UNIVERZITET U BEOGRADU

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

20 233

KOVAČEVIĆ ILIJA

NEKA UOPŠTENJA KOMPAKTNOSTI

-DOKTORSKA DISERTACIJA -

ОСНОВНА ОРГАНИЗАЦИЈА УДРУЖЕНОГ РАДА
ЗА МАТЕМАТИКУ, МЕХАНИКУ И АСТРОНОМИЈУ
БИБЛИОТЕКА
Број: докт. 63/1
Датум: 10. 9. 1979.

BEOGRAD, 1979.

S A D R Ž A J

strana

U V O D

Kompaktnost je jedna od najvažnijih osobina topoloških prostora, koja ima veliku primenu u svim oblastima matematike a i drugih nauka. U poslednje vreme pod kompaktnošću u širem smislu toga pojma podrazumeva se osobina koju imaju topološki prostori da se u svaki otvoren prekrivač datog prostora može upisati neki otvoren prekrivač sa odredjenim osobinama.To može biti, konačan prekrivač-takve prostore zovemo kompaktnim, prebrojiv prekrivač-te prostore nazivamo prebrojivo kompaktnim, lokalno konačan prekrivač-u tom slučaju se radi o parakompaktnim prostorima, itd.

Začetke pojma kompaktnosti nalazimo u radu Borel-a [9] 1894.godine. On je dokazao tvrdjenje, da se iz svakog prebrojivo otvorenog prekrivača zatvorenog intervala može izdvojiti konačan podprekrivač. Posle toga je Lebeg dokazao tvrdjenje, da se iz svakog otvorenog prekrivača ograničenog i zatvorenog skupa Euklidovog prostora može izdvojiti konačan podprekrivač.

U razvoju topologije, kompaktnost je prvo pručavana na metričkim prostorima, da bi standardnu definiciju kompaktnih prostora (prostor X je kompaktan ako i samo ako se iz svakog otvorenog prekrivača datog prostora može izdvojiti konačan podprekrivač), dali Aleksandrov i Urysohn 1929.godine u radu [1] .

U daljem razvoju topologije nailazimo na razna uopštenja kompaktnih prostora, kao npr, prebrojivo kompaktni, lokalno kompaktni, sekvencijalno kompaktni, pseudokompaktni prostori itd. Pored toga izučavaju se i razne kompaktifikacije nekompaktnih prostora, kao kompaktifikacija jednom tačkom i Stone-Čech-ova kompaktifikacija.

Koliko je pojam kompaktnih prostora klasičan, govori i činjenica da se izučavaju u svakom kursu iz topologije, kao i da su obradjeni u svakom udžbeniku iz topologije.

Cilj ovog rada je izučavanje nekih uopštenja kompaktnosti. Rad je podeljen na pet glava, a svaka glava na odredjen broj paragrafa.

I *Osobine prostora i preslikavanja.* U prvom paragrafu ove glave posmatraju se razne topologije na datom skupu X. Daje se definicija regularno otvorenih (definicija 1.1.1) i regularno zatvorenih (definicija 1.1.2) skupova. Izučava se topologija τ^*, koja ima za bazu regularno otvorene skupove topologije τ . Pored toga daje se definicija co-topologije (definicija 1.1.6) date topologije τ .

Drugi paragraf je posvećen izučavanju nekih uopštenja već poznatih prostora. Izučavaju se semi regularni prostori (definicija 1.2.1) kao i dva uopštenja regularnih prostora, skoro regularni (definicija 1.2.2) i slabo regularni (definicija 1.2.3) prostori. Daje se veza izmedju regularnih i skoro regularnih prostora (teorema 1.2.3). Pored toga izučavaju se i dva uopštenja normalnih prostora, skoro normalni (definicija 1.2.4) i δ-normalni (definicija 1.2.5) prostori. Uvodi se i pojam skoro D_1 prostora (definicija 1.2.6) koji predstavljaju uopštenje D_1 prostora.

U trećem paragrafu izučavaju se neka uopštenja neprekidnih preslikavanja i to, skoro neprekidna (definicija 1.3.1), slabo neprekidna (definicija 1.3.2) ,skoro otvorena i skoro zatvorena (definicija 1.3.3) kao i θ-neprekidna (definicija 1.3.4) preslikavanja. Pored toga uvodi se i pojam skoro neprekidnog razlaganja (definicija 1.3.5)

II *Kompaktnost*. U ovoj glavi izučavaju se neka uopštenja kompaktnih prostora. U prvom paragrafu izučavaju se blizu kompaktni (definicija 2.1.2) kao i uopštenje lokalno kompaktnih, lokalno blizu kompaktni (definicija 2.1.3) prostori. Blizu kompaktne prostore uveo je i proučavao Singal 1969.godine u radu [55] a lokalno blizu kompaktne prostore Carnahan [12] 1972.godine. Daje se odnos izmedju blizu kompaktnih i kompaktnih prostora (teorema 2.1.2) kao i veza izmedju lokalno blizu kompaktnih i lokalno kompaktnih prostora (teorema 2.1.19), te se na taj način lako mogu preneti osobine kompaktnih i lokalno kompaktnih prostora na blizu kompaktne i lokalno blizu kompaktne prostore. Pored ostalog izučavaju se i razna preslikavanja blizu kompaktnih i lokalno blizu kompaktnih prostora.

U drugom paragrafu ispituju se još dva uopštenja kompaktnih prostora. Izučavaju se skoro kompaktni (H-zatvoreni) prostori (definicija 2.2.1) kao i uopštenje skoro kompaktnih prostora skoro-m-kompaktni prostori (definicija 2.2.2). Skoro kompaktne prostore je uveo Aleksandrov [1] 1929.godine dok je skoro-m-kompaktne prostore uveo i izučavao Singal [50] 1968.godine.

III *Parakompaktnost*. Jedno od značajnih uopštenja kompaktnih prostora jesu parakompaktni prostori (definicija 3.1.3) , koji predstavljaju jednu od najvažnijih klasa topoloških prostora. Definiciju parakompakompaktnih prostora dao je Dieudone 1944. godine u svom radu [17]. U ovoj glavi obradjena su neka uopštenja parakompaktnih prostora.

Prvi paragraf posvećen je izučavanju blizu parakompaktnih prostora (definicija 3.1.4) ,koje je izučavao i uveo Singal [57] 1969.godine. Daje se veza izmedju parakompaktnih i blizu parakompaktnih prostora (teorema 3.1.4) pa se na taj način lako mogu odredjene osobine parakompaktnih prostora preneti i na blizu parakompaktne prostore. Pored ostalog se ispituju razna preslikavanja blizu parakompaktnih prostora.

U drugom paragrafu obradjeni su blizu prebrojivo parakompaktni (definicija 3.2.1), skoro parakompaktni (definicija 3.2.3) kao i lokalno skoro parakompaktni (definicija 3.2.4) prostori. Blizu prebrojivo parakompaktne prostore uveo je Singal [57] 1969.godine dok je skoro parakompaktne prostore uveo isti autor [54] 1969.godine. Skoro parakompaktni prostori su uopštenje kako parakompaktnih prostora tako i skoro kompaktnih prostora. U ovom paragrafu uvode se i izučavaju lokalno skoro parakompaktni prostori, koji predstavljaju uopštenje skoro parakompaktnih i lokalno parakompaktnih prostora. Daju se primeri,prostora koji je lokalno skoro parakompaktan a nije skoro parakompaktan, prostora koji je lokalno skoro parakompaktan a nije lokalno parakompaktan kao i prostora koji je lokalno skoro parakompaktan a nije lokalno skoro kompaktan.

IV *Stroga parakompaktnost.* Strogo parakompaktni prostori (definicija 4.1.2) predstavljaju takodje jedno od uopštenja kompaktnih prostora. Strogo parakompaktne prostore prvi je uveo i proučavao Dowker [13] 1947.godine. Glava je posvećena ispitivanju nekoliko uopštenja strogo parakompaktnih prostora. Tako se u prvom paragrafu ispituju blizu strogo parakompaktni prostori (definicija 4.1.3) koje je uveo i proučavao autor [20] 1975.godine. Daje se kao i kod kompaktnih i parakompaktnih prostora, veza izmedju strogo parakompaktnih i blizu strogo parakompaktnih prostora (teorema 4.1.3) pa se na taj način mnoge osobine strogo parakompaktnih prostora prenose i na blizu strogo parakompaktne prostore. Pored ostalog izučavaju se i razna preslikavanja blizu strogo parakompaktnih prostora.

Drugi paragraf posvećen je izučavanju lokalno blizu strogo parakompaktnih prostora (definicija 4.2.1), koji predstavljaju uopštenje blizu strogo parakompaktnih i lokalno blizu kompaktnih prostora. Pošto se ovi prostori prvi put izučavaju,daju se primeri, prostora koji je lokalno blizu strogo parakompaktan a nije blizu strogo parakompaktan, prostora koji je lokalno blizu strogo parakompaktan a nije lokalno strogo parakompaktan i prostora koji je lokalno blizu strogo parakompaktan a nije lokalno blizu kompaktan.

U trećem paragrafu ispituju se skoro strogo parakompaktni (definicija 4.3.2) i m-strogo parakompaktni (definicija 4.3.1) prostori. Skoro strogo parakompaktne prostore je prvi uveo autor [30] 1975. godine.

V *(X,p) prostori.* U ovoj glavi izučavaju se (X,p) prostori (definicija 5.1.1) koje je autor uveo i izučavao u svome radu [30] 1975.godine. Uglavnom se ispituje parakompaktnost vezana za (X,p) prostore.

Na kraju rada daje se indeks nekih pojmova i literatura.

Matematička simbolika u radu je standardna.

Uz svaku definiciju odnosno teoremu drugih autora dat je u zagradi literaturni izvor.

Želim i ovom prilikom da izrazim duboku zahvalnost svom mentoru dr Djuri Kurepi, koji je pratio moj rad i dao mi niz dragocenih saveta i sugestija prilikom pisanja rada.

G L A V A I

OSOBINE PROSTORA I PRESLIKAVANJA

U ovoj glavi upoznaćemo se sa nekoliko topologija na datom skupu X, kao i sa nekoliko separacionih aksioma. Upoznaćemo se i sa nekoliko vrsta preslikavanja. Uglavnom biće iznete poznate činjenice, koje će se koristiti u daljem radu.

1.1. T O P O L O G I J E τ^* I τ_B

Neka je dat topološki prostor X. Kao što je poznato ne mora za svaki skup U uvek da važi jednakost $U = \overline{U}^o$, pa čak ni onda ako je skup U otvoren. Nas će interesovati oni otvoreni skupovi za koje važi data jednakost; takve skupove nazivaćemo regularno otvorenim.

Definicija 1.1.1. (Arya,S.P.,[6] ,str.113) Za podskup A datog prostora X reći ćemo da je *regularno otvoren* ako i samo ako je A unutrašnjost nekog zatvorenog skupa ili, ekvivalentno, ako se A poklapa sa unutrašnjosti njegovog zatvaranja to jest ako je $A = \overline{A}^o$.

Zbog lakšeg pisanja uvešćemo sledeće oznake:

$$\alpha(A) = \overline{A}^o \quad , \quad \beta(F) = \overline{F^o}.$$

Regularno otvoreni skupovi imaju veliku primenu kod proučavanja raznih vrsta kompaktnosti. Presek dva regularno otvorena skupa je uvek regularno otvoren, odnosno presek konačno mnogo regularno otvorenih skupova je opet regularno otvoren. Unija dva regularno otvorena skupa nije uvek regularno otvoren skup, što pokazuje sledeći primer.

Primer 1.1.1. Neka je $U = (0,1)$ *a* $V = (1,2)$. $\alpha(U) = U$, $\alpha(V) = V$.

$$\alpha(U) \cup \alpha(V) = (0,1) \cup (1,2).$$

$$\alpha(U \cup V) = (\overline{U \cup V})^o = (\overline{U} \cup \overline{V})^o = [0,2]^o = (0,2)$$

pa ne važi jednakost

$$\alpha(U \cup V) = \alpha(U) \cup \alpha(V)$$

što pokazuje datu činjenicu.

Definicija 1.1.2. (Arya,S.P., [6] ,str. 113) Za podskup B datog prostora X reći ćemo da je *regularno zatvoren* ako i samo ako je B komplement regularno otvorenog skupa , ili ekvivalentno, ako važi jednakost $B = \beta(B)$.
Potreban i dovoljan uslov da je neki skup regularno otvoren jeste da je njegov komplement regularno zatvoren skup. Ova činjenica se lako dokazuje.
Unija konačno mnogo regularno zatvorenih skupova je opet regularno zatvoren, dok presek dva regularno zatvorena skupa nije uvek regularno zatvoren skup.

Definicija 1.1.3. (Singal.M.K., [44] ,str.670) Za podskup F datog prostora X reći ćemo da je *δ-zatvoren* ako i samo ako za svaku tačku $x \notin F$, postoji otvoren skup G, koji sadrži tačku x, tako da važi

$$\alpha(G) \cap F = \emptyset$$

ili ekvivalentno, ako za svaku tačku $x \notin F$, postoji regularno otvoren skup, koji sadrži tačku x, disjunktan sa skupom F. Za skup G kažemo da je *δ-otvoren* ako i samo ako je komplement δ-zatvoren skup.
Svaki regularno otvoren skup je ujedno i δ-otvoren i svaki regularno zatvoren skup je takodje δ-zatvoren.

Za topološki prostor (X,τ) porodica svih δ-otvorenih skupova, obrazuje novu topologiju τ^*, koja je grublja od topologije τ . Bazu topologije τ^* obrazuju svi regularno otvoreni skupovi topologije τ .

Definicija 1.1.5. (Singal,M.K., [56] , str.671) Za tačku x kažemo da je *δ-tačka nagomilavanja* skupa P u prostoru (X,τ) ako i samo ako svaka τ^*-otvorena okolina (regularno otvorena) N tačke x sadrži bar jednu tačku skupa P različitu od date tačke x.
Skup $P \cup P'_\delta$ nazivaćemo δ-zatvaranjem skupa P tj. $\overline{P}_{\tau^*} = P \cup P'_\delta$.

Na podskupu A datog prostora X možemo posmatrati dve topologije i to: topologiju induciranu topologijom τ^*, τ^*/A i $(\tau/A)^*$. Ove dve topologije ne moraju uvek da budu iste.

Pored topologije τ na prostoru X možemo posmatrati još jednu topologiju, koju ćemo zvati co-topologijom topologije τ.

Definicija 1.1.6. (Singal,M.K., [56] ,str.671) Neka je $\mathcal{B}$ baza date topologije τ topološkog prostora (X,τ).Tada je porodica

$$\{ X\setminus\overline{B} : B \in \mathcal{B} \}$$

baza nove topologije $\tau_{\mathcal{B}}$ koju nazivamo *co-topologijom* date topologije τ . Prostor $(X,\tau_{\mathcal{B}})$ zovemo *co-prostorom* prostora (X,τ). Topološki prostor (X,τ) je *co-P* ako i samo ako postoji baza $\mathcal{B}$ topologije τ tako da je co-prostor $(X,\tau_{\mathcal{B}})$ prostor koji poseduje osobinu P, a *totalno co-P* ako i samo ako svaki co-prostor poseduje osobinu P.

1.2. NEKE SEPARACIONE AKSIOME

U ovom paragrafu od niza separacionih aksioma posmatraćemo samo one koje će nam koristiti u daljem radu.

Iz činjenice da $U \cap V = \emptyset$ povlači $\alpha(U) \cap \alpha(V) = \emptyset$, sledi da ako je X Hausdorff-ov prostor da se svake dve tačke mogu odvojiti regularno otvorenim okolinama, pa je (X,τ) Hausdorff-ov prostor ako i samo ako je (X,τ^*) Hausdorff-ov prostor.

Definicija 1.2.1. (Singal,M.K., [56] ,str. 671) Za prostor X kažemo da je *semi regularan* ako i samo ako je $\tau = \tau^*$.

Prostor (X,τ^*) je uvek semi regularan.

Definicija 1.2.2. (Singal,M.K., [52] , str.90) Prostor X je *skoro regularan* ako i samo ako za svaki regularno zatvoren skup F i svaku tačku $x \notin F$, postoje disjunktni skupovi U i V koji respektivno sadrže F i x, to jest

$$F \subset U,\ x \in V \text{ i } U \cap V = \emptyset .$$

Lako se vidi da je svaki regularan prostor ujedno i skoro regularan. Obrnuto nije uvek tačno. Sledeći primer pokazuje da postoji skoro regularan prostor koji nije regularan.

Primer 1.2.1. (Singal, M.K., [52], str. 90) Neka je $X = \{a,b,c,d\}$ *i neka je topologija* τ *definisana na sledeći način:*

$$\tau = \{\emptyset\ ,\ X,\ \{d\}\ ,\{\ b,d\ \},\ \{c,d\}\ ,\ \{b,c,d\}\}\ .$$

Tada je prostor X sa datom topologijom τ skoro regularan, ali nije regularan prostor .

Teorema 1.2.1. (Singal, M.K., [52] , str. 90) Za topološki prostor (X,τ) *važe sledeće ekvivalencije:*

(a) (X,τ) *je skoro regularan ;*

(b) Za svaku tačku $x \in X$ *i svaki regularno otvoren skup V koji sadrži tačku* x *postoji regularno otvoren skup U sa osobinom*

$$x \in U \subset \overline{U} \subset V\ ;$$

(c) Za svaki regularno zatvoren skup A i svaku tačku $x \notin A$ *postoje otvoreni skupovi U i V tako da važi*

$$x \in U,\ A \subset V,\ \ \overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset\ .$$

Svaki skoro regularan i semi regularan prostor je ujedno i regularan, pa sledi da je semi regularan prostor regularan ako i samo ako je on i skoro regularan prostor. Podprostor skoro regularnog prostora ne mora da bude skoro regularan, ali važi:

Teorema 1.2.2. (Singal, M.K., [52] , str. 94) Svaki gust podprostor skoro regularnog prostora je skoro regularan.

Svaki regularno otvoren podprostor skoro regularnog prostora je skoro regularan. Važi da je i proizvod skoro regularnih prostora uvek isto skoro regularan. Važi i sledeća teorema,

Teorema 1.2.3. Prostor (X,τ) je skoro regularan ako i samo ako je prostor (X,τ^*) regularan.

Dokaz. Neka je (X,τ) skoro regularan prostor. Neka je P τ^*-zatvoren podskup i neka $x \notin P$. Tada je P δ-zatvoren. Pošto je P δ-zatvoren i $x \notin P$, sledi da postoji otvoren skup G koji sadrži tačku x tako da važi $P \cap \alpha(G) = \emptyset$. $P \subset X \setminus \alpha(G)$. $X \setminus \alpha(G)$ je τ-regularno zatvoren skup i $x \notin X \setminus \alpha(G)$. Pošto je (X,τ) skoro regularan, sledi da postoje disjunktni otvoreni skupovi U i V tako da je

$$x \in U,\ X \setminus \alpha(G) \subset V.$$

Tada važi

$$P \subset X \setminus \alpha(G) \subset \alpha(U)\ ,\ x \in V \subset \alpha(V),\ \alpha(U) \cap \alpha(V) = \emptyset\ .$$

Odatle sledi da je (X,τ^*) regularan prostor.

Neka je (X,τ^*) regularan prostor. Neka je F proizvoljan τ-regularno zatvoren podskup prostora X i neka $x \notin F$. Tada je F i τ^*-zatvoren, pa pošto je (X,τ^*) regularan i $x \notin F$ sledi da postoje disjunktni τ^*-otvoreni skupovi U i V sa osobinom $x \in U$ i $F \subset V$. Odatle sledi da je (X,τ) skoro regularan prostor.

Definicija 1.2.3. (Singal,M.K., [52] ,str. 90) Za prostor X kažemo da je *slabo regularan* ako i samo ako za svaku tačku x i svaki regularno otvoren skup U koji sadrži $\overline{x}$ postoji otvoren skup V, tako da

$$x \in V \subset \overline{V} \subset U\ .$$

Svaki skoro regularan prostor je ujedno i slabo regularan. Obrnuto nije uvek tačno, što pokazuje sledeći primer.

Primer 1.2.2. (Singal,M.K., [52] , str. 90) Neka je $X = \{a,b,c\}$ i neka je topologija τ definisana na sledeći način:

$$\tau = \{X,\ \emptyset,\ \{a\}\ ,\ \{b\}\ ,\ \{a,b\}\ \}.$$

Tada je prostor X slabo regularan ali ne i skoro regularan.

Definicija 1.2.4. (Singal,M.K., [51] , str. 141) Za prostor X kažemo da je *skoro normalan* ako i samo ako za svaki par disjunktnih skupova A i B, od kojih je jedan zatvoren a drugi regularno zatvoren skup, postoje disjunktni otvoreni skupovi U i V tako da $A \subset U$ i $B \subset V$.

Svaki skoro normalan T_1 prostor je skoro regularan. Takodje i svaki normalan prostor je ujedno i skoro normalan.

Definicija 1.2.5. (Singal,M.K., [51] , str. 145) Za prostor (X,τ) kažemo da je *δ-normalan* ako i samo ako je (X,τ^*) normalan prostor.
Svaki normalan prostor je i δ-normalan. Važi i

Teorema 1.2.4. Svaki skoro regularan, blizu Lindelöf-ov (iz svakog regularno otvorenog prekrivača može se izdvojiti prebrojiv prekrivač) je δ-normalan.

Dokaz. Neka je (X,τ) skoro regularan blizu Lindelöf-ov prostor. Tada je (X,τ^*) regularan Lindelöf-ov prostor,pa sledi, pošto je svaki regularan Lindelöf-ov prostor normalan, da je i (X,τ^*) normalan prostor,odnosno sledi da je (X,τ) δ-normalan.

Posledica 1.2.1. Svaki skoro regularan Lindelöf-ov prostor je δ-normalan.

Dokaz. Svaki Lindelöf-ov prostor je blizu Lindelöf-ov prostor.

Sada ćemo dokazati sledeću teoremu,

Teorema 1.2.5. Za slabo regularan blizu Lindelöf-ov prostor važi: svaka dva regularno zatvorena disjunktna podskupa se mogu strogo odvojiti otvorenim skupovima.

*Dokaz.*Neka su A i B dva proizvoljna regularno zatvorena disjunktna podskupa prostora X. Pošto je X slabo regularan sledi da za svaku tačku $x \in A$ postoji regularno otvoren skup U_x , $x \in U_x$, tako da važi $\overline{U_x} \cap B = \emptyset$. Neka je $\mathcal{U} = \{U_x : x \in A\}$. Slično postoji porodica $\mathcal{V}$ regularno otvorenih podskupova V_x takvih da je $\overline{V_x} \cap A = \emptyset$, $\mathcal{V} = \{V_x : x \in B\}$. $\mathcal{U}$ prepokriva podskup A a $\mathcal{V}$ prepokriva podskup B. Sledi da je

$$\mathcal{U} \cup \mathcal{V} \cup \{X \setminus (A \cup B)\}$$

regularno otvoren prekrivač prostora X. Pošto je X blizu Lindelöf-ov prostor, sledi da postoji niz $\{U_n : n \in N\}$ elemenata porodice $\mathcal{U}$, koji prepokriva A i niz $\{V_n : n \in N\}$ elemenata porodice $\mathcal{V}$, koji prepokriva podskup B.
Neka je

$$U_n' = U_n \setminus \cup \{\overline{V_p} : p \leq n\} \quad , \quad V_n' = V_n \setminus \cup \{\overline{U_p} : p \leq n\} \quad .$$

Pošto je $U_n' \cap V_m = \emptyset$ za svako $m \leq n$, sledi da je $U_n' \cap V_m' = \emptyset$ za svako $m \leq n$, odnosno sledi da je $U_n' \cap V_m' = \emptyset$ za svako m i $n \in N$.

Sledi da su skupovi

$$U = \cup \{U_n' : n \in N\} \quad , \quad V = \cup \{V_n' : n \in N\}$$

disjunktni i da je $A \subset U$ i $B \subset V$, a to je i trebalo dokazati.

Posledica 1.2.2. Za svaki skoro regularan blizu Lindelöf-ov prostor važi: svaka dva regularno zatvorena disjunktna podskupa datog prostora se mogu strogo odvojiti otvorenim skupovima.

Dokaz. Svaki skoro regularan blizu Lindelöf-ov prostor je slabo regularan blizu Lindelöf-ov prostor.

Za prostor X kažemo da je D_1 prostor ako i samo ako svaki zatvoren skup F prostora X ima prebrojivu bazu otvorenih skupova, koji sadrže skup F. Aksiomu D_1 je uveo Aull. Slično ćemo uvesti skoro D_1 prostore.

Definicija 1.2.6. Za prostor X kažemo da je *skoro* D_1 ako i samo ako svaki regularno zatvoren skup F ima prebrojivu bazu otvorenih skupova, koji sadrže regularno zatvoren skup F.

Teorema 1.2.6. U Hausdorff-ovom skoro D_1 prostoru sa prvom aksiomom prebrojivosti svaki regularno zatvoren skup F može se predstaviti kao presek prebrojivo mnogo regularno zatvorenih okolina.

Dokaz. Neka je F proizvoljan regularno zatvoren podskup u Hausdorff-ovom skoro D_1 prostoru X. Neka $x \notin F$ i neka je $\{G_n : n \in N\}$ monotono opadajuća prebrojiva baza otvorenih skupova koji sadrže F. Možemo predpostaviti da $x \notin G_n$ za neko n. Neka je $\{G_n^* : n \in N\}$ monotono opadajuća prebrojiva baza otvorenih skupova koji sadrže tačku x. $x \notin \overline{G_n}$ bar za jedno $n \in N$. Predpostavimo da $x \in \overline{G_n}$ za svako n. Sledi da je $G_n^* \cap G_n \neq \emptyset$ za svako n. Izaberimo tačku $x_n \in G_n^* \cap G_n$ za svako n. Tada je $\{x_n : n \in N\}$ niz koji je završno u svakom G_n^*. Pošto je $\{G_n^* : n \in N\}$ monotono opadajuća baza, sledi da niz $\{x_n : n \in N\}$ konvergira ka tački x. Pošto je X Hausdorff-ov prostor sledi da za $y \neq x$ dati niz $\{x_n : n \in N\}$ ne konvergira ka tački y. Za svako $y \in F$, postoji otvoren skup H_y tako da $y \in H_y$ i H_y sadrži konačno mnogo tačaka x_n datog niza. Možemo predpostaviti da H_y ne sadrži ni jednu tačku niza $\{x_n : n \in N\}$. Neka je

$$H = \cup \{H_y : y \in F\} .$$

Tada je H otvorena okolina skupa F, tako da $x_n \notin H$ za svako $n \in N$. Tada $\{G_n : n \in N\}$ ne može biti baza otvorenih skupova koji sadrže regularno zatvoren skup F. Odatle sledi da postoji element $n(x) \in N$ tako da $x \notin \overline{G}_{n(x)}$.

Sledi da je $F = \{\overline{G}_{n(x)} : x \notin F\}$, čime je dokaz završen.

1.3. P R E S L I K A V A N J A

U ovom paragrafu posmatraćemo neka uopštenja neprekidnih preslikavanja kao i osobine tako uopštenih preslikavanja.

Definicija 1.3.1. (Singal,M.K., [47] , str. 63) Preslikavanje $f:X \to Y$ je *skoro neprekidno* ako i samo ako je inverzna slika svakog regularno otvorenog podskupa prostora Y otvoren podskup prostora X.

Svako neprekidno preslikavanje je ujedno i skoro neprekidno. Obrnuto nije uvek tačno. Postoji skoro neprekidno preslikavanje f koje nije istovremeno i neprekidno, što pokazuje sledeći primer.

Primer 1.3.1. (Singal,M.K., [47] , str. 63) Neka je R skup realnih brojeva i neka topologiju τ na skupu R čine $\emptyset$, R , i komplementi prebrojivih podskupova skupa R. Neka je

$$X = \{a,b\} \quad , \quad \tau' = \{X, \emptyset, \{a\}\} .$$

Definišimo preslikavanje $f : (R,\tau) \to (X,\tau')$ *na sledeći način*

$$f(x) = \begin{cases} a & x \text{ je racionalan broj} \\ b & x \text{ je iracionalan broj} \end{cases}$$

Tada je f skoro neprekidno u svakoj tački prostora R , ali f nije neprekidno ni u jednoj tački ako je x iracionalan broj. Važi sledeća teorema,

Teorema 1.3.1. (Singal,M.K., [47] , str. 64) Za preslikavanje $f:X\to Y$ *važe sledeće ekvivalencije:*

(a) f je skoro neprekidno preslikavanje ;

(b) Inverzna slika regularno zatvorenog podkupa prostora Y je zatvoren podskup u prostoru X ;

(c) $f^{-1}(A) \subset [f^{-1}(\alpha(A))]^{o}$ *za svaki otvoren podskup A iz Y ;*

(d) $\overline{[f^{-1}(\alpha(B))]} \subset f^{-1}(B)$ *za svaki zatvoren podkup B iz Y.*

Definicija 1.3.2. (Singal,M.K., [47] , str. 65) Preslikavanje $f:X\to Y$ je *slabo neprekidno* ako i samo ako za svaku tačku $x \in X$ i svaku okolinu V tačke f(x) postoji okolina U tačke x tako da je

$$f(U) \subset \overline{V} .$$

Svako skoro neprekidno preslikavanje je ujedno i slabo neprekidno . Obrnuto nije uvek tačno što pokazuje sledeći primer.

Primer 1.3.2. (Singal,M.K., [47] , str. 66) Neka je (R,τ) *prostor koji je definisan u predhodnom primeru. Neka je*

$$X = \{a,b,c\} , \quad \tau' = \{\emptyset, X, \{c\} , \{a,c\}\} .$$

Definišimo preslikavanje f na sledeći način

$$f(x) = \begin{cases} a & x \text{ je racionalan broj} \\ b & x \text{ je iracionalan broj} \end{cases}$$

Preslikavanje f je slabo neprekidno ali ne i skoro neprekidno.

Ako je f: $X \to Y$ slabo neprekidno i otvoreno preslikavanje tada je f i skoro neprekidno (Singal,M.K., [47] , str. 66)

Teorema 1.3.2. Ako je f skoro neprekidno preslikavanje prostora X na prostor Y tada je inverzna slika svakog δ-zatvorenog podskupa prostora Y, zatvoren podskup u prostoru X.

Dokaz. Neka je f: $X \to Y$ skoro neprekidno preslikavanje i neka je F δ-zatvoren podskup u prostoru Y . Tada je

$$F = \bigcap \beta(F_i)$$

pa je i

$$f^{-1}(F) = \bigcap f^{-1}(\beta(F_i)).$$

Pošto je f skoro neprekidno preslikavanje sledi da je $f^{-1}(\beta(F_i))$ zatvoren podskup u prostoru X pa je i $f^{-1}(F)$ zatvoren podskup u datom prostoru X.

Teorema 1.3.3. Ako je f skoro neprekidno zatvoreno preslikavanje normalnog prostora X na prostor Y, tada je Y δ-normalan prostor.

Dokaz. Neka su A i B disjunktni δ-zatvoreni podkupovi prostora Y. Tada su na osnovu predhodne teoreme $f^{-1}(A)$ i $f^{-1}(B)$ disjunktni zatvoreni podskupovi prostora X. Pošto je X normalan prostor sledi da postoje otvoreni skupovi G i H sa osobinom

$$G \cap H = \emptyset \ , \ f^{-1}(A) \subset G \ , \ f^{-1}(B) \subset H \ .$$

Neka je

$$P = \{y : f^{-1}(y) \subset G\} \ , \quad Q = \{y : f^{-1}(y) \subset H\} \ .$$

pošto je f zatvoreno preslikavanje, sledi da su P i Q otvoreni skupovi sa osobinom

$$P \cap Q = \emptyset \ , \ A \subset P \ , \ B \subset Q$$

pa je na osnovu toga Y δ-normalan prostor.

Teorema 1.3.4. Neka su A i B podskupovi topološkog prostora X takvi da je $X = A \cup B$ i $A \setminus B$, $B \setminus A$ su razdvojeni. Ako je $f\colon X \to Y$ takvo preslikavanje koje je skoro neprekidno na A i skoro neprekidno na B, tada je f skoro neprekidno preslikavanje na prostoru X.

Dokaz. Neka je V regularno otvoren podskup u prostoru Y. Tada je $f^{-1}(V) \cap A$ otvoren skup u A i $f^{-1}(V) \cap B$ otvoren skup na B, pa pošto su $A \setminus B$ i $B \setminus A$ odvojeni skupovi, sledi da je $f^{-1}(V)$ otvoren skup u prostoru X. Odatle sledi da je f skoro neprekidno preslikavanje.

Definicija 1.3.3. (Singal,M.K., [47] , str. 69) Preslikavanje $f\colon X \to Y$ je *skoro otvoreno (skoro zatvoreno)* ako i samo ako je slika svakog regularno otvorenog (regularno zatvorenog) podskupa prostora X otvoren (zatvoren) podskup u prostoru Y.

Postoji otvoreno skoro neprekidno 1 na 1 preslikavanje koje nije neprekidno, što pokazuje sledeći primer,

Primer 1.3.3. Neka je dat skup $X = \{a,b,c,d\}$. Definišimo dve topologije na skupu X i to :

$\tau = \{\emptyset, X , \{a\} , \{c\} , \{a,c\} \}$, $\tau_1 = \{\emptyset , X, \{a\} , \{c\} , \{a,c\} , \{a,b,c\}\}$.

Identično preslikavanje $i\colon (X,\tau) \to (X,\tau_1)$ je otvoreno 1 na 1 skoro neprekidno a nije neprekidno preslikavanje.

Teorema 1.3.5. (Noiri,T., [40] ,str. 132) Ako je $f\colon X \to Y$ skoro neprekidno i skoro otvoreno preslikavanje tada važi:

(a) Inverzna slika svakog regularno otvorenog podskupa prostora Y je regularno otvoren podskup u prostoru X ;

(b) Inverzna slika svakog regularno zatvorenog podskupa prostora Y je regularno zatvoren podskup u prostoru X.

Posledica 1.3.1. Ako je $f\colon X \to Y$ skoro neprekidno i skoro otvoreno preslikavanje tada važi:

(a) Inverzna slika svakog δ-otvorenog podskupa prostora Y je δ-otvoren podskup u prostoru X.

(b) Inverzna slika svakog δ-zatvorenog podskupa prostora Y je δ-zatvoren podskup u prostoru X.

Dokaz. Lako se dokazuje na osnovu predhodne teoreme i teoreme 1.3.2.

Teorema 1.3.6. Ako je $f: X \to Y$ skoro neprekidno i skoro zatvoreno preslikavanje, tada važi:

(a) Inverzna slika regularno zatvorenog podskupa prostora Y je regularno zatvoren podskup u prostoru X.

(b) Inverzna slika svakog regularno otvorenog podskupa prostora Y je regularno otvoren podskup u prostoru X.

Dokaz. Neka je F proizvoljan regularno zatvoren podskup u prostoru Y. Tada je $F = \beta(F)$, pa pošto je f skoro neprekidno preslikavanje sledi da je $f^{-1}(F)$ zatvoren skup u prostoru X, pa $f^{-1}(F) \supset \beta[f^{-1}(F)]$. Pošto je F^0 regularno otvoren podskup u prostoru Y, tada je $f^{-1}(F^0)$ otvoren skup pa imamo da je

$$\beta(f^{-1}(F)) \supset (f^{-1}(F))^0 \supset f^{-1}(F^0) \ .$$

$\beta(f^{-1}(F))$ je regularno zatvoren skup prostora X,pa pošto je f skoro zatvoreno preslikavanje sledi da je $f(\beta(f^{-1}(F)))$ zatvoren skup u Y,odakle sledi

$$f(\beta(f^{-1}(F))) \supset \beta(F) = F$$

odnosno da je

$$f^{-1}(F) \subset \beta(f^{-1}(F))$$

pa je $f^{-1}(F) = \beta(f^{-1}(F))$, pa odatle sledi da je $f^{-1}(F)$ regularno zatvoren podskup u prostoru X.

(b) Neka je U regularno otvoren podskup u prostoru Y. Tada je $Y \setminus U$ regularno zatvoren podskup pa na osnovu predhodnog dokaza sledi da je $f^{-1}(Y \setminus U)$ regularno zatvoren podskup prostora X Pošto je $f^{-1}(Y \setminus U) = X \setminus f^{-1}(U)$

sledi da je $f^{-1}(U)$ regularno otvoren podskup u prostoru X.

Posledica 1.3.2. Ako je $f:X\to Y$ skoro neprekidno i skoro zatvoreno preslikavanje, tada važi:

(a) Inverzna slika svakog δ-otvorenog podskupa prostora Y je δ-otvoren podskup u prostoru X ;

(b) Inverzna slika svakog δ-zatvorenog podskupa prostora Y je δ-zatvoren podskup u prostoru X.

Dokaz. Lako se dokazuje na osnovu predhodne teoreme i teoreme 1.3.2.

Definicija 1.3.4. (Singal, M.K., [47] , str. 70) Preslikavanje $f : X\ Y$ je θ- *neprekidno* ako i samo ako za svaku tačku $x \in X$ i svaku okolinu U tačke f(x) postoji okolina V tačke x tako da važi $f(\overline{V}) \subset \overline{U}$.

Svako θ-neprekidno preslikavanje je ujedno i slabo neprekidno i svako skoro neprekidno preslikavanje je ujedno i θ-neprekidno. Ako je f skoro otvoreno i θ-neprekidno preslikavanje onda je f i skoro neprekidno preslikavanje (Noiri,T., [40], str. 132).

Teorema 1.3.7. Neka je P projekcija topološkog prostora X na količnik prostor X/R. Tada važe sledeće ekvivalencije:

(a) P je skoro otvoreno preslikavanje ;

(b) Ako je A regularno otvoren skup u prostoru X, tada je $R[A]$ otvoren skup u prostoru X;

(c) Ako je A regularno zatvoren podskup prostora X , tada, unija svih članova iz X/R koji su podskupovi skupa A je zatvoren skup u X.

Dokaz. (a)$\to$(b)

Za svaki podskup A prostora X važi

$$R[A] = P^{-1}\left[P[A]\right] .$$

Ako je P skoro otvoreno preslikavanje i A regularno otvoren skup u prostoru X , tada pošto je P neprekidno preslikavanje sledi da je $P^{-1}\left[P[A]\right]$ otvoren skup, odnosno da je $R[A]$ otvoren skup u prostoru X.

Obrnuto neka je A regularno otvoren skup, tada je $P[A]$ otvoren, odnosno $P^{-1}[P[A]]$ je otvoren skup. Tada je prema definiciji količnik topologije $P[A]$ otvoren skup u prostoru X/R.

(b)→(c)

Unija svih članova iz X/R koji su podskupovi skupa A poklapa se sa skupom $X \setminus R[X \setminus A]$. Ako je A regularno zatvoren skup tada je $X \setminus A$ regularno otvoren skup, te je $R[X \setminus A]$ otvoren skup u prostoru X , pa je $X \setminus R[X \setminus A]$ zatvoren skup.

Ako je A regularno otvoren skup, tada je $X \setminus A$ regularno zatvoren skup u prostoru X, pa na osnovu (c) sledi da je $X \setminus R[X \setminus (X \setminus A)]$ zatvoren skup,pa je tada $R[X \setminus (X \setminus A)] = R[A]$ otvoren skup.

Ako u predhodnoj teoremi zamenimo "otvoren" sa "zatvoren" i obrnuto dobiće se opet ekvivalentne činjenice.

Definicija 1.3.5. Za razlaganje $\mathcal{D}$ topološkog prostora X kažemo da je *skoro neprekidno* ako i samo ako za svako $D \in \mathcal{D}$ i svaki regularno otvoren skup U koji sadrži D, postoji otvoren skup V tako da važi $D \subset V \subset U$ i V je unija nekih članova porodice $\mathcal{D}$.

Teorema 1.3.8. Razlaganje $\mathcal{D}$ topološkog prostora X je skoro neprekidno ako i samo ako je projekcija P prostora X na $\mathcal{D}$ skoro zatvoreno preslikavanje.

Dokaz. Neka je P skoro zatvoreno preslikavanje. Uzmimo proizvoljan elemenat $D \in \mathcal{D}$ i regularno otvoren skup U koji sadrži D. Tada na osnovu predhodne teoreme sledi da je unija elemenata V iz X/R, koji su podskupovi skupa U otvoren skup prostora X.

Znači postoji otvoren skup V prostora X tako da je $D \subset V \subset U$ i da je V unija nekih članova porodice $\mathcal{D}$, pa je $\mathcal{D}$ skoro neprekidno razlaganje.

Dokažimo obrnuto. Neka je $\mathcal{D}$ skoro neprekidno razlaganje i neka je U proizvoljan regularno otvoren skup prostora X. Neka je V skup svih članova porodice $\mathcal{D}$ koji su podskupovi skupa U. Ako $x \in V$, tada sledi da $x \in D \subset U$ za neko $D \in \mathcal{D}$. Pošto je razlaganje $\mathcal{D}$ skoro neprekidno sledi da postoji otvoren skup W, koji je unija članova porodice $\mathcal{D}$, tako da važi $D \subset W \subset U$. $W \subset V$, pa sledi da je V okolina tačke x.

Skup V je otvoren, pošto je okolina svake svoje tačke, pa na osnovu predhodne teoreme sledi da je P skoro zatvoreno preslikavanje.

GLAVA II

KOMPAKTNOST

U ovoj glavi biće obradjena neka uopštenja kompaktnih prostora,tj. biće obradjeni blizu kompaktni,lokalno blizu kompaktni kao i skoro kompaktni prostori.

2.1. BLIZU KOMPAKTNOST

Definicija 2.1.1. (Aleksandrov,P.S., [1] ,vidi Kelley,L.J.,[27] ,str.183) Prostor X je *kompaktan* ako i samo ako se iz svakog otvorenog prekrivača datog prostora X može izdvojiti konačan podprekrivač.

Na sličan način se definišu i blizu kompaktni prostori.

Definicija 2.1.2. (Singal,M.K., [55] ,str. 702) Prostor X je *blizu kompaktan* ako i samo ako iz svakog njegovog regularno otvorenog prekrivača se može izdvojiti konačan podprekrivač.

Svaki kompaktan prostor je očigledno i blizu kompaktan.Obrnuto nije uvek tačno. Postoje primeri (Singal,M.K. [55] , str. 702) prostora X koji je blizu kompaktan a nije kompaktan.

Teorema 2.1.1. (Singal,M.K., [55] , str. 703) Za topološki prostor X važe sledeće ekvivalencije:

(a) X je blizu kompaktan prostor ;

(b) Iz svakog otvorenog prekrivača $\mathcal{U}$ *može se izdvojiti konačna porodica* $U_1, U_2, \ldots, U_m$ *tako da je* $X = \bigcup_{i=1}^{m} \alpha(U_i)$ *;*

(c) Svaka porodica regularno zatvorenih skupova koja poseduje osobinu konačnog presecanja ima neprazan presek.

Teorema 2.1.2. (Singal,M.K. [56] , str. 671) Prostor (X,τ) je blizu kompaktan ako i samo ako je (X,τ^*) kompaktan .

Pomoću ove činjenice mogu se neki rezultati iz oblasti blizu kompaktnih prostora lakše dokazati, pošto oni predstavljaju uopštenja činjenica koje važe za kompaktne prostore.

Teorema 2.1.3. Topološki prostor X je blizu kompaktan ako i samo ako svaka mreža u prostoru X ima δ-tačku nagomilavanja.

Sledi X je blizu kompaktan ako i samo ako se iz svake mreže može izdvojiti podmreža koja δ-konvergira ka nekoj tački datog prostora X.

Dokaz. Neka je (X,τ) blizu kompaktan prostor, i neka je $\{S_n, n\in D\}$ mreža prostora X. Pošto je (X,τ^*) kompaktan prostor to sledi da mreža $\{S_n, n\in D\}$ ima δ-tačku nagomilavanja.

Obrnuto, ako mreža $\{S_n, n\in D\}$ ima δ-tačku nagomilavanja sledi da je (X,τ^*) kompaktan prostor, odnosno da je (X,τ) blizu kompaktan.

Poslednja činjenica predhodne teoreme sledi iz toga, da je potreban i dovoljan uslov da mreža ima δ-tačku nagomilavanja jeste de se iz mreže može izdvojiti podmreža koja δ-konvergira ka nekoj tački datog prostora X.

Teorema 2.1.4. Ako je X blizu Lindelöf-ov prostor sa osobinom da svaki niz ima δ-tačku nagomilavanja , X je tada blizu kompaktan prostor.

Dokaz. Ako je X blizu Lindelöf-ov prostor sa osobinom da svaki niz ima δ-tačku nagomilavanja , tada je (X,τ^*) Lindelöf-ov prostor sa osobinom da svaki niz ima tačku nagomilavanja, pa sledi da je (X,τ^*) kompaktan prostor, odnosno da je (X,τ) blizu kompaktan.

Teorema 2.1.5. (Singal,M.K., [55] , str. 704) Semi regularan prostor je blizu kompaktan ako i samo ako je kompaktan.

Takodje, regularan prostor je blizu kompaktan ako i samo ako je kompaktan (Singal,M.K., [55] , str. 704).

Svaki Hausdorff-ov blizu kompaktan prostor je skoro regularan (Singal, M.K., [55] , str. 705).

Znamo da je proizvod kompaktnih prostora kompaktan. Slično važi:

Teorema 2.1.6. (Singal, M. K., [56] , str. 677) Topološki proizvod je blizu kompaktan ako i samo ako je svaki koordinatni prostor blizu kompaktan.

Defnicija 2.1.3. (Singal, M.K., [56] , str. 673) Podskup A prostora X je *α-blizu kompaktan (N-zatvoren)* ako i samo ako se iz svakog regularno otvorenog (u X) prekrivača podskupa A može izdvojiti konačan podprekrivač.

Podskup A je blizu kompaktan ako i samo ako je A kao podprostor prostora X blizu kompaktan.

Ove dve kompaktnosti se uvek ne poklapaju. Važi,

Svaki gust (otvoren) podskup A prostora X je blizu kompaktan ako i samo ako je α-blizu kompaktan (Singal, M.K., [56] , str. 673).

Svaki δ-zatvoren podskup blizu kompaktnog prostora je α-blizu kompaktan (Singal, M.K., [56] , str. 673).

Regularno zatvoren podskup α-blizu kompaktnog skupa je opet α-blizu kompaktan skup (Carnahan, D., [12] , str. 147).

Teorema 2.1.7. Svaki α -blizu kompaktan podskup Hausdorff-ovog prostora X je δ-zatvoren.

Dokaz. Neka je A α-blizu kompaktan podskup u Hausdorff-ovom prostoru (X,τ). Tada je A kompaktan podskup u Hausdorff-ovom prostoru (X,τ^*) , pa sledi da je A δ-zatvoren podskup.

Teorema 2.1.8. Svaki blizu kompaktan Hausdorff-ov prostor je δ-normalan.

Dokaz. Neka je (X,τ) blizu kompaktan Hausdorff-ov prostor. Tada je (X,τ^*) kompaktan Hausdorff-ov prostor, te je on tada i normalan, pa sledi da je (X,τ^*) δ-normalan prostor.

Teorema 2.1.9. Ako je X skoro regularan prostor, A njegov α-blizu kompaktan podskup i U regularno otvorena okolina podskupa A, tada postoji regularno zatvorena okolina V podskupa A koja je sadržana u U.

Dokaz. Pošto je X skoro regularan prostor sledi da za svaku tačku $x \in A$, postoji regularno otvorena okolina V_x tako da je $x \in V_x \subset \overline{V}_x \subset U$. Tada je porodica

$$\{V_x : x \in A\}$$

regularno otvoren prekrivač α-blizu kompaktnog podskupa A , pa sledi da postoji konačan broj tačaka $x_1, x_2, \ldots, x_n$ iz A tako da je

$$A \subset V_{x_1} \cup V_{x_2} \cup \ldots \cup V_{x_n}.$$

Neka je $V = \overline{V}_{x_1} \cup \overline{V}_{x_2} \cup \ldots \cup \overline{V}_{x_n}$.

V je regularno zatvorena okolina skupa A sa osobinom $A \subset V \subset U$ što je i trebalo dokazati.

Teorema 2.1.10. Svaki skoro regularan blizu kompaktan prostor je δ-normalan prostor.

Dokaz. Neka je (X,τ) skoro regularan blizu kompaktan prostor. Tada je (X,τ^*) regularan kompaktan prostor, te je on normalan, pa sledi da je (X,τ) δ-normalan.

Teorema 2.1.11. Zatvaranje svakog α-blizu kompaktnog skupa je α-blizu kompaktan skup u skoro regularnom prostoru X.

Dokaz. Neka je X skoro regularan prostor i A α-blizu kompaktan podskup. Neka je $\{U_i : i \in I\}$ proizvoljan regularno otvoren prekrivač podskupa $\overline{A}$. Za svako $x \in A$ postoji $U_{i(x)}$ tako da $x \in U_{i(x)}$. Pošto je X skoro regularan prostor sledi da postoji regularno otvoren skup $V_{i(x)}$ tako da je

$$x \in V_{i(x)} \subset \overline{V}_{i(x)} \subset U_{i(x)}.$$

Porodica $\{V_{i(x)} : x \in A\}$ je regularno otvoren prekrivač α-blizu kompaktnog podskupa A, pa postoji konačna porodica

$$V_{i(x_1)}, V_{i(x_2)}, \dots V_{i(x_m)}$$

tako da je

$$A \subset V_{i(x_1)} \cup V_{i(x_2)} \cup \dots \cup V_{i(x_m)}$$

odnosno

$$\bar{A} \subset \bar{V}_{i(x_1)} \cup \bar{V}_{i(x_2)} \cup \dots \cup \bar{V}_{i(x_m)} \subset U_{i(x_1)} \cup U_{i(x_2)} \cup \dots \cup U_{i(x_m)}$$

pa sledi da je $\bar{A}$ α-blizu kompaktan podskup prostora X.

Teorema 2.1.12. Neka su A i B α-blizu kompaktni podskupovi topoloških prostora X i Y i neka je W regularno otvorena okolina skupa A x B proizvoda X x Y. Postoji regularno otvorena okolina U skupa A i regularno otvorena okolina V skupa B tako da je $A \times B \subset U \times V \subset W$.

Dokaz. Za svaku tačku $(x,y) \in A \times B$, postoje regularno otvorena okolina R tačke x i regularno otvorena okolina S tačke y tako da je $R \times S \subset W$. Pošto je B α-blizu kompaktan, sledi da za fiksno $x \in A$ postoji regularno otvorena okolina R_i tačke x i odgovarajući regularno otvoren skup S_i za $i = 0,1,2,\dots n$ tako da je $B \subset Q$, gde je

$$Q = \cup \{S_i : i = 0,1,2,\dots n\}$$

Ako je $P = \cap \{R_i : i = 0,1,2,\dots, n\}$, tada je P regularno otvorena okolina tačke x, a Q je okolina skupa B i važi $P \times Q \subset W$. Pošto je A α-blizu kompaktan sledi da postoji konačan broj regularno otvorenih skupova P_i u prostoru X i konačan broj odgovarajućih Q_i u prostoru Y tako da je $P_i \times Q_i \subset W$ i $A \subset U_1$, gde je $U_1 = \cup \{P_i : i = o,1,2,\dots,m\}$.

Neka je $V_1 = \cap \{Q_i : i = 0,1,2,\dots,m\}$.

Dalje neka je $U = \alpha(U_1)$ a $V = \alpha(V_1)$.

Tada su U i V regularno otvorene okoline podskupova A i B sa osobinom $U \times V \subset W$, što je i trebalo dokazati.

Teorema 2.1.13. Neka je X topološki prostor i neka je dato skoro neprekidno razlaganje $\mathcal{D}$ prostora X, čiji su članovi α-blizu kompaktni podskupovi i neka je $\mathcal{D}$ snabdeven količnik topologijom. Ako je X Hausdorff-ov prostor (skoro regularan) tada je $\mathcal{D}$ Hausdorff-ov (skoro regularan) prostor.

Dokaz. Za skup A prostora X reći ćemo da je prihvatljiv ako i samo ako je A unija nekih članova porodice $\mathcal{D}$. Iz definicije skoro neprekidnog razlaganja $\mathcal{D}$ sledi da svaka regularno otvorena okolina proizvoljnog člana A porodice u X sadrži neku prihvatljivu okolinu podskupa A. Znači, slika svake regularno otvorene okoline skupa A u X jeste okolina tačke A u $\mathcal{D}$. Pored toga znamo da je projekcija svakog regularno zatvorenog skupa zatvoren skup.

Sada predjimo na dokaz date teoreme. Neka je X Hausdorff-ov prostor. Neka su A i B α-blizu kompaktni podskupovi prostora X, tj. neka su A i B dve različite tačke u prostoru $\mathcal{D}$. Sledi da postoje regularno otvorene disjunktne okoline U i V podskupova A i B. Pošto je projekcija regularno otvorene okoline skupa A okolina tačke A u $\mathcal{D}$,sledi da su projekcije podskupova U i V ,disjunktne otvorene okoline tačaka A i B u prostoru $\mathcal{D}$, pa je $\mathcal{D}$ Hausdorff-ov prostor.

Sada neka je X skoro regularan prostor. Neka je $A \in \mathcal{D}$ i $\mathcal{U}$ regularno otvorena okolina tačke A u $\mathcal{D}$. Pošto je projekcija P skoro zatvoreno preslikavanje sledi da je $P^{-1}(\mathcal{U}) = U$ regularno otvorena okolina skupa A u prostoru X. Sledi da postoji regularno zatvorena okolina V skupa A sa osobinom $A \subset V \subset U$. P(V) je zatvorena okolina tačke A sa osobinom $A \subset P(V) \subset \mathcal{U}$ pa je $\mathcal{D}$ skoro regularan prostor,što je i trebalo dokazati.

Postavlja se pitanje kako se blizu kompaktni prostori odnose prema različitim preslikavanjima. Važi ,

Teorema 2.1.14. (Singal,M.K., [55], str. 706) Ako je f skoro neprekidno, skoro otvoreno preslikavanje blizu kompaktnog prostora X na prostor Y, tada *je i Y blizu kompaktan prostor.*

Teorema 2.1.15. Ako je f θ*-neprekidno skoro otvoreno preslikavanje blizu kompaktnog prostora X na prostor Y, tada je i Y blizu kompaktan prostor.*

Dokaz. Svako preslikavanje f koje je θ-neprekidno i skoro otvoreno je i skoro neprekidno.

Teorema 2.1.16.Ako je f slabo neprekidno preslikavanje blizu kompaktnog prostora X na skoro regularan prostor Y, tada je Y takodje blizu kompaktan.

Dokaz. Na osnovu teoreme 1 (Noiri,T., [41] , str. 142) f je skoro neprekidno preslikavanje prostora (X,τ^*) na prostor Y. Pošto je (X,τ) blizu kompaktan, to je (X,τ^*) kompaktan prostor, a skoro neprekidna slika kompaktnog prostora je blizu kompaktan prostor.

Teorema 2.1.17. Ako je f θ*-neprekidno, skoro otvoreno preslikavanje blizu kompaktnog prostora X na Hausdorff-ov prostor Y, tada je slika svakog regularno zatvorenog povezanog skupa u X regularno zatvoren povezan skup u Y.*

Dokaz. Preslikavanje f je skoro neprekidno i skoro otvoreno pa dokaz sledi na osnovu teoreme 3.3. (Herrington, [22] , str. 435) .

Definicija 2.1.3. (Carnahan,D., [12] , str. 150) Prostor X je *lokalno blizu kompaktan* ako i samo ako za svaku tačku $x \in X$ postoji okolina U tačke x tako da je $\overline{U}$ α-blizu kompaktan skup.

Očigledno je da je svaki lokalno kompaktan prostor ujedno i lokalno blizu kompaktan. Obrnuto nije uvek tačno.

Teorema 2.1.18. Ako je X skoro regularan prostor tada važe sledeće ekvivalencije:

(a) X je lokalno blizu kompaktan ;

(b) Za svaku tačku $x \in X$ *i okolinu U tačke x postoji otvoren skup V sa osobinom* $x \in V \subset \overline{V} \subset \alpha(U)$ *i* $\overline{V}$ *je* α*-blizu kompaktan podskup ;*

(c) Za svaku tačku $x \in X$ *i regularno otvorenu okolinu U tačke x postoji*

otvoren skup V sa osobinom $x \in V \subset \overline{V} \subset U$, $\overline{V}$ je α-blizu kompaktan skup ;

(d) Za svaki α-blizu kompaktan skup C i regularno otvoren skup $U \supset C$, postoji otvoren skup V sa osobinom $C \subset V \subset \overline{V} \subset U$, $\overline{V}$ je α-blizu kompaktan skup.

Dokaz. (a)$\rightarrow$(b)

Pošto je X lokalno kompaktan sledi da za svaku tačku $x \in X$ postoji otvoren skup W sa osobinom $x \in W \subset \overline{W}$, $\overline{W}$ je α-blizu kompaktan skup. Skup $\alpha(U \cap W)$ je regularno otvoren i $\alpha(U \cap W) \subset \overline{W}$. Pošto je X skoro regularan prostor, sledi da postoji regularno otvoren skup V sa osobinom $x \in V \subset \overline{V} \subset \alpha(U \cap W) \subset \alpha(U)$.

Skup $\overline{V}$ je regularno zatvoren i $\overline{V} \subset \overline{W}$, pa sledi da je $\overline{V}$ α-blizu kompaktan skup.

(b)$\rightarrow$(c)

Odmah se vidi.

(c)$\rightarrow$(d)

Za svako $c \in C$ može se naći otvoren skup V_c tako da je $\overline{V}_c$ α-blizu kompaktan skup i $\overline{V}_c \subset U$. $\{V_c : c \in C\}$ je otvoren prekrivač α-blizu kompaktnog skupa C pa sledi da postoji konačna porodica $\{V_{c_i} : i = 0,1,2,\dots, n\}$ tako da je

$$C \subset \cup \{\alpha(V_{c_i}) : i = 0,1,2,\dots, n \} = V .$$

Pošto je $\overline{V} = \cup \{ \overline{\alpha(V_{c_i})} : i = 0,1,2,\dots, n \}$, i $\overline{\alpha(V_{c_i})} = \overline{V}_{c_i}$, $\overline{V}$ je konačna unija α-blizu kompaktnih skupova pa je i $\overline{V}$ α-blizu kompaktan skup.

$\overline{V}$ je α-blizu kompaktan skup sa osobinom $C \subset V \subset \overline{V} \subset U$, pa je time dokazana implikacija (c)$\rightarrow$(d).

(d)$\rightarrow$(a)

Svaka tačka je α-blizu kompaktan podskup. Uzmimo da je $X = U$. Tada prema (d) sledi da postoji okolina V tako da je $x \in V \subset \overline{V} \subset X$ i $\overline{V}$ je α-blizu kompaktan skup, pa sledi da je prostor X lokalno blizu kompaktan.

Teorema 2.1.19. Potreban i dovoljan uslov da prostor (X,τ) bude lokalno blizu kompaktan jeste da je (X,τ^*) lokalno kompaktan prostor.

Dokaz. Neka je (X,τ) lokalno blizu kompaktan prostor. Neka je $x \in X$ proizvoljna tačka. Sledi da postoji otvorena okolina U tačke x tako da je $\overline{U}$ α-blizu kompaktan podskup . Neka je $V = \alpha(U)$. Tada važi $x \in V \subset \overline{V} \subset \overline{U}$. Odatle sledi da je V regularno otvorena okolina tačke x sa osobinom da je $\overline{V}$ α-blizu kompaktan skup u prostoru (X,τ). Pošto je skup $\overline{V}$ regularno zatvoren u prostoru (X,τ), $\overline{V}$ je zatvoren u prostoru (X,τ^*). V je otvorena okolina tačke x u prostoru (X,τ^*) sa osobinom da je $\overline{V}$ kompaktan skup u prostoru (X,τ^*) pa sledi da je (X,τ^*) lokalno kompaktan prostor.

Obrnuto, neka je (X,τ^*) lokalno kompaktan prostor. Uzmimo tačku $x \in X$. Tada postoji δ-otvorena okolina V tačke x tako da je $\overline{V}_{\tau^*}$ kompaktan skup u prostoru (X, τ^*), pa je $\overline{V}_{\tau^*}$ α-blizu kompaktan skup u prostoru (X,τ). Pošto je $\overline{V}_{\tau} \subset \overline{V}_{\tau^*}$ sledi da je $\overline{V}_{\tau}$ α-blizu kompaktan skup u prostoru (X,τ), pa je (X,τ) lokalno blizu kompaktan prostor.

Teorema 2.1.20. Ako je topološki proizvod lokalno blizu kompaktan onda je svaki koordinatni prostor lokalno blizu kompaktan i svi osim konačnog broja koordinatnih prostora su blizu kompaktni.

Dokaz. Neka je topološki proizvod $(\prod X_i,\tau)$ lokalno blizu kompaktan prostor. Tada je na osnovu predhodne teoreme $(\prod X_i,\tau^*)$ lokalno kompaktan prostor, pa sledi da su svi koordinatni prostori (X_i,τ_i^*) lokalno kompaktni i svi osim konačnog broja su kompaktni,pa odatle sledi da su svi koordinatni prostori (X_i, τ_i) lokalno blizu kompaktni, pri čemu najviše konačno njih nisu blizu kompaktni.

Teorema 2.1.21. (Carnahan,D., [12] , str.151) Neka je f skoro neprekidno bijektivno i skoro otvoreno preslikavanje topološkog prostora X na topološki prostor Y. Ako je X lokalno blizu kompaktan tada je i Y lokalno blizu kompakta.

Pored blizu kompaktnih prostora mogu se posmatrati blizu prebrojivo kompaktni, blizu sekvencijalno kompaktni itd. prostori, koji se definišu na odgovarajući način kao i blizu kompaktni prostori. Npr. prostor X je blizu prebrojivo kompaktan ako i samo ako se iz svakog prebrojivog regularno otvorenog prekrivača datog prostora X može izdvojiti konačan podprekrivač.

Teorema 2.1.22. Potreban i dovoljan uslov da je prostor X blizu kompaktan jeste da je blizu Lindelöf-ov blizu prebrojivo kompaktan.

Dokaz. Lako se dokazuje.

Teorema 2.1.23. U blizu prebrojivo kompaktnom prostoru X svaka otvorena lokalno konačna porodica je konačna.

Dokaz. Dovoljno je pokazati da je svaka regularno otvorena lokalno konačna porodica konačna, jer ako je $\{U_i : i \in I\}$ otvorena lokalno konačna porodica tada je $\{\alpha(U_i) : i \in I\}$ regularno otvorena lokalno konačna porodica.

Predpostavimo da postoji prebrojiva regularno otvorena lokalno konačna porodica $\{A_n : n \in N\}$ koja nije konačna. Neka je $F_i = \bigcup_{j=i}^{\infty} \bar{A}_j$. Skupovi F_i su regularno zatvoreni sa osobinom $\bigcap F_i = \emptyset$, pa bi sledilo da dati prostor nije blizu prebrojivo kompaktan.

2.2. SKORA KOMPAKTNOST

U ovom paragrafu ispitivaćemo osobine skoro kompaktnih i skoro-m-kompaktnih prostora.

Definicija 2.2.1. (Aleksandrov,P.S. [1], vidi Singal,M.K., [50],str.234) Za prostor X kažemo da je *skoro kompaktan (H-zatvoren)* ako i samo ako se iz svakog otvorenog prekrivača $\mathcal{U}$, može izdvojiti konačna porodica skupova U_1, $U_2, \ldots, U_n$ sa osobinom

$$X = \bar{U}_1 \cup \bar{U}_2 \cup \ldots \cup \bar{U}_n .$$

Definicija 2.2.2. (Singal,M.K., [50], str.234) Prostor X je *skoro-m-kompaktan* ako i samo ako se iz svakog otvorenog prekrivača $\mathcal{U}$, $k\,\mathcal{U} \leqslant m$, može izdvojiti konačna porodica $U_1, U_2, \dots, U_n$ sa osobinom

$$X = \overline{U}_1 \cup \overline{U}_2 \cup \dots \cup \overline{U}_n .$$

Svaki skoro kompaktan prostor je skoro-m-kompaktan. Svaki blizu kompaktan prostor je skoro kompaktan, pa sledi da je svaki kompaktan prostor skoro kompaktan. Obrnute činjenice nisu tačne, postoje razni primeri.

Veza izmedju do sada proučavanih kompaktnosti može se ilustrovati na sledeći način

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r] \arrow[d] & mC \arrow[d] \\ NC \arrow[r] \arrow[d] & NmC \arrow[d] \\ AC \arrow[r] & AmC \end{tikzcd}$$

gde je C-kompaktan, N-blizu, A- skoro.

Teorema 2.2.1. (Singal,M.K., [55],str.704) Skoro regularan prostor je skoro kompaktan ako i samo ako je blizu kompaktan.

Definicija 2.2.2. Porodica $\mathcal{F}$ podskupova prostora X ima osobinu *int-konačnog presecanja* ako i samo ako je unutrašnjost svakog preseka od konačno mnogo članova porodice $\mathcal{F}$ neprazan skup.

Teorema 2.2.2.Prostor X je skoro-m-kompaktan ako i samo ako svaka porodica $\mathcal{F}$, $k\,\mathcal{F} \leqslant m$ *,zatvorenih skupova sa osobinom int-konačnog presecanja ima neprazan presek.*

Dokaz. Potreban uslov. Neka je $\mathcal{F}$, $k\,\mathcal{F} \leqslant m$, proizvoljna porodica zatvorenih skupova u skoro m-kompaktnom prostoru X i predpostavimo da je presek članova porodice $\mathcal{F}$, prazan skup. Tada sledi da porodica

$$\mathcal{G} = \{X \setminus F \;:\; F \in \mathcal{F}\}$$

je otvoren prekrivač skoro m-kompaktnog prostora X, $k\,\mathcal{G} \leqslant m$, pa postoji konačan broj članova $F_1, F_2, \dots, F_n$ tako da je

$$X = \overline{X \setminus F_1} \cup \overline{X \setminus F_2} \cup \ldots \cup \overline{X \setminus F_n}$$

Pošto je $\overline{X \setminus F} = X \setminus F^o$, sledi

$$(X \setminus F_1^o) \cup (X \setminus F_2^o) \cup \ldots \cup (X \setminus F_n^o) = X$$

odnosno

$$F_1^o \cap F_2^o \cap \ldots \cap F_n^o = \emptyset .$$

Odatle sledi

$$(F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_n)^o = \emptyset .$$

Sledi da porodica F nema osobinu int-konačnog presecanja.

Dovoljan uslov. Neka je G, $k\, G \leq m$, otvoren prekrivač prostora X. Posmatrajmo porodicu

$$F = \{X \setminus G : G \in G\}$$

Porodica F je porodica zatvorenih skupova i $kF \leq m$. Pošto je G prekrivač prostora X sledi da je presek članova porodice F prazan skup. Odatle sledi da F nema osobinu int-konačnog presecanja, jer ako bi porodica F imala osobinu int-konačnog presecanja ,na osnovu uslova teoreme sledilo bi da je presek članova porodice F neprazan skup. Dakle postoji konačan broj skupova $G_1, G_2, \ldots, G_n$ tako da je

$$(X \setminus G_1)^o \cap (X \setminus G_2)^o \cap \ldots \cap (X \setminus G_n)^o = \emptyset$$

to jest

$$(X \setminus \overline{G}_1) \cap (X \setminus \overline{G}_2) \cap \ldots \cap (X \setminus \overline{G}_n) = \emptyset .$$

Odatle sledi da je

$$X \setminus (\overline{G}_1 \cup \overline{G}_2 \cup \ldots \cup \overline{G}_n) = \emptyset ,$$

odnosno

$$\overline{G}_1 \cup \overline{G}_2 \cup \ldots \cup \overline{G}_n = X$$

pa je dati prostor X skoro m-kompaktan.

Teorema 2.2.3. Prostor X je skoro kompaktan ako i samo ako svaka porodica zatvorenih skupova sa osobinom int-konačnog presecanja ima neprazan *presek.*

Dokaz. Kao i u predhodnoj teoremi.

Za podskup A prostora X kažemo da je α-skoro kompaktan ako i samo ako se iz svakog otvorenog prekrivača $\mathcal{U}$ skupa X može izdvojiti konačna porodica $U_1, U_2, \ldots, U_n$ tako da je

$$A = \overline{U}_1 \cup \overline{U}_2 \cup \ldots \cup \overline{U}_n.$$

Teorema 2.2.4. Neka je X skoro regularan prostor. Podskup A je α-blizu kompaktan ako i samo ako je α-skoro kompaktan.

Dokaz. Neka je A α-blizu kompaktan podskup skoro regularnog prostora X. Pokazaćemo da je A α-skoro kompaktan. U tu svrhu neka je $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ proizvoljan X-otvoren prekrivač podskupa A. Tada je i $\mathcal{V} = \{\alpha(U_i) : i \in I\}$ regularno otvoren prekrivač podskupa A. Pošto je A α-blizu kompaktan, sledi da postoji konačan podskup J skupa I tako da je $\mathcal{V}' = \{\alpha(U_i) : i \in J\}$ regularno otvoren prekrivač podskupa A. Odatle sledi da je $\mathcal{U}' = \{U_i : i \in J\}$ konačna podporodica porodice $\mathcal{U}$ otvorenih skupova sa osobinom da zatvorenja njenih članova čini konačnu porodicu koja prekriva podskup A. Odatle sledi da je A α-skoro kompaktan podskup datog prostora X.

Vidi se da ovaj deo dokaza važi za sve prostore X. Ne moramo se ograničiti samo na skoro regularne prostore.

Obrnuto, neka je A α-skoro kompaktan podskup prostora X. Neka je dat proizvoljan regularno otvoren prekrivač $\{U_i : i \in I\}$ podskupa A. Za svako $x \in A$ postoji U_i tako da $x \in U_i$. Pošto je X skoro regularan prostor, sledi da postoji regularno otvoren skup V_x, tako da $x \in V_x \subset \overline{V}_x \subset U_i$. Porodica $\{V_x : x \in A\}$ prekriva podskup A, a pošto je A α-skoro kompaktan sledi da postoji konačan broj regularno otvorenih skupova $V_{x_1}, V_{x_2}, \ldots V_{x_n}$ sa osobinom

$$\overline{V}_{x_1} \cup \overline{V}_{x_2} \cup \ldots \cup \overline{V}_{x_n} = A$$

$\overline{V}_{x_i} \subset U_{i_j}$ za neko $U_{i_j} \in \{U_i : i \in I\}$. Sledi da je konačna porodica $\{U_{i_j} : j=1,2,\ldots n\}$ regularno otvoren prekrivač datog podskupa A, pa je A α-blizu kompaktan podskup, što je i trebalo dokazati.

Posledica 2.2.1. Ako je X skoro regularan prostor i A α-skoro kompaktan podskup i U regularno otvorena okolina podskupa A, to postoji regularno zatvorena okolina V podskupa A sa osobinom $A \subset V \subset U$.

Teorema 2.2.5. (Singal, M. K., [50], str. 238) Prostor X je skoro m-kompaktan ako i samo ako je svaki regularno zatvoren podskup α-skoro m-kompaktan.

Teorema 2.2.6. (Singal, M. K., [49], str. 707) Neka je f skoro neprekidno preslikavanje prostora X na prostor Y. Ako je X skoro kompaktan onda je i Y skoro kompaktan.

Teorema 2.2.6. (Chevalley, C., [14], vidi Engelking, R., [21], str. 277) Topološki proizvod je skoro kompaktan ako i samo ako je svaki koordinatni prostor skoro kompaktan.

Teorema 2.2.7. Neka je f skoro neprekidno preslikavanje prostora X na prostor Y. Ako je X skoro m-kompaktan prostor tada je i Y skoro m-kompaktan.

Dokaz. Da bi Y bio skoro m-kompaktan dovoljno je dokazati da se iz svakog regularno otvorenog prekrivača $\mathcal{U}=\{U_i : i\in I\}$, $k\,\mathcal{U} \leq m$, može izdvojiti konačna porodica $U_1, U_2 \ldots U_n$ sa osobinom

$$\overline{U}_1 \cup \overline{U}_2 \cup \ldots \cup \overline{U}_n = Y.$$

Dokažimo tu činjenicu. Neka je $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ otvoren prekrivač prostora Y, $k\,\mathcal{U} \leq m$. Posmatrajmo regularno otvoren prekrivač $\{\alpha(U_i) : i \in I\}$. Sledi da postoji konačan skup indeksa $J \subset I$ tako da je

$$\cup \{\overline{\alpha(U_i)} : i \in J\} = Y.$$

Pošto je $\overline{\alpha(U_i)} = \overline{U}_i$ sledi da je $\cup\{\overline{U}_i : i \in J\} = Y$, pa je Y skoro m-kompaktan prostor.

Sada predjimo na dokaz date teoreme. Neka je $\mathcal{U} = \{ U_i : i \in I \}$, $k\,\mathcal{U} \leq m$, proizvoljan regularno otvoren prekrivač prostora Y. Tada je

$$\mathcal{U}^* = \{ f^{-1}(U_i) : i \in I \}$$

otvoren prekrivač prostora X sa osobinom $k\,\mathcal{U}^* \leq m$. Pošto je X skoro m-kompaktan prostor, sledi da postoji konačna porodica

$$\{ f^{-1}(U_{i_k}) : k = 1,2,\dots,n \}$$

tako da je

$$\cup \{ \overline{f^{-1}(U_{i_k})} : k = 1,2,\dots, n \} = X.$$

Pošto je f skoro naprekidno preslikavanje, sledi da je

$$\overline{f^{-1}(U_{i_k})} \subset f^{-1}(\overline{U_{i_k}})$$

odnosno, sledi da je

$$Y = \cup \{ \overline{U}_{i_k} : k = 1,2,\dots,n \}$$

pa je Y skoro m-kompaktan prostor.

G L A V A III

P A R A K O M P A K T N O S T

U ovoj glavi obradićemo neka uopštenja parakompaktnih prostora,tj. biće obradjeni blizu parakompaktni,blizu prebrojivo parakompaktni, slabo parakompaktni, skoro parakompaktni kao i lokalno skoro parakompaktni prostori.

3.1. B L I Z U P A R A K O M P A K T N O S T

Definicija 3.1.1. (Aleksandrov,P.S., [2],vidi Aleksandrov,P.S., [3] str. 71) Porodica $\mathcal{A}$ prostora X je *lokalno konačna (diskretna)* ako i samo ako za svaku tačku x prostora X postoji okolina koja se seče sa najviše konačno mnogo (jednim) članova porodice $\mathcal{A}$.

Lako se vidi da je unija zatvaranja članova lokalno konačne (diskretne) porodice podskupova prostora X jednaka zatvorenju unije članova te lokalno konačne (diskretne) porodice , tj. ako je $\mathcal{A}$ lokalno konačna (diskretna) porodica tada je

$$\overline{\cup\{A : A\in\mathcal{A}\}} = \cup\{\bar{A} : A\in\mathcal{A}\}$$

Očigledno sledi da zatvaranja članova lokalno konačne (diskretne) porodice obrazuju lokalno konačnu (diskretnu) porodicu.

Definicija 3.1.2. (Aleksandrov,P.S., [2], vidi Aleksandrov,P.S.,[3]str. 72) Porodica $\mathcal{A}$ je *σ-lokalno konačna (σ-diskretna)* ako i samo ako je $\mathcal{A}$ unija od najviše prebrojivo mnogo lokalno konačnih (diskretnih) porodica.

Za porodicu $\mathcal{B}$ kažemo da je upisana u porodicu $\mathcal{A}$ ako i samo ako je svaki član porodice $\mathcal{B}$ podskup nekog člana porodice $\mathcal{A}$.

Definicija 3.1.3. (Dieudonne,J., [17], vidi Kelley,L.J., [27], str.211) Prostor X je *parakompaktan* ako i samo ako je regularan i ako se u svaki otvoren prekrivač prostora X može upisati otvoren lokalno konačan prekrivač.

Svaki regularan kompaktan prostor je ujedno i parakompaktan, dok obrnuto nije uvek tačno, to pokazuje primer beskonačnog diskretnog prostora.

Definicija 3.1.4. (Singal,M.K., [57],str. 3) Prostor X je *blizu parakompaktan* ako i samo ako se u svaki regularno otvoren prekrivač datog prostora X može upisati otvoren lokalno konačan prekrivač.

Svaki parakompaktan prostor je i blizu parakompaktan dok obrnuto nije uvek tačno ,što pokazuju niz primera.

Teorema 3.1.1. (Singal,M.K., [57], str. 4) Regularan prostor je blizu parakompaktan ako i samo ako je parakompaktan.

Teorema 3.1.2. Skoro regularan prostor (X,τ) je blizu parakompaktan ako i samo ako je (X, τ^*) parakompaktan prostor.

Dokaz. Neka je (X,τ) skoro regularan blizu parakompaktan prostor. Pre svega (X,τ^*) je regularan prostor. Neka je

$$\{ U_i : i \in I \}$$

proizvoljan δ-otvoren (τ^* -otvoren) prekrivač datog prostora X. U δ-otvoren prekrivač $\{U_i: i \in I\}$ možemo upisati τ-regularno otvoren prekrivač $\{V_j: j \in J\}$ (regularno otvoreni skupovi su baza topologije τ^*). $\{V_j: j \in J\}$ je regularno otvoren prekrivač prostora (X,τ), pa pošto je (X,τ) blizu parakompaktan sledi da se u $\{V_j: j \in J\}$ može upisati otvoren lokalno konačan prekrivač $\{W_k: k \in K\}$ prostora (X,τ) . Tada je $\{\alpha(W_k) : k \in K\}$ regularno otvoren lokalno konačan prekrivač upisan u $\{V_j: j \in J\}$. Treba još pokazati da za svaku tačku $x \in X$ postoji δ-otvorena okolina koja se seče sa najviše konačno mnogo članova porodice $\{\alpha(W_k) : k \in K\}$.

Zaista, pošto je $\{\alpha(W_k) : k \in K\}$ regularno otvoren lokalno konačan prekrivač sledi da postoji otvorena okolina $O(x)$ tačke x, koja se seče sa najviše konačno mnogo članova porodice $\{\alpha(W_k) : k \in K\}$. Tada je $\alpha(O(x))$ regularno otvorena okolina tačke x, koja se seče sa najviše konačno mnogo članova porodice $\{\alpha(W_k): k \in K\}$. Odatle sledi da je (X,τ^*) parakompaktan prostor.

Pokažimo sada da , ako je (X,τ^*) parakompaktan prostor ,je tada (X,τ) blizu parakompaktan prostor. U tu svrhu neka je

$$\{U_i : i \in I\}$$

proizvoljan regularno otvoren prekrivač prostora (X,τ). Pošto je $\{U_i : i \in I\}$ regularno otvoren prekrivač, sledi da se u njega može upisati δ-otvoren lokalno konačan prekrivač $\{V_j : j \in J\}$. Svaki δ-otvoren skup je ujedno i otvoren, pa sledi da je $\{V_j : j \in J\}$ otvoren lokalno konačan prekrivač prostora (X,τ), koji je upisan u regularno otvoren prekrivač $\{U_i : i \in I\}$, pa je dati prostor (X,τ) blizu parakompaktan, što je i trebalo dokazati.

Ova teorema je od velikog značaja ,jer pomoću nje se dokazi sličnih činjenica koje važe za parakompaktne prostore mogu preneti na blizu parakompaktne prostore, pa se niz teorema iz literature na ovaj jednostavan način može lakše dokazati.

Definicija 3.1.5. Otvoren prekrivač $\mathcal{U}$ prostora X je *δ-uniforman* ako i samo ako postoji δ-otvorena okolina V dijagonale Δ proizvoda X x X tako da je za svaku tačku x prostora X, $V[x] \subset U$ za neko $U \in \mathcal{U}$,gde je $V[x] = \{y: (x,y) \in V\}$.

Teorema 3.1.3. Ako je X skoro regularan prostor važe sledeće ekvivalencije:

(a) X je blizu parakompaktan ;

(b) U svaki regularno otvoren prekrivač prostora X može se upisati regularno otvoren lokalno konačan prekrivač ;

(c) U svaki regularno otvoren prekrivač prostora X može se upisati regu-

larno zatvoren lokalno konačan prekrivač ;

(d) U svaki δ-otvoren prekrivač može se upisati lokalno konačan prekrivač ;

(e) Svaki δ-otvoren prekrivač je δ-uniforman ;

(f) U svaki δ-otvoren prekrivač prostora X može se upisati δ-otvoren σ-diskretan prekrivač ;

(g) U svaki δ-otvoren prekrivač prostora X može se upisati δ-otvoren σ-lokalno konačan prekrivač.

Dokaz. Sledi na osnovu predhodne teoreme i teoreme 5.2.8 (Michael, [37] Stone,[61], vidi Kelley,L.J., [27], str. 212).

Teorema 3.1.4. (Singal,M.K., [57],str. 11) Svaki blizu parakompaktan Hausdorff-ov prostor je skoro regularan.

Dokaz. (X,τ^*) je Hausdorff-ov prostor sa osobinom da se u svaki δ-otvoren prekrivač može upisati δ-otvoren lokalno konačan prekrivač,pa je prostor (X,τ^*) regularan odnosno (X,τ) je skoro regularan prostor.

Teorema 3.1.4. (Singal,M.K., [57],str. 8) Svaki skoro regularan blizu Lindelöf-ov prostor je blizu parakompaktan.

Dokaz. (X,τ^*) je regularan Lindelöf-ov prostor,pa je (X,τ^*) parakompaktan, odnosno (X,τ) je blizu parakompaktan prostor.

Teorema 3.1.5. Svaki skoro regularan blizu parakompaktan prostor je δ-normalan.

Dokaz. (X,τ^*) je regularan parakompaktan prostor, pa je on i normalan odnosno (X,τ) je δ-normalan.

Definicija 3.1.6. (Tukey,J.W., [66],vidi Aleksandrov,P.S., [3],str.66) Neka je $\mathcal{U}$ proizvoljna porodica prostora X i neka $x \in X$. *Zvezdom tačke x u odnosu na $\mathcal{U}$ u oznaci $St(x,\mathcal{U})$* nazivamo uniju svih elemenata porodice $\mathcal{U}$ koji sadrže x tj.

$$St(x, \mathcal{U}) = \cup \{U : U \in \mathcal{U} , x \in U \}$$

Zvezda skupa A je

$$St(A,\mathcal{U}) = \cup \{St(x, \mathcal{U}) , x \in A \} .$$

Definicija 3.1.7. (Tukey,J.W.,[66],vidi Kelley,L.J.,[27], str. 230) Prekrivač $\mathcal{V}$ je *zvezdasto upisan* u prekrivač $\mathcal{U}$ ako i samo ako je porodica svih zvezdi za sve tačke x u odnosu na $\mathcal{V}$ upisana u $\mathcal{U}$ tj. ako za svaku tačku x prostora X postoji $U \in \mathcal{U}$ tako da je $St(x, \mathcal{U}) \subset U$.

Teorema 3.1.6. (Singal,M.K.,[57],str. 7) Skoro regularan prostor X je blizu parakompaktan ako i samo ako se u svaki regularno otvoren prekrivač prostora X može zvezdasto upisati regularno otvoren prekrivač.

Dokaz. Mi ćemo ovde dovoljan uslov drugačije dokazati nego što je dokazan u radu Singala.

Neka je $\mathcal{U}=\{U_i : i \in I\}$ proizvoljan regularno otvoren prekrivač prostora X. Pošto je X skoro regularan sledi prema predpostavci teoreme da se u regularno otvoren prekrivač $\mathcal{U}$ može zvezdasto upisati regularno otvoren prekrivač $\mathcal{V}=\{V_i : i \in I\}$. Neka je

$$V = \cup \{V_j \times V_j : j \in J\}$$

Tada je V δ-otvorena okolina dijagonale Δ proizvoda X x X. Pokazaćemo da je $V[x] \subset U_i$ za neko $i \in I$.

Ako $y \in V[x]$,tada $(x,y) \in V$, pa sledi da postoji $j \in J$ tako da je $(x,y) \in V_j \times V_j$. Tada $x \in V_j$ i $y \in V_j$, odnosno $y \in St(x, \mathcal{V})$ pa sledi $V[x] \subset St(x, \mathcal{V})$. Pošto je $\mathcal{V}$ zvezdasto upisan u $\mathcal{U}$,sledi da postoji $i \in I$ tako da je $V[x] \subset St(x,\mathcal{V}) \subset \subset U_i$.

Znači svaki regularno otvoren (δ-otvoren) prekrivač je δ-uniforman pa je dati prostor X blizu parakompaktan.

Teorema 3.1.7. Potreban i dovoljan uslov da bi Hausdorff-ov prostor X bio blizu parakompaktan jeste da se u svaki regularno otvoren prekrivač prostora

X može zvezdasto upisati regularno otvoren prekrivač.

Dokaz. Neka je X Hausdorff-ov blizu parakompaktan prostor. Tada,pošto je X skoro regularan prostor, sledi na osnovu predhodne teoreme da se u svaki regularno otvoren prekrivač može zvezdasto upisati regularno otvoren prekrivač.

Obrnuto, neka je X Hausdorff-ov prostor sa osobinom da se u svaki regularno otvoren prekrivač može zvazdasto upisati regularno otvoren prekrivač. Pokazaćemo da je X skoro regularan prostor, pa da je blizu parakompaktan slediće na osnovu predhodne teoreme.

U tu svrhu, neka je F proizvoljan regularno zatvoren skup i $y \notin F$. Tada za svaku tačku $x \in F$ postoji otvoren skup G_x tako da $x \in G_x$ i $y \notin \overline{G}_x$. Tada je

$$\{\alpha(G_x) : x \in F\} \cup \{X \setminus F\}$$

regularno otvoren prekrivač prostora X, pa sledi da se u njega može zvezdasto upisati regularno otvoren prekrivač A . Dokazaćemo da je

$$St(F, A) \cap St(y, A) = \emptyset.$$

Predpostavimo da postoji tačka z koja pripada i jednom i drugom skupu tj. $z \in St(F, A) \cap St(y, A)$. Pošto je $St(F,A) = \cup \{St(y_F, A) : y_F \in F\}$ sledi da postoji tačka y_F tako da $z \in St(y_F, A) \subset \alpha(G_x)$ za neko $x \in F$.

Pošto $y \notin \alpha(G_x)$ ni za kakvo $x \in F$ sledi da je $z \in St(y, A) \subset X \setminus F$, pa odatle sledi da $z \in X \setminus F$. Važi, ili $St(z, A) \subset X \setminus F$ ili $St(z,A) \subset \alpha(G_x)$.

$St(z, A) \not\subset X \setminus F$, jer ako bi važila ta implikacija sledilo bi, pošto je $z \in St(y_F,A) \Rightarrow y_F \in St(z, A)$ da $y_F \in X \setminus F$, što je nemoguće jer $y_F \in F$.

Ne može da važi ni $St(z, A) \subset \alpha(G_x)$, jer bi to značilo,pošto $z \in St(y, A)$ $y \in St(z, A)$ da $y \in \alpha(G_x)$, a to je nemoguće.

Znači $St(F,A) \cap St(y, A) = \emptyset$,pa je dati prostor X skoro regularan, pa na osnovu predhodne teoreme sledi da je X blizu parakompaktan prostor.

Teorema 3.1.8. Ako je X Hausdorff-ov prostor važe sledeće ekvivalencije:

(a) Za svaki regularno otvoren prekrivač $\mathcal{U}$ *prostora X i svaku tačku* $a \in X$ *postoji otvoren prekrivač* $\mathcal{V}$ *koji je upisan u* $\mathcal{U}$ *i koji je lokalno konačan u tački a ;*

(b) X je skoro regularan prostor;

(c) Za svaki regularno otvoren prekrivač $\mathcal{U}$ *prostora X i svaku tačku* $a \in X$ *postoji otvoren prekrivač* $\mathcal{V}$ *prostora X, otvoren skup* O_a *koji sadrži tačku a tako da* $x \in O_a \Rightarrow St(x,\mathcal{V}) \subset U$ *za neko* $U \in \mathcal{U}$ *.*

Dokaz. Plan dokaza

(a)→(b)→(a)

(b)→(c)→(b)

(a)→(b)

Neka je F proizvoljan regularno zatvoren skup i $y \notin F$. Pošto je X Hausdorff-ov prostor to sledi da za svaku tačku $x \in F$ postoji otvoren skup G_x, koji sadrži x tako da $y \notin \overline{G}_x$. Posmatrajmo regularno otvoren prekrivač

$$\{\alpha(G_x) : x \in F\} \cup \{X \setminus F\} .$$

U taj regularno otvoren prekrivač po predpostavci teoreme možemo upisati otvoren prekrivač $\mathcal{V}$ koji je lokalno konačan u tački y. Neka je

$$V^* = \cup \{V \in \mathcal{V} : F \cap V \neq \emptyset\} .$$

V^* je otvoren skup sa osobinom $F \subset V^*$ .Pošto je $\mathcal{V}$ lokalno konačna u tački y postoji otvoren skup U koji sadrži y, a koji se seče sa najviše konačno mnogo članova porodice $\mathcal{V}$. Neka su $V_1, V_2, \dots V_m$ članovi prekrivača $\mathcal{V}$ koji nisu sadržani u $X \setminus F$,a koji seku otvoren skup U. Neka je

$$U^* = U \cap \{X \setminus \bigcup_{i=1}^{m} \overline{U}_i\} .$$

Sledi $y \in U^*$, $F \subset V^*$ i $U^* \cap V^* = \emptyset$, čime je (b) dokazano.

(b)$\to$(a)

Neka je

$$\mathcal{U} = \{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$$

proizvoljan regularno otvoren prekrivač prostora X i neka je $a \in X$ proizvoljna tačka. Tada postoji $\lambda' \in \Lambda$ tako da $a \in U_{\lambda'}$. $X \setminus U_{\lambda'}$ je regularno zatvoren skup i $a \notin X \setminus U_{\lambda'}$. Pošto je po predpostavci X skoro regularan prostor to sledi da postoje disjunktni otvoreni skupovi U* i V* tako da je $X \setminus U_{\lambda'} \subset V^*$ i $a \in U^*$. Neka je

$$\mathcal{V} = \{U_{\lambda'}\} \cup \{V^* \cap U_{\lambda'} : \lambda \in \Lambda \quad , \lambda \neq \lambda'\}.$$

$\mathcal{V}$ je otvoren prekrivač datog prostora X sa osobinom da je upisan u regularno otvoren prekrivač $\mathcal{U}$ i da je lokalno konačan u tački a (okolina U* seče samo elemenat $U_{\lambda'} \in \mathcal{U}$) što je i trebalo dokazati.

(b)$\to$(c)

Neka je X skoro regularan prostor i neka je

$$\mathcal{U} = \{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$$

proizvoljan regularno otvoren prekrivač prostora X i neka je $a \in X$ proizvoljna tačka. Postoji $\lambda' \in \Lambda$ tako da $a \in U_{\lambda'}$. Pošto je X skoro regularan prostor postoji regularno otvoren skup $V_{\lambda'}$ tako da je

$$a \in V_{\lambda'} \subset \overline{V}_{\lambda'} \subset U_{\lambda'} .$$

$X \setminus V_{\lambda'}$ je regularno zatvoren skup i $a \notin X \setminus V_{\lambda'}$. Na osnovu toga što je dati prostor skoro regularan, sledi da postoje otvoreni skupovi U* i V* tako da je $X \setminus V_{\lambda'} \subset V^*$, $a \in U^*$ i $U^* \cap V^* = \emptyset$. Posmatrajmo prekrivač

$$\mathcal{V} = \{V_{\lambda'}\} \cup \{V^* \cap U_\lambda\} .$$

$\mathcal{V}$ je porodica koja je upisana u $\mathcal{U}$. Uvedimo oznaku $O_a = U^*$ i neka $x \in O_a$. $St(x,\mathcal{V}) = V_{\lambda'} \subset U_{\lambda'}$.

Znači, postoji otvorena okolina O_a tačke a tako da za svako $x \in O_a$ sledi $St(x, \mathcal{V}) \subset U$ za neko $U \in \mathcal{U}$, što je i trebalo dokazati.

(c)⟹(b)

Neka je F proizvoljan regularno zatvoren skup takav da $a \notin F$. Pošto je X Hausdorff-ov prostor, to sledi da za svako $x \neq a$ postoji otvoren skup U_x, koji sadrži tačku x takav da $a \notin \overline{U}_x$. Posmatrajmo regularno otvoren prekrivač

$$\mathcal{U} = \{X \setminus F\} \cup \{\alpha(U_x) : x \in X \setminus \{a\}\} .$$

Na osnovu predpostavke , postoji otvoren prekrivač $\mathcal{V}$ i otvoren skup O_a koji sadrži a tako da iz $x \in O_a$ sledi $St(x,\mathcal{V}) \subset U$ za neko $U \in \mathcal{U}$. Izaberimo V_a takvo da $a \in V_a$ i za svako $b \in F$ izaberimo V_b tako da $b \in V_b$. Neka je $P_a = V_a \cap O_a$ i $P_F = \cup \{V_b : b \in F\}$. Odatle sledi da $a \in P_a$ i $F \subset P_F$ i da su P_a i P_F otvoreni skupovi. Predpostavimo da $x \in P_a \cap P_F$. Tada iz $x \in P_F$ sledi da $x \in V_{b^*}$ za neko $b^* \in F$. Iz $x \in P_a$ sledi da $x \in O_a$, odnosno $St(x, \mathcal{V}) \subset U$ za neko $U \in \mathcal{U}$.

Ako je $St(x, \mathcal{V}) \subset X \setminus F$ tada $V_{b^*} \subset X \setminus F$, odakle bi sledilo $b^* \in X \setminus F$, što je nemoguće.

Ako je $St(x, \mathcal{V}) \subset \alpha(U_y)$ za neko $y \neq a$, tada $V_a \subset \alpha(U_y)$ za to $y \neq a$. To je nemoguće, jer $a \notin \alpha(U_y)$ ni za jedno $y \neq a$.

Prema tome sledi da su P_a i P_F dva disjunktna otvorena skupa koji sadrže respektivno a i F, pa je dati prostor skoro regularan.

Teorema 3.1.9. Ako se u svaki regularno otvoren prekrivač skoro regularnog prostora X može upisati lokalno konačan prekrivač, to za svaki regularno otvoren prekrivač $\{U_i : i \in I\}$ prostora X postoji zatvoren lokalno konačan prekrivač $\{F_i : i \in I\}$ sa osobinom $F_i \subset U_i$ za svako $i \in I$.

Dokaz. Neka je $\{U_i : i \in I\}$ regularno otvoren prekrivač prostora X. Pošto je X skoro regularan prostor to u regularno otvoren prekrivač $\{U_i : i \in I\}$ može se upisati regularno otvoren prekrivač $\mathcal{V}$ sa osobinom da za svako $V \in \mathcal{V}$ postoji $i \in I$ tako da je $\overline{V} \subset U_i$. Tada se u regularno otvoren prekrivač $\mathcal{V}$ može se upisati lokalno konačan prekrivač $\{A_j : j \in J\}$. Za svako $j \in J$ izaberimo $i(j) \in J$ tako da je $A_j \subset U_{i(j)}$ i neka je $F_i = \bigcup_{i(j)=i} A_j \subset U_i$. Tada je $\{F_i : i \in I\}$ zatvoren lokalno konačan prekrivač sa osobinom $F_i \subset U_i$ za svako $i \in I$.

Ako je $\{A_j : j \in J\}$ otvoren sledi da je $\{F_j : j \in J\}$ regularno zatvoren prekrivač. Odatle sledi sledeća činjenica,

Ako je X skoro regularan blizu parakompaktan prostor to se u svaki regularno otvoren prekrivač $\{U_i : i \in I\}$ može upisati regularno otvoren lokalno konačan prekrivač $\{V_i : i \in I\}$ sa osobinom $\overline{V}_i \subset U_i$ za svako $i \in I$.

Lema 3.1.1. Ako je X skoro normalan prostor tada se u svaki regularno otvoren prekrivač $\{U_i : i \in I\}$ može upisati takav otvoren lokalno konačan prekrivač $\{G_i : i \in I\}$ sa osobinom $\overline{G}_i \subset U_i$ za svako $i \in I$.

Dokaz. Predpostavimo da je skup I numerisan rednim brojevima $i \leq \omega(m)$ gde je $\omega(m)$ najmanji redni broj kardinalnog broja m prekrivača $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$. Neka je $F_1 = X \setminus \bigcup_{i>1} U_i$. Pošto je $F_1 \subset U_1$ to sledi da postoji otvoren skup G_1 takav da je $F_1 \subset G_1 \subset \overline{G}_1 \subset U_1$. Porodica $\mathcal{U}_1 = \{G_1, U_i, i>1\}$, očigledno je prekrivač prostora X. Predpostavimo sada da za svako $i<j\leq \omega(m)$ možemo konstruisati otvoren skup G_i sa osobinom $\overline{G}_i \subset U_i$ i da porodica $\mathcal{U}_i = \{G_k, k\leq i, U_k, k>i\}$ jest otvoren prekrivač prostora X. Pokažimo da i porodica $\mathcal{U}_j^* = \{G_k, k<j , U_k, k\geq j\}$ jest prekrivač prostora X. U slučaju ako je j redni broj prve vrste lako sledi tvrdjenje. Ako je j redni broj druge vrste, uzmimo proizvoljnu tačku $x \notin \bigcup \{U_k, k\geq j\}$ i dokažimo da $x \in \bigcup \{G_k, k<j\}$. Postoji okolina $O(x)$ tačke x koja se seče sa konačno mnogo elemenata $U_i \in \mathcal{U}$, pa odatle sledi da $x \in G_k$ za neko $k\leq i<j$, a odatle sledi da je $\mathcal{U}_j^*$ prekrivač prostora X. Konstruišimo na kraju takav otvoren skup G_j u prostoru X sa osobinom $\overline{G}_j \subset U_j$ i da porodica $\mathcal{U}_j = \{G_i, i\leq j, U_i, i>j\}$ prekriva prostor X. Posmatrajmo zatvoren skup $F_j = X \setminus \bigcup_{i>j} U_i \setminus \bigcup_{i<j} G_i$. $F_j \subset U_j$, pa sledi da postoji otvoren skup G_j sa osobinom $F_j \subset G_j \subset \overline{G}_j \subset U_j$, a odatle sledi da je $\mathcal{U}_j$ prekrivač prostora X.

Na osnovu transfinitne indukcije sledi da za svaki redni broj $j \leq \omega(m)$ možemo konstruisati otvoren prekrivač $\{G_i : i \in I\}$ sa osobinom da je $G_i \subset \overline{G}_i \subset U_i$ za $i \leq j$, odnosno za svako $i \in I$, što dokazuje datu lemu.

Teorema 3.1.10. Za skoro normalan prostor X važe sledeće ekvivalencije:

(a) X je blizu parakompaktan ;

(b) U svaki regularno otvoren prekrivač prostora X može se upisati regularno otvoren lokalno konačan prekrivač ;

(c) U svaki regularno otvoren prekrivač prostora X može se upisati zatvoren lokalno konačan prekrivač ;

(d) U svaki regularno otvoren prekrivač prostora X može se upisati regularno zatvoren lokalno konačan prekrivač.

Dokaz. (a)$\to$(b)

Neka je X blizu parakompaktan prostor. Neka je $\{U_i : i \in I\}$ proizvoljan regularno otvoren prekrivač datog prostora X. U njega se može upisati otvoren lokalno konačan prekrivač $\{V_j : j \in J\}$. Tada je $\{\alpha(V_j) : j \in J\}$ regularno otvoren lokalno konačan prekrivač koji je upisan u regularno otvoren prekrivač $\{U_i : i \in I\}$.

(b)$\to$(c)

Direktno sledi na osnovu predhodne leme.

(c)$\to$(d)

Neka je $\{U_i : i \in I\}$ proizvoljan regularno otvoren prekrivač datog prostora X. Tada postoji zatvoren lokalno konačan prekrivač $\{F_j : j \in J\}$ koji je upisan u $\{U_i : i \in I\}$. Tada je $\{\beta(F_j) : j \in J\}$ regularno zatvoren lokalno konačan prekrivač (Lemma 1.1., Singal,M.K., [57], str. 5) koji je upisan u regularno otvoren prekrivač $\{U_i : i \in I\}$.

(d)$\to$(a)

Neka je $\mathcal{U}$ proizvoljan regularno otvoren prekrivač prostora X. Tada postoji regularno zatvoren lokalno konačan prekrivač $\mathcal{V}$ koji je upisan u $\mathcal{U}$. Pošto je

$\mathcal{V}$ lokalno konačan prekrivač sledi da za svaku tačku $x \in X$, postoji otvoren skup M_x tako da $x \in M_x$ i M_x se seče sa najviše konačno mnogo elemenata porodice $\mathcal{V}$. Tada $\alpha(M_x)$ je regularno otvorena okolina tačke x koja se seče sa najviše konačno mnogo elemenata porodice $\mathcal{V}$. Posmatrajmo regularno otvoren prekrivač $\mathcal{M} = \{\alpha(M_x) : x \in X\}$. Tada postoji regularno zatvoren lokalno konačan prekrivač $\mathcal{N}$ koji je upisan u $\mathcal{M}$. Za svako $V \in \mathcal{V}$ neka je $V^* = X \setminus \bigcup \{N;\ N \in \mathcal{N},\ N \cap V = \emptyset\}$. V^* je otvoren skup sa osobinom $V \subset V^*$ i $N \cap V^* \neq \emptyset \Leftrightarrow N \cap V = \emptyset$. Pošto je $\mathcal{V}$ porodica koja je upisana u $\mathcal{U}$ sledi da za svako $V \in \mathcal{V}$ postoji $U_V \in \mathcal{U}$ tako da $V \subset U_V$. Neka je

$$\mathcal{W} = \{V^* \cap U_V : V \in \mathcal{V}\}.$$

Tada je $\mathcal{W}$ otvoren lokalno konačan prekrivač datog prostora X koji je upisan u regularno otvoren prekrivač $\mathcal{U}$, pa je dati prostor X blizu parakompaktan.

Teorema 3.1.11. Neka je X proizvoljan skoro normalan blizu parakompaktan prostor. Tada se u svaki regularno otvoren prekrivač prostora X može zvezdasto upisati regularno otvoren prekrivač.

Dokaz. Neka je $\mathcal{U}$ proizvoljan regularno otvoren prekrivač prostora X. Pošto je X skoro normalan blizu parakompaktan prostor to se u regularno otvoren prekrivač $\mathcal{U}$ može upisati regularno zatvoren lokalno konačan prekrivač $\mathcal{V}$. Za svako $V \in \mathcal{V}$, postoji $U_V \in \mathcal{U}$ tako da $V \subset U_V$. Za svaku tačku $x \in X$, neka je

$$A_x = \bigcap \{U_V : x \in V \in \mathcal{V}\} \cap \{\bigcap \{X \setminus V : x \notin V\}.$$

Pošto je $\mathcal{V}$ lokalno konačna porodica regularno zatvorenih skupova i pošto je svaka podporodica lokalno konačne porodice lokalno konačna to sledi da je $\bigcup \{V : x \notin V \in \mathcal{V}\}$ regularno zatvoren skup. Odatle sledi da je

$$\bigcap \{X \setminus V : x \notin V \in \mathcal{V}\} = X \setminus \bigcup \{V : x \notin V \in \mathcal{V}\}$$

regularno otvoren skup. Pošto je $\mathcal{V}$ lokalno konačna porodica, svaka tačka x prostora X može da pripada najviše konačnom broju elemenata porodice $\mathcal{V}$, pa sledi da je presek $\bigcap \{U_V : x \in V \in \mathcal{V}\}$ regularno otvoren skup. Znači svaki A_x

je regularno otvoren skup. Posmatrajmo sada porodicu $A = \{A_x : x \in X\}$. Neka $x \in X$. Tada ili $x \in V \in V$ ili $x \notin V \in V$. U svakom slučaju $x \in A_x$ pa sledi da je A regularno otvoren prekrivač datog prostora X. Pokazaćemo da je A zvezdasto upisana u porodicu U. Neka je $a \in X$ fiksna tačka. Pošto je V prekrivač prostora X sledi da postoji $V \in V$ tako da $a \in V$. Pokazaćemo da je $St(a,A) \subset U_V$. Neka je A_x proizvoljan član porodice A koji sadrži tačku a . Ako $x \notin V$ tada $a \in A_x \subset X \setminus V$, prema definiciji skupa A_x. Ali to je nemoguće. Odatle sledi da $x \in V$, odnosno $A_x \subset U_V$. Znači svaki član porodice A koji sadrži tačku a je sadržan u U_V, pa sledi da je $St(a,A) \subset U_V$.

Odatle sledi da je A **prekrivač datog** prostora X koji je zvezdasto upisan u regularno otvoren prekrivač U .

Ako se zameni u predhodnoj teoremi"skoro normalan" sa "skoro regularan" takodje važi odgovarajući rezultat (Singal,M.K., [45], str. 7) .Ali postoji skoro normalan blizu parakompaktan prostor koji nije skoro regularan što pokazuje sledeći primer.

Primer 3.1.1. Neka je $X = \{a,b,c\}$ *i definišimo topologiju* τ *na sledeći način.* $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$.

Tada je (X,τ) skoro normalan blizu parakompaktan prostor , ali (X,τ) nije skoro regularan prostor. $\{b,c\}$ je regularno zatvoren skup koji ne sadrži tačku a ali ne postoje disjunktne okoline tačke a i regularno zatvorenog skupa $\{b,c\}$.

Teorema 3.1.12. Neka je X proizvoljan skoro normalan blizu parakompaktan prostor. Tada je svaki regularno otvoren prekrivač δ*-uniforman.*

Dokaz . Neka je $\{U_i : i \in I\}$ proizvoljan regularno otvoren prekrivač prostora X. Naka je $V = \{V_j : j \in J\}$ regularno tovoren prekrivač prostora X koji je zvezdasto upisan u regularno otvoren prekrivač $U = \{U_i : i \in I\}$. Neka je $V = \cup \{V_j \times V_j : j \in J\}$. Tada je V τ_p^* - okolina dijagonale Δ proizvoda $X \times X$. Pokazaćemo da za svako $x \in X$, $V[x] \subset U_i$ za neko $i \in I$. Ako $y \in V[x]$ tada $(x,y) \in V$

odakle sledi da postoji $j \in J$ tako da $(x,y) \in V_j \times V_j$. Tada $x \in V_j$ i $y \in V_j$. Odatle sledi da $y \in St(x, \mathcal{V})$. Tada je $V[x] \subset St(x, \mathcal{V})$. Pošto je $\mathcal{V}$ zvezdasto upisana porodica u $\mathcal{U}$, sledi da postoji $i \in I$ tako da je $V[x] \subset St(x, \mathcal{V}) \subset U_i$.

Definicija 3.1.8. Prostor (X,τ) je *δ-kolektivno normalan* ako i samo ako je (X,τ^*) T_1 prostor i ako za svaku diskretnu porodicu $\mathcal{F}$ δ-zatvorenih podskupova $\{F_\alpha : \alpha \in I\}$ postoji diskretna porodica δ-otvorenih podskupova $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$ tako da je $F_\alpha \subset U_\alpha$ za svako $\alpha \in I$.

Teorema 3.1.13. Svaki Hausdorff-ov blizu parakompaktan prosotr je δ-kolektivno normalan.

Dokaz. Neka je (X,τ) Hausdorff-ov blizu parakompaktan prostor. Tada je (X,τ^*) Hausdorff-ov parakompaktan prostor. Pokazaćemo da je (X,τ^*) kolektivno normalan. U tu svrhu neka je $\{F_j : j \in J\}$ diskretna porodica δ-zatvorenih podskupova. Za svako $x \in X$ izaberimo δ-otvorenu okolinu H_x koja se seče sa najviše jednim skupom F_j. Pošto je (X,τ^*) parakompaktan prostor to sledi da postoji δ-otvoren prekrivač $\mathcal{W}=\{W_i : i \in I\}$ takav da je porodica $\{St(W_i,\mathcal{W})\}$ upisana u prekrivač $\{H_x : x \in X\}$. Sledi da se svaki član porodice $\mathcal{W}$ seče sa najviše jednim članom porodice $\{V_j : j \in J\}$ gde je $V_j = St(F_j, \mathcal{W})$. Sledi da za svako $i \in I$ postoji $x \in X$ tako da je $St(W_i, \mathcal{W}) \subset H_x$ i ako je $W_i \cap V_j \neq \emptyset$ to je $H_x \cap F_j \neq \emptyset$ što je i trebalo dokazati.

Znači (X,τ^*) je kolektivno normalan prostor, pa je (X,τ) δ-kolektivno normalan prostor, što je i trebalo dokazati.

Teorema 3.1.14. Potreban i dovoljan uslov da bi Hausdorff-ov blizu parakompaktan prostor bio blizu kompaktan jeste da je blizu prebrojivo kompaktan.

Dokaz. Neka je X Hausdorff-ov blizu parakompaktan prostor. Ako je X blizu kompaktan sledi da je X blizu prebrojivo kompaktan.

Obrnuto, neka je X blizu prebrojivo kompaktan. Pošto je X blizu parakompaktan to sledi da se u svaki regularno otvoren prekrivač $\mathcal{U}$ može upisati regularno otvoren lokalno konačan prekrivač $\mathcal{V}$. Pošto je X blizu prebrojivo kompaktan, to sledi da je svaki regularno otvoren lokalno konačan prekrivač $\mathcal{V}$ konačan, pa je $\mathcal{V}$ konačan prekrivač , a odatle sledi da je X blizu kompaktan prostor.

Teorema 3.1.15. Svaki skoro regularan blizu parakompaktan prostor sa osobinom da postoji gust podskup A koji je blizu Lindelöf-ov podskup, jeste blizu Lindelöf-ov prostor.

Dokaz. Neka je

$$\{U_i : i \in I\}$$

proizvoljan regularno otvoren prekrivač datog prostora X. Na osnovu teoreme 3.1.9. sledi da se u regularno otvoren prekrivač $\{U_i : i \in I\}$ može upisati regularno otvoren lokalno konačan prekrivač $\{V_i : i \in I\}$ tako da je $\overline{V}_i \subset U_i$ za svako $i \in I$. Sledi da je $\{A \cap V_i : i \in I\}$ regularno otvoren prekrivač podprostora A, pa pošto je A blizu Lindelöf-ov prostor sledi da postoji prebrojiv podskup $I_0 \subset I$ tako da je

$$A = \cup \{A \cap V_i : i \in I_0\}.$$

Odatle sledi

$$X = \overline{A} = \overline{\cup \{A \cap V_i : i \in I_0\}} \subset \cup\{\overline{V}_i : i \in I_0\} \subset \cup \{U_i : i \in I_0\}$$

tj. sledi da je X blizu Lindelöf-ov prostor.

Teorema 3.1.16. Svaki blizu parakompaktan prostor koji je lokalno blizu kompaktan može se razložiti na zatvoreno-otvorene podskupove koji su α-blizu Lindelöf-ovi podskupovi prostora X.

Dokaz. Pošto je X lokalno blizu kompaktan to za svaku tačku $x \in X$ postoji regularno otvorena okolina U_x tako da je $\overline{U}_x$ α-blizu kompaktan podskup prostora. Pošto je X blizu parakompaktan prostor sledi da se u regularno otvoren prekrivač $\{U_x : x \in X\}$ može upisati regularno otvoren lokalno konačan prekrivač $\mathcal{V} = \{V_i : i \in I\}$. Za $V_0 \in \mathcal{V}$ neka je $S_k(V_0) \subset \mathcal{V}$ skup svih $V \in \mathcal{V}$ za koje postoji niz $V_1, V_2, \ldots, V_k$ elemenata V tako da je $V_k = V$ i $V_i \cap V_{i-1} = \emptyset$ za svako $i = 1,2,\ldots k$. Neka je $S(V_0) = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k(V_0)$ i neka je $S(V_0) = \bigcup S(V_0)$. Lako se vidi da je porodica $S_k(V_0)$ konačna odnosno $k(S(V_0) \leqslant \chi_0$. Za $V_0, V_1 \in V$ skupovi $S(V_0)$ i $S(V_1)$ ili se poklapaju ili su disjunktni i svaki je od njih otvoreno-zatvoren podskup prostora X.

Znači $S(V_0) = \bigcup \{\overline{V} : V \in S(V_0)\}$ pa sledi da je $S(V_0)$ α-blizu Lindelöf-ov podskup, pošto je prebrojiva unija α-blizu kompaktnih podskupova, čime je dokaz završen.

Teorema 3.1.17. Suma $\sum_{i \in I} X_i$ *je blizu parakompaktan prostor ako i samo ako je svaki* X_i *blizu parakompaktan prostor.*

Dokaz. Ako je $\sum_{i \in I} X_i$ blizu parakompaktan prostor to je svaki X_i blizu parakompaktan, pošto je X_i zatvoreno-otvoren podskup prostora $\sum_{i \in I} X_i$.

Obrnuto, neka je svaki X_i blizu parakompaktan prostor. Neka je

$$\{U_a : a \in A\}$$

regularno otvoren prekrivač prostora $\sum_{i \in I} X_i$. Za svako $i \in I$ porodica

$$V_i = \{X_i \cap U_a : a \in A\}$$

jest regularno otvoren prekrivač prostora X_i (X_i je zatvoreno-otvoren podskup prostora $\sum_{i \in I} X_i$). U njega možemo upisati otvoren lokalno konačan prekrivač A_i. Lako se vidi da je $\bigcup_{i \in I} A_i$ otvoren lokalno konačan prekrivač prostora $\sum_{i \in I} X_i$, koji je upisan u regularno otvoren prekrivač $\{U_a : a \in A\}$ pa sledi da je $\sum_{i \in I} X_i$ blizu parakompaktan prostor.

Teorema 3.1.18. Hausdorff-ov prostor X *je blizu parakompaktan ako i samo ako je* $X \times Y$ δ*-normalan za svaki Hausdorff-ov blizu kompaktan prostor* Y.

Dokaz. Potreban uslov. Neka je X Hausdorff-ov blizu parakompaktan prostor a Y Hausdorff-ov blizu kompaktan prostor. Tada je $(X \times Y, \tau_p^*)$ regularan parakompaktan prostor pa sledi da je $X \times Y$ δ-normalan.

Dovoljan uslov. Neka je $X \times Y$ δ-normalan prostor za svaki Hausdorff-ov blizu kompaktan prostor Y. Tada je $(X \times Y, \tau_p^*)$ normalan prostor, za svaki Hausdorff-ov kompaktan prostor (Y,τ^*), pa je tada (X,τ^*) parakompaktan prostor odnosno sledi da je tada (X,τ) blizu parakompaktan prostor.

Definicija 3.1.9. (Singal,M.K., [57], str. 12) Podskup A je *α-blizu parakompaktan* ako i samo ako se u svaki regularno otvoren (u prostoru X) podskupa A može upisati otvoren lokalno konačan (za svaku tačku prostora X, dalje X-lokalno konačan) prekrivač podskupa A.

Podskup A je blizu parakompaktan ako i samo ako je A blizu parakompaktan podprostor prostora X.

Teorema 3.1.19. Podskup A prostora (X,τ) je α-blizu parakompaktan ako i samo ako je podskup a u prostoru (X,τ^*) α-parakompaktan.

Dokaz. Isto se dokazuje kao i teorema 3.1.2.

Teorema 3.1.20. Podskup A prostora X je α-blizu parakompaktan ako i samo ako se u svaki X-otvoren prekrivač $\mathcal{U}$ podskupa A može upisati otvorena X-lokalno konačna porodica $\mathcal{V}$ tako da je $\mathcal{V}^* = \{\alpha(V) : V \in \mathcal{V}\}$ prekrivač podskupa A.

Dokaz. Neka je

$$\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$$

proizvoljan X-regularno otvoren prekrivač podskupa A. Tada postoji X-otvorena lokalno konačna porodica

$$\mathcal{V} = \{V_j : j \in J\}$$

koja je upisana u regularno otvoren prekrivač $\mathcal{U}$ tako da je

$$A = \cup \{\alpha(V_j) : j \in J\} .$$

Tada je

$$\mathcal{V}^* = \{\alpha(V_j) : j \in J\}$$

X-regularno otvoren X-lokalno konačan prekrivač podskupa A koji je upisan u regularno otvoren prekrivač $\mathcal{U}$ podskupa A, te odatle sledi da je podskup A α-blizu parakompaktan.

Obrnuto, neka je

$$\mathcal{G} = \{G_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$$

proizvoljan X-otvoren prekrivač podskupa A. Tada je

$$\{\alpha(G_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$$

regularno otvoren prekrivač podskupa A, pa pošto je A α-blizu parakompaktan to sledi da postoji X-otvorena X-lokalno konačan prekrivač $\{H_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$podskupa A tako da je $H_\lambda \subset \alpha(G_\lambda)$ za svako $\lambda \in \Lambda$. Za svako $\lambda \in \Lambda$ neka je

$$M_\lambda = H_\lambda \cap (\overline{G}_\lambda \setminus G_\lambda).$$

Sledi da je $\{M_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$otvoren X-lokalno konačan prekrivač podskupa A, koji je upisan u otvoren prekrivač $\mathcal{G}$.

Pokazaćemo da je

$$A = \cup \{ \alpha(M_\lambda) : \lambda \in \Lambda \} \quad .$$

Uzmimo proizvoljnu tačku $x \in A$. Tada $x \in H_\lambda$ za neko $\lambda \in \Lambda$.

$\alpha(M_\lambda) = \alpha(H_\lambda \cap G_\lambda) = \alpha(H_\lambda \cap \overline{G}_\lambda) = \alpha(H_\lambda)$.

Znači $x \in \alpha(H_\lambda) = \alpha(M_\lambda)$, pa je $A = \cup \{\alpha(M_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$što dokazuje datu teoremu.

Teorema 3.1.21. Svaki δ-zatvoren podskup blizu parakompaktnog prostora je α-blizu parakompaktan podskup.

Dokaz. (X,τ^*) je parakompaktan prostor, pa sledi da je svaki δ-zatvoren podskup α-parakompaktan u prostoru (X,τ^*) pa je on α-blizu parakompaktan u prostoru (X,τ).

Teorema 3.1.22. Regularno zatvoren podskup α-blizu parakompaktnog skupa je α-blizu parakompaktan.

Dokaz. Sličan je dokazu odgovarajuće teoreme za α-blizu strogo parakompaktne podskupove.

Teorema 3.1.23. Neka je X proizvoljan skoro regularan prostor. Neka je A proizvoljan α-blizu parakompaktan podskup prostora X. Tada je $\overline{A}$ takodje α-blizu parakompaktan podskup.

Dokaz. Dokaz je sličan dokazu odgovarajućeg rezultata za blizu strogo parakompaktne podskupove skoro regularnog prostora.

Teorema 3.1.24. U proizvoljnom prostoru unija lokalno konačne porodice regularno otvorenih α-blizu parakompaktnih podskupova je α-blizu parakompaktan podskup datog prostora.

Dokaz. Neka je $\{U_i : i \in I\}$ proizvoljna lokalno konačna porodica regularno otvorenih α-blizu parakompaktnih podskupova prostora X. Neka je $U = \cup\{U_i : i \in I\}$. Neka je $\mathcal{V} = \{V_j : j \in J\}$ X-regularno otvoren prekrivač podskupa U. Tada za svako $i \in I$ $\{V_j \cap U_i : j \in J\}$ je regularno otvoren prekrivač podskupa U_i. Pošto je U_i α-blizu parakompaktan podskup, tada se u regularno otvoren prekrivač $\{V_j \cap U_i : j \in J\}$ može upisati X-otvoren X-lokalno konačan prekrivač $\{D_k : k \in K^i\}$ podskupa U. Posmatrajmo porodicu otvorenih skupova $\{D_k : k \in K^i, i \in I\}$. To je X-lokalno konačna porodica X-otvorenih podskupova koja je upisana u regularno otvoren prekrivač $\{U_i : i \in I\}$ i prekriva podskup U, pa sledi da je U α-blizu parakompaktan podskup prostora X.

Posledica 3.1.1. U skoro regularnom prostoru unija zatvaranja lokalno konačne porodice regularno otvorenih α-blizu parakompaktnih podskupova je α-blizu parakompaktan podskup.

Teorema 3.1.25. Proizvod α-blizu parakompaktnog i α-blizu kompaktnog podskupa je α-blizu parakompaktan podskup.

Dokaz. Dokaz je sličan dokazu za blizu parakompaktne i blizu kompaktne prostore.

Teorema 3.1.26. Svaki skoro regularan, gust podprostor blizu parakompaktnog prostora, koji je prebrojiva unija δ-zatvorenih podskupova je blizu parakompaktan.

Dokaz. Neka je Y skoro regularan, gust podprostor blizu parakompaktnog prostora X i neka je $Y = \cup\{F_n : n \in N\}$, gde je svaki F_n δ-zatvoren podskup prostora X. Neka je $\{U_i : i \in I\}$ relativan regularno otvoren prekrivač podprostora Y. Pošto je Y gust i U_i regularno otvoren u Y , sledi da je $U_i = \alpha(U_i) \cap Y$ za svako $i \in I$. Za svako n porodica

$$\mathcal{U}_n = \{\alpha(U_i) : i \in I\} \cup \{X \setminus F_n\}$$

je δ-otvoren prekrivač prostora (X,τ), pa pošto je prostor (X,τ^*) parakompaktan sledi da se u prekrivač $\mathcal{U}_n$ može upisati δ-otvoren lokalno konačan prekrivač $\mathcal{V}_n = \{V_j : j \in J^n\}$. Neka je

$$\mathcal{W}_n = \{V_j \cap Y : j \in J^n\}$$

za svako $n \in N$. Tada je

$$\mathcal{W} = \cup\{\mathcal{W}_n : n \in N\}$$

σ-lokalno konačan δ-otvoren prekrivač prostora (Y,τ^*), pa pošto je (Y,τ^*) regularan prostor sledi da je (Y,τ^*) parakompaktan prostor odnosno sledi da je (Y,τ) blizu parakompaktan podprostor datog prostora X, što je i trebalo dokazati.

Sada ćemo da vidimo kako se odnose blizu parakompaktni prostori prema raznim preslikavanjima . Važi sledeća

Teorema 3.1.27. (Singal,M.K., [57], str. 14) Ako je f zatvoreno skoro neprekidno i skoro otvoreno preslikavanje blizu parakompaktnog prostora X na prostor Y tako da je $f^{-1}(y)$ kompaktan podskup za svaku tačku $y \in Y$, tada je Y blizu parakompaktan prostor.

Ovaj rezultat se može uopštiti, pa važi sledeća

Teorema 3.1.28. Ako je f zatvoreno, θ-neprekidno i skoro otvoreno preslikavanje blizu parakompaktnog prostora X na prostor Y, tako da je $f^{-1}(y)$ α-blizu kompaktan podskup prostora X za svaku tačku $y \in Y$ tada je Y blizu parakompaktan prostor.

Dokaz. Neka je

$$\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$$

proizvoljan regularno otvoren prekrivač datog prostora Y. Pošto je preslikavanje f skoro otvoreno θ-neprekidno sledi da je

$$\{ f^{-1}(U_i) : i \in I \}$$

regularno otvoren prekrivač prostora X. Pošto je X blizu parakompaktan prostor sledi da se u regularno otvoren prekrivač $\{ f^{-1}(U_i) : i \in I\}$ može upisati regularno otvoren lokalno konačan prekrivač $\{V_j : j \in J \}$.

Pokazaćemo da je $\{ f(V_j) : j \in J\}$ otvoren lokalno konačan prekrivač u prostoru Y, koji je upisan u regularno otvoren prekrivač $\{U_i : i \in I\}$. Pošto je svaki V_j regularno otvoren skup u prostoru X, a preslikavanje f skoro otvoreno to sledi da je $f(V_j)$ otvoren podskup u prostoru Y.

Pošto je $f^{-1}(y)$ α-blizu kompaktan podskup za svaku tačku $y \in Y$, sledi da postoji konačan skup $J_0 \subset J$ tako da $\cup \{V_j : j \in J_0\}$ prekriva podskup $f^{-1}(y)$. Neka je

$$M = \cup \{V_j : j \in J_0\} .$$

Pošto je f zatvoreno preslikavanje sledi da je skup

$$V^* = Y \setminus f(X \setminus M)$$

otvoren u prostoru Y. No V^* je okolina tačke y koja se seče sa najviše konačno mnogo elemenata porodice $\{f(V_j) : j \in J \}$, pa odatle sledi da je $\{f(V_j) : j \in J\}$ otvoren lokalno konačan prekrivač prostora Y, koji je upisan u regularno otvoren prekrivač $\{U_i : i \in I\}$, pa sledi da je dati prostor Y blizu parakompaktan.

Teorema 3.1.29. Neka je f skoro neprekidno preslikavanje prostora X na prostor Y sa osobinom da je slika svakog δ-zatvorenog podskupa prostora X regularno zatvoren podskup u prostoru Y i da je $f^{-1}(y)$ α-blizu kompaktan podskup prostora X za svaku tačku $y \in Y$. Ako je Y blizu parakompaktan prostor tada je i X blizu parakompaktan prostor.

Dokaz. Neka je

$$\{U_i : i \in I\}$$

proizvoljan regularno otvoren prekrivač datog prostora X. Za svako $y \in Y$ postoji konačan podskup I_y skupa I tako da je $f(y) \subset H_y = \cup \{U_i : i \in I_y\}$.

Posmatrajmo skup $G_y = Y \setminus f(X \setminus H_y)$. Pošto je $f(X \setminus H_y)$ regularno zatvoren podskup prostora Y to je G_y regularno otvoren podskup u prostoru Y, pa pošto je Y blizu parakompaktan prostor to sledi da se u regularno otvoren prekrivač $\mathcal{G} = \{G_y : y \in Y\}$ može upisati regularno otvoren lokalno konačan prekrivač $\mathcal{V} = \{V_j : j \in J\}$. Za svako $y \in Y$, $f^{-1}(G_y) \subset H_y$, pa sledi da za svako $j \in J$ možemo da izaberemo konačan skup $I_j \subset I$ tako da je

$$f^{-1}(V_j) \subset \cup \{U_i : i \in I_j\} .$$

Treba da pokažemo da je

$$\{f^{-1}(V_j) \cap U_i : j \in J, \ i \in I_j\}$$

otvoren lokalno konačan prekrivač datog prostora X. Pošto je V_j regularno otvoren a preslikavanje f skoro neprekidno, to sledi da je $f^{-1}(V_j)$ otvoren podskup prostora X. Sada ćemo pokazati da je to lokalno konačna porodica. Uzmimo proizvoljnu tačku $x \in X$. Pošto je $\{V_j : j \in J\}$ regularno otvorena lokalno konačna porodica to sledi da postoji regularno otvoren skup P prostora Y, koji sadrži f(x) tako da P seče konačno mnogo elemenata porodice $\mathcal{V}$. Tada je $f^{-1}(P)$ otvoren skup prostora X, koji se seče sa najviše konačno mnogo elemenata porodice $\{f^{-1}(V_j) : j \in J\}$ a tim pre seče konačno mnogo elemenata porodice $\{f^{-1}(V_j) \cap U_i : j \in J \ , \ i \in I_j\}$.

Znači

$$\{f^{-1}(V_j) \cap U_i : j \in J, \ i \in I_y\}$$

je otvoren lokalno konačan prekrivač prostora X koji je upisan u regularno otvoren prekrivač $\{U_i : i \in I\}$, pa sledi da je dati prostor X blizu parakompaktan.

Teorema 3.1.30. Neka je f zatvoreno, skoro neprekidno i skoro otvoreno preslikavanje prostora X na prostor Y tako da je $f^{-1}(y)$ α-blizu parakompaktan podskup prostora X za svaku tačku $y \in Y$. Ako je $A \subset X$ α-blizu parakompaktan podskup u prostoru X tada je f(A) α-blizu parakompaktan podskup u prostoru Y.

Dokaz. Dokaz je sličan dokazu za blizu parakompaktne prostore.

Teorema 3.1.31. Prostor X je blizu parakompaktan ako i samo ako je totalno co-parakompaktan.

Dokaz. Neka je X blizu parakompaktan prostor. Tada je (X,τ^*) parakompaktan prostor. Neka je τ_B proizvoljna co-topologija topologije τ . Neka je U proizvoljan τ_B otvoren prekrivač prostora X. Pošto za $B \in \tau$, $X \setminus \overline{B}$ je τ-regularno otvoren skup prostora X, to sledi da je U δ-otvoren prekrivač prostora X, pa sledi da je (X,τ_B) parakompaktan prostor odnosno sledi da je X totalno co-parakompaktan.

Obrnuto neka je (X,τ) totalno co-parakompaktan. Posmatrajmo co-topologiju τ_τ topologije τ . Tada je (X,τ_τ) parakompaktan prostor. Neka je U proizvoljan regularno otvoren prekrivač prostora (X,τ). Tada za svako $V \in U$

$$V = \alpha(V) = X \setminus (X \setminus \alpha(V)) = X \setminus \overline{(X \setminus \overline{V})}.$$

Pošto je $X \setminus \overline{V} \in \tau$, sledi da $V \in \tau_\tau$. Znači U je τ_τ-otvoren prekrivač, pa sledi da je X blizu parakompaktan prostor.

3.2. BLIZU PREBROJIVA PARAKOMPAKTNOST I SKORA PARAKOMPAKTNOST

U ovom paragrafu obradićemo još neka uopštenja parakompaktnih prostora to jest obradićemo blizu prebrojivo parakompaktne, skoro parakompaktne kao i lokalno skoro parakompaktne prostore.

Definicija 3.2.1. (Singal,M.K., [57], str. 15) Prostor X je *blizu prebrojivo parakompaktan* ako i samo ako se u svaki prebrojiv regularno otvoren prekrivač prostora X može upisati otvoren lokalno konačan prekrivač.

Teorema 3.2.1. Ako je X Hausdorff-ov prostor sa osobinom da je svaki δ-otvoren skup $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} \alpha(U_i)$, važe sledeće ekvivalencije:

(a) (X,τ) je blizu prebrojivo parakompaktan ;

(b) (X,τ^*) je prebrojivo parakompaktan ;

(c) Za svaki δ-otvoren prebrojiv prekrivač $\{U_i : i \in N\}$ prostora X postoji δ-otvoren lokalno konačan prekrivač $\{V_i : i \in N\}$ tako da je $V_i \subset U_i$ za za svako $i \in N$;

(d) Za svaki niz $W_1 \subset W_2 \subset \dots \subset W_n \dots$ δ-otvorenih podskupova prostora X sa osobinom $\bigcup_{i=1}^{\infty} W_i = X$ postoji niz δ-zatvorenih podskupova $F_1, F_2, \dots F_n, \dots$ tako da je $F_i \subset W_i$ za svako $i \in N$ i da je $\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i^{\circ} = X$;

(e) Za svaki niz δ-zatvorenih skupova $F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_n \supset \dots$ prostora X sa osobinom $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i = \emptyset$ postoji niz δ-otvorenih skupova $W_1, W_2, \dots$ $\dots, W_n, \dots$ tako da je $F_i \subset W_i$ za svako $i \in N$ i da je $\bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{W}_i = \emptyset$.

Dokaz. (a)$\to$(b)

Neka je

$$\{U_i : i \in N\}$$

proizvoljan δ-otvoren prebrojiv prekrivač prostora X. Sledi da je svaki $U_i = \bigcup_{j=1} \alpha(V_{ij})$. Tada je

$$\{\alpha(V_{ij}) : i \in N,\ j \in N\}$$

regularno otvoren prebrojiv prekrivač blizu parakompaktnog prostora (X,τ) pa sledi da se u njega može upisati regularno otvoren lokalno konačan prekrivač A, pa sledi da je (X,τ^*) prebrojivo parakompaktan prostor.

(b)$\to$(c)

Neka je

$$\{U_i : i \in N\}$$

proizvoljan δ-otvoren prekrivač datog prostora X. Pošto je (X,τ^*) prebrojivo parakompaktan prostor to sledi da se u δ-otvoren prebrojiv prekrivač $\{U_i : i \in N\}$ može upisati δ-otvoren lokalno konačan prekrivač V. Za svako $V \in V$ izaberimo $i(V)$ tako da je $V \subset U_{i(V)}$ i neka je $V_i = \bigcup_{i(V)=i} V$. Tada je $\{V_i : i \in N\}$ δ-otvoren lokalno konačan prebrojiv prekrivač prostora X, koji je upisan u δ-otvoren prebrojiv prekrivač $\{U_i : i \in N\}$ sa osobinom da je $V_i \subset U_i$ za svako $i \in N$.

(c)→(d)

Neka je $\{W_i : i \in N\}$ δ-otvoren prebrojiv prekrivač datog prostora X. Sledi da postoji δ-otvoren lokalno konačan prekrivač $\{V_i : i \in N\}$ sa osobinom $V_i \subset W_i$ za svako $i \in N$. Skup

$$F_i = X \setminus \bigcup_{j>i} V_j \subset \bigcup_{j\leq i} V_j$$

je δ-zatvoren. Iz $\bigcup_{j\leq i} V_j \subset \bigcup_{j\leq i} W_j = W_i$ sledi da je $F_i \subset W_i$ za svako $i \in N$. Pošto je $\{V_i : i \in N\}$ δ-otvoren lokalno konačan prekrivač to sledi da za svaku tačku $x \in X$ postoji otvorena okolina 0 koja se seče sa najviše konačno mnogo elemenata porodice $\{V_i : i \in N\}$ odnosno 0 cela leži u jednom skupu F_i za jedno $i \in N$, pa odatle sledi da je $\bigcup_{j=1} F_i^0 = X$.

(d)↔ (e)

To direktno sledi na osnovu De Morganovih zakona.

(d)→(a)

Neka je

$$\{U_i : i \in N\}$$

proizvoljan regularno otvoren prekrivač datog prostora X. Za skupove $W_i = \bigcup_{j\leq i} U_j$ postoje δ-zatvoreni skupovi $F_1, F_2, \ldots$ sa osobinom $F_i \subset W_i$ i $\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i^0 = X$.

Skupovi

$$V_i = U_i \setminus \bigcup_{j\leq i} F_j \subset U_i$$

su otvoreni a iz $\bigcup_{j<i} F_j \subset \bigcup_{j<i} W_j \subset \bigcup_{j<i} U_j$ sledi $U_i \setminus \bigcup_{j<i} U_j \subset V_i$ a odatle

sledi da je $\{V_i : i \in N\}$ otvoren prekrivač prostora X. Za svaku tačku $x \in X$ sledi da $x \in F_i^0$ za neko $i \in N$, a pošto je $F_j^0 \cap V_i = \emptyset$ za $i>j$ pa sledi da je

$\{V_i : i \in N\}$ lokalno konačna porodica.

Znači $\{V_i : i \in N\}$ je otvoren lokalno konačan prekrivač koji je upisan u regularno otvoren prekrivač $\{U_i : i \in N\}$ pa je X blizu prebrojivo parakompaktan prostor.

Posledica 3.2.1. δ-normalan prostor X sa osobinom da je svaki δ-otvoren skup $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} \alpha(U_i)$ *, je blizu prebrojivo parakompaktan ako i samo ako za svaki niz δ-zatvorenih podskupova* $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$ *prostora X koji zadovoljavaju uslov* $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i = \emptyset$ *postoji niz δ-otvorenih podskupova* $W_1, W_2, \ldots$ *prostora X tako da je* $F_i \subset W_i$ *za svako* $i \in N$ *i da je* $\bigcap_{i=1}^{\infty} W_i = \emptyset$ *.*

Teorema 3.2.2. Ako je X Hausdorff-ov prostor sa osobinom da je svaki δ-zatvoren skup presek od prebrojivo mnogo regularno zatvorenih okolina, tada je X blizu prebrojivo parakompaktan prostor.

Dokaz. Neka je

$$\{F_n : n \in N\}$$

opadajući niz δ-zatvorenih skupova sa osobinom $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i = \emptyset$. Neka je $F_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{G}_{mn}$,gde je svaki G_{mn} otvoren skup koji sadrži F_n. Za svako n neka je $G_n = \bigcap_{m=1}^{n} \bigcap_{k=1}^{n} G_{mk}$. Tada je $\{G_n : n = 1,2,\ldots\}$ monotono opadajući niz otvorenih skupova sa osobinom $F_n \subset G_n$ i $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{G}_n = \emptyset$, odnosno $\{\alpha(G_n) : n=1,2,\ldots\}$ je opadajući niz regularno otvorenih skupova sa osobinom $F_n \subset \alpha(G_n)$ i $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\alpha(G_n)} = \emptyset$, pa sledi na osnovu predhodne teoreme da je X blizu prebrojivo parakompaktan prostor.

Posledica 3.2.2. Svaki Hausdorff-ov δ-D_1 (Prostor (X,τ) je δ-D_1 ako i samo ako je (X,τ^*) D_1 prostor) sa prvom aksiomom prebrojivosti je blizu prebrojivo parakompaktan prostor.

Teorema 3.2.3. Svaki Hausdorff-ov blizu prebrojivo parakompaktan prostor *koji zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti je skoro regularan.*

Dokaz. Neka je F proizvoljan regularno zatvoren skup i neka $x \notin F$. Neka je $\mathcal{U}^* = \{U_i : i \in N\}$ prebrojiva baza okolina tačke x. Za svako $y \in F$ sledi da postoje otvoreni skupovi $U_y \in \mathcal{U}^*$ i V_y tako da je $y \in V_y$, $x \in U_y$ i $U_y \cap V_y = \emptyset$. Za svako $i \in N$, neka je $V_i^* = \cup \{V_y : V_y = V_i\}$. Odatle sledi $V_i^* \cap U_i = \emptyset$ odnosno $x \notin V_i^*$. Posmatrajmo prebrojiv regularno otvoren prekrivač

$$V = \{\alpha(V_i^*)\} \cup \{X \setminus F\}.$$

Pošto je X blizu prebrojivo parakompaktan prostor to sledi da se u regularno otvoren prekrivač V može upisati otvoren lokalno konačan prekrivač V^*. Neka je $\mathcal{W}^*$ podporodica porodice V^* čiji se članovi seku sa F. Neka je $U = \cup\{W : W \in \mathcal{W}^*\}$ Tada je $F \subset U$. Neka je $V = X \setminus \cup\{\overline{W} : W \in \mathcal{W}^*\}$. Pošto je $\{\overline{W} : W \in \mathcal{W}^*\}$ lokalno konačna porodica sledi da je V otvoren skup i $U \cap V = \emptyset$. Pošto je $\mathcal{W}^*$ upisan u $\{\alpha(V_i^*)\} \cup \{X \setminus F\}$ to svi W se seku sa F, to za svako W, postoji $i \in N$ tako da je $W \subset \alpha(V_i^*)$. $\overline{W} \subset \overline{\alpha(V_i^*)} = \overline{V_i^*} \subset X \setminus \{x\}$ pa sledi da $x \notin \overline{W}$ ni za koje $W \in \mathcal{W}^*$ odnosno $x \notin \cup\{\overline{W} : W \in \mathcal{W}^*\}$ pa sledi $x \in X \setminus \cup\{\overline{W} : W \in \mathcal{W}^*\} = V$. Odatle sledi $F \subset U$, $x \in V$, $U \cap V = \emptyset$, pa sledi da je X skoro regularan prostor.

Posledica 3.2.3. Svaki δ-D_1 Hausdorff-ov prostor sa prvom aksiomom prebrojivosti je skoro regularan prostor.

Teorema 3.2.4. Ako je X Hausdorff-ov prostor sa osobinom da je svaki δ-otvoren skup $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} \alpha(U_i)$ važe sledeće ekvivalencije:

(a) X je δ-normalan blizu prebrojivo parakompaktan prostor ;

(b) (X, τ^*) je normalan prebrojivo parakompaktan prostor ;

(c) Za svaki δ-otvoren prebrojiv prekrivač $\{U_i : i \in N\}$ prostora X postoji δ-otvoren lokalno konačan prekrivač $\{V_i : i \in N\}$ tako da je $\overline{V_i} \subset U_i$ za svako $i \in N$.

(d) U svaki δ-otvoren prebrojiv prekrivač $\{U_i : i \in N\}$ može se upisati δ-zatvoren prekrivač $\{F_i : i \in N\}$ tako da je $F_i \subset U_i$ za svako $i \in N$.

Dokaz. (a)→(b)

To smo dokazali u teoremi 3.2.1.

(b)→(c)

Na osnovu teoreme 3.2.1. sledi da za δ-otvoren prekrivač $\{U_i : i \in N\}$ prostora X postoji δ-otvoren lokalno konačan prekrivač $\{U_i^* : i \in N\}$ tako da je $U_i^* \subset U_i$ za svako $i \in N$. Na osnovu teoreme 1.5.12 (Lefschetz,S., [34], vidi Engelking, R., [21], str. 66) postoji otvoren prekrivač $\{V_i : i \in N\}$ prostora X tako da je $\overline{V}_i \subset U_i^* \subset U_i$ za svako $i \in N$.

$\{V_i : i \in N\}$ je δ-otvoren lokalno konačan prekrivač prostora X koji je upisan u prebrojiv prekrivač $\{U_i : i \in N\}$.

(c)→(d)

To je očigledno.

(d)→(a)

Svaki Hausdorff-ov prostor koji zadovoljava uslov (d) je δ-normalan i ako uzmemo $U_1 = U$, $U_2 = V$, $U_3 = U_4 = \ldots = \emptyset$ za δ-otvorene skupove $U, V \subset X$ sa osobinom $U \cup V = X$, postoje δ-zatvoreni skupovi $F_1 \subset U_1$ i $F_2 \subset U_2$ takvi da je $F_1 \cup F_2 = X$. Na osnovu (d) i De Morganovih zakona, sledi da za svaki niz F_1, $F_2, \ldots$ δ-zatvorenih podskupova prostora X sa osobinom $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i = \emptyset$ postoji niz δ-otvorenih skupova $W_1, W_2, \ldots$ prostora X tako da je $F_i \subset W_i$ i $\bigcap_{i=1}^{\infty} W_i = \emptyset$, pa na osnovu posledice 3.2.1. sledi da je X blizu prebrojivo parakompaktan prostor.

Definicija 3.2.2. (Arenns, R., [5], vidi Bonne,R.J., [8] str. 147) Prekrivač $\mathcal{U}$ je *tačkovno konačan* ako i samo ako svaka tačka prostora X pripada konačnom broju članova porodice $\mathcal{U}$.

Teorema 3.2.5. Ako je X Hausdorff-ov prostor sa osobinom da je svaki δ-otvoren skup $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} \alpha(U_i)$ važe sledeće ekvivalencije:

(a) X je blizu prebrojivo parakompaktan prostor ;

(b) U svaki prebrojiv δ-otvoren prekrivač $\mathcal{U}$ prostora X može se upisati δ-otvoren prekrivač $\mathcal{V}$ sa osobinom $St(x,\mathcal{V}) \subset U$ za neko $U \in \mathcal{U}$;

(c) U svaki prebrojiv δ-otvoren prekrivač $\mathcal{U}$ može se upisati δ-otvoren tačkovno konačan prekrivač.

Dokaz. Na osnovu teoreme 3.2.1. važi činjenica (a´) : Prostor (X,τ^*) je normalan prebrojivo parakompaktan. Na osnovu teoreme 5.2.3. (Dowker,C.H.,[19] Ischi, K., [25], vidi Engelking,R., [21], str. 388) sledi (a´)→(b)→(c)→(a´) čime je teorema dokazana.

Teorema 3.2.6. Neka je dat prostor X sa osobinom da se u svaki regularno otvoren prekrivač može upisati otvoren tačkovno konačan prekrivač. Neka je f zatvoreno θ-neprekridno i skoro otvoreno preslikavanje prostora X na prostor Y. Tada se u svakiregularno otvoren prekrivač prostora Y koji je prebrojiva unija tačkovno konačne porodice , može upisati otvoren tačkovno konačan prekrivač.

Dokaz. Neka je

$$\mathcal{U} = \bigcup_{n=1} \mathcal{U}_n$$

gde je

$$\mathcal{U}_n = \{U_i : i \in I_n\}$$

regularno otvoren tačkovno konačan prekrivač prostora Y. Tada je $\{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}\}$ regularno otvoren prekrivač prostora X, pa sledi da se u njega može upisati tačkovno konačan otvoren prekrivač $\mathcal{W}$. Za svako $x \in X$ označimo sa $k(x)$ najmanji prirodan broj za koji važi $St(x, \mathcal{W}) \subset \bigcup_{i \leq k(x)} f^{-1}(U_i^*)$, gde je $U_i^* = \bigcup \mathcal{U}_i$.

Skup $F_k = \{x \in X : k(x) \leq k\}$ jeste zatvoren za k=1,2,... i ako $x \notin F_k$ to postoji $W \in \mathcal{W}$ da $x \in W$ i $W \subset X \setminus F_k$. Za $I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, možemo predpostaviti da je $I_n \cap I_m = \emptyset$ za $n \neq m$. Da bismo završili dokaz dovoljno je pokazati da je

$\mathcal{V} = \{V_i : i \in I\}$ gde je $V_i = U_{i_\infty} \setminus \bigcup_{k<n} f(F_k)$ za $i \in I_n$, tačkovno konačan prekrivač prostora Y. $X = \bigcup_{k=1} F_k$. Sledi da za svaku tačku $y \in Y$ postoji prirodan broj k tako da $y \in f(F_k)$ i $y \notin V_i$ za $i \in I_n$, $n>k$. Iz osobine da su $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots \mathcal{U}_n$, tačkovno konačne porodice sledi da se y nalazi u samo konačnom broju elemenata porodice $\mathcal{V}$. Uzmimo tačku $y \in Y$. Postoji najmanji prirodan broj n tako da $y \in U_n^*$. $f(\bigcup_{k<n} F_k) \subset \bigcup_{i<n} U_i^*$, pa $y \in V_i$ za neko $i \in I_n$, pa je $\mathcal{V}$ otvoren prekrivač datog prostora Y. Sledi da je $\mathcal{V} = \{V_i : i \in I\}$ otvoren tačkovno konačan prekrivač prostora Y koji je upisan u regularno otvoren prekrivač $\mathcal{U}$ što je i trebalo dokazati.

Definicija 3.2.3. (Singal,M.K., [54], str. 128) Prostor X je *skoro parakompaktan* ako i samo ako se u svaki otvoren prekrivač $\mathcal{U}$ datog prostora X može upisati lokalno konačna porodica $\mathcal{V}$ skupova sa osobinom da porodica

$$\mathcal{V}^* = \{\overline{V} : V \in \mathcal{V}\}$$

prekriva dati prostor X.

Svaki blizu parakompaktan prostor je ujedno i skoro parakompaktan,dok obrnuto nije uvek tačno. Važi:

Teorema 3.2.7. (Singal,M.K.,[57], str. 6) Neka je X skoro regularan prostor. Potreban i dovoljan uslov da bi X bio blizu parakompaktan jeste da je skoro parakompaktan prostor.

Proizvod skoro parakompaktnog i skoro kompaktnog prostora je skoro parakompaktan prostor.

Ovaj Singalov rezultat se može uopštiti, naime važi

Teorema 3.2.8. Proizvod skoro parakompaktnog prostora X i proizvoljne porodice skoro kompaktnih prostora je opet skoro parakompaktan prostor.

Dokaz. Proizvod proizvoljne porodice skoro kompaktnih prostora je opet skoro kompaktan prostor.

Teorema 3.2.9. (Singal, M. K., [54], str. 130) Neka je f zatvoreno neprekidno i otvoreno preslikavanje prostora X na prostor Y tako da je $f^{-1}(y)$ kompaktan podskup prostora X za svaku tačku $y \in Y$. Ako je X skoro parakompaktan prostor tada je i Y skoro parakompaktan prostor.

Definicija 3.2.4. Podskup A prostora X je *α-skoro parakompaktan* ako i samo ako se u svaki X-otvoren prekrivač datog podskupa A može upisati X-otvorena X-lokalno konačna porodica V tako da je

$$V^* = \{\overline{V} : V \in V\}$$

prekrivač datog podskupa A.

Podskup A je skoro parakompaktan ako i samo ako je A skoro parakompaktan podprostor prostora X.

Na osnovu teoreme 3.1.20. sledi da je svaki α-blizu parakompaktan podskup ujedno i α-skoro parakompaktan.

Teorema 3.2.10. Neka je X skoro regularan prostor i A α-skoro parakompaktan podskup. Tada u svaki regularno otvoren prekrivač podskupa A možemo upisati regularno zatvoren X-lokalno konačan prekrivač podskupa A.

Dokaz. Neka je

$$\{ U_i : i \in I \}$$

proizvoljan regularno otvoren prekrivač podskupa A. Tada za svaku tačku $x \in A$ postoji regularno otvorena okolina V_x tačke x sa osobinom

$$x \in V_x \subset \overline{V}_x \subset U_i$$

za neko $i \in I$.

$V = \{V_x : x \in A\}$ je regularno otvoren prekrivač podskupa A pa sledi da postoji otvorena X-lokalno konačna porodica $\{M_j : j \in J\}$ koja je upisana u regularno otvoren prekrivač V sa osobinom da $A = \cup\{ \overline{M}_j : j \in J\}$.

Porodica $A = \{\overline{M}_j : j \in J\}$ je X-lokalno konačan regularno zatvoren prekrivač podskupa A koje je upisan u regularno otvoren prekrivač $\{U_i : i \in I\}$, odakle sledi tvrdjenje naše teoreme.

Lema 3.2.1. Regularno zatvoren podskup α-skoro parakompaktnog skupa je α-skoro parakompaktan skup.

Dokaz. Neka je C proizvoljan α-skoro parakompaktan podskup, B regularno zatvoren i $B \subset C$. Neka je $\mathcal{U}$ proizvoljan X-otvoren prekrivač podskupa B. Tada je $\mathcal{U} \cup \{X \setminus B\} = \mathcal{U}^*$ otvoren prekrivač podskupa C, pa sledi da se u $\mathcal{U}^*$ može upisati X-otvorena X-lokalno konačna porodica $\{V_j : j \in J\}$ tako da je $\cup\{\overline{V}_j : j \in J\} = C$. Pošto je $\overline{X \setminus B} \cap B^0 = \emptyset$ sledi $B^0 \subset \cup\{\overline{V}_j : j \in J\}$ gde za porodicu $\{V_j : j \in J\}$ možemo predpostaviti da je upisana u otvoren prekrivač $\{U_i : i \in I\}$. Sledi da je $B \subset \cup\{\overline{V}_j : j \in J\}$. Odatle sledi rezultat.

Posledica 3.2.4. Regularno zatvoren podskup skoro parakompaktanog prostora je α-skoro parakompaktan.

Lema 3.2.2. Neka je X proizvoljan topološki prostor. Podskup A je α-skoro parakompaktan ako i samo ako se u svaki X-otvoren prekrivač $\{U_i : i \in I\}$ datog podskupa A može upisati X-otvorena X-lokalno konačna porodica $\mathcal{V} = \{V_i : i \in I\}$ tako da je $A \subset \cup\{\overline{V}_i : i \in I\}$, $V_i \subset U_i$ za svako $i \in I$.

Dokaz. Neka je X proizvoljan topološki prostor. Neka je

$$\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$$

proizvoljan X-otvoren prekrivač podskupa A. Sledi da se u $\mathcal{U}$ može upisati X-otvorena X-lokalno konačna porodica $\{V_j : j \in J\}$ tako da je $\cup\{\overline{V}_j : j \in J\} = A$. Za svako $j \in J$, izaberimo $i(j) \in I$ tako da je $V_j \subset U_{i(j)}$. Neka je

$$V_i = \cup\{V_j : i(j) = i\} .$$

Tada je $\{V_i : i \in I\}$ X-otvorena X-lokalno konačna porodica, koja je upisana u $\mathcal{U}$ tako da je $\cup\{\overline{V}_i : i \in I\} = A$, $V_i \subset U_i$ za svako $i \in I$.

Lema 3.2.3. Neka je X proizvoljan topološki prostor. Podskup A prostora X je α-skoro parakompaktan ako i samo ako se u svaki regularno otvoren prekrivač datog podskupa A može upisati X-otvorena X-lokalno konačna porodica V *tako da je* $A \subset \bigcup \{\overline{V} : V \in \mathcal{V}\}$.

Dokaz. Ako je A α-skoro parakompaktan podskup sledi da se u svaki regularno otvoren prekrivač može upisati X-otvorena X-lokalno konačna porodica $\mathcal{V}$ tako da je $A \subset \bigcup\{\overline{V} : V \in \mathcal{V}\}$.

Obrnuto, neka se u svaki regularno otvoren prekrivač podskupa A može upisati X-otvorena X-lokalno konačna porodica $\mathcal{V}$ sa osobinom $\bigcup\{\overline{V} : V \in \mathcal{V}\} = A$. Neka je

$$\mathcal{G} = \{G_i : i \in I\}$$

proizvoljan otvoren prekrivač datog podskupa A. Tada je

$$\mathcal{G}^* = \{\alpha(G_i) : i \in I\}$$

regularno otvoren prekrivač datog podskupa A. Sledi da se u $\mathcal{G}^*$ može upisati X-otvorena X-lokalno konačna porodica $\mathcal{H} = \{H_i : i \in I\}$, tako da je

$$A \subset \bigcup\{\overline{H}_i : i \in I\} \text{ i } H_i \subset \alpha(G_i)$$

za svako $i \in I$. Za svako $i \in I$, neka je

$$M_i = H_i \setminus (\overline{G}_i \setminus G_i).$$

Pošto je $H_i \subset \alpha(\overline{G}_i) \subset \overline{G}_i$, sledi da je $M_i = H_i \cap G_i$.

Znači $\{M_i : i \in I\}$ je X-otvorena X-lokalno konačna porodica koja je upisana u $\mathcal{G}$. Još treba pokazati da je $\bigcup\{\overline{M}_i : i \in I\} = A$. Neka je $x \in A$ proizvoljna tačka. Tada $x \in \overline{H}_i$ za neko $i \in I$. Pošto je

$$\overline{M}_i = \overline{H_i \cap G_i} = \overline{H_i \cap \overline{G}_i} = \overline{H}_i$$

sledi da $x \in \overline{M}_i$.

Dakle $\{M_i : i \in I\}$ je X-otvorena X-lokalno konačna porodica koja je upisana u $\mathcal{G}$ sa osobinom $\bigcup\{\overline{M}_i : i \in I\} = A$, pa sledi da je A α-skoro parakompaktan podskup datog prostora X.

Teorema 3.2.11. Neka je X skoro regularan prostor i A α-skoro parakompaktan podskup datog prostora X. Tada je $\overline{A}$ takodje α- skoro parakompaktan podskup u skoro regularnom prostoru X.

Dokaz. Neka je X skoro regularan prostor i A α-skoro parakompaktan podskup prostora X. Neka je

$$\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$$

proizvoljan regularno otvoren prekrivač podskupa $\bar{A}$. Za svaku tačku $x \in \bar{A}$ postoji U_i tako da $x \in U_i$. Pošto je X skoro regularan prostor to postoji regularno otvoren skup V_x tako da je $x \in V_x \subset \bar{V}_x \subset U_i$. Posmatrajmo regularno otvoren prekrivač

$$\mathcal{V} = \{V_x : x \in A\}$$

datog podskupa A. Pošto je A α-skoro parakompaktan podskup sledi da se u regularno otvoren prekrivač $\mathcal{V}$ može upisati X-otvorena X-lokalno konačna porodica $\underline{A = \{M_j : j \in J\}}$ tako da je $\cup\{\bar{M}_j : j \in J\} = A$. Tada je

$$\bar{A} \subset \cup\{\bar{M}_j : j \in J\} = \overline{\cup\{M_j : j \in J\}} = \cup\{\bar{M}_j : j \in J\}.$$

Odatle sledi prema predhodnoj lemi da je $\bar{A}$ α-skoro parakompaktan podskup datog prostora X.

Teorema 3.2.12. U proizvoljnom topološkom prostoru unija X-lokalno konačne porodice otvorenih α-skoro parakompaktnih podskupova je takodje α-skoro parakompaktan podskup prostora X.

Dokaz. Neka je

$$\{U_i : i \in I\}$$

proizvoljna X-lokalno konačna porodica otvorenih α-skoro parakompaktnih podskupova i neka je

$$U = \cup\{U_i : i \in I\} \ .$$

Neka je $\{V_j : j \in J\}$ proizvoljan X-otvoren prekrivač podskupa U. Tada za svako $i \in I$ $\{V_j \cap U_i : j \in J\}$ je X-otvoren prekrivač podskupa U_i. Pošto je U_i α-skoro parakompaktan sledi da se u $\{V_j \cap U_i : j \in J\}$ može upisati X-otvorena X-lokalno konačna porodica $\{D_k : k \in K^i\}$ tako da je $U_i = \cup\{\bar{D}_k : k \in K^i\}$ Posmatrajmo porodicu

$$\mathcal{D} = \{D_k : k \in K^i,\ i \in I\} \ .$$

Tada je $\mathcal{D}$ X-otvorena X-lokalno konačna porodica koja je upisana u porodicu $\{V_j : j \in J\}$ tako da je $U \subset \cup\{\overline{D}_k : k \in K^i, i \in I\}$, pa je U α- skoro parakompaktan podskup prostora X.

Posledica 3.2.5. Za svaki skoro regularan prostor X važi: Unija zatvaranja članova X-lokalno konačne porodice otvorenih α-skoro parakompaktnih podskupova je regularno zatvoren α-skoro parakompaktan podskup datog prostora X.

Teorema 3.2.13. Neka je A proizvoljan α-skoro parakompaktan podskup prostora X, B proizvoljan H-zatvoren podskup prostora Y. Tada je A x *B α-skoro parakompaktan podskup u prostoru X* x *Y.*

Dokaz. Dokaz je sličan dokazu odgovarajuće teoreme za skoro parakompaktne i H-zatvorene prostore.

Veza izmedju do sada posmatranih kompaktnosti može se ilustrovati na sledeći način:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r] \arrow[d] & PC \arrow[d] \\ NC \arrow[r] \arrow[d] & NPC \arrow[d] \\ AC \arrow[r] & APC \end{tikzcd}$$

gde je C-kompaktan, N-blizu, A-skoro, PC-parakompaktan.

Sada ćemo uvesti i proučavati lokalno skoro parakompaktne prostore, koji predstavljaju uopštenje kako skoro parakompaktnih tako i lokalno parakompaktnih prostora.

Definicija 3.2.5. Prostor X je *lokalno skoro parakompaktan* ako i samo ako za svaku tačku x prostora X postoji otvorena okolina U , tako da je $\overline{U}$ α-skoro parakompaktan podskup datog prostora X.

Svaki skoro parakompaktan prostor ujedno je i lokalno skoro parakompaktan. Obrnuto nije uvek tačno, kao što pokazuje sledeći primer da postoji lokalno skoro parakompaktan prostor koji nije skoro parakompaktan.

Primer 3.2.1. Neka je Ω_o *skup svih ordinalnih brojeva koji su manji od prvog neprebrojivog ordinalnog broja* Ω *i neka je* Ω_o *snabdeven sa uredjajnom topologijom (Uredjajna topologija ima podbazu sastavljenu od svih skupova oblika:* $\{x: x<a\}$ *ili* $\{x: a<x\}$ *za neko* $a \in \Omega_o$*).*

Tada je Ω_0 Hausdorff-ov lokalno kompaktan prostor. Odatle sledi da je Ω_0 regularan prostor. Pošto je svaki lokalno kompaktan prostor ujedno i lokalno skoro parakompaktan sledi da je Ω_0 lokalno skoro parakompaktan prostor. Ω_0 nije parakompaktan prostor (Posmatrajmo porodicu $\{x: x<a\}$. To je otvoren prekrivač datog prostora Ω_0. Supremum proizvoljne porodice koja je upisana u ovaj prekrivač manji je od Ω, pa sledi da Ω_0 nije parakompaktan prostor. Ω_0 nije ni skoro parakompaktan prostor (Svaki regularan skoro parakompaktan prostor je ujedno i regularan prostor) .

Svaki lokalno skoro kompaktan (Prostor X je lokalno skoro kompaktan ako i samo ako za svaku tačku x prostora X postoji otvorena okolina tačke x tako da je $\overline{U}$ H-zatvoren podskup datog prostora X) prostor je ujedno i lokalno skoro parakompaktan. Obrnuto nije uvek tačno.

Neka je X proizvoljan regularan parakompaktan prostor, koji nije lokalno kompaktan. X je lokalno skoro parakompaktan prostor, ali nije lokalno skoro kompaktan (Svaki regularan lokalno skoro kompaktan prostor je ujedno i lokalno kompaktan).

Svaki lokalno parakompaktan prostor je ujedno i lokalno skoro parakompakatan. Da obrnuto nije uvek tačno pokazuje sledeći primer.

Primer 3.2.2. Neka je

$$X = \{a_{ij}, a_i, a : i,j = 1,2,3,\dots \} \quad .$$

Neka je svaka tačka a_{ij} *izolovana. Neka je*

$$\{U^k(a_i) : k = 1,2,3,\dots \}$$

fundamentalan sistem okolina tačke a_i*, gde je*

$$U^k(a_i) = \{a_i, a_{ij}, j \geq k\}$$

i neka je fundamentalan sistem okolina tačke a skup

$$\{V^k(a) : k = 1,2,3,\dots\}$$

gde je

$$V^k(a) = \{a, a_{ij} : i \geq k , j \geq k \} .$$

Prostor X sa ovako definisanom topologijom je Hausdorff-ov a nije regularan u tački a, pa sledi da prostor X nije lokalno parakompaktan (Svaki Hausdorff-ov lokalno parakompaktan prostor je regularan). Ali X je lokalno skoro parakompaktan (specijalno X je skoro kompaktan) prostor. Da bi to pokazali , neka je

$$\mathcal{G} = \{G_i : i \in I\}$$

proizvoljan otvoren prekrivač datog prostora X. $a \in G_{i(a)}$ za neko $i(a) \in I$. Označimo sa $G_{i(i)}$ takvo $G_i \in \mathcal{G}$ koji sadrži tačku a_i a sa $G_{i(ij)}$ onaj elemenat iz $\mathcal{G}$ koji sadrži tačku a_{ij} . Tada , $V^m(a) \subset G_{i(a)}$ za neko m . Takodje je i $\alpha(V^m(a)) = V^m(a) \cup \{a_m, a_{m+1}, \dots\}$. Tada je

$$\mathcal{G}^* = \{G_{i(a)}, G_{i(ij)}, G_{i(i)} : i = 1,2,\dots, m-1, j = 1,2,\dots m-1 \}$$

lokalno konačna porodica, koja je upisana u otvorenu porodicu $\mathcal{G}$, sa osobinom da je $X = \cup \{\overline{G} : G \in \mathcal{G}^* \}$. Odatle sledi da je X skoro parakompaktan prostor, odnosno sledi da je X lokalno skoro parakompaktan prostor.

Lema 3.2.5. Ako je E α-parakompaktan podskup lokalno skoro parakompaktnog i skoro regularnog prostora X, sa osobinom da postoji regularno otvoren skup W koji ga sadrži, tada postoji lokalno konačna porodica regularno zatvorenih α-skoro parakompaktnih podskupova $\{F_j : j \in J\}$ tako da je

$$E \subset \cup\{F_j^o : j \in J\} \subset \cup \{F_j : j \in J\} \subset W .$$

Dokaz. Neka je x proizvoljna tačka podskupa E. Pošto je X skoro regularan prostor sledi da postoji regularno zatvoren skup V_x sa osobinom $x \in V_x \subset \overline{V}_x \subset W$.

Pošto je X lokalno skoro parakompaktan , postoji otvorena okolina V_x^* tačke x tako da je $\overline{V_x^*}$ α-skoro parakompaktan podskup u prostoru X. Tada je $\alpha(V_x^*) \cap V_x$ regularno otvoren skup, koji sadrži tačku x, tako da je

$$\overline{\alpha(V_x^*) \cap V_x} \subset \overline{V_x^*}$$

pa sledi da je $\overline{\alpha(V_x^*) \cap V_x}$ α-skoro parakompaktan podskup datog prostora X.

Znači, za svaku tačku $x \in E$ postoji regularno zatvorena α-skoro parakompaktna okolina V_x koja je sadržana u W. Posmatrajmo porodicu

$$G^* = \{\alpha(V_x) : x \in E\} .$$

G^* je otvoren prekrivač podskupa E, pa pošto je E α- parakompaktan podskup sledi da se u G^* može upisati X-otvoren X-lokalno konačan prekrivač $\{U_j : j \in J\}$ podskupa E. Neka je $F_j = \overline{U}_j$ za svako $j \in J$. Sledi da je

$$E \subset \cup\{F_j^o : j \in J\} \subset \cup\{F_j : j \in J\} \subset W.$$

Lema 3.2.6. Neka je E proizvoljan α-parakompaktan podskup u skoro regularnom lokalno skoro parakompaktanom prostoru X. Neka je $\{F_j : j \in J\}$ proizvoljna lokalno konačna porodica regularno zatvorenih α-skoro parakompaktnih skupova, tako da je $E \subset \cup\{F_j^o : j \in J\}$. Tada postoji porodica $\{A_j : j \in J\}$ regularno zatvorenih α- skoro parakompaktnih skupova tako da je

$$E \subset \cup\{A_j^o : j \in J\} \quad i \quad A_j \subset F_j^o \quad \text{za svako } j \in J.$$

Dokaz. Neka je X skoro regularan i lokalno skoro parakompaktan prostor. Sledi da za svako $x \in E$ postoji regularno zatvorena α-skoro parakompaktna okolina V_x tako da je $x \in V_x \subset F_j^o$ za neko F_j. Pošto je $\{V_x^o : x \in E\}$ regularno otvoren prekrivač podskupa E, to se u regularno otvoren prekrivač $\{V_x^o : x \in E\}$ može upisati X-otvoren X-lokalno konačan prekrivač G podskupa E. Porodica $\{\overline{G} : G \in G\}$ je regularno zatvoren X-lokalno konačan prekrivač podskupa E i za svako $G \in G$, $\overline{G}$ je α- skoro parakompaktan podskup kao regularno zatvoren podskup skupa V_x za neko $x \in E$. Pored toga $\overline{G} \subset F_j^o$ za neko F_j. Neka je

$$A_j = \cup\{\overline{G} : \overline{G} \subset F_j^o\}$$

Sledi da je svaki A_j regularno zatvoren podskup prostora X i pošto je $\cup\{G: \bar{G} \subset F_j^o\} \subset A_j^o$, imamo da je $E \subset \cup\{A_j^o : j \in J\}$.
$\{A_j : j \in J\}$ je lokalno konačna porodica regularno zatvorenih podskupova i pošto je $A_j \subset F_j$ sledi da je A_j α-skoro parakompaktan podskup u prostoru X.

Teorema 3.2. 14. *Neka je E proizvoljan α-parakompaktan podskup u lokalno skoro parakompaktnom skoro regularnom prostoru X. Neka je G proizvoljan regularno otvoren skup koji sadrži E. Tada postoji zatvorena α-skoro parakompaktna okolina podskupa E koja je sadržana u G.*

Dokaz. Prema lemi 3.2.5. postoji lokalno konačna porodica regularno zatvorenih α-skoro parakompaktnih podskupova $\{F_j : j \in J\}$ tako da je

$$E \subset \cup\{F_j^o : j \in J\} \subset \cup\{F_j : j \in J\} \subset G .$$

Prema predhodnoj lemi, sledi da postoji porodica $\{A_j : j \in J\}$ regularno zatvorenih α-skoro parakompaktnih podskupova tako da je

$$E \subset \cup\{A_j^o : j \in J\} \text{ i } A_j \subset F_j^o \text{ za svako } j \in J.$$

Mi ćemo pokazati da je $S = \cup\{A_j : j \in J\}$ α-skoro parakompaktan podskup u prostoru X. Neka je

$$\{G_n : n \in M\}$$

proizvoljan X-otvoren prekrivač podskupa S. Za svako $j \in J$ neka je

$$\mathcal{G}_j = \{G_n : G_n \cap A_j \neq \emptyset\}.$$

Pošto je A_j α-skoro parakompaktan podskup, sledi da se u $\mathcal{G}_j$ može upisati X-otvorena X-lokalno konačna porodica $\mathcal{H}_j = \{H_k : k \in K_j\}$, tako da je

$$A_j \subset \cup\{\bar{H}_k : k \in K_j\}$$

Možemo da predpostavimo da je $H_k \subset F_j^o$ za svako $k \in K_j$. Neka je

$$\mathcal{G}^* = \cup\{\mathcal{H}_j : j \in J\}.$$

Tada $\overline{\mathcal{G}^*} = \cup\{\overline{\mathcal{H}_j} : j \in J\}$ prekriva podskup S. Za svako $y \in X$ postoji otvorena okolina V_y koja seče najviše konačno mnogo elemenata F_j recimo $F_1, F_2, \dots F_n$.

Ako se F_j ne seče sa V_y tada ni H_k u G_j ne seče V_y i za svako F_j, $j=1,2,\dots n$ postoji otvorena okolina V_j tačke y koja seče najviše konačno mnogo elemenata u G_j. Odatle

$$U = (\bigcap\{V_k : k = 1,2,, \quad , n\}) \cap V_y$$

seče samo konačno mnogo elemenata porodice G^* pa sledi da je S α-skoro parakompaktan podskup u prostoru X.

Teorema 3.2.15. Ako je X lokalno skoro parakompaktan, Y lokalno skoro kompaktan prostor tada je X x Y lokalno skoro parakompaktan prostor.

Dokaz. Dokaz lako sledi na osnovu teoreme 3.2.13.

Teorema 3.2.16. Ako je f zatvoreno, neprekidno i otvoreno preslikavanje lokalno skoro parakompaktnog prostora X na prostor Y tako da je $f^{-1}(y)$ kompaktan podskup za svaku tačku y prostora Y tada je i X lokalno skoro parakompaktan prostor.

Dokaz. Prvo ćemo pokazati da je slika svakog α-skoro parakompaktnog podskupa prostora X α-skoro parakompaktan podskup u prostoru Y. Neka je A proizvoljan α-skoro parakompaktan podskup u prostoru X. Neka je

$$\{U_i : i \in I\}$$

proizvoljan Y-otvoren prekrivač podskupa f(A) . Tada je

$$\{f^{-1}(U_i) : i \in I\}$$

otvoren prekrivač podskupa A. Pošto je A α-skoro parakompaktan podskup sledi da postoji X-otvorena X-lokalno konačna porodica skupova $\{V_j : j \in J\}$ tako da je $\{V_j : j \in J\}$ upisana u porodicu $\{f^{-1}(U_i) : i \in I\}$ i da $\cup\{\overline{V}_j : j \in J\} = A$. Pošto je f zatvoreno i neprekidno preslikavanje i pošto je $f^{-1}(y)$ kompaktan podskup u prostoru X za svaku tačku y prostora Y, sledi da je $f(\overline{V}_j) = \overline{f(V_j)}$, i da je $\{f(V_j) : j \in J\}$ otvorena Y-lokalno konačna porodica podskupova prostora Y. Odatle sledi da je $\{\overline{f(V_j)} : j \in J\}$ prekrivač podskupa f(A), i da je porodica $\{f(V_j) : j \in J\}$ upisana u porodicu $\{U_i : i \in I\}$, pa je f(A) α-skoro parakompaktan podskup u prostoru Y.

Sada ćemo preći na dokaz teoreme. Treba da pokažemo da je Y lokalno skoro parakompaktan prostor. Neka je y proizvoljna tačka prostora Y. Tada postoji tačka x u prostoru X tako da je $f(x) = y$. Pošto je X lokalno skoro parakompaktan prostor, sledi da postoji otvorena okolina U tačke x tako da je $\overline{U}$ α- skoro parakompaktan podskup prostora X. Tada je f(U) otvorena okolina tačke y tako da je $f(\overline{U}) = \overline{f(U)}$ α-skoro parakompaktan podskup u prostoru Y , pa sledi da je Y lokalno skoro parakompaktan prostor.

G L A V A   IV

STROGA PARAKOMPAKTNOST

U ovoj glavi posmatraćemo neka uopštenja strogo parakompaktnih prostora to jest biće obradjeni blizu strogo parakompaktni, lokalno blizu strogo parakompaktni, skoro strogo parakompaktni kao i m-strogo parakompaktni prostori.

4.1. B L I Z U   S T R O G O   P A R A K O M P A K T N I   P R O S T O R I

U ovom paragrafu obradićemo blizu strogo parakompaktne prostore. Daćemo primer blizu strogo parakompaktnog prostora koji nije strogo parakompaktan, primer blizu strogo parakompaktnog prostora koji nije blizu kompaktan kao i primer blizu parakompaktnog prostora koji nije blizu strogo parakompaktan.

Neka je X proizvoljan skup za sada bez ikakve topologije. Neka je data proizvoljna porodica $\mathcal{G}$ podskupova G.

Nosiocem porodice $\mathcal{G}$ nazivaćemo uniju svih članova porodice $\mathcal{G}$ (Smirnov, Ju. M., [60], str. 255) .

Porodicu $\mathcal{G}$ nazivamo *svezanom* ako i samo ako za svaka dva člana G, $G^* \in \mathcal{G}$ postoji lanac (porodice $\mathcal{G}$) u koma je prvi član G a poslednji G^* (Smirnov,Ju. M.,[60], str. 255).

Lancem porodice $\mathcal{G}$ označićemo svaki konačan niz $G_1, G_2, \dots , G_n$ članova porodice $\mathcal{G}$ u kome redom sastavljeni članovi imaju neprazan presek (Smirnov, Ju. M.,[60], str. 255)

Komponentom porodice $\mathcal{G}$ nazivamo svaku takvu svezanu podporodicu $\mathcal{G}^*$ porodice $\mathcal{G}$, tako da svaka druga podporodica porodice $\mathcal{G}$ koja sadrži $\mathcal{G}^*$ nije svezana (Smirnov, Ju. M.,[60], str. 255).

Lema 4.1.1. (Smirnov, Ju.M., [60], str. 255) Svaka porodica $\mathcal{G}$ *podskupova* G *datog prostora* X *na jedinstven način se razlaže na komponente* $\mathcal{G}_i$,

$\mathcal{G} = \bigcup_i \mathcal{G}_i$ *pri čemu su nosioci različitih komponenti disjunktni.*

Definicija 4.1.1. (Dowker ,C.H., [18], vidi Smirnov, Ju.M.,[60], str.256) Za prekrivač $\mathcal{U}$ kažemo da je *zvezdasto konačan (zvezdasto prebrojiv)* ako i samo ako se svaki član prekrivača $\mathcal{U}$ seče sa najviše konačno (prebrojivo) mnogo članova tog istog prekrivača $\mathcal{U}$.

Lema 4.1.2. (Smirnov, Ju.M.,[60], str. 256) Svaka svezana zvezdasto prebrojiva porodica $\mathcal{G}$ *podskupova* G *skupa* X *je najviše prebrojiva.*

Definicija 4.1.2. (Dowker, C.H.,[18], vidi Smirnov, Ju.M.,[60], str.253) Prostor X je *strogo parakompaktan* ako i samo ako se u svaki otvoren prekrivač datog prostora X može upisati otvoren zvezdasto konačan prekrivač.

Na sličan način definišimo blizu strogo parakompaktne prostore.

Definicija 4.1.3. Prostor X je *blizu strogo parakompaktan* ako i samo ako se u svaki regularno otvoren prekrivač datog prostora X može upisati otvoren zvezdasto konačan prekrivač.

Teorema 4.1.1. Svaki strogo parakompaktan prostor je blizu strogo parakompaktan.

Dokaz. Neka je X strogo parakompaktan prostor i neka je

$$\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$$

proizvoljan regularno otvoren prekrivač datog prostora X. Pošto je X blizu strogo parakompaktan sledi da se u regularno otvoren prekrivač $\mathcal{U}$ može upisati otvoren zvezdasto konačan prekrivač $\mathcal{V}$, pa sledi da je dati prostor X blizu strogo parakompaktan.

Teorema 4.1.2. Svaki regularan blizu strogo parakompaktan prostor X je strogo parakompaktan.

Dokaz. Neka je

$$\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$$

proizvoljan otvoren prekrivač prostora X i neka je $x \in X$ proizvoljna tačka. Postoji U_i tako da $x \in U_i$. Pošto je X regularan prostor, sledi da postoji otvorena okolina V_x tačke x tako da je $x \in V_x \subset \overline{V}_x \subset U_i$. Posmatrajmo regularno otvoren prekrivač

$$\mathcal{V} = \{\alpha(V_x) : x \in X\}$$

datog prostora X. Pošto je X blizu strogo parakompaktan prostor sledi da se u regularno otvoren prekrivač $\mathcal{V}$ može upisati otvoren zvezdasto konačan prekrivač $\mathcal{V}^*$. Pošto je $\mathcal{V}^*$ upisana u porodicu $\mathcal{V}$ a $\mathcal{V}$ porodica koja je upisana u porodicu $\mathcal{U}$, sledi da je $\mathcal{V}^*$ otvoren zvezdasto konačan prekrivač prostora X koji je upisan u otvoren prekrivač $\mathcal{U}$, pa sledi da je dati prostor X strogo parakompaktan.

Posledica 4.1.1. Potreban i dovoljan uslov da bi regularan prostor X bio blizu strogo parakompaktan jeste da je X strogo parakompaktan prostor.

Teorema 4.1.3. Semi regularan prostor je blizu strogo parakompaktan ako i samo ako je X strogo parakompaktan prostor.

Dokaz. Dokazuje se slično kao i predhodna teorema.

Teorema 4.1.4. Svaki blizu strogo parakompaktan prostor je blizu parakompaktan.

Dokaz. Pošto je X blizu strogo parakompaktan prostor sledi da se u svaki regularno otvoren prekrivač može upisati otvoren zvezdasto konačan prekrivač. Pošto je svaka zvezdasto konačna porodica lokalno konačna, to sledi da se u svaki regularno otvoren prekrivač prostora X može upisati otvoren lokalno konačan prekrivač, pa sledi da je dati prostor X blizu parakompaktan.

Posledica 4.1.2. Svaki blizu strogo parakompaktan prostor je skoro parakompaktan.

Dokaz. Svaki blizu strogo parakompaktan prostor je blizu parakompaktan, a znamo da je svaki blizu parakompaktan prostor skoro parakompaktan, pa sledi da je svaki blizu strogo parakompaktan prostor ujedno i skoro parakompaktan.

Teorema 4.1.5. Prostor X je blizu strogo parakompaktan ako i samo ako se u svaki otvoren prekrivač datog prostora X može upisati zvezdasto konačna porodica otvorenih skupova sa osobinom da porodica koju čine unutrašnjosti zatvaranja članova te zvezdasto konačne porodice obrazuje otvoren prekrivač prostora X.

Dokaz. Neka je X blizu strogo parakompaktan prostor i neka je

$$\mathcal{U}=\{U_i : i\in I\}$$

proizvoljan otvoren prekrivač datog prostora X. $\{\alpha(U_i) : i\in I\}$ je regularno otvoren prekrivač prostora X. Pošto je X blizu strogo parakompaktan prostor, sledi da postoji otvoren zvezdasto konačan prekrivač $\{H_j : j\in J\}$ tako da je $H_j \subset \alpha(U_{i(j)})$ za neko $i(j)\in I$. Za svako $j\in J$ neka je

$$M_j = H_j \setminus (\overline{U}_{i(j)} \setminus U_{i(j)}).$$

Pošto je $H_j \subset \alpha(U_{i(j)}) \subset \overline{U}_{i(j)}$, sledi da je $M_j = H_j \cap U_{i(j)}$.

Znači $\{M_j : j\in J\}$ je otvorena zvezdasto konačna porodica, koja je upisana u $\mathcal{U}$.

Treba još pokazati da je $\cup\{\alpha(M_j) : j\in J\} = X$. Neka je $x\in X$ proizvoljna tačka. $x\in H_j$ za neko $j\in J$.

$$\alpha(M_j) = \alpha(H_j \cap U_{i(j)}) = \alpha(H_j \cap \overline{U}_{i(j)}) = \alpha(H_j)$$

S obzirom da $x\in H_j$ sledi da $x\in\alpha(H_j) = \alpha(M_j)$.

Znači, $\{M_j : j\in J\}$ je otvorena zvezdasto konačna porodica koja je upisana u $\mathcal{U}$ sa osobinom da je unija unutrašnjosti zatvaranja svakog njenog člana prekrivač datog prostora X.

Obrnuto, neka je

$$\mathcal{U} = \{U_i : i\in I\}$$

regularno otvoren prekrivač datog prostora X. Postoji otvorena zvezdasto konačna porodica $\mathcal{B}=\{B_j : j\in J\}$ tako da je $B_j \subset U_i$ za neko $i\in I$ i da je

$\bigcup\{\alpha(B_j) : j \in J\} = X$. $\mathcal{B}^* = \{\alpha(B_j) : j \in J\}$ zadovoljava uslov.

Teorema 4.1.6. Svaki Hausdorff-ov blizu strogo parakompaktan prostor je skoro regularan.

Dokaz. Na osnovu teoreme 4.1.4. sledi da je svaki blizu strogo parakompaktan prostor blizu parakompaktan, a svaki Hausdorff-ov blizu parakompaktan prostor je ujedno i skoro regularan.

Sada ćemo dati primer blizu strogo parakompaktnog prostora koji nije strogo parakompaktan.

Primer 4.1.1. Neka je

$$X = \{a_{ij},\ a_i,\ a : i,\ j = 1,2,\dots\}\ .$$

Neka je svaka tačka a_{ij} izolovana. Neka je

$$\{U^k(a_i) : k = 1,2,\dots\}$$

bazni sistem okolina tačke a_i, gde je

$$U^k(a_i) = \{a_i,\ a_{ij} : j \geq k\}\ .$$

Neka je

$$\{V^k(a) : k = 1,2,\dots\}$$

bazni sistem okolina tačke a, gde je

$$V^k(a) = \{a,\ a_{ij} : i \geq k,\ j \geq k\}.$$

Sistem okolina $V(x)$ proizvoljne tačke x skupa X zadovoljava uslove za okoline i može se definisati jedinstvena topološka struktura τ, za koju je $V(x)$ skup svih okolina tačke $x \in X$.

Neka je X topološki prostor koji je snabdeven tako definisanom toplogijom τ. Lako se može zaključiti da je X Hausdorff-ov prostor koji nije regularan u tački a, pa prema tome prostor X nije regularan.

Prostor X nije strogo parakompaktan. Ako bi X bio strogo parakompaktan prostor, sledilo bi da se u svaki otvoren prekrivač može upisati zvezdasto konačan otvoren prekrivač, pa pošto je X Hausdorff-ov prostor sledilo bi da je X regularan prostor, što je nemoguće, jer smo pokazali da X nije regularan prostor. Prema tome X nije strogo parakompaktan prostor.

Pokazaćemo da je X blizu strogo parakompaktan prostor. Neka je

$$\mathcal{G} = \{G_i : i \in I\}$$

proizvoljan regularno otvoren prekrivač datog prostora X. Tada $a \in G_{i(a)}$ za neko $i(a) \in I$. Označimo sa $G_{i(i)}$ takvo $G_{i(i)} \in \mathcal{G}$ koji sadrži a_i, $a_i \in G_{i(i)}$, a sa $G_{i(ij)}$ član prekrivača $\mathcal{G}$ koji sadrži a_{ij}. $a_{ij} \in G_{i(ij)}$. Pošto je $\{V^n(a) : n \in N\}$ bazni sistem okolina tačke a, sledi da postoji $m \in N$ tako da je $V^m(a) \subset G_{i(a)}$.

$$\alpha(V^m(a)) = V^m(a) \cup \{a_m, a_{m+1}, \ldots\} .$$

Posmatrajmo otvorenu porodicu

$$\{G_{i(a)}, G_{i(ij)}, G_{i(i)} : i = 1,2,\ldots,m-1,\ j=1,2,\ldots,m-1\}$$

To je konačna porodica otvorenih skupova , pa je ona otvorena zvezdasto konačna porodica. Pokazaćemo da je to prekrivač datog prostora X.

Pre svega $a \in G_{i(a)}$ i za svako $i \leq m-1$, $a_{ij} \in G_{i(ij)}$, $a_i \in G_{i(i)}$. Za $i > m$ $a_i \in \alpha(V^m(a)) \subset \alpha(G_{i(a)}) = G_{i(a)}$, odakle sledi da $a_i \in G_{i(a)}$. Za svako $i > m-1$ $j > m-1$, $a_{ij} \in V^m(a) \subset G_{i(a)}$.

Znači, to je otvorena zvezdasto konačna porodica, koje je upisana u dati regularno otvoren prekrivač $\mathcal{G}$ i prekriva dati prostor X, pa sledi da je X blizu strogo parakompaktan prostor.

Postoje blizu strogo parakompaktni prostori koji nisu blizu kompaktni. To pokazuje sledeći primer.

Primer 4.1.2. Neka je X beskonačan diskretan prostor.

Tada je X blizu strogo parakompaktan prostor, pošto je $\{\{x\} : x \in X\}$ otvorena zvezdasto konačna porodica koje je upisana u svaki regularno otvoren prekrivač i koja prekriva dati prostor X. Ali X nije blizu kompaktan prostor. Posmatrajmo naime regularno otvoren prekrivač $\{\{x\} : x \in X\}$. On se ne može suziti ni na kakav konačan prekrivač. Odatle sledi da X nije blizu kompaktan prostor.

Sada ćemo dati primer blizu parakompaktnog prostora koji nije blizu strogo parakompaktan

Primer 4.1.3. Neka je data uobičajena ravan E *, sa svojom poznatom metrikom* d*, iz koje je izdvojena neka proizvoljna tačka* o*. Za svake dve tačke prostora* E *koje leže na pravoj koja prolazi kroz* o *, rastojanje neka se poklapa sa običnim rastojenjem. Za svake druge dve tačke* a *i* b *prostora* E *rastojenje definišimo kao*

$$d(a,b) = d(a,o) + d(o,b) \ .$$

Prostor E sa ovom metrikom je očigledno prostor koji je povezan i koji ima prebrojivu bazu. Prostor E prema tome nije strogo parakompaktan (Teorema 2, Smirnov, Ju.M., [60], str. 260). Pošto je E metrički prostor , on je parakompaktan prostor, odnosno blizu parakompaktan. Medjutim dati prostor E nije blizu strogo parakompaktan, pošto je regularan pa bi odatle sledilo da je strogo parakompaktan. A to smo videli da nije tačno.

Lema 4.1.3. Ako se u svaki regularno otvoren prekrivač prostora X *može upisati otvoren zvezdasto konačan prekrivač, to se u svaki regularno otvoren prekrivač datog prostora* X *može upisati regularno otvoren zvezdasto konačan prekrivač.*

Dokaz. Neka je

$$\mathcal{U} = \{U_i \ : \ i \in I\}$$

proizvoljan regularno otvoren prekrivač datog prostora X. Sledi da se u njega može upisati otvoren zvezdasto konačan prekrivač $\mathcal{V} = \{V_j : \ j \in J\}$. Pokazaćemo da je $\{\alpha(V_j) \ : \ j \in J\}$ regularno otvoren zvezdasto konačan prekrivač, koji je upisan u dati regularno otvoren prekrivač $\mathcal{U}$. Za $V_j \in \mathcal{V}$, postoji $i \in I$ tako da $V_j \subset U_i$. No tada je i $\alpha(V_j) \subset \alpha(U_i) = U_i$, pa sledi da je dati prekrivač upisan u $\mathcal{U}$. Pokažimo da je to zvezdasto konačna porodica. Ako je $V_{j^*} \cap V_{j''} = \emptyset$, tada je $V_{j^*} \subset X \setminus V_{j''}$, odnosno $\alpha(V_{j^*}) \subset X \setminus V_{j''}$. Sada je $V_{j''} \subset X \setminus \alpha(V_{j^*})$, odnosno $\alpha(V_{j''}) \subset X \setminus \alpha(V_{j*})$ pa je i $\alpha(V_{j*}) \cap \alpha(V_{j''}) = \emptyset$, a pošto je V zvezdasto konačna porodica sledi da je i $\{\alpha(V_j) : j \in J\}$ takodje zvezdasto konačna porodica.

Znači $\{\alpha(V_j) : j \in J\}$ je regularno otvoren zvezdasto konačan prekrivač prostora X koji je upisan u regularno otvoren prekrivač U , pa sledi tvrdjenje leme.

Teorema 4.1.7. (X,τ) je blizu strogo parakompaktan prostor ako i samo ako je (X,τ^*) strogo parakompaktan.

Dokaz. Neka je (X,τ) blizu strogo parakompaktan prostor. Neka je U proizvoljan δ-otvoren prekrivač prostora (X,τ^*). U njega se može upisati regularno otvoren prekrivač V, a prema predhodnoj lemi sledi da se u regularno otvoren prekrivač V može upisati regularno otvoren zvezdasto konačan prekrivač V^* . Odatle sledi da je (X,τ^*) strogo parakompaktan prostor.

Obrnuto, neka je (X,τ^*) strogo parakompaktan prostor i neka je $U = \{U_i : i \in I\}$ proizvoljan regularno otvoren prekrivač prostora (X,τ). Pošto je U δ-otvoren prekrivač, sledi da se u njega može upisati δ-otvoren zvezdasto konačan prekrivač V , pa sledi da je prostor (X,τ) blizu parakompaktan.

Teorema 4.1.8. Ako je (X,τ) skoro regularan prostor važe sledeće ekvivalencije :

(a) (X,τ) je blizu strogo parakompaktan prostor ;

(b) U svaki regularno otvoren prekrivač prostora (X,τ) može se upisati otvoren zvazdasto prebrojiv prekrivač ;

(c) U svaki regularno otvoren prekrivač prostora (X,τ) može se upisati regularno otvoren zvezdasto prebrojiv prekrivač ;

(d) U svaki regularno otvoren prekrivač prostora (X,τ) može se upisati regularno otvoren zvezdasto konačan prekrivač ;

(e) U svaki regularno otvoren prekrivač prostora (X,τ) može se upisati re-

gularno zatvoren zvezdasto konačan prekrivač ;

(f) U svaki regularno otvoren prekrivač prostora (X,τ) može se upisati regularno zatvoren zvezdasto prebrojiv prekrivač .

Dokaz. (a)→(b) Lako se vidi.

(b)→(c)

Dokazuje se isto kao i lema 4.1.3.

(c)→(d)

Neka je (X,τ) skoro regularan prostor sa osobinom (b). Tada je (X,τ^*) regularan prostor sa osobinom da se u svaki δ-otvoren prekrivač U može upisati δ-otvoren zvezdasto prebrojiv prekrivač V , pa na osnovu teoreme 1 (Smirnov, Ju.M., [60], str. 256) sledi da se u svaki δ-otvoren prekrivač može upisati δ-otvoren zvezdasto konačan prekrivač V . Posmatrajmo porodicu $V^* = \{\alpha(V): V \in V\}$.

Tada je V^* regularno otvoren zvezdasto konačan prekrivač prostora (X,τ) koji je upisan u regularno otvoren prekrivač U .

(d)→(e)

Neka je U proizvoljan regularno otvoren prekrivač prostora (X,τ). Sledi da se u njega može upisati regularno otvoren zvezdasto konačan prekrivač. Tada na osnovu teoreme 1 (Smirnov , Ju.M. [60] str. 256) sledi da se u regularno otvoren prekrivač U može upisati δ-zatvoren zvezdasto konačan prekrivač F . Posmatrajmo porodicu $F^* = \{\beta(F): F \in F\}$. Pošto je $\beta(F) \subset F$, sledi da je F^* regularno zatvorena zvezdasto konačna porodica. Da je to ujedno i prekrivač datog prostora sledi na osnovu leme 1.1. (Singal, M.K., [57], str. 5).

(e)→(f)

Lako se vidi

(f)→(a)

Neka je U proizvoljan regularno otvoren prekrivač prostora (X,τ). Pošto se na osnovu predpostavke u svaki regularno otvoren prekrivač može upisati zvezdasto prebrojiv regularno zatvoren prekrivač, sledi na osnovu teoreme 1 (Smirnov Ju.M. , [60], str. 256) da se u svaki regularno otvoren prekrivač može upisati δ-otvoren zvezdasto konačan prekrivač. Znači u regularno otvoren prekrivač $\mathcal{U}$ može se upisati otvoren zvezdasto konačan prekrivač pa sledi da je (X,τ) blizu strogo parakompaktan prostor.

Teorema 4.1.9. Svaki skoro regularan prostor sa osobinom (b) iz predhodne teoreme je δ-normalan.

Dokaz. Neka je (X,τ) skoro regularan prostor sa osobinom (b). Tada na osnovu dokaza (b)$\rightarrow$(c) sledi da je (X,τ^*) regularan prostor sa osobinom da se u njegov svaki otvoren prekrivač može upisati otvoren zvezdasto prebrojiv prekrivač , pa na osnovu teoreme 1 (Smirnov,Ju.M., [60], str. 256) sledi da je (X,τ^*) normalan prostor, pa sledi da je (X,τ) δ-normalan prostor.

Teorema 4.1.9. U svaki regularno otvoren prekrivač skoro regularnog prostora sa osobinom (b) možemo upisati δ-otvoren zvezdasto konačan prekrivač, čiji je svaki član oblika F_σ , gde je F δ-zatvoren skup.

Dokaz. Neka je (X,τ) skoro regularan prostor sa osobinom (b) . Tada je (X,τ^*) regularan prostor sa osobinom da se u njegov svaki otvoren prekrivač može upisati otvoren zvezdasto prebrojiv prekrivač, to na osnovu teoreme 1 (Smirnov, Ju. M. , [60], str. 256) sledi da se u svaki regularno otvoren prekrivač može upisati δ-otvoren zvezdasto konačan prekrivač, čiji je svaki član oblika F_σ , gde je F δ-zatvoren skup.

Lema 4.1.4. Ako je zatvaranje svakog člana otvorenog lokalno konačnog prekrivača $\mathcal{A}$ *prostora X* α*-blizu kompaktan podskup, sledi da je prekrivač* $\mathcal{A}$ *zvezdasto konačan.*

Dokaz. Posmatrajmo proizvoljan član A prekrivača $\mathcal{A}$ i njegovo zatvaranje $\bar{A}$. Svaka tačka $x \in \bar{A}$ ima u X okolinu O_x koja se seče sa najviše konačno mnogo elemenata prekrivača $\mathcal{A}$. Tada se i $\alpha(O_x)$ seče sa najviše konačno mnogo članova porodice $\mathcal{A}$. Iz regularno otvorenog prekrivača $\{\alpha(0_x): x \in \bar{A}\}$ α-blizu kompaktnog skupa $\bar{A}$ možemo izdvojiti konačan podprekrivač $\{\alpha(0_{x(i)}) : i = 1,2,\dots s\}$. Pošto se svaki skup $\alpha(0_{x(i)})$ seče sa najviše konačno mnogo elemenata prekrivača $\mathcal{A}$, to i skup

$$0 = \bigcup_{i=1}^{s} \alpha\,(0_{x(i)})$$

ima tu istu osobinu. Pošto je $A \subset 0$ sledi da se A seče sa najviše konačno mnogo članova prekrivača $\mathcal{A}$, što je i trebalo dokazati.

Teorema 4.1.11. Lokalno blizu kompaktan i blizu parakompaktan prostor je blizu strogo parakompaktan.

Dokaz. Uzmimo proizvoljan regularno otvoren prekrivač $\mathcal{A}$ prostora X. Za svaku tačku $x \in X$ izaberimo regularno otvorenu okolinu 0_x tako da je zatvaranje te okoline α-blizu kompaktan podskup datog prostora X. Po uslovu teoreme u presek $\mathcal{A} \cap \mathcal{A}^*$ prekrivača $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}^* = \{0_x: x \in X\}$ možemo upisati otvoren lokalno konačan prekrivač $\mathcal{A}''$. $\mathcal{A}''$ je upisan i u $\mathcal{A}$ i u $\mathcal{A}^*$. Pošto je $\mathcal{A}''$ upisan u $\mathcal{A}^*$, sledi da je zatvaranje svakog člana prekrivača $\mathcal{A}''$ α-blizu kompaktan podskup. Iz predhodne leme sledi da je prekrivač $\mathcal{A}''$ zvezdasto konačan, što i dokazuje datu teoremu.

Definicija 4.1.4. Podskup A prostora X je *α-blizu strogo parakompaktan* ako i samo ako se u svaki regularno otvoren prekrivač podskupa A može upisati X-otvoren zvezdasto konačan prekrivač podskupa A.

Podskup A je blizu strogo parakompaktan ako i samo ako je A blizu strogo parakompaktan podsprostor prostora X.

Teorema 4.1.12. Svaki zatvoreno otvoren podskup blizu strogo parakompaktnog prostora X je blizu strogo parakompaktan.

Dokaz. Neka je A zatvoreno otvoren podskup blizu strogo parakompaktnog prostora X. Neka je

$$\{U_i: i \in I\}$$

relativan regularno otvoren prekrivač datog podskupa A. S obzirom da je A zatvoreno otvoren podskup, sledi da je svaki U_i regularno otvoren podskup u prostoru X. Odatle sledi da je

$$\{U_i : i \in I\} \cup \{X \setminus A\}$$

regularno otvoren prekrivač prostora X. Pošto je X blizu strogo parakompaktan sledi da postoji otvoren prekrivač $\mathcal{V} = \{V_j : j \in J\}$ koji je zvezdasto konačan i upisan u $\{U_i : i \in I\} \cup \{X \setminus A\}$.

Tada je $\mathcal{V}^* = \{A \cap V_j : j \in J\}$ otvoren zvezdasto konačan prekrivač podskupa A koji je upisan u $\{U_i : i \in I\}$, pa sledi da je A blizu strogo parakompaktan podskup datog prostora X.

Teorema 4.1.13. Ako je

$$X = \bigcup \{U_i : i \in I\}$$

gde je $\{U_i : i \in I\}$ disjunktna porodica zatvoreno otvorenih podskupova prostora X, tada je X blizu strogo parakompaktan ako i samo ako je svaki U_i blizu strogo parakompaktan.

Dokaz. Potreban uslov. Ako je X blizu strogo parakompaktan prostor, sledi na osnovu predhodne teoreme da je svaki U_i blizu strogo parakompaktan podskup.

Dovoljan uslov. Neka je $\mathcal{V} = \{V_j : j \in J\}$ proizvoljan regularno otvoren prekrivač datog prostora X. Za svako $i \in I$ neka je $\mathcal{V}^i = \{U_i \cap V_j : j \in J\}$.
Pošto je U_i blizu strogo parakompaktan podskup sledi da postoji zvezdasto konačna porodica $\{D_k : k \in K^i\}$ otvorenih (u U_i, sledi i u X) podskupova u X koja prepokriva U_i i upisana je u $\mathcal{V}^i$. Posmatrajmo porodicu

$$\mathcal{D} = \{D_k : k \in K^i, i \in I\} .$$

$\mathcal{D}$ je zvezdasto konačna porodica X-otvorenih podskupova koja je upisana u $\mathcal{V} = \{V_j : j \in J\}$ i prepokriva prostor X , pa na osnovu toga sledi da je X blizu strogo parakompaktan prostor.

Teorema 4.1.14. Ako svaki otvoren podskup koji sadrži gust podskup A prostora X, sadrži blizu strogo parakompaktan skup koji sadrži A, tada je A blizu strogo parakompaktan podskup u prostoru X.

Dokaz. Neka je

$$\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$$

proizvoljan relativan regularno otvoren prekrivač podskupa A. Pošto je A gust sledi da je $U_i = A \cap \alpha(U_i)$ za svako i. Neka je

$$U = \cup\{\alpha(U_i) : i \in I\} .$$

Tada je U otvoren skup koji sadrži gust podskup A. Odatle sledi da postoji blizu strogo parakompaktan podskup B takav da je $A \subset B \subset U$. Pošto je A gust sledi da je i B takodje gust podskup prostora X, pa je prema tome

$$\{\alpha(U_i) \cap B : i \in I\}$$

relativan regularno otvoren prekrivač podskupa B. Pošto je B blizu strogo parakompaktan sledi da postoji zvezdasto konačna porodica $\{V_j : j \in J\}$ otvorenih u B podskupova koja prepokriva B i koja je upisana u $\{\alpha(U_i) \cap B : i \in I\}$. Svaki $V_j = V_j^* \cap B$ gde je V_j^* otvoren podskup u prostoru X. Posmatrajmo porodicu

$$\mathcal{V} = \{V_j^* \cap A : j \in I\} .$$

$\mathcal{V}$ je zvezdasto konačna porodica otvorenih (u A) podskupova koje prepokriva A i koja je upisana u $\mathcal{U}$. Iz toga sledi da je A blizu strogo parakompaktan podskup datog prostora X.

Teorema 4.1.15. Ako je svaki otvoren podskup prostora X gust blizu strogo parakompaktan podskup, tada je svaki gust podskup prostora X blizu strogo parakompaktan.

Dokaz. Neka je A gust podskup prostora X. Neka je

$$\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$$

relativan regularno otvoren prekrivač datog podskupa A. Pošto je A gust, sledi da je $U_i = \alpha(U_i) \cap A$ za svako $i \in I$. Neka je $V = \cup \{\alpha(U_i) : i \in I\}$. Prema predpostavci V je otvoren gust blizu strogo parakompaktan podskup i $\{\alpha(U_i):i\in I\}$ je relativan regularno otvoren prekrivač podskupa V. Sledi da postoji zvezdasto konačna porodica podskupova $\{V_j: j\in J\}$ otvorenih (u V) koja prepokriva V i koja je upisana u $\{\alpha(U_i) : i\in I\}$.

Tada je $\{V_j\cap A : j\in J\}$ zvezdasto konačna porodica otvorenih (u A) podskupova, koja prepokriva dati podskup A i koja je upisana u $\{U_i : i\in I\}$, pa sledi da je A blizu strogo parakompaktan podskup.

Teorema 4.1.16. Zatvaranje α-blizu strogo parakompaktnog podskupa u skoro regularnom prostoru X je α-blizu strogo parakompaktan podskup.

Dokaz. Neka je A proizvoljan α-blizu strogo parakompaktan podskup u skoro regularnom prostoru X. Neka je

$$\{U_i: i\in I\}$$

proizvoljan regularno otvoren prekrivač podskupa $\bar{A}$. Za svaku tačku $x\in A$ postoji regularno otvoren skup V_x tako da je

$$x\in V_x\subset \bar{V}_x\subset U_i$$

za neko $i\in I$. Tada je $\{V_x: x\in A\}$ regularno otvoren prekrivač podskupa A. Pošto je A α-blizu strogo parakompaktan podskup sledi da se u regularno otvoren prekrivač $\{V_x : x\in A\}$ podskupa A može upisati X-otvoren zvezdasto konačan prekrivač $\mathcal{W} = \{W_j: j\in J\}$ podskupa A. Tada je $\{\alpha(W_j) : j\in J\}$ regularno otvoren zvezdasto konačan prekrivač podskupa A , koji je očigledno upisan u regularno otvoren prekrivač $\{U_i: i\in I\}$. Sledi da za svaku tačku $x\in A$ postoji regularno otvoren skup V_x^* , tako da je

$$x\in V_x^*\subset \overline{V_x^*}\subset \alpha(W_j)$$

za neko $j\in J$. Tada je $\{V_x^* : x\in A\}$ regularno otvoren prekrivač α-blizu strogo parakompaktnog podskupa A pa sledi da se u njega može upisati otvoren zvezdasto konačan prekrivač $\{A_k: k\in K\}$. Tada je

$$\bar{A}\subset \overline{\bigcup\{A_k: k\in K\}} = \bigcup\{\bar{A}_k : k\in K\} .$$

Postoji $x^* \in A$ tako de je $A_k \subset V^*_{x^*}$, pa je $\overline{A}_k \subset \overline{V^*_{x^*}} \subset \alpha(W_{j_0})$ za neko $j_0 \in J$.

Znači $\{\alpha(W_j) : j \in J\}$ je regularno otvoren zvezdasto konačan prekrivač podskupa $\overline{A}$, koji je upisan u regularno otvoren prekrivač $\{U_i : i \in I\}$ podskupa $\overline{A}$ pa sledi da je $\overline{A}$ α-blizu strogo parakompaktan podskup.

Teorema 4.1.17. Neka je A proizvoljan skup u prostoru X. Tada, A je α-blizu strogo parakompaktan podskup u prostoru (X,τ) ako i samo ako je A α-strogo parakompaktan podskup u prostoru (X,τ^*).

Dokaz. Dokazuje se slično kao i odgovarajući rezultat za blizu strogo parakompaktne i strogo parakompaktne prostore.

Teorema 4.1.18. Svaki δ-zatvoren podskup blizu strogo parakompaktnog prostora je α-blizu strogo parakompaktan.

Dokaz. Neka je A proizvoljan δ-zatvoren podskup u prostoru (X,τ). Pošto je (X,τ) blizu strogo parakompaktan prostor sledi da je (X,τ^*) strogo parakompaktan. Tada je podskup A α-strogo parakompaktan u prostoru (X,τ^*) pa sledi prema predhodnoj teoremi da je A α-blizu strogo parakompaktan podskup u prostoru (X,τ), što je i trebalo dokazati.

Posledica 4.1.3. Zatvoreno otvoren podskup blizu strogo parakompaktnog prostora je α-blizu strogo parakompaktan ako i samo ako je blizu strogo parakompaktan.

Teorema 4.1.19. Regularno zatvoren podskup α-blizu strogo parakompaktnog podskupa je α-blizu strogo parakompaktan.

Dokaz. Neka je C proizvoljan α-blizu strogo parakompaktan podskup, B regularno zatvoren podskup i $B \subset C$. Neka je $\mathcal{U}$ proizvoljan regularno otvoren prekrivač podskupa B. Tada je

$$\mathcal{U} \cup \{X \setminus B\}$$

regularno otvoren prekrivač podskupa C. Pošto je C α-blizu strogo parakompaktan podskup sledi da se u $\mathcal{U} \cup \{X \setminus B\}$ može upisati X-otvoren zvezdasto konačan prekrivač $\mathcal{V}$ podskupa C. Pošto je $C \subset \{X \setminus B\} \cup \{V : V \in \mathcal{V}\}$, sledi da je $B \subset \cup \{V : V \in \mathcal{V}\}$, pa je B α-blizu strogo parakompaktan podskup prostora X.

Teorema 4.1.20. Neka je X proizvoljan topološki prostor. Podskup A prostora X je α-blizu strogo parakompaktan ako i samo ako se u svaki X-otvoren prekrivač $\mathcal{U}$ podskupa A može upisati zvezdasto konačna X-otvorena porodica $\mathcal{V}$ tako da je $A \subset \cup\{\alpha(V) : V \in \mathcal{V}\}$:

Dokaz. Neka je

$$\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$$

proizvoljan regularno otvoren prekrivač datog podskupa A. Tada postoji zvezdasto konačna porodica $\mathcal{V} = \{V_j : j \in J\}$ X-otvorenih podskupova, koja je upisana u $\mathcal{U}$ i da je $A \subset \cup \{\alpha(V_j) : j \in J\}$. Posmatrajmo porodicu

$$\mathcal{V}^* = \{\alpha(V_j) : j \in J\} .$$

$\mathcal{V}^*$ je X-otvorena zvezdasto konačna porodica koja je upisana u regularno otvoren prekrivač $\mathcal{U}$ i koja prepokriva dati podskup A, pa sledi da je A α-blizu strogo parakompaktan podskup datog prostora X.

Obrnuto, neka je A α-blizu strogo parakompaktan podskup u prostoru X. Neka je

$$\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$$

proizvoljan X-otvoren prekrivač datog podskupa A. Tada je

$$\{\alpha(U_i) : i \in I\}$$

regularno otvoren prekrivač podskupa A, pa pošto je A α-blizu strogo parakompaktan podskup sledi da se u regularno otvoren prekrivač $\{\alpha(U_i) : i \in I\}$ može upisati X-otvorena zvezdasto konačna porodica $\{H_j : j \in J\}$ tako da je za svako j

$$H_j \subset \alpha(U_{i(j)})$$

za neko $i(j) \in I$ i $A \subset \cup \{H_j : j \in J\}$.

Za svako $j \in J$, neka je

$$M_j = H_j \setminus (\overline{U}_{i(j)} \setminus U_{i(j)}).$$

Pošto je $H_j \subset \alpha(U_{i(j)}) \subset \overline{U}_{i(j)}$, sledi da je $M_j = H_j \cap U_{i(j)}$.

Sada ćemo pokazati da je $\bigcup\{\alpha(M_j) : j \in J\} \supset A$

Neka $x \in A$. Tada $x \in H_j$ za neko $j \in J$. Sada je

$$\alpha(M_j) = \alpha(H_j \cap U_{i(j)}) = \alpha(H_j \cap \overline{U}_{i(j)}) = \alpha(H_j).$$

Tada $x \in \alpha(H_j) = \alpha(M_j)$.

Odatle sledi da je $\{M_j : j \in J\}$ X-otvorena zvezdasto konačna porodica, koja je upisana u otvoren prekrivač $\mathcal{U}$ i $A \subset \bigcup\{\alpha(M_j) : j \in J\}$.

Teorema 4.1.21. Proizvod blizu strogo parakompaktnog i blizu kompaktnog prostora je blizu strogo parakompaktan prostor.

Dokaz. Neka je $\mathcal{U}$ proizvoljan regularno otvoren prekrivač proizvoda $X \times Y$ gde je X blizu strogo parakompaktan a Y blizu kompaktan prostor. Neka je $(x,y) \in X \times Y$ proizvoljna tačka. Postoji $U \in \mathcal{U}$ tako da $(x,y) \in U$. Pošto je U regularno otvoren skup, sledi da postoji regularno otvoren skup V_{xy} prostora X i W_{xy} prostora Y, tako da važi

$$(x,y) \in V_{xy} \times W_{xy} \subset U \text{. Neka je}$$
$$I^x = \{x\} \times Y$$

za svako $x \in X$. Tada je

$$\{W_{xy} : (x,y) \in I^x\}$$

regularno otvoren prekrivač blizu kompaktnog prostora Y, pa sledi da postoji konačan podskup J^x skupa I^x tako da je

$$\{W_{xy} : (x,y) \in J^x\}$$

prekrivač prostora Y.

Za svaku tačku $x \in X$ neka je

$$V_x = \bigcap\{V_{xy} : (x,y) \in J^x\}.$$

V_x je regularno otvorena okolina tačke x u prostoru X, jer je presek od konačno mnogo regularno otvorenih skupova opet regularno otvoren skup. Neka je

$$\mathcal{V} = \{V_x : x \in X\}.$$

$\mathcal{V}$ je regularno otvoren prekrivač prostora X. Pošto je X blizu strogo parakompaktan prostor, to postoji otvoren zvazdasto konačan prekrivač $\mathcal{A}$ koji je upisan u $\mathcal{V}$. Za svako $A \in \mathcal{A}$ izaberimo $V_{x(A)}$ tako da je $A \subset V_{x(A)}$. Neka je

$$\mathcal{H} = \{A \times W_{xy} : A \in \mathcal{A}\ ,\ (x,y) \in J^{x_A}\}\ .$$

$\mathcal{H}$ je otvoren zvezdasto konačan prekrivač prostora X x Y koji je upisan u regularno otvoren prekrivač $\mathcal{U}$, pa odatle sledi da je X x Y blizu strogo parakompaktan prostor.

Posledica 4.1.4. Proizvod blizu strogo parakompaktnog i proizvoljne porodice blizu kompaktnih prostora je blizu strogo parakompaktan prostor.

Dokaz. Proizvod proizvoljne porodice blizu kompaktnih prostora je opet blizu kompaktan prostor.

Posledica 4.1.5. Proizvod blizu strogo parakompaktnog prostora i proizvoljne porodice kompaktnih prostora je opet blizu strogo parakompaktan prostor.

Dokaz. Svaki kompaktan prostor je blizu kompaktan.

Proizvod strogo kompaktnog prostora i proizvoljne porodice kompaktnih prostora je blizu strogo parakompaktan prostor.

Dokaz. Svaki strogo parakompaktan prostor je blizu strogo parakompaktan.

Teorema 4.1.22. Proizvod α-blizu strogo parakompaktnog podskupa i α-blizu kompaktnog skupa je α-blizu strogo parakompaktan podskup proizvoda.

Dokaz. Dokaz je sličan dokazu predhodne teoreme.

Teorema 4.1.23. Neka je f biunivoko skoro neprekidno i skoro otvoreno preslikavanje blizu strogo parakompaktnog prostora X na prostor Y. Tada je Y blizu strogo parakompaktan prostor.

Dokaz. Neka je

$$\{U_i : i \in I\}$$

proizvoljan regularno otvoren prekrivač datog prostora Y. Tada je za svako $i \in I$ $f^{-1}(U_i)$ regularno otvoren podskup prostora X. Posmatrajmo regularno otvoren prekrivač

$$\{f^{-1}(U_i) : i \in I\}$$

prostora X. Pošto je X blizu strogo parakompaktan prostor to sledi da se u regularno otvoren prekrivač $\{f^{-1}(U_i) : i \in I\}$ može upisati regularno otvoren zvezdasto konačan prekrivač

$$\{A_j : j \in J\} .$$

Tada je

$$\{f(A_j) : j \in J\}$$

otvoren zvezdasto konačan prekrivač prostora Y koji je upisan u regularno otvoren prekrivač $\{U_i : i \in I\}$ pa sledi da je dati prostor Y blizu strogo parakompaktan.

Teorema 4.1.24. Neka je f skoro neprekidno skoro otvoreno preslikavanje blizu strogo parakompaktnog prostora X na prostor Y, tako da je $f^{-1}(G)$ α-blizu kompaktan podskup prostora X za svaki otvoren podskup G prostora Y. Tada je Y blizu strogo parakompaktan prostor.

Dokaz. Neka je

$$\{U_i : i \in I\}$$

proizvoljan regularno otvoren prekrivač prostora Y. Tada je $f^{-1}(U_i)$ regularno otvoren podskup prostora X za svako $i \in I$. Pošto je X blizu strogo parakompaktan prostor to sledi da se u regularno otvoren prekrivač

$$\{f^{-1}(U_i) : i \in I\}$$

prostora X može upisati regularno otvoren zvezdasto konačan prekrivač $\{A_j : j \in J\}$. Pošto je f skoro otvoreno preslikavanje sa osobinom da je $f^{-1}(G)$,za svaki otvoren skup $G \subset Y$, α-blizu kompaktan podskup prostora X to sledi da je porodica $\{f(A_j) : j \in J\}$ zvezdasto konačna.

Znači, $\{f(A_j) : j \in J\}$ je otvoren zvezdasto konačan prekrivač prostora Y koji je upisan u regularno otvoren prekrivač $\{U_i : i \in I\}$ pa sledi da je Y blizu strogo parakompaktan prostor.

Lema 4.1.5. Neka je f skoro otvoreno i skoro zatvoreno preslikavanje prostora X na prostor Y, tako da je $f^{-1}(G)$ α-blizu kompaktan podskup u prostoru X za svaki otvoren podskup $G \subset Y$. Ako je $\{U_i : i \in I\}$ proizvoljan regularno otvoren lokalno konačan prekrivač prostora X, tada je $\{f(U_i) : i \in I\}$ otvoren zvezdasto konačan prekrivač prostora Y.

Dokaz. Odmah se vidi da je $\{f(U_i) : i \in I\}$ otvoren prekrivač prostora Y. Pokazaćemo da je to zvezdasto konačna porodica. U tu svrhu, neka je $f(U_{i_0})$ proizvoljan elemenat porodice $\{f(U_i) : i \in I\}$. Pošto je $\{U_i : i \in I\}$ lokalno konačna porodica, sledi da za svako $x \in f^{-1}(f(U_{i_0}))$ postoji otvorena okolina $G(x)$ tačke x u X i konačan podkup $I(x)$ skupa I tako da je $G(x) \cap U_i = \emptyset$ za svako $x \in I \setminus I(x)$. Porodica

$$\{G(x) : x \in f^{-1}(f(U_{i_0}))\}$$

je X otvoren prekrivač podskupa $f^{-1}(f(U_{i_0}))$. Pošto je $f^{-1}(f(U_{i_0}))$ α-blizu kompaktan podskup u prostoru X, sledi da postoji konačan broj tačaka $x_1, x_2, \ldots, x_n \in f^{-1}(f(U_{i_0})$ tako da je

$$f^{-1}(f(U_{i_0})) \subset \cup \{\alpha(G(x_i)) : i = 1,2,\ldots n\} .$$

Neka je

$$G = (\bigcup_{i=1}^{n} \overline{G(x_i)})^{0} .$$

G je regularno otvoren skup koji sadrži $f^{-1}(f(U_{i_0}))$. Pošto je f skoro zatvoreno preslikavanje to postoji otvoren skup V u Y koji sadrži $f(U_{i_0})$ tako da je $f^{-1}(V) \subset G$. Odatle sledi

$$V \cap f(U_i) = \emptyset \text{ za svako } i \in I \setminus \bigcup_{i=1}^{n} I(x_i)$$

to jest

$$f(U_{i_0}) \cap f(U_i) = \emptyset \text{ za svako } i \in I \setminus \bigcup_{i=1}^{n} I(x_i).$$

Odatle sledi da je $\{f(U_i): i \in I\}$ zvezdasto konačna porodica.

Teorema 4.1.25. Ako je f skoro zatvoreno, skoro neprekidno i skoro otvoreno preslikavanje blizu parakompaktnog prostora X na prostor Y tako da je $f^{-1}(G)$ α-blizu kompaktan podskup u prostoru X za svaki otvoren podskup $G \subset Y$, tada je Y blizu strogo parakompaktan prostor.

Dokaz. Neka je

$$\mathcal{U} = \{U_i: i \in I\}$$

proizvoljan regularno otvoren prekrivač prostora Y. Pošto je f skoro neprekidno i skoro otvoreno preslikavanje sledi da je $f^{-1}(\mathcal{U}) = \{f^{-1}(U_i): i \in I\}$ regularno otvoren prekrivač prostora X. Pošto je X blizu parakompaktan prostor to postoji regularno otvoren lokalno konačan prekrivač $\mathcal{V} = \{V_j: j \in J\}$ prostora X koji je upisan u regularno otvoren prekrivač $f^{-1}(\mathcal{U})$. Prema predhodnoj lemi sledi da je $f(\mathcal{V}) = \{f(V_j): j \in J\}$ zvezdasto konačan otvoren prekrivač prostora Y koji je upisan u regularno otvoren prekrivač $\mathcal{U}$, pa sledi da je Y blizu strogo parakompaktan prostor.

Teorema 4.1.26. Neka je f proizvoljno biunivoko skoro neprekidno i skoro otvoreno preslikavanje prostora X na prostor Y. Tada je slika svakog α-blizu strogo parakompaktnog podskupa prostora X α-blizu strogo parakompaktan podskup u prostoru Y.

Dokaz. Sličan je dokazu odgovarajućeg rezultata za blizu strogo parakompaktne prostore.

Teorema 4.1.27. Neka je f skoro zatvoreno, skoro neprekidno i skoro otvoreno preslikavanje prostora X na prostor Y tako da je $f^{-1}(G)$ α-blizu kompaktan podskup u prostoru X za svaki otvoren podskup $G \subset Y$. Tada, slika svakog α-blizu parakompaktnog podskupa u prostoru X je α-blizu strogo parakompaktan podskup u prostoru Y.

Dokaz. Dokaz je sličan dokazu odgovarajućeg rezultata za blizu strogo parakompaktne prostore.

Teorema 4.1.28. Neka je f skoro neprekidno i skoro otvoreno preslikavanje prostora X na prostor Y tako da je $f^{-1}(G)$ α-blizu kompaktan podskup u prostoru X za svaki otvoren podskup $G \subset Y$. Tada je slika svakog α-blizu strogo parakompaktnog podskupa prostora X α-blizu strogo parakompaktan podskup u Y.

Dokaz. Dokaz je sličan dokazu odgovarajućeg rezultata za blizu strogo parakompaktne prostore.

Neka je $\mathcal{W}$ fiksni prekrivač prostora X. Neprekidno preslikavanje f prostora X na prostor Y je ($\mathcal{W}$,p) preslikavanje ako i samo ako za svaku tačku $y \in Y$ postoji podporodica $\mathcal{W}_y$ porodice $\mathcal{W}$ koja poseduje osobinu p u $\cup \mathcal{W}_y$ i okolina V_y tačke y tako da je $f^{-1}(V_y) \subset \cup \mathcal{W}_y$ (Singal,M.K., [57], str. 14).

Teorema 4.1.29. Prostor X je blizu strogo parakompaktan ako za svaki regularno otvoren prekrivač prostora X postoji ($\mathcal{W}$,p) preslikavanje prostora X u neki strogo parakompaktan prostor Y, gde je p osobina, zvezdasto konačan.

Dokaz. Za svaku tačku $y \in Y$, izaberimo podporodicu $\mathcal{W}_y$ porodice $\mathcal{W}$ koja je zvezdasto konačna i otvoren skup V_y koji sadrži tačku y tako da je $f^{-1}(V_y) \subset \cup \mathcal{W}_y$. Tada je $\{V_y : y \in Y\}$ otvoren prekrivač prostora Y, a pošto je Y strogo parakompaktan to sledi da postoji otvoren zvezdasto konačan prekrivač $\{U_i : i \in I\}$ prostora Y koji je upisan u otvoren prekrivač $\{V_y : y \in Y\}$. Za svako U_i ,postoji V_{y_i} tako da je $U_i \subset V_{y_i}$. Neka je

$$\mathcal{U}_i = \{f^{-1}(U_i) \quad W : W \in \mathcal{W}_{y_i}\}$$

za svako $i \in I$. Neka je

$$\mathcal{U} = \cup \{ \mathcal{U}_i : i \in I \}.$$

Tada je $\mathcal{U}$ otvoren zvezdasto konačan prekrivač prostora X koji je upisan u regularno otvoren prekrivač $\mathcal{W}$, pa sledi da je X blizu strogo parakompaktan prostor.

4.2. LOKALNO BLIZU STROGO PARAKOMPAKTNI PROSTORI

U ovom paragrafu obradićemo novu klasu topoloških prostora to jest biće obradjeni lokalno blizu strogo parakompaktni prostori, koji predstavljaju uopštenje kako blizu strogo parakompaktnih prostora tako i lokalno strogo parakompaktnih prostora.

Definicija 4.2.1. Za topološki prostor X reći ćemo da je *lokalno blizu strogo parakompaktan* ako i samo ako za svaku tačku x prostora X postoji otvorena okolina U_x tako da je $\overline{U}_x$ α-blizu strogo parakompaktan podskup u prostoru X.

Lema 4.2.1. Ako B ima otvorenu okolinu U tako da je $\overline{U}$ α-blizu strogo parakompaktan podskup, tada postoji regularno otvorena okolina V podskupa B tako da je $\overline{V}$ α-blizu strogo parakompaktan podskup u prostoru X.

Dokaz. Ako je $B \subset U$ i $\overline{U}$ α-blizu strogo parakompaktan podskup, tada je $B \subset \alpha(U) \subset \overline{\alpha(U)} \subset \overline{U}$. Odatle sledi da je $\alpha(U)$ tražena okolina.

Teorema 4.2.1. Neka je X skoro regularan prostor. Tada važe sledeće ekvivalencije:

(a) Prostor X je lokalno blizu strogo parakompaktan ;

(b) Za svaku tačku $x \in X$ i svaku otvorenu okolinu U tačke x, postoji otvoren skup V tako da je $\overline{V}$ α-blizu strogo parakompaktan podskup i da je

$$x \in V \subset \overline{V} \subset \alpha(U) ;$$

(c) Za svaku tačku $x \in X$ i svaku regularno otvorenu okolinu U tačke x, postoji otvoren skup V, tako da je $\overline{V}$ α-blizu strogo parakompaktan podskup i da je

$$x \in V \subset \overline{V} \subset U.$$

Dokaz. (a)→(b)

Neka je U proizvoljna otvorena okolina tačke x. Pošto je X lokalno blizu strogo parakompaktan prostor to postoji otvorena okolina W tačke x tako da je $\overline{W}$ α-blizu strogo parakompaktan podskup prostora X. Skup $\alpha(U \cap W)$ je regularno otvoren i sadržan je u W. Pošto je prostor X skoro regularan, sledi da postoji regularno otvoren skup V tako da je

$$x \in V \subset \overline{V} \subset \alpha(U \cap W) \subset \alpha(U) .$$

Skup $\overline{V}$ je regularno zatvoren, sadržan je u α-blizu strogo parakompaktnom skupu W, pa je $\overline{V}$ α-blizu strogo parakompaktan podskup u prostoru X.

(b)→(c)

Lako sledi

(c)→(a)

Očigledno je.

Teorema 4.2.2. Prostor (X,τ) je lokalno blizu strogo parakompaktan ako i samo ako je (X, τ^*) lokalno strogo parakompaktan prostor.

Dokaz. Neka je (X,τ) lokalno blizu strogo parakompaktan prostor. Uzmimo proizvoljnu tačku $x \in X$. Tada postoji regularno otvorena okolina V tačke x tako da je $\overline{V}$ α-blizu strogo parakompaktan podskup u prostoru (X,τ). Tada je $\overline{V}$ α-strogo parakompaktan podskup u prostoru (X, τ^*). Pošto je V regularno otvoren skup, tada je $\overline{V}$ δ-zatvoren skup.

Znači V je δ-otvorena okolina tačke x tako da je $\overline{V}_{\tau^*} = \overline{V}_{\tau}$ α-strogo parakompaktan podskup u prostoru (X, τ^*) pa sledi da je (X, τ^*) lokalno strogo parakompaktan prostor.

Obrnuto, neka je (X, τ^*) lokalno strogo parakompaktan prostor. Uzmimo prozvoljnu tačku $x \in X$. Tada postoji δ-otvorena okolina V tačke x tako da je $\overline{V}_{\tau^*}$ α-strogo parakompaktan podskup u prostoru (X, τ^*). Tada je $\overline{V}_{\tau^*}$ α-blizu strogo parakompaktan podskup u prostoru (X,τ). Pošto je $\overline{V}_{\tau} \subset \overline{V}_{\tau^*}$, sledi da je

V_τ α-blizu strogo parakompaktan podskup u prostoru (X,τ) pa je (X,τ) lokalno blizu strogo parakompaktan prostor.

Svaki blizu strogo parakompaktan prostor je ujedno i lokalno blizu strogo parakompaktan. Obrnuto nije uvek tačno. Za ilustraciju može nam poslužiti prostor Ω_0. Prostor Ω_0 jr Hausdorff-ov lokalno kompaktan, pa odatle sledi da je Ω_0 regularan prostor. Pošto je svaki lokalno kompaktan prostor ujedno i lokalno blizu strogo parakompaktan, sledi da je Ω_0 lokalno blizu strogo parakompaktan prostor. Ω_0 nije parakompaktan prostor, pa sledi da Ω_0 nije ni blizu parakompaktan odnosno da Ω_0 nije blizu strogo parakompaktan prostor.

Svaki lokalno blizu kompaktan prostor je ujedno i lokalno blizu strogo parakompaktan. Obrnuto nije uvek tačno. Na primer , neka je X proizvoljan regularan strogo parakompaktan prostor, koji nije lokalno kompaktan. Tada je X lokalno blizu strogo parakompaktan, koji nije lokalno blizu kompaktan (Svaki regularan lokalno blizu kompaktan prostor je i lokalno kompaktan prostor).

Važi da je i svaki lokalno strogo parakompaktan prostor ujedno i lokalno blizu strogo parakompaktan prostor. Da obrnuto nije uvek tačno pokazuje prostor X koji je definisan u primeru 4.1.1.
Prostor X iz tog primera je Hausdorff-ov koji nije regularan u tački a, pa prema tome X nije regularan prostor, odnosno sledi da X nije lokalno strogo parakompaktan prostor (Svaki lokalno strogo parakompaktan prostor je regularan). Ali X je lokalno blizu strogo parakompaktan (blizu kompaktan) prostor. To ćemo sada pokazati. Prostor X je blizu strogo parakompaktan, pa pošto je svaki blizu strogo parakompaktan prostor ujedno i lokalno blizu strogo parakompaktan, sledi da je X lokalno blizu strogo parakompaktan prostor.

Teorema 4.2.3. Proizvod lokalno blizu strogo parakompaktnog i lokalno blizu kompaktnog prostora je lokalno blizu strogo parakompaktan prostor.

Dokaz. Neka je (x,y) proizvoljna tačka prostora $X \times Y$, gde je X lokalno blizu strogo parakompaktan a Y lokalno blizu kompaktan prostor. Pošto je X lokalno blizu strogo parakompaktan prostor, sledi da postoji regularno otvorena okolina A tačke x tako da je $\overline{A}$ α-blizu strogo parakompaktan podskup prostora X. Na sličan način, pošto je Y lokalno blizu kompaktan prostor, sledi da postoji regularno otvorena okolina B tačke y tako da je $\overline{B}$ α-blizu kompaktan podskup prostora Y. Tada je A x B regularno otvorena okolina tačke (x,y) prostora X x Y tako da je $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$ α-blizu strogo parakompaktan podskup prostora X x Y, pa sledi da je X x Y lokalno blizu strogo parakompaktan prostor.

Teorema 4.2.4. Ako je f biunivoko skoro neprekidno i skoro otvoreno preslikavanje lokalno blizu strogo parakompaktnog prostora X na prostor Y, tada je i Y lokalno blizu strogo parakompaktan prostor.

Dokaz. Za svaku tačku $y \in Y$ postoji tačka $x \in X$ tako da je $f(x) = y$. Pošto je X lokalno blizu strogo parakompaktan prostor, sledi da postoji regularno otvorena okolina M tačke x tako da je $\overline{M}$ α-blizu strogo parakompaktan podskup prostora X. Pošto je f skoro otvoreno preslikavanje sledi da je f(M) otvoren podskup prostora Y koji sadrži tačku y, tako da je $\overline{f(M)} \subset f(\overline{M})$ (f je skoro zatvoreno preslikavanje pa je $f(\overline{M})$ zatvoren skup u prostoru Y). Pošto je $f(\overline{M})$ α-blizu strogo parakompaktan podskup prostora Y, sledi da je i $\overline{f(M)}$ α-blizu strogo parakompaktan podskup u prostoru Y ($\overline{f(M)}$ je regularno zatvoren podskup α-blizu strogo parakompaktnog skupa $f(\overline{M})$). Odatle sledi da je Y lokalno blizu strogo parakompaktan prostor.

Teorema 4.2.5. Neka je f skoro zatvoreno, skoro neprekidno i skoro otvoreno preslikavanje lokalno blizu strogo parakompaktnog prostora X na prostor Y tako da je $f^{-1}(G)$ α-blizu kompaktan podskup u prostoru X za svaki otvoren podskup $G \subset Y$, tada je Y lokalno blizu strogo parakompaktan prostor.

Dokaz. Dokaz je sličan dokazu za blizu strogo parakompaktne prostore i dokazu predhodne teoreme.

Teorema 4.2.6. Neka je E proizvoljan α-blizu strogo parakompaktan podskup u lokalno blizu strogo parakompaktnom i skoro regularnom prostoru X. Neka je $\{F_j : j \in J\}$ proizvoljna zvezdasto konačna porodica zatvorenih α-blizu strogo parakompaktnih podskupova tako da je $E \subset \cup\{F_j^o : j \in J\}$. Tada postoji zvezdasto konačna porodica $\{A_j : j \in J\}$ ztvorenih α-blizu strogo parakompaktnih skupova tako da je $E \subset \cup\{A_j^o : j \in J\}$ i $A_j \subset F_j^o$ za svako $j \in J$.

Dokaz. Za svaku tačku $x \in E$, sledi da $x \in F_j^o$ za neko $j \in J$. Postoji regularno otvorena okolina V_x tačke x tako da je $\overline{V}_x \subset F_j^o$ α-blizu strogo parakompaktan podskup u prostoru X. Pošto je

$$\mathcal{V} = \{V_x : x \in E\}$$

regularno otvoren prekrivač podskupa E, sledi da se u $\mathcal{V}$ može upisati X-regularno otvoren prekrivač $\mathcal{W}$ podskupa E. Porodica

$$\{\overline{W} : W \in \mathcal{W}\}$$

je regularno zatvoren lokalno konačan prekrivač podskupa E i za svako W $\overline{W}$ je α-blizu strogo parakompaktan regularno zatvoren podskup skupa $\overline{V}_x$ za neko $x \in E$. Svaki skup $\overline{W}$ je sadržan u F_j^o za neko F_j. Neka je

$$A_j = \cup\{\overline{W} : \overline{W} \subset F_j^o\} .$$

Svaki A_j je zatvoren i pošto je $\cup\{W : \overline{W} \subset F_j^o\} \subset A_j^o$, sledi da je

$$E \subset \cup\{A_j^o : j \in J\} .$$

Znači, $\{A_j : j \in J\}$ je zvezdasto konačna porodica, sa osobinom da je svaki $A_j \subset F_j^o$, odakle sledi da je A_j α-blizu strogo parakompaktan podskup prostora X.

4.3. m- STROGO PARAKOMPAKTNI I SKORO STROGO PARAKOMPAKTNI PROSTORI

U ovom paragrafu ispitivaćemo još dva uopštenja strogo parakompaktnih prostora tj. ispitivaćemo m-strogo parakompaktne i skoro strogo parakompaktne prostore.

Definicija 4.3.1. Za prostor X kažemo da je *m-strogo parakompaktan (blizu m-strogo parakompaktan)* ako i samo ako se u svaki otvoren (regularno otvoren) prekrivač $\mathcal{U}$, k $\mathcal{U} \leq m$, može upisati otvoren zvezdasto konačan prekrivač.

Definicija 4.3.2. Za prostor X kažemo da je *skoro strogo parakompaktan (skoro m-strogo parakompaktan)* ako i samo ako za svaki otvoren prekrivač $\mathcal{U}$ (k $\mathcal{U} \leq$ m) prostora X postoji zvezdasto konačna porodica $\mathcal{V}$ otvorenih podskupova prostora X koje je upisana u $\mathcal{U}$ i da je

$$X = \cup\{\overline{V} : V \in \mathcal{V}\}.$$

Na osnovu teoreme 4.1.5. sledi da je svaki blizu strogo parakompaktan prostor ujedno i skoro strogo parakompaktan, dok obrnuto nije uvek tačno što pokazuje sledeći primer.

Primer 4.3.1. Neka je

$$X = \{a, b, a_{ij}, b_{ij}, c_i : i,j \in N\} .$$

Neka su tačke a_{ij} , b_{ij} *izolovane. Neka je*

$$\{U^k(c_i) : k \in N\}$$

bazni sistem okolina tačke c_i, *gde je*

$$U^k(c_i) = \{c_i , a_{ij}, b_{ij} : j \geq k\} .$$

Neka su respektivno $\{V^k(a): k \in N\}$, $\{V^k(b) : k \in N\}$ *bazni sistemi okolina tačaka a i b, gde je*

$$V^k(a) = \{a, a_{ij} : i \geq k , j \in N\}$$

i

$$V^k(b) = \{b,\ b_{ij} : i \geq k,\ j \in N\} \quad .$$

Sistem okolina $V(x)$ proizvoljne tačke x skupa X zadovoljava uslove za okoline, pa se može definisati jedinstvena topološka struktura τ za koju je $V(x)$ skup svih okolina date tačke x.

Neka je X prostor koji je snabdeven tako definisanom toplogijom τ . X nije blizu strogo parakompaktan prostor, jer se u regularno otvoren prekrivač

$$\{\ V^n(a),\ V^m(b),\ U^i(c_i)\ ,\ i \in N\ ,\ \{a_{ij}\}\ ,\ \{b_{ij}\}\ \}$$

nemože upisati otvoren zvezdasto konačan prekrivač.

Ali X je skoro strogo parakompaktan. Neka je

$$A = \{A_i :\ i \in I\}$$

proizvoljan otvoren prekrivač datog prostora X. Neka su $A_{i(a)}$, $A_{i(b)}$, $A_{i(a_{ij})}$, $A_{i(b_{ij})}$, $A_{i(i)}$, takvi članovi prekrivača A sa osobinom

$$a \in A_{i(a)},\ b \in A_{i(b)},\ a_{ij} \in A_{i(a_{ij})},\ b_{ij} \in A_{i(b_{ij})},\ c_i \in A_{i(i)}.$$

Pošto su $V^n(a)$ i $V^n(b)$ bazni sistemi okolina tačaka a i b to sledi da postoje prirodni brojevi n_1 i n_2 tako da je

$$V^{n_1}(a) \subset A_{i(a)}\ ,\ V^{n_2}(b) \subset A_{i(b)}.$$

Neka je $n = \max(\ n_1,\ n_2)$. Posmatrajmo otvorenu porodicu

$$A^* = \{A_{i(a)},\ A_{i(b)},\ A_{i(i)},\ A_{i(a_{ij})},\ A_{i(b_{ij})},\ i = 1,2,\ldots,\ n-1 \text{ i}$$

$$\{a_{ij}\}\ ,\ \{b_{ij}\}\ \not\subset\ A_{i(a)},\ A_{i(b)},\ \text{ili } A_{i(i)} \text{ za } i = 1,2,\ldots,\ n-1\ \}\ .$$

A^* je otvorena zvezdasto konačna porodica koja je upisana u dati otvoren prekrivač A sa osobinom da porodica koju čine zatvorenja članova porodice A^* prepokriva dati prostor X, pa sledi da je X skoro strogo parakompaktan prostor.

Svaki skoro strogo parakompaktan prostor je ujedno i skoro parakompaktan.

Teorema 4.3.1. Lokalno kompaktan i skoro parakompaktan prostor je skoro strogo parakompaktan.

Dokaz. Uzmimo proizvoljan prekrivač A prostora X. Za svaku tačku $x \in X$ izaberimo otvorenu okolinu O_x tako da je zatvorenje te okoline kompaktan podskup prostora X. Po uslovu teoreme, u presek $A \wedge A^*$ prekrivača A i $A^* = \{O_x : x \in X\}$ možemo upisati otvorenu lokalno konačnu porodicu A'' tako da je $\cup\{\overline{A''} : A'' \in A''\} = X$. A'' je očigledno upisana u prekrivač A i u prekrivač A^*. Pošto je porodica A'' upisana u A^* sledi da zatvorenja članova porodice A'' jesu kompaktni skupovi, pa sledi da je porodica A'' zvezdasto konačna.

Dakle, sledi da se u otvoren prekrivač A može upisati otvorena zvezdasto konačna porodica A'' sa osobinom $\cup\{\overline{A''} : A'' \in A''\} = X$, pa sledi da je dati prostor X skoro strogo parakompaktan.

Teorema 4.3.2. Ako je X skoro strogo parakompaktan prostor a Y skoro kompaktan prostor, tada je $X \times Y$ skoro strogo parakompaktan prostor.

Dokaz. Neka je U proizvoljan otvoren prekrivač prostora $X \times Y$. Tada za svaku tačku $z = (x,y) \in X \times Y$ postoje otvoreni skupovi V_z i W_z u X i Y respektivno, tako da važi $(x,y) \in V_z \times W_z \subset U$ za neko $U \in U$. Za svako $x \in X$ proizvod $\{x\} \times Y$ označimo sa I^x. Porodica

$$\{W_z : z \in I^x\}$$

je otvoren prekrivač skoro kompaktnog prostora Y. Odatle sledi da postoji konačan podskup J^x skupa I^x tako da je $\{\overline{W}_z : z \in J^x\}$ prekrivač prostora Y. Neka je

$$V_x = \bigcap\{V_z : z \in J^x\} .$$

Tada je V_x otvoren skup koji sadrži tačku x. Tada je

$$V = \{V_x : x \in X\}$$

otvoren prekrivač skoro strogo parakompaktnog prostora X. Odatle sledi da postoji zvezdasto konačna porodica H otvorenih podskupova prostora X koja je upisana u V i $\cup\{\overline{H} : H \in H\} = X$. Pošto je porodica H upisana u V, sledi da za svako $H \in \mathcal{H}$ postoji tačka $x_H \in X$ tako da je $H \subset V_{x_H}$. Tada je

$$A = \{H \times W_z : H \in \mathcal{H} , z \in J^{x_H}\}$$

porodica otvorenih podskupova prostora $X \times Y$ koja je zvezdasto konačna i upisana u dati otvoren prekrivač $\mathcal{U}$, tako da je

$$\{\overline{H \times W_z} : H \in \mathcal{H} , z \in J^{x_H}\} = \{\overline{H} \times \overline{W}_z : H \in \mathcal{H} , z \in J^{x_H}\}$$

prekrivač prostora $X \times Y$, pa odatle sledi da je $X \times Y$ skoro strogo parakompaktan prostor.

Posledica 4.3.1. Proizvod skoro strogo parakompaktnog i proizvoljne porodice skoro kompaktnih prostora je skoro strogo parakomapktan prostor.

Dokaz. Proizvod proizvoljne porodice skoro kompaktnih prostora je skoro kompaktan prostor.

Posledica 4.3.2. Proizvod skoro strogo parakompaktanog prostora i proizvoljne porodice kompaktnih prostora je skoro strogo parakompaktan prostor.

Dokaz. Svaki kompaktan prostor je skoro kompaktan.

Posledica 4.3.3. Proizvod strogo parakompaktnog i proizvoljne porodice kompaktnih prostora je skoro strogo parakompaktan prostor.

Dokaz. Svaki strogo parakompaktan prostor je skoro strogo parakompaktan.

Teorema 4.3.3. Ako je f zatvoreno, neprekidno preslikavanje prostora X na prostor Y tako da je $f^{-1}(y)$ kompaktan podskup za svaku tačku $y \in Y$, tada ako je Y skoro strogo parakompaktan prostor i X je skoro strogo parakompaktan prostor.

Dokaz. Za svaki podskup A prostora Y, neka je

$$A_0 = \cup \{f^{-1}(y) : f^{-1}(y) \subset A\} .$$

Neka je

$$\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$$

proizvoljan otvoren prekrivač datog prostora X. Neka je $\mathcal{I}$ porodica svih konačnih podskupova skupa I. Tada za svako $y \in Y$, $f^{-1}(y) \subset \cup\{U_i : i \in J\}$, za neko $J \in \mathcal{I}$. Neka je $U_j = \cup\{U_i : i \in J\}$. Pošto je U_j otvoren skup, a preslikavanje f zatvoreno sledi da je skup $f(X \setminus U_j)$ zatvoren. Neka je

$$H = Y \setminus f(X \setminus U_j).$$

Tada je H otvoren skup, pa je i $f^{-1}(H)$ otvoren. Mi ćemo pokazati da je $(U_j)_o = f^{-1}(H)$. $y \in H$ povlači da $y \notin f(X \setminus U_j)$, pa sledi da je $f^{-1}(y) \subset U_j$. $y \in Y \setminus H$ povlači da $y \in f(X \setminus U_j)$ odnosno $f^{-1}(y) \not\subset U_j$. Odatle sledi da je $f^{-1}(y) \subset U_j$ ako i samo ako $y \in H$, pa sledi da je

$$f^{-1}(H) = \cup\{f^{-1}(y) : f^{-1}(y) \subset U_j\} = (U_j)_o .$$

Neka je $V_j = f(U_j)$. Tada je V_j otvoren skup koji sadrži y, pa sledi da je

$$\mathcal{V} = \{V_j : J \in \mathcal{I}\}$$

otvoren prekrivač prostora Y. Pošto je Y skoro strogo parakompaktan prostor, sledi da postoji otvorena zvezdasto konačna porodica $\mathcal{W}$ podskupova prostora Y tako da je $\mathcal{W}$ upisana u $\mathcal{V}$ i da je $\{\overline{W} : W \in \mathcal{W}\}$ prekrivač prostora Y. Za svako $W \in \mathcal{W}$ postoji $J_W \in \mathcal{I}$ tako da je $W \subset V_{J_W}$. Tada je $f^{-1}(W) \subset (U_{J_W})_o$. Neka je

$$\mathcal{D} = \{f^{-1}(W) \cap U_i : i \in J_W, W \in \mathcal{W}\} .$$

Tada je $\mathcal{D}$ otvorena zvezdasto konačna porodica podskupova prostora X koje je upisana u otvoren prekrivač $\mathcal{U}$. Pokazaćemo da zatvorenja članova porodice $\mathcal{D}$ obrazuju prekrivač prostora X.

Pošto je f zatvoreno preslikavanje, sledi $\overline{f(f^{-1}(W))} \supset \overline{W}$, pošto je $\overline{f(f^{-1}(W))}$, zatvoren skup koji sadrži W. Odatle sledi $\cup f(\overline{f^{-1}(W)}) \supset \cup \overline{W} \supset Y$, odnosno $f(\cup \overline{f^{-1}(W)}) = Y$.

Pošto je $\{f^{-1}(W) : W \in \mathcal{W}\}$ zvezdasto konačna porodica, sledi da je $\overline{\cup f^{-1}(W)} = \cup \overline{f^{-1}(W)}$, pa je $f(\overline{\cup f^{-1}(W)}) = Y$, pa je $\overline{\cup f^{-1}(W)} = X$, pa je

$\cup \overline{f^{-1}(W)} = X$. Pošto je

$$\cup\{\overline{f^{-1}(W) \cap U_i} : i \in J_W, W \in \mathcal{W}\} = \overline{\cup\{f^{-1}(W) \cap U_i\}} = \overline{\cup f^{-1}(W)}$$

sledi tvrdjenje teoreme, to jest sledi da je prostor X skoro strogo parakompaktan.

Definicija 4.3.3. Podskup A je *α-m strogo parakompaktan (α-blizu m strogo parakompaktan)* ako i samo ako se u svaki X-otvoren (regularno otvoren) prekrivač $\mathcal{U}$, k $\mathcal{U} \leq$ m podskupa A može upisati X-otvoren zvezdasto konačan prekrivač datog podskupa A.

Definicija 4.3.4. Podskup A je *α-skoro strogo parakompaktan (α-m skoro strogo parakompaktan)* ako i samo ako se u svaki otvoren prekrivač $\mathcal{U}$ (k $\mathcal{U} \leq$m) podskupa A može upisati X-otvorena zvezdasto konačna porodica $\mathcal{V}$ sa osobinom da je $A = \cup\{\overline{V} : V \in \mathcal{V}\}$.

Podskup A je m strogo parakompaktan (blizu m strogo parakompaktan) ako i samo ako je A kao podprostor prostora X m strogo parakompaktan (blizu m strogo parakompaktan).

Podskup A je skoro strogo parakompaktan (skoro m strogo parakompaktan) ako i samo ako je A kao podprostor prostora X skoro strogo parakompaktan (skoro m strogo parakomapaktan).

Teorema 4.3.4. Neka je X regularan prostor. Zatvorenje svakog α-skoro strogo parakompaktnog podskupa prostora X je α-skoro strogo parakompaktan skup.

Dokaz. Neka je

$$\{U_i : i \in I\}$$

proizvoljan otvoren prekrivač podskupa $\overline{A}$, gde je A α-skoro strogo parakompaktan podskup prostora X. Tada za svaku tačku $x \in A$, $x \in U_i$ za neko $i \in I$, pa sledi da postoji otvoren skup V_x sa osobinom $x \in V_x \subset \overline{V}_x \subset U_i$. Tada je

$$\mathcal{V} = \{V_x : x \in A\}$$

X-otvoren prekrivač podskupa A, pa sledi da postoji otvorena zvezdasto konačna porodica $\mathcal{W}$ koja je upisana u prekrivač $\mathcal{V}$ sa osobinom $A \subset \cup\{\overline{W} : W \in \mathcal{W}\}$. Tada je

$$\overline{A} \subset \overline{\cup\{\overline{W} : W \in \mathcal{W}\}} = \cup\{\overline{W} : W \in \mathcal{W}\} \subset \cup\{U_i : i \in I\}$$

pa je dati skup $\bar{A}$ α-skoro strogo parakompaktan podskup prostora X.

Teorema 4.3.5. Neka je

$$\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$$

disjunktan otvoren prekrivač prostora X. Tada je X m strogo parakompaktan prostor ako i samo ako je svaki U_i *, m strogo parakompaktan .*

Dokaz. Ako je X m strogo parakompaktan prostor lako sledi da je svaki U_i m strogo parakompaktan podskup prostora X.

Obrnuto, neka je

$$\mathcal{A} = \{A_j : j \in J\}$$

$k_{\mathcal{A}} \leqslant m$, proizvoljan otvoren prekrivač prostora X. Tada za svako $i \in I$

$$\mathcal{A}_i = \{A_j \cap U_i : j \in J\}$$

je otvoren prekrivač podskupa U_i . Pošto je U_i m strogo parakompaktan podskup sledi da postoji zvezdasto konačna (u U_i a odatle i u X) porodica otvorenih skupova $\{V_k \cap U_i : k \in K^i\}$ koja je upisana u $\{A_j \cap U_i : j \in J\}$ i prekriva U_i i svaki V_k je otvoren podskup prostora X.

Posmatrajmo porodicu

$$\mathcal{V} = \{V_k \cap U_i : k \in K^i, i \in I\} \quad .$$

Pošto je $\{U_i : i \in I\}$ otvorena disjunktna porodica , koja prepokriva prostor X sledi da je $\mathcal{V}$ otvoren zvezdasto konačan prekrivač prostora X koji je upisan u dati otvoren prekrivač $\mathcal{A}$, pa sledi da je prostor X m strogo parakompaktan.

Teorema 4.3.6. Neka je

$$\{U_i : i \in I\}$$

disjunktan regularno otvoren prekrivač prostora X. Tada je X blizu m strogo parakompaktan prostor ako i samo ako je svaki U_i *blizu m strogo parakompaktan podskup prostora X.*

Dokaz. Dokaz je sličan dokazu predhodne teoreme.

Teorema 4.3.7. Ako je svaki otvoren podskup prostora X m strogo parakompa-

ktan tada je svaki podskup prostora X m-strogo parakompaktan.

Dokaz. Neka je A proizvoljan podskup prostora X. Neka je

$$\{A \cap U_i : i \in I\}$$

otvoren prekrivač datog podskupa A, kardinalnog broja $\leq m$, gde je svaki U_i otvoren podskup u prostoru X. Neka je $U = \cup\{U_i : i \in I\}$ .Tada je $\{U_i : i \in I\}$ otvoren prekrivač otvorenog podskupa U kardinalnog broja $\leq m$. Pošto je U m strogo parakompaktan, prema predpostavci sledi da postoji zvezdasto konačna (u U) porodica $\{V_j : j \in J\}$ otvorenih podskupova (u U odatle i u X) koja prepokriva U i upisana je u $\{U_i : i \in I\}$. Tada je

$$\{A \cap V_j : j \in J\}$$

zvezdasto konačan otvoren prekrivač podskupa A koji je upisan u otvoren prekrivač $\{A \cap U_i : i \in I\}$, pa sledi da je dati podskup A m strogo parakompaktan.

Teorema 4.3.8. Dovoljan uslov da bi prostor X bio m strogo parakompaktan jeste da za svaki otvoren prekrivač $\mathcal{W}$ prostora X kardinalnog broja $\leq m$ postoji konačno $\mathcal{W}$ preslikavanje prostora X u neki m strogo parakompaktan prostor Y.

Dokaz. Neka je

$$\mathcal{W} = \{W_i : i \in I\}$$

otvoren prekrivač prostora X kardinalnog broja $\leq m$. Sa $\mathcal{I}$ označimo porodicu svih konačnih podskupova J skupa I. Kardinalni broj porodice $\mathcal{I}$ je $\leq m$. Tada postoji konačno $\mathcal{W}$ preslikavanje f prostora X na neki m strogo parakompaktan prostor Y, gde je f neprekidno preslikavanje prostora X na prostor Y tako da postoji otvoren prekrivač $\mathcal{U} = \{U\}$ prostora Y tako da je svaki član porodice $\{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}\}$ sadržan u uniji od konačno mnogo članova porodice $\mathcal{W}$. Neka je $\mathcal{I}$ dobro uredjen i za svako $U \in \mathcal{U}$ neka je J_U prvi član $J \in \mathcal{I}$ tako da je $f^{-1}(U) \subset \cup\{W_i : i \in J\}$. Za svako $J \in \mathcal{I}$ neka je V_J unija svih članova U^s za koje je $J_U = J$. Tada je $f^{-1}(V_J) \subset \cup\{W_i : i \in J\}$ i $\{V_J : J \in \mathcal{I}\}$ je otvoren prekrivač prostora Y kardinalnog broja $\leq m$. Pošto je Y m strogo parakompaktan sledi da postoji zvezdasto konačan otvoren prekrivač

$$\{A_j : j \in J\}$$

prostora Y koji je upisan u otvoren prekrivač $\{V_j : j \in J\}$. Neka je

$$\mathcal{W}^* = \{f^{-1}(A_j) \cap W_i : i \in J, J \in I\} .$$

Tada je $\mathcal{W}^*$ otvoren zvezdasto konačan prekrivač datog prostora X koji je upisan u otvoren prekrivač $\mathcal{W}$, pa sledi da je dati prostor X m strogo parakompaktan.

Teorema 4.3.9. Prostor X je skoro m strogo parakompaktan ako i samo ako je svaki pravi regularno zatvoren skup prostora X skoro m strogo parakompaktan.

Dokaz. Neka je X skoro m strogo parakompaktan prostor. Neka je A pravi regularno zatvoren podskup datog prostora X. Tada je $A = \overline{G}$, gde je G otvoren podskup prostora X. Sada,neka je

$$\{\overline{G} \cap S_i : i \in I\}$$

proizvoljan otvoren prekrivač podskupa $\overline{G}$ kardinalnog broja $\leqslant$ m. Tada je

$$\{S_i : i \in I\} \ \cup \{X \setminus A\}$$

otvoren prekrivač prostora X kardinalnog broja $\leqslant$m.Pošto je X skoro m strogo parakompaktan, sledi da postoji zvezdasto konačna poroddica $\{R_j : j \in J\}$otvorenih podskupova prostora X koja je upisana u $\{S_i : i \in I\} \cup \{X \setminus A\}$ i takva je da porodica$\{\overline{R}_j : j \in J\}$ prekriva dati prostor X. Pošto je $\overline{X \setminus A} \cap G = \emptyset$, sledi da je $G \subset \cup \{\overline{R}_j : j \in J\}$ gde za porodicu $\{R_j : j \in J\}$možemo predpostaviti daje upisana u $\{S_i : i \in I\}$. Pošto je G otvoren skup sledi

$$\overline{G \cap \cup\{R_j : j \in J\}} = \overline{G \cap \overline{\cup\{R_j : j \in J\}}} .$$

Takodje pošto je $\{R_j : j \in J\}$ zvezdasto konačna porodica sledi da je

$$\overline{\cup\{R_j : j \in J\}} = \cup\{\overline{R}_j : j \in J\}.$$

Tada je

$$A = \overline{G \cap (\cup\{R_j : j \in J\})} = \cup\{\overline{G \cap R_j} : j \in J\} \subset \overline{\cup\{\overline{G} \cap R_j : j \in J\}}$$

Odatle sledi da je $\{A\cap R_j : j\in J\}$ zvezdasto konačna porodica otvorenih podskupova u A koje je upisana u $\{A\cap S_i : i\in I\}$ sa osobinom da zatvorenja te porodice (u A) prekriva A. Odatle sledi da je $A=\overline{G}$ skoro m strogo parakompaktan podskup u prostoru X.

Predpostavimo sada da je svaki pravi regularno zatvoren podskup prostora X skoro m strogo parakompaktan. Neka je

$$\{U_i : i\in I\}$$

proizvoljan otvoren prekrivač datog prostora X, kardinalnog broja $\leq m$. Ako je $\overline{U}_i \neq X$ tada je $\overline{X\setminus \overline{U}_i}$ pravi regularno zatvoren podskup prostora X. Sada je

$$\{\overline{(X\setminus\overline{U}_i)}\cap U_j : j\in I,\ j\neq i\}$$

otvoren prekrivač podskupa $\overline{X\setminus\overline{U}_i}$ kardinalnog broja $\leq m$. Prema predpostavci $\overline{X\setminus\overline{U}_i}$ je skoro m strogo parakompaktan podskup. Odatle sledi da postoji zvezdasto konačna (u $\overline{X\setminus\overline{U}_i}$ a odatle i u X) porodica otvorenih podskupova

$$\{V_k : k\in K\}$$

podskupa $\overline{X\setminus\overline{U}_i}$ koja je upisana u $\{\overline{(X\setminus\overline{U}_i)}\cap U_j : j\in I,\ j\neq i\}$, zatvorenja članova te porodice obrazuju prekrivač podskupa $\overline{X\setminus\overline{U}_i}$. Tada za svako k postoji otvoren podskup V_k^* prostora X tako da je $V_k = V_k^*\cap \overline{X\setminus\overline{U}_i}$. Posmatrajmo porodicu

$$\{V_k^* \cap \overline{(X\setminus\overline{U}_i)} : k\in K\}.$$

To je zvazdasto konačna porodica otvorenih podskupova prostora X koja je upisana u otvoren prekrivač $\{U_i : i\in I\}$, čija zatvorenja (u $\overline{X\setminus\overline{U}_i}$ a odatle i u X) čine porodicu koja prekriva $\overline{X\setminus\overline{U}_i}$, pošto je

$$\overline{V_k^*\cap(X\setminus\overline{U}_i)} = \overline{V_k^*\cap\overline{X\setminus U_i}}$$

i svaki V_k^* je otvoren skup.

Tada je

$$\{U_i\}\cup\{V_k^*\cap\overline{(X\setminus\overline{U}_i)} : k\in K\}$$

zvezdasto konačna porodica otvorenih podskupova prostora X sa osobinom da za-

zatvorenja članova te porodice čine prekrivač koji prekriva prostor X. Odatle sledi da je dati prostor X skoro m strogo parakompaktan.

Teorema4.3.10. Neka je

$$\{U_i : i \in I\}$$

disjunktan otvoren prekrivač prostora X. Tada je X skoro m strogo parakompaktan prostor ako i samo ako je svaki U_i skoro m strogo parakompaktan podskup datog prostora X.

Dokaz. Neka je X skoro m strogo parakompaktan prostor. Pošto je svaki $\overline{U}_i = U_i$, regularno zatvoren podskup prostora X, pa prema predhodnoj teoremi sledi da je svaki U_i skoro m strogo parakompaktan podskup.

Neka je

$$A=\{A_j : j \in J\}$$

proizvoljan otvoren prekrivač datog prostora X, kardinalnog broja $\leqslant$m.Tada za svako $i \in I$

$$\{A_j \cap U_i : j \in J\}$$

je otvoren prekrivač podskupa U_i, kardinalnog broja $\leqslant$m. Pošto je U_i skoro m strogo parakompaktan podskup, to sledi da postoji zvezdasto konačna porodica

$$\{V_k \cap U_i : k \in K^i\}$$

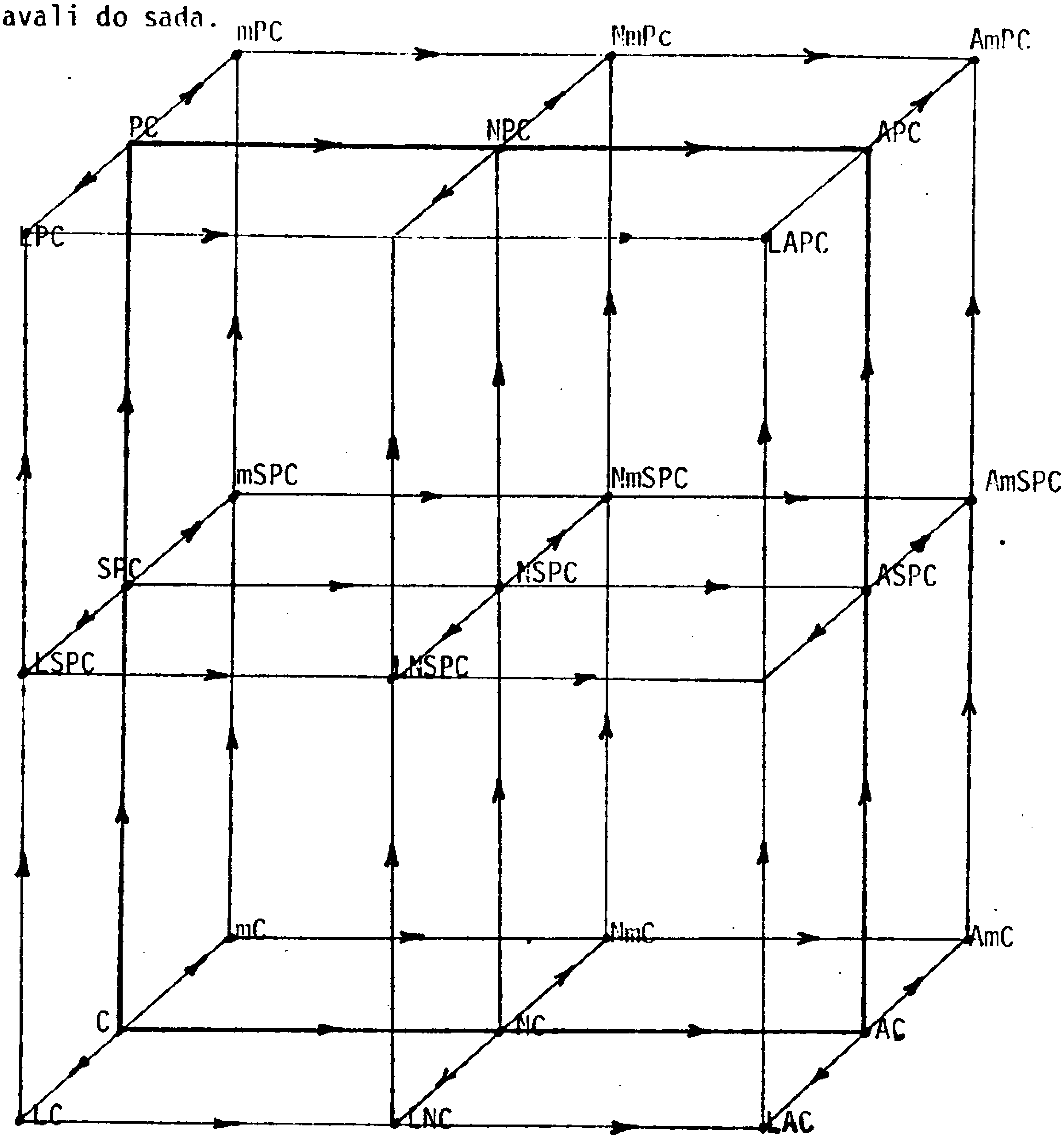
otvorenih podskupova skupa U_i koja je upisana u $\{A_j \cap U_i : j \in J\}$ i čija zatvorenja (u U_i a odatle i X) čine porodicu koja prekriva U_i.

Tada je

$$\{V_k \cap U_i : k \in K^i, i \in I\}$$

zvezdasto konačna porodica otvorenih podskupova prostora X koja je upisana u otvoren prekrivač $\{A_j : j \in J\}$ sa osobinom da porodica koju čine zatvorenja članova te porodica prekriva prostor X, pošto je $\{U_i : i \in I\}$ disjunktan otvoren prekrivač datog prostora X. Odatle sledi da je dati prostor X skoro m strogo parakompaktan.

Sledeća šema pokazuje odnos izmedju raznih vrsta kompaktnosti, koje smo proučavali do sada.



gde je C-kompaktan, SPC-strogo parakompaktan, PC-parakompaktan, L-lokalno, N-blizu, A-skoro.

G L A V A   V

(X,p) - P R O S T O R I

1.1. (X,p) P R O S T O R I   I   P A R A K O M P A K T N O S T

Definicija 5.1.1. Sa (X,p) označićemo prostor X koji ima osobinu p:
U svaki otvoren prekrivač datog prostora X može se upisati regularno otvoren prekrivač.

Svaki parakompaktan prostor je (X,p) prostor. Obrnuto nije tačno, što pokazuje sledeći primer.

Primer 5.1.1. Neka je

$$X = \{a, b, c, d\}$$

i

$$\tau := \{\emptyset, X, \{d\}, \{b,d\}, \{c,d\}, \{b,c,d\}\} .$$

Tada je (X,τ) skoro regularan prostor sa osobinom p, ali ne i regularan, pa sledi da nije parakompaktan prostor.

Teorema 5.1.1. Ako je (X,p) skoro regularan prostor za njega važe sledeće ekvivalencije:

(a) (X,p) je blizu parakompaktan prostor ;

(b) U svaki otvoren prekrivač prostora (X,p) može se upisati regularno otvoren lokalno konačan prekrivač ;

(c) (X,p) je skoro parakompaktan prostor ;

(d) U svaki otvoren prekrivač prostora (X,p) može se upisati lokalno konačna porodica otvorenih skupova sa osobinom da porodica koju čine zatvorenja članova te lokalno konačne porodice prekriva prostor (X,p) ;

(e) U svaki otvoren prekrivač prostora (X,p) može se upisati lokalno konačan prekrivač ;

(f) U svaki otvoren prekrivač prostora (X,p) može se upisati zatvoren lokalno konačan prekrivač ;

(g) U svaki otvoren prekrivač prostora (X,p) može se upisati regularno zatvoren lokalno konačan prekrivač ;

(h) Svaki otvoren prekrivač prostora (X,p) je uniforman ;

(i) U svaki otvoren prekrivač prostora (X,p) može se upisati σ-diskretan otvoren prekrivač ;

(j) U svaki otvoren prekrivač prostora (X,p) može se upisati σ-lokalno konačan otvoren prekrivač .

Dokaz. Plan dokaza: (a)→(b)→(c)→(d)→(e)→(f)→(g)→(h)→(i)→(j)→(e)→(a) .

(a)→(b)

Neka je $\mathcal{U}^*$ otvoren prekrivač prostora (X,p) .U otvoren prekrivač $\mathcal{U}^*$ može se upisati regularno otvoren prekrivač $\mathcal{U}$. Pošto je (X,p) blizu parakompaktan prostor sledi da se u dati regularno otvoren prekrivač $\mathcal{U}$ može upisati lokalno konačan otvoren prekrivač $\mathcal{V}$. Posmatrajmo porodicu

$$\mathcal{W} = \{\alpha(V) : V \in \mathcal{V}\} \quad .$$

$\mathcal{W}$ je lokalno konačan regularno otvoren prekrivač prostora (X,p). Treba da pokažemo da je $\mathcal{W}$ upisana u dati regularno otvoren prekrivač $\mathcal{U}$. Uzmimo proizvoljan elemenat $\alpha(V) \in \mathcal{W}$. Tada na osnovu definicije prekrivača $\mathcal{W}$, $V \in \mathcal{V}$. Pošto je $\mathcal{V}$ upisana u $\mathcal{U}$, postoji neki elemenat $U \in \mathcal{U}$ tako da je $V \sqsubset U$. Odatle sledi da je $\alpha(V) \sqsubset \alpha(U) = U$. Znači $\alpha(V) \sqsubset U$, a odatle sledi da je $\mathcal{W}$ upisana u porodicu $\mathcal{U}$, odnosno da je porodica $\mathcal{W}$ upisana u porodicu $\mathcal{U}^*$.

Znači, $\mathcal{W}$ je lokalno konačan regularno otvoren prekrivač prostora (X,p) koji je upisan u dati otvoren prekrivač $\mathcal{U}^*$, što je i trebalo dokazati.

(b)→(c)

Direktno sledi iz teoreme 1.1. (Singal,M.K., [57], str.3)

(c)→(d)

Direktno sledi iz definicije skoro parakompaktnih prostora.

(d)→(e)

Neka je $\mathcal{A}^*$ proizvoljan otvoren prekrivač datog prostora (X,p). U otvoren prekrivač $\mathcal{A}^*$ možemo upisati regualrno otvoren prekrivač $\mathcal{A}$. Neka je $x \in X$ proizvoljna tačka. Tada postoji $A \in \mathcal{A}$ tako da $x \in A$. Pošto je (X,p) skoro regularan prostor, sledi da postoji regularno otvoren skup A^* sa osobinom

$$x \in A^* \subset \overline{A^*} \subset A.$$

Posmatrajmo regularno otvoren prekrivač $\mathcal{B}^* = \{A^*\}$, koji je upisan u $\mathcal{A}$.
Na osnovu predpostavke (d) sledi da postoji lokalno konačna porodica $\mathcal{A}''$ otvorenih skupova koja je upisana u $\mathcal{B}^*$ sa osobinom da porodica $\mathcal{A}' = \{\overline{A''}\}$ prepokriva dati prostor (X,p).

Porodica $\mathcal{A}' = \{\overline{A''}\}$ je lokalno konačna, upisana u $\mathcal{A}$, odnosno u $\mathcal{A}^*$ i prepokriva dati prostor (X,p), što je i trebalo dokazati.

(e)→(f)

Neka je $\mathcal{A}^*$ proizvoljan otvoren prekrivač prostora (X,p). U otvoren prekrivač $\mathcal{A}^*$ možemo upisati regularno otvoren prekrivač $\mathcal{A}$. Tada za svako $x \in X$ postoji $A_x \in \mathcal{A}$ tako da $x \in A_x$. Pošto je (X,p) skoro regularan prostor sledi da postoji regularno otvoren skup A^*_x sa osobinom

$$x \in A^*_x \subset \overline{A^*_x} \subset A_x .$$

Posmatrajmo regularno otvoren prekrivač

$$\mathcal{A}'' = \{A^*_x : x \in X\}$$

Prema predpostavci (e) u njega se može upisati lokalno konačan prekrivač $\mathcal{A}' = \{A'\}$. Posmatrajmo porodicu $\mathcal{B} = \{\overline{A'}\}$.

To je lokalno konačna zatvorena porodica koja je upisana u $\mathcal{A}$, odnosno $\mathcal{A}^*$ i prepokriva (X,p), što je i trebalo dokazati.

(f)→(g)

Neka je

$$\mathcal{V}=\{V_k : k \in K\}$$

proizvoljan otvoren prekrivač prostora (X,p). U otvoren prekrivač $\mathcal{V}$ možemo upisati regularno otvoren prekrivač $\mathcal{U}=\{U_i : i \in I\}$. Prema predpostavci (f) postoji lokalno konačan zatvoren prekrivač $\{F_j : j \in J\}$ koji je upisan u $\{U_i : i \in I\}$. Prema lemi 1.1. (Singal,M.K., [57], str. 5) , porodica $\{\beta(F_j) : j \in J\}$ je lokalno konačan regularno zatvoren prekrivač prostora (X,p). $\beta(F_j) \subset F_j \subset U_i$ za neko $i \in I$.

Dakle, $\{\beta(F_j) : j \in J\}$ je regularno zatvoren lokalno konačan prekrivač prostora (X,p) koji je upisan u $\mathcal{U}$, odnosno $\mathcal{V}$, što je i trebalo dokazati.

(g)→(h)

Neka je $\mathcal{U}^*$ proizvoljan otvoren prekrivač datog prostora (X,p). U otvoren prekrivač $\mathcal{U}^*$ možemo upisati regularno otvoren prekrivač $\mathcal{U}$. Tada se, na osnovu predpostavke (g), u njega može upisati lokalno konačan regularno zatvoren prekrivač $\mathcal{A}$. Za svako $A \in \mathcal{A}$ izaberimo takav elemenat $U_A \in \mathcal{U}$ tako da je $A \subset U_A$. Neka je

$$V_A = (U_A \times U_A) \cup ((X\setminus A) \times (X\setminus A)) .$$

V_A je otvorena okolina dijagonale Δ proizvoda $X \times X$ pri čemu sledi, ako $x \in A$ $V_A[x] = U_A$. Neka je

$$V = \bigcap\{V_A : A \in \mathcal{A}\}.$$

Tada za svako x je $V[x] \subset V_A[x] \subset U_A$ odakle sledi da je porodica svih skupova $\{V|x| : x \in X\}$ prekrivač datog prostora (X,p). Treba pokazati da je V okolina dijagonale Δ proizvoda $X \times X$. Pošto je $\mathcal{A}$ lokalno konačna porodica, sledi da za svako (x,x) postoji okolina W tačke x koje se seče sa najviše konačno mnogo elemenata datog prekrivača $\mathcal{A}$. Neka su $A_1, A_2, \dots, A_m$ ti elementi lokalno konačne porodice $\mathcal{A}$ koji imaju neprazan presek sa W. Neka je

$$U_x^* = ((W \times W) \cap V_{A_1}) \cap ((W \times W) \cap V_{A_2}) \cap \dots \cap ((W \times W) \cap V_{A_m}) \ .$$

U_x^* je okolina tačke (x,x). Ako je $W \cap A = \emptyset$, tada je $W \subset X \setminus A$, odnosno $W \times W \subset V_A$. Odatle sledi da je $U_x^* \subset V$. Znači za svako $(x,x) \in \Delta$ postoji okolina $U_x^* \subset V$, pa je V okolina dijagonale Δ proizvoda $X \times X$.

Na osnovu ovoga sledi da je V okolina dijagonale Δ proizvoda $X \times X$ sa osobinom da porodica $\{V[x] : x \in X\}$ prepokriva dati prostor (X,p), odnosno da je $\{V|x| : x \in X\}$ upisana u dati regularno otvoren prekrivač $\mathcal{U}$, odnosno $\mathcal{U}^*$, pa je dati prekrivač $\mathcal{U}^*$ uniforman, što je i trebalo dokazati.

Pre nego što predjemo na dokaz (e)$\to$(a) daćemo dokaze dveju lema i nekoliko uvodnih napomena.

Za podskup U prostora $X \times X$ i proizvoljnu tačku $x \in X$, sa $U[x]$ označićemo skup svih tačaka $y \in X$ sa osobinom da je $(x,y) \in U$, to jest

$$U[x] = \{y : (x,y) \in U\} \ .$$

Ako je $A \subset X$, tada je

$$U[A] = \{y : (x,y) \in U \text{ za neko } x \in A\}$$

to jest

$$U[A] = \cup \{U[x] : x \in A\} \ .$$

Sa U^{-1} označićemo skup svih tačaka (x,y) takvih da $(x,y) \in U$, to jest

$$U^{-1} = \{(x,y) : (y,x) \in U\} \ .$$

Reći ćemo da je U simetričan skup ako i samo ako je $U = U^{-1}$.
Skup $U \cap U^{-1}$ je uvek simetričan.

Sa $U \bullet V$, gde su U i V podskupovi proizvoda $X \times X$ označićemo skup svih parova (x,z) takvih da postoji $y \in X$ tako da je istovremeno zadovoljen uslov

$$(x,y) \in V \text{ i } (y,z) \in U \ .$$

Drugim rečima $(x,z) \in U \ V$ ako i samo ako

$$(x,z) \in V^{-1}[y] \times U[y] \text{ za neko } y \in X.$$

Sledi da je

$$U \circ V = \cup \{V^{-1}[y] \times U[y] : y \in X\} .$$

Specijalno, ako je V simetričan skup tada je

$$V \circ V = \cup \{V[y] \times V[y] : y \in X\} .$$

Za svaki podskup $A \subset X$ važi da je

$$U \circ V[A] = U[V[A]] .$$

Lema 5.1.1. Neka je (X,p) takav prostor da je svaki regularno otvoren prekrivač uniforman. Tada za svaku okolinu U dijagonale Δ proizvoda $X \times X$ postoji simetrična okolina V dijagonale Δ sa osobinom $V \circ V \subset U$.

Dokaz. Pošto je U okolina dijagonale Δ proizvoda $X \times X$, za svako $x \in X$ postoji otvoren skup $W(x)$, koji sadrži tačku x, tako da je $W(x) \times W(x) \subset U$.

Posmatrajmo otvoren prekrivač

$$\mathcal{W} = \{W(x) : x \in X\} .$$

Prema definiciji prostora (X,p) u otvoren prekrivač $\mathcal{W}$ može se upisati regularno otvoren prekrivač $\mathcal{W}^*$. Za svako $W^* \in \mathcal{W}^*$ važi $W^* \times W^* \subset U$, pošto je porodica $\mathcal{W}^*$ upisana u porodicu $\mathcal{W}$. Pošto je svaki regularno otvoren prekrivač uniforman sledi da postoji otvorena okolina R dijagonale Δ proizvoda $X \times X$ tako da je $R[x]$, za svako $x \in X$, podskup nekog elementa iz $\mathcal{W}^*$. Tada očigledno važi da je $R[x] \times R[x] \subset U$. Neka je $V = R \cap R^{-1}$. Tada je V simetrična okolina dijagonale Δ proizvoda $X \times X$ sa osobinom da je $V[x] \times V[x] \subset U$ za svako $x \in X$.

Pošto je $V \circ V = \{V[x] \times V[x] : x \in X\} \subset U$, sledi relacija $V \circ V \subset U$, što je i trebalo dokazati.

Lema 5.1.2. Neka je (X,p) takav prostor da je svaki regularno otvoren prekrivač uniforman i neka je $\mathcal{A}$ lokalno konačna (diskretna) porodica podskupova prostora (X,p). Tada postoji okolina V dijagonale Δ proizvoda $X \times X$ tako da je porodica svih skupova $V[A]$, gde $A \in \mathcal{A}$, lokalno konačna (diskretna).

Dokaz. Neka je $\mathcal{A}$ lokalno konačna porodica podskupova prostora (X,p). Tada postoji otvoren prekrivač $\mathcal{U}$ prostora (X,p) tako da se svaki član $U \in \mathcal{U}$ seče sa najviše konačno mnogo članova porodice $\mathcal{A}$.

U otvoren prekrivač $\mathcal{U}$ možemo upisati regularno otvoren prekrivač $\mathcal{U}^*$. Sledi da se svaki član $U^* \in \mathcal{U}^*$ seče sa najviše konačno mnogo članova porodice $\mathcal{A}$. Pošto je na osnovu predpostavke svaki regularno otvoren prekrivač uniforman, to postoji okolina O dijagonale Δ proizvoda $X \times X$ tako da je $O[x]$ podskup nekog člana porodice $\mathcal{U}^*$, za svako $x \in X$. Na osnovu predhodne leme sledi da postoji simetrična okolina V dijagonale Δ proizvoda $X \times X$ tako da je $V \circ V \subset O$. Ako je $V \circ V[x] \cap A = \emptyset$, gde $A \in \mathcal{A}$, tada je $V[x] \cap V[A] = \emptyset$, jer ako $y \in V[x] \cap V[A]$, tada postoji $z \in A$, tako da je istovremeno $(x,y) \in V$ i $(z,y) \in V$, odnosno $(x,y) \in V$ i $(y,z) \in V^{-1} = V$. Odatle sledi da $(x,z) \in V \circ V$ tj. $z \in V \circ V[x]$, odnosno da je $V \circ V[x] \cap A \neq \emptyset$, što je u suprotnosti sa $V \circ V[x] \cap A = \emptyset$.

Na sličan način može se dokazati da iz $V[x] \cap V[A] = \emptyset$, sledi $V \circ V[x] \cap A = \emptyset$. Znači, ako je $V[x] \cap V[A] \neq \emptyset$ tada je i $V \circ V[x] \cap A \neq \emptyset$. Odatle sledi da je porodica skupova $\{V[A] : A \in \mathcal{A}\}$ lokalno konačna.

Na sličan način može se dokazati da ako je $\mathcal{A}$ diskretna porodica podskupova prostora (X,p) onda je $\{V[A] : A \in \mathcal{A}\}$, diskretna porodica. Time je ova lema dokazana.

Ako je V otvoren podskup prostora $X \times X$, tada je i $V[x]$ otvoren skup u prostoru X za svako $x \in X$. Odatle sledi da je i

$$V[A] = \cup\{ V[x] : x \in A\}$$

otvoren skup u prostoru (X,p).

Znači, prema predhodnoj lemi, sledi da se svaka lokalno konačna (odnosno diskretna) porodica može "zameniti " sa lokalno konačnom (odnosno diskretnom) porodicom otvorenih podskupova prostora (X,p).

(e)→(a)

Neka je $\mathcal{U}$ proizvoljan regularno otvoren prekrivač prostora (X,p). Prema predpostavci (e) u regularno otvoren prekrivač $\mathcal{U}$ možemo upisati lokalno konačan prekrivač $\mathcal{A}$. Ranije smo pokazali (e)→(f)→(g)→(h), tj. da je regularno otvoren prekrivač $\mathcal{U}$ uniforman. Na osnovu predhodne leme sledi da postoji otvorena okolina V dijagonale Δ proizvoda X x X tako da je $\{V[A] : A \in \mathcal{A}\}$ otvorena lokalno konačna porodica koja prepokriva dati prostora (X,p). Za svako $A \in \mathcal{A}$ izaberimo neki elemenat $U_A \in \mathcal{U}$ tako da je $A \subset U_A$. Označimo sa

$$W_A = U_A \cap V[A] .$$

Posmatrajmo otvoren prekrivač

$$\mathcal{W} = \{W_A : A \in \mathcal{A}\} .$$

$\mathcal{W}$ je lokalno konačan otvoren prekrivač datog prostora (X,p) koji je upisan u regularno otvoren prekrivač $\mathcal{U}$, odakle sledi da je dati prostor (X,p) blizu parakompaktan, što je i trebalo dokazati.

(h)→(i)

Neka je $\mathcal{U}$ proizvoljan otvoren prekrivač prostora (X,p). Dovoljno je pokazati da se u $\mathcal{U}$ može upisati σ-diskretan prekrivač, jer na osnovu leme 5.1.2. σ -diskretan prekrivač može se"proširiti" na otvoren σ-diskretan prekrivač koji je upisan u dati regularno otvoren prekrivač $\mathcal{U}$.

Na osnovu predpostavke (h), sledi da postoji otvorena okolina V dijagonale Δ proizvoda X x X tako da je porodica $\{V[x] : x \in X\}$ upisana u $\mathcal{U}$. Neka je $V_0 = V$ i induktivno za svako $n \in N$ izaberimo takvu simetričnu okolinu V_n dijagonale Δ proizvoda X x X tako da je $V_n \circ V_n \subset V_{n-1}$. Mogućnost ovakvog izbora daje nam lema 5.1.1.

Neka je $U_1 = V_1$, i induktivno za svako $n \in N$ neka je

$$U_{n+1} = V_{n+1} \circ U_n .$$

$U_n \subset V_0$ za svako $n \in N$. Znači, za svako $x \in X$ i svako $n \in N$, porodica

$\{U_n[x] : x \in X\}$ je upisana u otvoren prekrivač $\mathcal{U}$. Dobro uredimo skup X pomoću relacije $<$. Neka je za svako $x \in X$ i svako $n \in N$,

$$U_n^*(x) = U_n[x] \setminus \cup \{U_{n+1}[y] : y<x\} .$$

Za svako $n \in N$ neka je

$$\mathcal{U}_n = \{U_n^*(x) : x \in X\} .$$

Pokazaćemo da je $\mathcal{U}_n$ diskretna porodica. Iz definicije skupa $U_n^*(x)$ sledi da je

$$U_n^*(x) \cap V_{n+1}[U_n^*(y)] = \emptyset \text{ za } x \neq y .$$

Uzmimo proizvoljnu tačku $z \in X$ i otvorenu okolinu $V_{n+1}[z]$. Ako je $V_{n+1}[z] \cap U_n^*(y) = \emptyset$ za svako $y \in X$, sledi da je $V_{n+1}[z]$ okolina tačke z koja ne seče ni jedan elemenat porodice $\mathcal{U}_n$, odakle bi sledilo da je $\mathcal{U}_n$ diskretna porodica. Zato predpostavimo da je $V_{n+1}[z] \cap U_n^*(y) \neq \emptyset$ za neko $y \in X$. Odatle sledi da $z \in V_{n+1}[U_n^*(y)]$. Tada je $V_{n+1}[U_n^*(y)]$ okolina tačke z koja ne seče ni jedan elemenat $U_n^*(x)$ za $x \neq y$. Odatle sledi da je $\mathcal{U}_n$ diskretna porodica podskupova prostora (X,p). Tada je

$$\{ \mathcal{U}_n : n \in N \}$$

σ-diskretna porodica koja je upisana u otvoren prekrivač $\mathcal{U}$. Treba još pokazati da ta porodica prepokriva dati prostor.

Uzmimo proizvoljnu tačku $x \in X$. Postoji $n' \in N$ tako da $x \in U_{n'}[y]$, $y \in X$. Posmatrajmo sve tačke y_i za koje $x \in U_{n'}[y_i]$. Pošto je X dobro uredjen skup relacijom $<$, postoji najmanji elemenat y_i' tako da $x \in U_{n'}[y_i']$ a da $x \notin U_{n'}[y]$ ni za kakvo $y < y_i'$.

$$U_{n'}^*(y_i') = U_{n'}[y_i'] \setminus \cup \{U_{n'+1}[y] : y < y_i'\} .$$

Pošto je $U_{n'+1}[y] \subset U_{n'}[y]$ sledi da $x \notin U_{n'+1}[y]$ ni za kakvo $y < y_i'$. Na osnovu ovoga možemo zaključiti da $x \in U_{n'}^*(y_i')$.

Znači, porodica $\{\mathcal{U}_n : n \in N\}$ je σ-diskretna porodica upisana u dati otvoren prekrivač $\mathcal{U}$, i prepokriva dati prostor (X,p), što je i trebalo dokazati.

(i)$\to$(j)

Sledi direktno, jer je svaki otvoren σ-diskretan prekrivač ujedno otvoren σ-lokalno konačan prekrivač.

(j)$\to$(e)

Neka je $\mathcal{U}$ proizvoljan otvoren prekrivač prostora (X,p). Na osnovu predpostavke (j) sledi da postoji otvoren σ-lokalno konačan prekrivač $\mathcal{V} = \{\mathcal{V}_n : n\in N\}$ koji je upisan u otvoren prekrivač $\mathcal{U}$, gde je svaki $\mathcal{V}_n$ lokalno konačna porodica otvorenih skupova. Za svako $V \in \mathcal{V}$ neka je n najmanji prirodan broj takav da $V \in \mathcal{V}_n$. Neka je

$$M_V = V \setminus \cup \{W : W \in \mathcal{V}_m , m < n\} .$$

Za svako $V \in \mathcal{V}$, $M_V \subset V$, odatle sledi da je porodica

$$\mathcal{A} = \{M_V : V \in \mathcal{V}\}$$

upisana u $\mathcal{V}$, odnosno u $\mathcal{U}$. Neka $x \in X$. Tada postoji najmanji prirodan broj n tako da postoji $V_x \in \mathcal{V}_n$ tako da $x \in V_x$. Odatle sledi da $x \in M_{V_x}$. Znači $\mathcal{A}$ je prekrivač datog prostora (X,p) koji je upisan u otvoren prekrivač $\mathcal{U}$, sa osobinom $V_x \cap M_V = \emptyset$ za svako M_V takvo da $V \in \mathcal{V}_m$ za $m>n$. Pošto je svaki $\mathcal{V}_m$ lokalno konačna porodica, sledi da za svako $m \leq n$ postoji otvoren skup G_m tako da $x \in G_m$ i da G_m seče najviše konačno mnogo elemenata porodica $\mathcal{V}_m$. Neka je

$$G = V_x \cap G_1 \cap G_2 \cap \ldots \cap G_n .$$

G je otvorena okolina tačke x koje seče najviše konačno mnogo elemenata porodice $\mathcal{A}$.

Znači, $\mathcal{A}$ je lokalno konačna porodica podskupova prostora X koje je upisana u otvoren prekrivač $\mathcal{U}$ i koja prepokriva dati prostor (X,p), što je i trebalo dokazati.

Posledica 5.1.1. Svaki skoro regularan blizu parakompaktan prostor (X,p) je normalan.

Dokaz. Neka je (X,p) skoro regularan blizu parakompaktan prostor. Uzmimo dva zatvorena disjunktna skupa A i B. Porodica $\mathcal{A}=\{A,B\}$ je diskretna. Pošto je prema predhodnoj teoremi svaki otvoren prekrivač uniforman, to postoji otvorena okolina V dijagonale Δ proizvoda $X \times X$ tako da je $\{V[A], V[B]\}$ otvorena diskretna porodica.

Znači, $V[A]$ i $V[B]$ su otvoreni disjunktni skupovi sa osobinom da je $A \subset V[A]$ i $B \subset V[B]$, pa sledi da je dati prostor (X,p) normalan, što je i trebalo dokazati.

Teorema 5.1.2. Skoro regularan prostor (X,p) je blizu parakompaktan ako i samo ako se u svaki njegov otvoren prekrivač može zvezdasto upisati otvoren prekrivač.

Dokaz. Potreban uslov. Neka je

$$\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$$

proizvoljan otvoren prekrivač datog prostora (X,p). Pošto je svaki otvoren prekrivač uniforman, sledi da postoji otvorena okolina U dijagonale Δ proizvoda $X \times X$ tako da je za svako $x \in X$, $U[x]$ podskup nekog elementa iz porodice $\mathcal{A}$. Prema lemi 5.1.1. sledi da postoji simetrična okolina V dijagonale Δ proizvoda $X \times X$ tako da je $V \circ V \subset U$. Neka je

$$\mathcal{V} = \{V[x] : x \in X\} .$$

Pokazaćemo da je $\mathcal{V}$ zvezdasto upisana porodica u prekrivač $\mathcal{A}$.

Neka je

$$V^* = \cup\{V[z] : x \in V[z],\ z \in X\} .$$

$V^* = St(x, \mathcal{V})$ je zvezda koja sadrži tačku x. Ako $y \in V^*$, sledi da postoji $z \in X$ tako da $y \in V[z]$, odakle sledi da $(z,y) \in V$. $x \in V[z]$ odakle sledi da $(z,x) \in V$. S obzirom da je V simetrična okolina dijagonale Δ proizvoda $X \times X$, sledi da $(x,z) \in V$. Iz $(x,z) \in V$ i $(z,y) \in V$, sledi da $(x,y) \in V \circ V \subset U$ tj. $(x,y) \in U$, odnosno $y \in U[x]$. Postoji A_i tako da je $U[x] \subset A_i$, odakle sledi, pošto je

$$V^* = St(x, \mathcal{V}) \subset U[x] \subset A_i .$$

Znači $V^* = St(x, \mathcal{V})$ je otvoren skup takav da je $V^* \subset A_i$ za neko $i \in I$, pa sledi da je $\mathcal{V}$ zvezdasto upisan u otvoren prekrivač $\mathcal{A}$, što je i trebalo dokazati.

Dovoljan uslov. Neka je

$$\mathcal{A}=\{A_i : i \in I\}$$

proizvoljan otvoren prekrivač prostora (X,p). Prema predpostavci postoji otvoren prekrivač $\mathcal{B}= \{B_j, j \in J\}$ tako da je $\mathcal{B}$ zvezdasto upisan u $\mathcal{A}$. Neka je

$$V = U\{B_j \times B_j : j \in J\}$$

otvorena okolina dijagonale Δ proizvoda $X \times X$.

Pokazaćemo da za svako $x \in X$ je $V[x] \subset A_i$ za neko $i \in I$. Iz $y \in V[x]$ sledi da $(x,y) \in V$, odnosno da postoji $j \in J$ tako da $(x,y) \in B_j \times B_j$. Odatle sledi da je $x \in B_j$ i $y \in B_j$. Odatle sledi da $y \in St(x, \mathcal{B})$, odnosno $V[x] \subset St(x, \mathcal{B})$. Pošto je $\mathcal{B}$ zvezdasto upisan u $\mathcal{A}$, to postoji i, $i \in I$ tako da $St(x, \mathcal{B}) \subset A_i$, odnosno $V[x] \subset A_i$.

Znači, svaki otvoren prekrivač datog skoro regularnog prostora (X,p) je uniforman pa sledi na osnovu predhodne teoreme da je dati prostor (X,p) blizu parakompaktan.

Definicija 5.1.2. (Singal,M.K., [42] , str. 125) Neka je $\mathcal{W}$ proizvoljan regularno otvoren prekrivač prostora X.Skoro neprekidno preslikavanje f prostora X na prostor Y je *skoro* $\mathcal{W}$ *preslikavanje* ako i samo ako postoji regularno otvoren prekrivač $\mathcal{A}$ prostora Y tako da je $\{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{A}\}$otvoren prekrivač prostora X, koji je upisan u $\mathcal{W}$.

Definicija 5.1.3. (Singal,M.K.,[42], str. 125) Skoro neprekridno preslikavanje f prostora X u prostor Y je *skoro konačno* $\mathcal{W}$ *preslikavanje* ako i samo ako postoji regularno otvoren prekrivač $\mathcal{A}$ prostora Y tako da je svaki član porodice $\{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{A}\}$ sadržan u uniji od konačno mnogo članova $\mathcal{W}$.

Teorema 5.1.3. Dovoljan uslov da bi X bio blizu m parakompaktan prostor je da za svaki regularno otvoren prekrivač $\mathcal{W}$, $k\,\mathcal{W} \leq m$, postoji skoro konačno skoro otvoreno $\mathcal{W}$ preslikavanje prostora X na neki blizu parakompaktan prostor (Y,p).

Dokaz. Neka je

$$\mathcal{W} = \{W_i : i \in I\}$$

proizvoljan regularno otvoren prekrivač prostora X, $k\,\mathcal{W} \leq m$. Sa $\mathcal{I}$ označimo porodicu svih konačnih podskupova J skupa I. Kardinalni broj skupa $\mathcal{I}$ je $\leq$ m. Tada postoji skoro konačno $\mathcal{W}$ preslikavanje f prostora X na neki blizu parakompaktan prostor (Y,p). f je skoro neprekidno preslikavanje prostora X na prostor (Y,p), pa sledi da postoji regularno otvoren prekrivač $\mathcal{U} = \{U\}$ prostora (Y,p) tako da je svako član porodice $\{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}\}$ sadržan u uniji od konačno mnogo članova porodice $\mathcal{W}$. Neka je $\mathcal{I}$ dobro uredjen i za svako $U \in \mathcal{U}$ neka je J_U prvi član $J \in \mathcal{I}$ tako da je $f^{-1}(U) \subset \cup \{W_i : i \in J\}$. Za proizvoljno $J \in \mathcal{I}$ neka je V_J unija svih članova U^s za koje je $J_U = J$. Tada je $f^{-1}(V_J) \subset \cup \{W_i : i \in J\}$ i $\{V_J : J \in \mathcal{I}\}$ je otvoren prekrivač prostora Y kardinalnog broja $\leq$ m. U otvoren prekrivač $\{V_J : J \in \mathcal{I}\}$ može se upisati regularno otvoren prekrivač $\{V_J^* : J \in \mathcal{I}\}$. Pošto je Y blizu parakompaktan prostor sledi da postoji regularno otvoren lokalno konačan prekrivač $\{A_J : J \in \mathcal{I}\}$ koji je upisan u $\{V_J^* : J \in \mathcal{I}\}$. Neka je

$$\mathcal{W}^* = \{f^{-1}(A_J) \cap W_i : i \in J\ ,\ J \in \mathcal{I}\}.$$

Tada je $\mathcal{W}^*$ lokalno konačan otvoren prekrivač prostora X koji je upisan u regularno otvoren prekrivač $\mathcal{W}$. Odatle sledi da je X blizu m parakompaktan prostor.

Teorema 5.1.4. Dovoljan uslov da bi X bio blizu m strogo parakompaktan prostor je da svaki regularno otvoren prekrivač $\mathcal{W}$ prostora X kardinalnog broja $\leq m$ postoji skoro konačno, skoro otvoreno $\mathcal{W}$ preslikavanje prostora X na neki blizu strogo parakompaktan prostor (Y,p).

Dokaz. Dokaz je sličan dokazu predhodne teoreme.

Teorema 5.1.5. Svaki skoro regularan prostor (X,p) sa osobinom da se u svaki regularno otvoren prekrivač može upisati otvoren zvezdasto prebrojiv prekrivač je normalan.

Dokaz. Neka su data dva proizvoljna disjunktna skupa F_0 i F_1 prostora (X,p).

$$(X\setminus F_0) \cup (X\setminus F_1)$$

je otvoren prekrivač prostora (X,p). U njega možemo upisati regularno otvoren prekrivač $A=\{A_i : i\in I\}$. Neka je F_0^* skup svih tačaka x takvih da postoji $A_{i'}\in A$ sa osobinom $A_{i'}\cap F_0 \neq \emptyset$. Očigledno je $F_0 \subset F_0^*$. Neka je $F_1^* = X\setminus F_0^*$. Očigledno je $F_1 \subset F_1^* \subset X\setminus F_0$. Neka $x\in F_0^*$. Postoji $i^*\in I$ tako da $x\in A_{i^*}$. $A_{i^*} \subset X\setminus F_1$, jer je A upisana u prekrivač $(X\setminus F_0) \cup (X\setminus F_1)$. Pošto je A_{i^*} regularno otvoren skup, a prostor (X,p) skoro regularan tada postoji regularno otvoren skup O_x tako da je

$$x\in O_x \subset \overline{O}_x \subset A_{i^*} \subset X\setminus F_1 \text{ , } \overline{O}_x \subset X\setminus F_1 .$$

Isto tako za svaku tačku $x\in F_1^*$ može se zaključiti da postoji regularno otvorena okolina O_x tačke x tako da je $\overline{O}_x \subset X\setminus F_0$.

Posmatrajmo tako odabran regularno otvoren prekrivač

$$\{O_x : x\in X\}$$

prostora (X,p). Prema predpostavci u njega se može upisati otvoren zvezdasto prebrojiv prekrivač B . Neka su B_j komponente prekrivača B a H_j nosioci tih komponenti. Skupovi H_j su dva po dva disjunktna i otvoreni i $\cup H_j = X$. Znači, svaki H_j je istovremeno zatvoren i otvoren podskup prostora X, pa sledi da su

$$F_{j_0} = H_j \cap F_0 \text{ i } F_{j_1} = H_j \cap F_1$$

zatvoreni disjunktni podskupovi prostora X. Za svako j porodica B_j javlja se kao najviše prebrojiv otvoren prekrivač podprostora H_j. Posmatrajmo dve podporodice komponenti B_j: podporodicu B_{j_0} koje se satoji iz skupova $G^1_{j_i}$ koji se seku sa F_{j_0} i podporodicu B_{j_1} sastavljenu iz skupova $G^2_{j_i}$ koji se seku sa

F_{j_1} . Na osnovu specijalnog izbora okolina O_x i toga da je prekrivač $\mathcal{B}$ upisan u $\{O_x\}$ sledi relacija $\overline{G^1_{j_i}} \subset H_j \setminus F_{j_1}$ za svako $G^1_{j_i} \in \mathcal{B}_{j_0}$.

Analogno $\overline{G^2_{j_i}} \subset H_j \setminus F_{j_0}$ za svako $G^2_{j_i} \in \mathcal{B}_{j_1}$. Odatle sledi da porodice $\mathcal{B}_{j_0}$ i $\mathcal{B}_{j_1}$ nemaju zajedničkih elemenata. Neka je

$$U^1_{j_k} = G^1_{j_k} \setminus \cup \{\overline{G^2_{j_i}} : i \leq k\} \text{ i } U^2_{j_k} = G^2_{j_k} \setminus \cup \{\overline{G^1_{j_i}} : i \leq k\} .$$

Odatle sledi da je $F_{j_0} \subset U_{j_0} = \bigcup_k U^1_{j_k}$, $F_{j_1} \subset U_{j_1} = \bigcup_k U^2_{j_k}$ i da je $U_{j_0} \cap U_{j_1} = \emptyset$.

Pošto su U_{j_0} i U_{j_1} otvoreni disjunktni podskupovi podprostora H_j a skupovi H_j su disjunktni otvoreni skupovi prostora X, to sledi da su

$$U_0 = \bigcup_j U_{j_0} \text{ i } U_1 = \bigcup_j U_{j_1}$$

otvoreni disjunktni skupovi prostora X.

Prema tome $F_0 \subset U_0$, $F_1 \subset U_1$, $U_0 \cap U_1 = \emptyset$, što je i trebalo dokazati.

Teorema 5.1.6. U svaki regularno otvoren prekrivač skoro regularnog prostora (X,p) sa osobinom da se u svaki regularno otvoren prekrivač može upisati otvoren zvezdasto prebrojiv prekrivač , može se upisati otvoren zvezdasto prebrojiv prekrivač kod koga svaki član ima oblik F_σ .

Dokaz. Neka je $\mathcal{U}$ proizvoljan regularno otvoren prekrivač prostora (X,p). Pošto je (X,p) skoro regularan, a prema predpostavci teoreme, u regularno otvoren prekrivač $\mathcal{U}$ može se upisati takav otvoren zvezdasto prebrojiv prekrivač $\mathcal{G}$ sa osobinom da zatvorenje svakog člana tog prekrivača $\mathcal{G}$ jeste podskup nekog člana prekrivača $\mathcal{U}$. Posmatrajmo komponente $\mathcal{V}_i = \{G_{i_j}\}$ prekrivača i nosioce tih komponenti H_i. Pošto je svaki H_i zatvoren skup sledi da za svako i i j , $\overline{G}_{i_j} \subset H_i$. Na osnovu izbora prekrivača $\mathcal{G}$ koji je upisan u regularno otvoren prekrivač $\mathcal{U}$ sledi da postoji $O_{k(i_j)}$ tako da je $\overline{G}_{i_j} \subset O_{k(i_j)}$. Pošto je na osnovu teoreme 5.1.5. prostor (X,p) je normalan, to postoji otvoren skup $G^*_{i_j}$ oblika F_σ takav da je

$$\overline{G}_{i_j} \subset G^*_{i_j} \subset H_i \cap O_{k(i_j)} .$$

Posmatrajmo prekrivač

$$\mathcal{V}^* = \{G^*_{i_j}\} .$$

Njegov svaki elemenat ima oblik F_σ i on je upisan u $\mathcal{U}$. Treba još pokazati da je $\mathcal{V}^*$ zvezdasto prebrojiv prekrivač. Za svako i označimo sa $\mathcal{V}^*_i$ porodicu skupova $G^*_{i_j}$. Nosilac svake takve podporodice $\mathcal{V}^*_i$ prekrivača $\mathcal{V}^*$ je baš skup H_i. Pošto je svaka porodica $\mathcal{V}^*_i$ najviše prebrojiva i pošto su skupovi H_i dva po dva disjunktni, sledi da prekrivač $\mathcal{V}^* = \bigcup_i \mathcal{V}^*_i$ jeste otvoren zvezdasto prebrojiv što je i trebalo dokazati.

L I T E R A T U R A

[1] Aleksandrov,P.S., Urysohn,P.S., *Memoire sur les espaces topologiques compacts,* Verh.Akad.Wetensch. Amsterdam 14, 1929., 1-96.

[2] Aleksandrov,P.S., *Sur les ensembles de la premiere classe et les ensembles abstraits,* C.R. Acad. Paris 178, 1924., 185-187.

[3] Aleksandrov,P.S., Pasinnkov,B.A., *Vvdenie v teoriju razmernosti,* Nauka,Moskva, 1973.

[4] Alster,K., *Subparacompactness in Cartesian products of generalized ordered topological spaces,* Fund.Math. 87, 1975., 7-28.

[5] Arens, R., Dugunchi,J., *Remark on the concept of compactness,* Portugalie Math., 9, 1950., 141-143.

[6] Arya.S.P., *A note on nearly paracompact spaces,* Matematički vesnik 8 (23), 1971., 113-115.

[7] Arya, S.P. and Asha Mathur, *On* E_m *spaces,* Glasnik matematički 8(28) - No 1 - 1973., 139-143.

[8] Bonne, R.J., *Some characterizations of paracompactness in k-spaces,* Fund. Math., 72, 1971., 145-153.

[9] Borel,E., *Sur l' aproximation des nombers par des nombers rationales,* C.R. Acad. Paris, 136, 1903., 1054-1055.

[10] Bourbaki, N., *Obščaja topologija,* Nauka, Moskva, 1968.

[11] Boyte, J.M. and E.P., Lane, *An insertion theorem for real functions,* Fund. Math., 87, 1975., 29-30.

[12] Carnahan,D., *Locally nearly compact spaces,* Boll.Un.Mat.Ital., (4), 6, 1972., 146-153.

[13] Chaber,J., *Metacompactness and the class MOBI,* Fund., Math., 91, 1976, 211-217.

[14] Chevalley, C., Frink, O., *Bicompactness of Cartesian products,* Bull. Amer. Math. Soc. , 47, 1941., 612-614.

[15] Chew, J., *Regularity as relaxation on paracompactness,* The American mathematical monthly, 6 (79), 1972., 630-632.

[16] Curtis, W. D., *Total and absolute paracompactness,* Fund.Math. 77, 1973., 277-283.

[17] Dieudonne, J,, *Une generalisation des espaces compacts,* Journ. de Math. Paris et Appl., 23, 1944., 65-76.

[18] Dowker, C.H., *Mappings theorems for non compact spaces,* Amer. Journ. of Math., 69, 1947., 200-242.

[19] Dowker, C. H., *On countably paracompact spaces,* Canad. Journ. of Math., 3, 1951., 219-224.

[20] Engelking, R. and D., Lutzer, *Paracompactness in ordered spaces,* Fund. Math., 94, 1977., 49-58.

[21] Engelking, R., *Topologia ogolna,* Warszawa, 1976.

[22] Herrington, L. L., *Properties of nearly compact spaces ,* Proc.Amer. Math. Soc., 45 - No 3 - 1974., 431-436.

[23] Hu Sce Tsen, *Osnovi opšte topologije,* Savremena administracija, Beograd, 1973.

[24] Hutton Bruce and Ivan Reilly, *On compactness and finiteness in topological spaces,* Matematički vesnik 13 (28), 1976., 59-61.

[25] Iseki, K., *A note on countably paracompact spaces,* Proc. Japan Acad., 30, 1954., 350-351.

[26] Ishii, T., *Paracompactness of topological completions,* Fund. Math., 92, 1976., 65-77.

[27] Kelley, L.J., *Obščaja topologija,* Nauka, Moskva, 1968.

[28] Kovačević,I., *Almost regularity as a relaxation on nearly paracompactness*, Glasnik matematički (u štampi).

[29] Kovačević, I., *A note on nearly paracompact spaces*, International Symposium in Yugoslavien on Topology and its Applications, Beograd, 1977., (u štampi)

[30] Kovačević,I., *Nekoliko vrsta kompaktnosti*, Magistarski rad, Beograd, 1975.

[31] Kovačević, I., *On nearly strongly paracompact and almost strongly paracompact spaces*, Publ. De L´ Institut Mathematique, 23 (37), 1978., 109-116.

[32] Kovačević,I., *On (X,p) spaces*, Matematički vesnik, (u štampi).

[33] Kurepa,Dj., *Teorija skupova*, Školska knjiga, Zagreb, 1951.

[34] Lefschetz, S., *Algebraic topology*, New York, 1942.

[35] Marin, L.F., *A note on E-compact spaces*, Fund.Math., 76., 1972., 195-206.

[36] Marjanović,M.M., *A pseudocompact space having no dense countably compact subspace*, Glasnik matematički, 6 (26) - No 1 - ,1971., 149-151.

[37] Michael, *A note on paracompact spaces*, Proc.Amer. Math. Soc., 4, 1953., 831-838.

[38] Mrowka, S., *On local topological properties*, Poljska Academia Nauk. Bull., 5, 1957., 951-956.

[39] Nagami, K., *Countable paracompactness of inverse limits and products*, Fund. Math., 73, 1972., 261-270.

[40] Noiri, T., *Almost contiunity and some separation axioms*, Glasnik matematički, 9 (29) - No 1 - 1974., 131-135.

[41] Noiri, T., *A note on semi regularizations*, Glasnik matematički, 10 (30), 1975., 141-143.

[42] Noiri.,T., *A remark on almost continuous mappings*, Proc. Japan Acad., 50, - No 3 - 1974., 205-207.

[43] Noiri,T., *N-closed sets and almost closed mappings*, Glasnik matematički, 10 (30), 1975., 341-345.

[44] Noiri,T., *On weakly continuous mappings*, Proc. Amer. Math. Soc., 46, - No 1 - 1974., 120-124.

[45] Przymusinski, T., *A Lindelöf space X such that* X^2 *is normal but not paracompact*, Fund. Math., 78, 1973., 291-296.

[46] Przymusinski,T., *Normality and paracompactness in subsets of product spaces*, Fund. Math., 91, 1976., 161-165.

[47] Singal, A.R. and S.P. Arya, *A note on* D_1 *spaces*, Glasnik matematički, 10 (30) , 1975., 151-153.

[48] Singal, M.K. and S.P. Arya, *Almost continuous mappings*, Yokohoma Math. J., 16, 1968., 63-73.

[49] Singal,M.K. and S.P. Arya, *A note on the locally finite sum theorem*, Mathematika 19, 1972., 121-127.

[50] Singal,M.K. and Asha Rani Singal, *On almost m-compact spaces*, Ann. Soc. Sci., Bruxelles, 82, III, 1968., 233-242.

[51] Singal,M.K. and S.P. Arya, *On almost normal and almost completely regular spaces*, Glasnik matematički, 5 (25), 1970., 141-152.

[52] Singal, M.K. and S.P. Arya, *On almost regular spaces*, Glasnik matematički, 4(24)- No 1 - 1969., 89-99.

[53] Singal,M.K. and Asha Mathur, *On minimal almost normal spaces*, Glasnik matematički, 10 (30), 1975., 145-149.

[54] Singal,M.K. and S.P. Arya, *On m paracompact spaces*, Math. Ann. 181, 1969., 119-133.

[55] Singal,M.K. and A. Mathur, *On nearly compact spaces*, Boll.Un.Mat. Ital., (4), 2, 1969., 702-710.

[56] Singal,M.K. and A. Mathur, *On nearly compact spaces- II*, Boll.Un. Mat. Ital., (4),9, 1974., 670-678.

[57] Singal,M.K. and S.P. Arya, *On nearly paracompact spaces*, Matematički vesnik, 6(21), 1974., 3-16.

[58] Singal,A.R. and S.P. Arya, *On pairwise almost regular spaces*, Glasnik matematički, 6(26), -No 2 - 1971., 335-343.

[59] Smirnov,Ju.M., *O metrizacii topolodičeskih prostranstv*, Uspehi matem. nauk., 6,6 (46), 1951., 100-111.

[60] Smirnov,Ju.M., *O silno parakompaktnih prostranstvah*, Izv. AN SSSR 20, 2956., 253-274.

[61] Stone,A.H., *Paracompactness and product spaces*, Bull. Amer. Math. Soc., 54, 1948., 977-982.

[62] Tamano,H.A., *A characterizations of paracompactness*, Fund. Math. 72, 1971., 189-201.

[63] Telgarsky, R., *Concering product of paracompact spaces*, Fund. Math. 74, 1972., 153-159.

[64] Telgarsky,R., *C-scattered and paracompact spaces*, Fund. Math.73, 1971., 59-74.

[65] Telgarsky,R., *The space of rationals is not absolutely paracompact*, Fund. Math. 73, 75-78.

[66] Tukey,J.W., *Convergence and uniformity in topology*, Annals of Math. studies, No 2 , Princeton 1940.

[67] Vasudevan, R.and C.K.Goel, *A note on pairwise C- compact bitopological spaces*, Matematički vesnik 1(14) (29), 1977., 179-187.

[68] Vaughan, J.E., *Some properties related to* $|a,b|$ *-compactness,* Fund. Math. 87, 1975., 251-260.

[69] Wine,J.D., *Locally paracompact spaces,* Glasnik matematički 10(30), 1975., 351-357.

I N D E K S   N E K I H   P O J M O V A

strana