Univerzitet u Beogradu
Matematički fakultet

Hiperkompleksni sistemi i geometrija

Master rad

Mentor: Prof. dr Aleksandar Lipkovski
Student: Stefan Stanojkov 1053/2015

Beograd,
2018.

Sadržaj

1 Uvod

Hiperkompleksni sistemi predstavljaju konačnodimenzionalne algebre sa jedinicom nad poljem realnih brojeva koje su distributivne ali ne nužno i asocijativne. Njihovo proučavanje krajem XIX veka predstavlja osnovu moderne teorije grupa. Tokom XIX veka brojevni sistemi kao što su kvaternioni, oktave i sedenioni su postojali kao utvrđen koncept u matematičkoj literaturi, pridružen realnim i kompleksnim brojevima, a pojam hiperkompleksnih brojeva ih je sve obuhvatio.

U radu će biti dat osvrt na kompleksne brojeve, kvaternione i oktave, njihove osobine i neke od njihovih primena, pre svega u geometriji.

Prvo poglavlje je posvećeno kompleksnim brojevima. Biće definisan skup kompleksnih brojeva i pojmovi vezani za taj skup. Takođe, biće predstavljeni različiti oblici predstavljanja elemenata, kao i algebarske osobine tog skupa. Na kraju poglavlja, biće reči o izometrijskim transformacijama ravni i ulozi kompleksnih brojeva u vezi sa istim.

Drugo poglavlje je posvećeno kvaternionima. Pored definicije pojmova vezanih za kvaternione, koji će se, po mogućnosti, uvoditi po analogiji sa određenim pojmovima u vezi sa kompleksnim brojevima, biće reči i o kvaternionima kao što su Hurvicovi kvaternioni, a na kraju poglavlja biće predstavljena veza kvaterniona i rotacije u prostoru.

Treće, ujedno i poslednje poglavlje biće posvećeno oktavama. Pored definicije i algebarskih svojstava, naglasak će biti stavljen na proces dobijanja oktava uz pomoć ranije uvedenih pojmova kompleksnih brojeva i kvaterniona, a na kraju poglavlja biće reči o njihovoj ulozi u egzistenciji vektorskog proizvoda višedimezionalnih prostora.

U radu se nalazi i 5 ilustracija obrađenih uz pomoć programskih paketa Geogebra i WinGCLC.

2 Istorija hiperkompleksnih brojeva

Tokom školovanja upoznavali smo se sa brojevima. Počevši od prirodnih brojeva, kako je naše znanje matematike raslo, tako su i skupovi brojeva koje koristimo bili proširivani. Prirodne brojeve smo proširivali do celih i racionalnih brojeva. Međutim, ni ovi brojevi nisu bili dovoljni pa smo proučavali iracionalne brojeve koji zajedno sa racionalnim brojevima formiraju skup realnih brojeva ($\mathbb{R}$). Kasnije, rešavajući različite jednačine videli smo da se i skup $\mathbb{R}$ mora proširiti.

Sa istorijske tačke gledišta, brojevi nisu uvek otkrivani redosledom kojim ih danas proučavamo. Evropa XVI veka uopšte nije prihvatala negativne brojeve, a za nulu je koristila prazno mesto u pozicionom decimalnom sistemu. Uprkos tome, u svom delu *Ars Magna* iz 1545. godine, Kardano[1] objavljuje formule za rešavanje jednačine trećeg stepena, koju su pre njega rešili Del Fero[2] i Tartalja[3]. Upravo je Tartalja 1539. godine svoj metod predočio Kardanu. Delo *Ars Magna* sadrži „predosećaj kompleksnih brojeva", jer u postupku rešavanja kubne jednačine Kardano operiše kompleksnim brojevima, iako u tom trenutku oni nisu prihvaćeni kao brojevi. Dakle, iako su tek u XIX veku kompleksni brojevi formalno uvedeni, rad sa njima je započet par vekova ranije. Među matematičarima čiji su radovi nedvosmisleno najviše doprineli evoluciji kompleksnih brojeva bili su Ojler[4], Moavr[5] i Gaus[6].

Nakon što su kompleksni brojevi i formalno uvedeni u matematiku, postojala je želja da se otkriju brojevi koji bi za tri dimenzije predstavljali ono što kompleksni brojevi predstavljaju za dve. U tom cilju, najviše uspeha imao je Hamilton[7]. On je dugo pokušavao da analogiju sa kompleksnim brojevima sprovede koristeći trojke brojeva oblika $a + bi + cj$ za koje važi $i^2 = j^2 = -1$. Kako za kompleksne brojeve važi $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$, želeo je da slično važi i za njegove trojke. Međutim, kako je

$$(a + bi + cj)(a - bi - cj) = a^2 + b^2 + c^2 + (-ij - ji)bc,$$

postojale su dve mogućnosti: prva je bila $ij = ji = 0$, a druga $ij = -ji$. S obzirom na činjenicu da za kompleksne brojeve važi

$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(bc+ad)i, \quad (ac-bd)^2+(bc+ad)^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2),$$

Hamilton je takođe želeo da njegove trojke zadovoljavaju

$$(a+bi+cj)(d+ei+fj) = P+Qi+Rj, \quad P^2+Q^2+R^2 = (a^2+b^2+c^2)(d^2+e^2+f^2).$$

Kako to nije slučaj ni za jednu od gorepomenute dve mogućnosti, odustaje od trojki i okreće se četvorkama oblika $a + bi + cj + dk$. Dana 16. oktobra 1843.

[1] Đirolamo Kardano (1501-1576), italijanski matematičar
[2] Scipione del Fero (1465-1526), italijanski matematičar
[3] Nikolo Fontana „Tartalja" (1499-1557), italijanski matematičar
[4] Leonard Ojler (1707-1783), švajcarski matematičar i fizičar
[5] Abram de Moavr (1667-1754), francuski matematičar
[6] Johan Karl Fridrih Gaus (1777-1855), nemački matematičar
[7] Vilijam Rouan Hamilton (1805-1865), irski matematičar i fizicar

godine dok je sa svojom suprugom prelazio most Brum, došao je na ideju da bi svaku tačku u prostoru mogao predstaviti sa tri od četiri broja iz njegove četvorke $a + bi + cj + dk$, a u kamen mosta je urezao formule

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \tag{1}$$

koje opisuju množenje njegovih četvorki koje je nazvao kvaternionima. Od tog trenutka pa do kraja života, Hamilton se bavio gotovo isključivo kvaternionima.

Jednakosti (1) su postale osnova kvaterniona, a kasnije i oktava. Kao u većini slučajeva, ubrzo nakon pronalaska težilo se proširivanju. To je bio slučaj i sa kvaternionima. Nedugo nakon što je Hamilton govorio svom prijatelju Grejvsu[8] o njima, Grejvs mu je rekao da je radio na osmodimenzionalnoj algebri. Otkrio je brojeve koje je nazvao oktavama, a koje su kasnije nazvane oktonionima. Nezavisno od Grejvsa, oktave je otkrio i Kejli[9] u čiju čast se oktave nazivaju Kejlijevim brojevima.

[8]Džon Tomas Grejvs (1806-1870), irski pravnik i matematičar
[9]Artur Kejli (1821-1895), britanski matematičar

3 Kompleksni brojevi

3.1 Uvođenje kompleksnih brojeva

Postoji više načina kako se kompleksni brojevi mogu uvesti. Jedan od načina je da se pođe od jednačine $x^2+1=0$. Kako ova jednačina nema rešenja u skupu realnih brojeva, može se definisati:

Definicija 1. *Broj i za koji važi $i^2=-1$ nazivamo **imaginarna jedinica**.*

Kada se definiše imaginarna jedinica, može se definisati i skup kompleksnih brojeva na sledeći način:

Definicija 2. *Skup $\mathbb{C}=\{a+bi|a,b\in\mathbb{R}\}$ naziva se **skup kompleksnih brojeva**, a elementi tog skupa nazivaju se **kompleksni brojevi**.*

Da bismo skup kompleksnih brojeva preciznije opisali, identifikovaćemo ga uređenim parovima, tj. elementima skupa $\mathbb{R}^2$. U daljem tekstu rada pokazaće se da je ovakva identifikacija kompleksnih brojeva parovima realnih brojeva deo jednog opšteg procesa udvajanja algebri.

Definicija 3. *Skup $\mathbb{C}$ je skup svih uređenih parova realnih brojeva za čija svaka dva elementa $z=(x,y)$ i $\omega=(a,b)$ važi:*

- $z=\omega \Leftrightarrow (x=a)\wedge(y=b)$,
- $z+\omega=(x+a,y+b)$,
- $z\omega=(xa-yb,xb+ya)$.

Što se sabiranja elemenata skupa $\mathbb{C}$ definisanog na ovaj način tiče, treba napomenuti da je uređeni par $(0,0)$ neutral, a $(-x,-y)$ inverzni element, tačnije, važi:

$$(x,y)+(0,0)=(x,y), \quad (x,y)+(-x,-y)=(0,0).$$

Uređeni par $(1,0)$ je neutral za množenje jer važi $(x,y)(1,0)=(x,y)$. Egzistenciju inverza za množenje opisuje sledeći stav:

Stav 1. *Uređeni par $z^{-1}=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2}\right)$ je inverzni element za množenje elementa $z=(x,y)\neq(0,0)$.*

Dokaz. Neka je $z=(x,y)\neq(0,0)$ i neka je $z^{-1}=(a,b)$ traženi inverz za množenje. Dakle, treba da važi $zz^{-1}=(1,0)$, pa je:

$$(x,y)(a,b)=(1,0)$$

$$(xa-yb,xb+ya)=(1,0)$$

Kako su, prema definiciji 3, dva kompleksna broja jednaka ako i samo ako su im odgovarajuće koordinate jednake, dobijamo da je $xa-yb=1$ i $xb+ya=0$, odakle je $a=\frac{x}{x^2+y^2}$ i $b=\frac{-y}{x^2+y^2}$, čime smo dokazali stav. $\square$

Kako smo na početku definisali imaginarnu jedinicu kao rešenje kvadratne jednačine $x^2+1=0$, ta definicija mora da se uklopi i u poimanje kompleksnih brojeva kao parova realnih brojeva, tj. jedno rešenje jednačine $z^2+1=0$ mora biti definisano kao imaginarna jedinica. Kako se ta jednačina može zapisati i kao $(x,y)(x,y)+(1,0)=(0,0)$, dobijamo da je $(x^2-y^2,2xy)=(-1,0)$, tj. da su rešenja $(0,1)$ i $(0,-1)$. U skladu sa dosadašnjim razmatranjem, definišemo:

Definicija 4. *Kompleksni broj* $(0,1)$ *naziva se* ***imaginarna jedinica*** *i označava sa* i.

3.2 Algebarski oblik kompleksnog broja

Sada želimo da pokažemo da su definicije 2 i 3 ekvivalentne, tj. da važi:

Stav 2. *Svaki kompleksan broj* $z=(x,y)$ *se na jedinstven način može predstaviti u obliku* $x+iy$ *koji se zove* ***algebarski oblik kompleksnog broja***.

Dokaz. Kako je, prema definiciji 4, broj i zadat uređenim parom $(0,1)$, dobijamo: $x+iy=(x,0)+(0,1)(y,0)=(x,0)+(0,y)=(x,y)$. $\square$

Od sada nam je dopušteno da koristimo zapis $z=x+iy$ za kompleksan broj $z=(x,y)$ jer su, na osnovu stava 2, ti zapisi ekvivalentni.

Definicija 5. *Neka je* $z=(x,y)$, $x,y\in\mathbb{R}$.

Realan broj x *naziva se* ***realni deo kompleksnog broja*** z *i označava se sa* $\operatorname{Re} z$.

Realan broj y *naziva se* ***imaginarni deo kompleksnog broja*** z *i označava se sa* $\operatorname{Im} z$.

Definicija 6. *Broj* $\overline{z}=x-iy$ *naziva se* ***konjugovano kompleksni broj*** *kompleksnog broja* z.

Na osnovu definicija 5 i 6 lako se dokazuje sledeći stav:

Stav 3. *Važi:*

a) $\operatorname{Re} z=\dfrac{z+\overline{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$

b) $\overline{z+\omega}=\overline{z}+\overline{\omega}, \quad \overline{z\omega}=\overline{z}\,\overline{\omega}, \quad \overline{\left(\dfrac{z}{\omega}\right)}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{\omega}},\ \omega\neq 0$

c) $\operatorname{Re}\left(\sum_{i=1}^{n} z_i\right)=\sum_{i=1}^{n}(\operatorname{Re} z_i), \quad \operatorname{Im}\left(\sum_{i=1}^{n} z_i\right)=\sum_{i=1}^{n}(\operatorname{Im} z_i)$

d) $\overline{\sum_{i=1}^{n} z_i}=\sum_{i=1}^{n}\overline{z_i}, \quad \overline{\prod_{i=1}^{n} z_i}=\prod_{i=1}^{n}\overline{z_i}$

Definicija 7. ***Moduo kompleksnog broja*** $z=x+iy$ *je nenegativan realan broj*

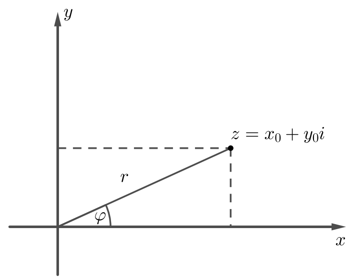
$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Moduo predstavlja rastojanje tačke $z=(x,y)$ *od koordinatnog početka.*

3.3 Trigonometrijski oblik kompleksnog broja

U nekim slučajevima algebarski oblik nije pogodan, pa ćemo zato uvesti i trigonometrijski oblik kompleksnog broja.

Neka je dat kompleksan broj $z = x_0 + y_0 i$ predstavljen na slici 1. Ako dužinu



Slika 1

duži koja spaja koordinatni početak sa tačkom koja odgovara broju z označimo sa r (tj. ako je $r = |z|$), a ugao koji ova duž zaklapa sa pozitivnim delom x-ose označimo sa φ, na osnovu trigonometrije pravouglog trougla lako dobijemo da je

$$\cos\varphi = \frac{x_0}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{y_0}{r}$$

tj.

$$x_0 = r\cos\varphi, \quad y_0 = r\sin\varphi. \tag{2}$$

Zamenom jednakosti (2) u jednakost $z = x_0 + y_0 i$ dobijamo

$$z = x_0 + iy_0 = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Definicija 8. *Zapis kompleksnog broja $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ naziva se **trigonometrijski oblik kompleksnog broja**. Broj r naziva se **moduo**, a φ **argument** kompleksnog broja z i označava se sa $\varphi = \arg z, \varphi \in [0, 2\pi)$*

Ostaje da pokažemo kako kompleksan broj $z = x + iy$ prevesti iz algebarskog u trigonometrijski oblik. Moduo računamo na osnovu definicije 7 tj. $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Iz jednakosti (2) dobijamo

$$\frac{y}{x} = \frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi} = \tan\varphi$$

tj. $\varphi = \arctan \dfrac{y}{x}$. U zavisnosti od vrednosti x i y razlikujemo sledeće slučajeve:

$$\varphi = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x}, & x > 0, y > 0 \\ \dfrac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0 \\ \pi + \arctan \dfrac{y}{x}, & x < 0, y > 0 \\ \dfrac{3\pi}{2}, & x = 0, y < 0 \\ 0, & x > 0, y = 0 \\ \pi + \arctan \dfrac{y}{x}, & x < 0, y < 0 \\ \pi, & x < 0, y = 0 \\ 2\pi + \arctan \dfrac{y}{x}, & x > 0, y < 0. \end{cases}$$

Napomena: U slučaju da je $z = 0$, tada je $r = 0$, a argument se ne definiše.

3.4 Eksponencijalni oblik kompleksnog broja

Trigonometrijski oblik kompleksnog broja koristi trigonometrijske funkcije sinus i kosinus. Tejlorovi razvoji ovih funkcija imaju oblik:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\varphi^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\varphi^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ojler je 1748. godine dokazao da je

$$e^x = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

pa je

$$e^{i\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Kako je

$$(i\varphi)^{2k} = i^{2k}\varphi^{2k} = (-1)^k \varphi^{2k}, \quad (i\varphi)^{2k+1} = (i\varphi)(i\varphi)^{2k} = i(-1)^k \varphi^{2k+1}$$

dobijamo

$$e^{i\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\varphi^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\varphi^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

tj.

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi. \tag{3}$$

Zamenom jednakosti (3) u trigonometrijski oblik kompleksnog broja dobijamo:

Definicija 9. *Zapis kompleksnog broja $z = re^{i\varphi}$ naziva se* ***eksponencijalni oblik kompleksnog broja****.*

3.5 Operacije sa kompleksnim brojevima

Sabiranje i oduzimanje kompleksnih brojeva

Neka su z_1 i z_2 dva kompleksna broja data u algebarskom obliku, tj. neka su $z_1 = x_1 + iy_1$ i $z_2 = x_2 + iy_2$. Zbir, odnosno razlika brojeva z_1 i z_2 je:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2).$$

Množenje kompleksnih brojeva

Neka su z_1 i z_2 dva kompleksna broja zadata u trigonometrijskom obliku tj. $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ i $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Proizvod brojeva z_1 i z_2 je:

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= r_1 r_2(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)\\
&= r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2))\\
&= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).
\end{aligned}$$

Deljenje kompleksnih brojeva

Neka su z_1 i z_2, $z_2 \neq 0$ dva kompleksna broja zadata u eksponencijalnom obliku tj. $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ i $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$. Količnik brojeva z_1 i z_2 je:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Stepenovanje kompleksnih brojeva (Moavrova formula)

Neka je dat kompleksan broj $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Formula za stepenovanje kompleksnog broja z glasi:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

i zove se Moavrova formula. Ona je direktna posledica množenja kompleksnih brojeva i sledećeg stava:

Stav 4. *Za svako $n \in \mathbb{N}$ i $\varphi \in \mathbb{R}$ važi:*

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Dokaz. Za $n = 1$ formula važi, pretpostavimo da važi za n i proveravamo da li važi za $n + 1$:

$$\begin{aligned}
(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{n+1} &= (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)\\
&= (\cos n\varphi + i\sin n\varphi)(\cos\varphi + i\sin\varphi)\\
&= \cos(n+1)\varphi + i\sin(n+1)\varphi.
\end{aligned}$$

□

Korenovanje kompleksnih brojeva

Sada, kada smo definisali stepenovanje kompleksnih brojeva možemo govoriti i o korenovanju. Odrediti n-ti koren broja $z \in \mathbb{C}$ znači naći sve kompleksne brojeve ω koji su rešenja jednačine $z = \omega^n$. Ako kompleksne brojeve z i ω predstavimo u trigonometrijskom obliku tj. ako je $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ i $\omega = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ i ako iskoristimo Moavrovu formulu za stepenovanje kompleksnog broja ω, jednačina $z = \omega^n$ dobija oblik:

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta).$$

Odavde sledi da je

$$r = \rho^n, \quad \varphi + 2k\pi = n\theta, k \in \mathbb{Z}$$

odnosno

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}.$$

Ako za k uzmemo vrednosti $k = 0, 1, ..., n-1$ dobijamo sledeće vrednosti argumenta θ, respektivno: $\frac{\varphi}{n}, \frac{\varphi + 2\pi}{n}, ..., \frac{\varphi + 2(n-1)\pi}{n}$. Za svako $k \geqslant n$ argument uzima neku od već navedenih vrednosti, zbog periodičnosti trigonometrijskih funkcija sinus i kosinus. Dakle, postoji tačno n različitih vrednosti argumenta θ, pa zaključujemo da postoji tačno n različitih n-tih korena broja z, pa je:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\Big(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\Big), \quad k = 0, 1, ..., n-1.$$

3.6 Algebarska svojstva

Nakon što smo definisali operacije sa kompleksnim brojevima, možemo opisati skup kompleksnih brojeva.

Stav 5. *Algebarska struktura* $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *je polje.*

Dokaz. Sabiranje je zatvoreno, komutativno i asocijativno. Element $0 \in \mathbb{C}$ je neutral za sabiranje. Svaki element $z \in \mathbb{C}$ ima inverzni element $-z \in \mathbb{C}$ za sabiranje. Dakle, algebarska struktura $(\mathbb{C}, +)$ je jedna Abelova grupa.

Što se množenja tiče, ono je takođe zatvoreno, komutativno i asocijativno, po definiciji. Takođe, nenula element $1 \in \mathbb{C}$ je neutral za množenje. Svaki element $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$ ima inverzni element $\frac{1}{z} \in \mathbb{C}$, tj. $z \cdot \frac{1}{z} = 1$. Dakle, $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ je takođe Abelova grupa.

Uz to, za $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, $z_3 = x_3 + iy_3$ važi:

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot (z_2 + z_3) &= (x_1 + iy_1)(x_2 + x_3) + i(y_2 + y_3) \\
&= x_1(x_2 + x_3) + ix_1(y_2 + y_3) + iy_1(x_2 + x_3) - y_1(y_2 + y_3) \\
&= x_1x_2 + x_1x_3 + ix_1y_2 + ix_1y_3 + iy_1x_2 + iy_1x_3 - y_1y_2 - y_1y_3 \\
&= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2) + (x_1x_3 - y_1y_3) + i(x_1y_3 + y_1x_3) \\
&= z_1z_2 + z_1z_3.
\end{aligned}$$

Dakle, važi i distributivnost množenja prema sabiranju. □

Definicija 10. *Za svako $\alpha \in \mathbb{R}$ i svako $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$ važi:*

$$\alpha * z = \alpha x + \alpha iy.$$

Ovako definisanu spoljnu $\mathbb{R}$-operaciju zovemo ***množenje skalarima****.*

Stav 6. *Skup $\mathbb{C}$ je jedan vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$ u odnosu na sabiranje i množenje skalarima.*

Dokaz. Treba da pokažemo da je $\mathbb{C}$ Abelova grupa u odnosu na sabiranje (što smo pokazali u dokazu stava 5), a ostale aksiome vektorskog prostora:
1° $\alpha * (u + v) = \alpha * u + \alpha * v$
2° $(\alpha + \beta) * u = \alpha * u + \beta * u$
3° $(\alpha\beta) * u = \alpha * (\beta * u)$
4° $1 * u = u$
gde su $u, v \in \mathbb{C}$,$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se dokazuju po definiciji. □

Definicija 11. *Pod* ***linearnom algebrom nad poljem*** *$\mathbb{K}$ ili $\mathbb{K}$-**algebrom** podrazumevamo algebarsku strukturu $(V, +, \cdot, *)$ gde su $+$ i $\cdot$ binarne, a $*$ spoljna $\mathbb{K}$-operacija u skupu V koja zadovoljava:*
1° *$(V, +, \cdot)$ je prsten,*
2° *$(V, +, *)$ je vektorski prostor nad poljem $\mathbb{K}$,*
3° *$(\alpha * u) \cdot (\beta * v) = (\alpha\beta) * (u \cdot v)$*
za svako $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $u, v \in V$. Binarne operacije $+$ i $\cdot$ nazivamo sabiranjem i množenjem, a spoljnu operaciju $*$ nazivamo množenje skalarima.

Definicija 12. *Algebra nad poljem $\mathbb{K}$ je* ***komutativna (asocijativna)*** *ako je operacija množenja komutativna (asocijativna).*

Definicija 13. *Alegebra nad poljem $\mathbb{K}$ je* ***algebra sa deljenjem*** *ako je jedini element koji nema inverz nula-element.*

Stav 7. *$(\mathbb{C}, +, \cdot, *)$ je $\mathbb{R}$-algebra sa deljenjem koja je komutativna i asocijativna.*

Dokaz. U stavu 5 smo pokazali da je da je algebarska struktura $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ polje, pa je samim tim i jedan prsten. U stavu 6 smo dokazali da je $(\mathbb{C}, +, *)$ jedan vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$. Ostaje još da pokaže da za svako $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $u, v \in \mathbb{C}$ važi:

$$(\alpha * u)(\beta * v) = (\alpha\beta) * (uv).$$

Neka je $u = x + yi$, $v = a + bi$, $x, y, a, b \in \mathbb{R}$. Tada je:

$$\begin{aligned}(\alpha * u) \cdot (\beta * v) &= (\alpha x + \alpha yi) \cdot (\beta a + \beta bi)\\ &= \alpha\beta xa + \alpha\beta yai + \alpha\beta xbi - \alpha\beta yb\\ &= \alpha\beta * ((xa - yb) + (ya + xb)i)\\ &= (\alpha\beta) * (u \cdot v).\end{aligned}$$

Kako jedino nula nema inverz u odnosu na množenje, algebra kompleksnih brojeva je algebra sa deljenjem. □

3.7 Skalarni i vektorski proizvod

Sada ćemo definisati pojmove koji su analogon skalarnom i vektorskom proizvodu Euklidskog prostora i opisati neke njihove osobine.

Definicija 14. *Realan broj*

$$a \circ b = \frac{1}{2}(\overline{a}b + a\overline{b}) = \mathrm{Re}(\overline{a}b)$$

*naziva se **realan proizvod** kompleksnih brojeva a i b.*

Koristeći ovu definiciju, lako se izvedu osobine realnog proizvoda date u sledećoj teoremi:

Teorema 1. *Za proizvoljne brojeve $a, b, c \in \mathbb{C}$ važi:*
a) $a \circ a = |a|^2$,
b) $a \circ b = b \circ a$,
c) $\overline{a \circ b} = a \circ b$,
d) $(\alpha a) \circ b = a \circ (\alpha b) = \alpha(a \circ b)$,
e) $a \circ (b + c) = a \circ b + a \circ c$,

Definicija 15. *Kompleksan broj*

$$a \times b = \frac{1}{2}(\overline{a}b - a\overline{b}) = i\,\mathrm{Im}(\overline{a}b)$$

*naziva se **kompleksan proizvod** kompleksnih brojeva a i b.*

Sledeća teorema je direktna posledica definicije kompleksnog proizvoda:

Teorema 2. *Za proizvoljne brojeve $a, b, c \in \mathbb{C}$ važi:*
a) $\overline{a \times b} = -a \times b$,
b) $a \times b = 0 \Leftrightarrow (a = 0) \vee (b = 0) \vee (a = \lambda b, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$,
c) $a \times b = -b \times a$,
d) $(\alpha a) \times b = a \times (\alpha b) = \alpha(a \times b)$,
e) $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$.

3.8 Izometrije kompleksne ravni

U ovom poglavlju ćemo se baviti izometrijama kompleksne ravni, pri čemu se podrazumeva da je rastojanje između dve tačke z_1 i z_2 standardno euklidsko rastojanje, tj. $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$. U izometrijske transformacije kompleksne ravni spadaju translacija, rotacija i refleksija.

Definicija 16. *Neka je $v = a+bi$ unapred zadat kompleksan broj. Preslikavanje τ_v kompleksne ravni na sebe samu, zadato sa*

$$\tau_v(z) = z + v$$

*je **translacija** za vektor v.*

Ovako definisano preslikavanje je izometrija jer za neke $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ važi:

$$|\tau_v(z_1) - \tau_v(z_2)| = |(z_1 + v) - (z_2 + v)| = |z_1 + v - z_2 - v| = |z_1 - z_2|.$$

Stav 8. *Skup svih translacija kompleksne ravni čini jednu Abelovu grupu.*

Dokaz. Dve translacije τ_v i τ_w su jednake ako su jednaki vektori translacije, jer za $\tau_v(z) = \tau_w(z)$ važi $z+v = z+w$ tj. $v = w$. Skup svih translacija kompleksne ravni je zatvoren za slaganje (kompoziciju), tj. kompozicija

$$(\tau_w \circ \tau_v)(z) = \tau_w(z + v) = (z + v) + w = z + (v + w) = \tau_{v+w}(z)$$

je takođe translacija. Neutral je translacija za nula vektor, a $\tau_v^{-1} = \tau_{-v}$ je inverz. Kako se komutativnost kompozicije dve translacije svodi na komutativnost sabiranja vektora, grupa translacija je Abelova. □

Definicija 17. *Preslikavanje $\rho_{O,\alpha}$ kompleksne ravni na sebe samu, zadato sa*

$$\rho_{O,\alpha}(z) = e^{i\alpha} z$$

*predstavlja **rotaciju** za ugao $\alpha \in [0, 2\pi)$ oko koordinatnog početka.*

Ovako definisano preslikavanje je izometrija jer za neke $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ važi:

$$|\rho_{O,\alpha}(z_1) - \rho_{O,\alpha}(z_2)| = |e^{i\alpha} z_1 - e^{i\alpha} z_2| = |e^{i\alpha}(z_1 - z_2)| = |z_1 - z_2|.$$

Stav 9. *Skup svih rotacija oko koordinatnog početka čini jednu Abelovu grupu.*

Dokaz. Dve rotacije $\rho_{O,\alpha}$ i $\rho_{O,\beta}$ su jednake ako je $\alpha = \beta$. Skup svih ovako definisanih rotacija kompleksne ravni je zatvoren za slaganje (kompoziciju), tj. kompozicija

$$(\rho_{O,\alpha} \circ \rho_{O,\beta})(z) = \rho_{O,\alpha}(e^{i\beta} z) = e^{i\alpha} e^{i\beta} z = e^{i(\alpha+\beta)} z = \rho_{O,\alpha+\beta}(z)$$

je takođe rotacija. Neutral je rotacija za nula-ugao, a rotacija $(\rho_{O,\alpha})^{-1} = \rho_{O,-\alpha}$ je inverz. Kako je $(\rho_{O,\alpha} \circ \rho_{O,\beta})(z) = (\rho_{O,\beta} \circ \rho_{O,\alpha})(z)$, ta grupa je Abelova. □

Sada možemo definisati i rotaciju oko proizvoljne tačke kompleksne ravni.

Definicija 18. *Neka je C tačka kojoj odgovara kompleksan broj c. Preslikavanje $\rho_{C,\theta}$ kompleksne ravni na sebe samu, zadato sa*

$$\rho_{C,\theta} = e^{i\theta}(z - c) + c$$

*predstavlja **rotaciju** za ugao $\theta \in [0, 2\pi)$ oko tačke $C(c)$.*

Ovo preslikavanje je kompozicija translacije τ_{-c}, rotacije $\rho_{O,\theta}$ i translacije τ_c, tj. $\rho_{C,\theta} = \tau_c \circ \rho_{O,\theta} \circ \tau_{-c}$, pa predstavlja izometriju kao kompozicija izometrija.

Definicija 19. *Preslikavanje $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dato sa $h(z) = \overline{z}$ je **refleksija** u odnosu na pravu koja predstavlja realnu osu.*

Ovako definisano preslikavanje je izometrija, jer za dve tačke $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ važi:

$$|h(z_1)-h(z_2)| = |\overline{z_1}-\overline{z_2}| = |(x_1-iy_1)-(x_2-iy_2)| = |x_1-x_2+i(y_2-y_1)| = |z_1-z_2|.$$

Stav 10. *Svaka izometrijska transformacija ima oblik* $f(z) = e^{i\theta}z + v$ *(ako je direktna) ili* $g(z) = e^{i\theta}\overline{z} + v$ *(ako je indirektna).*

Dokaz. Znamo da je svaka direktna izometrijska transformacija koincidencija, rotacija ili translacija. Koincidencija se može predstaviti kao $f(z) = e^{i\cdot 0}z + 0$. Rotacija oko tačke C kojoj odgovara kompleksni broj c za ugao θ je

$$f(z) = (z-c)e^{i\theta} + c = ze^{i\theta} - ce^{i\theta} + c = e^{i\theta}z + c(1-e^{i\theta}).$$

Translacija za vektor v je $f(z) = e^{i\cdot 0}z + v$, pa se i translacija može zapisati u traženom obliku.

Kako, prema definiciji 19, konjugovanje predstavlja osnu refleksiju, konjugovanje možemo smatrati indirektnom transformacijom. Neka je $g(z)$ proizvoljna indirektna transformacija. Tada je $\overline{g(z)}$ direktna transformacija, pa se može zapisati kao $\overline{g(z)} = e^{i\theta}z + v$. Odatle je $g(z) = e^{-i\theta}\overline{z} + \overline{v} = e^{i\phi}\overline{z} + w$, gde je $\phi = -\theta$ i $w = \overline{v}$. $\square$

4 Kvaternioni

4.1 Definicija i osnovna svojstva kvaterniona

Definicija 20. *Skup* $\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk | a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ *za koji važi da je*

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \tag{4}$$

*naziva se **skup kvaterniona**.*

Za oznaku skupa kvaterniona koristi se slovo $\mathbb{H}$ u čast Hamiltona koji ih je otkrio.

Definicija 21. *Neka je* $q \in \mathbb{H}$, $q = a + bi + cj + dk$.

Realan broj a *naziva se **realni deo kvaterniona*** q *i označava se sa* $\Re(q)$.

Kvaternion $bi+cj+dk$ *naziva se **imaginarni deo kvaterniona*** q *i označava se sa* $\Im(q)$.

Kao i u skupu $\mathbb{C}$, i u skupu $\mathbb{H}$ mogu se definisati operacija konjugovanja i moduo kvaterniona.

Definicija 22. *Kvaternion* $\overline{q} = a - bi - cj - dk$ *naziva se **konjugovani kvaternion*** *kvaterniona* $q = a + bi + cj + dk$.

Definicija 23. ***Moduo kvaterniona*** $q = a+bi+cj+dk$ *je nenegativan realan broj*

$$|q| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

Definicija 24. *Neka su* $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$, *pri čemu je* $q_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k$, $q_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k$.

Zbir kvaterniona q_1 *i* q_2 *je:*

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &= (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) \\ &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k \end{aligned}$$

*a **proizvod kvaterniona*** q_1 *i* q_2 *je:*

$$\begin{aligned} q_1 \cdot q_2 &= (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k)(a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) \\ &= A + Bi + Cj + Dk \end{aligned}$$

gde je:

$$\begin{cases} A = a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2 \\ B = a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2 \\ C = a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2 \\ D = a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 + d_1 a_2. \end{cases}$$

Napomena: U definiciji množenja korišćena je relacija (4), uz pretpostavku da je množenje elemenata i, j, k asocijativno i da je neutralni element za množenje element 1. Uz to, iz relacije (4) dobije se:

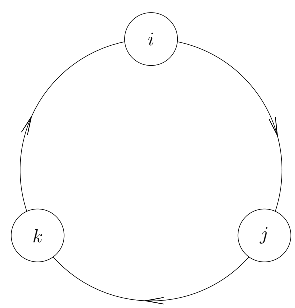
$$ijk = -1 \Rightarrow i(ijk) = -i \Rightarrow (ii)jk = -i \Rightarrow -jk = -i \Rightarrow i = jk$$

Na sličan način mogu se dobiti i ostale relacije koje su na jednostavan način prestavljene tabelom 1 koja je u literaturi poznata kao Kejlijeva tablica.

$\cdot$	i	j	k
i	-1	k	$-j$
j	$-k$	-1	i
k	j	$-i$	-1

Tabela 1: Kejlijeva tablica

Takođe, množenje elemenata i, j, k može se predstaviti šemom kao na slici 2 pri čemu se koristi znak $+$ ukoliko se krećemo u smeru strelice, a $-$ ukoliko se krećemo u smeru suprotnom od strelice.



Slika 2: Množenje baznih elemenata kvaterniona

Stav 11. *Neka su* $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$, $q_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k$, $q_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k$. *Tada važi:*
a) $\overline{q_1 + q_2} = \overline{q_1} + \overline{q_2}$
b) $\overline{q_1 \cdot q_2} = \overline{q_2} \cdot \overline{q_1}$

Dokaz. *a*) Po definiciji sabiranja i konjugovanja.

$$\begin{aligned} b) \quad \overline{q_2} \cdot \overline{q_1} &= (a_2 - b_2 i - c_2 j - d_2 k)(a_1 - b_1 i - c_1 j - d_1 k) \\ &= (a_2 a_1 - b_2 b_1 - c_2 c_1 - d_2 d_1) - (a_2 b_1 + b_2 a_1 - c_2 d_1 + d_2 c_1) i \\ &- (a_2 c_1 + b_2 d_1 + c_2 a_1 - d_2 b_1) j - (a_2 d_1 - b_2 c_1 + c_2 b_1 + d_2 a_1) k \\ &= A - Bi - Cj - Dk \end{aligned}$$

gde su $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ brojevi iz definicije množenja kvaterniona (definicija 24), pa važi tražena jednakost. $\square$

Stav 12. *Za kvaternion $q = a + bi + cj + dk$ i njemu konjugovani kvaternion $\overline{q} = a - bi - cj - dk$ važi*

$$q\overline{q} = |q|^2. \tag{5}$$

Dokaz. Kako je $|q| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$, onda je $|q|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. S druge strane je:

$$\begin{aligned} q\overline{q} &= (a + bi + cj + dk)(a - bi - cj - dk) \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \end{aligned}$$

čime je stav dokazan. $\square$

U literaturi se često za realan broj $|q|^2$ koristi oznaka $N(q)$ ili Nq i taj broj naziva norma kvaterniona q. U tom smislu, definišemo:

Definicija 25. ***Norma*** *kvaterniona $q = a + bi + cj + dk$ je nenegativan realan broj*

$$Nq = q\overline{q} = |q|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Sada možemo definisati i inverz nenula kvaterniona q. Ako jednakost (5) podelimo sa $|q|^2$ dobijamo $q\dfrac{\overline{q}}{|q|^2} = 1$. To znači da je kvaternion $\dfrac{\overline{q}}{|q|^2}$ inverz nenula kvaterniona q pa definišemo:

Definicija 26. ***Inverz*** *nenula kvaterniona q u odnosu na množenje je kvaternion $q^{-1} = \dfrac{\overline{q}}{|q|^2} = \dfrac{\overline{q}}{Nq}$.*

Stav 13. *Za dva proizvoljna kvaterniona $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ važi:*

$$Nq_1q_2 = Nq_1Nq_2. \tag{6}$$

Dokaz. Leva strana jednakosti (6) može da se napise kao:

$$Nq_1q_2 = |q_1q_2|^2 = q_1q_2\overline{q_1q_2}.$$

Kako na osnovu stava 11 važi $\overline{q_1q_2} = \overline{q_2}\,\overline{q_1}$, dobijamo:

$$Nq_1q_2 = q_1q_2\overline{q_2}\,\overline{q_1} = q_1(q_2\overline{q_2})\overline{q_1} = q_1|q_2|^2\overline{q_1}.$$

Kako je $|q_2|^2$ realan broj i važi $q_1\overline{q_1} = |q_1|^2$ dobijamo:

$$Nq_1q_2 = |q_1|^2|q_2|^2$$

Kako je desna strana jednakosti (6) $Nq_1Nq_2 = |q_1|^2|q_2|^2$, dokaz je završen. $\square$

4.2 Algebarska svojstva kvaterniona

Sada možemo da opišemo skup kvaterniona.

Stav 14. *Algebarska struktura* $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ *je jedan prsten.*

Dokaz. Na osnovu definicije 24 sabiranje je zatvoreno, komutativno i asocijativno. Element $0 \in \mathbb{H}$ je neutral za sabiranje. Svaki element $q \in \mathbb{H}$ ima inverzni element $-q \in \mathbb{H}$ za sabiranje. Dakle, algebarska struktura $(\mathbb{H}, +)$ je Abelova grupa.

Što se množenja tiče, ono je zatvoreno, nije komutativno. Uz pretpostavku da je množenje elemenata i, j, k asocijativno, asocijativno je i množenje kvaterniona. Nenula element $1 \in \mathbb{H}$ je neutral za množenje. Svaki element $q \in \mathbb{H}, q \neq 0$ ima inverzni element $q^{-1} = \dfrac{\overline{q}}{Nq}$ takav da je $qq^{-1} = 1$. Dakle, $(\mathbb{H} \setminus \{0\}, \cdot)$ je grupa (nije Abelova).

Iz definicije sabiranja i množenja kvaterniona (definicije 24) lako sledi i distributivnost množenja prema sabiranju, tj. za svako $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{H}$ važi:

$$q_1 \cdot (q_2 + q_3) = q_1 q_2 + q_1 q_3$$

$$(q_1 + q_2) \cdot q_3 = q_1 q_3 + q_2 q_3.$$

Iz svega navedenog sledi da je $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ prsten. Kako grupa $(\mathbb{H} \setminus \{0\}, \cdot)$ nije Abelova, algebarska struktura $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ predstavlja jedno telo[10]. □

Sada ćemo definisati spoljnu $\mathbb{R}$-operaciju množenja kvaterniona skalarom.

Definicija 27. *Za svako* $\alpha \in \mathbb{R}$ *i svako* $q \in \mathbb{H}$, $q = a + bi + cj + dk$ *važi:*

$$\alpha * q = \alpha a + \alpha bi + \alpha cj + \alpha dk$$

Stav 15. *Skup* $\mathbb{H}$ *je jedan vektorski prostor nad poljem* $\mathbb{R}$ *u odnosu na sabiranje kvaterniona i množenje skalarima.*

Dokaz. U dokazu stava 14 smo pokazali da je $(\mathbb{H}, +)$ Abelova grupa, a ostale aksiome vektorskog prostora se dokazuju po definiciji (slično kao za skup $\mathbb{C}$, videti stav 6). □

Stav 16. $(\mathbb{H}, +, \cdot, *)$ *je* $\mathbb{R}$*-algebra sa deljenjem koja je asocijativna i nije komutativna.*

Dokaz. Proveravamo uslove iz definicije 11. U stavu 14 pokazali smo da je $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ prsten, a u stavu 15 da je $(\mathbb{H}, +, *)$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$. Ostaje još da se proveri uslov da za svako $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i svako $q, h \in \mathbb{H}$ važi:

$$(\alpha * q)(\beta * h) = (\alpha\beta) * (qh).$$

[10] telo (eng. cell) - nekomutativno polje

Neka je $q = a + bi + cj + dk$, $h = x + yi + zj + wk$, $a, b, c, d, x, y, z, w \in \mathbb{R}$. Tada je:

$$\begin{aligned}(\alpha * q) \cdot (\beta * h) &= (\alpha a + \alpha bi + \alpha cj + \alpha dk) \cdot (\beta x + \beta yi + \beta zj + \beta wk) \\ &= \alpha\beta ax + \alpha\beta bxi + \alpha\beta cxj + \alpha\beta dxk \\ &+ \alpha\beta ayi + \alpha\beta byi^2 + \alpha\beta cyji + \alpha\beta dyki \\ &+ \alpha\beta azj + \alpha\beta bzij + \alpha\beta czj^2 + \alpha\beta dzkj \\ &+ \alpha\beta awk + \alpha\beta bwik + \alpha\beta cwjk + \alpha\beta dwk^2 \\ &= (\alpha\beta) * (q \cdot h)\end{aligned}$$

Dakle, $(\mathbb{H}, +, \cdot, *)$ je $\mathbb{R}$-algebra. Kako množenje nije komutativno, ona nije komutativna, ali jeste asocijativna. S obzirom da jedino element 0 nema inverz, ta algebra je i algebra sa deljenjem. $\square$

Definicija 28. *Algebra nad poljem $\mathbb{R}$ za čija svaka dva elementa a_1 i a_2 važi $|a_1a_2|^2 = |a_1|^2|a_2|^2$ naziva se **normirana algebra**.*

Dokazom stava 13 ujedno smo pokazali i da je algebra kvaterniona jedna normirana algebra.

4.3 Hurvicovi kvaternioni i teorema o četiri kvadrata

Definicija 29. ***Hurvicov*[11] *kvaternion*** *je kvaternion čiji su koeficijenti ili svi celi brojevi ili svi polovine neparnih celih brojeva, tj.*

$$\mathcal{H} = \{a + bi + cj + dk \in \mathbb{H} | a, b, c, d \in \mathbb{Z} \vee a, b, c, d \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}\}.$$

Može se pokazati da je skup Hurvicovih kvaterniona zatvoren u odnosu na sabiranje i množenje. U literaturi se za Hurvicove kvaternione koristi i izraz celi kvaternioni i najčešće se označavaju slovima grčkog alfabeta.

Stav 17. *Norma Hurvicovog kvaterniona je ceo broj.*

Dokaz. Neka je $\alpha \in \mathcal{H}$. Tada je $\alpha = a + bi + cj + dk$ za neke $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ili $\alpha = \frac{e}{2} + \frac{f}{2}i + \frac{g}{2}j + \frac{h}{2}k$ za neke neparne $e, f, g, h \in \mathbb{Z}$. Otuda je:

$$N\alpha = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \in \mathbb{Z}$$

[11] Adolf Hurvic (1859-1919), nemački matematičar

ili

$$
\begin{aligned}
N\alpha &= \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 + \left(\frac{g}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \\
&= \frac{e^2}{4} + \frac{f^2}{4} + \frac{g^2}{4} + \frac{h^2}{4} \\
&= \frac{(2l+1)^2}{4} + \frac{(2m+1)^2}{4} + \frac{(2n+1)^2}{4} + \frac{(2p+1)^2}{4} \\
&= \frac{4l^2 + 4l + 1 + 4m^2 + 4m + 1 + 4n^2 + 4n + 1 + 4p^2 + 4p + 1}{4} \\
&= l^2 + l + m^2 + m + n^2 + n + p^2 + p + 1 \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

□

Definicija 30. *Ako su kvaternioni α i α^{-1} Hurvicovi, onda kažemo da je kvaternion α* ***jedinični*** *i označavamo sa $\alpha = \epsilon$.*

S obzirom na činjenicu da za $\alpha = \epsilon$ važi $\epsilon\epsilon^{-1} = 1$, $N\epsilon N\epsilon^{-1} = 1$, pa je i $N\epsilon = 1$. S druge strane, ako je $\alpha \in \mathcal{H}$ i $N\alpha = 1$ tada je $\alpha^{-1} = \dfrac{\overline{\alpha}}{N\alpha} = \overline{\alpha}$, pa je i $\alpha^{-1} \in \mathcal{H}$, što znači da je α jedinični. To nam daje mogućnost da jedinični kvaternion definišemo na sledeći način:

Definicija 31. *Hurvicov kvaternion norme jedan je* ***jedinični kvaternion****.*

Postoji ograničen broj jediničnih kvaterniona. Naime, ako je kvaternion $\alpha = a + bi + cj + dk$ jedinični, postoje dve mogućnosti:

1° ako su $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ to znači da jedan od brojeva a^2, b^2, c^2, d^2 mora biti 1, a ostali 0;

2° ako su $a, b, c, d \in \mathbb{Z} + \dfrac{1}{2}$ tada svaki od brojeva a^2, b^2, c^2, d^2 mora biti $\dfrac{1}{4}$.

Otuda, postoji samo 24 jedinična kvaterniona i to

$$\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k, \frac{1}{2}(\pm 1 \pm i \pm j \pm k).$$

Lema 1. *Ako je α Hurvicov kvaternion, tada postoji jedinični kvaternion $\epsilon \in \mathcal{H}$ takav da kvaternion $\alpha\epsilon$ ima sve cele koordinate i $N\alpha\epsilon = N\alpha$.*

Dokaz. Ako koordinate od α nisu cele, možemo odabrati znakove tako da je

$$\alpha = (b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k) + \frac{1}{2}(\pm 1 \pm i \pm j \pm k) = \beta + \gamma$$

gde su b_0, b_1, b_2, b_3 parni brojevi (ako bi neki od koeficijenata kvaterniona β bio neparan, dodamo mu jedinicu i time promenimo parnost, a odgovarajućem koeficijentu kvaterniona γ promenimo znak). Tada je $\gamma\overline{\gamma} = 1$, pa je traženi kvaternion $\epsilon = \overline{\gamma}$ i važi $N\alpha\epsilon = N\alpha\overline{\gamma} = N\alpha$ i kvaternion $\alpha\overline{\gamma}$ ima sve cele koordinate. □

Sada ćemo, uz pomoć Hurvicovih kvaterniona dokazati sledeću teoremu, koja se zove Lagranžova[12] teorema o četiri kvadrata:

Teorema 3. *Svaki pozitivan ceo broj se može predstaviti kao zbir četiri kvadrata.*

Dokaz. Neka su $\alpha, \beta \in \mathcal{H}$, $\alpha = a + bi + cj + dk$, $\beta = e + fi + gj + hk$. Tada je $N\alpha = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, $N\beta = e^2 + f^2 + g^2 + h^2$ i na osnovu stava 17 važi $N\alpha, N\beta \in \mathbb{Z}$. Pošto je množenje Hurvicovih kvaterniona zatvoreno, onda je i $\alpha\beta \in \mathcal{H}$ i važi:

$$N\alpha\beta = A^2 + B^2 + C^2 + D^2 \in \mathbb{Z}.$$

Na osnovu stava 13 važi $N\alpha\beta = N\alpha N\beta$ pa je i:

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(e^2 + f^2 + g^2 + h^2). \tag{7}$$

Pritom, ako su koordinate kvaterniona α i β sve celi brojevi, onda su brojevi A, B, C, D na osnovu jednakosti (7) određeni celim brojevima pa su i oni celi brojevi.

Dakle, pokazali smo da je proizvod dva cela broja koji se mogu predstaviti kao zbir četiri kvadrata takođe zbir četiri kvadrata. Kako se svaki ceo broj na jedinstven način može predstaviti kao proizvod prostih brojeva, ostaje još da pokažemo da se svaki prost broj može predstaviti kao zbir četiri kvadrata a to ćemo uraditi u sledećoj lemi.

Lema 2. *Prost broj p se može predstaviti kao zbir četiri kvadrata.*

Dokaz. Kako je $2 = 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2$, možemo pretpostaviti da je p neparan. Postoje brojevi x i y takvi da je $x^2 + y^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$. Naime, x^2 daje $\dfrac{p+1}{2}$ različitih vrednosti po modulu p, $-(y^2+1)$ takođe, pa jednačina $1 + x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{p}$ ima rešenje na osnovu Dirihleovog principa.

Neka je $\gamma \in \mathcal{H}$, $\gamma = 1 + xi + yj$. Kako $p | 1 + x^2 + y^2$, tj. $p | N\gamma$ važi i $p | \gamma\overline{\gamma}$. Ako bi prost broj p bio prost u $\mathcal{H}$, iz $p | \gamma\overline{\gamma}$ sledilo bi $p | \gamma$ ili $p | \overline{\gamma}$. Kako ni $\dfrac{\gamma}{p} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{x}{p}i + \dfrac{y}{p}j$ ni $\dfrac{\overline{\gamma}}{p} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{x}{p}i - \dfrac{y}{p}j$ nisu Hurvicovi kvaternioni, to znači da p nije prost u $\mathcal{H}$.

Drugim rečima, p se može zapisati kao $p = \gamma_1\gamma_2$, gde $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{H}$ nisu jedinični kvaternioni. Odatle važi

$$p^2 = Np = N\gamma_1 N\gamma_2$$

pri čemu je $N\gamma_1 > 1$ i $N\gamma_2 > 1$, pa je $N\gamma_1 = N\gamma_2 = p$.

Ako su koordinate od γ_1 cele, onda je p zbir četiri kvadrata. Ako koordinate od γ_1 nisu cele, onda, prema lemi 1, postoji jedinični kvaternion ϵ takav da su koordinate od $\gamma_1\epsilon$ celi brojevi i važi $N\gamma_1 = N\gamma_1\epsilon = p$, pa je p zbir četiri kvadrata.

□

Dokazom leme, ujedno smo završili i dokaz teoreme. □

[12] Žozef-Luj Lagranž (1736-1813), italijansko-francuski matematičar

4.4 Različiti načini predstavljanja kvaterniona

Kao što smo kompleksne brojeve mogli identifikovati uređenim parovima, tj. elementima iz $\mathbb{R}^2$, i kvaternione je moguće posmatrati kao uređene četvorke realnih brojeva jer postoji izomorfizam algebre $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ na algebarsku strukturu $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ gde su sabiranje i množenje definisani kao

$$(a_1, b_1, c_1, d_1) + (a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2)$$

$$(a_1, b_1, c_1, d_1) \cdot (a_2, b_2, c_2, d_2) = (A, B, C, D)$$

gde su

$$\begin{cases} A = a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 \\ B = a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2 \\ C = a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2 \\ D = a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2. \end{cases}$$

Elementi $1, i, j, k$ bi bili predstavljeni kao

$$\begin{cases} 1 = (1, 0, 0, 0) \\ i = (0, 1, 0, 0) \\ j = (0, 0, 1, 0) \\ k = (0, 0, 0, 1). \end{cases}$$

S obzirom da „živimo”u trodimenzionalnom prostoru, ovakvo predstavljanje kvaterniona nije pogodno. Mnogo pogodniji način je posmatrati kvaternion $q = a + bi + cj + dk$ kao zbir skalarnog dela a i vektorskog dela (b, c, d). U tom smislu, praksa je da se kvaternion q zapiše kao

$$q = (a, \vec{q}), \quad a \in \mathbb{R}, \vec{q} = (b, c, d) \in \mathbb{R}^3.$$

Specijalno, realan broj a se identifikuje kvaternionom $(a, \vec{0})$, a vektor $\vec{q} \in \mathbb{R}^3$ kvaternionom $(0, \vec{q})$. U tom smislu definišemo:

Definicija 32. *Kvaternion oblika $(0, \vec{q}), \vec{q} \in \mathbb{R}^3$, naziva se* ***imaginarni kvaternion****.*

Preslikavanje kojim se vektoru $\vec{q} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ dodeljuje imaginarni kvaternion $q = xi + yj + zk$ je bijekcija i saglasno je sa operacijama sabiranja, množenja i množenja skalarom (realnim brojem), pa imaginarni kvaternion možemo da definišemo i kao:

Definicija 33. *Kvaternion oblika $q = xi + yj + zk$ naziva se* ***imaginarni kvaternion****. Skup*

$$\Im(\mathbb{H}) = \{xi + yj + zk | x, y, z \in \mathbb{R}\} = \{q \in \mathbb{H} | q + \overline{q} = 0\}$$

naziva se ***skup imaginarnih kvaterniona****.*

Iz navedenog, skup kvaterniona može se predstaviti i kao:

$$\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \Im(\mathbb{H}) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3.$$

U literaturi se mogu naći različiti načini predstavljanja kvaterniona, a neki od njih su:

- Zapis kvaterniona kao četvorke realnih brojeva:

$$q = (a, b, c, d), \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

- Zapis kvaterniona pomoću realnog i vektorskog dela:

$$q = (s, \vec{v}), \quad s \in \mathbb{R}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$$

- Zapis kvaterniona pomoću realnog broja i imaginarnog kvaterniona:

$$q = (q_0, \mathbf{q}), \quad q_0 \in \mathbb{R}, \mathbf{q} \in \Im(\mathbb{H})$$

4.5 Skalarni i vektorski proizvod

Na prostoru kvaterniona moguće je definisati skalarni proizvod. Kako smo u sekciji 4.4 pokazali da se kvaternion može identifikovati uređenom četvorkom realnih brojeva, skalarni proizvod ćemo definisati kao:

Definicija 34. ***Skalarni proizvod*** *kvaterniona* $q_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k$ *i* $q_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k$ *je realan broj:*

$$q_1 \circ q_2 = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2 = \frac{q_1 \overline{q_2} + q_2 \overline{q_1}}{2}$$

Dakle, kao što je i očekivano, skalarni proizvod dva kvaterniona definiše se kao zbir proizvoda odgovarajućih koordinata tih kvaterniona. Za ovako definisan skalarni proizvod važe sledeće osobine:

Teorema 4. *Za bilo koja tri kvaterniona* $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{H}$ *važi:*
a) $q_1 \circ q_1 = |q_1|^2$,
b) $q_1 \circ q_2 = q_2 \circ q_1$,
c) $\overline{q_1 \circ q_2} = q_1 \circ q_2$,
d) $(\alpha q_1) \circ q_2 = q_1 \circ (\alpha q_2) = \alpha(q_1 \circ q_2)$,
e) $q_1 \circ (q_2 + q_3) = q_1 \circ q_2 + q_1 \circ q_3$

U prethodnoj sekciji smo definisali imaginarne kvaternione i pokazali da ih možemo identifikovati uređenim trojkama realnih brojeva, jer su prostori $\Im(\mathbb{H})$ i $\mathbb{R}^3$ izomorfni. S obzirom da u $\mathbb{R}^3$ postoji vektorski proizvod, možemo da definišemo:

Definicija 35. ***Vektorski proizvod*** *dva kvaterniona* $q_1, q_2 \in \Im(\mathbb{H})$ *je vektor:*

$$q_1 \times q_2 = \frac{q_1 q_2 - q_2 q_1}{2}$$

Suštinski, vektorski proizvod dva imaginarna kvaterniona predstavlja vektorski proizvod odgovarajućih vektora prostora $\mathbb{R}^3$. Kao takav, on se može predstaviti na način koji smo navikli kada su u pitanju vektori prostora $\mathbb{R}^3$, a to je pomoću determinante. Dakle, vektorski proizvod dva imaginarna kvaterniona $q_1 = b_1 i + c_1 j + d_1 k$ i $q_2 = b_2 i + c_2 j + d_2 k$ je:

$$q_1 \times q_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix}.$$

U sekciji 4.1 definisali smo množenje dva proizvoljna kvaterniona, ali rezultat množenja je rogobatan i težak za manipulisanje. Sada kada smo definisali skalarni i vektorski proizvod možemo izvesti formulu za množenje kvaterniona u obliku koji je znatno koncizniji.

Neka su $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$, $q_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k$ i $q_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k$. Tada je:

$$\begin{aligned} q_1 q_2 = &(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k)(a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) \\ = &a_1 a_2 - (b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2) + a_1(b_2 i + c_2 j + d_2 k) + a_2(b_1 i + c_1 j + d_1 k) \\ &+ (c_1 d_2 - c_2 d_1) i + (b_2 d_1 - b_1 d_2) j + (b_1 c_2 - b_2 c_1) k. \end{aligned}$$

To znači da, ako se kvaternioni q_1 i q_2 zapišu kao $q_1 = (a_1, \mathbf{q_1})$ i $q_2 = (a_2, \mathbf{q_2})$, gde su $\mathbf{q_1} = (b_1, c_1, d_1)$ i $\mathbf{q_2} = (b_2, c_2, d_2)$, proizvod kvaterniona q_1 i q_2 se može zapisati kao:

$$q_1 q_2 = a_1 a_2 - \mathbf{q_1} \circ \mathbf{q_2} + a_1 \mathbf{q_2} + a_2 \mathbf{q_1} + \mathbf{q_1} \times \mathbf{q_2}$$

ili, koordinatno:

$$q_1 q_2 = (a_1 a_2 - \mathbf{q_1} \circ \mathbf{q_2}, a_1 \mathbf{q_2} + a_2 \mathbf{q_1} + \mathbf{q_1} \times \mathbf{q_2}). \tag{8}$$

Specijalno, ako su $q_1, q_2 \in \Im(\mathbb{H})$, tj. $a_1 = a_2 = 0$, dobijamo da je:

$$q_1 q_2 = -\mathbf{q_1} \circ \mathbf{q_2} + \mathbf{q_1} \times \mathbf{q_2}$$

ili, koordinatno:

$$q_1 q_2 = (-\mathbf{q_1} \circ \mathbf{q_2}, \mathbf{q_1} \times \mathbf{q_2}). \tag{9}$$

Na osnovu ovih formula, lako se vidi da nekomutativnost množenja kvaterniona potiče od nekomutativnosti vektorskog proizvoda. Jedan od načina da se to pojasni je i uvođenje pojma komutatora.

Definicija 36. *Preslikavanje* $[,] : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}$ *dato sa:*

$$[q_1, q_2] = q_1 q_2 - q_2 q_1 \tag{10}$$

*naziva se **komutator**. Komutator je funkcija koja meri odstupanje množenja kvaterniona od komutativnosti.*

Koristeći jednakost (8) dobijamo da je:

$$\begin{aligned}[q_1, q_2] &= q_1 q_2 - q_2 q_1 \\ &= (a_1 a_2 - \mathbf{q_1} \circ \mathbf{q_2}, a_1 \mathbf{q_2} + a_2 \mathbf{q_1} + \mathbf{q_1} \times \mathbf{q_2}) - (a_2 a_1 - \mathbf{q_2} \circ \mathbf{q_1}, a_2 \mathbf{q_1} + a_1 \mathbf{q_2} + \mathbf{q_2} \times \mathbf{q_1}) \\ &= (0, 2(\mathbf{q_1} \times \mathbf{q_2}))\end{aligned}$$

tj.

$$[q_1, q_2] = 2(\mathbf{q_1} \times \mathbf{q_2}) \tag{11}$$

Odavde se lako može zaključiti da kvaternioni q_1 i q_2 komutiraju tj. $[q_1, q_2] = 0$ ako i samo ako su njihovi vektorski delovi kolinearni.

4.6 Kvaternioni modula 1

U ovom poglavlju ćemo se baviti kvaternionima čiji je moduo jednak jedinici i bliže ćemo opisati skup takvih kvaterniona. Pre toga, biće nam potrebno da se podsetimo definicije nekih pojmova.

Definicija 37. *n-**sfera** ($n \in \mathbb{N}$) je skup:*

$$S^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \big| |\mathbf{x}| = 1\}$$

pri čemu je $||: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ odgovarajuća norma u prostoru $\mathbb{R}^{n+1}$.

Kako smo u poglavlju 4.4 naveli da su prostori $\mathbb{H}$ i $\mathbb{R}^4$ izomorfni, možemo da kažemo da je skup kvaterniona čiji je moduo 1 dat sa:

$$S^3 = \{q \in \mathbb{H} \big| |q| = 1\}$$

Običaj je da se elementi skupa S^3 označavaju slovom u (skraćeno od engleske reči *unit*[13]).

Stav 18. $(S^3, \cdot)$ *je grupa.*

Dokaz. Na osnovu stava 13 važi $Nq_1q_2 = Nq_1Nq_2$ za bilo koje $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$, pa i za kvaternione iz S^3. Dakle, za $u_1, u_2 \in S^3$ važi $|u_1u_2|^2 = |u_1|^2|u_2|^2 = 1 \cdot 1 = 1$, pa važi $|u_1u_2| = 1$ tj. $u_1u_2 \in S^3$. Dakle, množenje je zatvoreno u skupu S^3. Kvaternion (realan broj) $1 \in S^3$ je neutral za množenje. Inverz je element $u^{-1} = \dfrac{\overline{u}}{Nu} \in S^3$. □

Specijalno, kvaternion $u \in S^3 \cap \Im(\mathbb{H})$ je kvaternion oblika

$$u = xi + yj + zk, \quad x, y, z \in \mathbb{R}, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

i kao takav je element skupa S^2 koji suštinski predstavlja sferu u $\mathbb{R}^3$. Za razliku od skupa S^3, skup S^2 nije grupa u odnosu na množenje jer ne sadrži neutral množenja.

[13]eng. unit - jedinica, jedinični

Stav 19. *Neka je* $u \in S^3$. *Tada* $u \in \Im(\mathbb{H}) \Leftrightarrow u^2 = -1$.

Dokaz. $\Rightarrow$: Ako je $u \in \Im(\mathbb{H})$, onda važi $\overline{u} = -u$. Koristeći to dobijamo:

$$u^2 = (-u)^2 = (-u) \cdot (-u) = -u \cdot \overline{u} = -|u|^2 = -1.$$

$\Leftarrow$: Neka je sada $u^2 = -1$. Odatle računamo:

$$u = u|u|^2 = uu\overline{u} = u^2\overline{u} = (-1)\overline{u} = -\overline{u}$$

tj. $\overline{u} = -u$, a to upravo znači da je $u \in \Im(\mathbb{H})$. $\square$

Sledeći stav je direktna posledica stava 19, a govori o rešenjima kvadratne jednačine u skupu kvaterniona.

Stav 20. *Jednačina* $x^2 + 1 = 0$ *ima beskonačno mnogo rešenja u skupu* $\mathbb{H}$ *koja se nalaze na sferi* S^2.

Pokažimo sada kako možemo predstaviti elemente skupa S^3. Neka je dat $u = s + xi + yj + zk$ proizvoljni kvaternion iz S^3. Kvaternion u se može zapisati i kao $u = (s, \vec{v})$, gde je $\vec{v} = (x, y, z)$ vektor prostora $\mathbb{R}^3$. Kako je $u \in S^3$ važi

$$Nu = s^2 + |\vec{v}|^2 = 1.$$

Ova jednakost predstavlja kružnicu u ravni, koja se može parametrizovati kao $(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}), \frac{\theta}{2} \in [0, 2\pi)$. To znači da postoji jedinstven ugao $\frac{\theta}{2} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ takav da je $s = \cos\frac{\theta}{2}$ i $|\vec{v}| = \sin\frac{\theta}{2}$, pa kvaternion u dobija oblik:

$$u = (s, \vec{v}) = (s, \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}|\vec{v}|) = (\cos\frac{\theta}{2}, \vec{u}\sin\frac{\theta}{2})$$

gde je $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ tj. $|\vec{u}| = 1$.

4.7 Kvaternioni i rotacija

U sekciji 3.8 smo pokazali da je množenje kompleksnog broja kompleksnim brojem čiji je moduo 1 predstavlja rotaciju u ravni (dvodimenzionalnom prostoru). Sada želimo da uz pomoć kvaterniona definišemo rotaciju u trodimenzionalnom prostoru.

Zato definišemo sledeću transformaciju kroz čije ćemo osobine pokazati da ona zaista predstavlja rotaciju u trodimenzionalnom prostoru.

Definicija 38. *Transformacija* $L_u : \Im(\mathbb{H}) \to \Im(\mathbb{H})$ *zadata sa:*

$$L_u(q) = uq\overline{u}, \quad u \in S^3 \tag{12}$$

predstavlja ***rotaciju*** *tačke čije su koordinate komponente kvaterniona* q.

Preslikavanje L_u ima sledeće osobine:

- L_u je dobro definisano

  Da je preslikavanje dobro definisano znači da se kvaternion $q \in \Im(\mathbb{H})$ preslikavanjem L_u slika u kvaternion $L_u(q) \in \Im(\mathbb{H})$. Drugim rečima, vektor mora da slika u vektor. Kako za svaki imaginarni kvaternion q važi $\overline{q} = -q$, dovoljno je da pokažemo da je $\overline{L_u(q)} = -L_u(q)$:

$$\overline{L_u(q)} = \overline{uq\overline{u}} = u\overline{q}\overline{u} = u(-q)\overline{u} = -uq\overline{u} = -L_u(q)$$

- L_u je ortogonalna transformacija (čuva skalarni proizvod)

  Neka su $q_1, q_2 \in \Im(\mathbb{H})$. Tada je:

$$\begin{aligned} L_u(q_1) \circ L_u(q_2) &= (uq_1\overline{u}) \circ (uq_2\overline{u}) \\ &= \frac{uq_1\overline{u}\overline{uq_2\overline{u}} + uq_2\overline{u}\overline{uq_1\overline{u}}}{2} \\ &= \frac{uq_1\overline{u}u\overline{q_2}\overline{u} + uq_2\overline{u}u\overline{q_1}\overline{u}}{2} \\ &= \frac{uq_1\overline{q_2}\overline{u} + uq_2\overline{q_1}\overline{u}}{2} \\ &= u\frac{q_1\overline{q_2} + q_2\overline{q_1}}{2}\overline{u} \\ &= u(q_1 \circ q_2)\overline{u} \\ &= q_1 \circ q_2 \end{aligned}$$

  Kako je moduo koren skalarnog proizvoda (teorema 4 pod (a)) , ovim smo ujedno dokazali i da je transformacija L_u izometrija.

- L_u je linearna transformacija

  Neka su $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ i $q_1, q_2 \in \Im(\mathbb{H})$. Tada je:

$$L_u(a_1q_1+a_2q_2) = u(a_1q_1+a_2q_2)\overline{u} = ua_1q_1\overline{u}+ua_2q_2\overline{u} = a_1L_u(q_1)+a_2L_u(q_2)$$

- $L_u \equiv L_{-u}$

$$L_{-u}(q) = (-u)q(-\overline{u}) = uq\overline{u} = L_u(q)$$

- L_u „prolazi kroz vektorski proizvod” tj. važi $L_u(q_1 \times q_2) = L_u(q_1) \times L_u(q_2)$

Neka su $q_1, q_2 \in \Im(\mathbb{H})$. Tada je:

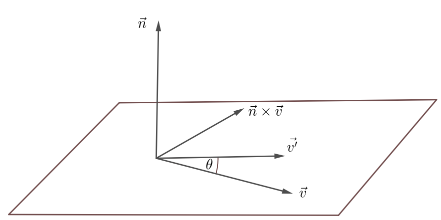
$$\begin{aligned} L_u(q_1) \times L_u(q_2) &= (uq_1\overline{u}) \times (uq_2\overline{u}) \\ &= \frac{uq_1\overline{u}uq_2\overline{u} - uq_2\overline{u}uq_1\overline{u}}{2} \\ &= \frac{uq_1q_2\overline{u} - uq_2q_1\overline{u}}{2} \\ &= u\frac{q_1q_2 - q_2q_1}{2}\overline{u} \\ &= L_u(q_1 \times q_2) \end{aligned}$$

Ovo praktično znači da preslikavanje L_u ne menja orijentaciju.

Rezime: Dakle, preslikavanje L_u slika vektor u vektor, linearno je, čuva rastojanje, pa je u pitanju izometrija. Kako L_u čuva orijentaciju, onda je ono direktna izometrija, a jedina direktna izometrija koja ima sve ove osobine je baš rotacija.

Sada želimo da dođemo do formule (12) počevši od proizvoljnog vektora $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$. Prvo ćemo izvesti formulu za rotaciju vektora $\vec{v}$ za slučaj kada se taj vektor nalazi u ravni koja je normalna na osu rotacije, a zatim i za ostale slučajeve.

Neka je data osa rotacije vektorom $\vec{n}$ tako da je $|\vec{n}| = 1$ i vektor $\vec{v}$ koji se nalazi u ravni koja je normalna na $\vec{n}$ (slika 3). Želimo da rotiramo vektor $\vec{v}$



Slika 3

oko ose $\vec{n}$ za neki ugao θ. Ako sa $\vec{v'}$ označimo vektor koji se dobija rotacijom vektora $\vec{v}$ oko ose $\vec{n}$ za ugao θ, onda je vektor $\vec{v'}$ zadat formulom

$$\vec{v'} = \cos\theta\vec{v} + \sin\theta(\vec{n} \times \vec{v}). \tag{13}$$

Ako bismo ove vektore predstavili kvaternionima iz $\Im(\mathbb{H})$, tj. $v = (0, \vec{v}) = (0, \mathbf{v})$, $v' = (0, \vec{v'}) = (0, \mathbf{v'})$ i $n = (0, \vec{n}) = (0, \mathbf{n})$, na osnovu formule (9) za množenje kvaterniona imamo da je

$$nv = (-\mathbf{n} \circ \mathbf{v}, \mathbf{n} \times \mathbf{v}).$$

Pošto smo pretpostavili da je $\vec{n} \perp \vec{v}$, onda je $\mathbf{n} \circ \mathbf{v} = 0$, pa je

$$nv = (0, \mathbf{n} \times \mathbf{v}).$$

Zamenom ove jednakosti u jednakost (13) dobijamo

$$v' = \cos\theta v + \sin\theta n v$$

tj.

$$v' = (\cos\theta + \sin\theta n)v.$$

Kako je $|\vec{n}| = 1$, tada je

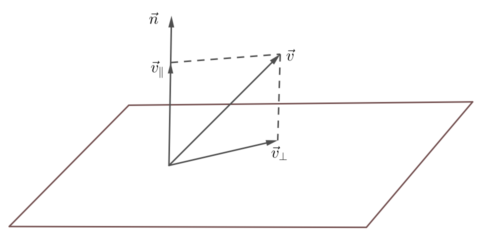
$$n^2 = (0, \mathbf{n})(0, \mathbf{n}) = (-\mathbf{n} \circ \mathbf{n}, \mathbf{n} \times \mathbf{n}) = (-|\mathbf{n}|^2, 0) = (-1, 0) = -1,$$

što, po analogiji sa kompleksnim brojevima, opravdava zapis

$$v' = e^{\theta n} v. \tag{14}$$

Dakle, formula (14) je formula za rotaciju kvaterniona(vektora) v za ugao θ u ravni normalnoj na osu rotacije zadatu kvaternionom n.

Sada želimo da izvedemo formulu za rotaciju vektora $\vec{v}$ koji se ne mora nužno nalaziti u ravni normalnoj na osu rotacije $\vec{n}$. Vektor $\vec{v}$ koji želimo da rotiramo



Slika 4

zapisaćemo u obliku

$$\vec{v} = \vec{v}_{\|} + \vec{v}_{\perp}$$

gde je $\vec{v}_{\|}$ u pravcu ose $\vec{n}$, a $\vec{v}_{\perp}$ pripada ravni normalnoj na osu $\vec{n}$ (slika 4). Tada će traženi vektor $\vec{v'}$ koji se dobija rotacijom vektora $\vec{v}$ biti

$$\vec{v'} = \vec{v'_{\|}} + \vec{v'_{\perp}}$$

pri čemu su $\vec{v'_{\|}}$ i $\vec{v'_{\perp}}$ vektori dobijeni rotacijom vektora $\vec{v_{\|}}$ i $\vec{v_{\perp}}$, respektivno, oko ose $\vec{n}$ za ugao θ. Sada možemo vektore da predstavimo kvaternionima iz $\Im(\mathbb{H})$, tj. $v = (0, \vec{v}) = (0, \mathbf{v})$, $v' = (0, \vec{v'}) = (0, \mathbf{v'})$, $n = (0, \vec{n}) = (0, \mathbf{n})$, $v'_{\|} = (0, \vec{v'_{\|}})$ i $v'_{\perp} = (0, \vec{v'_{\perp}})$. Kako se vektor $\vec{v}_{\|}$ nalazi u istom pravcu kao osa $\vec{n}$, on pri rotaciji ostaje nepromenjen, tj. važi $\vec{v'_{\|}} = \vec{v_{\|}}$, odnosno $v'_{\|} = v_{\|}$. S druge strane, vektor $\vec{v_{\perp}}$ pripada ravni normalnoj na osu rotacije, pa prema formuli (14) važi $v'_{\perp} = e^{\theta n} v_{\perp}$, pa je:

$$v' = v_{\|} + e^{\theta n} v_{\perp} \tag{15}$$

Pre nego što izvedemo konačnu formulu, pokazaćemo da važi:

- $e^{\theta n} v_\perp = v_\perp e^{-\theta n}$

  Koordinatno predstavljeno, ovi proizvodi imaju oblik:

  $$(\cos\theta, \sin\theta\vec{n})(0, \vec{v}_\perp) = (0, \vec{v}_\perp)(\cos(-\theta), \sin(-\theta)\vec{n})$$

  pa je

  $$(0, \cos\theta + \sin\theta(\vec{n} \times \vec{v_\perp})) = (0, \cos\theta - \sin\theta(\vec{v_\perp} \times \vec{n})).$$

  Kako je $\vec{n} \times \vec{v_\perp} = -\vec{v_\perp} \times \vec{n}$, to je konačno:

  $$(0, \cos\theta + \sin\theta(\vec{n} \times \vec{v_\perp})) = (0, \cos\theta + \sin\theta(\vec{n} \times \vec{v_\perp}))$$

  što je i trebalo pokazati.

- $e^{\theta n} v_\parallel = v_\parallel e^{\theta n}$

  Treba da pokažemo da kvaternioni $e^{\theta n}$ i $v_\parallel$ komutiraju. To znači da treba da pokažemo da je komutator $[e^{\theta n}, v_\parallel] = e^{\theta n} v_\parallel - v_\parallel e^{\theta n} = 0$. Kako je $e^{\theta n} = (\cos\theta, \sin\theta n)$, prema jednakosti (11)

  $$[e^{\theta n}, v_\parallel] = (0, 2\sin\theta(\vec{n} \times \vec{v_\parallel}))$$

  i kako su vektori $\vec{n}$ i $\vec{v_\parallel}$ kolinearni, to je $\vec{n} \times \vec{v_\parallel} = 0$, pa je $[e^{\theta n}, v_\parallel] = 0$, što je i trebalo pokazati.

Koristeći ove jednakosti, preformulisaćemo jednakost (15) na sledeći način:

$$\begin{aligned}
v' &= v_\parallel + e^{\theta n} v_\perp \\
&= e^{\frac{\theta}{2}n} e^{-\frac{\theta}{2}n} v_\parallel + e^{\frac{\theta}{2}n} e^{\frac{\theta}{2}n} v_\perp \\
&= e^{\frac{\theta}{2}n} v_\parallel e^{-\frac{\theta}{2}n} + e^{\frac{\theta}{2}n} v_\perp e^{-\frac{\theta}{2}n} \\
&= e^{\frac{\theta}{2}n} (v_\parallel + v_\perp) e^{-\frac{\theta}{2}n} \\
&= e^{\frac{\theta}{2}n} v e^{-\frac{\theta}{2}n}
\end{aligned}$$

Konačno, dobili smo formulu za rotaciju kvaterniona (vektora) v za ugao θ oko ose zadate kvaternionom n koja glasi:

$$v' = e^{\frac{\theta}{2}n} v e^{-\frac{\theta}{2}n} \tag{16}$$

Dakle, ako označimo $u = e^{\frac{\theta}{2}n}$, tada je $\overline{u} = e^{-\frac{\theta}{2}n}$, pa formula (16) ima oblik (12), što smo i želeli da pokažemo.

Važna napomena: Eksponencijalna funkcija korišćena u ovom poglavlju mora se koristiti sa oprezom, jer za nju ne važe sve osobine koje važe za eksponencijalnu funkciju definisanu na skupu realnih brojeva. Recimo, za $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$, ako bi važila osobina $e^{q_1} e^{q_2} = e^{q_1 + q_2}$ imali bismo

$$e^{q_1} e^{q_2} = e^{q_1+q_2} = e^{q_2+q_1} = e^{q_2} e^{q_1}$$

što u opštem slučaju nije tačno jer množenje kvaterniona nije komutativno.

5 Oktave

5.1 Definicija i osnovna svojstva

Definicija 39. *Skup* $\mathbb{O} = \{a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + ... + a_7e_7 | a_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, ..., 7\}$ *pri čemu elementi* $e_1, e_2, ..., e_7$ *zadovoljavaju sledeća svojstva:*

- $e_1^2 = e_2^2 = ... = e_7^2 = -1, e_1e_2 = e_4$
- *za* $i \neq j$ *važi* $e_ie_j = -e_je_i$
- *ako je* $e_ie_j = e_k$, *onda je* $e_{i+1}e_{j+1} = e_{k+1}$ *(indeksi se računaju kao elementi skupa* $\mathbb{Z}_7$*)*
- *ako je* $e_ie_j = e_k$, *onda je* $e_{2i}e_{2j} = e_{2k}$ *(indeksi se računaju kao elementi skupa* $\mathbb{Z}_7$*)*

naziva se ***skup oktava*** *(oktoniona).[3]*

Definicija 40. *Neka je* $p \in \mathbb{O}$, $p = a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + ... + a_7e_7$.
Realan broj a_0 *naziva se* ***realni deo oktave*** p *i označava sa* $\Re(p)$.
Oktava $a_1e_1 + a_2e_2 + ... + a_7e_7$ *naziva se* ***imaginarni deo oktave*** p *i označava sa* $\Im(p)$.

Definicija 41. *Oktava oblika* $p = a_1e_1 + a_2e_2 + ... + a_7e_7$ *naziva se* ***imaginarna oktava****. Skup*

$$\Im(\mathbb{O}) = \{a_1e_1 + a_2e_2 + ... + a_7e_7 | a_1, a_2, ..., a_7 \in \mathbb{R}\}$$

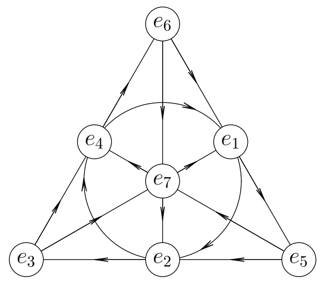
naziva se ***skup imaginarnih oktava****.*

U definiciji 39 naveli smo osnovne jednakosti koje važe za elemente $e_1, e_2, ..., e_7$. Počevši od osnovne jednakosti $e_1e_2 = e_4$ lako se mogu izvesti i ostale, koje se mogu predstaviti tabelom 2.

$\cdot$	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	-1	e_4	e_7	$-e_2$	e_6	$-e_5$	e_3
e_2	$-e_4$	-1	e_5	e_1	$-e_3$	e_7	$-e_6$
e_3	$-e_7$	$-e_5$	-1	e_6	e_2	$-e_4$	e_1
e_4	e_2	$-e_1$	$-e_6$	-1	e_7	e_3	$-e_5$
e_5	$-e_6$	e_3	$-e_2$	$-e_7$	-1	e_1	e_4
e_6	e_5	$-e_7$	e_4	$-e_3$	$-e_1$	-1	e_2
e_7	e_3	e_6	$-e_1$	e_5	$-e_4$	$-e_2$	-1

Tabela 2: Množenje baznih elemenata oktava

Međutim, ova tabela je poprilično glomazna i nepamtljiva. Jedan od jednostavnijih načina za izračunavanje proizvoda baznih elemenata oktava jeste i tzv. Fanova ravan (slika 5). Ona se sastoji od 7 tačaka, 6 pravih i jednog



Slika 5: Fanova ravan

kruga koji sadrži osnovnu jednakost $e_1e_2 = e_4$. Prave predstavljaju množenje elemenata, s tim što se u slučaju kretanja u smeru suprotnom od strelice uzima znak $-$. Dakle, ako pretpostavimo da je 1 neutral za množenje i da važi $e_1^2 = e_2^2 = ... = e_7^2 = -1$, Fanova ravan u potpunosti opisuje algebarsku strukturu oktava.

Do sada smo se upoznali sa kompleksnim brojevima i kvaternionima i opisali njihove osobine. Sada hoćemo da pokažemo vezu između njih i oktava. Najbolji način za to je tzv. Kejli-Diksonova[14] konstrukcija, koju ćemo obraditi u sledećem poglavlju.

5.2 Kejli-Diksonova konstrukcija

U sekciji 3.1 definisali smo kompleksne brojeve kao parove realnih brojeva, pri čemu su sabiranje i množenje bili definisani na sledeći način:

$$\begin{aligned} (a,b)+(c,d) &= (a+c, b+d) \\ (a,b)(c,d) &= (ac-db, bc+da) \end{aligned} \tag{17}$$

Takođe, definisali smo i operaciju konjugovanja kao:

$$\overline{(a,b)} = (a,-b) \tag{18}$$

Kao što su kompleksni brojevi bili definisani kao parovi realnih brojeva, tako se i kvaternioni mogu definisati kao parovi kompleksnih brojeva, pri čemu su sabiranje i množenje definisani na sledeći način:

$$\begin{aligned} (a,b)+(c,d) &= (a+c, b+d) \\ (a,b)(c,d) &= (ac-\overline{d}b, da+b\overline{c}) \end{aligned} \tag{19}$$

[14]Leonard Eugen Dikson (1874-1954), američki matematičar

Operacija konjugovanja se može definisati na sličan način

$$\overline{(a,b)} = (\overline{a}, -b) \tag{20}$$

Kako je konjugat realnog broja realan broj, formule (19) i (20) su identične formulama (17) i (18) za množenje i konjugovanje kompleksnih brojeva kao parova realnih brojeva. Ovakav proces se može nastaviti, pa se oktave mogu definisati kao parovi kvaterniona, pri čemu su sabiranje, množenje i konjugovanje definisani formulama (19) i (20). Dakle, ovaj proces nam od realnih brojeva daje kompleksne brojeve, od kompleksnih brojeva daje kvaternione, a od kvaterniona oktave i naziva se Kejli-Diksonov proces. Da li je on beskonačan i koje su osobine algebarskih struktura koje se dobijaju tim procesom, pokazaćemo u narednih nekoliko paragrafa.

U poglavlju 3.6 definisali smo pojam algebre sa deljenjem. Uz to biće nam potrebno još nekoliko definicija.

Definicija 42. ***Konjugovanje na algebri*** *$\mathbb{A}$ je linearni operator $a \mapsto \overline{a}$ za koji važi:*
1° $\overline{\overline{a}} = a$, $\forall a \in \mathbb{A}$,
2° $\overline{ab} = \overline{b}\overline{a}$, $\forall a, b \in \mathbb{A}$.
Ako na algebri $\mathbb{A}$ postoji konjugovanje, onda se algebra $\mathbb{A}$ zove ***algebra sa konjugovanjem****.*

Definicija 43. *Algebra sa konjugovanjem $\mathbb{A}$ je* ***realna*** *ako važi $\overline{a} = a$, za svako $a \in \mathbb{A}$.*

Definicija 44. *Algebra sa konjugovanjem $\mathbb{A}$ je* ***metrička*** *ako $a + \overline{a} \in \mathbb{R}$ i $a\overline{a} = \overline{a}a > 0$, za svaki element $a \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$. U tom slučaju, norma se definiše kao $Na = a\overline{a} = \overline{a}a$, a inverz za množenje kao $a^{-1} = \dfrac{\overline{a}}{Na}$.*

Definicija 45. *Algebra $\mathbb{A}$ čiji elementi zadovoljavaju sledeće uslove:*
1° $a(ab) = (aa)b$, $\forall a, b \in \mathbb{A}$,
2° $(ba)a = b(aa)$
naziva se ***alternativnom algebrom****.*

Kejli-Diksonova konstrukcija se sastoji u tome da, počevsi od neke algebre sa konjugovanjem $\mathbb{A}_i$ dobijemo novu algebru $\mathbb{A}_{i+1}$ čiji su elementi parovi iz $\mathbb{A}_i$, tj. važi $\mathbb{A}_{i+1} = \mathbb{A}_i \oplus \mathbb{A}_i$, a sabiranje, množenje i konjugovanje su zadati formulama (19) i (20). Uz to, preslikavanje koje nekom elementu $a \in \mathbb{A}_i$ pridružuje element $(a, 0) \in \mathbb{A}_{i+1}$ je injektivno, pa se element a može identifikovati sa $(a, 0)$. Specijalno, ako je 1 jedinica u algebri $\mathbb{A}_i$, onda je $(1, 0)$ jedinica u algebri $\mathbb{A}_{i+1}$. Ako sa ϵ označimo element $\epsilon = (0, 1)$, $1 \in \mathbb{A}_i$, tada se svaki element $(a, b) \in \mathbb{A}_{i+1}$ može zapisati kao $a + b\epsilon$ jer je:

$$a + b\epsilon = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = (a, 0) + (0, b) = (a, b) \tag{21}$$

Važi jednakost

$$a(b\epsilon) = (a, 0)(0, b) = (0, ba) = (ba)\epsilon,$$

a sličnim računom se pokaže da važi i $(a\epsilon)b = (a\overline{b})\epsilon$, kao i $(a\epsilon)(b\epsilon) = -\overline{b}a$, pa je množenje elemenata novodobijene algebre $\mathbb{A}_{i+i}$ predstavljenih u obliku $a + b\epsilon$, $a, b \in \mathbb{A}_i$ potpuno određeno. Takođe, iz jednakosti

$$\overline{a} - b\epsilon = (\overline{a}, 0) - (b, 0)(0, 1) = (\overline{a}, 0) - (0, b) = (\overline{a}, -b)$$

zaključujemo da je jednakošću

$$\overline{a + b\epsilon} = \overline{a} - b\epsilon \tag{22}$$

zadato konjugovanje na algebri $\mathbb{A}_{i+1}$.

Sledećih nekoliko stavova govori o osobinama algebri dobijenih Kejli-Diksonovom konstrukcijom:

Stav 21. *Ako je $\mathbb{A}_i$ metrička, onda je i $\mathbb{A}_{i+1}$ metrička.*

Dokaz. Pošto je $\mathbb{A}_i$ metrička, važi $a\overline{a} = \overline{a}a > 0$ i $b\overline{b} = \overline{b}b > 0$ za svako $a, b \in \mathbb{A}_i \setminus \{0\}$. Tada za $(a, b) \in \mathbb{A}_{i+1}$ važi:

$$(a, b)\overline{(a, b)} = (a, b)(\overline{a}, -b) = (a\overline{a} - (-b)\overline{b}, \overline{a}(-b) + \overline{a}b) = (a\overline{a} + b\overline{b}, 0) > 0$$

što je i trebalo pokazati. $\square$

Stav 22. *Ako je $\mathbb{A}_i$ realna, onda $\mathbb{A}_{i+1}$ nije realna algebra.*

Dokaz. Neka je $(a, b) \in \mathbb{A}_{i+1}$, $a, b \in \mathbb{A}_i$ i $b \neq 0$. Pretpostavimo suprotno, da je $\mathbb{A}_{i+1}$ realna algebra. Tada je:

$$\overline{(a, b)} = (\overline{a}, -b) = (a, -b).$$

Dakle, $\overline{(a, b)} = (a, b)$ ako i samo ako je $b = 0$, što je u kontradikciji sa pretpostavkom. $\square$

Stav 23. *$\mathbb{A}_i$ je realna ako i samo ako je $\mathbb{A}_{i+1}$ komutativna.*

Dokaz. $\Rightarrow$: Ako je $\mathbb{A}_i$ realna, onda za sve $a, b \in \mathbb{A}_i$ važi $\overline{ab} = \overline{b}\overline{a} = ba$. S druge strane je $\overline{ab} = ab$, pa važi $ab = ba$, za svako $a, b \in \mathbb{A}_i$. Neka su sada $(a, b), (c, d) \in \mathbb{A}_{i+1}$. Kako je:

$$(a, b)(c, d) = (ac - \overline{d}b, da + b\overline{c}) = (ac - db, da + bc)$$

i

$$(c, d)(a, b) = (ca - \overline{b}d, ad + c\overline{b}) = (ca - bd, ad + cb),$$

zaključujemo da je $(a, b)(c, d) = (c, d)(a, b)$, tj. $\mathbb{A}_{i+1}$ je komutativna.

$\Leftarrow$: Pretpostavimo suprotno, da $\mathbb{A}_i$ nije realna. Neka su $a, b \in \mathbb{A}_i$ i neka $(a, b) = a + b\epsilon \in \mathbb{A}_{i+1}$. Iz jednakosti $\epsilon b = (0, 1)(b, 0) = (0, \overline{b}) = \overline{b}\epsilon$ zaključujemo da je $\epsilon b \neq b\epsilon$, pa A_{i+1} nije komutativna. $\square$

U sekciji 4.5 definisali smo pojam komutatora za kvaternione. Sada ćemo definisati pojam komutatora i asocijatora za proizvoljne algebre.

Definicija 46. *Neka je* $\mathbb{A}$ *proizvoljna algebra.*
(*a*) ***Komutator*** *na* $\mathbb{A}$ *je dat sa:* $[a,b] = ab - ba$, $a,b \in \mathbb{A}$
(*b*) ***Asocijator*** *na* $\mathbb{A}$ *je dat sa:* $[a,b,c] = (ab)c - a(bc)$, $a,b,c \in \mathbb{A}$.

Lema 3. *Ako je* A_i *asocijativna, tada za svako* $P, Q, R \in \mathbb{A}_{i+1}$, $P = (a,b)$, $Q = (c,d)$, $R = (e,f)$ *važi:*

$$[P,Q,R] = \big([a,\overline{f}d]+[\overline{c},\overline{f}b]+[e,\overline{d}b],\ \ b[\overline{c},\overline{e}]+d[a,\overline{e}]+f[a,c]+b[\overline{d},f]+[b,f]\overline{d}+f[b,\overline{d}]\big) \tag{23}$$

Dokaz. Kako je:

$$\big((a,b)(c,d)\big)(e,f) = \big((ac)e-(\overline{d}b)e-\overline{f}(da)-\overline{f}(b\overline{c}),\ \ f(ac)-f(\overline{d}b)+(da)\overline{e}+(b\overline{c})\overline{e}\big)$$

i

$$(a,b)\big((c,d)(e,f)\big) = \big(a(ce)-a(\overline{f}d)-(\overline{c}\overline{f})b-(e\overline{d})b,\ \ (fc)a+(d\overline{e})a+b(\overline{e}\overline{c})-b(\overline{d}f)\big)$$

dobijamo da je

$$\begin{aligned}[P,Q,R] &= \big((a,b)(c,d)\big)(e,f) - (a,b)\big((c,d)(e,f)\big)\\ &= \big([a,c,e] + [e,\overline{d}b] + [a,\overline{f}d] + [\overline{c},\overline{f}b],\ \ f[a,c] + d[a,\overline{e}] + b[\overline{c},\overline{e}] + (b(\overline{d}f) - f(\overline{d}b))\big)\end{aligned}$$

Kako je, po pretpostavci, $\mathbb{A}_i$ asocijativna, to je $[a,c,e] = 0$. Uz činjenicu da je

$$\begin{aligned}b(\overline{d}f) - f(\overline{d}b) &= b(\overline{d}f) - b(f\overline{d}) + b(f\overline{d}) - (fb)\overline{d} + (fb)\overline{d} - f(\overline{d}b)\\ &= b[\overline{d},f] + [b,f]\overline{d} + f[b,\overline{d}]\end{aligned}$$

lema je dokazana. □

Neka u stavovima 24 i 25 važe oznake iz prethodne leme (leme 3).

Stav 24. $\mathbb{A}_i$ *je komutativna i asocijativna ako i samo ako je* $\mathbb{A}_{i+1}$ *asocijativna.*

Dokaz. $\Rightarrow$: Pošto je $\mathbb{A}_i$ asocijativna, važi jednakost (23), a pošto je $\mathbb{A}_i$ komutativna, onda su svi komutatori na desnoj strani jednakosti (23) jednaki nuli, pa je $[P,Q,R] = 0$, tj. $\mathbb{A}_{i+1}$ je asocijativna.

$\Leftarrow$: Ako je $\mathbb{A}_{i+1}$ asocijativna, takva je zasigurno i $\mathbb{A}_i$ (kao podalgebra algebre $\mathbb{A}_{i+1}$), pa važi jednakost (23). Pošto je $\mathbb{A}_{i+1}$ asocijativna, važi $[P,Q,R] = 0$ i odatle prva koordinata na desnoj strani jednakosti (23) mora biti jednaka nuli. Ostaje još da se pokaže da je

$$b[\overline{c},\overline{e}] + d[a,\overline{e}] + f[a,c] + b[\overline{d},f] + [b,f]\overline{d} + f[b,\overline{d}] = 0.$$

Ako odaberemo da je $f = 1$, $c = e = 0$ i dopustimo da $b, d \in \mathbb{A}_i$ budu proizvoljni, dobijamo:

$$b[0,0] + d[a,0] + [a,0] + b[\overline{d},1] + [b,1]\overline{d} + [b,\overline{d}] = 0,$$

pa je $[b,\overline{d}] = 0$, što znači da je $\mathbb{A}_i$ komutativna. □

Stav 25. *$\mathbb{A}_i$ je asocijativna i metrička ako i samo ako je $\mathbb{A}_{i+1}$ alternativna.*

Dokaz. Dokaz sličan dokazu stava 24. Prvo se pokaže da za alternativnu algebru važi jednakost

$$[P, \overline{P}, Q] = \big([a, \overline{d}, b], [b, \overline{c}, a]\big). \tag{24}$$

Zatim, ako je $\mathbb{A}_i$ asocijativna i metrička, da su asocijatori na desnoj strani jednakosti (24) jednaki nuli, pa važi $[P, \overline{P}, Q] = 0$, a odatle da je $\mathbb{A}_{i+1}$ alternativna. S druge strane, ako je $\mathbb{A}_{i+1}$ alternativna važi $[P, \overline{P}, Q] = 0$, pa je i desna strana jednakosti (24) jednaka nuli, tj. $[a, \overline{d}, b] = 0$ za bilo koje $a, \overline{d}, b \in \mathbb{A}_i$, pa je $\mathbb{A}_i$ asocijativna. □

Sada ćemo primeniti Kejli-Diksonovu konstrukciju počevsi od realnih brojeva, tj. označićemo $\mathbb{A}_0 = \mathbb{R}$.

Formiramo algebru $\mathbb{A}_1 = \mathbb{A}_0 \oplus \mathbb{A}_0 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} = \mathbb{C}$. Kako je $\mathbb{R}$ realna algebra, sabiranje, množenje i konjugovanje su definisani formulama (17) i (18). Takođe, kako je $\mathbb{R}$ realna algebra, prema stavu 22, algebra $\mathbb{C}$ nije realna, pa su sabiranje, množenje i konjugovanje zadati formulama (17) i (18). Iz činjenice da je $\mathbb{R}$ realna algebra, prema stavu 23, sledi da je $\mathbb{C}$ komutativna algebra, a iz činjenice da je $\mathbb{R}$ komutativna i asocijativna, prema stavu 24, sledi da je $\mathbb{C}$ asocijativna algebra. Element (1,0) je jedinica u $\mathbb{C}$, a za element $\epsilon = (0, 1) = i$ važi $i^2 = -1$, pa se, na osnovu jednakosti (21) svaki element $(a, b) \in \mathbb{C}$ može zapisati kao $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Sada ponavljamo proces i formiramo algebru $\mathbb{A}_2 = \mathbb{A}_1 \oplus \mathbb{A}_1 = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} = \mathbb{H}$. Elementi algebre $\mathbb{H}$ su, dakle, parovi kompleksnih brojeva, tj. neki element $q \in \mathbb{H}$ ima oblik $q = (z_1, z_2)$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, a sabiranje, množenje i konjugovanje su zadati formulama (19) i (20). Pošto $\mathbb{C}$ nije realna algebra, prema stavu 23, množenje u $\mathbb{H}$ nije komutativno. Kako je množenje u $\mathbb{C}$ komutativno i asocijativno, onda je, prema stavu 24, množenje u $\mathbb{H}$ asocijativno. Ako je sa 1 označena jedinica u $\mathbb{C}$, onda je kvaternion $(1, 0)$ jedinica u $\mathbb{H}$, a $\epsilon = (0, 1)$. Na osnovu jednakosti (21), element $q \in \mathbb{H}$ se može zapisati kao $q = z_1 + z_2\epsilon$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Ako je $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, onda je

$$q = a + bi + (c + di)\epsilon = a + bi + c\epsilon + di\epsilon,$$

i ako označimo $\epsilon = j$ i $i\epsilon = k$ dobijamo

$$q = a + bi + cj + dk, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

što upravo predstavlja oblik kvaterniona koji smo koristili u samoj definiciji kvaterniona u poglavlju koje smo posvetili njima.

Proces se nastavlja i formiramo algebru $\mathbb{A}_3 = \mathbb{A}_2 \oplus \mathbb{A}_2 = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H} = \mathbb{O}$. Elementi algebre $\mathbb{O}$ su parovi kvaterniona i, analogno, sabiranje, množenje i konjugovanje su zadati formulama (19) i (20). Kako je množenje u $\mathbb{H}$ asocijativno, to prema stavu 25, množenje u $\mathbb{O}$ je alternativno, ali nije ni asocijativno ni komutativno. Na sličan način kao do sada pokazuje se da se svaki element $p \in \mathbb{O}$ može predstaviti kao

$$p = a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + ... + a_7e_7, \quad a_1, a_2, ..., a_7 \in \mathbb{R}$$

što predstavalja oblik oktava koji smo koristili u definiciji oktava.

Sada, kada smo oktave uveli Kejli-Diksonovim procesom, možemo dokazati sledeće:

Teorema 5. *Algebra oktava je normirana algebra.*

Dokaz. Treba da pokažemo da za proizvoljna dva elementa $p_1, p_2 \in \mathbb{O}$ važi $|p_1p_2|^2 = |p_1|^2|p_2|^2$.

Neka je $p_1 = (a, b)$, $p_2 = (c, d)$, gde su $a, b, c, d \in \mathbb{H}$. Tada je:

$$p_1p_2 = (ac - \overline{d}b, da + b\overline{c}),$$

pa je

$$\begin{aligned} |p_1p_2|^2 &= (ac - \overline{d}b)\overline{(ac - \overline{d}b)} + (da + b\overline{c})\overline{(da + b\overline{c})} \\ &= (ac - \overline{d}b)(\overline{c}\overline{a} - \overline{b}d) + (da + b\overline{c})(\overline{a}\overline{d} + c\overline{b}), \end{aligned}$$

a

$$|p_1|^2|p_2|^2 = (a\overline{a} + b\overline{b}, 0)(c\overline{c} + d\overline{d}, 0) = (a\overline{a} + b\overline{b})(c\overline{c} + d\overline{d}).$$

Ako kvaternion d zapišemo u obliku $d = q_0 + \mathbf{q}$, $q_0 \in \mathbb{R}$, $\mathbf{q} \in \Im(\mathbb{H})$, dobijamo da je

$$\begin{aligned} |p_1p_2|^2 &= (ac - (q_0 - \mathbf{q})b)(\overline{c}\overline{a} - \overline{b}(q_0 + \mathbf{q})) + ((q_0 + \mathbf{q})a + b\overline{c})(\overline{a}(q_0 - \mathbf{q}) + c\overline{b}) \\ &= (ac - q_0b + \mathbf{q}b)(\overline{c}\overline{a} - \overline{b}q_0 - \overline{b}\mathbf{q}) + (q_0a + \mathbf{q}a + b\overline{c})(\overline{a}q_0 - \overline{a}\mathbf{q} + c\overline{b}) \\ &= ac\overline{c}\overline{a} - q_0b\overline{c}\overline{a} + \mathbf{q}b\overline{c}\overline{a} - ac\overline{b}q_0 + q_0b\overline{b}q_0 - \mathbf{q}b\overline{b}q_0 \\ &- ac\overline{b}\mathbf{q} + q_0b\overline{b}\mathbf{q} - \mathbf{q}b\overline{b}\mathbf{q} + q_0a\overline{a}q_0 + \mathbf{q}a\overline{a}q_0 + b\overline{c}\overline{a}q_0 \\ &- q_0a\overline{a}\mathbf{q} - \mathbf{q}a\overline{a}\mathbf{q} - b\overline{c}\overline{a}\mathbf{q} + q_0ac\overline{b} + \mathbf{q}ac\overline{b} + b\overline{c}c\overline{b}, \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} |p_1|^2|p_2|^2 &= (a\overline{a} + b\overline{b})(c\overline{c} + (q_0^2 - \mathbf{q}^2)) \\ &= a\overline{a}c\overline{c} + b\overline{b}c\overline{c} + a\overline{a}q_0^2 + b\overline{b}q_0^2 - a\overline{a}\mathbf{q}^2 - b\overline{b}\mathbf{q}^2. \end{aligned}$$

Sređivanjem dobijamo da je

$$|p_1p_2|^2 - |p_1|^2|p_2|^2 = q_0(-b\overline{c}\overline{a} - ac\overline{b} + b\overline{c}\overline{a} + ac\overline{b}) + \mathbf{q}(b\overline{c}\overline{a} + ac\overline{b}) - (ac\overline{b} + b\overline{c}\overline{a})\mathbf{q}$$

Kako je $\overline{ac\overline{b}} = b\overline{c}\overline{a}$, važi $ac\overline{b} + b\overline{c}\overline{a} \in \mathbb{R}$ (kao zbir kvaterniona i njemu konjugovanog kvaterniona), pa kao takav komutira sa $\mathbf{q}$, pa je konačno:

$$|p_1p_2|^2 - |p_1|^2|p_2|^2 = 0$$

tj.

$$|p_1p_2|^2 = |p_1|^2|p_2|^2$$

što je i trebalo dokazati. □

Sledeći korak u Kejli-Diksonovom procesu je formiranje algebre čiji su elementi parovi oktava. Analognim postupkom dobija se algebra dimenzije 16 čiji se elementi nazivaju **sedenioni**, a skup svih sedeniona označava slovom $\mathbb{S}$. Međutim, algebra sedeniona ima delitelje nule, tj. nije algebra sa deljenjem, samim tim nije ni normirana algebra, pa se njome u ovom radu nećemo baviti.

5.3 Skalarni i vektorski proizvod

Na prostoru oktava je takođe moguće definisati skalarni proizvod.

Definicija 47. ***Skalarni proizvod*** *oktava* $p_1 = a_0 + \sum_{i=1}^{7} a_i e_i$ *i* $p_2 = b_0 + \sum_{i=1}^{7} b_i e_i$ *je broj*

$$p_1 \circ p_2 = \sum_{i=0}^{7} a_i b_i.$$

Sasvim očekivano, skalarni proizvod se definiše kao suma proizvoda odgovarajućih koordinata oktava. Takođe, može se definisati i vektorski proizvod dve imaginarne oktave:

Definicija 48. ***Vektorski proizvod*** *dve oktave* $p_1, p_2 \in \Im(\mathbb{O})$ *je:*

$$p_1 \times p_2 = \frac{p_1 p_2 - p_2 p_1}{2} = \Im(p_1 p_2).$$

Primetimo da smo i u slučaju kvaterniona (sekcija 4.5) i sada, u slučaju oktava skalarni proizvod definisali na prostorima $\mathbb{H}$ i $\mathbb{O}$, a vektorski proizvod na prostorima $\Im(\mathbb{H})$ i $\Im(\mathbb{O})$. Nameće se logično pitanje: da li je moguće definisati vektorski proizvod na $\mathbb{H}$ i $\mathbb{O}$? Kako su $\Im(\mathbb{H})$, $\mathbb{H}$, $\Im(\mathbb{O})$, $\mathbb{O}$ izomorfni prostorima $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^7$, $\mathbb{R}^8$, respektivno, prethodno pitanje se uopštava: da li je i kada moguće definisati skalarni i vektorski proizvod na prostoru $\mathbb{R}^n$ i kakva je uloga hiperkompleksnih brojeva u tome? Pre nego što pokušamo da damo odgovor na to pitanje, podsetimo se definicija skalarnog i vektorskog proizvoda u $\mathbb{R}^n$.

Definicija 49. *Neka su* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$*, tj.* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$*,* $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$*. Tada je* ***skalarni proizvod*** *dat jednakošću:*

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

a ***norma*** *indukovana tako definisanim skalarnim proizvodom data sa*

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x} \circ \mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}.$$

Definicija 50. ***Vektorski proizvod*** *u* $\mathbb{R}^n$ *je preslikavanje* $\times : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *koje zadovoljava sledeća svojstva:*

1° $(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) \times (\gamma\mathbf{u} + \delta\mathbf{v}) = \alpha\gamma(\mathbf{x} \times \mathbf{u}) + \alpha\delta(\mathbf{x} \times \mathbf{v}) + \beta\gamma(\mathbf{y} \times \mathbf{u}) + \beta\delta(\mathbf{y} \times \mathbf{v})$

2° $\mathbf{x} \perp (\mathbf{x} \times \mathbf{y})$, $\mathbf{y} \perp (\mathbf{x} \times \mathbf{y})$

3° $|\mathbf{x} \times \mathbf{y}|^2 + (\mathbf{x} \circ \mathbf{y})^2 = |\mathbf{x}|^2 |\mathbf{y}|^2$

za svako $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ *i* $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$*.*

Lako se vidi da ne postoji ograničenje za postojanje skalarnog proizvoda na $\mathbb{R}^n$, jer je skalarni proizvod realan broj koji se dobija kao suma proizvoda odgovarajućih koordinata, ma koliko da ih ima. Što se vektorskog proizvoda tiče, tu je stvar drugačija. Tu dolazimo do ključne veze između hiperkompleksnih sistema i vektorskog proizvoda. Oličenje te veze je Hurvicova teorema iz 1898. godine, a jedan od oblika te teoreme je:

Teorema 6. *Jedine normirane algebre nad poljem $\mathbb{R}$ su $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ i $\mathbb{O}$.*

Dokaz ove teoreme dali su Kervejr[15] i Milnor[16] 50-ih godina prošlog veka koristeći algebarsku topologiju (koja 1898. nije ni postojala). Originalni problem sa kojim se susreo Hurvic te 1898. godine bio je sledeći: za koje vrednosti broja $n \in \mathbb{N}$ važi jednakost

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\Big) = \sum_{i=1}^{n} z_i^2 \tag{25}$$

gde su

$$z_i = \sum_{j,k=1}^{n} a_{ijk} x_j y_k$$

a a_{ijk} kompleksni brojevi? U to vreme, bile su poznate jednakosti za $n = 1, 2, 4$ i 8. Jednakost za $n = 4$ otkrio je Ojler i ona se koristi u klasičnom dokazu teoreme Lagranža koju smo dokazali u sekciji 4.3 uz pomoć kvaterniona. Jednakost za $n = 8$ otkrio je Degen[17] 1822. godine. Hurvicova teorema tvrdi da jednakost (25) vazi samo za $n = 1, 2, 4$ i 8.

Teorema 7. *Vektorski proizvod na prostoru $\mathbb{R}^n$ postoji samo u slučaju kada je $n = 1, 3$ ili 7.*

Dokaz. Slučaj kada je $n = 1$ je trivijalan, jer je za $a, b \in \mathbb{R}$ vektorski proizvod zadat sa $a \times b = 0$ zadovoljava sve osobine iz definicije 50. Zato, za $n \geqslant 2$ pretpostavimo da je na prostoru $\mathbb{R}^n$ zadat vektorski proizvod koji zadovoljava osobine iz definicije 50 i posmatrajmo prostor $\mathbb{R}^{n+1}$ kao $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^n$. To znači da ćemo elemente skupa $\mathbb{R}^{n+1}$ posmatrati u obliku $(s, \mathbf{v})$ gde je $s \in \mathbb{R}$ i $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Za dva elementa $(s_1, \mathbf{v}_1), (s_2, \mathbf{v}_2) \in \mathbb{R}^{n+1}$ definišimo množenje sledećom formulom:

$$(s_1, \mathbf{v}_1)(s_2, \mathbf{v}_2) = (s_1 s_2 - \mathbf{v}_1 \circ \mathbf{v}_2, s_1 \mathbf{v}_2 + s_2 \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2). \tag{26}$$

Kako važi:

$$\begin{aligned}
|(s_1, \mathbf{v}_1)(s_2, \mathbf{v}_2)|^2 &= (s_1 s_2)^2 + (\mathbf{v}_1 \circ \mathbf{v}_2)^2 + s_1^2 |\mathbf{v}_2|^2 + s_2^2 |\mathbf{v}_1|^2 + |\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|^2 \\
&= s_1^2 s_2^2 + (\mathbf{v}_1 \circ \mathbf{v}_2)^2 + s_1^2 |\mathbf{v}_2|^2 + s_2^2 |\mathbf{v}_1|^2 + |\mathbf{v}_1|^2 |\mathbf{v}_2|^2 - (\mathbf{v}_1 \circ \mathbf{v}_2)^2 \\
&= s_1^2 (s_2^2 + |\mathbf{v}_2|^2) + |\mathbf{v}_1|^2 (s_2^2 + |\mathbf{v}_2|^2) \\
&= (s_1^2 + |\mathbf{v}_1|^2)(s_2^2 + |\mathbf{v}_2|^2) \\
&= |(s_1, \mathbf{v}_1)|^2 |(s_2, \mathbf{v}_2)|^2,
\end{aligned}$$

zaključujemo da je prostor $\mathbb{R}^{n+1}$ sa množenjem datim formulom (26) izomorfan nekoj normiranoj algebri, pa je prema teoremi Hurvica (teorema 6) izomorfan

[15]Mišel Andre Kerver (1927-2007), francuski matematičar
[16]Džon Milnor (1931-), američki matematičar
[17]Karl Ferdinand Degen (1766-1825), danski matematičar

nekom od prostora $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ili $\mathbb{O}$. Dakle, $n+1 \in \{1,2,4,8\}$, tj. $n \in \{0,1,3,7\}$. Kako smo pretpostavili da je $n \geqslant 2$, dobijamo da $n \in \{3,7\}$, čime smo završili dokaz.

Napomena: Sa jednakošću (26) smo se, u konkretnom slučaju $n+1=4$, susreli u poglavlju 4.5 (videti jednakost (8)). $\square$

6 Zaključak

Tokom pisanja rada trudio sam se da pojam hiperkompleksnih brojeva predstavim na jedan sintetički način tako što sam, pošavši od kompleksnih brojeva koji su prosečnom čitaocu najpoznatiji, predstavio hiperkompleksne brojeve (kvaternione i oktave) trudeći se da definišem, ukoliko je to moguće, analogne pojmove pojmovima vezanim za kompleksne brojeve i predstavim sličnosti i razlike između njih. Pokazalo se koje se osobine gube prelaskom iz jednog sistema u drugi i šta je ono što je svima njima zajedničko. Na primer, pokazalo se da se prelaskom sa kvaterniona na okave gubi svojstvo asocijativnosti množenja. Takođe, uočava se da su kvaternioni i oktave zajedno sa kompleksnim brojevima normirane algebre i pokazalo šta to povlači sa sobom u nekim konkretnim slučajevima.

Izražavam nadu da će ovaj rad zainteresovati čitaoca da dalje istražuje temu hiperkompleksnih brojeva, a da će mu ovaj rad dati smernice za to.

Literatura

[1] Mateljević M., *O kompleksnim brojevima i osnovnom stavu algebre*, Nastava matematike, XLVII 3-4 (2002)

[2] Božić M., *Pregled istorije i filozofije matematike*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd (2002)

[3] Baez J., *The Octonions*, American Mathematical Society, 2001.

[4] Kalajdžic G., *Algebra*, Matematički fakultet, 2008.

[5] Dam E.B, Koch M., Lillholm M., *Quaternions, Interpolation and Animation*, Technical Report DIKU-TR-98/5 (1998)

[6] Curtis M.L., Place P., *Abstract Linear Algebra*, Springer-Verlag (1990)

[7] Ilić V., *Kvaternioni i njihova primena u geometriji*, Beograd, 2011.

[8] Jacobson N., *Basic Algebra I*, University of Yale, 1985.

[9] Hardy G.H., Wright E.M., *An Introduction to the Theory of Numbers*, 2008.