Математички факултет
Универзитет у Београду

Мастер рад

тема: НЕМОГУЋНОСТ ПРЕДСТАВЉАЊА НЕКИХ КЛАСА НЕОДРЕЂЕНИХ ИНТЕГРАЛА ЕЛЕМЕНТАРНИМ ФУНКЦИЈАМА

Ментор:
ванр. проф. Драгољуб Кечкић

Студент:
Силвана Спасић 1138/2014

Београд,
2018.

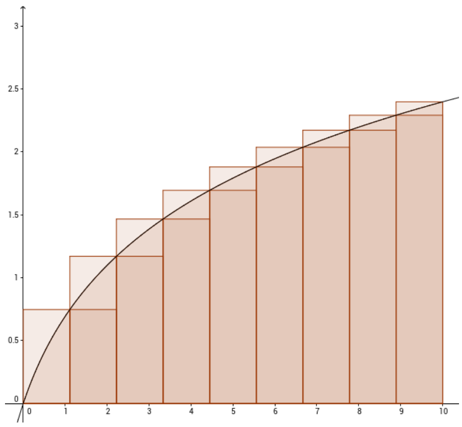
Студент:
Силвана Спасић 1138/2014

Чланови комисије:
др. Драгољуб Кечкић, ванредни професор (ментор)
др. Александар Липковски, редовни професор
др. Јелена Катић, доцент

Садржај

1 Увод

Историјски гледано, интеграл као појам и његова примена на израчунавање површине датира још из времена старе Грчке. Еудокс и Архимед су међу првима користили калкулусни рачун, претечу интегралног рачуна. У питању је рад са одређеним интегралима који омогућавају рачунање површине закривљених површи. Најзначајнији рад тог времена је Архимедова "Квадратура параболе".



Слика 1: Криволинијски трапез

На слици 1 је приказан Архимедов концепт за одређивање површине ограничене параболом.

Са развојем више математике крајем 17. века а нарочито радом Исака Њутна и Готфрида Лајбница долази до унапређења калкулусног рачуна. Успостављa се веза између одређеног и неодређеног интеграла, диференцирања и интеграције као и до формалног записивања. Лајбниц даје ознаку за интеграл која се и данас користи. Такође, Лајбницове ознаке и техника и данас се користе у математичкој анализи. На рад Њутна и Лајбница надовезује се Жан Батист Жозеф Фурије који користи све формалнију нотацију и код кога се први пут среће ознака одређеног интеграла. Бернхард Риман и Гастон Дарбу заснивају одређени интеграл помоћу граничних вредности. Треба поменути и Анрија Лебега који је формулисао другачију дефиницију интеграла и засновао теорију мера. Многи математичари, поред поменутих, допринели су развоју интегралног рачуна који данас познајемо.

Знање о интегралима се све више примењивало у геометрији, физици и техници. Тиме се јавила потреба за формалним записивањем и детаљнијим проучавањем особина неодређеног интеграла. Приметило се да се наизглед једноставни интеграли, попут $\int \frac{\sin x}{x} dx$ или $\int \frac{e^x}{x} dx$, не могу представити елементарним функцијама.

Идеја овог рада јесте испитивање особина подинтегралне функције. На основу тога, одређује се да ли се неки инетеграл може представити елементарним функцијама или не.

Подсетимо се неких основних појмова који ће се појављивати у раду.

Дефиниција 1. *Под* ***реалном функцијом реалне променљиве*** *подразумевамо сваку функцију $f : A \to \mathbf{R}$ дефинисану на неком подскупу A скупа реалних бројева $\mathbf{R}$ и са вредностима у $\mathbf{R}$.*

Ове функције могу бити задате на различите начине, а најчешће се користи неки аналитички израз.

1.1 Примитивна функција и неодређени интеграл

Дефиниција 2. *Посматрајмо функцију $f(x)$ дефинисану у интервалу (a, b). Функција $F(x)$, $x \in (a, b)$ је* ***примитивна функција*** *функције $f(x)$ ако је $F(x)$ диференцијабилна и важи*

$$F^{'}(x) = f(x), \quad x \in (a, b).$$

Пример 1. *Функција $F(x) = x^5$ је примитивна функција функције $f(x) = 5x^4$ јер за свако $x \in \mathbf{R}$ $F^{'}(x) = f(x)$.*

Пример 2. *Приметимо да је и функција $F_1(x) = x^5 - 3$ примитивна функција функције $f(x) = 5x^4$ јер за свако $x \in \mathbf{R}$*

$$F_1^{'}(x) = (x^5 - 3)^{'} = 5x^4.$$

Став 1. ***а)*** *Ако је $F(x)$ примитивна функција функције $f(x)$, тада је и $F(x) + C$, где је C произвољна константа, такође примитивна функција функције $f(x)$.*

б) *Ако су $F(x)$ и $G(x)$ две примитивне функције за функцију $f(x)$ на интервалу (a, b), тада је њихова разлика константна у поменутом интервалу.*

Доказ. Нека је C произвољна константа.
а) Важи да је

$$F^{'}(x) = f(x), \quad x \in (a, b)$$

јер је $F(x)$ примитивна функција функције $f(x)$ на интервалу (a, b). Такође важи:

$$(F(x) + C)^{'} = F^{'}(x) = f(x), \quad x \in (a, b)$$

па закључујемо да је и $F(x) + C$ примитивна функција за $f(x)$ на интервалу (a, b).

б) Нека је $\phi(x) = F(x) - G(x), \quad x \in (a, b)$. Функција $\phi(x)$ је диференцијабилна на интервалу (a, b). Применом правила диференцирања, добијамо

$$\phi^{'}(x) = (F(x) - G(x))^{'} = F^{'}(x) - G^{'}(x) = f(x) - f(x) = 0, \ \ x \in (a, b).$$

На основу последице Лагранжове теореме о средњој вредности диференцијалног рачуна закључујемо да је $\phi(x)$ константа, тј.

$$F(x) - G(x) = C$$

□

Дефиниција 3. ***Неодређени интеграл*** *функције* $f(x)$ *је скуп свих примитивних функција за* $f(x)$ *и означава се са*

$$\int f(x)dx.$$

У дефиницији, $f(x)$ је **подинтегрална функција**, док је $f(x)dx$ подинтегрални израз.

Ако је $F(x)$ једна примитивна функција за $f(x)$ на неком интервалу, тада према Ставу 1 важи

$$\int f(x)dx = F(x) + c,$$

где је c произвољна реална константа.

Наведимо основна својства неодређеног интеграла.

Став 2. *Нека је* $F(x)$ *примитивна функција за* $f(x)$ *на неком интервалу и* $c \in \mathbf{R}$. *Тада важи:*
1^o $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$
2^o $\int dF(x) = F(x) + c$
3^o $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx, \;\; k \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$
4^o *за функције* $f(x)$ *и* $g(x)$ *важи* $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

Доказ. $F(x)$ је примитивна функција за $f(x)$ па важи $F^{'}(x) = f(x)$.

$$1^o \quad d\left(\int f(x)dx\right) = d(F(x)+c) = F^{'}(x)dx = f(x)dx$$

$$2^o \qquad \int dF(x) = \int f(x)dx = F(x) + c$$

Својства 1^o и 2^o показују да су диференцирање и интеграција међусобно инверзне операције са тачношћу до произвољне константе.
3^o Посебно ћемо диференцирати сваку страну једнакости (леву, па десну) и показати да је лева страна једнака десној.

$$\left(\int kf(x)dx\right)^{'} = kf(x)$$

$$\left(k\int f(x)dx\right)^{'} = k\left(\int f(x)dx\right)^{'} = kf(x)$$

4^o Користимо исту идеју као у доказу 3^o.

$$\left(\int (f(x)+g(x))dx\right)' = f(x)+g(x)$$

$$\left(\int f(x)dx + \int g(x)dx\right)' = \left(\int f(x)dx\right)' + \left(\int g(x)dx\right)' = f(x)+g(x)$$

$\square$

Како би олакшали проналажење неодређених интеграла неких једноставних функција, наводимо таблицу неодређених интеграла, уз одговарајуће услове. Услови се односе на дефинисаност и непрекидност подинтегралне функције.

1.	$\int x^a \mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$	$(a \in \mathbf{R} \setminus \{-1\},\ x > 0)$
2.	$\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \log\lvert x\rvert + C$	
3.	$\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$(a > 0,\ a \neq 1))$
4.	$\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C$	
5.	$\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C$	
6.	$\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C$	
7.	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$
8.	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \mathrm{ctg}\, x + C$	$x \neq k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$
9.	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$	$\lvert x\rvert < 1$
10.	$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \mathrm{arctg}\, x + C$	
11.	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\lvert x + \sqrt{x^2 \pm 1}\rvert + C$	$\lvert x\rvert > 1$
12.	$\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln\left\lvert \frac{1+x}{1-x} \right\rvert + C$	$x \neq \pm 1$

Табела 1: Таблица неодређених интеграла

Коришћење табеле 1 и основних особина неодређеног интеграла илустроваћемо следећим примером.

Пример 3.

$$\int (x^4 - \frac{3}{x} + \sin x)dx = \int x^4 dx - 3\int \frac{1}{x}dx + \int \sin x dx = \frac{x^5}{5} - 3\ln\lvert x\rvert + \sin x + c$$

1.2 Елементарне функције

Дефиниција 4. *Неке основне елементарне функције су:*
1. Полиноми,
2. Експоненцијалне функције,
3. Логаритамске функције,
4 .Степене функције,
5. Тригонометријске функције
6. Инверзне тригонометријске функције.

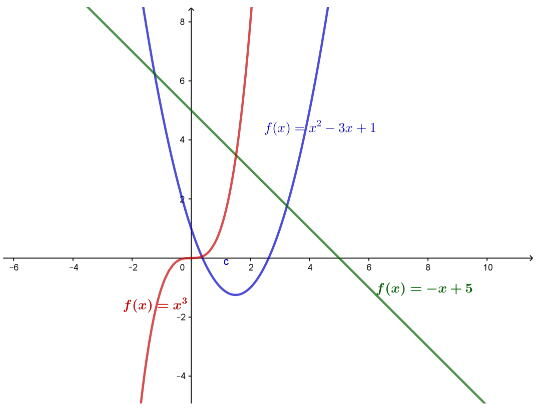
Дефиниција 5. ***Елементарне функције*** *су функције које настају применом коначног броја основних аритметичких операција* $(+, -, \cdot, :)$ *на основне елементарне функције и коначног броја композиција елементарних функција.*

Дефинисаћемо неке основне елементарне функције и приказати њихове графике.
1. Полиноми су функције облика

$$P_n(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + ... + a_1 x + a_0, n \in \mathbf{N}, a_i \in \mathbf{R}, i = \overline{1, n}$$

$$P_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

Степен полинома је највећи природан број n који се појављује у полиному и по њему функција добија име (линеарна за $n = 1$, квадратна за $n = 2$,...).



Слика 2: Полиномијалне ф-је

На слици 2 је зеленом бојом приказана једна линеарна функција, плавом бојом једна квадратна функција, а црвеном бојом кубна функција.

2. Експоненцијална функција је функција облика

$$f(x) = a^x, 0 < a < 1 \quad \vee \quad a > 1.$$

$$a^x : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$$

Основа експоненцијалне функције је a, док је x изложилац. Када је $0 < a < 1$ функција a^x је строго опадалућа. Када је $a > 1$ функција a^x је строго растућа. Посебно је интересантно када се заоснову узме број e (Ојлеров број или Неперова константа).

3. Логаритамска функција је инверзна функција степене функције и означавамо је са

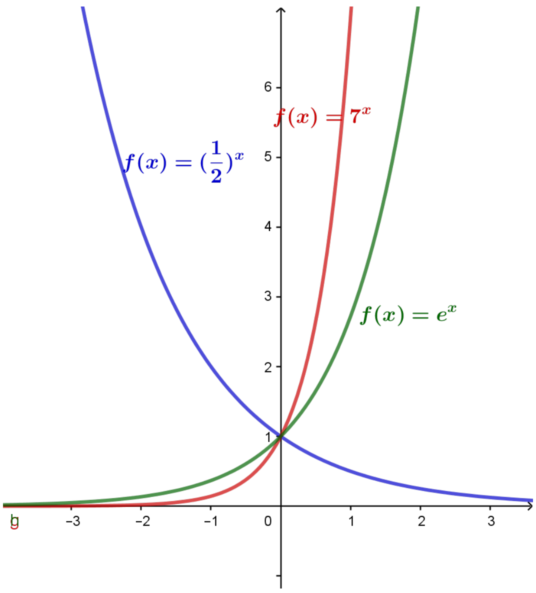
$$f(x) = \log_a x, \quad 0 < a < 1 \quad \vee \quad a > 1.$$

Другим речима

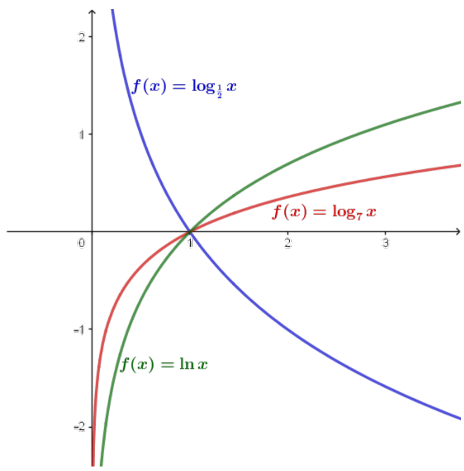
$$x = \log_a y \quad \Leftrightarrow \quad y = a^x$$

$$\log_a x : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$$

Када је $0 < a < 1$ функција $\log_a x$ је строго опадајућа. Када је $a > 1$ функција $\log_a x$ је строго растућа. $\log_e x$ има посебну ознаку $\ln x$.



Слика 3: Експоненцијалне ф-је



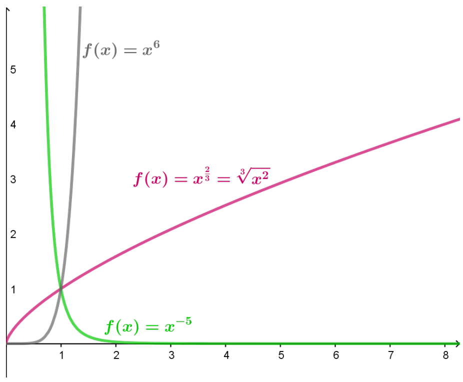
Слика 4: Логаритамске ф-је

4. Степена функција је функција облика

$$f(x) = x^{\alpha}, \ \ \alpha \in \mathbf{R}.$$

$$x^{\alpha} : \mathbf{R}^{+} \to \mathbf{R}^{+}$$

Када је $\alpha < 0$ функција x^{α} је строго опадајућа. Када је $\alpha > 0$ функција x^{α} је строго растућа.



Слика 5: Степене функције

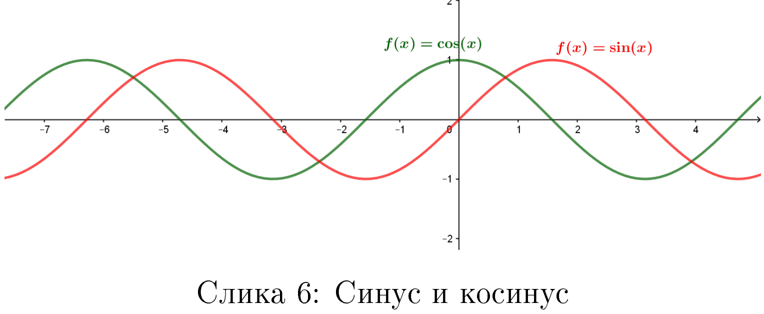
5. Тригонометријске функције су синус (sin), косинус (cos), тангенс (tg) и котангенс (ctg). Тригонометријске функције неће бити посебно дефинисане, већ ће се подразумевати њихово увођење преко тригонометријског круга.

$$\sin(x) : \mathbf{R} \to [-1, 1]$$

$\sin(-x) = -\sin(x)$ што значи да је ово непарна функција.
$\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$, $k \in \mathbf{Z}$, тј. sin је периодична функција са периодом 2π. На слици 6 је приказана црвеном бојом.

$$\cos(x) : \mathbf{R} \to [-1, 1]$$

$\cos(-x) = \cos(x)$ што значи да је ово парна функција.
$\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$, $k \in \mathbf{Z}$, тј. cos је периодична функција са периодом 2π. На слици 6 је приказана зеленом бојом.

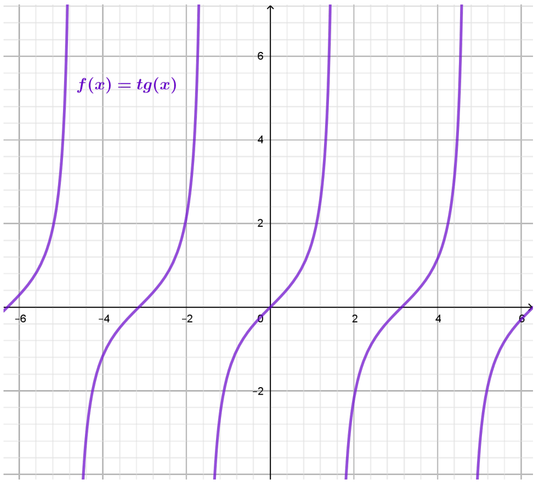


Слика 6: Синус и косинус

$$\mathrm{tg}(x) : \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbf{Z}\right\} \to \mathbf{R}$$

$$\mathrm{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Ово је непарна, периодична функција са периодом π.

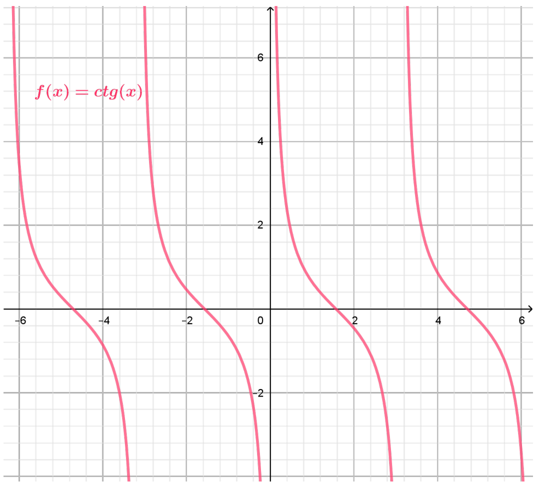


Слика 7: Тангенс

$$\mathrm{ctg}(x) : \mathbf{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbf{Z}\} \to \mathbf{R}$$

$$\mathrm{ctg}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

Ово је непарна, периодична функција са периодом π.



Слика 8: Котангенс

6. Инверзне тригонометријске функције

Тригонометријске функције нису бијекције на целом свом домену. Ако би направили одговарајућу рестрикцију домена добили би бијекцију, а самим тим и инверзну функцију.

На интервалу $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\sin(x)$ је бијекција. Њена одговарајућа инверзна функција је аркуссинус тј. arcsin (слика 9).

$$\arcsin(x) : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

Важи да је

$$\arcsin(\sin x) = x, \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

и

$$\sin(\arcsin x) = x, \ \ -1 \le x \le 1.$$

На интервалу $[0, \pi]$, $\cos(x)$ је бијекција. Њена одговарајућа инверзна функција је аркускосинус тј. arccos (слика 10).

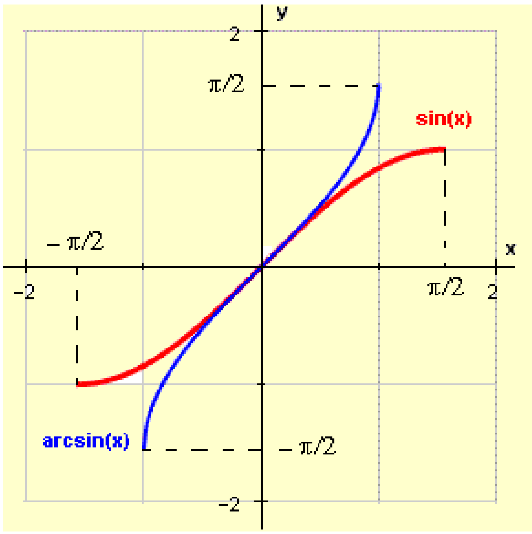
$$\arccos(x) : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

Важи да је

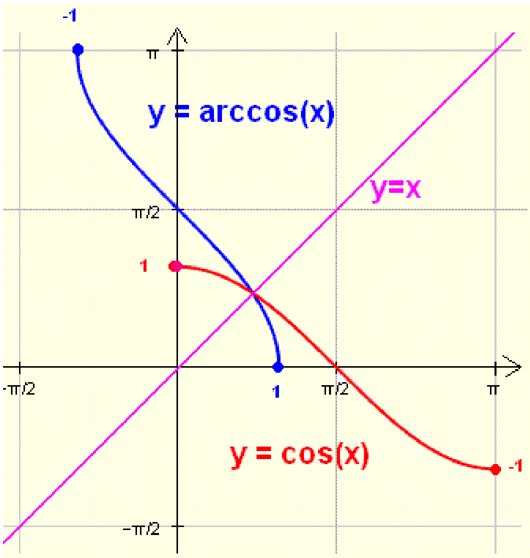
$$\arccos(\cos x) = x, \ \ 0 \le x \le \pi$$

и

$$\cos(\arccos x) = x, \ \ -1 \le x \le 1.$$



Слика 9: Рестрикикција синуса и инверзна (аркуссинус)



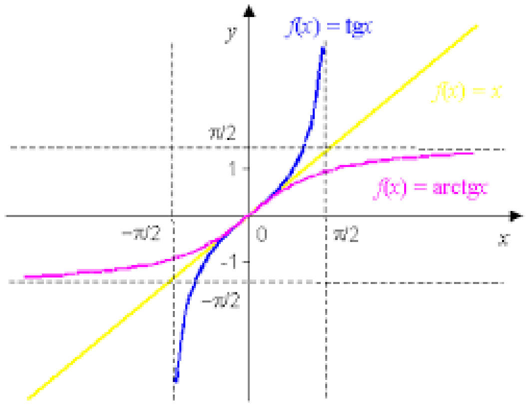
Слика 10: Рестрикција косинуса и инверзна (аркускосинус)

На интервалу $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\mathrm{tg}(x)$ је бијекција. Одговарајућа инверзна функција је аркустангенс (arctg).

$$\mathrm{arctg}(x) : \mathbf{R} \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\, x) = x, \ \ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

$$\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\, x) = x, \ \ x \in \mathbf{R}.$$



Слика 11: Рестрикција тангенса и инверзна (аркустангенс)

На интервалу $[0, \pi]$, $\mathrm{ctg}(x)$ је бијекција. Одговарајућа инверзна функција је аркускотангенс (arcctg).

$$\mathrm{arcctg}(x) : \mathbf{R} \to [0, \pi]$$

Важи да је

$$\mathrm{arcctg}(\mathrm{ctg}\, x) = x, \ \ 0 < x < \pi$$

и

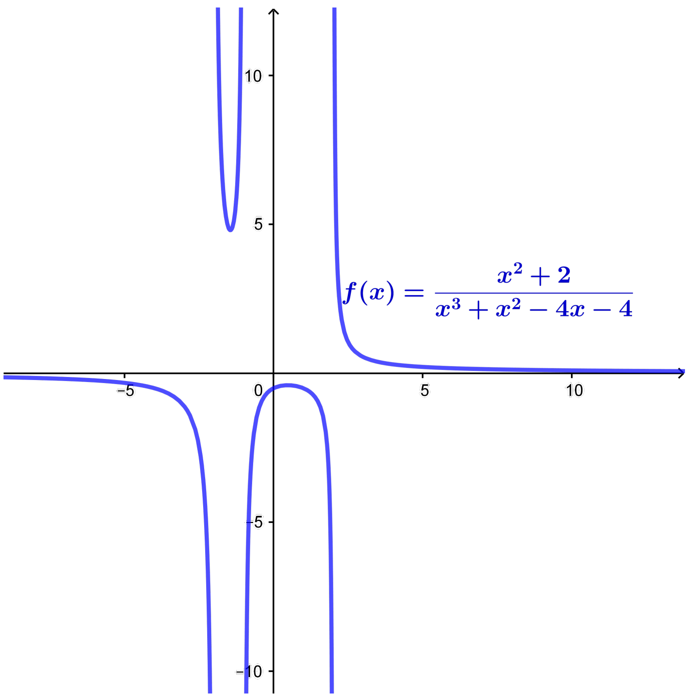
$$\mathrm{ctg}(\mathrm{arcctg}\, x) = x, \ \ x \in \mathbf{R}.$$

Дајмо пример како могу настати елементарне функције.

Рационална функција је функција облика

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

при чему су $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ полиноми. Она настаје као количник две полиномијалне функције. Домен функције су сви реални бројеви r за које $Q_m(r)$ није нула. Кодомен функције је скуп реалних бројева.



Слика 12: Рационална ф-ја

Напомена: У наставку текста ће се под термином функција подразумевати израз.

2 Изрази

Следећа дефиниција израза позната је из основних курсева алгебре.

Дефиниција 6. *Нека је C непразан скуп чији су елементи константе и промењиве. Нека је Q скуп који садржи операције, при чему операције могу бити различите арности (унарне, бинарне, ...). Израз се дефинише индуктивно:*
(1) елементи скупа C су изрази;
(2) ако су $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ изрази и H операција арности k, тада је и $H(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$ израз.

Напомена: При дефиницији израза коришћена је префиксна нотација. Израз $+(2, 3)$ је еквивалентан изразу $2 + 3$ само што је у првом случају коришћена префиксна, а у другом инфиксна нотација.

Раздвојимо скуп Q на два дисјунктна скупа, R и P. Елементе скупа R назовимо *везивне* операције, а елементе скупа P *градивне* операције. Везивне операције не повећавају класу израза, док градивне операције повећавају класу израза за 1.

Дефиниција 7. *Дефинишимо класе израза:*
(1) Израз класе 0 *(полазни израз):*
Елемент скупа C је израз класе 0. Ако су $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ изрази класе 0 и H везивна операција, тада је $H(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$ израз класе 0.
(2) Израз класе 1*:*
Ако су $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ изрази класе 0 и M градивна операција, тада је $M(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$ израз класе 1. Ако су $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ изрази класе 1 и H везивна операција, тада је $H(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$ израз класе 1.
(3) Израз класе n *(општи случај):*
Ако су $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ изрази класе $n-1$ и $M \in P$, тада је $M(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$ израз класе n. Ако су $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ изрази класе n и $H \in R$, тада је $H(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$
израз класе n.

Наводимо основне примере израза дефинисане помоћу једне или две врсте операција - везивних и градивних.

Пример 4. ***Рационални изрази*** *(једна врста операција)*
Елементи скупа C су бројеви и промењиве;
Елементи скупа R су основне аритметичке операције $(+, -, \cdot, :)$;
P је празан скуп.

Пример 5. ***Изрази у радикалима*** *(две врсте операција)*
Елементи скупа C су бројеви и промењиве;

Елементи скупа R су рационалне операције;
$P = \{\sqrt[n]{x} \ |n \geq 2\}$ *(кореновање).*

Пример 6. ***Алгебарски изрази*** *(две врсте операција)*
Елементи скупа C су бројеви и променљиве;
Елементи скупа R су рационалне операције;
У Скупу P налазе се решења полиномских једначина. Другим речима, ако је

$$\alpha_m x^m + \alpha_{m-1}x^{m-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_0$$

полиномска једначина, и ако су

$$r_1(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_m), r_2(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_m), ..., r_m(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_m)$$

решења дате једначине, тада су r_1, r_2, ... r_n елементи скупа P. На основу основне теореме алгебре, свако од ових решења постоји.

Напомена: Постоји разлика између израза у радикалима и алгебарских израза. Ови други чине ширу класу, јер је познато да се решења полиномских једначина степена 5 или више у општем случају не могу изразити у радикалима.

Пример 7. ***Изрази у коначном облику***
Елементи скупа C су бројеви и променљиве;
Елементи скупа R су алгебарске операције;
$P = \{\mathrm{e}^x, \log x, \sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x, \arcsin x, \arccos x, \operatorname{arctg} x, arcctgx, a^{\frac{m}{n}}\}$ *(експоненцијалне, логаритамске, тригонометријске, инверзне тригонометријске, степене са рационалним изложиоцем).*

Посебан случај класе израза у поримеру 7 јесте класа трансцедентности израза.

Пример 8. *Израз e^x је прве класе трансцедентности. Израз $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$ је друге класе трансцедентности.*

2.1 Трансформације израза

Приметимо да, по дефиницији, израз $\log\sqrt{x}$ није једнак изразу $\frac{1}{2}\log x$. Због тога прецизирамо правила рачунања.

Дефиниција 8. *Нека су a, b, c, d, x, y изрази било које класе. Елементарна правила рачунања обухватају:*
1) комутативност и асоцијативност збира и производа;
2) дистрибутивност множења према сабирању($a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$);
3) основне рачунске операције са разломцима;
4) правила за степеновање и кореновање (нпр. $\sqrt{x^2} = x$);
5) адиционе формуле (нпр. $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$).
$\vdots$

Сложена правила добијају се коначном применом елемнтарних правила рачунања.

Напомена: У овом раду сматраћемо да је $\sqrt{x^2}$ исто што и x!

Дефиниција 9. *Нека су α и β изрази. Ако се β може добити од α трансформацијом, кажемо да су α и β еквивалентни и пишемо $\alpha \sim \beta$.*

Дефиниција 10. ***Објекти*** *су класе еквивалентних израза. Класа објекта је минимална класа израза који припада објекту.*

Пример 9. *Посматрајмо два израза. Нека је $\alpha = \sqrt{\sqrt[3]{a}}$, а $\beta = \sqrt[6]{a}$ Како је $\alpha \sim \beta$, закључујемо да је овај објекат класе 1.*

Пример 10. *Посматрајмо изразе у радикалима. Имамо:*

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{(1+\sqrt{3})^2}{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

Почетни израз је класе 2 (као израз у радикалима), док је завршни израз, добијен низом трансформација, класе 1.

Дефиниција 11. *Од свих израза класе n постоји израз облика $H(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k)$, $H \in R$, при чему су $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k$ основни изрази класе n и такав да је број k минималан. За овакав израз кажемо да је **сређен по основним изразима класе** n.*

Став 3. *Нека је $\alpha = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k, \gamma_1, \ldots, \gamma_l)$ израз класе n сређен у односу на основне класе, $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k$ основни изрази класе n, а γ_j изрази класе мање од n. Тада се β_k не може изразити преко $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_{k-1}$.*

Доказ. Претпоставимо супротно и нека важи

$$\beta_k = H_1(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_{k-1}), \qquad H_1 \in R.$$

Тада је

$$\alpha = H(\beta_1, ..., \beta_k, \gamma_j) \sim H(\beta_1, ..., \beta_{k-1}, H_1(\beta_1, ..., \beta_{k-1}), \gamma_j),$$

што је у контрадикцији са претпоставком да је α сређен израз. □

Став 4. ***(Основни Љувилов принцип)***
Нека важе претпоставке Става 3. Ако је H везивна операција таква да је $H(\beta_1, ..., \beta_k) = 0$, тада је $H(a_1, ..., a_k) = 0$ где је $a_j, j = \overline{1, k}$ било који израз.

Доказ. Доказ директно следи на основу става 3. □

Другим речима, ако основни изрази класе n. $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k$ учествују у сређеном изразу, онда је свака везивна веза између њих идентитет.

За израчунљивост интеграла је важно да ли је подинтегрална функција алгебарски објекат или није. Тврђења која следе повезују врсту објекта и класу објекта (Тврђење 3 доказује да не постоји алгебарски објекат класе веће од 2).

Тврђење 1. $\log x$ *није алгебарски објекат.*

Доказ. Доказ овог тврђења ће тећи у два корака.
1^o За почетак покажимо да $\log x$ није рационалан објекат.
Претпоставимо супротно, нека је $\log x = \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ где су α и β полиноми који немају заједнички фактор тј. где су извртшена сва могућа скраћивања.

$$\log x = \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$$

После примене првог извода добијамо:

$$\frac{1}{x} = \frac{\alpha^{'}(x)\beta(x) - \alpha(x)\beta^{'}(x)}{\beta^2(x)},$$

а одатле и

$$\beta^2(x) = x(\alpha^{'}(x)\beta(x) - \alpha(x)\beta^{'}(x)).$$

Како је десна страна једнакости дељива са x, и лева страна мора бити дељива са x па закључујемо да је $\beta^2(x)$ дељиво са x. Самим тим је и $\beta(x)$ дељив са x.

Дакле, $\beta(x) = x^p\gamma(x)$, где је $\gamma(x)$ полином који није дељив са x. Даље имамо:

$$x^{2p}\gamma^2(x) = x(\alpha^{'}(x)x^p\gamma(x) - \alpha(x)(px^{p-1}\gamma(x) + x^p\gamma^{'}(x))),$$

а одатле и

$$x^{2p}\gamma^2(x) = \alpha^{'}(x)x^{p+1}\gamma(x) - p\alpha(x)\gamma(x) - x\alpha(x)\gamma^{'}(x).$$

Леву и десну страну једнакости делимо са x^p и добијамо

$$x^p\gamma^2(x) = x\alpha^{'}(x)\gamma(x) - p\alpha(x)x^p\gamma(x) - x\alpha(x)\gamma^{'}(x),$$

односно

$$\alpha(x)(p\gamma(x)) + x\gamma^{'}(x)) = x(\alpha^{'}(x)\gamma(x) - x^{p-1}\gamma^2(x)).$$

Поново, како x дели десну страну, делиће и леву страну једнакости. Постоје две могућности. Ако

$$x|\alpha(x)$$

то доводи до контрадикције јер би $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ имали заједнички фактор. Ако

$$x|(p\gamma(x) + x\gamma^{'}(x))$$

тада

$$x|\gamma(x)$$

што је у контрадикцији са претпоставком да је $\gamma(x)$ полином који није дељив са x.

На основу наведеног закључујемо да $\log x$ **није рационалан** објекат.

2^o Сада кренимо од претпоставке да је $\log x$ алгебарски објекат, тј. да постоји полином облика

$$P(y) = A_m y^m + A_{m-1}y^{m-1} + ... + A_1 y + A_0$$

где су A_j, $j = 0, \ldots, m$ рационални изрази по x, најмањег могућег степена који поништава $\log x$ ($P(\log x) = 0$).

Уврстимо $y = \log x$ у полином, а затим диференцирамо. Добијамо једнакости

$$A_m \log^m x + A_{m-1}\log^{m-1} x + ... + A_1 \log x + A_0 = 0. \tag{1}$$

Диференцирањем једнакости (1) добијамо једнакост

$$A_m' \log^m x + A_m \frac{m}{x} \log^{m-1} x + A_{m-1} \log^{m-1}(x) + ... + A_1 \log(x) + A_0 = 0. \quad (2)$$

Када (1) помножимо са A_m' а (2) са A_m и добијене једнакости одузмемо добијамо

$$(A_{m-1}A_m' - A_m^2 \frac{m}{x} - A_{m-1}' A_m) \log^{m-1} x + ... + A_0 A_m' - A_0' A_m = 0.$$

Формирали смо полином степена степена мањег од степена полинома P кога $\log x$ поништава, а то је могуће само ако су сви коефицијенти тог полинома 0. Стога

$$A_{m-1}A_m' - A_m^2 \frac{m}{x} - A_{m-1}' A_m = 0,$$

односно

$$-\frac{A_{m-1}' A_m - A_{m-1} A_m'}{A_m^2} = \frac{m}{x},$$

то јест

$$\left(-\frac{A_{m-1}}{A_m}\right)' = \frac{m}{x},$$

одакле је

$$\log x = -\frac{A_{m-1}}{m A_m} + c$$

што је контрадикција, јер смо у делу 1^o показали да $\log x$ није рационалан објекат.

□

На овај начин показали смо и да $\int \frac{dx}{x}$ није алгебарски објекат.

Тврђење 2. $\exp x$ *није алгебарски објекат.*

Доказ. Претпоставимо супротно, тј. нека је $P(x, y)$ полином по y са рационалним коефицијентима по x кога понистава exp тј.

$$P(x, \exp(x)) = 0.$$

Уведимо смену $\exp(x) = y$. Добијамо да је

$$P(\log y, y) = 0,$$

што је у контрадикцији са Тврђењем 1. □

Дефиниција 12. *Нека је p полином од n променљивих тј.* $p = p(x_1, x_2, ..., x_n)$*. Полином p је симетрицан ако за сваку пермутацију* $\sigma : \{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, ..., n\}$ *вази*

$$p(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, ..., x_{\sigma(n)}) = p(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Пример 11. *Основни примери симетричних полинома су они који се јављају у Вијетовим правилима:*

$$p_1(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1 + x_2 + ... + x_n$$

$$p_2(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_1x_n + x_2x_3 + x_2x_4 + ... + x_2x_n + ... + x_{n-1}x_n$$

$$\vdots$$

$$p_k(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq i_n} x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_k} = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq i_n} \prod_{j=1}^{k} x_{ij}$$

$$\vdots$$

$$p_n(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1x_2...x_n$$

Наредни став показује да се сви симетрични полиноми могу изразити преко полинома из претходног примера. Његов доказ налази се у основним курсевима алгебре.

Став 5. *Ако је p симетричан полином, тада је* $p(x_1, x_2, ..., x_n) = q(p_1, p_2, ..., p_n)$*, где је q полином.*

Можемо закључити:

Став 6. *Ако је r симетрична рационална функција, тада је* $r(x_1, x_2, ..., x_n) = q(p_1, p_2, ..., p_n)$*, где је q рационална функција.*

Тврђење 3. *Не постоји алгебарски објекат класе n ако је* $n \geq 2$*.*

Доказ. Доказ се изводи у 2 корака.

Нека је ξ основни алгебарски израз класе n. Самим тим, ξ понистава неки полином. Нека је

$$A_m\xi^m + A_{m-1}\xi^{m-1} + ... + A_1\xi + A_0 = 0 \tag{3}$$

полином у коме је сваки $A_j, j = \overline{0, m}$ алгебарски израз класе $\leq n-1$ и $A_j = A_j(\eta_1, \eta_2, ..., \eta_k)$ при цему су $\eta_i, i = \overline{0, k}$ алгебарски класе $\leq n-1$. Полином (3) моземо означити са $\Phi(\eta, \xi)$.

1. корак: $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_k$ могу се заменити са η, где је η основни алгебарски класе $\leq n-1$.

Показаћемо да се, уз одређена ограничења, за η може узети линеарна комбинација $\eta_1, \ldots, \eta_n$. Нека је $\eta = \alpha_1\eta_1 + \alpha_2\eta_2 + ... + \alpha_k\eta_k$, при чему су α_j бројеви, а η_j алгебарски тј. поништавају полином (минималног) степена p_j:

$$B^{(j)}_{p_j}\eta_j^{p_j} + B^{(j)}_{p_j-1}\eta_j^{p_j-1} + ... + B^{(j)}_1\eta_j + B_0. \tag{4}$$

Ради прегледнијег рачуна узећемо да је $k=2$ (што неће умањити општост). Имамо:

$$\eta = \alpha_1\eta_1 + \alpha_2\eta_2$$

$$\eta^2 = \alpha_1^2\eta_1^2 + 2\alpha_1\alpha_2\eta_1\eta_2 + \alpha_2^2\eta_2^2$$

$$\vdots$$

$$\eta^q = \sum_{j=1}^{q}\binom{q}{j}(\alpha_1\eta_1)^j(\alpha_2\eta_2)^{q-j} = \sum_{j=1}^{q}\binom{q}{j}\alpha_1^j\alpha_2^{q-j}\eta_1^j\eta_2^{q-j}. \tag{5}$$

Израз $\eta_1^{p_1}$ се може представити као линеарна комбинација нижих степена $\eta_1^{p_1-1}, ..., \eta_1^1, \eta_1^0$. Аналогно се $\eta_2^{p_2}$ може изразити као линеарна комбинација $\eta_2^{p_2-1}, ..., \eta_2^1, \eta_2^0$. Стога, међу изразима облика $\eta_1^i\eta_2^j$ има $p_1 \cdot p_2$ линеарно независних (оних за које је $0 \leq i \leq p_1-1$, $0 \leq p_2-1$), док се сви остали могу изразити као њихова линеарна комбинација.

Стога ако испишемо изразе (5) за $0 \leq q \leq p_1 \cdot p_2$, биће их $p_1 \cdot p_2 + 1$ па се елиминацијом израза $\eta_1^i\eta_2^j$ може добити линеарна веза између η^0, η^1, $\ldots$, $\eta^{p_1 \cdot p_2}$. Другим речима η поништава полином степена $p = p_1 \cdot p_2$, нпр.

$$S(\eta) = A_p\eta^p + ... + A_1\eta + A_0.$$

Нека су $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \eta^{(p)}$ нуле овог полинома, тј.

$$S(\eta) = (\eta - \eta^{(1)})\cdot(\eta - \eta^{(2)})\cdot\ldots\cdot(\eta - \eta^{(p)}),$$

и нека су $\eta_1^{(i)}$, $i = 1, ..., p_1$ нуле полинома (4) за $j=1$.
Посматрајмо полином

$$U(\eta) = S(\eta)\cdot\sum_{k=1}^{p}\frac{\eta_1^{(k)}}{\eta - \eta^{(k)}}.$$

Тај полином је симетричан по k (инваријантан у односу на пермутације бројева $k = 1, \ldots, p_1$), па су му коефицијенти рационалне функције од коефицијената полинома (4).

Након скраћивања и замене $\eta = \eta^{(j)}$ (сви сабирци сем j-тог се анулирају), добијамо:

$$U(\eta^{(j)}) = S'(\eta^{(j)})\cdot\eta_1^{(j)},$$

Ако скаларе $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ одаберемо тако да полином S нема вишеструких нула онда се $S'(\eta)$ не анулира за $\eta = \eta^{(j)}$ ни за једно j, па имамо

$$\eta_1^{(j)} = \frac{U(\eta^{(j)})}{S'(\eta^{(j)})},$$

што смо и хтели.

2. корак: Претпоставимо да ξ задовољава једнакост (3).

Нека η задовољава једнакост $B_l\eta^l + B_{l-1}\eta^{l-1} + ... + B_1\eta + B_0 = 0$, при чему су $B_i, i = \overline{0, l}$ рационални изрази класе не веце од $n-2$. Приметимо да η има тацно l вредности и те функције означимо са $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_l$.

Формирајмо производ:

$$\prod_{i=1}^{l} \Phi(\eta_i, \xi) = 0$$

и расписимо га за $l = 2$. Имамо

$$\begin{aligned}
&(A_m(\eta_1)\xi^m + A_{m-1}(\eta_1)\xi^{m-1}+ \\
&... + A_1(\eta_1)\xi + A_0)\cdot(A_m(\eta_2)\xi^m + A_{m-1}(\eta_2)\xi^{m-1} + ... + A_1(\eta_2)\xi + A_0) = \\
&= A_m(\eta_1)A_m(\eta_2)\xi^{2m} + (A_m(\eta_1)A_{m-1}(\eta_2) + A_{m-1}(\eta_1)A_m(\eta_2))\xi^{2m-1} + ...+ \\
&\qquad\left(\sum_{i=max(0,k-m)}^{k} A_i(\eta_1)A_{k-1}(\eta_2) + A_{k-1}(\eta_1)A_1(\eta_2)\right)\xi^k + ...+ \\
&\qquad(A_1(\eta_1)A_0(\eta_2) + A_0(\eta_1)A_1(\eta_2))\xi + A_0(\eta_1)A_0(\eta_2) = \\
&\qquad= r_{2m}(\eta_1\eta_2)\xi^{2m} + ... + r_k(\eta_1\eta_2)\xi^k + ... + r_1(\eta_1\eta_2)\xi + r_0(\eta_1\eta_2)
\end{aligned}$$

Како су сви r_k рационални и симетрични, записујемо:

$$r_k(\eta_1\eta_2) = q_k(\eta_1 + \eta_2, \eta_1 \cdot \eta_2) = q_k(\frac{-B_1}{B_2}, \frac{B_0}{B_2}),$$

чиме смо снизили класу израза ξ.

$\square$

2.2 Класа израза у односу на дати израз

Дефиниција 13. *Нека је α неки израз. Скуп полазних објеката C допуњујемо градивним блоковима израза α (односно изазима од којих је α сачињен) и у односу на њега дефинишемо класу израза β.*

По дефиницији класа израза важи:

Елементи скупа C су класе 0.

Ако су $x_1, x_2, ..., x_k$ изрази класе $\beta-1$ и $H_1 \in P$, тада је $H_1(x_1, x_2, ..., x_k)$ израз класе β.

Ако су $x_1, x_2, ..., x_k$ изрази класе β и $H_2 \in R$, тада је $H_2(x_1, x_2, ..., x_k)$ израз класе β.

Пример 12. *Нека је*

$$\alpha = \sqrt{1+e^x} \cdot \sin \frac{1-x^2}{\log x}$$

Изрази e^x, $\log x$, $\sin \frac{1-x^2}{\log x}$ су изрази класе 0 у односу на α. $\log(\log x)$ је израз класе 1 у односу на α. $\log(\log(1+x))$ је израз класе 2 у односу на α. $\sin e^x$ је класе 1 у односу на α. $\sin e^{2x}$ је израз класе 2 у односу на α.

2.3 Алгебарски изрази

Нека се y алгебарски изражава преко x, тада y поништава полином

$$A_n(x)y^n + A_{n-1}(x)y^{n-1} + ... + A_1(x)y + A_0(x) = 0. \tag{6}$$

$$A_j(x) = \frac{P_j(x)}{Q_j(x)},$$

при чему важи да су A_j рационалне функције по x, а $P_j(x)$ и $Q_j(x)$ полиноми.

Нека је

$$Q(x) = NZS\{Q_j(x)\}, 0 \leq j \leq n.$$

Помножимо једнакост (6) са $Q(x)$. Добијамо да је

$$\overline{P_j(x)} = A_j(x)Q(x)$$

такође полином. Тада је

$$K(x,y) = \overline{P_n(x)}y^n + ... + \overline{P_1(x)}y + \overline{P_0(x)}$$

полином који зависи од две променљиве.

Примена претходних исказа огледа се у следећем тврђењу:

Тврђење 4. *Ако је* $A(x)$ *алгебарска функција, онда је* $\log A(x)$ *трансцедентна функција.*

Доказ. Претпоставимо супротно, да је $\log A(x)$ алгебарска функција. То значи да постоји полином K такав да је

$$K(x, \log A(x)) = 0.$$

Уведимо смену:

$$z = A(x) \to x = B(z).$$

Добијамо да је

$$K(B(z), \log z) = 0$$

што није могуће јер је $\log z$ алгебарска од $B(z)$ класе 2, а не постоји алгебарски објекат класе 2. $\square$

2.4 Извод израза

У даљем излагању користићемо само логаритамску и експоненцијалну функцију као градивне изразе, тј. $P = \{\log, \exp\}$. јер се остале основне трансцедентне могу преко њих изразити као:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2},$$
$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$
$$\operatorname{arctg} x = \frac{1}{2i} \log \frac{1 + ix}{1 - ix},$$

ако λ није рационално, тада

$$x^{\lambda} = e^{\lambda \log x}.$$

Све што у даљем излажемо могуће је доказати и за функције sin, cos, и тако даље, али ће овако докази бити краћи и елегантнији.

Дефиниција 14. *Извод је трансформација која изразу α додељује израз α'.*

Ради подсећања на правила извода, приказујемо таблицу извода и основна својства извода.

$(c)' = 0$

$(x^n)' = nx^{n-1}$

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

$(e^x)' = e^x$

$(a^x)' = a^x \log a$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Табела 2: Таблица извода

Линеарност

$(cf)' = cf'$

$(f+g)' = f' + g'$

Извод производа

$(fg)' = f'g + fg'$

Извод количника

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$, $g \neq 0$

Извод сложене функције

$(f \circ g)' = (f' \circ g)g'$

Извод инверзне функције

$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Табела 3: Основна правила рачунања

Пример 13. *Ако је y алгебарски израз од x, тада је и његов извод y' такође алгебарски. Наиме, ако је*

$$\sum_{j=0}^{m} A_j(x) y^j(x) = 0$$

онда је

$$\sum_{j=0}^{m} (A_j^{'}(x) \cdot y^j + A_j(x) \cdot j \cdot y^{j-1} \cdot y') = 0.$$

Неведимо једно једноставно тврђење, без доказа.

Тврђење 5. *Ако су α и β еквивалентни изрази тј. ако се од израза α може доћи трансформацијама до израза β, тада важи:*

$$\alpha \sim \beta \Rightarrow \alpha^{'} \sim \beta^{'}.$$

Покусајмо да доказемо да извод не повецава класу израза (класа остаје иста или се смањује).

Став 7. *Ако је α израз (класе трансцедентности q), онда је $\alpha^{'}$ алгебарски у односу на α.*

Доказ. Доказујемо индукцијом по класи израза.

База индукције: Нека је α класе 0. У Примеру 13 показали смо да је тада и α' алгебарски, тј и он је класе 0.

Корак: Нека је α класе q тј. $\alpha = H(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n, \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_l, x)$, при чему су $\beta_j, j = \overline{1,n}$ основне трансцедентне класе q, а $\gamma_j, j = \overline{1,l}$ трансцедентне класе мање од q. Тада је:

$$\alpha^{'} = \frac{\partial H}{\partial \beta_1} \cdot \frac{d\beta_1}{dx} + ... + \frac{\partial H}{\partial \beta_n} \cdot \frac{d\beta_n}{dx} + \frac{\partial H}{\partial x}.$$

Сви изрази облика $\frac{\partial H}{\partial \beta_j}$ су алгебарски у односу на α. Треба проверити шта се дешава са $\frac{d\beta_j}{dx}$.

(1) случај: $\beta_j = e^{\gamma}$, γ је класе $q-1$.

$$\frac{d\beta_j}{dx} = e^{\gamma} \cdot \frac{d\gamma}{dx} = \beta_j \cdot \frac{d\gamma}{dx}$$

(2) случај: $\beta_j = \log \gamma$, γ је класе $q-1$.

$$\frac{d\beta_j}{dx} = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{d\gamma}{dx}.$$

У оба случаја $\frac{d\beta_j}{dx}$ је алгебарски у односу на α, па је самим тим и $\alpha^{'}$ алгебарски у односу на α.

□

Следеће две леме су техничког карактера и биће коришћене приликом доказивања главног тврђења.

Лема 1. *Нека је π функција две променљиве, $\pi = \pi(x, \theta)$.*

а) *Ако за сваку константу μ важи*

$$\pi(x, \theta + \mu) = \pi(x, \theta) + c, \tag{7}$$

где c не зависи од θ, тада је $\pi(x, \theta) = A(x) \cdot \theta + B(x)$.

б) *Ако за сваку константу μ важи $\pi(x, \mu \cdot \theta) = \pi(x, \theta) + c$, где c не зависи од θ, тада је $\pi(x, \theta) = A(x) \cdot \log \theta + B(x)$.*

Ако још важи да c зависи само од μ, а не и од x, тада је $A(x)$ константно.

Доказ. **а)** Имамо

$$\pi(x, \theta_0 + \mu) = \pi(x, \theta_0) + c$$

$$\pi(x, \theta + \mu) = \pi(x, \theta) + c$$

Одузимањем прве једначине од друге, добијамо:

$$\pi(x, \theta + \mu) - \pi(x, \theta_0 + \mu) - \pi(x, \theta) + \pi(x, \theta_0) = 0$$

Диференцирањем по θ добијамо

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\pi(x, \theta + \mu) = \frac{\partial}{\partial \theta}\pi(x, \theta),$$

што је истоветно са

$$\frac{\partial}{\partial \mu}\pi(x, \theta_0 + \mu) = \frac{\partial}{\partial \mu}\pi(x, \theta_0),$$

па можемо закључити да је

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\pi(x, \theta) = \frac{\partial}{\partial \mu}\pi(x, \theta_0 + \mu).$$

Одатле следи да је

$$\pi(x, \theta) = A(x) \cdot \theta + B(x) \tag{8}$$

јер десна страна једнакости (8) не зависи од θ.

б) Уведимо смене $\theta = e^{\phi}$ и $\mu = e^{\lambda}$. Тада

$$\pi(x, \mu \cdot \theta) = \pi(x, \theta) + c$$

постаје

$$\pi(x, e^{\phi + \lambda}) = \pi(x, e^{\phi}) + c.$$

Означимо

$$\pi_1(x, \phi) = \pi(x, e^{\phi})$$

На израз π_1 применимо део доказа **а)** и добијамо

$$\pi(x, e^{\phi}) = A(x) \cdot \phi + B(x),$$

односно

$$\pi(x, \theta) = A(x) \cdot \log \theta + B(x).$$

Покажимо још и да ће $A(x)$ бити константа под условом да c зависи само од μ.
Из (7) и (8) добијамо

$$A(x)\cdot(\theta+\mu)+B(x)=A(x)\cdot\theta+B(x)+c,$$

то јест

$$A(x)\cdot\theta+A(x)\cdot\mu=A(x)\cdot\theta+c,$$

одакле је

$$A(x)\cdot\mu=c,$$

тј. A не зависи од x. □

Лема 2. *Нека је $\alpha=H(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n,\gamma_1,...,\gamma_k,x)$ сређен израз по $\beta_1,,...,\beta_n$ основним трансцендентним класе q ($\gamma_1,...,\gamma_k$ су основни трансцендентни класе мање од q) и нека је $\theta=\beta_j$, $G=\frac{d\alpha}{dx}$. Тада је*

$$G(x,\theta_\mu)=\frac{d}{dx}H(x,\theta_\mu),$$

где је

$$\theta_\mu=\begin{cases}\theta+\mu, & \text{ако је } \theta=[\log^{(q)}]\\ \theta\cdot\mu, & \text{ако је } \theta=[\exp^{(q)}]\end{cases}$$

Доказ. Имамо

$$G(x,\theta)=\frac{\partial H(x,\theta)}{\partial\theta}\cdot\frac{d\theta}{dx}+\left(\frac{\partial H(x,\theta)}{\partial x}\right)_\theta=\frac{dH}{dx}.$$

У средишњи део идентитета уместо θ уврстићемо θ_μ. Разликујемо два случаја:

1. случај: нека је $\theta=[\log^{(q)}]$, тј. $\theta=\log\gamma$, где је γ класе $q-1$. Тада је $\frac{d\theta}{dx}=\frac{1}{\gamma}\frac{d\gamma}{dx}$ и одатле $\frac{d(\theta+\mu)}{dx}=\frac{d\theta}{dx}$.
Стога имамо

$$G(x,\theta+\mu)=\frac{\partial H(x,\theta+\mu)}{\partial(\theta+\mu)}\cdot\frac{d\theta}{dx}+\frac{\partial H(x,\theta+\mu)}{\partial x}=\frac{d}{dx}H(x,\theta+\mu),$$

јер је

$$\frac{d\theta}{dx}=\frac{d(\theta+\mu)}{dx}.$$

2. случај: нека је $\theta = [\exp^{(q)}]$, тј. $\theta = \exp\gamma$, где је γ класе $q-1$. У овом случају имамо

$$\frac{d\theta}{dx} = e^{\gamma}\frac{d\gamma}{dx} = \theta\cdot\frac{d\gamma}{dx},$$

одакле је

$$G(x,\theta\cdot\mu) = \frac{\partial H(x,\theta\cdot\mu)}{\partial(\theta\cdot\mu)}\cdot\mu\frac{d\theta}{dx} + \frac{\partial H(x,\theta\cdot\mu)}{\partial x} = \frac{d}{dx}H(x,\mu\cdot\theta).$$

□

Став 8. *Нека је $\alpha = \log\pi$ при чему је π сређен израз класе $q-1$. Тада важи да је α класе мање од q ако и само ако је*

$$\pi = c\cdot\eta_1^{A_1}\cdot\eta_2^{A_2}\cdot\ldots\cdot\eta_k^{A_k}, \tag{9}$$

где је c израз класе $q-2$ или мање, $Aj \in Q$, $\eta_j = [\exp^{(q-1)}]$, $j = \overline{1,k}$.

Доказ. Ако је π облика (9) лако се види да долази до скраћивања и да је $\log\pi$ класе мање од q.

За обратан смер претпоставимо да је θ основни трансцедентни класе $q-1$ који учествује у π, и нека је $H(x)$ израз класе $q-1$ или мање добијен сређивањем израза $\log\pi(x)$.

1. случај: нека је $\theta = [\log^{(q-1)}]$. Тада диференцирањем једнакости

$$\log\pi(x,\theta) = H(x,\theta) \tag{10}$$

налазимо

$$\frac{\frac{d}{dx}\pi(x,\theta)}{\pi(x,\theta)} = \frac{d}{dx}H(x,\theta)$$

а због претходне леме и

$$\frac{\frac{d}{dx}\pi(x,\theta+\mu)}{\pi(x,\theta+\mu)} = \frac{d}{dx}H(x,\theta+\mu)$$

тј.

$$\log\pi(x,\theta+\mu) = H(x,\theta+\mu) + c. \tag{11}$$

Од једнакости (11) одузимамо једнакост (10). Добијамо

$$\log\frac{\pi(x,\theta+\mu)}{\pi(x,\theta)} = H(x,\theta+\mu) - H(x,\theta) + c,$$

а када ставимо θ_0 уместо θ и извршимо још једно одузимање добијамо и

$$\log\frac{\pi(x,\theta+\mu)}{\pi(x,\theta)}\cdot\frac{\pi(x,\theta_0)}{\pi(x,\theta_0+\mu)} = H(x,\theta+\mu) - H(x,\theta) - H(x,\theta_0+\mu) + H(x,\theta_0).$$

Десна страна последње једнакости је алгебарска по μ, а како је логаритам алгебарске функције трансцедентна, ово је могуће једино ако $\frac{\pi(x,\theta+\mu)}{\pi(x,\theta_0+\mu)}$ не зависи од μ.

Када ставимо $\theta_0 = 0$ и заменимо улоге μ и θ то значи да израз $\frac{\pi(x,\theta+\mu)}{\pi(x,\theta)}$ не зависи од θ, тј. једнак је некој константи. Отуда је

$$\pi(x, \theta + \mu) = C\pi(x, \theta).$$

Одатле је

$$\log \pi(x, \theta + \mu) - \log \pi(x, \theta) = \log C = A,$$

тј.

$$\log \pi(x, \theta) = A(x)\cdot\theta + B(x)$$

Долазимо до закључка да је

$$\pi(x, \theta) = e^{B(x)}\cdot e^{A(x)\theta}$$

што је у контрадикцији са претпоставком да π мора бити алгебарска функција од θ.

Нека је сада $\theta = [\exp^{(q-1)}]$ основни у π. Користећи поново претходну лему налазимо једнакости

$$\frac{\frac{d}{dx}\pi(x,\theta)}{\pi(x,\theta)} = \frac{d}{dx}H(x,\theta)$$

$$\frac{\frac{d}{dx}\pi(x,\mu\cdot\theta)}{\pi(x,\mu\cdot\theta)} = \frac{d}{dx}H(x,\mu\cdot\theta)$$

$$\log \pi(x, \mu\cdot\theta) = H(x, \mu\cdot\theta).$$

На исти начин као и у претходном случају закључујемо

$$\log \pi(x, \mu\cdot\theta) = \log \pi(x, \theta) + A_1.$$

Применом леме 1 б) добијамо

$$\log \pi(x, \theta) = A(x)\cdot\log\theta + B(x)$$

$$\pi(x, \theta) = \theta^{A(x)}\cdot e^{B(x)}$$

што је у контрадикцији са претпоставком да π мора бити алгебарска функција од θ, осим ако је $A(x) = A \in \mathbf{Q}$, и тада је

$$\pi(x, \theta) = \theta^{A}\cdot F(x).$$

$\square$

Навешћемо један став који се на исти начин доказује као и Став 8.

Став 9. *Нека је* $\alpha = \exp \pi$ *при чему је* π *сређен израз класе* $q-1$. *Тада важи да је* α *класе мање од* q *ако и само ако је* $\pi = c \cdot \xi_1^{A_1} \cdot \xi_2^{A_2} \cdot \ldots \cdot \xi_k^{A_k}$, *где је* c *израз класе* $q-2$ *или мање,* $Aj \in \mathbf{Q}$, $\quad \eta_j = [\log^{(q-1)}]$, $\quad j = \overline{1,k}$.

3 Израчунљивост

Дефиниција 15. *Интеграле који се не могу представити функцијама у коначном облику називаћемо* ***неизрачунљивим****, док оне који се могу представити функцијама у коначном облику називаћемо зваћемо* ***израчунљивим****.*

3.1 Општа Лјувилова шема

Теорема 1. *(Општа Лјувилова шема) Нека је $F(x)$ сређена функција у коначном облику. Ако је $\int F(x)dx$ израчунљив, тада је он облика*

$$\int F(x)dx = \phi_0(x) + \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot \log \phi_j(x) + c$$

где су c_j, $1 \le j \le n$ константе, а ϕ_j, $0 \le j \le n$ алгебарске у односу на F.

Напомена: Другим речима, трансцедентност се, приликом израчунавања, може повећати само за 1, и то само додавањем нових логаритама.

Напомена: Служимо се Лјувиловим ознакама, па се као специјалан случај сабирка $c_j \cdot \log \phi_j$ може јавити и arcsin, arccos, arctg или arcctg.

Доказ. Претпоставимо да је $\int F(x)dx = H(x) + c$ где је H сређен израз класе q у односу на F. Доказујемо да се од трансцедентних блокова највише класе може јавити само log, и то као сабирак, а не може exp.

1. корак

Нека је θ основни трансцедентни блок у H класе q. Посматрајмо једнакост

$$F(x) = \frac{d}{dx} H(x, \theta) \tag{12}$$

где је извод функције H сређен. Та једнакост, као алгебарска по θ и сређена, према основном Лјувиловом принципу (Став 4) постаје идентитет, тј. уместо θ се може уврстити било шта.

1. случај: Нека је $\theta = [\log^{(q)}]$. Тада уместо θ у (12) уврстимо $\theta + \mu$. Тако добијамо

$$F(x) = \frac{d}{dx} H(x, \theta + \mu),$$

а одатле и из (12)

$$H(x, \theta + \mu) = H(x, \theta) + c.$$

Како c зависи само од μ, на основу Леме 1а) добијамо

$$H(x,\theta) = A \cdot \theta + B(x) = A[\log^{(q)}] + B(x),$$

где су A и B транседентне класе строго мање од q.

2.случај: Нека је $\theta = [\exp^{(q)}]$. Тада уместо θ у уврстимо $\mu \cdot \theta$. Тако добијамо

$$F(x) = \frac{d}{dx} H(x, \mu \cdot \theta),$$

а одатле и из (12)

$$H(x, \mu \cdot \theta) = H(x,\theta) + c.$$

Како c зависи само од μ, на основу Леме 1б) добијамо

$$H(x,\theta) = A \cdot \log\theta + B(x).$$

Долазимо до контрадикција јер H треба да буде алгебарска функција од θ. Стога је овај случај немогућ.

2. корак

Доказујемо да је класа израза H у односу на F највише 1.

Претпоставимо супротно, да је $q > 1$. Нека је θ основни трансцедентни блок у H класе $q-1$. Тада је

$$\int F(x)dx = \phi_0(x,\theta) + \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot \log\phi_j(x,\theta) + c =: H(x,\theta)$$

После примене првог извода добијамо

$$F(x) = \frac{d}{dx}\phi_0(x,\theta) + \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{\phi_j} \cdot \frac{d}{dx}\phi_j = \frac{d}{dx}H(x,\theta).$$

Претходна једнакост јесте алгебарска функција од θ, те стога по основном Љјувиловом принципу представља идентитет. Дакле у једнакост

$$F(x) = \frac{d}{dx}H(x,\theta)$$

можемо уврстити θ_μ, уместо θ. Дакле, важи

$$F(x) = \frac{d}{dx}H(x,\theta_\mu),$$

а одатле и

$$H(x,\theta_\mu) = H(x,\theta) + c.$$

Приметимо да c зависи само од μ.

У случају када је $\theta = [\log^{(q-1)}]$, тада узимамо $\theta_\mu = \theta + \mu$, па слично као и у првом кораку налазимо

$$H(x, \theta) = A\theta + B(x).$$

Стога θ не учествује ефективно ни у једној функцији ϕ_j, $1 \leq j \leq n$, већ само у ϕ_0.

У случају када је $\theta = [\exp^{(q-1)}]$, тада узимамо $\theta_\mu = \mu \cdot \theta$, и поново као у првом кораку изводимо

$$H(x, \theta) = A \cdot \log \theta + B(x),$$

где је $\theta = \exp_\gamma$ где је γ класе $q-2$ па је

$$H(x, \theta) = A \cdot \gamma + B(x).$$

И у овом случају видимо да θ не учествује ефективно у ϕ_j. Дакле унутар ϕ_j нема ни једне основне трансцедентне класе $q-1$, одакле $\log \phi_j$ не може бити класе q.

Добили смо контрадикцију, па претпоставка $q > 1$ не може да опстане. $\square$

3.2 Дефинициони полиноми, скала алгебарских поредака

Нека је α сређен израз класе q, облика

$$\alpha = F(\theta_1^{(q)}, \theta_2^{(q)}, \dots \theta_{n_q}^{(q)}, \theta_1^{(q-1)}, \dots \theta_{n_q-1}^{(q-1)}, \dots, \theta_1^{(1)}, \dots, \theta_n^{(1)}, x),$$

где је F алгебарска функција од основних трансцедентних класе q, $\theta_1^{(q)}$, $\theta_2^{(q)}, \dots \theta_{n_q}^{(q)}$.

Претходни израз можемо записати у облику

$$\alpha = H(\theta_1^{(q)}, \theta_2^{(q)}, \dots, \theta_{n_q}^{(q)}, \xi_q),$$

где је H рационална функција од $\theta_1^{(q)}, \theta_2^{(q)}, \dots, \theta_{n_q}^{(q)}$ и алгебарска од осталих, док је ξ_q алгебарска од $\theta_1^{(q)}, \theta_2^{(q)}, \dots, \theta_{n_q}^{(q)}$ тј. ξ_q поништава неки полином облика:

$$\varphi_{m_q}^{(q)} \xi_q^{m_q} + \varphi_{m_{q-1}}^{(q)} \xi_q^{m_{q-1}} + \dots + \varphi_1^{(q)} \xi_q + \varphi_0^{(q)} = 0. \tag{13}$$

Напомена: За почетак се може добити рационална функција од основних трансцедентних $\theta_1^{(q)}, \theta_2^{(q)}, \dots, \theta_{n_q}^{(q)}$, и више (али коначно много) алгебарских функција од $\theta_1^{(q)}, \theta_2^{(q)}, \dots, \theta_{n_q}^{(q)}$. Међутим, свако коначно раширење поља се може представити као генерисано једним елементом, најчешће збиром генератора. (Видети Тврђење 3.)

Дефиниција 16. *Ако је полином (13) минималног степена такав да га ξ_q поништава и ако су за $j = 0, 1, \dots, m_q$, $\varphi_j^{(q)}$ рационалне функције од $\theta_i^{(q)}$, тада се полином (13) назива дефинициони полином.*

Дефиниција 17. *Алгебарски поредак је највећи степен у дефиниционом полиному.*

Посматрајући полином (13), закључујемо да је алгебарски поредак изараза ξ_q баш m_q.

Нека су основне трансцедентне које се јављају у α класе $q-1$, $\theta_1^{(q-1)}$, $\dots \theta_{n_q-1}^{(q-1)}$.

$$\theta_i^{q-1} = \begin{cases} \exp \beta_i \\ \log \beta_i \end{cases}$$

Сви алгебарски изрази од $\theta^{(q-1)}$ и остали који се јављају у β_i и коефицијенти $\varphi_j^{(q)}$ могу се заменити једним ξ_{q-1}.

$$\varphi_{m_{q-1}}^{(q-1)} \xi_{q-1}^{m_{q-1}} + \varphi_{m_{q-1}-1}^{(q-1)} \xi_{q-1}^{m_{q-1}-1} + \dots + \varphi_1^{(q-1)} \xi_{q-1} + \varphi_0^{(q-1)} = 0$$

Дефиниција 18. *Полиноми*

$$\varphi_{m_k}^{(k)}\xi_k^{m_k} + \varphi_{m_k-1}^{(k)}\xi_k^{m_k-1} + \ldots + \varphi_1^{(k)}\xi_k + \varphi_0^{(k)} = 0 \tag{14}$$

су ***дефинициони полиноми*** *($k = q, q-1, \ldots, 0$), а $q+1$ торка*

$$(m_q, m_{q-1}, \ldots, m_1, m_0) \tag{15}$$

је ***скала алгебарских поредака****.*

Када скалу алгебарских поредака чине јединице, дефинициони полиноми су првог степена, па су све функције рационалне.

Пример 14. *Нека је*

$$y = \sqrt{\theta_1^{(1)} + \theta_2^{(1)}\sqrt{x+1}}, \quad \theta_1^{(1)} = \log(x^2 + \sqrt{x}), \quad \theta_2^{(1)} = e^x,$$

и нека је

$$\xi = \sqrt{x} + \sqrt{x-1}.$$

Тада је

$$\xi^{(1)^2} - (\theta_1^{(1)} + \theta_2^{(1)}\sqrt{x+1}) = 0 \tag{16}$$

и

$$\xi^4 - 2(1-2x)\xi^2 + 1 = 0. \tag{17}$$

$$\sqrt{x} = \frac{\xi^2 - 1}{2\xi}, \quad \sqrt{x+1} = \frac{\xi^2+1}{2\xi}, \quad x^2 + \sqrt{x} = \frac{2\xi x^2 + \xi^2 - 1}{2\xi}$$

Једнакост (16) добија облик

$$\xi^{(1)^2} - \left(\theta_1^{(1)} + \theta_2^{(1)}\frac{\xi^2+1}{2\xi}\right) = 0.$$

Скала алгебарских поредака је (2, 4).

У ставу 7 смо показали да извод израза не повећава класу израза. Размотримо сада

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(4x\sqrt{x}+1)\sqrt{x+1} + (3x+1)(x^2+\sqrt{x})\theta_2^{(1)}}{2(x^2\sqrt{x}+x)\sqrt{x+1}\sqrt{\theta_1^{(1)} + \theta_2^{(1)}\sqrt{x+1}}}.$$

На основу једнакости (16) и (17) видимо да је скала алгебарских поредака претходног израза такође (2, 4).

Лема 3. *Ако је ξ алгебарска функција од $y_1, \ldots, y_m$, тада је $\frac{\partial \xi}{\partial y_1}$ рационална функција у односу на ξ.*

Доказ. Нека ξ поништава неки полином облика:

$$A_k\xi^k + A_{k-1}\xi^{k-1} + \ldots + A_1\xi + A_0 = 0,$$

где су $A_0, A_1, ..., A_k$ рационалне функције од y.

$$\frac{\partial A_k}{\partial y_1}\xi^k + \frac{\partial A_{k-1}}{\partial y_1}\xi^{k-1} + \ldots + \frac{\partial A_1}{\partial y_1}\xi + \frac{\partial A_0}{\partial y_1} + \\ + (A_k \cdot k \cdot \xi^{k-1} + A_{k-1} \cdot (k-1) \cdot \xi^{k-2} + \ldots + A_1)\frac{\partial \xi}{\partial y_1} = 0$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y_1} = -\frac{\frac{\partial A_k}{\partial y_1}\xi^k + \ldots + \frac{\partial A_0}{\partial y_1}}{A_k \cdot k \cdot \xi^{k-1} + \ldots + A_1}$$

Сви изрази са дене стране су рационалне функције по y_1. $\square$

Став 10. *Нека је α срећен израз класе q са дефиниционим полиномима (14) и скалом алгебарских поредака (15). Тада израз $\frac{d\alpha}{dx}$ има исте дефиниционе полиноме и исту скалу алгебарских поредака.*

Доказ. Показаћемо само за највиши поредак, тј. за $k = q$. Нека је

$$\alpha = H(\theta_1, \ldots, \theta_n, \xi)$$

где је H рационална по $\theta_1, ..., \theta_n, \xi$ и алгебарска у односу на остале, а ξ је алгебарска функција од $\theta_1, ..., \theta_n$, са дефиниционим полиномом (13). Имамо:

$$\frac{d\alpha}{dx} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial \theta_j} \cdot \frac{d\theta_j}{dx} + \frac{\partial H}{\partial \xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = H(\theta_1, \ldots, \theta_n, \xi).$$

Јасно је да су $\frac{\partial H}{\partial \theta_j}$ и $\frac{\partial H}{\partial \xi}$ рационалне по $\theta_1, \ldots, \theta_n, \xi$, док су $\frac{d\theta_j}{dx}$ и $\frac{d\xi}{dx}$ рационалне на основу Леме 3, па је и $\frac{d\alpha}{dx}$ рациоонално по θ_1, ... θ_n, ξ. $\square$

3.3 Општа Абелова шема

Теорема 2. *(Општа Абелова шема) Нека је F израз у коначном облику класе q са дефиниционим полиномом (14) и скалом алгебарских поредака (15). Ако се $\int F(x)dx$ може изразити у коначном облику, тада је*

$$\int F(x)dx = \Phi_0(x) + \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot \log \Phi_j(x) + c \tag{18}$$

где су $\Phi_0, \ldots, \Phi_n$ алгебарске у односу на F са истим дефиниционим полиномом (14) и истом скалом алгебарских поредака (15).

Напомена: Другим речима, никакав "нови корен" не може да се појави приликом израчунавања интеграла.

Доказ. Нека је

$$F(x) = H(\theta_1, \ldots \theta_n, \xi),$$

где су θ_1, ..., θ_n основне трансцедентне класе q, F функција рационална по θ_1, ..., θ_n, ξ и алгебарска у односу на основне трансцедентне класе строго мање од q, а ξ поништава полином

$$\varphi_m \xi^m + \varphi_{m-1}\xi^{m-1} + \ldots + \varphi_1 \xi + \varphi_0 = 0$$

минималног степена.

Формула (18) важи на основу опште Лјувилове шеме. Потребно је доказати да основне трансцедентне калсе q не постоје ни у једној другој ирационалној функцији, изузев у τ. Претпоставимо супротно, да је

$$\Phi_j = \phi_j(\theta_1, \ldots \theta_n, \xi, \tau),$$

где је τ нова ирационална функција, тј τ поништава неки други минимални полином

$$\psi_l \tau^l + \psi_{l-1}\tau^{l-1} + \ldots + \psi_1 \tau + \psi_0 = 0. \tag{19}$$

Диференцирањем формуле (18) добијамо

$$F = \frac{d\phi_0}{dx} + \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{\phi_j} \cdot \frac{d\phi_j}{dx}.$$

Међутим,

$$\frac{d\phi_j}{dx} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi_j}{\partial \theta_i}\frac{\partial \theta_i}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi_j}{\partial \xi}\frac{d\xi}{dx} + \frac{\partial \theta_j}{\partial \tau}\frac{d\tau}{dx}$$

па је

$$F(x) = \frac{d\phi_0}{dx} + \sum_{i=1}^{n} \frac{c_j}{\phi_j} \cdot \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial \theta_i} \frac{\partial \theta_i}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi_j}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dx} + \frac{\partial \theta_j}{\partial \tau} \frac{d\tau}{dx} \right). \tag{20}$$

Приметимо да у свим саставним деловима претходног израза τ или не учествује или се јавља у рационалном облику. Стога је формула (20) еквивалентна некој једнакости, полиномској по τ. (Довољно је формулу (20) помножити највећим заједничким садржаоцем свих именилаца.)

$$\Omega(\theta_1, \ldots, \theta_n, \xi, \tau) = 0. \tag{21}$$

Како τ поништава (19) и (21) тада Ω и p имају заједнички корен а како је (19) несводљива полиномска једначина, тада

$$p | \Omega.$$

Отуда је $\Omega(\theta_1, \ldots, \theta_n, \xi, \tau) = 0$ за све нуле τ_i полинома $p(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_l)$. Стављајући τ_i на место τ у (20) добијамо

$$F(x) = \frac{d\phi_0(\tau_i)}{dx} + \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{\phi_j(\tau_i)} \cdot \frac{d\phi_j(\tau_i)}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\phi_0(\tau_i) + \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot \log \phi_j(\tau_i) \right),$$

односно

$$\int F(x)dx = \phi_0(\tau_i) + \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot \log \phi_j(\tau_i) + D_i.$$

Сумирањем и деобом са степеном полинома (19) добијамо

$$\int F(x)dx = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^{l} \phi_0(\tau_i) + \frac{1}{l} \sum_{j=1}^{n} c_j \prod_{i=1}^{l} \phi_j(\tau_i) + D.$$

Добијени израз са десне стране је алегбарски и симетричан по $\tau_1, \ldots, \tau_l$, па се може представити као израз који зависи само од коефицијената полинома (19), а они рационално зависе од $\theta_1, \ldots \theta_n, \xi$.

Овиме је доказано да се најстарији алгебарски поредак подинтегралне функције и резултата израчунавања интеграла поклапају. На сличан начин се доказује да се у резултату интеграла (18) не може јавити нова ирационална функција од основних трансцедентних нижих класа, тј да се скале алгебарских поредака поклапају. □

Теорема 3. *Нека је* $I = \int e^{m(x)} \cdot \varphi(x)dx$ *израчунљив, где су* m *и* φ *класе* $q-1$. *Тада је*

$$I = e^{m(x)} \cdot \psi(x),$$

где ψ *има исте дефиниционе полиноме и исту скалу поредака као и* φ.

Доказ. Означимо са $\theta = e^{m(x)}$ једину основну трансцедентну функцију класе q. По основној Лјувиловој шеми, важи:

$$\int e^{m(x)} \cdot \varphi(x)dx = \phi_0(\theta) + \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot \log \phi_j(\theta) + D.$$

Означимо десну страну претходне једнакости са $\pi(x, \theta) + D$. Након диференцирања добијамо

$$\theta\varphi(x) = e^{m(x)}\varphi(x) = \frac{d\pi}{dx}. \tag{22}$$

С друге стране

$$\frac{d\pi}{dx} = \frac{d\phi_0}{dx} + \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{\phi_j} \cdot \frac{d\phi_j}{dx},$$

где је

$$\frac{d\phi_j}{dx} = \frac{\partial\phi_j}{\partial x} + \frac{\partial\phi_j}{\partial\theta} \cdot \frac{d\theta}{dx}.$$

то јест

$$\frac{d\pi}{dx} = \frac{\partial\phi_0}{\partial x} + \frac{\partial\phi_0}{\partial\theta} \cdot \frac{d\theta}{dx} + \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{\phi_j} \cdot \left(\frac{\partial\phi_j}{\partial x} + \frac{\partial\phi_j}{\partial\theta} \cdot \frac{d\theta}{dx}\right).$$

На десној страни претходне формуле се налази рационална фунцкија од θ (тј везивна). Како су све функције сређене, по основном Лјувиловом принципу (Став 4) формула (22) чини идентитет.

У (22) уврстимо $\mu\theta$ уместо θ, па добијамо

$$\mu \cdot \theta \cdot \varphi(x) = \frac{d}{dx}\pi(x, \mu\theta).$$

После интеграције добијамо

$$\mu \cdot I = \pi(x, \mu\theta) + D.$$

Тако добијамо функционалну једначину

$$\mu \cdot \pi(x, \theta) = \pi(x, \mu\theta) + D.$$

После смене $D = (\mu - 1)E$, имамо

$$\mu \cdot \pi(x, \theta) = \pi(x, \mu\theta) + \mu E - E,$$

односно

$$\mu(\pi(x, \theta) - E) = \pi(x, \mu\theta) - E.$$

Након дељења претходног израза са μ и θ добијамо

$$\frac{\pi(x, \theta) - E}{\theta} = \frac{\pi(x, \mu\theta) - E}{\mu\theta}$$

Лева страна једнакости не зависи од μ, па ни десна страна једнакости неће зависити од μ. Како

$$\frac{\pi(x, \mu\theta) - E}{\mu\theta}$$

не зависи од μ, неће зависити ни од θ.

$$\frac{\pi(x, \theta) - E}{\theta} = A$$

$$\pi(x, \theta) = A\theta + E$$

$$\int e^{m(x)}\varphi(x)dx = e^{m(x)}\psi(x) + c$$

Десна страна једнакости мора бити алгебарска у односу на леву страну претходне једнакости. И више, према основној Абеловој шеми, ψ има исте дефиниционе полиноме и исту скалу предака као и φ.

Тиме је доказан став. $\square$

3.4 Испитивање $\int \frac{\mathrm{e}^x}{x} dx$

Став 11. *$\int \frac{\mathrm{e}^x}{x}$ је неизрачунљив.*

Доказ. Претпоставимо супротно, тј. да је $\int \frac{\mathrm{e}^x}{x}$ израчунљив. На основу Теореме 3 важи:

$$\int e^x \cdot \frac{1}{x} dx = e^x \cdot Q(x) + c$$

где је Q рационална функција.

$$\int \frac{e^x}{x} = e^x \cdot Q(x) + C$$

Применимо први извод.

$$\frac{e^x}{x} = e^x \cdot Q^{'}(x) + e^x \cdot Q(x)$$

Добијамо диференцијалну једначину

$$Q^{'}(x) + Q(x) = \frac{1}{x}. \tag{23}$$

Добијену диференцијалну једначину не вреди решавати уобичајеним методама јер се тако враћамо на почетни облик.

Испитаћемо да ли ова диференцијална једначина има решење које је рационална функција.

Претпоставимо да има и да је облика

$$Q(x) = \frac{\alpha(x)}{\beta(x)},$$

где су α и β полиноми.

Нека је x_0 корен полинома β вишеструкости k. Тада је

$$Q(x) = \frac{\alpha(x)}{(x - x_0)^k \beta_1(x)}.$$

Када то заменимо у (23), добијамо

$$\frac{\alpha'(x)(x-x_0)^k\beta_1(x)-\alpha(x)(k(x-x_0)^{k-1}\beta_1(x)+(x-x_0)^k\beta_1'(x))}{(x-x_0)^{2k}\beta_1^2(x)}+$$
$$+\frac{\alpha(x)}{(x-x_0)^k\beta_1(x)}=\frac{1}{x},$$

односно, када скратимно чинилац $(x-x_0)^k$

$$\frac{\alpha'-\alpha\cdot\frac{k}{x-x_0}-\alpha\cdot\beta_1'\cdot\frac{1}{\beta_1}+\alpha}{(x-x_0)^k\beta_1}=\frac{1}{x},$$

што после множења са $x(x-x_0)^k\beta_1$ постаје

$$x(\alpha'-\alpha\cdot\frac{k}{x-x_0}-\alpha\cdot\frac{\beta_1'}{\beta_1}+\alpha)=(x-x_0)^k\cdot\beta_1.$$

Ово је могуће само када је $x_0=0$, јер би се у супротном са леве стране нашла рационална функција са полом у тачки x_0, док се са десне стране налази полином. Стога полином β нема других корена осим нуле, тј.

$$Q(x)=\frac{\alpha(x)}{x^l}.$$

Уврстимо у (23) и добијамо

$$\frac{\alpha' x^l-\alpha\cdot l\cdot x^{l-1}}{x^{2l}}+\frac{\alpha}{x^2}=\frac{1}{x}.$$

Одатле је

$$\alpha'\cdot x-l\cdot\alpha+\alpha\cdot x=x^l.$$

То је, међутим, немогуће осим за $l=0$, јер по претпоставци полином α нема заједничких нула са β. Стога је Q полином. Међутим, тада једнакост (23) више није одржива.

Добили смо контрадикцију, па закључујемо да полазни интеграл није израчунљив. $\square$

Литература

[1] Д. Мордухај-Болтовскoj (Д. Мордухай – Болтовской.),
О интеграцији трансцедентних функција (ОБЪ ИНТЕГРИРОВАНIИ ТРАНСЦЕДЕНТЫХЪ ФУНКЦIЙ),
Варшава, 1913.

[2] Д. Аднађевић, З. Каделбург,
Математичка анализа I,
Београд, 2008.

[3] Милан Божић,
Преглед историје и филозофије математике,
Београд, 2010.

[4] Елементарне функције и њихови графици,
https://personal.pmf.uns.ac.rs/nevena.dugandzija,
приступљено дана 07.08.2018.