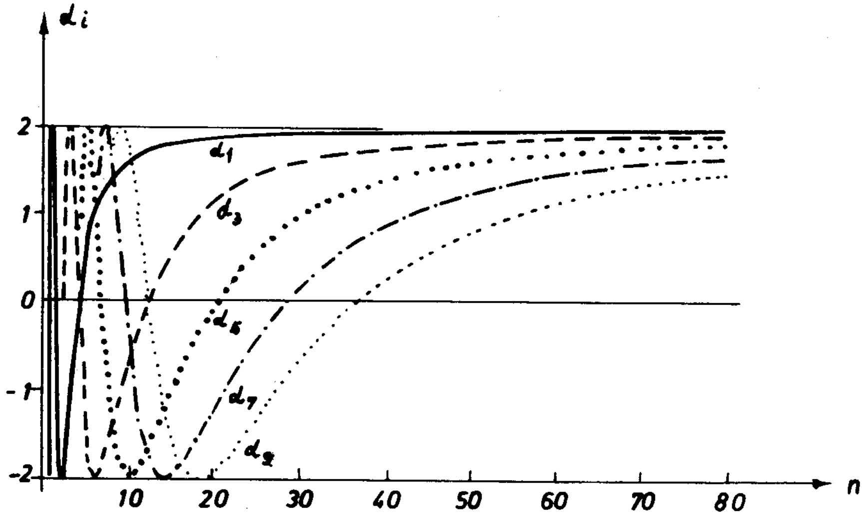
Diferenciranjem σ_m po promenljivoj n i izjednačavanjem prvog izvoda sa nulom dolazimo do sledećeg izraza koji služi za odredjivanje apscisa ekstremuma funkcije σ_m:

$$\frac{m \sin m{+}1 \, \frac{2\pi}{n} - (m+1) \sin m \, \frac{2\pi}{n}}{\sin^2 \frac{\pi}{n}} = 0 \quad (14)$$

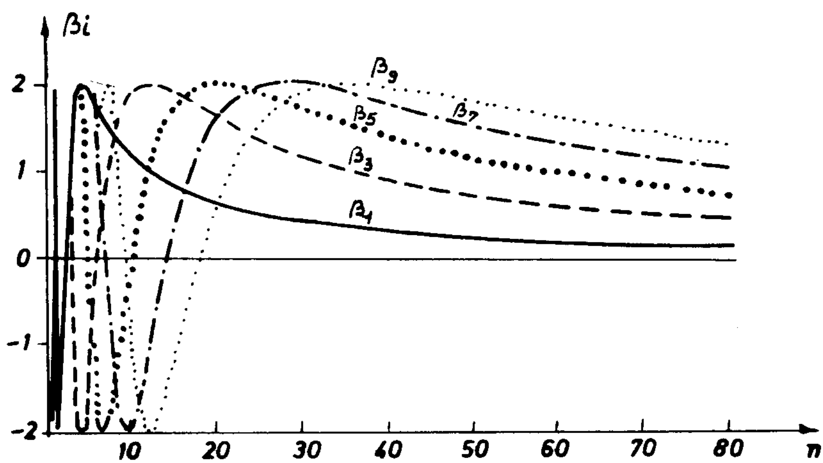
---

* Slike 1-7 u ovom, slike 1-5 i Tablica 1 u narednom paragrafu pozajmljeni su iz knjige: H. et Y. Labrouste: ANALYSE DES GRAPHIQUES REZULTANT DE LA SUPERPOSITION DE SINUSOIDES, Paris, 1943.

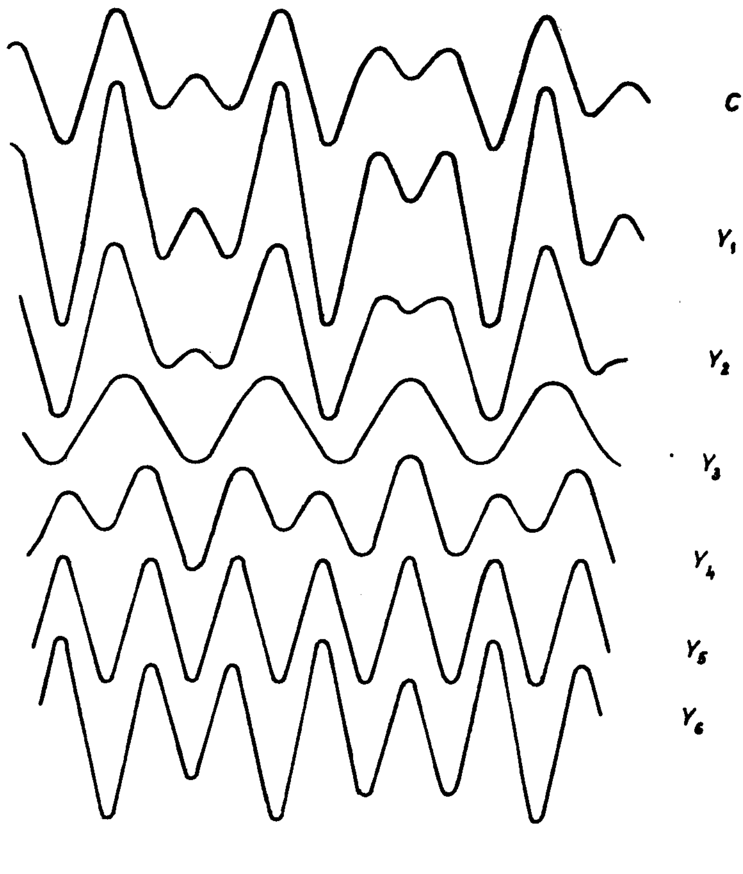
** Do ove relacije dolazi se lako ako se ima u vidu da je: $1 + {}_1 + {}_2 + \ldots + {}_m = 1 + 2\cos \quad + \cos 2 \quad + \ldots + \cos m$ i da izraz u zagradi predstavlja realni deo progresije: $Q_m = e^{i} + e^{2i} + \ldots + e^{mi}$.


αi
2
1
0
-1
-2
α1
α3
α5
α7
α9
10
20
30
40
50
60
70
80
n

Sl. 1.


βi
2
1
0
-1
-2
β9
β7
β5
β3
β1
10
20
30
40
50
60
70
80
n

Sl. 2.



Sl. 3.

Na slici 4 grafički je predstavljena funkcija σ_5. Uz pomoć ovog grafikona vidimo da kombinacije tipa s_m pojačavaju dugoperiodične komponente (sa periodama $n \geqslant 2m+1$) više nego kratkoperiodične (sa periodama izmedju $n=2$ i $n=2m+1$).

Od transformacija oduzimanja navešćemo takodje samo najosnovniju:

$$T_m = Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots + Z_m . \qquad (15)$$

Amplitudni multiplikatori ove transformacije τ_m su definisani relacijom:

$$\tau_m = 2\sin\frac{2\pi}{n} + 2\sin\frac{4\pi}{n} + \dots + 2\sin\frac{2m\pi}{n} =$$

$$= 2\,\frac{\sin(m+1)\frac{\pi}{n}\ \sin m\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}} . \qquad (16)$$

Funkcija τ_m ima nule u tačkama $n=m/K$ i $n=(m+1)/K$ ($K=1,2,3,\dots$). Apscise ekstremuma su odredjene relacijama:

$$(m+1)\cos\frac{2m\pi}{n} = 1 + m\cos\frac{2(m+1)\pi}{n} \quad \text{i}$$

$$\sin\frac{\pi}{n} \neq 0.$$

Na slici 5 grafički je predstavljena funkcija τ_5.

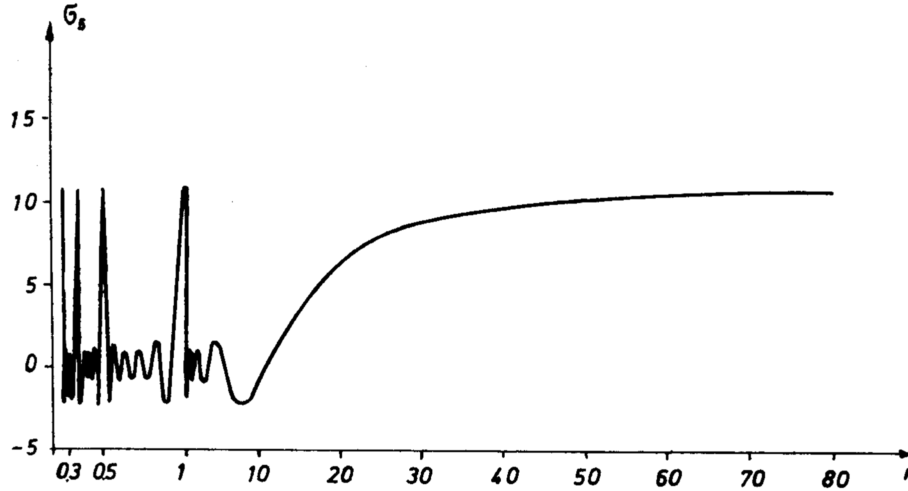
Transformacije tipa s_m i T_m predstavljaju zbirove uzastopnih ordinata (transformacije bez koraka ili transformacije bez razmaka) . Pored ovakvih transformacija, poseban interes izazivaju transformacije koje odgovaraju s_m i T_m, ali sa proizvoljnim razmakom ordinata koje se sabiraju. Te transformacije su:

$$(s_m)_{N/2} = y_o - Y_{N/2} + Y_{2N/2} - \dots + (-1)^m Y_{mN/2} \quad \text{i} \qquad (17)$$

$$(T_m)_{N/4} = Z_{N/4} - Z_{3N/4} + Z_{5N/4} - \dots \pm Z_{mN/4} . \qquad (18)$$

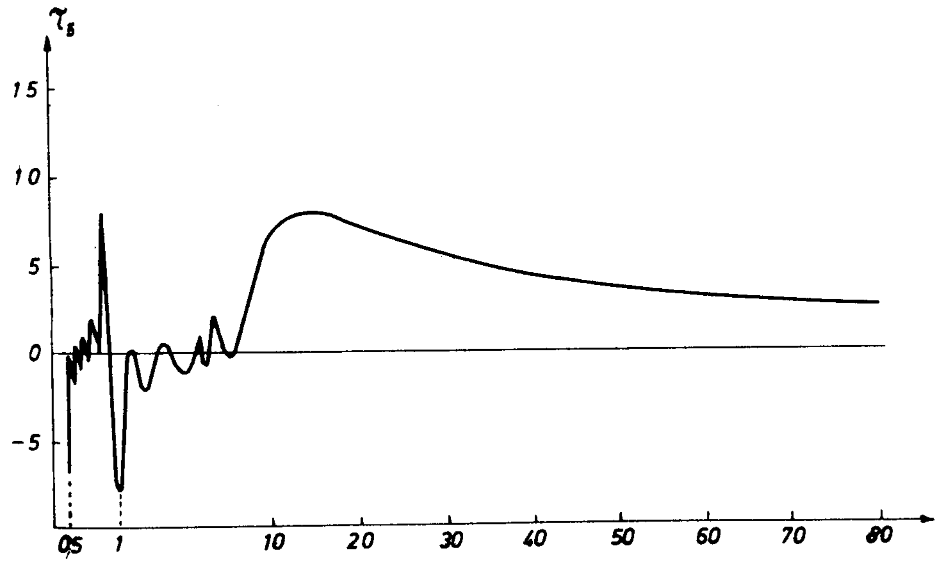
Ako je naprimer $m=5$ i $N=8$, $(T_5)_2 = Z_2 - Z_6 + Z_{10} = (y_2 - y_{-2}) - (y_6 - y_{-6}) + (y_{10} - y_{-10})$.

Amplitudni multiplikatori za poslednje dve transformacije se računaju po formulama:



σ_s
15
10
5
0
-5
0,3
0,5
1
10
20
30
40
50
60
70
80
n

Sl. 4.



τ_s
15
10
5
0
-5
0,5
1
10
20
30
40
50
60
70
80
n

Sl. 5.

$$(\sigma_m)_{\frac{N}{2}} = \pm \frac{\cos(2m+1)\frac{N\pi}{2n}}{\cos\frac{N\pi}{2n}} \quad \text{i} \tag{19}$$

$$(\tau_m)_{\frac{N}{4}} = \pm \frac{\sin(m+1)\frac{N\pi}{2n}}{\cos\frac{N\pi}{2n}} \quad . \tag{20}$$

Ako je m paran broj, u izrazu za $(\sigma_m)_{N/2}$ se uzima znak +, a znak - ako je m neparan broj. U izrazu za $(\tau_m)_{N/4}$ znak + odgovara $m=4m'+1$, a znak - odgovara $m=4m'-1$, gde je m' proizvoljno izabrani ceo broj.

Na slikama 6 i 7 predstavljene su krive selektivnosti za poslednje dve transformacije.

Nule funkcije $(\sigma_m)_{N/2}$ nalaze se iz uslova:

$$n = \frac{(2m+1)N}{2K+1} \quad \text{i}$$

$$n \neq \frac{N}{2K+1} \quad ,$$

gde je $K=0,1,2,\ldots$

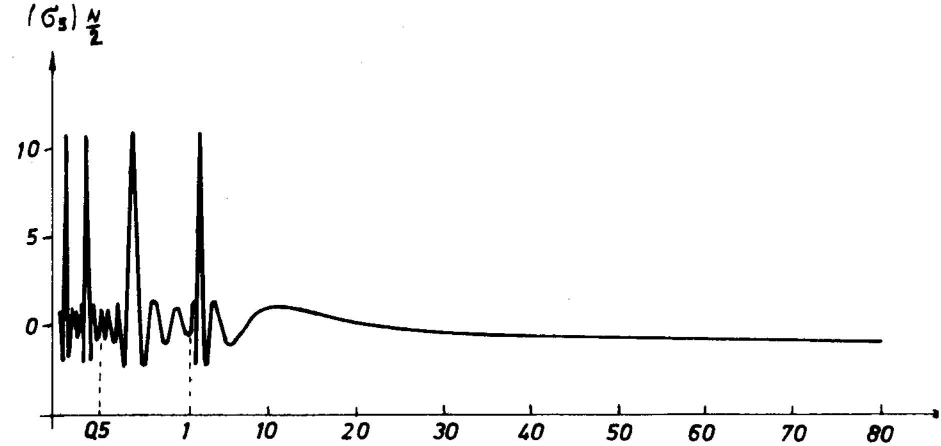
Apscise primarnih ekstremuma (veliki ekstremumi na slici 6) su odredjene jednačinom:

$$n = \frac{N}{2K+1}$$

Njihova amplituda iznosi $2m+1$. Izmedju dva primarna nalazi se $2m-1$ sekundarnih ekstremuma čije se amplitude menjaju sa promenom n. Najmanji medju njima odgovaraju $n=\infty$ i n jednako parnim podharmonikama N $(n=N/2K)$. Njihove amplitude su +1 ili -1, zavisno od toga da li je m paran ili neparan broj.

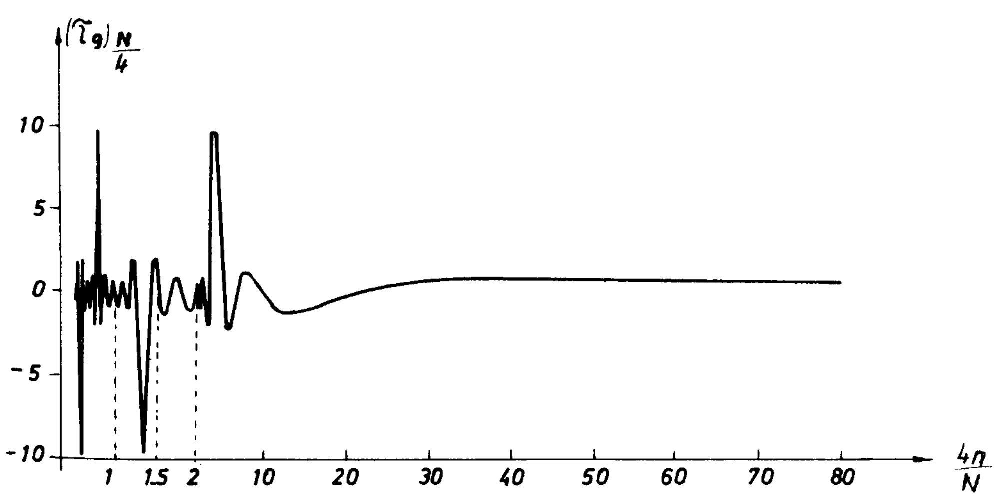
Transformacija $(s_m)_{N/2}$, kao što vidimo iz gornje analize, omogućuje da se znatno pojača harmonijski član čija je perioda unapred zadata i iznosi $n=N$ i da se pojačaju neparne podharmonike ovoga člana.

Što se tiče transformacije $(T_m)_{N/4}$, njena osnovna oso-



$(\sigma_s)\frac{N}{2}$
10
5
0
Q5
1
10
20
30
40
50
60
70
80

Sl. 6.



$(\tau_g)\frac{N}{4}$
10
5
0
-5
-10
1
1.5
2
10
20
30
40
50
60
70
80
$\frac{4n}{N}$

Sl. 7.

bina je analogna osobini transformacije $(s_m)_{N/2}$: najviše pojačava harmonijski član čije je $n=N$ i neparne podharmonike ovoga člana.

Nule funkcije $(\tau_m)_{N/4}$ se odredjuju iz relacija:

$$n = \frac{(m+1)N}{2K} \quad \text{i}$$

$$n = \infty .$$

Elementarne transformacije, kao što se može zaključiti iz prethodne analize krivih selektivnosti, ne pružaju uvek mogućnost izolacije harmonijskih članova iz jednog uskog dijapazona frekvencija. Njima se prigušuju jedni, ali pojačavaju drugi harmonijski članovi koji nisu baš u najneposrednijoj okolini datoga člana.

Višestruke (složene) transformacije - transformacije transformisanih nizova - pružaju znatno šire mogućnosti rešavanja problema izolacije jednog datog člana ili članova iz date uske zone frekvencija. Pogodnim izborom elementarnih transformacija može se dobiti takav filter koji će propustiti samo korisni signal, a ostale signale i šum prigušiti do te mere da se mogu zanemariti.

29. VIŠESTRUKE (SLOŽENE) TRANSFORMACIJE

Prema osobinama krivih selektivnosti višestruke transformacije mogu se svrstati u tri klase:

klasa I: transformacije za identifikaciju dugoperiodičnih komponenti;

klasa II: transformacije za identifikaciju harmonijskih članova kratkih i srednjih perioda;

klasa III: transformacije za identifikaciju sasvim odredjenih harmonijskih članova i njihovih podharmonika. Odgovarajuće krive selektivnosti sadrže seriju oštrih ekstremuma (pikova) čije su apscise celobrojni delovi periode $n=N$.

Višestruke transformacije ćemo označavati simboličkim proizvodima, jer se lako dokazuje da je amplitudni multiplikator ponovljene transformacije jednak proizvodu amplitudnih multiplikatora elementarnih transformacija.

KLASA I :

Ako posmatramo krive selektivnosti koje su u prethodnom paragrafu predstavljene na slikama 1 i 4 vidimo da se jedan maksimum nalazi u beskonačnosti i to nezavisno od toga koliko je m, dok položaj ostalih ekstremuma zavisi od m. Ova činjenica omogućuje takvu superpoziciju elementarnih krivih selektivnosti kojom se prigušuju svi ekstremumi osim onog koji se nalazi u beskonačnosti.

Na niz $\{y_i\}$ primenjuje se transformacija Y_m i dobija novi niz brojeva koje ćemo takodje označiti sa Y_m, na niz Y_m se primenjuje nova transformacija Y_p, itd., da bi se na kraju dobio niz u kome su prigućeni svi harmonijski članovi osim onog čije je $n=\infty$.

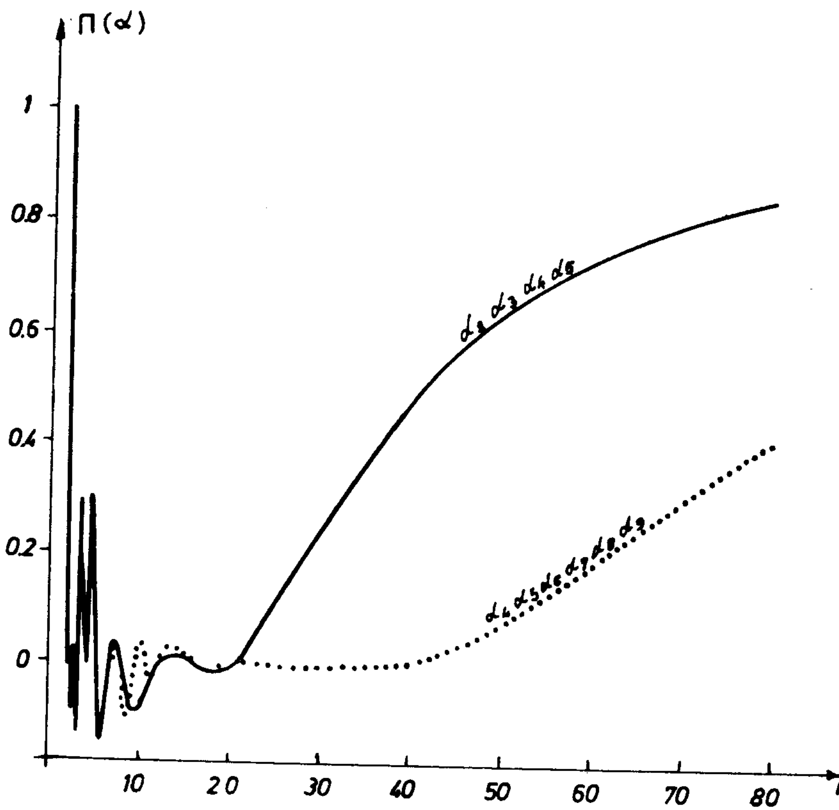
Gornji skup operacija zapisaćemo u obliku:

$$\Pi(Y) = Y_m Y_p \dots Y_r \,. \qquad (1)$$

Čitaoc može lako videti da je amplitudni multiplikator transformacije $\Pi(Y)$ jednak:

$$\Pi(\alpha) = \alpha_m \, \alpha_p \, \dots \, \alpha_r \qquad (2)$$

Na slici 1 predstavljene su dve krive tipa $\Pi(\alpha)$.



Sl. 1.

Prilikom izbora transformacije $\Pi(Y)$ osnovni problem predstavlja odredjivanje brojeva m, p, ... r takvih da se u domenu kratkih perioda priguše svi harmonijski članovi.

Ako je $m < p \ \dots \ < r$, smatra se da je granica perioda od koje su komponente značajno pojačane $n_1=4r$.

Da bi se prigušili svi članovi sa periodama $n_i < n_1$ potrebno je da nule funkcije $\Pi(\alpha)$ budu što brojnije (rang transformacije što viši) i što ravnomernije rasporedjene u intervalu $n_i < n_1$ kako funkcija selektivnosti nebi dostigla veću vrednost izmedju dve uzastopne nule.

$\Pi(\alpha)$ je nula ako je zadovoljen bilo koji od uslova:

$$n = \frac{4m}{2K+1}, \quad n = \frac{4p}{2K+1}, \ \ldots, \ n = \frac{4r}{2K+1} .$$

Tehnika računanja je sledeća: fiksira se najveći red transformacije - broj r - tako da bude $r=n_1/4$, a zatim se računaju ostali celi brojevi m, p, ... koji zadovoljavaju nejednačine:

a) $\frac{r}{2} \leq m \leq r-1$ za $\Pi(Y)=Y_m Y_r$,

b) $\frac{3r}{7} \leq m \leq p-1, \frac{3r}{5} \leq p \leq r-1$ za $\Pi(Y)=Y_m Y_p Y_r$,

c) $\frac{2r}{5} \leq m \leq p-1, \frac{r}{2} \leq p \leq q-1, \frac{2r}{3} \leq q \leq r-1$ za $\Pi(Y)=Y_m Y_p Y_q Y_r$

Poslednje nejednačine rezultiraju iz analize krivih α_m.

U cilju pojačanja dugoperiodičnih signala, osim transformacija $\Pi(Y)$, koriste se i transformacije tipa:

$$\Pi(s) = s_m s_p \ldots s_r \qquad (3)$$

čije funkcije selektivnosti imaju oblik:

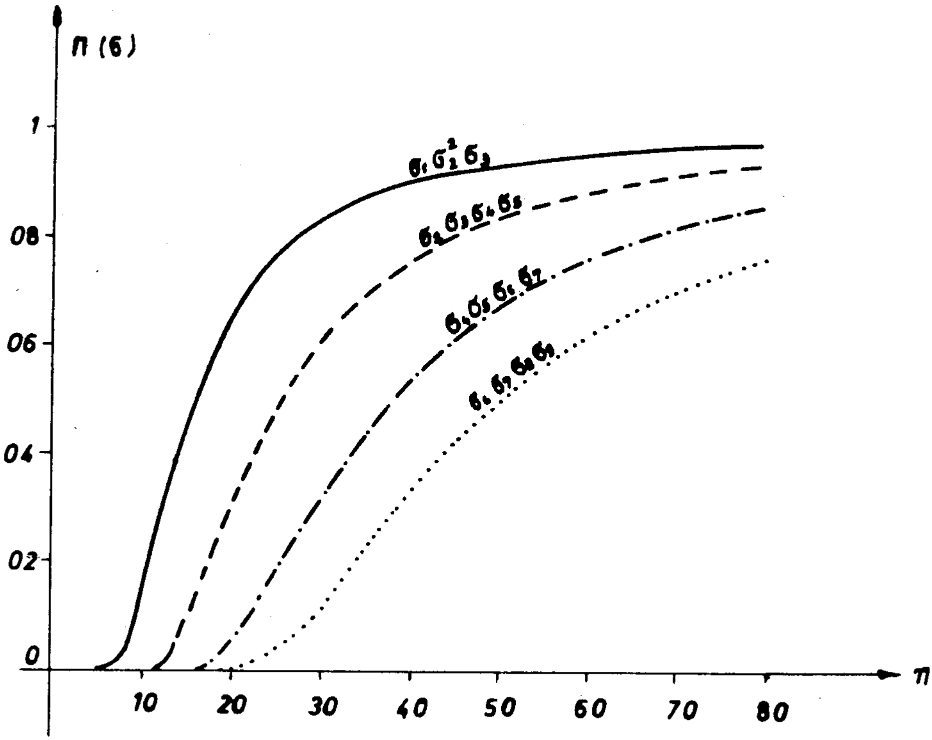
$$\Pi(\sigma) = \sigma_m \ \sigma_p \ \ldots \ \sigma_r \qquad (4)$$

Na slici 2 predstavljene su četiri krive tipa $\Pi(\sigma)$.

$\Pi(\sigma)$ je malo izmedju n=2 i $n_1=2r+1$, ali za $n_i > n_1$ funkcija $\Pi(\sigma)$ vrlo brzo raste.

Izbor m, p, ... r se vrši, kao i u prethodnom slučaju, vodeći računa o ravnomernijoj raspodeli nula $\Pi(\sigma)$ u zoni $n_i < n_1$.

$\Pi(\sigma)$ je jednako nuli ako je zadovoljen bar jedan od uslova:



Sl. 2.

$$n = \frac{2m+1}{K}, \quad n = \frac{2p+1}{K}, \quad \ldots, \quad n = \frac{2r+1}{K} \quad .$$

Uz svaki od gornjih uslova mora biti $n \neq \frac{1}{K}$.

Optimalni rezultati se postižu ako se r odredi iz uslova:

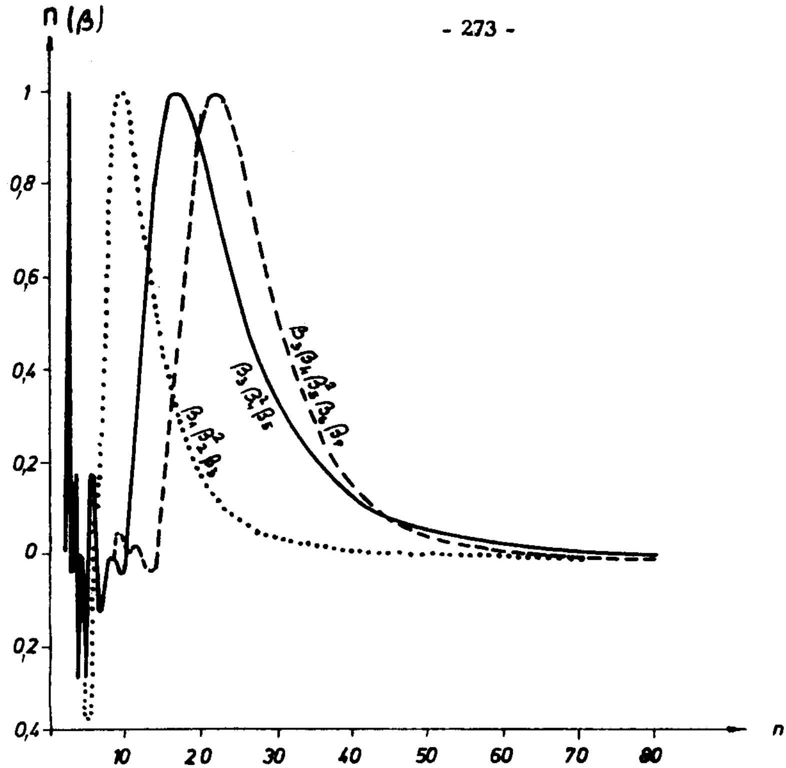
$$r = \frac{n_1 - 1}{2} \quad ,$$

a ostali brojevi iz relacija:

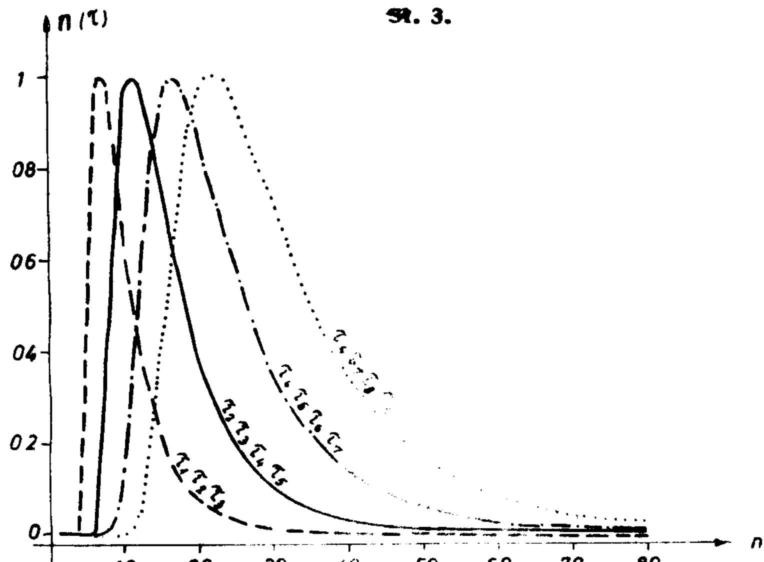
a) $\frac{2r}{3} \leq m \leq r-1$ za $\Pi(s) = s_m s_r$,

b) $\frac{3r}{5} \leq m \leq p-1, \quad \frac{3r}{4} \leq p \leq r-1$ za $\Pi(s) = s_m s_p s_r$,

c) $\frac{4r}{7} \leq m \leq p-1, \quad \frac{2r}{3} \leq p \leq q-1, \quad \frac{4r}{5} \leq q \leq r-1$ za $\Pi(s) = s_m s_p s_q s_r$, itd.


n (β)
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0,2
0,4
10
20
30
40
50
60
70
80
n

Sl. 3.


n (τ)
1
08
06
04
02
0
10
20
30
40
50
60
70
80
n

Sl. 4.

KLASA II :

Osnovne transformacije su:

$\Pi(Z)=Z_m Z_p \ldots Z_r$ i (5)

$\Pi(T)=T_m T_p \ldots T_r$. (6)

Njima odgovaraju funkcije selektivnosti:

$\Pi(\beta) = \beta_m \beta_p \cdots \beta_r$ i (slika 3) (7)

$\Pi(\tau) = \tau_m \tau_p \cdots \tau_r$ (slika 4) (8)

S obzirom na to što je već rečeno o osobinama elementarnih transformacija oduzimanja jasno je da ako želimo da sačuvamo faze harmonijskih članova, broj transformacija Z_i ili T_i u proizvodima $\Pi(Z)$ ili $\Pi(T)$ (broj činilaca) mora biti deljiv sa 4.

Nule funkcije $\Pi(\beta)$ se nalaze iz jednog od uslova:

$$n = \frac{2m}{K}, \; n = \frac{2p}{K}, \ldots, \; n = \frac{2r}{K} .$$

Indeks r se odredjuje iz jednačine: $2r=n_1$, a ostali se biraju tako da zadovolje nejednačine:

a) $\frac{2r}{3} \leq m \leq r-1$, za $\Pi(Z)=Z_m Z_r$,

b) $\frac{4r}{7} \leq m \leq p-1$, $\frac{2r}{3} \leq p \leq q-1$, $\frac{4r}{5} \leq q \leq r-1$, za $\Pi(Z)=Z_m Z_p Z_q Z_r$.

Transformacije $\Pi(T)$ su još efikasnije u prigušivanju kratkoperiodičnih članova i u izdvajanju harmonika iz jedne uske zone perioda.

Funkcija $\Pi(\tau)$ se anulira za:

$$n=\frac{m}{K}, \; n=\frac{p}{K}, \ldots, \; n=\frac{r}{K} \quad \text{i}$$

$$n=\frac{m+1}{K}, \; n=\frac{p+1}{K}, \ldots, \; n=\frac{r+1}{K} .$$

Najpovoljniji uslovi korišćenja transformacija $\Pi(T)$ su definisani relacijama:

a) $\frac{2r}{3} \leq m \leq r-1$, a $\Pi(T)= T_m T_p$,

b) $\frac{4r}{7} \leqslant m \leqslant p-1,\ \frac{2r}{3} \leqslant p \leqslant q-1,\ \frac{4r}{5} \leqslant q \leqslant r-1,$ za $\Pi(T) = T_m T_p T_q T_r,$

KLASA III:

Razmatrajući elementarne transformacije tipa $(s_m)_{N/2}$ i $(T_m)_{N/4}$ videli smo da one pojačavaju harmonijske članove iz uske zone perioda oko n=N kao i oko perioda neparnih podharmonika ovoga člana.

Višestrukim transformacijama tipa:

$$\Pi(s_{N/2}) = (s_m)_{N/2}\,(s_p)_{N/2} \cdots (s_r)_{N/2} \quad \text{i} \tag{9}$$

$$\Pi(T_{N/4}) = (T_m)_{N/4}\,(T_p)_{N/4} \cdots (T_r)_{N/4} \tag{10}$$

dobijaju se krive selektivnosti sa serijama veoma oštrih pikova koji odgovaraju periodi n=N i njenim neparnim podharmonikama. Amplitude pikova su:

$$(2m+1)(2p+1)\ldots(2r+1), \quad \text{za } \Pi(s_{N/2}) \quad \text{i}$$

$$(m+1)(p+1)\ldots(r+1), \quad \text{za } \Pi(T_{N/4}).$$

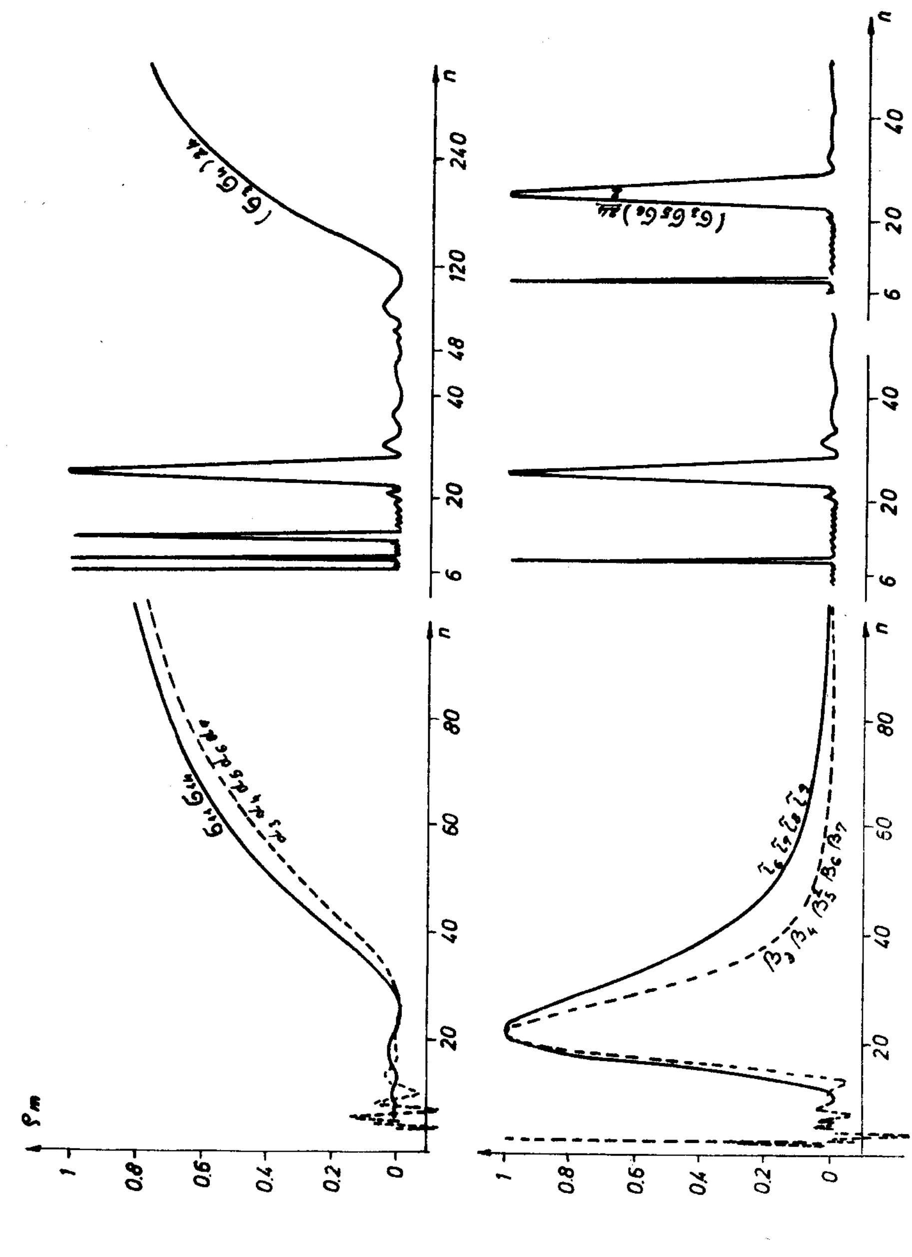
Transformacije III klase koriste se pre svega u onim slučajevima kada je potrebno izolovati komponente iz uske zone frekvencija oko jedne date frekvencije.

Na slici 5 dato je nekoliko krivih selektivnosti sa ciljem da se bolje uoče razlike njihovih selektivnih osobina.

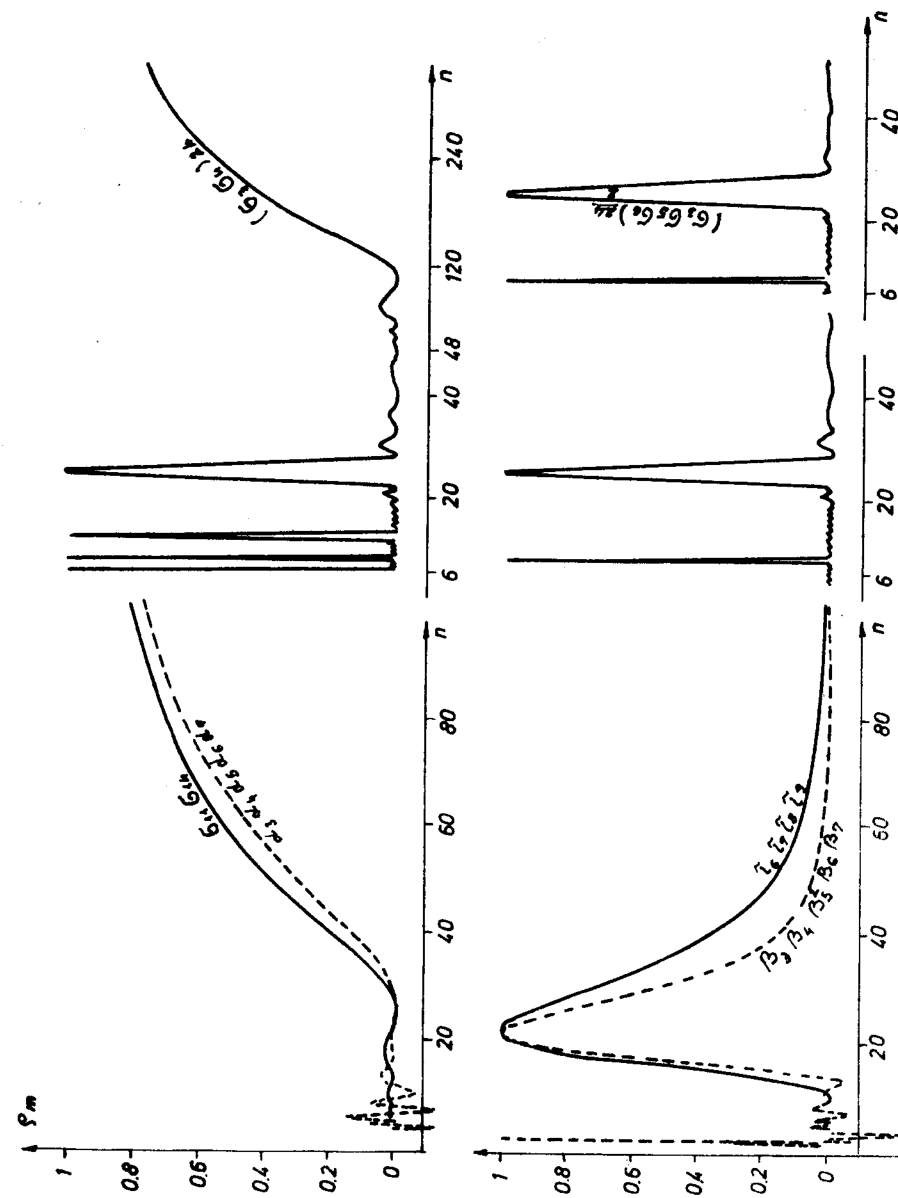
U Tablici 1 (stranica 277)date su apscise ekstremuma funkcija selektivnosti za nekoliko transformacija koje smo do sada upoznali.

I za višestruke transformacije može d[illegible] dokaže da predstavljaju linearne kombinacije ordinata, o[illegible], da su oblika: $R_s = \sum_s k_s Y_s$. U ovaj dokaz se nećemo upuštati, a čitaoca koji se za to interesuje upućujemo na citiranu knjigu Labrustovih.

Praktična analiza poliharmonijske funkcije vrši se u dve etape. U prvoj etapi se primenjuju manje selektivne transformacije i preliminarno utvrdjuju uže zone frekvencija u kojima se nalaze harmonijski članovi, a u drugoj etapi se primenjuje neka selek-



Sl. 5.



Sl. 5.

TABLICA 1.

Apscise maksimuma krivih selektivnosti.

m.......	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p.......	2	3	4	5	6	7	8	9	10
q.......	3	4	5	6	7	8	9	10	11
r.......	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\beta_m \beta_p$	6.6	10.4	14.3	18.2	22.2				
$\beta_p \beta_r$			20.7	24.6	28.5	32.5	36.5		
$\beta_m \beta_p \beta_p \beta_q$	8.9	12.6	16.4	20.4					
$\beta_m \beta_p \beta_q \beta_r$	11.7	15.3	19.0	22.9	26.5	30.5	34.5		
$\tau_m \tau_p$	5.6	8.2	10.9	13.6	16.2				
$\tau_p \tau_r$			15.1	17.8	20.5	23.1	26.0		
$\tau_m \tau_p \tau_p \tau_q$	7.1	9.7	12.3	15.0					
$\tau_m \tau_p \tau_q \tau_r$	8.9	11.4	13.9	16.6	19.2	21.9	24.6		
$\sigma_m \sigma_p \beta_m \beta_p$	9.9	15.1	20.4	26.0	31.0				
$\sigma_p \sigma_r \beta_p \beta_r$			29.0	34.5	39.5	44.5	50.0		
$\sigma_p \sigma_q \beta_m \beta_p$	13.3	18.4	23.6	29.0					
$\sigma_p \sigma_r \beta_m \beta_q$				32.0	37.0	42.5	48.0	53.0	58.5
$\sigma_m \sigma_p \beta_p \beta_q$	12.5	17.8	23.1	28.5					
$\sigma_m \sigma_q \beta_p \beta_r$				31.5	37.0	42.5	47.5	53.0	58.5
$\sigma_m \sigma_p \beta_q \beta_r$	15.8	21.0	26.0	31.5	37.0	42.0	48.0	53.0	58.0
$\sigma_q \sigma_r \beta_m \beta_p$					37.0	42.5	48.0	53.0	58.5

U Tablici 1 periode su izražene u jedinicama ekvidistantnog razmaka $x_i - x_{i-1}$.

tivnija transformacija radi još preciznijeg odredjivanja frekvencije, odnosno, ugaone brzine ili periode . Obično se u prvoj etapi vrše transformacije tipa $\Pi(s)$ ili $\Pi(Z)$ ili $\Pi(T)$.

Transformacije $\Pi(s)$ se češće primenjuju nego druge dve. One, kao što smo rekli, pojačavaju komponente sa periodama $n_i \gg 2r+1$ ili $n_i \geqslant 2r$, a prigušuju kratkoperiodične komponente. Ako je r dovoljno veliko biće praktično eliminisane sve komponente konačnih perioda. Zbog toga se račun započinje sa dovoljno velikim r koje se postepeno smanjuje i na taj način ostavlja mogućnost pojavljivanja jednog po jednog harmonijskog člana. Kada je prvi harmonijski član identifikovan, transformacijama $\Pi(s_{N/2})$ ili $\Pi(T_{N/4})$ on se precizno odredjuje i eliminiše iz rezultata posmatranja. Zatim se r ponovo smanjuje do pojave drugog, koji se istim postupkom precizno odredi i eliminiše, do pojave trećeg, itd.

U nekim slučajevima se u prvoj etapi umesto transformacija tipa $\Pi(s)$ koriste transformacije II klase: $\Pi(Z)$ i $\Pi(T)$.

Ako u seriji $\{y_i\}$ postoje slabi ostaci eliminisanih dugoperiodičnih članova i sekularnog člana, transformacije tipa $\Pi(s)$ su nepogodne zbog njihove osobine da pojačavaju ulogu baš tih ostataka. Naravno, ukoliko je transformacija višega reda šanse za "oživljavanje" tih ostataka su veće. U svim slučajevima kada se pretpostavlja postojanje bilo kakvog dugoperiodičnog šuma koriste se transformacije $\Pi(Z)$ ili $\Pi(T)$.

ZADATAK

U Tablici 2 (stranica 280) date su petnaestodnevne vrednosti UT1-UTC (proste aritmetičke sredine petodnevnih UT1--UTC objavljenih u redovnim izveštajima Medjunarodnog biroa za vreme: RAPPORT ANNUEL, cirkulari D).

UT1-UTC je ispravljeno za poznate skokove od 100 ms i tako dobijena neprekidna funkcija čije diskretne vrednosti dajemo u Tablici 2.

Metodom prostih kombinacija ordinata izolovati godišnji i polugodišnji član sezonskih neravnomernosti Zemljine rotacije.

Kao što je poznato, UT1-UTC sadrži sekularni član i harmonijske članove medju kojima najveće amplitude imaju: dvogodišnji*, godišnji i polugodišnji. Tromesečni**, kvartalni*** i plimski članovi manjih perioda (medju kojima dominiraju O_1, M_2 i Mf) imaju amplitude za red veličine manje, pa ćemo ih smatrati "poremećajima" godišnjeg i polugodišnjeg člana. Plimski članovi dugih perioda (~9 i 18 godina) predstavljaju "komponente" sekularnog člana. Prema tome, plan rešavanja postavljenog zadatka može da sadrži sledeća dva dela:

1. Razdvajanje "komponente" koja predstavlja zbir sekularnog i dugoperiodičnih članova od "komponente" koja predstavlja zbir godišnjeg i polugodišnjeg sa "poremećajima";

2. razdvajanje godišnjeg i polugodišnjeg člana uz eliminaciju "poremećaja".

Iz teorije prostih kombinacija ordinata sledi da kombinacije tipa s_m za m=12 omogućuju idealno prigušivanje harmonijskih članova čije su periode $n = \frac{2m+1}{k}$ (k=1,2,...), pod uslovom da je $\sin\frac{\pi}{n} \neq 0$. Pošto je 2m+1=25 jedinica, a jedinica jednaka 15 dana, 2m+1=375 dana. Ta perioda je bliska periodi godišnjeg člana. Osim

---

* Iijima S. and Okazaki S. 1972 : Publ. Astr. Soc. Japan, 24

** Beloserkovskij D. Ju. 1963 : Vraščenije Zemli, Kiev.

*** Djurović D. 1974 : Ciel et Terre, 90, 1, Bruxelles.

TABLICA 2.

Linearne transformacije UT1-UTC. Dj=julijanski datum-2439 000.5. UT1-UTC izraženo u $0\overset{s}{.}0001$.

1 DJ	2 UT1-UTC	3 Sc	4 Sz	5 $s_2 s_3 s_4 s_5$ x 10^-	6 Rg	7 $s_1 s_2$	8 R'_{pg}	9 Z_2-Z_3	10 R_{pg}
494	- 852								
509	- 813								
524	- 777								
539	- 760								
554	- 762								
569	- 776								
584	- 796								
599	- 824								
614	- 864								
629	- 880								
644	- 845								
659	- 767								
674	- 651	- 469	-182						
689	- 508	- 436	- 72						
704	- 362	- 404	42						
719	- 238	- 373	135						
734	- 136	- 344	208						
749	- 46	- 315	269						
764	8	- 284	292						
779	20	- 254	274						
794	6	- 225	231						
809	- 19	- 194	175						
824	- 41	- 162	121						
839	- 37	- 130	93						
854	- 16	- 98	82						
869	- 8	- 65	57						
884	- 9	- 35	26	875	56				
899	- 14	- 7	- 7	90	6				
914	- 29	18	- 47	- 631	- 41				
929	- 36	40	- 76	-1241	- 80	3	0		
944	- 11	58	- 69	-1703	-109	- 69	- 7		
959	- 52	75	-127	-1989	-128	- 258	- 25		
974	- 100	91	-191	-2082	-134	- 550	- 53		
989	- 86	106	-192	-1979	-127	- 853	- 83		
1004	- 68	122	-190	-1689	-108	-1028	-100	193	56
019	- 49	137	-186	-1234	- 79	- 972	- 94	179	52
034	42	152	-110	- 644	- 41	- 725	- 70	102	30
049	154	166	- 12	41	3	- 380	- 37	- 14	- 4
064	251	182	69	776	50	- 42	- 4	-134	-39
079	333	197	136	1516	97	167	16	-220	-64
094	386	211	175	2215	142	162	16	-242	-71
109	413	223	190	2832	182	- 37	- 4	-199	-58
124	423	232	191	3334	214	- 359	- 35	-101	-29
139	419	237	182	3694	237	- 739	- 72	31	9
154	413	241	172	3895	250	-1111	-108	165	48
169	398	244	154	3927	252	-1402	-136	267	78
184	364	245	119	3788	243	-1533	-148	311	91

TABLICA 2 (nastavak)

1 DJ	2 UT1-UTC	3 Sc	4 Sz	5 $s_2s_3s_4s_5$ x 10^{-2}	6 Rg	7 S_1S_2	8 R'_{pg}	9 Z_2Z_3	1o R_{pg}
1199	337	245	92	3483	224	-1443	-140	283	83
214	335	246	89	3025	194	-1117	-108	-184	54
229	353	246	107	2437	157	-608	-59	31	9
244	371	245	126	1748	112	-48	-5	-137	-40
259	371	245	126	995	64	407	39	-279	-81
274	337	244	93	223	14	636	62	-358	-104
289	268	243	25	-520	-33	584	57	-352	-103
304	195	240	-45	-1183	-76	267	26	-261	-76
319	124	235	-111	-1717	-110	-220	-21	-105	-31
334	39	228	-189	-2077	-133	-765	-74	76	22
349	-28	220	-248	-2229	-143	-1264	-122	243	71
364	-55	210	-265	-2155	-138	-1616	-156	351	102
379	-63	201	-264	-1853	-119	-1719	-166	372	108
394	-35	190	-225	-1340	-86	-1531	-148	301	88
409	41	177	-136	-652	-42	-1091	-106	155	45
424	140	162	-22	161	10	-507	-49	-25	-7
439	237	144	93	1036	67	58	6	-191	-56
454	316	125	191	1907	122	429	42	-294	-86
469	355	103	252	2707	174	514	50	-307	-90
484	338	81	257	3374	217	328	32	-234	-68
499	294	58	236	3857	248	-33	-3	-99	-29
514	256	35	221	4117	264	-433	-42	58	17
529	208	11	197	4133	265	-741	-72	189	55
544	161	-12	173	3900	250	-883	-85	265	77
559	118	-34	152	3426	220	-840	-81	270	79
574	65	-54	119	2737	176	-616	-60	207	60
589	14	-74	88	1869	120	-238	-23	94	27
604	-28	-93	65	870	56	210	20	-45	-13
619	-66	-112	46	-203	-13	640	62	-173	-50
634	-116	-130	14	-1288	-83	957	93	-265	-77
649	-195	-149	-46	-2317	-136	1092	106	-298	-87
664	-288	-167	-121	-3227	-207	990	96	-258	-75
679	-377	-184	-193	-3958	-254	686	66	-155	-45
694	-464	-202	-262	-4459	-286	259	25	-9	-3
709	-545	-221	-324	-4696	-302	-169	-16	146	43
724	-599	-240	-359	-4650	-299	-506	-49	268	78
739	-610	-260	-350	-4326	-278	-655	-63	328	96
754	-580	-280	-300	-3748	-241	-560	-54	302	88
769	-523	-298	-225	-2958	-190	-218	-21	192	56
784	-437	-315	-122	-2017	-130	297	29	21	6
799	-329	-329	0	-992	-64	862	83	-177	-52
814	-223	-342	199	45	3	1331	129		
829	-143	-353	210	1027	66	1566	152		
844	-101	-362	261	1897	122	1468	142		
859	-103	-371	268	2609	168	1021	99		
874	-146	-380	234	3137	201	307	30		
889	-209	-389	180	3469	223				
904	-279	-398	119	3610	232				
919	-338	-409	71	3577	230				
934	-378	-420	42						
949	-396	-432	36						
964	-394	-445	51						
979	-392	-461	69						
994	-385	-479	94						

TABLICA 2. (nastavak)

1 DJ	2 UT1-UTC	3 Sc	4 Sz
2009	- 384	-501	117
024	- 416	-526	110
039	- 521	-556	35
054	- 603	-589	- 14
069	- 683	-626	- 57
084	- 787	-666	-121
099	- 864	-710	-154
114	- 898	-755	-143
129	- 879	-800	- 79
144	- 841		
159	- 823		
174	- 792		
189	- 761		
204	- 784		
219	- 838		
234	- 929		
249	-1064		
264	-1222		
279	-1367		
294	-1466		
309	-1500		

toga, $\frac{2m+1}{2} = 187.5$ dana je blisko periodi polugodišnjeg člana, pa se može očekivati da će transformacija tipa s_{12} omogućiti zadovoljavajuću tačnost prigušivanja godišnjeg i polugodišnjeg člana zajedno (S_z) i izdvajanje sekularnog i dvogodišnjeg člana (S_c) .

Rezultati koje smo dobili dati su u trećoj koloni Tablice 2. U četvrtoj koloni ove tablice date su razlike S_z = UT1-UTC - $-S_c$. S_c i S_z su i grafički predstavljeni na slici 6.

Rezultate koji su bliski S_c i S_z mogli smo dobiti predstavljajući UT1-UTC polinomom n-tog reda:

$$\text{UT1-UTC} = a_o + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots$$

i odredjujući koeficijente a_i ($i=0,1,\ldots$) metodom najmanjih kvadrata. Rezidui uslovnih jednačina:

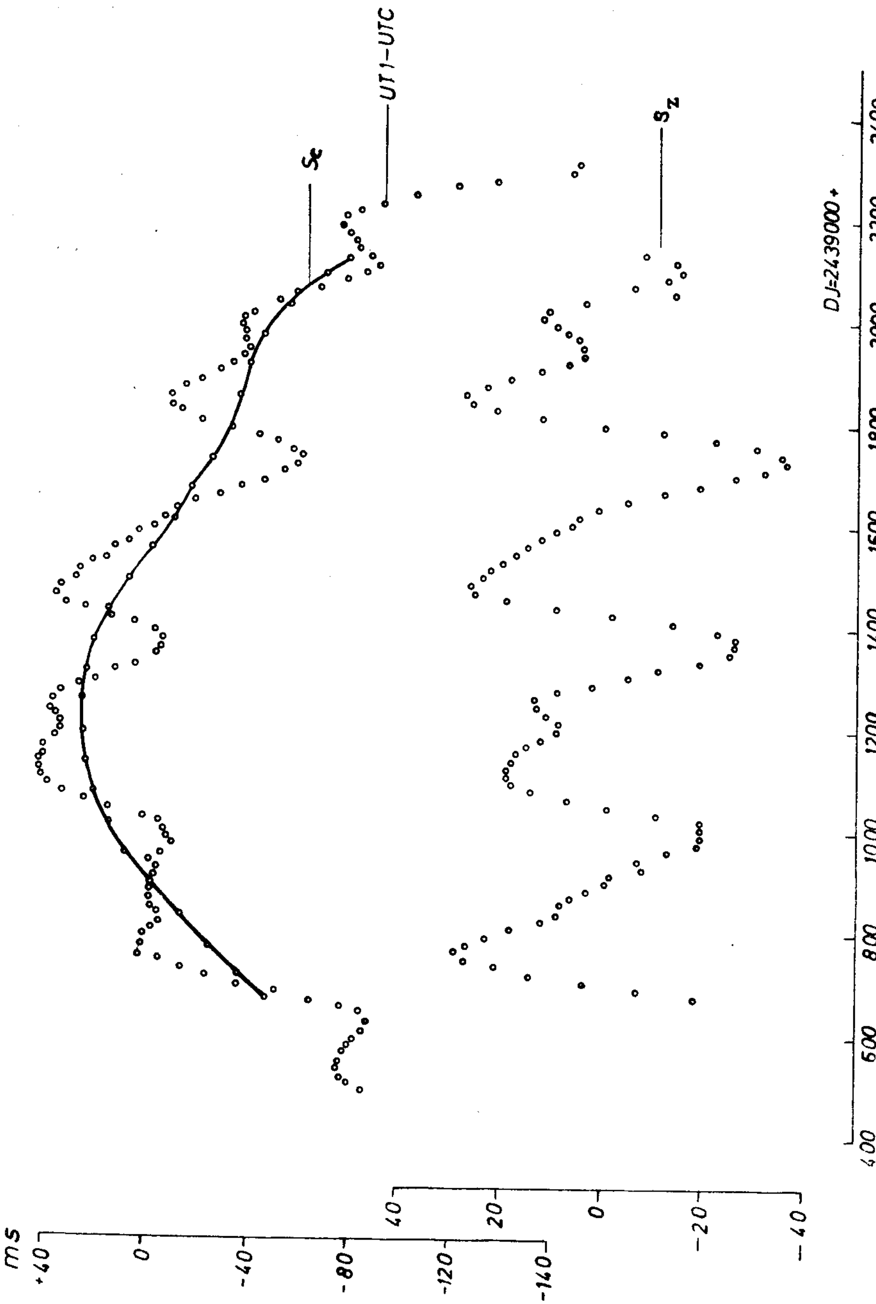
$$S'_z = \text{UT1-UTC} - a_o - a_1 t - a_2 t^2 - \ldots$$

predstavljaju sezonsku neravnomernost Zemljine rotacije (isto kao i S_z). Poslednja metoda ima veliku manu koja se ogleda u tome što se sekularni član aproksimira polinomom reda n koji nije odredjen nekim objektivnim merilom, pa se odstupanja od "propisane" forme odražavaju na rezidue S'_z. Metoda prostih kombinacija ordinata nema tu manu. Kao što smo videli, ona omogućuje da se neke komponente priguše, a druge izoluju u obliku koji odgovara objektivnoj stvarnosti.

Pomoću slike 6 vidimo da se S_c, koje predstavlja sekularni član "poremećen" dvogodišnjim članom, može aproksimirati polinomom drugog reda.

Prva vrednost S_c u Tablici 2 predstavlja aritmetičku sredinu 25 vrednosti UT1-UTC počev od prve tablične vrednosti (od DJ=2439494 do DJ=2439854), drugo S_c - aritmetičku sredinu 25 UT1-UTC počev od druge tablične vrednosti (od DJ=2439509 do DJ=2439869) , itd.

U vezi sa onim što smo napred rekli želimo da učinimo sledeće napomene:


UT1-UTC
S_z
DJ=2439000+
400
600
800
1000
1200
1400
1600
1800
2000
2200
2400
ms
+40
0
-40
-80
-120
-140
40
20
0
-20
-40

1. S_c predstavlja s_{12} podeljeno sa 25.

2. Pošto perioda godišnjeg člana ne iznosi tačno 25 jedinica, amplitudni multiplikator σ_m, strogo uzevši, neće biti nula, pa će S_c sadržati ostatke godišnjeg i polugodišnjeg člana. Amplitudu ostataka godišnjeg člana, naprimer, dobićemo ako u izraz za σ_m stavimo n=365.24/15 = 24.3 jedinica i tako dobijeno σ_m podelimo sa 25. Rezultat je: σ_m = 0.03. Pošto je amplituda godišnjeg člana $A \approx 20$ ms, amplituda pomenutog ostatka u S_c je oko 20 x 0.03 = 0.6 ms.

Izdvajanje godišnjeg člana iz S_z može da se postigne na razne načine. Ako, naprimer, primenimo dvostruku transformaciju tipa $\Pi(s)=s_m s_r$, za prigušivanje polugodišnjeg člana i članova kraćih perioda bilo bi dovoljno da uzmemo r=9 i $6 \leq m \leq 8$. U tom slučaju bili bi pojačani članovi sa periodama $n \geqslant 2r = 18 \times 15 = 270$ dana medju koje, razume se, spada i godišnji član. Umesto jedne takve transformacije, mi ćemo se poslužiti transformacijom $\Pi(s)=s_2s_3s_4s_5$. Njena kriva selektivnosti je predstavljena na slici 2. Uz pomoć ove slike zaključujemo da članovi sa periodama $n \leq 12$ (180 dana) praktično iščezavaju i da počev od n=12 funkcija selektivnosti vrlo brzo raste. Rezultati koji su postignuti gornjom transformacijom i neki medjurezultati su dati u Tablici 2.

Serija S_z je transformisana na sledeći način:

- na S_z je primenjena transformacija s_2 i dobijena transformisana serija koju ćemo, takodje, označiti sa s_2;

- na seriju s_2 primenjena je transformacija s_3 i tako dobijena nova serija koju ćemo označiti sa s_2s_3, itd. Poslednja transformisana serija $s_2s_3s_4s_5$ takodje data u Tablici 2. Da bismo izbegli sabiranje velikih brojeva, seriju s_2s_3 smo pomnožili sa 10^{-2} i izvršili zaokrugljivanje na cele brojeve.

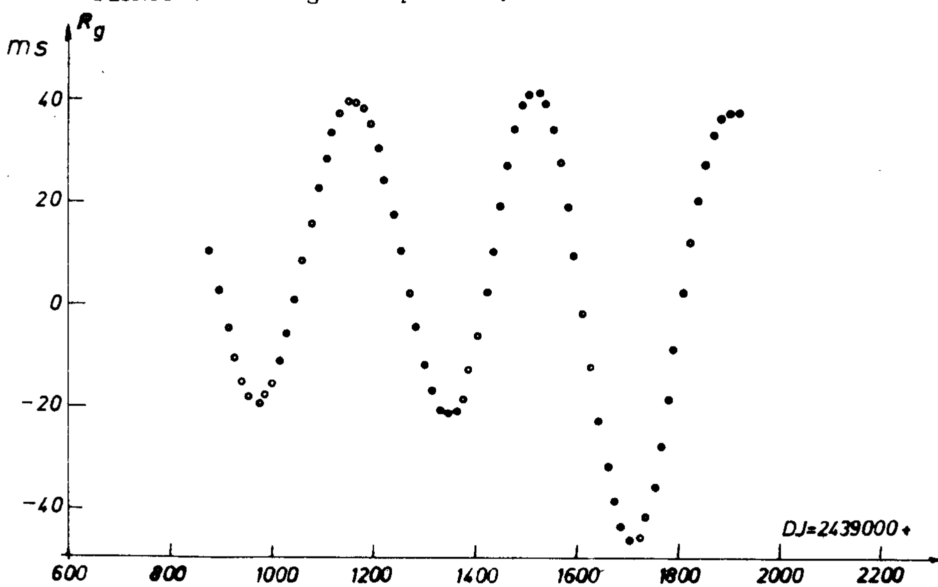
Amplitudni multiplikator transformacije $s_2s_3s_4s_5$ je:

$$\Pi(\sigma)= \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_5 = \frac{\sin\frac{5\pi}{n}\sin\frac{7\pi}{n}\sin\frac{9\pi}{n}\sin\frac{11\pi}{n}}{\sin^4\frac{\pi}{n}} .$$

Pošto su prigušeni svi članovi sem godišnjeg, serija $s_2s_3s_4s_5$ predstavlja godišnji član sezonske neravnomernosti Zemljine rotacije pomnožen sa $\Pi(\sigma) \times 10^{-2}$. Ako u poslednju jednačinu stavimo n=24.3 (perioda godišnjeg člana) dobićemo:

$\Pi(\sigma) = 1557.16.$

Dakle, godišnji član ćemo dobiti deobom $s_2s_3s_4s_5$ sa 1557.16×10^{-2}. Na taj način su dobijeni brojevi R_g iz šeste kolone Tablice 2. Oni su i grafički predstavljeni na slici 7.



Sl.7.

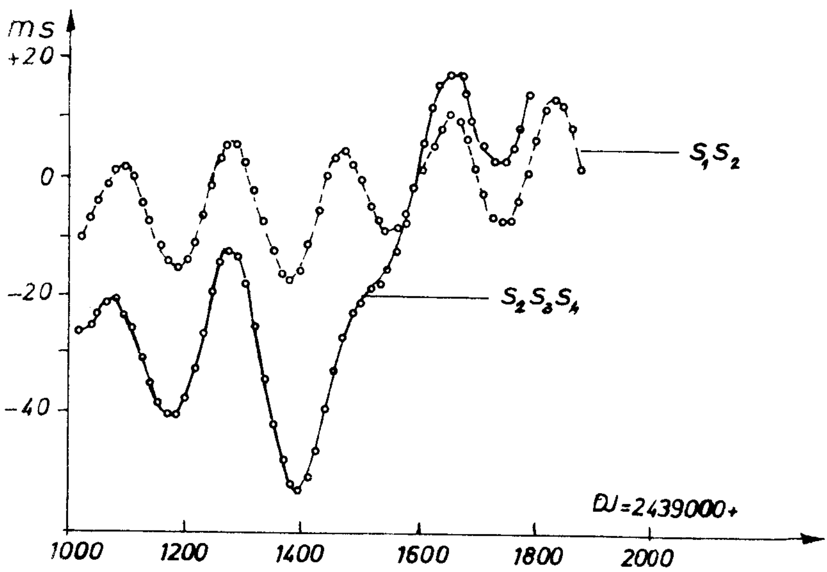
Kao što vidimo, dobijena je glatka kriva linija, što svedoči o tome da je godišnji član izolovan bez "poremećaja". Osim toga, zapažamo da amplituda godišnjeg člana nije konstantna. Ovu činjenicu zapazili su i neki drugi autori*.

---

*Lambeck K. and Cazenave A. 1973 : Geoph. J.R. Astr. Soc. 32, 79-93.

Pošto se gornjim transformacijama nisu promenile faze harmonijskih članova sadržanih u S_z, rezidui $R=S_z-R_g$ sadrže nepromenjen polugodišnji član i "poremećaje" (članove manjih perioda).

Da bismo iz rezidua R izdvojili polugodišnji član primenili smo transformaciju $\Pi(s)=s_2s_3s_4$. Rezultati koje smo dobili su grafički predstavljeni na slici 8.



Sl. 8.

Prisustvo ostataka sekularnog člana dovelo je do takve "deformacije" krive koja predstavlja R da se polugodišnji član jedva i nazire.

Transformacija tipa s_1s_2 (Tablica 2, sedma kolona) manje pojačava ostatke sekularnog člana, pa dobijena kriva (slika 8) omogućuje da se polugodišnji član jasno identifikuje. Medjutim, vidi se da i ova transformacija "oživljava" ostatke članova dužih perioda. Da bi se oni prigušili treba primeniti neku od transformacija tipa Z.

Pomoću Tablice 1 dolazimo do zaključka da multiplikator $\sigma_1\ \sigma_2\ \beta_2\ \beta_3$ ima maksimum za n=12.5, što je sasvim blizu periode polugodišnjeg člana (n=12.2). Zbog toga ćemo na seriju $s_1 s_2$ primeniti transformaciju $Z_2 Z_3$.

Rezidui R'_{pg} su dobijeni deobom $s_1 s_2$ sa:

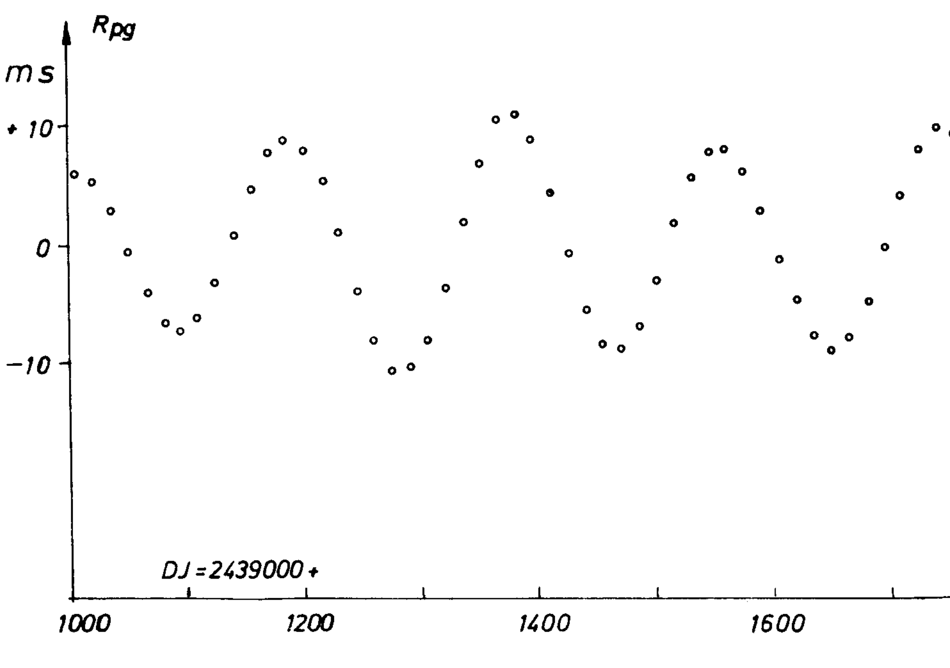
$$\sigma_1\ \sigma_2 = \frac{\sin\frac{3\pi}{12.2}\ \sin\frac{5\pi}{12.2}}{\sin^2\frac{\pi}{12.2}} = 10.33.$$

Pošto je multiplikator:

$$\beta_2\ \beta_3 = 2\ \sin\frac{4\pi}{n}\ \mathrm{x}\ 2\ \sin\frac{6\pi}{n} = 3.43,$$

polugodišnji član (R_{pg}) smo dobili deleći brojeve iz pretposlednje kolone Tablice 2 sa 3.43.

R_{pg} su i grafički predstavljeni na slici 9.



Na osnovi rezultata koje smo izložili u ovom zadatku zaključujemo da je polugodišnji član sezonske neravnomernosti u Zemljînoj rotaciji sinusoidnog oblika koji je u odnosu na godišnji član bliži teorijskoj sinusoidi. Ovaj zaključak je u saglasnosti sa rezultatima koje su publikovali N. Stojko, H. F. Fliegel i T. P. Hawkins* .

---

* Stoyko N. 1949 : Bulletin Astronomique, 15, 3, 229-242;
Fliegel H. F. and Hawkins T. P. 1967 : The Astron. Journal, 72, 4.

30. FURIJEOVE INTEGRALNE TRANSFORMACIJE

Neka je $y(x)$ neprekidna funkcija zadata u intervalu $[-L, L]$ i neka je izvan ovog intervala $y(x) \equiv 0$. Furijeova integralna transformacija te funkcije se definiše izrazom:

$$F(\omega) = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} y(x) e^{-i\omega x} \, dx .$$

Pošto je: $e^{-i\omega x} = \cos\omega x - i \sin\omega x$, $F(\omega)$ postaje:

$$F(\omega) = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} y(x) \cos\omega x \, dx - \frac{i}{L} \int_{-L}^{L} y(x) \sin\omega x \, dx =$$

$$= U(\omega) - iV(\omega),$$

gde:

$$U(\omega) = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} y(x) \cos\omega x \, dx \quad \text{i} \tag{1}$$

$$V(\omega) = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} y(x) \sin\omega x \, dx \tag{2}$$

predstavljaju kosinusnu i sinusnu transformaciju $y(x)$.

Ako je $y(x)$ zadato diskretno u $2r+1$ ekvidistantnih tačaka, znak integracije se zamenjuje znakom sabiranja:

$$U(\omega) = \frac{2}{2r+1} \sum_{i=-r}^{r} y_i \cos\omega \frac{iL}{r} \quad \text{i} \tag{1'}$$

$$V(\omega) = \frac{2}{2r+1} \sum_{i=-r}^{r} y_i \sin\omega \frac{iL}{r} . \tag{2'}$$

U poslednjim jednačinama središnja apscisa je $x_o = 0$.

Veličina L/r predstavlja dužinu elementarnog intervala: $x_i - x_{i-1}$. Često se ona uzima za jedinicu, pa jednačine 1' i 2' imaju malo prostiji oblik.

Računanjem $U(\omega)$ mogu se identifikovati kosinus-komponente, a računanjem $V(\omega)$ - sinus-komponente harmonijskih članova sadržanih u $y(x)$. Ovo proističe iz poznatih osobina gornjih integrala, odnosno, zbirova.

Neka je:

$$y(x) = \sum_{j=1}^{k} a_j \cos \omega_j x + b_j \sin \omega_j x.$$

Zamenom u jednačinama 1 i 2 dobijamo:

$$U(\omega) = \sum_{j=1}^{k} a_j \left\{ \frac{\sin(\omega - \omega_j) L}{(\omega - \omega_j) L} + \frac{\sin(\omega + \omega_j) L}{(\omega + \omega_j) L} \right\} =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} a_j \left\{ R(\lambda) + R(\lambda') \right\} \quad \text{i} \tag{3}$$

$$V(\omega) = \sum_{j=1}^{k} b_j \quad \frac{\sin(\omega - \omega_j) L}{(\omega - \omega_j) L} - \frac{\sin(\omega + \omega_j) L}{(\omega + \omega_j) L} =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} b_j \quad R(\lambda) - R(\lambda'), \tag{4}$$

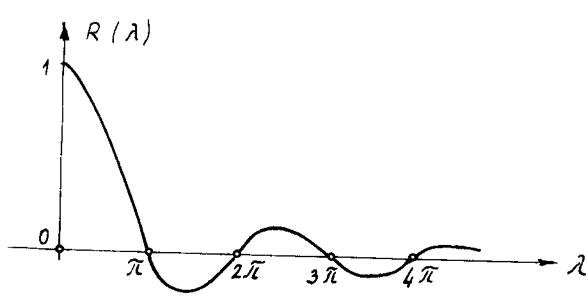
gde su:

$$\lambda = (\omega - \omega_j) L ,$$

$$\lambda' = (\omega + \omega_j) L \quad \text{i}$$

$$R(\lambda) = \frac{\sin \lambda}{\lambda}$$

Funkcija $R(\lambda)$ je grafički predstavljena na slici 1.



Sl. 1.

Kao što vidimo, u $U(\omega)$ figuriše samo amplituda kosinus-komponente (a_j), a u $V(\omega)$- amplituda sinus-komponente (b_j) funkcije $y(x)$.

Ako je u odnosu na periode $T=2\pi/\omega$ i $T_j=2\pi/\omega_j$ interval 2L toliko veliki da se proizvod $(\omega+\omega_j)L$ može smatrati mnogo većim od jedinice: $(\omega+\omega_j)L \gg 1$, funkcija $R(\lambda')\approx 0$, pa se izrazi za $U(\omega)$ i $V(\omega)$ mogu uprostiti:

$$U(\omega)=\sum_{j=1}^{k} a_j \; R(\lambda) \; \text{i} \tag{3)'$$

$$V(\omega)=\sum_{j=1}^{k} b_j \; R(\lambda). \tag{4)'$$

Ako je $y(x)$ zadata diskretno, jednačine 3 i 4 postaju:

$$U(\omega)=\sum_{j=1}^{k} a_j \; R'(\lambda)+R'(\lambda') \quad \text{i} \tag{3)''$$

$$V(\omega)=\sum_{j=1}^{k} b_j \; R'(\lambda)-R'(\lambda') \quad , \tag{4)''$$

gde su:

$$R'(\lambda)=\frac{\frac{1}{2r+1}\sin(2r+1)\frac{\omega-\omega_j}{2}}{\sin\frac{\omega-\omega_j}{2}}=\frac{\frac{\sin\lambda}{2r+1}}{\sin\left(\frac{\lambda}{2r+1}\right)} \quad \text{i}$$

$$R'(\lambda')=\frac{\frac{1}{2r+1}\sin(2r+1)\frac{\omega+\omega_j}{2}}{\sin\frac{\omega+\omega_j}{2}}=\frac{\frac{\sin\lambda'}{2r+1}}{\sin\left(\frac{\lambda'}{2r+1}\right)} \; .$$

Ako je broj 2r+1 veliki, $\sin\left(\frac{\lambda}{2r+1}\right)\approx\frac{\lambda}{2r+1}$, pa je $R'(\lambda)\approx R(\lambda)$ i $R'(\lambda')\approx R(\lambda')\approx 0$.

Računajući $U(\omega)$ i $V(\omega)$ za niz vrednosti $\omega=\omega_0+\ell\,\Delta\omega$ ($\ell=1,2,3,\ldots$), gde je $\Delta\omega$ <u>korak</u>, a ω <u>probna ugaona brzina</u> bliska ugaonoj brzini ω_j neke od komponenata. Za $\omega=\omega_j$ funkcija $R(\lambda)=R(0)$

ima primarni maksimum. Ako grafički predstavimo funkcije $U(\omega)$ i $V(\omega)$, na mestima gde je $\omega = \omega_j$ (ω_j - ugaona brzina harmonijskih članova sadržanih u $y(x)$) pojaviće se pikovi. Središnje apscise pikova jednake su ugaonim brzinama ω_j, a amplitude, kao što vidimo iz jednačina 3 ' i 4 ', jednake su a_j i b_j. To je jasno jer je $R(0)=1$.

Kada odredimo a_j, b_j i ω_j, odredjivanje amplitude A i faze ψ datog harmonijskog člana je trivijalno prosto:

$$A^2(\omega) = U^2(\omega) + V^2(\omega) \quad \text{i}$$

$$\psi(\omega) = \operatorname{arc\,tg} \frac{U(\omega)}{V(\omega)} .$$

Selektivna svojstva Furijeovih transformacija zavise od dužine intervala $2L$. Kada je L veliko, malom promenom ω u okolini ω_j postiže se relativno velika promena proizvoda $(\omega - \omega_j)L$ i nagli pad funkcije $R(\lambda)$. Drugim rečima, postiže se velika oštrina primarnog pika, a samim tim i dobra selektivnost transformacije.

Prva nula funkcije $R(\lambda)$ je za $\lambda = \pi$, odnosno, za $(2r+1)\frac{\omega-\omega_j}{2} = \pi$. Prema tome, širina primarnog pika je:

$$2\,\varepsilon_1 = 2(\omega - \omega_j) = \frac{4\pi}{2r+1} . \tag{5}$$

Poslednja jednačina potvrdjuje (što smo i napred rekli) da selektivnost transformacija $U(\omega)$ i $V(\omega)$ zavisi od veličine intervala L.

Ako su središnje ordinate primarnih pikova koji odgovaraju harmonijskim članovima udaljene za $2\,\varepsilon_1$, uticaj jednoga od njih na amplitudu drugoga jednak je nuli.

Da bismo lakše upoznali osobine Furijeovih transformacija razmotrićemo najjednostavniji slučaj - slučaj kada je $y(x) = a\cos\omega_o x + b\sin\omega_o x = A\sin(\omega_o x + \psi)$.

Ako se tačno računaju amplitude komponenata koje odgovaraju pikovima krivih $U(\omega)$ i $V(\omega)$ u jednačinama 3 i 4 ne sme se zanemariti $R(\lambda')$, niti se sme zanemariti $R'(\lambda')$ u jednačinama 3 " i 4 ". Za diskretno datu funkciju $y(x)$ amplitudni multiplikatori sinus-komponente i kosinus-komponente, respektivno, su:

$$\lambda = \frac{\frac{1}{2r+1}\sin(2r+1)\frac{\omega-\omega_o}{2}}{\sin\frac{\omega-\omega_o}{2}} + \frac{\frac{1}{2r+1}\sin(2r+1)\frac{\omega+\omega_o}{2}}{\sin\frac{\omega+\omega_o}{2}} \quad \text{i}$$

$$\gamma = \frac{\frac{1}{2r+1}\sin(2r+1)\frac{\omega-\omega_o}{2}}{\sin\frac{\omega-\omega_o}{2}} - \frac{\frac{1}{2r+1}\sin(2r+1)\frac{\omega+\omega_o}{2}}{\sin\frac{\omega+\omega_o}{2}}\,.$$

Kao što smo napred rekli, središnja apscisa pika odgovara vrednosti probne ugaone brzine $\omega = \omega_o$. Imajući u vidu još i to da je:

$$\lim_{x\to o}\frac{\sin kx}{x} = k$$

u graničnom slučaju $(\omega \to \omega_o)$ λ i γ postaju:

$$\lambda = 1 + \frac{1}{2r+1}\,\frac{\sin(2r+1)\omega}{\sin\omega} = 1 + q \quad \text{i} \tag{6}$$

$$\gamma = 1 - \frac{1}{2r+1}\,\frac{\sin(2r+1)\omega}{\sin\omega} = 1 - q\,. \tag{7}$$

Na osnovi poslednjih jednačina zaključujemo da amplitude pikova $U(\omega)$ i $V(\omega)$, strogo uzevši, nisu jednake a i b, već su jednake $a(1+q)$ i $b(1-q)$. Pošto q zavisi od ω, amplitude različitih pikova će biti različito redukovane. Medjutim, ako se za svaku vrednost probne periode $T=2\pi/\omega$ promeni dužina intervala tako da T predstavlja njegov celobrojni deo, amplitude pikova biće jednake amplitudama sinus i kosinus-komponente. Drugim rečima, za $2r+1=nT$ $(n=1,2,3,\ldots)$ imaćemo:

$$q = \frac{1}{2r+1} \quad \frac{\sin(2r+1)\frac{2n\pi}{2r+1}}{\sin\frac{2n\pi}{2r+1}} = 0,$$

pa je $\lambda = \gamma = 1$.

Odavde sleduje poznato pravilo da se prilikom računanja $U(\omega)$ i $V(\omega)$ ne koriste svi raspoloživi podaci, već se integracija, odnosno, sabiranje vrši na promenljivom intervalu koji sadrži maksimalan ceo broj probnih perioda $2L=nT$. Ovaj uslov je poznat kao uslov samerljivosti ili uslov komenzurabiliteta.

Funkcija $R(\lambda) = \frac{\sin\lambda}{\lambda}$, pored primarnog pika ima i niz sekundarnih koji su simetrični u odnosu na primarni, sa amplitudama koje se postepeno smanjuju sa porastom λ. Ova činjenica je veoma važna iz sledećeg razloga: ako funkcija $y(x)$ sadrži članove velikih amplituda na krivim $U(\omega)$ i $V(\omega)$ pojaviće se i parazitski pikovi koji predstavljaju podharmonike tih članova. Prema njihovom rasporedu i visini možemo utvrditi da li oni potiču od nekog člana čiji se primarni pik nalazi na ω_o ili predstavljaju primarne pikove nekih drugih harmonijskih članova manjih amplituda, objektivno sadržanih u $y(x)$. Tako, naprimer, za član čije je $\omega = \omega_o$, apscise podharmonika zadovoljavaju jednačinu:

$$(\omega_j - \omega_o)L = tg(\omega_j - \omega_o)L .$$

Jasno je da se poslednja jednačina dobija iz uslova ekstremuma funkcije $R(\lambda)$. Rešavanje ove jednačine se obično vrši grafičkom metodom. Apscise preseka prave $y_1 = \lambda$ i krivih $y_2 = tg\lambda$ predstavljaju njena približna rešenja koja su dovoljno tačna da se izvrši diskusija datoga pika u smislu da li on predstavlja podharmoniku nekog člana ili ne.

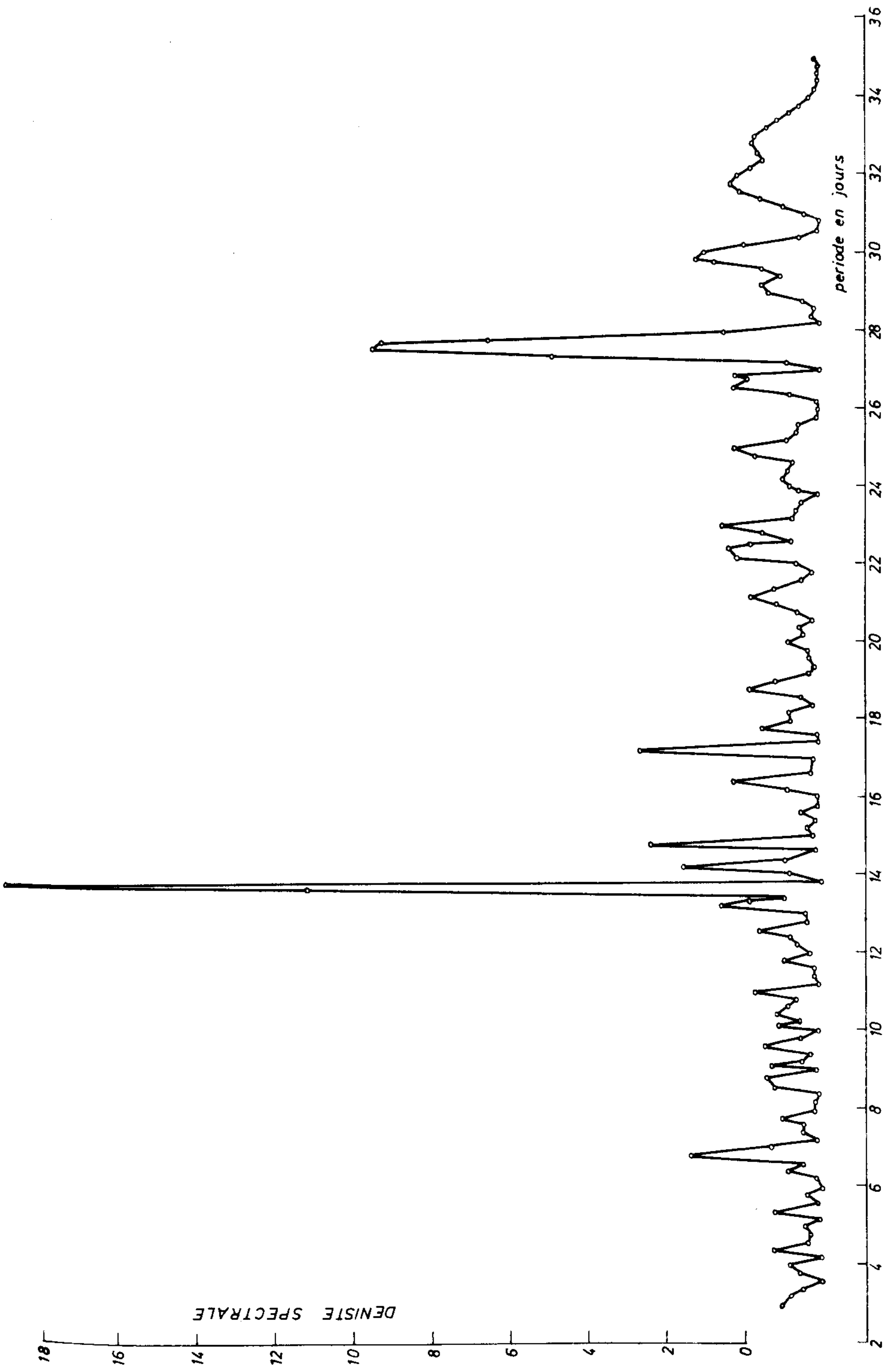
Pažnju čitaoca skrećemo na oblik izraza za $U(\omega)$ i $V(\omega)$. U izrazima 1 ' i 2 ' zbir proizvoda $y_i \sin\frac{i\omega L}{r}$ ili $y_i \cos\frac{i\omega L}{r}$ deli se ukupnim brojem elemenata date serije y_i. Dakle, dolazi do snažne medjusobne kompenzacije slučajnih grešaka posmatranja. Ona je utoliko bolja ukoliko je $2r+1$ veće. Ako je $2r+1$ dovoljno veliko,u

$y(x)$ se mogu identifikovati i signali čije su amplitude mnogo manje od slučajnih grešaka posmatranja. Da bismo to istakli, na slici 2, koja je pozajmljena iz jednog rada D. Djurovića*, grafički su predstavljeni pikovi koji odgovaraju harmonijskim članovima sadržanim u reziduima UT1-UTC. Ti rezidui su dobijeni posle eliminacije sekularnog, dvogodišnjeg, godišnjeg i polugodišnjeg člana. Amplituda harmonijskog člana kome odgovara najviši pik (plimski član O_1) je svega $0\overset{s}{.}0012$, a srednja kvadratska greška rezidua je $\sigma = \pm 0\overset{s}{.}0031$. Ukupan broj rezidua je dosta veliki i iznosi $2r+1=1821$.

Metodama prostog sabiranja ordinata može se na datom intervalu postići veća selektivnost nego metodom Furijeovih transformacija. Ove poslednje su izložene radi toga što za njihovu primenu nisu potrebne prethodne analize funkcija selektivnosti, koje su neizbežne kod izbora pogodne višestruke transformacije. Osim toga, one su izložene i radi njihovog velikog značaja koji proističe iz činjenice da leže u osnovi drugih selektivnijih transformacija o kojima ćemo govoriti u narednim paragrafima.

---

* Djurović D.: Astronomy and Astrophysics 47 1976, 325-332.

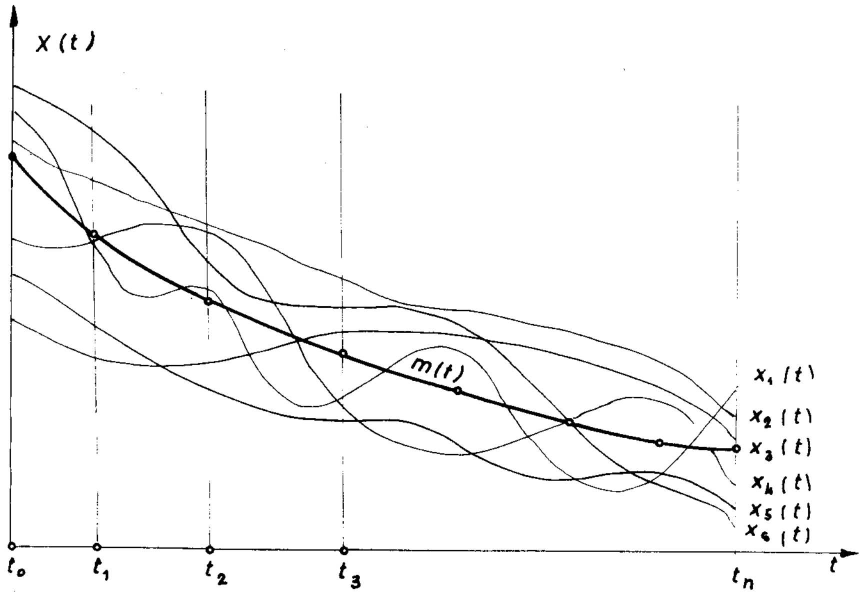

periode en jours
DENISTE SPECTRALE

31. OSNOVNI POJMOVI IZ TEORIJE SLUČAJNIH FUNKCIJA

U prethodnim paragrafima bavili smo se različitim problemima slučajnih promenljivih. Jedna karakteristika slučajne promenljive je da u toku eksperimenta ili jedne serije eksperimenata ona ostaje nepromenjena ili su njene promene zanemarljive. Ishodi eksperimenata se ne mogu unapred predvideti jer uslovi koji odredjuju te ishode ne ostaju nepromenjeni, ali se implicitno pretpostavlja da u jednoj seriji eksperimenata parametri slučajne promenljive, matematičko očekivanje i disperzija,ostaju konstantni. Medjutim, rezultat nekog eksperimenta može da bude i slučajna funkcija - promenljiva koja se menja u funkciji jedne ili više nezavisno promenljivih, a sadrži još i slučajna kolebanja. Trajektorije topovskog zrna, naprimer, ispaljenog iz istog orudja, pod istim nagibom prema horizontu, sa jednakim punjenjem, itd. činiće snop - skup trajektorija ili skup funkcija daljine ili vremena koje imaju slučajni karakter. Kaže se da jedan eksperiment (jedan hitac) daje jednu realizaciju slučajne funkcije (jednu trajektoriju) .

Pretpostavimo da raspolažemo sa n zapisa slučajne funkcije $X(t)$ (slika 1) . Svakom datom t koje, u opštem slučaju, ne predstavlja vreme, odgovara n vrednosti $X(t)$. Možemo smatrati da za dato t_o $X(t_o)$ predstavlja slučajnu promenljivu sa n ishoda. Za $t=t_1$ imaćemo slučajnu promenljivu $X(t_1)$, za $t=t_2$ imaćemo slučajnu promenljivu $X(t_2)$, . . . Svaka od pomenutih slučajnih promenljivih predstavlja jedan presek slučajne funkcije $X(t)$.

U Teoriji verovatnoće proučavaju se zakoni raspodele verovatnoće dve i više slučajnih promenljivih (u to mi nećemo ulaziti). Kada se govori o zakonu raspodele verovatnoće slučajne funkcije, misli se na najopštiji slučaj iz pomenute klase zakona: zakon raspodele beskonačno mnogo slučajnih promenljivih.

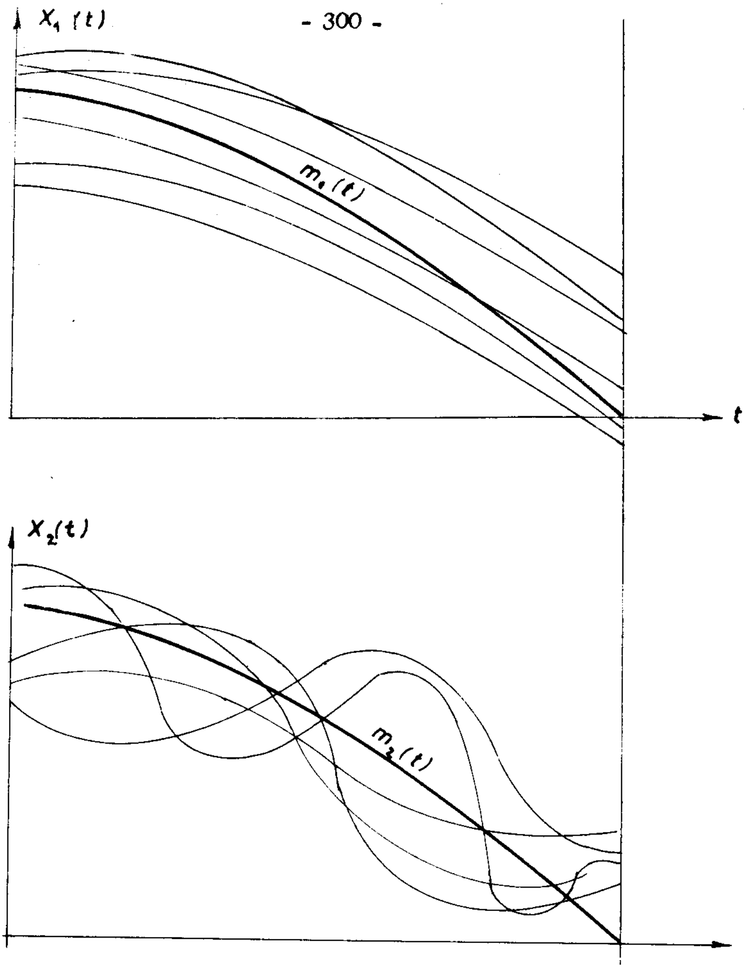


S l. 1.

Za svaki presek X(t) definiše se matematičko očekivanje m(t) i disperzija $D(t)=\sigma^2(t)$. Matematičko očekivanje i disperzija su neslučajne funkcije argumenta t (jer za svaki dati presek matematičko očekivanje i disperzija su neslučajni parametri). Slično kao kod slučajne promenljive, m(t) predstavlja teorijsku srednju realizaciju X(t), a D(t) - pokazatelj skoncentrisanosti realizacija oko srednje (u datom primeru ona pokazuje širinu snopa trajektorija).

D(t) i m(t) nisu dovoljne informacije o slučajnoj funkciji. Primera radi, na slici 2 date su slučajne funkcije $X_1(t)$ i $X_2(t)$ sa jednakim gornjim parametrima, ali, očigledno, različitim strukturama.

Pretpostavimo da računamo koeficijent korelacije između preseka X(t) i preseka $X(t+\tau)$. Jedan par odgovarajućih vrednosti čine vrednosti jedne iste realizacije na dva data preseka. Jasno je da će za isti korak τ slučajnoj promenljivoj $X_1(t)$ odgovarati koeficijent korelacije k_1 koji će biti veći od koeficijenta korelacije k_2 koji odgovara slučajnoj funkciji $X_2(t)$. Prema tome, korelisanost dva preseka



Sl. 2.

može da predstavlja značajnu dopunsku informaciju.

Umesto koeficijenta korelacije u teoriji slučajnih funkcija se koristi korelaciona funkcija $G(t, t+\tau)$. koja se zove još i autokorelaciona funkcija:

$$G(t, t+\tau) = M\left\{[X(t)-m(t)]\,[X(t+\tau) - m(t+\tau)]\right\}, \tag{1}$$

gde, kao i ranije, M označava matematičko očekivanje.

Normirana autokorelaciona funkcija se definiše kao:

$$g(t, t+\tau) = \frac{G(t, t+\tau)}{\sigma(t)\,\sigma(t+\tau)}$$

Za korisnike matematičkih metoda, značajan interes predstavljaju oni slučajni procesi (slučajne funkcije) koji se u smislu odvijaju homogeno ili stacionarno. Slučajna funkcija $X(t)$ se naziva stacionarnom ako njeni verovatnostni parametri ne zavise od argumenta t.

Prvi uslov stacionarnosti je da matematičko očekivanje bude:

$m(t) = \text{const.}$

Za praktičare ovaj uslov nije toliko važan jer se umesto $X(t)$ može analizirati centrirana slučajna funkcija $X'(t) = X(t) - m(t)$.

Drugi uslov je da disperzija $D(t)$ ispunjava zahtev:

$D(t) = \text{const.}$

Najzad, treći uslov je da autokorelaciona funkcija $G(t, t+\tau)$ ne zavisi od t:

$G(t, t+\tau) = G(\tau).$

Vidimo da korelaciona funkcija stacionarnog procesa zavisi samo od koraka τ.

Iz definicija $D(t)$ i $G(t, t+\tau)$ sledi važna relacija:

$G(t, t+0) = D(t) = D_x$

Dakle, disperzija je specijalan slučaj autokorelacione funkcije, pa se, prema tome, drugi i treći uslov stacionarnosti objedinjuju u jedan: u treći. Ako postoji mogućnost eliminacije $m(t)$, u praktičnoj primeni teorije slučajnih funkcija treći uslov je i jedini uslov čije ispunjavanje sužava primenu Teorije stacionarnih slučajnih procesa.

Ako se jedna poliharmonijska funkcija razloži na komponente i sačini grafik na kome se predstave amplitude tih komponenata u funkciji ugaone brzine, periode ili frekvencije, kaže se da taj grafik predstavlja spektar date poliharmonijske funkcije. Spektar jedne funkcije je funkcija koja opisuje raspodelu amplituda harmonijskih komponenti u funkciji frekvencije. Jasno je da on predstavlja značajnu informaciju o strukturi date funkcije.

Kod slučajnih funkcija amplitude harmonijskih članova (ako uopšte i postoje) su slučajne veličine, jer su od realizacije do realizacije različite i nepredvidljivo pogrešne.

Iz definicije korelacione funkcije vidimo da je:

$G(t,t+\tau) = G(t+\tau\ ,t)$,

tj. bez obzira na smer računanja ona je ista. S obzirom na ovu osobinu za stacionarnu funkciju će biti:

$G(\tau) = G(-\tau)$.

Dakle, korelaciona funkcija stacionarnog procesa je parna funkcija.

Kao što znamo iz klasične teorije Furijeovih redova, na intervalu $(-L,L)$ parna funkcija $G(\tau)$ može da se razvije u red oblika:

$$G(\tau) = \sum_{j=o}^{\infty} D_j \cos\omega_j\tau \ , \tag{2}$$

gde je osnovna perioda $T_1 = 2L$ (odgovarajuća ugaona brzina $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$), a ostale periode T_k su celobrojni delovi 2L.

Koeficijenti D_j računaju se po formulama:

$$D_o = \frac{1}{L}\int_o^L G(\tau)d\tau \qquad i$$

$$D_j = \frac{2}{L}\int_o^L G(\tau)\cos\omega_j\tau\ d\tau \ , \ (j\neq 0) \tag{3}$$

U teoriji slučajnih funkcija dokazuje se teorema da se i stacionarna funkcija $X'(t)$ čija se autokorelaciona funkcija $G(\tau)$ takodje može razviti u red oblika 2 (videti knjigu Ventceljeve):

$$X'(t) = \sum_{j=o}^{\infty} U_j\cos\omega_j t + V_j\sin\omega_j t, \tag{4}$$

u kome su U_j i V_j nekorelisane slučajne promenljive čija su matematička očekivanja $m_u = m_v = 0$, a disperzije $D(U_j)$ i $D(V_j)$ zadovoljavaju relacije:

$$D(U_j) = D(V_j) = D_j \ . \tag{5}$$

Razvoj $X'(t)$ u red 4 naziva se <u>spektralnim razlaganjem</u> stacionarne funkcije.

Disperzija slučajne funkcije $X'(t)$ nalazi se po poznatoj relaciji paragrafa 14 (jednačina 16) :

$$D_x = D[X'(t)] = \sum_{j=o}^{\infty} (\cos^2 \omega_j t + \sin^2 \omega_j t) D_j = \sum_{j=o}^{\infty} D_j . \qquad (6)$$

Jednačinom 6 pokazali smo da je disperzija stacionarne funkcije različito rasporedjena po frekvencijama, jer D_j, prema jednačini 3, zavisi od ω_j. Prema tome, spektar stacionarne funkcije predstavlja raspodelu disperzije u funkciji frekvencije. Poslednja rečenica se često koristi kao definicija spektra.

U novijim metodama filtriranja posmatranja pominje se termin spektralna gustina disperzije date funkcije ili, kratko, spektralna gustina.*

Ako je poznat spektar funkcije $X'(t)$ u okolini datog ω_j može se izračunati srednja gustina D_x na intervalu $\Delta\omega$:

$$S(\omega_j) = \frac{D_j}{\Delta\omega} . \qquad (7)$$

Ako interval $L \to \infty$, osnovna ugaona brzina $\omega_1 \to 0$, pa se ugaone brzine ω_j malo medjusobno razlikuju, odnosno, spektar teži da postane neprekidan. Posledica toga je i neprekidnost funkcije $S(\omega)$:

$$S(\omega) = \frac{d}{d\omega} (D_x) .$$

Na osnovi poslednje jednačine i poznatih osobina izvoda i integrala sledi:

$$D_x = \int_o S(\omega) d\omega .$$

Ako za $\Delta\omega$ uzmemo $\Delta\omega = \frac{\pi}{L}$, s obzirom na jednačine 3 i 7 izraz za $S(\omega)$ postaje:

$$S(\omega_j) \approx \frac{2}{\pi} \int_o^L G(\tau) \cos \omega_j \tau \, d\tau ,$$

ili, kada $L \to \infty$:

$$S(\omega_j) = \frac{2}{\pi} \int_o^{\infty} G(\tau) \cos \omega_j \tau \, d\tau . \qquad (8)$$

Zamenjujući u jednačini 2 D_j sa $S(\omega_j)\Delta\omega$ dobićemo:

---

* U engleskom jeziku za $S(\omega)$ upotrebljava se termin "power spectrum"

$$G(\tau) = \sum_{j=o} S(\omega_j) \cos \omega_j \tau \, \Delta\omega$$

ili, u graničnom slučaju, kada $L \to \infty$ imaćemo još jednu relaciju izmedju $G(\tau)$ i $S(\omega)$:

$$G(\tau) = \int_{o}^{\infty} S(\omega) \cos \omega\tau \, d\omega \quad . \tag{9}$$

Relacije 8 i 9 imaju značajnu ulogu u teoriji slučajnih funkcija kao i u teoriji razlaganja poliharmonijskih procesa.

32. AUTOKORELACIONE TRANSFORMACIJE

Za neprekidnu funkciju s(t), koju ćemo smatrati jednom realizacijom slučajne funkcije X(t), zadatu na intervalu [-L, L] autokorelaciona transformacija* se definiše izrazom:

$$s_1(t) = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} s(\tau)\, s(t+\tau)\, d\tau \,, \tag{1}$$

gde je $a < L$.

Ako je:

$$s(t) = \sum_{j=1}^{k} A_j \cos \omega_j t \tag{2}$$

autokorelacionom transformacijom se postiže sledeći rezultat:

$$s_1(t) = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} \Big[\sum_{j=1}^{k} A_j \cos \omega_j t \quad \sum_{j=1}^{k} A_j \cos \omega_j (t+\tau) \Big] d\tau =$$

$$= \frac{1}{2a} \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{k} A_i A_j \int_{-a}^{a} \cos \omega_i \tau \, \cos \omega_j (t+\tau)\, d\tau \,.$$

Predstavljanjem proizvoda kosinusa u obliku zbira i integracijom dobijamo:

$$s_1(t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} A_j \cos \omega_j t \sum_{i=1}^{k} A_i \alpha_{ij} \,, \tag{3}$$

gde je:

$$\alpha_{ij} = \frac{\sin(\omega_i - \omega_j)a}{(\omega_i - \omega_j)a} + \frac{\sin(\omega_i + \omega_j)a}{(\omega_i + \omega_j)a}$$

---

* Autokorelaciona transformacija nije identična sa autokorelacionom funkcijom. U teoriji slučajnih funkcija se dokazuje da se autokorelaciona funkcija može oceniti pomoću jedne realizacije, ali samo kada granica $a \to \infty$. To je poznata osobina ergodičnosti ili uslov ergodičnosti.

Uporedjujući jednačine 2 i 3 vidimo da posle autokorelacione transformacije faze ostaju iste, ali su amplitude različito redukovane. Amplitudni multiplikatori su:

$$\rho_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} A_i \, \alpha_{ij} \, .$$

Ako su ispunjena sledeća dva uslova:

$(\omega_i + \omega_j)\, a \gg 1$ i

$(\omega_i - \omega_j)\, a \gg 1$,

izraz za ρ_j se može znatno uprostiti:

$$\rho_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} A_i \left[\frac{\sin(\omega_i - \omega_j)\, a}{(\omega_i - \omega_j)\, a} + \frac{\sin(\omega_i + \omega_j)\, a}{(\omega_i + \omega_j)\, a} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} A_j \left(1 + \frac{\sin 2a\omega_j}{2a\omega_j}\right) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} A_i \, \alpha_{ij} \approx$$

$$\approx \frac{1}{2} A_j \, .$$

Posle ovog uprošćenja, izraz za $s_1(t)$ postaje:

$$s_1(t) \approx \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} A_j^2 \cos\omega_j t \, . \tag{4}$$

Neka je A_s najveća amplituda ($A_s = \sup A_j$). Izraz za $s_1(t)$ može se napisati i u obliku:

$$s_1(t) = \frac{A_s^2}{2} \left[\cos\omega_s t + \sum_{j=1}^{k} \theta_j^2 \cos\omega_j t \right] ,$$

gde su: $\theta_j = A_j / A_s < 1$.

Višestrukim autokorelacionim transformacijama postiže se prigušivanje svih harmonika osim s-te harmonike. Posle q transformacije dobićemo:

$$s_q(t) = 2 \left(\frac{A_s}{2} \right)^{2^q} \left(\cos\omega_s t + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^{k} \theta^{2^q} \cos\omega_j t \right) \tag{5}$$

Uzmimo sledeći primer: amplituda A_r, koja je druga po veličini, iznosi 2/3 A_s. Posle 2 transformacije amplituda θ_r će biti $(2/3)^{2^2} = (2/3)^4 = 0.2$, a posle 5 transformacija $\theta_r = (2/3)^{32} =$ $= 0.000\,002$. Iz ovog primera se vidi da se metodom autokorelacionih transformacija može postići visoka efektivnost.

Ako je s(t) zadato diskretno: $s_m = s(m), (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \ldots, \pm r)$ i ako ima oblik predstavljen jednačinom 2 , opšti član transformisanog niza će biti:

$$s_1 = \frac{1}{2\nu} \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{k} A_i A_j \sum_{t=-\nu}' \cos \omega_i t \cos \omega_j (t+m) .$$

Poslednji zbir je označen sa $\sum'$ zbog toga što prvi i poslednji sabirak treba pomnožiti sa 1/2.

Predstavljajući proizvod kosinusa u obliku zbira i sabirajući te kosinuse dobijamo:

$$s_1 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} \left\{ \sum_{i=1}^{k} A_i \alpha_{ij} \right\} A_j \cos \omega_j m \quad .$$

Koeficijenti α_{ij} iz jednačine 6 predstavljaju:

$$\alpha_{ij} = \frac{\sin(\omega_i - \omega_j)\nu}{2\nu \operatorname{tg} \frac{\omega_i - \omega_j}{2}} + \frac{\sin(\omega_i + \omega_j)\nu}{2\nu \operatorname{tg} \frac{\omega_i + \omega_j}{2}} .$$

Kao i u slučaju neprekidno date funkcije, pri dovoljno velikom ν i ako $\omega_i - \omega_j$ nije suviše mala, amplitudni multiplikatori postaju:

$$\rho_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} A_i \alpha_{ij} \approx \frac{1}{2} A_j .$$

Autokorelacione transformacije su naročito efikasne u slučajevima kada je nivo slučajnih grešaka relativno veliki (u odnosu na amplitude korisnih signala). Ako se data funkcija sastoji od poliharmonijskog signala s(t) i šuma u(t):

$$y(t) = s(t) + u(t),$$

autokorelacionom transformacijom se postiže:

$$y_1(t) = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} s(\tau)\, s(t+\tau)\, d\tau + \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} u(\tau) u(t+\tau)\, d\tau \;+$$

$$+ \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} s(\tau)\, u(t+\tau)\, d\tau + \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} u(\tau)\, s(t+\tau)\, d\tau \;.$$

U najprostijem slučaju:

$$s(t) = A_o \cos \omega_o t ,$$

pa je:

$$y_1(t) = \frac{1}{2} A_o^2 \cos \omega_o t \left[1 + \frac{\sin 2\omega_o a}{2\omega_o a} \right] +$$

$$+ \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} u(\tau)\, u(t+\tau)\, d\tau + \frac{A_o}{2a}\int_{-a}^{a} \cos \omega_o \tau \; u(t+\tau)\, d\tau \;+$$

$$+ \frac{A_o}{2a}\int_{-a}^{a} u(\tau) \cos \omega_o (t+\tau)\, d\tau \;.$$

Ako je a dovoljno veliko poslednja dva člana se mogu zanemariti pa je:

$$y_1(t) \approx \frac{1}{2} A_o^2 \cos \omega_o t + G_u(t) , \tag{7}$$

gde je $G_u(t)$ autokorelaciona funkcija $u(t)$, jer je po definiciji:

$$G_u(t) = \lim_{a \to \infty} \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} u(\tau)\, u(t+\tau)\, d\tau \;.$$

Ako šum $u(t)$ ne sadrži sistematske komponente, sa povećanjem t po apsolutnoj vrednosti $G_u(t)$ brzo opada, pa se korisni signal izdvaja u vrlo čistom vidu. To brzo opadanje $G_u(t)$ proističe iz činjenice da sa povećanjem koraka τ dva preseka $u(t)$ su sve manje korelisani.

Radi ocene statističkog značenja pojedinih pikova u transformisanim funkcijama, tj. radi odredjivanja verovatnoće u kojoj meri oni predstavljaju rezultate rezonancija slučajnih grešaka ili u kojoj meri oni objektivno odražavaju harmonijske komponente, neophodno je da se znaju disperzije.

Ako je $y(x)$ dato diskretno:

$$y = A_o \cos \omega_o m + u_m$$

autokorelacionom transformacijom se postiže:

$$y_1 = \frac{1}{2\nu} \sum_{t=-\nu}^{\nu}{}' (A_o \cos \omega_o t + u_t)[A_o \cos \omega_o (t+m) + u_{t+m}] \quad (8)$$

Može se jednostavno pokazati da disperzija y_1 zadovoljava jednačinu* :

$$D(y_1) = \frac{2\sigma^2}{\nu}(A_o^2 + \frac{1}{4}\sigma^2) , \quad (9)$$

gde je σ^2 disperzija $y(t)$ za koju se pretpostavlja da je konstantna (šum za koji je σ^2=const. naziva se "beli šum").

Značajnu informaciju o efektivnosti transformacije predstavlja tkz. nivo šuma koji se definiše kao odnos disperzija šuma i korisnog signala:

$$\mu(y) = \frac{D[u(t)]}{D[s(t)]}$$

Bez izvodjenja (čitaoca koji se za to interesuje upućujemo na citiranu knjigu Serebrenikova-Pervozvanskog) napominjemo da je za netransformisanu funkciju $y(t)$:

$$\mu(y) \approx 2\sigma^2 / A_o^2 ,$$

a za $y_1(t)$:

$$\mu(y_1) \leq \frac{16\sigma^2}{\nu A_o^2} (1 + \frac{1}{4} \frac{\sigma^2}{A_o^2}) \quad (10)$$

Za $\nu > 8$ $\mu(y_1) < \mu(y)$. U praktičnim primenama korelacionih transformacija uvek je $\nu \gg 8$, pa se nivo šuma smanjuje već u prvoj transformaciji.

---

* Serebrenikov M.G., Pervozvanskij A.A.: Vijavlenije skritih periodičnostei, Moskva, 1965.

33. METODE SPEKTRALNE ANALIZE SLUČAJNIH FUNKCIJA

Neka je nad funkcijom $y(t)$ izvršena autokorelaciona transformacija:

$$y_1(t)=\lim_{a\to\infty}\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} y(\tau)y(t+\tau)\,d\tau \equiv G_y(t)\ ,$$

gde je $G_y(t)$ autokorelaciona funkcija $y(t)$.

Furijeova integralna transformacija $G_y(t)$, kao što znamo, predstavlja spektralnu gustinu funkcije $y(t)$:

$$S(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}G_y(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}y_1(t)dt$$

ili, na osnovu jednačine 8 paragrafa 31 :

$$S(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} y_1(t)\cos\omega t\, dt\ .$$

Ako $y(t)$ predstavlja zbir poliharmonijskog signala $s(t)$ i šuma $u(t)$:

$$y(t)=\sum_{j=1}^{k} A_j\cos(\omega_j t+\psi_j)+u(t), \tag{1}$$

$S(\omega)$ se računa po formuli:

$$S(\omega)\ \frac{1}{4}=\sum_{j=1}^{k} A_j^2\left[\delta(\omega-\omega_j)+\delta(\omega+\omega_j)\right]+S_u(\omega). \tag{2}$$

Ovu relaciju ćemo dokazati.

U poslednjoj jednačini δ predstavlja poznatu Dirakovu funkciju:

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\cos\omega x\, d\omega \tag{3}$$

Njena važna svojstva su:

1. $\delta(x)=\begin{cases}0 & \text{za } x\neq 0\\ \infty & \text{za } x=0\end{cases}$

2. $\int_{-a}^{a}\delta(x)\,dx=1$

3. $\int_a^b y(x)\delta(t-x)\,dx = y(t), \quad$ za $t \in (a,b)$.

Kada probna ugaona brzina $\omega \to \omega_j$ Dirakova funkcija $\delta(\omega - \omega_j) \to \infty$, pa se $S(\omega)$ sastoji od niza vrlo oštrih pikova koji počinju od jednog datog nivoa jednakog spektralnoj gustini šuma $S_u(\omega)$. Ako se radi o belom šumu, znamo da je $S_u(\omega) = \text{const.}$

Do relacija 2 dolazi se lako ako se ima u vidu relacija 7 paragrafa 32 u kojoj $\frac{1}{2} A_o^2 \cos \omega_o t$ treba zameniti sa $\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} A_j^2 \cos\omega_j t$:

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} A_j^2 \cos\omega_j t \right\} \cos\omega t \, dt \; +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_u(t)dt =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{j=1}^{k} A_j^2 \cos\omega_j t \right\} \cos\omega t \, dt + S_u(\omega) .$$

Prvi član sa desne strane poslednje jednačine može da se napiše u obliku:

$$S_s(\omega) = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{k} A_j^2 \int_{-\infty}^{\infty} \cos\omega_j t \cos\omega t \, dt =$$

$$= \frac{1}{8\pi} \sum_{j=1}^{k} A_j^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left[\cos(\omega + \omega_j)t + \cos(\omega - \omega_j)t \right] dt .$$

S obzirom na jednačinu 3 , $S_s(\omega)$ postaje:

$$S_s(\omega) = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{k} A_j^2 \left\{ \delta(\omega + \omega_j) + \delta(\omega - \omega_j) \right\} ,$$

pa se za $S(\omega)$ dobija izraz koji je i trebalo dokazati.

Pored odredjivanja spektralne gustine preko korelacione funkcije, ona se može približno odrediti i pomoću Furijeovih transformacija:

$$S(\omega) \approx \frac{L}{4\pi}\left[U^2(\omega) + V^2(\omega)\right]. \tag{4}$$

Ako je realizacija $y(t)$ zadata diskretno u 2r+1 tačaka ($y_{-r}, y_{-r\,1}, \ldots, y_r$), ocena spektralne gustine se vrši pomoću jednačine:

$$S(\omega) \approx \frac{2r+1}{8\pi}\left[U^2(\omega) + V^2(\omega)\right] \tag{4'}$$

gde se $U(\omega)$ i $V(\omega)$ računaju pomoću jednačine 1' i 2' paragrafa 30.

Kada se kaže "ocena spektralne gustine" ima se u vidu da je interval na kome je zadata realizacija $y(t)$ konačan i da je nemoguće odredjivanje teorijske vrednosti $S(\omega)$. Pošto se u praksi redovno javlja taj slučaj, pitanje koje se zbog toga prirodno nameće je kolika je pouzdanost ili kolika je tačnost takvih ocena.

Ako se $S(\omega)$ računa po formuli 4', Šuster je pokazao da pri hipotezi H_o po kojoj y_i predstavljaju jednu realizaciju belog šuma važi sledeća relacija*:

$$P\left\{S(\omega) > \frac{x\sigma^2}{2\pi}\right\} = e^{-x}, \tag{5}$$

u kojoj je P verovatnoća izraza u zagradi, x - proizvoljno izabrani broj i σ^2 - disperzija y_i.

Sa unapred zadatim nivoom statističke značajnosti μ, koji je, po pravilu, mali (recimo, 0.01, 0.05, 0.10, itd.), računamo x iz odnosa: $e^{-x} = \mu$. Sa tako dobijenim x računamo granicu $S_o = \frac{x\sigma^2}{2\pi}$. Svi pikovi datoga spektra za koje je $S(\omega_i) > S_o$ su u protivrečnosti sa hipotezom H_o. Drugim rečima, oni su u protivrečnosti sa hipotezom o rezonanciji slučajnih grešaka kao uzroku njihova porekla.

Valker** je modifikovao Šusterovu relaciju i našao da je verovatnoća P da bar jedna od N spektralnih linija $S(\omega_i)$ $(i=1,2,\ldots,N)$ datoga spektra predje granicu $\frac{x\sigma^2}{2}$ jednaka**:

---

* Schuster A: Terrestr. Magn. 3, 1898, 13-41.

** Walker G: Calcutta Ind. Met. Mems. 21,9,1914.

$$P\left\{S_1(\omega) > \frac{x\sigma^2}{2\pi}\right\} = 1 - (1 - e^{-x})^N, \qquad (6)$$

gde je $S_1(\omega)$ najveća spektralna gustina:

$$S_1(\omega) = \sup_i S(\omega_i) \ .$$

Odredjujući x iz relacije:

$$1 - (1 - e^{-x})^N = \mu ,$$

gde je μ proizvoljno izabrani mali pozitivni broj, možemo odrediti granicu $S_o = \frac{x\,\sigma^2}{2\pi}$ ispod koje treba da se nalaze sve spektralne linije koje rezultiraju iz slučajnih grešaka.

Umesto jednačina 5 i 6 u kojima figuriše σ^2 - parametar koji se mora odrediti iz neposrednih posmatranja i sadrži neizbežnu slučajnu grešku, koriste se sledeće relacije* :

$$H(\omega_i) = \frac{S(\omega_i)}{\sum_{j=1}^{N} S(\omega_j)} \quad i \qquad (7)$$

$$P\left\{H(\omega_i) > x\right\} = (1-x)^{N-1}, \quad (0 < x < 1) . \qquad (8)$$

Relacije 9 i 10 prethodnog paragrafa i relacije 5 - 8 ovoga paragrafa mogu da zadovolje osnovne potrebe korisnika statističkih metoda u smislu ocene pouzdanosti dobijenih rezultata. Što se tiče ocene tačnosti rezultata dobijenih primenom prostih kombinacija ordinata, zbog jednostavnosti u izvodjenju potrebnih formula mi ćemo ih izostaviti. Pomoću teorema koje su date u ovoj knjizi čitaoc će za svaku od pomenutih metoda lako doći do potrebnog izraza za ocenu tačnosti.

Posmatranja jedne iste pojave na raznim opservatorijama se razlikuju po tačnosti, pa će, kao posledica toga, nivo šuma i dužine odgovarajućih spektralnih linija varirati zavisno od tačnosti posmatračkog materijala. Da bi se rezultati spektralne analize lakše upore-

---

* Serebrenikov M.G. i Pervozvanskij A.A.: Vijavlenije skritih periodičnostej, 1965., Moskva.

djivali, umesto $S(\omega_i)$ računaju se tzv. normirane spektralne gustine. U tom cilju se spektralne gustine $S(\omega_i)$ izraze u jedinicama $S(\omega_o)$ - spektralne gustine koja odgovara nekom od glavnih ili tipičnih harmonijskih članova. Drugim rečima, $S(\omega_i)$ se podele sa $S(\omega_o)$.

33.1. METODA BLEKMANA-TJUKIJA I NEKE DRUGE INDIREKTNE METODE

U poslednjih desetak godina osobitu pažnju astronoma i geofizičara privlači metoda spektralne analize Blekmana-Tjukija* . U ovome paragrafu izložićemo osnove pomenute i još nekih metoda koje su poznate pod nazivom indirektne metode spektralne analize.

Računanje spektralnih gustina pomoću jednačina 2 , 4 ili 4 ' se naziva direktnim jer bazira na podacima neposrednih merenja. Kod indirektnih metoda spektar poliharmonijskog procesa se dobija iz modifikovane autokorelacione funkcije.

Ako je $X(t)$ slučajna funkcija zadata na intervalu $t \in \left[-\frac{T_n}{2}, \frac{T_n}{2}\right]$, autokorelaciona funkcija će biti:

$$G_{oo}(\tau) = \frac{1}{2L(\tau)} \int_{-L(\tau)}^{L(\tau)} X(t - \frac{\tau}{2})\ X(t + \frac{\tau}{2})\, dt \qquad (9)$$

gde je:

$$L(\tau) = \frac{T_n - |\tau|}{2} .$$

Kao što znamo, $G_{oo}(\tau)$ se može računati za vrednosti koje zadovoljavaju uslov: $|\tau| \leq T_m$ $(T_m < T_n)$, ali da bi se dobile "stabilne" ocene spektralne gustine $G_{oo}(\tau)$, potrebno je da bude: $|\tau| \leq \frac{T_n}{10}$.

---

*Blackman R.B. and Tukey J.W.: The Measurement of Power Spectra from the Point of View of Communications Engineering, Dover, 1959. i Blackman R.B.: Data Smoothing and Prediction, Reading, 1965.

Ako $G_{oo}(\tau)$ pomnožimo nekom funkcijom $D_i(\tau)$ dobićemo modifikovanu autokorelacionu funkciju.

U metodama spektralne analize za $D_i(\tau)$ se uzimaju funkcije koje zadovoljavaju sledeća tri uslova:

1. $D_i(0) = 1$,
2. $D_i(\tau) \equiv 0$, za $|\tau| > T_n$ i
3. $D_i(-\tau) = D_i(\tau)$.

U engleskoj terminologiji funkcija $D_i(\tau)$ se naziva "lag window". Mi joj nećemo dodeliti neko posebno ime.

Sa datim $D_i(\tau)$ i $G_{oo}(\tau)$ računa se:

$$G_i(\tau) = D_i(\tau)\, G_{oo}(\tau),$$

a zatim i $S_i(f)$:

$$S_i(f) = \int_{-\infty}^{\infty} G_i(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau \quad (\omega = 2\pi f) \tag{10}$$

Za modifikovanu spektralnu gustinu $S_i(f)$ ćemo upotrebljavati kraći termin: spektralna gustina, a za spektralnu gustinu po definiciji $S(f)$ - termin: prava spektralna gustina.

Ako imamo u vidu više realizacija slučajne funkcije $X(t)$, ima smisla govoriti o srednjoj vrednosti $S_i(f)$ koju ćemo označiti sa: $[S_i(f)]_m$ i o vezi izmedju srednje i prave spektralne gustine. Pre nego što pomenutu vezu izvedemo primetićemo da je:

$$[G_i(\tau)]_m = D_i(\tau)\, G(\tau),$$

gde je $G(\tau)$ "prava" autokorelaciona funkcija. Da nebi bilo zabune, čitaoca potsećamo da, po definiciji, autokorelaciona funkcija predstavlja matematičko očekivanje proizvoda: $X(t)X(t+\tau)$. Pošto je $D_i(\tau)$ neslučajna funkcija, srednja vrednost $G_i(\tau)$ jednaka je proizvodu $D_i(\tau)$ i srednje vrednosti $G_{oo}(\tau)$ ($G_{oo}(\tau)$ predstavlja ocenu autokorelacione funkcije iz jedne realizacije) koje je, s obzirom na uslov ergodičnosti, jednaka autokorelacionoj funkciji $G(\tau)$ $(-\infty < \tau < \infty)$.

Ako Furijeovu transformaciju označimo slovom $\mathcal{F}$, možemo pisati sledeće jednačine:

$$S_i(f) = \mathcal{F}[G_i(\tau)],$$

$$[S_i(f)]_m = \mathcal{F}[G_i(\tau)]_m =$$

$$= \mathcal{F}\left[D_i(\tau)\,G(\tau)\right] =$$
$$= Q_i(f) \circledast S(f)\,. \qquad (11)$$

Okružena zvezdica u jednačini 11 ne označava proizvod, već tzv. konvoluciju. Po definiciji, funkcija V(t) je konvolucija funkcija W(t) i E(t) za argument t ako je:

$$V(t) = \int W(t-\lambda)\,E(\lambda)\,d\lambda = W(t) \circledast E(t)$$

ili, posle promene argumenta:

$$V(t) = \int W(\tau)\,E(t-\tau)\,d\tau\,.$$

Funkcija:

$$Q_i(f) = \mathcal{F}\left[D_i(\tau)\right],$$

koja figuriše u jednačini 11 , naziva se spektralni prorez (u engleskoj terminologiji: "spectral window") .

Funkcija $S(f) = \mathcal{F}[G(\tau)]$ predstavlja pravi spektar.

Najjednostavniji oblik $D_i(\tau)$ je:

$$D_o(\tau) = \begin{cases} 1, & \text{za } |\tau| < T_n \\ 0, & \text{za } |\tau| > T_n \end{cases} \qquad (12)$$

Odgovarajući spektralni prorez je:

$$Q_o(\tau) = 2T_n \frac{\sin \omega T_n}{\omega T_n} \qquad (12)'$$

U slučajevima kada se uzima da je $T_m = T_n$, računanje $G_{oo}(\tau)$ je jednostavnije ukoliko je:

$$D_1(\tau) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|\tau|}{T_m}\,, & \text{za } |\tau| < T_m \\ 0\,, & \text{za } |\tau| > T_m \end{cases} \qquad (13)$$

Odgovarajući spektralni prorez $Q_1(f)$ je definisan jednačinom:

$$Q_1(f) = T_m \frac{\sin \dfrac{\omega T_m}{2}}{\dfrac{\omega T_m}{2}} \qquad (13)'$$

Parazitski efekti, koji se ocenjuju prema odnosu amplitude primarnog i sekundarnih pikova, su još manji ako se za $D_i(\tau)$ uzme:

$$D_2(\tau) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos \frac{\pi \tau}{T_m}\right) D_o(\tau) \qquad (14)$$

Spektralni prorez, $Q_2(f)$, poznat kao prorez Blekmana-Tjukija, je definisan jednačinom:

$$Q_2(f) = \frac{1}{2} Q_o(f) + \frac{1}{4} Q_o\left(f - \frac{1}{2T_m}\right) + \frac{1}{4} Q_o\left(f + \frac{1}{2T_m}\right) . \qquad (14)'$$

Kada se radi o frekvencijama f u oblasti: $1/T_m < f < 2/T_m$, još bolji rezultati se postižu sa:

$$D_3(\tau) = \left(0.54 + 0.46 \cos \frac{\pi\tau}{T_m}\right) D_o(\tau) . \qquad (15)$$

Spektralni prorez $Q_3(f)$ se takodje može izraziti preko $Q_o(f)$:

$$Q_3(f) = 0.54 Q_o(f) + 0.23\, Q_o\left(f - \frac{1}{2T_m}\right) + 0.23\, Q_o\left(f + \frac{1}{2T_m}\right) . \qquad (15)'$$

Polazeći od datih relacija dolazimo do sledećih odnosa izmedju $S_i(f)$ i $S_o(f)$:

$$S_2(f) = \mathcal{F}\left[G_2(\tau)\right] =$$

$$= \mathcal{F}\left[D_2(\tau)\, G_{oo}(\tau)\right] =$$

$$= \mathcal{F}\left[\frac{1}{2}\left(1 + \cos \frac{\pi\tau}{T_m}\right) D_o(\tau) G_{oo}(\tau)\right] =$$

$$= \mathcal{F}\left[\frac{1}{2}\left(1 + \cos \frac{\pi\tau}{T_m}\right) G_o(\tau)\right] =$$

$$= \nabla_{hn} \circledast S_o(f) . \qquad (16)$$

Veličina ∇_{hn} je definisana izrazom:

$$\nabla_{hn}(f) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{4}\delta\left(f - \frac{1}{2T_m}\right) + \frac{1}{4}\delta\left(f + \frac{1}{2T_m}\right) . \qquad (17)$$

Kao i ranije, $\delta(u)$ predstavlja poznatu Dirakovu funkciju.

Za datu frekvenciju f_1, $S_2(f_1)$ se računa po formuli:

$$S_2(f_1) = \frac{1}{4} S_o\left(f_1 - \frac{1}{2T_m}\right) + \frac{1}{2} S_o(f_1) + \frac{1}{4} S_o\left(f_1 + \frac{1}{2T_m}\right) . \qquad (18)$$

...

Gornja metoda izravnanja sa težinama 0.25,0.50,0.25 je poznata kao Hanova metoda (po austrijskom meteorologu Juliusu von Hannu) ili "hanning" metoda.

Na sličan način može se dokazati da je:

$$S_3(f) = \nabla_{hm} \circledast S_o(f) \tag{19}$$

gde je:

$$\nabla_{hm} = 0.54\,\delta(f) + 0.23\,\delta(f - \frac{1}{2T_m}) + 0.23\,\delta(f + \frac{1}{2T_m}) . \tag{20}$$

Spektralna gustina $S_3(f_1)$ se računa po formuli:

$$S_3(f_1) = 0.23\ S_o(f_1 - \frac{1}{2T_m}) + 0.54\ S_o(f_1) + 0.23\ S_o(f_1 + \frac{1}{2T_m}) \tag{21}$$

Metoda izravnanja po jednačini 21 je poznata kao Hamingova metoda (po R.W.Hammingu) ili "haming" metoda.

Kao poslednju metodu spektralne analize navešćemo metodu koja se bazira na jednačinama:

$$D_4(\tau) = (0.42 + 0.50 \cos \frac{\pi\tau}{T_m} + 0.08 \cos \frac{2\pi\tau}{T_m})\ D_o(\tau) =$$

$$= \frac{1}{25}(17 + 8 \cos \frac{\pi\tau}{T_m})\ \ \frac{1}{2}\ (1 + \cos \frac{\pi\tau}{T_m})\ \ D_o(\tau), \tag{22}$$

$$S_4(f) = 0.16\ S_2(f - \frac{1}{2T_m}) + 0.68\ S_2(f) + 0.16\ S_2(f + \frac{1}{2T_m}) . \tag{23}$$

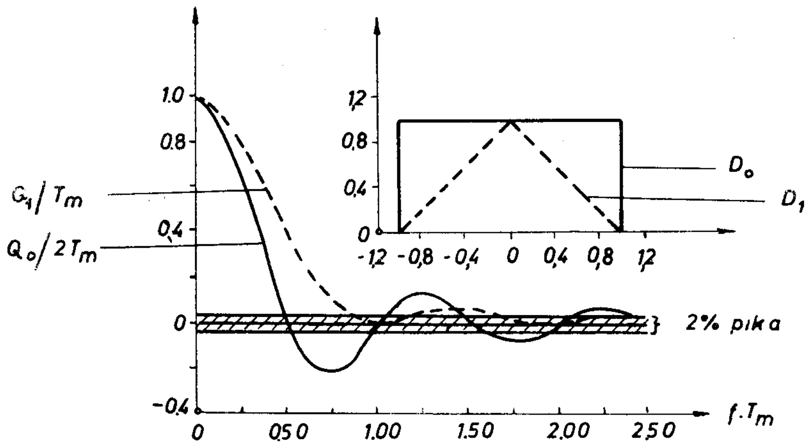
$S_4(f)$ može da se računa preko $S_o(f)$ na taj način što se Hanovom metodom prethodno odrede $S_2(f - \frac{1}{2T_m})$, $S_2(f)$ i $S_2(f + \frac{1}{2T_m})$.

Radi lakšeg medjusobnog uporedjenja u pogledu selektivnosti i u pogledu uporedjenja parazitskih efekata, na slikama 1 i 2 , pozajmljenim iz knjige Blekmana 1965 , predstavljena su prva četiri spektralna proreza.

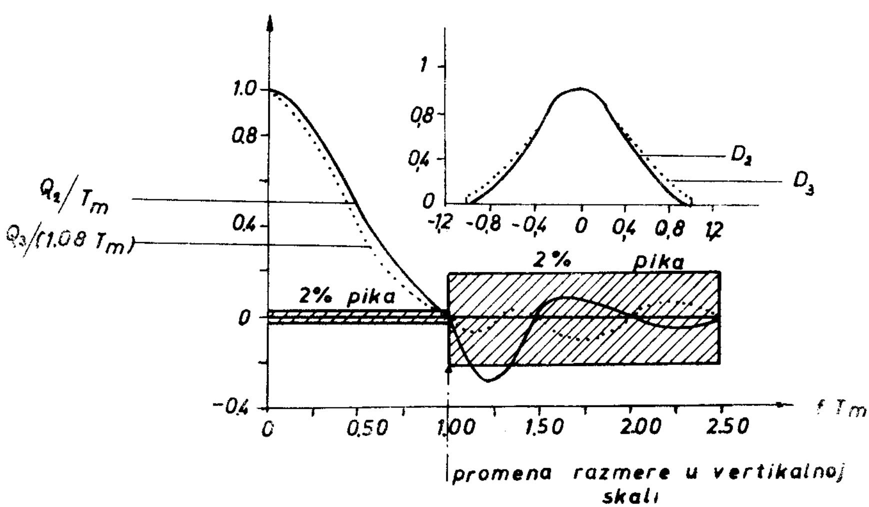
Istraživanjima raznih formi spektralnih proreza bavili su se: Parzen E.* , Bartlett M.S.** , itd.

** An Introduction to Stochastic Processes, Cambridge, 1955.

*Ann. Math. Stat. 28, 1957.


1.0
0.8
0.4
0
-0.4
G_1/T_m
$Q_0/2T_m$
0
0.50
1.00
1.50
2.00
2.50
$f.T_m$
2% pika
1,2
0,8
0,4
0
-1,2
-0,8
-0,4
0
0,4
0,8
1,2
D_0
D_1

Sl. 1.


1.0
0.8
0.4
0
-0.4
Q_2/T_m
$Q_3/(1.08\ T_m)$
2% pika
2% pika
0
0.50
1.00
1.50
2.00
2.50
1
0,8
0,4
0
-1,2
-0,8
-0,4
0
0,4
0,8
1,2
D_2
D_3
promena razmere u vertikalnoj skali

Sl. 2.

Ocene spektralnih gustina indirektnim metodama imaju veliki praktični značaj koji se ogleda u izravnanju. Posmatrane realizacije slučajnih funkcija su date na konačnim intervalima i u konačnom broju, pa ocene spektralnih gustina sadrže slučajne greške. Uvodjenjem multiplikatora autokorelacione funkcije $D_i(\tau)$ njihov uticaj se može znatno umanjiti.

Neka je data n+1 vrednost funkcije $X(t)$ sa ekvidistantnim razmakom $\Delta t=1$:

$$X_o, X_1, X_2, \ldots, X_n$$

Na način koji ćemo objasniti kasnije biramo podinterval od h jedinica i računamo:

1. Srednje proizvode:

$$G_r = \frac{1}{n+1-hr} \sum_{i=0}^{n-hr} X_i X_{i+hr}; \quad (r=0.1,2,\ldots,m; m \leq \frac{n}{h})$$

2. Sirove spektralne gustine

$$S'(s) = h\left(G_o + 2\sum_{r=1}^{m-1} G_r \cos\frac{rs\pi}{m} + G_m \cos\pi s\right); (s=0,1,2,\ldots,m)$$

3. Prečišćene spektralne gustine $S(s)$ koje se dobijaju izravnanjem sirovih sa težinama:

0.25, 0.50, 0.25 (Hanova metoda)

ili:

0.23, 0.54, 0.23 (Hamingova metoda)

Izmedju broja s i frekvencije f važi relacija: $f = \frac{s}{2mh}$,

Kao mera stabilnosti ocene spektralne gustine $S(f)$ u odnosu na srednju vrednost $\bar{S}(f)$ uzima se količnik:

$$k = \frac{2\,\bar{S}(f)}{\sigma_s^2} ,$$

gde je σ_s^2 disperzija slučajne promenljive $S(f)$.

Za k se koristi naziv broj stepeni slobode. Ovaj naziv je dat ne samo zbog toga što je odnos srednje vrednosti i disperzije slučajne promenljive χ_k^2 (k - broj stepeni slobode) jednak k/2, već i zbog toga što detaljnija teorijska analiza i eksperimentalna istraživanja sa generisanim serijama pokazuju dobro slaganje izmedju tih relacija.

Stabilnost prečišćenih spektralnih gustina $S(s)$ približno je jednaka stabilnosti χ_k^2 *, gde je:

$$k = 2\left(\frac{n}{hm} - \frac{1}{3}\right) .$$

Prema tome, pri izboru h o ovoj činjenici se vodi računa.

Proizvod hm se zove naj eći ili maksimalni korak.

---

* Blackman R.B.: DATA SMOOTHING AND PREDICTION, Addison-Wesley Publish. Company, inc., 1965. str.149.

34. NEKE NAPOMENE U VEZI SA PRIMENOM METODA SPEKTRALNE ANALIZE

1. Ako je $X(t)$ zadato u obliku niza ekvidistantnih vrednosti sa ekvidistantnim razmakom Δt, treba voditi računa o tome da je spektralna gustina $S(f)$ periodična funkcija f sa periodom $1/\Delta t$:

$$S(f) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(k) e^{-i2\pi f k \Delta t} .$$

U nekim izrazima koje smo dali u prethodnim paragrafima Δt je izostavljeno, jer se implicitno pretpostavlja da je $\Delta t = 1$. To je sasvim jasno ako se uporede zbirovi sa odgovarajućim integralima.

Zbog periodičnosti funkcije $S(f)$, deo ove funkcije nad intervalom $-f_N \leq f \leq f_N$, gde je $f_N = \frac{1}{2\Delta t}$, daje maksimum mogućih informacija o sastavu poliharmonijskog signala. Granična frekvencija f_N je poznata pod imenom <u>Najkvistova frekvencija</u> (Nyquist frequency) .

2. Ako trajanje naših posmatranja $2dt$ nije zanemarljivo u odnosu na periodu $T = 2\pi/\omega$ neke harmonijske komponente $X(t) = a \sin \omega t$, X_i će predstavljati srednje vrednosti ordinata u intervalu $(t_o - dt,\ t_o + dt)$:

$$X_k = \frac{a}{2dt} \int_{t_k - dt}^{t_k + dt} \sin \omega u \, du =$$

$$= \frac{\sin \omega dt}{\omega dt} \, a \sin \omega t_k =$$

$$= A \sin \omega t_k .$$

Iz poslednjih jednačina je jasno da će amplituda A, koju računamo iz X_i, biti jednaka amplitudi [illegible]kovanoj za faktor:

$$\varkappa = \frac{\sin\omega dt}{\omega dt} .$$

To znači da računatu amplitudu treba pomnožiti sa $1/\varkappa$ da bi se dobila prava amplituda a.

3. U spektralnoj analizi slučajnih funkcija frekvencije mogu biti pozitivne i negativne. Iz definicije spektralne gustine se vidi da ona predstavlja funkciju definisanu u oblasti $-\infty < f < 0$ i oblasti $0 \leq f < \infty$. U istraživanjima prirodnih pojava, naravno, nas interesuje samo oblast $f \in (0, \infty)$.

$$\varkappa = \frac{\sin \omega\, dt}{\omega\, dt} .$$

To znači da računatu amplitudu treba pomnožiti sa $1/\varkappa$ da bi se dobila prava amplituda a.

3. U spektralnoj analizi slučajnih funkcija frekvencije mogu biti pozitivne i negativne. Iz definicije spektralne gustine se vidi da ona predstavlja funkciju definisanu u oblasti $-\infty < f < 0$ i oblasti $0 \leq f < \infty$. U istraživanjima prirodnih pojava, naravno, nas interesuje samo oblast $f \in (0, \infty)$.

35. P R I L O Z I

T A B L I C A I

35.1 Funkcija normalne raspodele verovatnoće F(x), gustina normalne raspodele f(x) i izvodi f(x).

x	F(x)	f(x)	f′(x)	f″(x)	f‴(x)	$f^{IV}(x)$
0,00	0,50000	0,39894	-0,00000	-0,39894	0,00000	1,19683
05	51994	39844	01992	39745	05972	18936
10	53983	39695	03970	39298	11869	16708
15	55962	39448	05917	38560	17018	13038
20	57926	39104	07821	37540	23150	07990
25	59871	38667	09667	36250	28396	1,01651
30	61791	38139	11442	34706	33295	0,94130
35	63683	37524	13133	32927	37791	85555
40	65542	36827	14731	30935	41835	76070
45	67364	36053	16224	28752	45386	65832
50	69146	35207	17603	26405	48409	55010
55	70884	34294	18862	23920	50880	43777
60	72575	33322	19993	21326	52783	32309
65	74215	32297	20993	18652	54110	20783
70	75804	31225	21858	15925	54863	0,09371
75	77337	30114	22585	13175	55052	-0,01764
80	78814	28969	23175	10429	54694	12468
85	80234	27798	23629	07714	53814	22600
90	81594	26609	23948	05056	52445	32034
95	82894	25406	24136	02477	50624	40668
1,00	0,84134	0,24197	-0,24197	-0,00000	0,48394	-0,48394

T A B L I C A I (nastavak)

x	F(x)	f(x)	f'(x)	f"(x)	f'''(x)	$f^{IV}(x)$
1,00	0,84134	0,24197	-0,24197	0,00000	0,48394	-0,48394
05	85314	22988	24138	02356	45801	55160
10	86433	21785	23964	04575	42895	60909
15	87493	20594	23683	06641	39728	65611
20	88493	19419	23302	08544	36352	69255
25	89435	18265	22831	10274	32820	71847
30	90320	17137	22278	11824	29184	73413
35	91149	16038	21652	13192	25495	73993
40	91924	14973	20962	14374	21800	73642
45	92647	13943	20217	15372	18145	72427
1,50	93319	12952	19428	,16190	14571	70425
55	93943	12001	18601	16831	11114	67721
60	94520	11092	17747	17304	07809	64405
65	95053	10226	16874	17615	04682	60571
70	95543	09405	15988	17775	0,01759	56316
75	95994	08628	15099	17795	-0,00944	51733
80	96407	07895	14211	17683	03411	46915
85	96784	07206	13332	17458	05633	41953
90	97128	06562	12467	17126	07605	36928
95	97441	05959	11621	16701	09326	31919
2,00	97725	05399	10798	16197	10798	26996
05	97982	04879	10002	15626	12028	22220
10	98214	04398	09237	14998	13024	17646
15	98422	03955	08503	14327	13797	13318
20	98610	03547	07804	13622	14360	09274
25	98778	03174	07141	12894	14729	05542
30	98928	02833	06515	12152	14920	-0,02141
35	0,99061	0,02522	-0,05926	0,11405	-0,14949	+0,00915

TABLICA I (nastavak)

x	F(x)	f(x)	f′(x)	f″(x)	f‴(x)	$f^{IV}(x)$
2,40	0,99180	0,02239	-0,05375	0,10660	-0,14834	0,03623
45	99286	01984	04860	09924	14593	05981
2,50	99379	01753	04382	09202	14242	07997
55	99461	01545	03940	08501	13798	09683
60	99534	01358	03532	07824	13279	11053
65	99598	01191	03157	07174	12698	12127
70	99653	01042	02814	06555	12071	12926
75	99702	00909	02501	05968	11410	13473
80	99744	00792	02216	05414	10727	13793
85	99781	00687	01959	04895	10034	13910
90	99813	00595	01726	04411	09339	13850
95	99841	00514	01517	03961	08651	13638
3,00	99865	00443	01330	03545	07977	,13296
05	99886	00381	01162	03163	07323	12847
10	99903	00327	01013	02813	06694	12313
15	99918	00279	00880	02493	06093	11714
20	99931	00238	00763	02203	05523	11066
25	99942	00203	00659	01940	04987	10387
30	99952	00172	00568	01704	04485	09690
35	99960	00146	00489	01491	04018	08987
40	99966	00123	00419	01301	03586	08290
45	99972	00104	00358	01132	03189	07606
3,50	99977	00087	00305	00982	02825	06943
55	99981	00073	00260	00849	02494	06308
60	99984	00061	00220	00732	02194	05703
65	99987	00051	00186	00629	01923	05133
70	0,99989	0,00042	-0,00157	0,00539	-0,01680	0,04599

TABLICA I (nastavak)

x	F(x)	f(x)	f′(x)	f″(x)	f‴(x)	$f^{IV}(x)$
3,75	0,99991	0,00035	-0,00132	0,00461	-0,01463	0,04103
80	99993	00029	00111	00392	01269	03646
85	99994	00024	00093	00333	01098	03226
90	99995	00020	00077	00282	00946	02842
95	99996	00016	00064	00238	00813	02495
4,00	0,99997	0,00013	-0,00054	0,00201	-0,00696	0,02181

T A B L I C A II

35.2 Gama funkcija.

p	Γ(1+p)	p	Γ(1+p)	p	Γ(1+p)
0,00	1.000000	0.30	0.897471	0.60	0.893515
01	0.994326	31	896004	61	894681
02	988844	32	894641	62	895924
03	983550	33	893378	63	897244
04	978438	34	892216	64	898642
05	973504	35	891151	65	900117
06	968744	36	890184	66	901668
07	964152	37	889314	67	903296
08	959725	38	888537	68	905001
09	955460	39	887854	69	906782
10	951351	40	887264	70	908639
11	947396	41	886765	71	910572
12	943590	42	886356	72	912581
13	939931	43	886036	73	914665
14	936416	44	885805	74	916826
15	933041	45	885661	75	919062
16	929830	46	885604	76	921375
17	926700	47	885633	77	923763
18	923728	48	885747	78	926227
19	920885	49	885945	79	928768
20	918169	50	886227	80	931384
21	915577	51	886592	81	934076
22	913106	52	887039	82	936845
23	910755	53	887568	83	939690
24	908521	54	888178	84	942612
25	906403	55	888868	85	945611
26	904397	56	889639	86	948687
27	902503	57	890490	87	951840
28	900718	58	891420	88	955071
0.29	0.899042	0.59	0.892428	0.89	0.958379

T A B L I C A II (nastavak)

0.90	0.961766	0.95	0.979881
91	965231	96	983742
92	968774	97	987685
93	972397	98	991708
94	0.976099	99	995813
		1.00	1.000000

Vrednosti gama funkcije date u tablici II pozajmljene su iz knjige: Bolšev L.N. i Smirnov N.V.: Tablici matematičeskoj statistiki, AN SSSR, Moskva, 1968.

Za računanje $\Gamma(n+p)$ (gde je n ceo broj, a p pravi razlomak) za $2 \leq n \leq 6$ preporučuje se formula:

$$\Gamma(n+p)=(n-1+p)\,(n-2+p)\ldots(1+p)\,\Gamma(1+p).$$

Za $n>6$ može se koristiti tablica faktorijela, jer je:

$$\Gamma(n+1)=n!$$

Za argumente koji su izmedju celobrojnih vrednosti, $\Gamma(n+p)$ se može dobiti interpolacijom.

Ako je n mnogo veliki broj glomazni račun faktorijela se može izbeći korišćenjem Stirlingove formule:

$$\Gamma(x)=\sqrt{\frac{2\pi}{x}}\, x^x \exp\left\{-x+\frac{1}{12\,x}-\frac{1}{360x^3}+\ldots\right\}$$

T A B L I C A III

35.3 Vrednosti χ_p^2 i verovatnoće P da pri broju stepeni slobode ν bude ispunjen uslov: $\chi^2 \geqslant \chi_p^2$

ν	P: 0,99	0,95	0,90	0,80	0,70
10	2,558	3,940	4,865	6,179	7,267
11	3,053	4,575	5,578	6,989	8,148
12	3,571	5,226	6,304	7,807	9,034
13	4,107	5,892	7,042	8,634	9,926
14	4,660	6,571	7,790	9,467	10,821
15	5,229	7,261	8,547	10,307	11,721
16	5,812	7,962	9,312	11,152	12,624
17	6,408	8,672	10,085	12,002	13,531
18	7,015	9,390	10,865	12,857	14,440
19	7,633	10,117	11,651	13,716	15,352
20	8,260	10,851	12,444	14,578	16,266
21	8,897	11,591	13,240	15,445	17,182
22	9,542	12,338	14,041	16,314	18,101
23	10,196	13,091	14,848	17,187	19,021
24	10,856	13,848	15,659	18,062	19,943
25	11,524	14,611	16,473	18,940	20,867
26	12,198	15,379	17,292	19,820	21,792
27	12,879	16,151	18,114	20,703	22,710
28	13,565	16,928	18,939	21,588	23,647
29	14,256	17,708	19,768	22,475	24,577
30	14,953	18,493	20,599	23,364	25,508

T A B L I C A III (nastavak)

V	P: 0,50	0,30	0,10	0,05	0,01
10	9,342	11,781	15,987	18,307	23,209
11	10,341	12,899	17,275	19,675	24,725
12	11,340	14,011	18,549	21,026	26,217
13	12,340	15,119	19,812	22,362	27,688
14	13,339	16,222	21,064	23,685	29,141
15	14,339	17,322	22,307	24,996	30,578
16	15,338	18,418	23,542	26,296	32,000
17	16,338	19,511	24,769	27,587	33,409
18	17,338	20,601	25,989	28,869	34,805
19	18,338	21,689	27,204	30,114	36,191
20	19,337	22,775	28,412	31,410	37,566
21	20,337	23,858	29,615	32,671	38,932
22	21,337	24,939	30,813	33,924	40,289
23	22,337	26,018	32,007	35,172	41,638
24	23,337	27,096	33,196	36,415	42,980
25	24,337	28,172	34,382	37,652	44,314
26	25,336	29,246	35,563	38,885	45,642
27	26,336	30,319	36,741	40,113	46,963
28	27,336	31,391	37,916	41,337	48,278
29	28,336	32,461	39,087	42,557	49,588
30	29,336	33,530	40,256	43,773	50,892

T A B L I C A IV

35.4 Desetni logaritmi funkcije G (s,z) (aproksimacija empirijske raspodele verovatnoće Pirsonovom funkcijom tipa IV.

Φ \ s:	2	4	6	8	10
0°	0.196	0.071	1.992	$\bar{1}$.934	$\bar{1}$.888
5	198	076	0.000	946	903
10	205	092	026	982	949
15	216	120	071	0.043	0.028
20	233	161	137	134	145
25	256	217	227	260	304
30	288	293	348	427	518
35	329	393	508	646	798
40	385	525	718	935	1.165
45	460	701	997	1.317	651

Φ \ s:	12	14	16	18	20
0	$\bar{1}$.850	$\bar{1}$.818	$\bar{1}$.790	$\bar{1}$.765	$\bar{1}$.743
5	869	840	815	794	775
10	925	906	891	880	871
15	0.021	0.020	0.022	0.028	0.037
20	163	187	215	246	280
25	358	416	479	546	615
30	617	722	831	944	1.059
35	957	1.123	1.293	1.466	641
40	1.404	648	897	2.149	2.404
45	993	2.341	2.694	3.049	3.408

T A B L I C A IV (nastavak)

Φ	S: 22	24	26	28	30
0	$\bar{1}$.723	$\bar{1}$.704	$\bar{1}$.687	$\bar{1}$.672	$\bar{1}$.657
5	758	743	729	717	705
10	864	859	856	853	852
15	0.047	0.060	0.073	0.088	0.104
20	316	354	393	434	475
25	685	758	832	908	984
30	1.176	1.295	1.416	1.537	1.660
35	819	999	2.180	2.362	2.546
40	2.660	2.919	3.179	3.441	3.703
45	3.768	4.131	4.495	4.860	5.226

Φ	S: 32	34	36	38	40
0	$\bar{1}$.643	$\bar{1}$.630	$\bar{1}$.618	$\bar{1}$.606	$\bar{1}$.595
5	695	685	676	668	660
10	852	852	853	855	857
15	0.121	0.139	0.158	0.177	0.197
20	518	561	605	650	695
25	1.062	1.139	1.219	1.299	1.379
30	784	909	2.034	2.159	2.286
35	2.730	2.915	3.101	3.288	3.475
40	3.967	4.231	4.460	4.762	5.028
45	5.593	5.961	6.330	6.700	7.070

Φ	S: 42	44	46	48	50
0	$\bar{1}$.585	$\bar{1}$.575	$\bar{1}$.565	$\bar{1}$.556	$\bar{1}$.547
5	653	646	640	634	629
10	860	864	868	872	877
15	0.217	0.238	0.259	0.381	0.303
20	741	787	834	881	929
25	1.460	1.541	1.623	1.705	1.787
30	2.414	2.541	2.669	2.798	2.927
35	3.663	3.851	4.040	4.229	4.418
40	5.294	5.562	5.829	6.098	6.366
45	7.440	7.812	8.183	8.555	8.927

T A B L I C A V

35.5 Studentova t-raspodela. Vrednosti t_P da za datu verovatnoću P i dati broj stepeni slobode ν bude ispunjen uslov: $|t| > t_P$.

ν	P: 0,9	0,8	0,7	0,6	0,5
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683
∞	0,12566	0,25335	0,38532	0,52440	0,67449

T A B L I C A V (nastavak)

ν	P: 0,3	0,2	0,1	0,05	0,01
10	1.093	1,372	1,812	2,228	3,169
11	1,088	1,363	1,796	2,201	3,106
12	1,083	1,356	1,782	2,179	3,055
13	1,079	1,350	1,771	2,160	3,012
14	1,076	1,345	1,761	2,145	2,977
15	1,074	1,341	1,753	2,131	2,947
16	1,071	1,337	1,746	2,120	2,921
17	1,069	1,333	1,740	2,110	2,898
18	1,067	1,330	1,734	2,101	2,878
19	1,066	1,328	1,729	2,093	2,861
20	1,064	1,325	1,725	2,086	2,845
21	1,063	1,323	1,721	2,080	2,831
22	1,061	1,321	1,717	2,074	2,819
23	1,060	1,319	1,714	2,069	2,807
24	1,059	1,318	1,711	2,064	2,797
25	1,058	1,316	1,708	2,060	2,787
26	1,058	1,315	1,706	2,056	2,779
27	1,057	1,314	1,703	2,052	2,771
28	1,056	1,313	1,701	2,048	2,763
29	1,055	1,311	1,699	2,045	2,756
30	1,055	[illegible]	1,697	2,042	2,75[illegible]
∞	1,03643	1,28155	1,64485	1,95996	2,57582

T A B L I C A VI

35.6 Kvantili u_q standardne normalne raspodele.

q	u_q	q	u_q	q	u_q	q	u_q
0.50	0.00000	0.70	0.52440	0.90	1.28155	0.983	2.12007
51	02507	71	55338	91	34076	984	14441
52	05015	72	58284	92	40507	985	17009
53	07527	73	61281	93	47579	986	19729
54	10043	74	64334	94	55477	987	22621
55	12566	75	67449	95	64485	988	25713
56	15097	76	70630	96	75069	989	29037
57	17637	77	73885	97	88079	990	32635
58	20189	78	77219	971	89570	991	36562
59	22754	79	80642	972	91104	992	40892
60	25335	80	84162	973	92684	993	45726
61	27932	81	87790	974	94313	994	51211
62	30548	82	91536	975	95996	995	57583
63	33185	83	95416	976	97737	996	65207
64	35846	84	99446	977	99539	997	74778
65	38532	85	1.03643	978	2.01409	998	87816
66	41246	86	08032	979	03352	999	3.09023
67	43991	87	12639	980	05375		
68	46770	88	17499	981	07486		
69	49585	89	22653	982	09693		

Ako je potrebno da se odredi u_q za $q < 0.5$ koristi se Tablica VI i relacija:

$$u_q = -u_{1-q}.$$

Primer: $u_{0.05} = -u_{0.95} = -1.64485$

T A B L I C A V I I

35.7 Minimalne vrednosti Vilkoksnovog statističkog parametra W (n_1, n_2, α) (n_1- broj elemenata u manjem, n_2- broj elemenata u većem skupu i α - nivo rizika).

n_1	n_2	α = 0.01	0.05	0.10
10	10	74	82	87
	11	77	86	91
	12	79	89	94
	13	82	92	98
	14	85	96	102
	15	88	99	106
	16	91	103	109
	17	93	106	113
	18	96	110	117
	19	99	113	121
	20	102	117	125
	21	105	120	128
	22	108	123	132
	23	110	127	136
	24	113	130	140
	25	116	134	144
11	11	91	100	106
	12	94	104	110
	13	97	108	114
	14	100	112	118
	15	103	116	123
	16	107	120	127
	17	110	123	131
	18	113	127	135
	19	116	131	139
	20	119	135	144
	21	123	139	148
	22	126	143	152
	23	129	147	156
	24	132	151	161
	25	136	155	165

n_1	n_2	α = 0.01	0.05	0.10
12	12	109	120	127
	13	113	125	131
	14	116	129	136
	15	120	133	141
	16	124	138	145
	17	127	142	150
	18	131	146	155
	19	134	150	159
	20	138	155	164
	21	142	159	169
	22	145	163	173
	23	149	168	178
	24	153	172	183
	25	156	176	187
13	13	130	142	149
	14	134	147	154
	15	138	152	159
	16	142	156	165
	17	146	161	170
	18	150	166	175
	19	154	171	180
	20	158	175	185
	21	162	180	190
	22	166	185	195
	23	170	189	200
	24	174	194	205
	25	178	199	211
14	14	152	166	174
	15	156	171	179
	16	161	176	185

T A B L I C A V I I (nastavak)

n_1	n_2	α = 0.01	α = 0.05	α = 0.10
	17	165	182	190
	18	170	187	196
	19	174	192	202
	20	178	197	207
	21	183	202	213
	22	187	207	218
	23	192	212	224
	24	196	218	229
	25	200	223	235
15	15	176	192	200
	16	181	197	206
	17	186	203	212
	18	190	208	218
	19	195	214	224
	20	200	220	230
	21	205	225	236
	22	210	231	242
	23	214	236	248
	24	219	242	254
	25	224	248	260
16	16	202	219	229
	17	207	225	235
	18	212	231	242
	19	218	237	248
	20	223	243	255
	21	228	249	261
	22	233	255	267
	23	238	261	274
	24	244	267	280
	25	249	273	287
17	17	230	249	259
	18	235	255	266
	19	241	262	273
	20	246	268	280
	21	252	274	287
	22	258	281	294
	23	263	287	300
	24	269	294	307
	25	275	300	314
18	18	259	280	291
	19	265	287	299
	20	271	294	306
	21	277	301	313
	22	283	307	321
	23	289	314	328
	24	295	321	335
	25	301	328	343
19	19	291	313	325
	20	297	320	333
	21	303	328	341
	22	310	335	349
	23	316	342	357
	24	323	350	364
	25	329	357	372
20	20	324	348	361
	21	331	356	370
	22	337	364	378
	23	344	371	386
	24	351	379	394
	25	358	387	403
21	21	359	385	399
	22	366	393	408
	23	373	401	417
	24	381	410	425
	25	388	418	434
22	22	396	424	439

TABLICA VII (nastavak)

n_1	n_2	α 0.01	0.05	0.10
	23	403	432	448
	24	411	441	457
	25	419	450	467
23	23	434	465	481
	24	443	474	491
	25	451	483	500
24	24	475	507	525
	25	484	517	535
25	25	517	552	570

T A B L I C A   V I I I

35.8 Fišerova $\mathcal{F}$ raspodela. Vrednosti $\mathcal{F}_p$ za koje je verovatnoća dogadjaja $|\mathcal{F}| > \mathcal{F}_p$ jednaka P. Broj stepeni slobode brojitelja je ν_1, a imenitelja ν_2.

Napomena: Izmedju $\mathcal{F}_p$ i $\mathcal{F}_{1-p}$ važi relacija: $\mathcal{F}_p = \frac{1}{\mathcal{F}_{1-p}}$

P= 0.01

ν_2 \ ν_1	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
10	4,8492	4,7059	4,5582	4,4054	4,3269	4,2469	4,1653	4,0819	3,9965	3,9090
11	4,5393	4,3974	4,2509	4,0990	4,0209	3,9411	3,8596	3,7761	3,6904	3,6025
12	4,2961	4,1553	4,0096	3,8584	3,7805	3,7008	3,6192	3,5355	3,4494	3,3608
13	4,1003	3,9603	3,8154	3,6646	3,5868	3,5070	3,4253	3,3413	3,2548	3,1654
14	3,9394	3,8001	3,6557	3,5052	3,4274	3,3476	3,2656	4,1813	3,0942	3,0040
15	3,8049	3,6662	3,5222	3,3719	3,2940	3,2141	3,1319	3,0471	2,9595	2,8684
16	3,6909	3,5527	3,4089	3,2588	3,1808	3,1007	3,0182	2,9330	2,8447	2,7528
17	3,5931	3,4552	3,3117	3,1615	3,0835	3,0032	2,9205	2,8348	2,7459	2,6530
18	3,5082	3,3706	3,2273	3,0771	2,9990	2,9185	2,8354	2,7493	2,6597	2,5660
19	3,4338	3,2965	3,1533	3,0031	2,9249	2,8442	2,7608	2,6742	2,5839	2,4893
20	3,3682	3,2311	3,0880	2,9377	2,8594	2,7785	2,6947	2,6077	2,5168	2,4212
21	3,3098	3,1729	3,0299	2,8796	2,8011	2,7200	2,6359	2,5484	2,4568	2,3603
22	3,2576	3,1209	2,9780	2,8274	2,7488	2,6675	2,5831	2,4951	2,4029	2,3055
23	3,2106	3,0740	2,9311	2,7805	2,7017	2,6202	2,5355	2,4471	2,3542	2,2559
24	3,1681	3,0316	2,8887	2,7380	2,6591	2,5773	2,4923	2,4035	2,3099	2,2107
25	3,1294	2,9931	2,8502	2,6993	2,6203	2,5383	2,4530	2,3637	2,2695	2,1694
26	3,0941	2,9579	2,8150	2,6640	2,5848	2,5026	2,4170	2,3273	2,2325	2,1315
27	3,0618	2,9256	2,7827	2,6316	2,5522	2,4699	2,3840	2,2938	2,1984	2,0965
28	3,0320	2,8959	2,7530	2,6017	2,5223	2,4397	2,3535	2,2629	2,1670	2,0642
29	3,0045	2,8685	2,7256	2,5742	2,4946	2,4118	2,3253	2,2344	2,1378	2,0342

T A B L I C A V I I I (nastavak)

P= 0.01

$\nu_2 \backslash \nu_1$	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
30	2,9791	2,8431	2,7002	2,5487	2,4689	2,3860	2,2992	2,2079	2,1107	2,0062
40	2,8005	2,6648	2,5216	2,3689	2,2880	2,2034	2,1142	2,0194	1,9172	1,8047
60	2,6318	2,4961	2,3523	2,1978	2,1154	2,0285	1,9360	1,8363	1,7263	1,6006
120	2,4721	2,3363	2,1915	2,0346	1,9500	1,8600	1,7628	1,6557	1,5330	1,3805
∞	2,3209	2,1848	2,0385	1,8783	1,7908	1,6964	1,5923	1,4730	1,3246	1,0000

P= 0.05

$\nu_2 \backslash \nu_1$	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
10	2,9782	2,9130	2,8450	2,7740	2,7372	2,6996	2,6609	2,6211	2,5801	2,5379
11	2,8536	2,7876	2,7186	2,6464	2,6090	2,5705	2,5309	2,4901	2,4480	2,4045
12	2,7534	2,6866	2,6169	2,5436	2,5055	2,4663	2,4259	2,3842	2,3410	2,2962
13	2,6710	2,6037	2,5331	2,4589	2,4202	2,3803	2,3392	2,2966	2,2524	2,2064
14	2,6021	2,5342	2,4630	2,3879	2,3487	2,3082	2,2664	2,2230	2,1778	2,1307
15	2,5437	2,4753	2,4035	2,3275	2,2878	2,2468	2,2043	2,1601	2,1141	2,0658
16	2,4935	2,4247	2,3522	2,2756	2,2354	2,1938	2,1507	2,1058	2,0589	2,0096
17	2,4499	2,3807	2,3077	2,2304	2,1898	2,1477	2,1040	2,0584	2,0107	1,9604
18	2,4117	2,3421	2,2686	2,1906	2,1497	2,1071	2,0629	2,0166	1,9681	1,9168
19	2,3779	2,3080	2,2341	2,1555	2,1141	2,0712	2,0264	1,9796	1,9302	1,8780
20	2,3479	2,2776	2,2033	2,1242	2,0825	2,0391	1,9938	1,9464	1,8963	1,8432
21	2,3210	2,2504	2,1757	2,0960	2,0540	2,0102	1,9645	1,9165	1,8657	1,8117
22	2,2967	2,2258	2,1508	2,0707	2,0283	1,9842	1,9380	1,8895	1,8380	1,7831
23	2,2747	2,2036	2,1282	2,0476	2,0050	1,9605	1,9139	1,8649	1,8128	1,7570
24	2,2547	2,1834	2,1077	2,0267	1,9838	1,9390	1,8920	1,8424	1,7897	1,7331
25	2,2365	2,1649	2,0889	2,0075	1,9643	1,9192	1,8718	1,8217	1,7684	1,7110
26	2,2197	2,1479	2,0716	1,9898	1,9464	1,9010	1,8533	1,8027	1,7488	1,6906
27	2,2043	2,1323	2,0558	1,9736	1,9299	1,8842	1,8361	1,7851	1,7307	1,6717
28	2,1900	2,1179	2,0411	1,9586	1,9147	1,8687	1,8203	1,7689	1,7138	1,6541

T A B L I C A V I I I (nastavak)

P= 0.05

ν_2 \ ν_1	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
29	2,1768	2,1045	2,0275	1,9446	1,9005	1,8543	1,8055	1,7537	1,6981	1,6377
30	2,1646	2,0921	2,0148	1,9317	1,8874	1,8409	1,7918	1,7396	1,6835	1,6223
40	2,0772	2,0035	1,9245	1,8389	1,7929	1,7444	1,6928	1,6373	1,5766	1,5089
60	1,9926	1,9174	1,8364	1,7480	1,7001	1,6491	1,5943	1,5343	1,4673	1,3893
120	1,9105	1,8337	1,7505	1,6587	1,6084	1,5543	1,4952	1,4290	1,3519	1,2539
∞	1,8307	1,7522	1,6664	1,5705	1,5173	1,4591	1,3940	1,3180	1,2214	1,0000

T A B L I C A   V I I I (nastavak)

P=0.50

ν_2 \ ν_1	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
10	1,0000	1,0116	1,0232	1,0349	1,0408	1,0467	1,0526	1,0585	1,0645	1,0705
11	0,99373	1,0052	1,0168	1,0284	1,0343	1,0401	1,0460	1,0519	1,0578	1,0637
12	0,98856	1,0000	1,0115	1,0231	1,0289	1,0347	1,0405	1,0464	1,0523	1,0582
13	0,98431	0,99560	1,0071	1,0186	1,0243	1,0301	1,0360	1,0418	1,0476	1,0535
14	0,98051	0,99186	1,0033	1,0147	1,0205	1,0263	1,0321	1,0379	1,0437	1,0495
15	0,97732	0,98863	1,0000	1,0114	1,0172	1,0229	1,0287	1,0345	1,0403	1,0461
16	0,97454	0,98582	0,99716	1,0086	1,0143	1,0200	1,0258	1,0315	1,0373	1,0431
17	0,97209	0,98334	0,99466	1,0060	1,0117	1,0174	1,0232	1,0289	1,0347	1,0405
18	0,96993	0,98116	0,99245	1,0038	1,0095	1,0152	1,0209	1,0267	1,0324	1,0382
19	0,96800	0,97920	0,99047	1,0018	1,0075	1,0132	1,0189	1,0246	1,0304	1,0361
20	0,96626	0,97746	0,98870	1,0000	1,0057	1,0114	1,0171	1,0228	1,0285	1,0343
21	0,96470	0,97587	0,98710	0,99838	1,0040	1,0097	1,0154	1,0211	1,0268	1,0326
22	0,96328	0,97444	0,98565	0,99692	1,0026	1,0082	1,0139	1,0196	1,0253	1,0311
23	0,96199	0,97313	0,98433	0,99558	1,0012	1,0069	1,0126	1,0183	1,0240	1,0297
24	0,96081	0,97194	0,98312	0,99436	1,0000	1,0057	1,0113	1,0170	1,0227	1,0284
25	0,95972	0,97084	0,98201	0,99324	0,99887	1,0045	1,0102	1,0159	1,0215	1,0273
26	0,95872	0,96983	0,98099	0,99220	0,99783	1,0035	1,0091	1,0148	1,0205	1,0262

TABLICA VIII (nastavak)

P=0.50

ν_2 \ ν_1	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
27	0,95779	0,96889	0,98004	0,99125	0,99687	1,0025	1,0082	1,0138	1,0195	1,0252
28	0,95694	0,96802	0,97917	0,99036	0,99598	1,0016	1,0073	1,0129	1,0186	1,0243
29	0,95614	0,96722	0,97835	0,98954	0,99515	1,0008	1,0064	1,0121	1,0177	1,0234
30	0,95540	0,96647	0,97759	0,98877	0,99438	1,0000	1,0056	1,0113	1,0170	1,0226
40	0,95003	0,96104	0,97211	0,98323	0,98880	0,99440	1,0000	1,0056	1,0113	1,0169
60	0,94471	0,95566	0,96667	0,97773	0,98328	0,98884	0,99441	1,0000	1,0056	1,0112
120	0,93943	0,95032	0,96128	0,97228	0,97780	0,98333	0,98887	0,99443	1,0000	1,0056
∞	0,93418	0,94503	0,95593	0,96687	0,97236	0,97787	0,98339	0,98891	0,99445	1,0000

L I T E R A T U R A

Айвазян С. Статистическое иследование зависимостей, Москва, 1970.

Bartlett M.S. An Introduction to Stochastic Processes, Cambridge, 1965.

Бороков А. А. Теория вероятностей, Москва, 1976.

Berezin I.S., Zitkov N.P. Numerička analiza, Beograd, 1963.

Blackman R.B. and Tukey J.W. The Measurement of Power Spectra from the Point of View of Communicat. Engineering, Dover, 1959.

Blackman R.B. Data Smoothing and Prediction, Reading, 1965.

Чеботарев А. С. Способ найменших квадратов и основы теории вероятностей, Москва, 1958.

Демидович Б.П. и Марон И.А. Основы вычисителной математики, Москва, 1966.

Hald A. Statistical Theory with Engineering Applications, New York, 1952.

Hudson J.D. Statistics, Genève, 1964.

Kendall M.G. and Stuart A. The Advanced Theory of Statistics, tome I, London 1962.

Коваленко И.Н. и Филипова А.А. Теоря вероятностей и математической статистики, Москва, 1973.

Крамер Г. Математические методи статистики, Москва, 1948.

Куликов К.А. Изменяемость широт и долгот, Москва, 1962.

Labrouste H. et Y. Analyse des graphiques resultant de la superposition de sinusoides, Paris, 1943.

Митропоъский А.К. Техника статистических вычислений , Москва, 1961.

Серебреников М.Г. и Первозанский А.А. Въявление скрътих периодичностей, Москва, 1965.

Смирнов В.И. Курс высшей математики, том 2, Москва, 1974.

Щиголев В.М. Математическая обработка наблюдений, Москва, 1960.

Trumpler J.R. and Weaver F.H. Statistical Astronomy, University California Press, Berkeley, 1953.
Vitaker E. i Robinskon G. Tečaj numeričke matematike, Beograd, 1951.

Časopisi i druga literatura

Белосерковский Д.Ю. Вращение Земли, Киев, 1963.
Болшев Л. Н. и Смирнов Н. В. Таблцы математической статистики, Москва, 1968.

Djurović D. Ciel et Terre, 90,1,1974., Bruxelles.
Djurović D. Bull. Obs. Astron. Beograd, 127, 1976.
Djurović D. Astronomy and Astrophysics, 47, 1976.
Fliegel H.F. and Hawkins T.P. The Astron. Journal, 72,4,1976.
Iijima S. and Okazaki S. Publ. Astron. Soc. Japan, 24,1972.
Lambeck K. and Cazenave A. Geoph. Journal Roy. Astr. Soc.32,1973.
Немиро А. А. Изв. Глав. Астрон. Обс. Пулково, 157, 1957.
Немиро А.А. Труды 15-ой астрометр. конференций СССР, Ленинград, 1963.
Parzen E. Ann. Math. Stat., 28, 1957.
Pearson K. Tables for Statisticians and Biometricians, Cambridge University Press, 1931.
Schuster A. Terrestr. Magn., 3, 1898.
Stoyko N. Bull. Astron., 15,3,1949.
Vondrak J. Bull. Astron. Instit. of Czechoslovakia, 2o,6,1969.
Vondrak J. Bull. Astron. Inst. of Czechoslovakia, 28,2,1977.
Walker G. Calcutta Ind. Met.Mems., 21,9,1914.