UNIVERZITET U BEOGRADU
Matematički fakultet

MASTER RAD

Primena znanja o polinomima u takmičarskim zadacima za učenike srednjih škola

student
Ivana Janjić
1135/2016

mentor
dr Tanja Stojadinović

Beograd
2019.

Sadržaj

1. Uvod 3

2. Definicija polinoma 4

3. Operacije sa polinomima 6

3.1. Sabiranje, oduzimanje, množenje 6

3.2. Izvod polinoma 8

3.3. Deljenje polinoma 8

3.4. Najveći zajednički delilac 10

3.5. Najmanji zajednički sadržalac 12

3.6. Bezuov stav i posledice 12

4. Faktorizacija polinoma 13

4.1. Osnovna teorema algebre 13

4.2. Vietova pravila 20

5. Polinomi u takmičarskim zadacima učenika srednjih škola 22

5.1. Opštinska takmičenja 22

5.2. Okružna takmičenja 28

5.3. Državna takmičenja 33

6. Zaključak 37

1. Uvod

Abu Džafar Muhamed Ibi Musa Al Horezmi
(oko 780 – oko 850)

U okviru nauke koja proučava prostorne oblike i kvalitativne odnose među veličinama našla je svoje mesto i algebra. Jedna je od najstarijih i ujedno najvažnijih matematičkih oblasti (grana). Ime je dobila od početne reči u naslovu dela *Algebra almukabala* iz IX veka, arapskog matematičara *ALCHVARIZMIJA* (oko 820. godine). Inače, počeci današnje algebre naziru se već kod grčkog matematičara *Diofanta* (kraj II veka). Pre toga algebarski problemi rešavali su se geometrijskim putem. Operacijski znaci + i - javljaju se u XI veku. Francuz *Viet* uvodi simbole i pokazuje da se njima mogu izvoditi sve računske operacije.

Deljenje polinoma polinomom u današnjem smislu počinje sa *S. Stevinom (1548-1620)*, koji je znao da odredi pomoću deljenja zajedničku "meru" za polinome. Tim pitanjem bavio se kasnije i *Lajbnic,* ali tek ga je *Njutn* doveo do današnjeg stanja.

Od XVII do XIX veka u središtu pažnje bilo je rešavanje algebarskih jednačina. *Gaus*, krajem XVIII veka, prilikom odbrane doktorata iznosi prvi ispravni ***dokaz osnovne teoreme algebre.*** Od sredine XIX veka težište algebre pomera se ka izučavanju proizvoljnih operacija, tj. onih koje nisu definisane nad brojevima.

Zahvaljujući *Diofantu, Euklidu, Njutnu, Gausu, Lajbnicu, Vietu, Tejloru, Lagranžu* i ostalima, koji su se manje više bavili temom polinoma, mi ih danas imamo u ovom obliku, kao i mnoge druge odgovore koje je ova oblast donela sa sobom.

2. Definicija polinoma

Izraz

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0$$

je polinom stepena n po promenljivoj (nepoznatoj) x, sa koeficijentima $a_0, a_1, \ldots, a_n$, koji su realni, to jest iz polja R.

Izrazi $a_0, a_1 x, \ldots, a_n x^n$ su članovi polinoma (koje nazivamo monomima), a_0 je slobodan član, $a_n x^n$ vodeći član, a a_n vodeći koeficijent.

Polinom $P(x)$ je normiran (moničan) ako i samo ako je $a_n = 1$.

Polinom $0 + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^n$ je nula-polinom.

Dva polinoma su identički jednaka ako imaju jednake stepene i sve odgovarajuće koeficijente među sobom.

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 x^0 = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0 x^0$$

$$<=> \ (a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 - b_1)x + a_0 - b_0 = 0$$

$$<=> \ a_n = b_n \wedge a_{n-1} = b_{n-1} \wedge \ldots \wedge a_1 = b_1 \wedge a_0 = b_0.$$

Ako su dva polinoma P i Q jednaka, oni imaju jednake vrednosti u svakoj tački (tačka mora pripadati oblasti definisanosti), dakle odgovarajuće polinomske funkcije $P(x)$ i $Q(x)$ su jednake. Za obrnuto važi sledeće: polinomi P i Q jednaki su ako su jednake odgovarajuće funkcije, tj. ako je $P(x) = Q(x)$ samo u poljima sa beskonačno mnogo elemenata. U konačnim poljima jednakost dve polinomske funkcije ne implicira jednakost koeficijenata.

Ako su dva polinoma P i Q jednaka, njihova razlika $P - Q$ je nula polinom.

Stepenom (rangom) polinoma naziva se stepen onog od monoma koji ga obrazuju čiji je stepen najviši (stepen polinoma P označava se sa dgP).

Stepen *nula-polinoma* često se definiše kao $dg0 = -\infty$, pri čemu važi $(-\infty) + (-\infty) = -\infty < n$ i $(-\infty) + n = n + (-\infty) = -\infty$.

Ako je $dgP = 1$, kažemo da je takav polinom *linearan*. To su polinomi oblika $P = ax + b$, pri čemu je $a \neq 0$.

Polinom je *konstanta*, to jest oblika $P = a$, ako i samo ako je $dgP \leq 0$.

Za proizvoljne polinome P i Q važi:

1) $dg(P + Q) \leq max\{dgP, dgQ\}$
2) $dg(P \cdot Q) \leq dgP + dgQ$

Kada je u pitanju polinom sa više promenljivih, stepen dobijamo tako što saberemo izložioce (u okviru jednog monoma, najvišeg stepena), npr:

$$P(x, y) = 6x^2y^3 + 5xy^4 - 2x^2 + 1$$

je polinom 5. stepena (3. u odnosu na x i 4. u odnosu na y).

3. Operacije sa polinomima

3.1. Sabiranje, oduzimanje, množenje

Neka je $K[x]$ skup svih polinoma sa koeficijentima iz polja K, pri čemu će kod nas biti $K = R$ ili $K = C$. $K \subseteq K[x]$, jer svaki element a skupa K, pri čemu je $a \neq 0$, jeste polinom stepena 0.

Na skupu $K[x]$ definisaćemo binarne operacije, sabiranje i množenje polinoma, i ispitati njihove osobine.

Neka su $P = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ i $Q = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$ polinomi iz skupa $K[x]$.

a) <u>***Sabiranje polinoma***</u>

Da bi se sabrala dva polinoma, dovoljno je napisati ih jedan u produžetku drugog zadržavajući znak svakog člana zbira. Pri tome se svode slični članovi ukoliko ih ima, pa imamo

$$P + Q = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_m + b_n)x^m + a_{m+1}x^{m+1} + \dots + a_nx^n \quad \text{za} \quad n \geq m.$$

b) <u>***Oduzimanje polinoma***</u>

Da bi se oduzeo jedan polinom od drugog dovoljno je promeniti znake svih njegovih koeficijenata i dodati ga potom prvom polinomu. Zatim se vrši redukcija sličnih članova ukoliko ih ima.

$$P - Q = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \dots + (a_m - b_n)x^m + a_{m+1}x^{m+1} + \dots + a_nx^n \quad \text{za} \quad n \geq m.$$

(Oduzimanje je operacija inverzna sabiranju.)

c) <u>***Proizvod polinoma***</u>

Dva polinoma se množe tako što se obrazuje zbir svih članova dobijenih množenjem svakog člana jednog polinoma svakim članom drugog.

$$P \cdot Q = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \dots + (a_0b_k + a_1b_{k-1} + \dots + a_kb_0)x^k + \dots + a_nb_mx^{m+n}$$

Za uvedene operacije i stepen polinoma važi:

a) $dg(P + Q) \leq max\{dgP, dgQ\}$

b) Ako je $P \neq 0 \ \wedge \ Q \neq 0$, tada je $P \cdot Q \neq 0$ i $dg(P \cdot Q) = dgP + dgQ$.

Ako je $dgP = m$, a $dgQ = n$ onda će koeficijent uz i-ti stepen polinoma $P + Q$ biti jednak 0 ako je $i > max(m, n)$. Time je prvo tvrđenje dokazano.

Drugo tvrđenje sledi iz činjenice da je vodeći koeficijent polinoma $P \cdot Q$ koji može da bude različit od nule jednak $a_m \cdot b_n$ (uz $(m + n)$-ti stepen) gde su a_m i b_n vodeći koeficijenti polinoma P odnosno Q. Ako ni P ni Q nisu nula tada je $a_m \neq 0$ i $b_n \neq 0$, pa je $a_m \cdot b_n \neq 0$.

Primetimo da uvedeno sabiranje i množenje skupu $K[x]$ daju strukturu prstena, to jest

Teorema 1: $(K[x], +, \cdot)$ je komutativni prsten sa jedinicom (bez delilaca nule).

Dokaz:

1) Sabiranje polinoma je unutrašnja, komutativna i asocijativna operacija. Neutralni element za sabiranje je nula-polinom, a suprotni polinom polinoma P jeste polinom $-P = -a_0 + (-a_1)x + \cdots + (-a_n)x^n$. Prema tome, struktura $(K[x], +)$ je Abelova grupa.
2) Množenje je unutrašnja, komutativna i asocijativna operacija. Neutralni element za množenje je konstantni polinom 1. Dakle, struktura $(K[x], \cdot)$ je polugrupa, ustvari monoid.
3) Važi distributivnost množenja u odnosu na sabiranje.

Dakle, skup polinoma $K[x]$, na kojem su definisane binarne operacije sabiranje i množenje, jeste komutativan prsten sa jedinicom.

Neka su polinomi P i Q, iz skupa $K[x]$, različiti od nula-polinoma. Tada je $dgP = n$ i $dgQ = m$, pa važi

$$dg(P \cdot Q) = dgP + dgQ = n + m$$

iz čega sledi da mora biti $P \cdot Q \neq 0$, pa prsten $K[x]$ nema delioce nule.▲

Takođe, polinome možemo definisati i kao nizove koeficijenata u kojima su svi članovi, osim njih konačno mnogo, jednaki nuli $(a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$. Ovakvi nizovi se sabiraju i množe po koordinatama:

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, \dots) + (b_0, b_1, b_2, b_3, \dots) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \dots)$$

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, \dots) \cdot (b_0, b_1, b_2, b_3, \dots) = (c_0, c_1, c_2, c_3, \dots)$$

pri čemu je $c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-1} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$.

Neutralni element za sabiranje bio bi niz $(0, 0, 0, \dots)$, a za množenje $(1, 0, 0, \dots)$. Za $a \in K$, pisali bismo $a = (a, 0, 0, \dots)$. Promenljiva je niz $x = (0, 1, 0, 0, \dots)$, a $x^n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ za svako $n \in N$.

Lako se proveri da ovako definisano sabiranje i množenje zadovoljavaju aksiome prstena.

Ovakav način definisanja polinoma poznat je kao ***algebarska definicija***.

3.2. Izvod polinoma

Ako je polinom $P = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ bilo koji polinom iz $K[x]$, tada polinom

$$P' = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}$$

zovemo njegovim izvodom, a tako određeno preslikavanje $P \to P'$ diferenciranjem u prstenu $K[x]$.

Tada važi: 1) $1' = 0$

2) $x' = 1$

3) $(ax^n)' = anx^{n-1}$ za svako $a \in K$

Takođe, za proizvoljne polinome P i Q važi:

1) $(P+Q)' = P' + Q'$
2) $(aP)' = aP'$
3) $(PQ)' = P'Q + PQ'$
4) $P(Q)' = P'(Q)Q'$
5) $dgP \geq 1 + dgP'$

Jasno je da je i P' takođe polinom, pa možemo i njega diferencirati kao i polazni polinom P. Izvod polinoma P' zovemo drugim izvodom polinoma P, što označavamo sa $(P')' = P'' = P^{(2)}$. Slično, indukcijom po $n \in N_0$, se definiše i n-ti izvod polaznog polinoma $P^{(n)} = \left(P^{(n-1)}\right)'$. Takođe, je $P^{(0)} = P$ kao i $P^{(n)} = 0$ za $n > dgP$.

3.3. Deljenje polinoma

Teorema 2: Neka su dati polinomi F i G, $(G \neq 0)$ iz $K[x]$. Tada postoje polinomi Q *(količnik)* i R *(ostatak)* takvi da je

$$F = G \cdot Q + R, \quad dgR < dgG.$$

Polinomi Q i R su pritom jednoznačno određeni.

Dokaz: Neka je n stepen polinoma F, a s stepen polinoma G.
Ako je $n < s$ i ako stavimo da je $Q = 0$ i $R = F$, dobijamo da važi formula $F = G \cdot Q + R$.
Ako je $n \geq s$,

$$F(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0, \quad a_n \neq 0$$

$$G(x) = b_s x^s + b_{s-1}x^{s-1} + \cdots + b_0, \quad b_s \neq 0$$

$$\text{i} \quad F(x) - \frac{a_n}{b_s}x^{n-s} \cdot G = F_1,$$

onda će F_1 imati stepen n_1 koji će biti manji od n $(dgF_1 < dgF)$. Koeficijent uz x^{n_1} označimo sa a_{n_1}. Ako je $n_1 \geq s$, stavimo da je

$$F_1(x) - \frac{a_{n_1}}{b_s}x^{n_1-s} \cdot G = F_2.$$

Za polinom F_2 označimo stepen sa n_2, a najstariji koeficijent sa a_{n_2}. Stavimo zatim, ako je $n_2 \geq s$, da važi

$$F_2(x) - \frac{a_{n_2}}{b_s}x^{n_2-s} \cdot G = F_3 \quad \text{itd.}$$

Kako je $dgF > dgF_1 > dgF_2 > dgF_3 > \cdots$, to posle konačnog broja koraka, dolazimo do polinoma F_k koji je dat sa

$$F_{k-1}(x) - \frac{a_{k-1}}{b_s}x^{n_k-s} \cdot G = F_k$$

pri čemu je $dgF_k < dgG$.

Iz prethodnih formula zamenom dobijamo

$$Q_{n-s}(x) = \frac{a_n}{b_s}x^{n-s} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{b_s}x^{n_{k-1}-s}, \quad R = F_k,$$

pa dobijamo početnu formulu $F = G \cdot Q + R$.

Ostaje nam još da se pokaže da su Q i R jedinstveni. Pretpostavićemo suprotno, da postoje Q_1 i R_1 koji zadovoljavaju formulu $F = G \cdot Q_1 + R_1$, pri čemu je $dgR_1 < dgG$. Ako oduzmemo ovu formulu od početne, dobijemo da je $G(Q - Q_1) = R_1 - R$

Stepen desne strane ove jednačine manji je od stepena polinoma G. Međutim, stepen leve strane bio bi ne manji od stepena polinoma G za $Q - Q_1 \neq 0$. Zato je $Q - Q_1 = 0$, tj. $Q = Q_1$, tada je i $R = R_1$. ▲

<u>Primer 1:</u>

1. Neka je $F(x) = x^5 + 3x^4 + 2x^2 + 1$ deljenik i $G(x) = x^2 + 1$ delilac. Količnik $Q(x)$ i ostatak R su

$$F_1 = x^5 + 3x^4 + 2x^2 + 1 - x^3(x^2 + 1) = 3x^4 - x^3 + 2x^2 + 1$$

$$F_2 = 3x^4 - x^3 + 2x^2 + 1 - 3x^2(x^2 + 1) = -x^3 - x^2 + 1$$

$$F_3 = -x^3 - x^2 + 1 + x(x^2 + 1) = -x^2 + x + 1$$

$$F_4 = -x^2 + x + 1 + (x^2 + 1) = x + 2$$

$$Q_3(x) = x^3 + 3x^2 - x - 1$$

$$R = x + 2$$

Zaista važi $F(x) = Q_3(x) \cdot G(x) + R$.

2. Algoritam deljenja se može predstaviti ovako:

$$
\begin{array}{l}
\left(x^5+3x^4\ \ +2x^2+1\right):\left(x^2+1\right)=x^3+3x^2-x-1 \\
\underline{-x^5-x^3} \\
\quad F_1=3x^4-x^3+2x^2+1 \\
\quad \underline{\ \ -3x^4 \qquad -3x^2\ \ } \\
\qquad F_2=-x^3-x^2+1 \\
\qquad\quad \underline{x^3+x} \\
\qquad\quad F_3=-x^2+x+1 \\
\qquad\qquad \underline{x^2 \quad +1} \\
\qquad\quad R=F_4=x+2
\end{array}
$$

3. Koristeći metodu nepoznatih koeficijenata primer se svodi na:

$$
x^5+3x^4+2x^2+1=\left(x^2+1\right)\left(x^3+ax^2+bx+c\right)+Mx+N
$$

$$
\Leftrightarrow\ x^5+3x^4+2x^2+1=x^5+ax^4+(1+b)x^3+(a+c)x^2+(b+M)x+c+N
$$

$$
\Leftrightarrow\ a=3\ \wedge\ b=-1\ \wedge\ c=-1\ \wedge\ M=1\ \wedge\ N=2
$$

Dakle, $R(x)=Mx+N=x+2$ i $Q(x)=x^3+ax^2+bx+c=x^3+3x^2-x-1.$

3.4. Najveći zajednički delilac

Ako je u prethodnoj teoremi $R=0$, kažemo da je polinom $P(x)$ deljiv polinomom $Q(x)$.

Činjenica da je polinom $P(x)$ deljiv polinomom $Q(x)$, tj. da je $Q(x)$ delilac polinoma $P(x)$ označava se sa $Q(x)\,|\,P(x)$.

NZD polinoma $P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x)$ je polinom najvećeg stepena koji deli sve $P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x)$, sa koeficijentom 1 uz najstariji član (jer ako je $d(x)$ NZD polinoma $P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x)$, tada je $a \cdot d(x)$ $(a \neq 0)$ takođe NZD tih polinoma).

Postupak nalaženja NZD kod prirodnih brojeva prenosi se doslovno na slučaj sa polinomima. Razlika je jedino u tome što se kod prirodnih brojeva vodi računa o vrednostima broja, a kod polinoma je bitan stepen.

Ukoliko su poznate nule polinoma, tada oni mogu biti predstavljeni u obliku proizvoda linearnih faktora i u tom slučaju NZD će biti proizvod svih zajedničkih faktora. NZD se može odrediti i pomoću tzv. *Euklidovog algoritma.*

Neka je $n=dgP(x)$ i $m=dgQ(x)$ $(n \geq m)$.

Pri deljenju polinoma $P(x)$ sa $Q(x)$ dobija se količnik $Q_1(x)$ sa ostatkom $R_1(x)$. Ako je $R_1(x)=0$, tada je $Q(x)$ najveći zajednički delilac polinoma $P(x)$ i $Q(x)$. Ako je $R_1(x)\neq 0$, tada delimo $Q(x)$ sa $R_1(x)$. Neka je količnik $Q_2(x)$ sa ostatkom $R_2(x)$. Produžimo li ovaj postupak, nailazimo na ostatak $R_k(x)$ koji se sadrži u prethodnom ostatku $R_{k-1}(x)$.

U stvari dobijamo niz identiteta:

$$
\begin{aligned}
&P(x) = Q(x)Q_1(x) + R_1(x),\\
&Q(x) = R_1(x)Q_2(x) + R_2(x),\\
&R_1(x) = R_2(x)Q_3(x) + R_3(x),\\
&.\\
&.\\
&.\\
&R_{k-2}(x) = R_{k-1}(x)Q_k(x) + R_k(x)\\
&R_{k-1}(x) = R_k(x)Q_{k+1}(x)
\end{aligned}
$$

Euklid
(oko 325 – oko 265 god. pre nove ere)

Dokazaćemo da je $R_k(x)$ najveći zajednički delilac polinoma $P(x)$ **i** $Q(x)$. Iz poslednja dva identiteta dobićemo:

$$
\begin{aligned}
&R_{k-2}(x) = R_k(x)Q_{k+1}Q_k(x) + R_k(x) = R_k(x)(Q_{k+1}(x)Q_k(x)+1), tj.\\
&R_k(x) \mid R_{k-2}(x).
\end{aligned}
$$

Iz identiteta $R_{k-3}(x) = R_{k-2}(x)Q_{k-1}(x) + R_{k-1}(x)$ sledi

$R_k(x) \mid R_{k-3}$, jer je

$R_k(x) \mid R_{k-1}$ i $R_k(x) \mid R_{k-2}(x)$.

Dalje se dobija

$$R_k(x) \mid R_{k-4}(x),\ R_k(x) \mid R_{k-5}(x), \ldots, R_k(x) \mid Q(x),\ R_k(x) \mid P(x).$$

Ovim smo dokazali da je $R_k(x)$ zajednički delilac polinoma $P(x)$ i $Q(x)$. Da bismo dokazali da je $R_k(x)$ i najveći zajednički delilac, pretpostavimo da $P(x)$ i $Q(x)$ imaju drugi NZD $r(x)$ takav da je $dgr(x) > dgR_k(x)$. Tada je $r(x) \mid R_1(x)$, $r(x) \mid R_2(x)$, …, $r(x) \mid R_k(x)$.

Prema tome, dobijamo da je $dgr(x) = dgR_k(x)$ i $r(x) = cR_k(x)$, gde je $c = const$. Ovim smo dokazali da je $R_k(x)$ jedinstven najveći zajednički delilac.

Ako je NZD za dva ili više polinoma jednak 1, kažemo da su ti polinomi *uzajamno prosti.*

Primer 2:

$$P_3(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4,\ \ P_2(x) = x^2 + 4x + 3$$

$$P_3(x) = P_2(x)(x-3) + (5x+5)$$

$$P_2(x) = (5x+5)\left(\frac{1}{5}x + \frac{3}{5}\right)$$

Rešenje: Kako u poslednjem deljenju ne
deljenja $5x + 5$, odnosno $NZD\ (P_3(x), P_$
koeficijent bude 1.

3.5. Najmanj

Najmanji zajednički sadržalac poli
stepena koji je deljiv sa svim polin
$NZS\ (P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x))$.

Postavlja se pitanje nalaženja N
polinoma, postoji tvrđenje koje može biti

Teorema 3: Neka su $P_n(x)$ i $P_m(x$
Tada je proizvod NZD i NZS tih polinom

3.6. Bezu

Treba pomenuti da se ostatak pri de
bez prethodno izvršenog celog postupka
tj. linearni polinom, odnosno polinom p
francuskog matematičara *Bezua*, tzv. *Bez*

Teorema 4: Ostatak pri deljenju
$x - a$ jednak je $P(a)$, tj. vrednost

Dokaz:

Ako se polinom P podeli sa $(x - a$
niži od P, a ostatak R je konstantan.

Prema tome može se napisati da je

Ako se stavi da je $x = a$, tada je
$P(a) = R$. ▲

Primer 3: Odrediti ostatak pri de
$Q(x) = x - 3$.

Rešenje: Na osnovu Bezuovog stava j

Posledica: Ako je a nula polinoma $P(x$
ostatka i može se predstaviti u obliku $P($