Matematički fakultet
Univerzitet u Beogradu

Elementarne funkcije i preslikavanja u analizi

Master rad

Mentor:
dr Miodrag Mateljević

Student:
Marija Vujičić
1045/2015

Beograd, 2018.

Sadržaj

1 Uvod **2**

2 Stepena funkcija **3**
2.1 Stepena funkcija sa prirodnim izložiocem 3
2.2 Stepen čiji je izložilac ceo broj 7
2.3 Stepen čiji je izložilac racionalan broj 8
2.4 Stepena funkcija čiji je izložilac realan broj 15

3 Eksponencijalna funkcija **17**
3.1 Definicija eksponencijalne funkcije pomoću osobina realnih brojeva 17
3.2 Eksponencijalna funkcija i funkcionalne jednačine 19
3.3 Definicija eksponencijalne funkcije pomoću stepenih redova 22

4 Logaritamska funkcija **24**
4.1 Logaritamska funkcija kao funkcija realne promenljive 24
4.2 Logaritamska funkcija kao funkcija kompleksne promenljive 27

5 Trigonometrijske funkcije **29**
5.1 Definicija trigonometrijskih funkcija oštrog ugla 29
5.2 Definicija trigonometrijskih funkcija pomoću trigonometrijskog kruga 32

6 Inverzne trigonometrijske funkcije **39**

7 Zaključak **47**

1 Uvod

Prvi tragovi pojma funkcije pojavljuju se još za vreme Babilonaca i u antičkoj Grčkoj, u periodu kada su nastali brojanje i računanje. Možda tada i nisu postojali brojevi kakve danas imamo ali ljudi su mogli za svaku životinju u svakom stadu da odvoje po kamenčić i da svaki put provere da li je isti broj životinja i kamenčića.

Verovatno je pojam *istobrojnosti* prvi pomak u definisanju i objašnjenju samog pojma funkcije.
Otuda i Dedekindova rečenica: ,,U početku beše preslikavanje." Ako se za svaku životinju odvoji kamenčić napravljena je bijekcija između skupa životinja i skupa kamenčića.

Opšte je poznato da je pojam funkcije jedan od osnovnih pojmova matematike. Sam pojam funkcije izražava ideju preslikavanja jednih objekata u druge kao i ideju zavisnosti jednih veličina od drugih. Samim tim, sledi da funkcijsko razmišljanje daje posebnu dimenziju matematičkom obrazovanju, omogućava bolje razumevanje i efikasnije postupke u drugim nastavnim sadržajima. Može se reći da je dobro razumevanje samih definicija elementarnih funkcija značajno za izučavanje i drugih matematičkih pojmova, kao i primene funkcija u raznim drugim oblastima.

2 Stepena funkcija

2.1 Stepena funkcija sa prirodnim izložiocem

Ako je a bilo koji realan broj, tada je, kao što znamo:
$a^2 = a \cdot a$, $a^3 = a \cdot a \cdot a$, $a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a, \ldots$.
Dakle, za proizvoljan prirodan broj n, biće:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n \quad \text{puta}}.$$

Za ovako definisano stepenovanje realnog broja a prirodnim brojem n važe sledeći zakoni:

$$a^n \cdot a^m = a^{m+n}, \quad (a^n)^m = a^{mn}, \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0),$$

gde su a i b proizvoljni realni brojevi, a m i n su proizvoljni prirodni brojevi.

Definicija 2.1.1. *Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definisana formulom $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, naziva se* ***stepena funkcija sa prirodnim izložiocem****.*

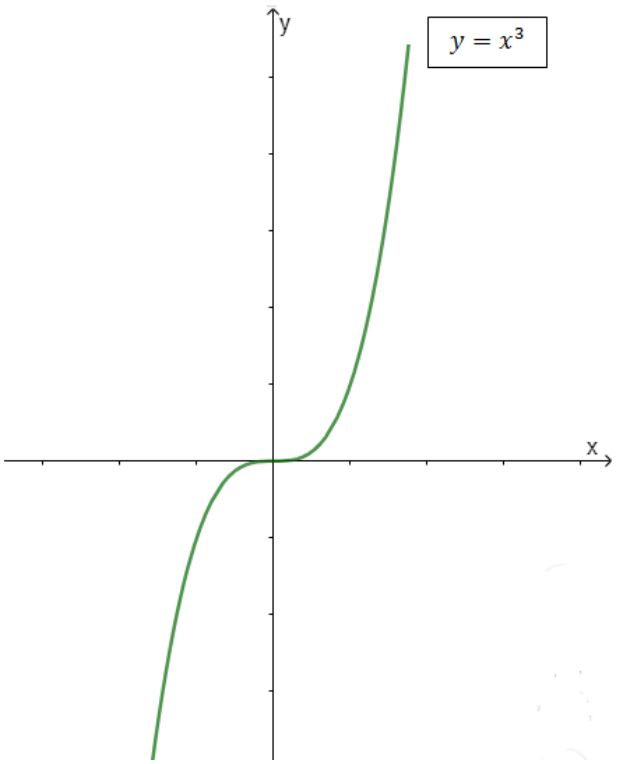
Funkcija $y = x$ je neprekidna, pa je funkcija $y = x^n$ neprekidna kao proizvod neprekidnih funkcija. Razmotrimo sada grafik i osobine funkcije $f(x) = x^n$, $(n \in \mathbb{N})$ u zavisnosti od parnosti broja n.

Posmatrajmo najpre funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2n+1}$.

- Funkcija f je definisana za sve realne vrednosti x, tj. njen domen je skup $\mathbb{R}$.
- Funkcija f je neparna, tj. važi $(-x)^{2n+1} = -x^{2n+1}$ za svako $x \in \mathbb{R}$.
- $f(x) > 0$ za $x > 0$ i $f(x) < 0$ za $x < 0$.
- $f(x) = 0$ ako i samo ako je $x = 0$.
- Funkcija f je strogo rastuća na $\mathbb{R}$.
- Funkcija f je bijekcija, što sledi iz:
  Za svako $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ iz $f(x_1) = f(x_2)$ tj. ${x_1}^{2n+1} = {x_2}^{2n+1}$
  sledi $x_1 = x_2$, pa je funkcija f injekcija.
  Za svako $y \in \mathbb{R}$ postoji $x = \sqrt[2n+1]{y} \in \mathbb{R}$ za koje je $f(x) = x^{2n+1} = y$.

- Funkcija
$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(y) = \sqrt[2n+1]{y}, \quad y \in \mathbb{R}$$
je inverzna funkciji f.

Ove navedene osobine vidimo i sa grafika funkcije $y = x^3$.



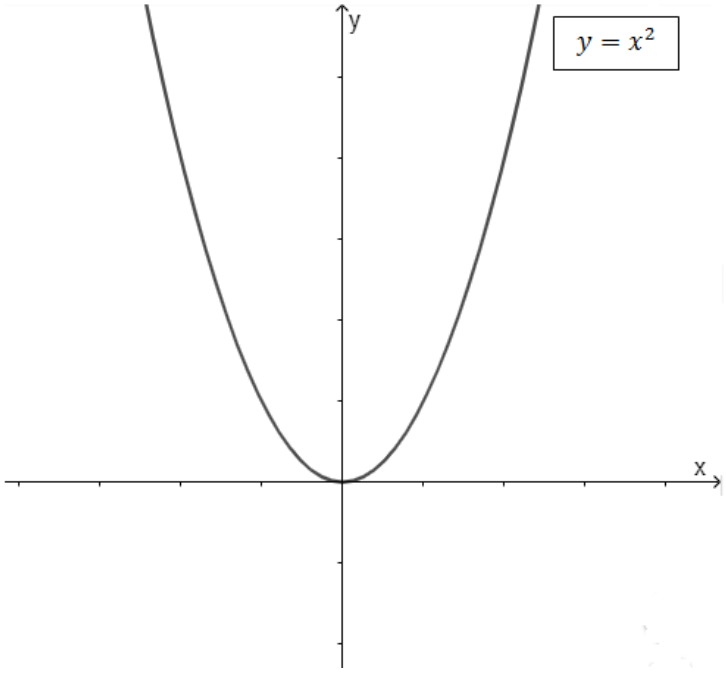
Slika 1

Posmatrajmo sada funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^{2n}$.

- Funkcija f je definisana za sve realne vrednosti x.
- Funkcija f je parna.
- $f(x) \geq 0$ za svako $x \in \mathbb{R}$ i $f(x) = 0$ ako i samo ako $x = 0$
- Funkcija f je rastuća na $(0, +\infty)$ i opadajuća na $(-\infty, 0)$

- Funkcija f nije ni $,,1-1''$ ni $,,NA''$:
  Zaista, na primer, važi $f(-1) = f(1)$, što znači da nije $,,1-1''$.
  S druge strane, za $y = -1 \in \mathbb{R}$ ne postoji $x \in \mathbb{R}$ takvo da je $x^{2n} = -1 = y$, pa funkcija nije ni $,,NA''$.
  Dakle, ova funkcija nije bijekcija, pa nema inverznu funkciju.

Primer takve funkcije jeste funkcija $f(x) = x^2$, čiji je grafik prikazan na slici 2.



Slika 2

Vidimo da funkcije $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$ imaju različite osobine, a grafici različite oblike, zavisno od toga da li je n paran ili neparan broj.
Međutim, ako se ograničimo na slučaj kada je $x \geq 0$, onda sve funkcije $f(x) = x^n$ imaju iste osnovne osobine, grafici su im slični.

Te osobine su:

i) $x > 0 \Rightarrow x^n > 0$;

ii) $0 \leq a < b \Rightarrow a^n < b^n$.

Iz osobine (ii) sledi važna ekvivalencija:

$$a = b \Leftrightarrow a^n = b^n \quad (a > 0, \quad b > 0).$$

2.2 Stepen čiji je izložilac ceo broj

Želimo da definišemo izraz a^n i u slučaju kada je n ne samo prirodan već bilo koji ceo broj. Pri tome, moramo voditi računa da osnovni zakoni stepenovanja: tj.

$$a^n \cdot a^m = a^{m+n}, \quad (a^n)^m = a^{mn}, \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad b \neq 0$$

i dalje važe. Pored ovih svojstava, važi i:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (m > n; \quad a \neq 0). \tag{1}$$

Ako jednakost (1) treba da važi i u slučaju kada je $m = n$, onda se po definiciji uzima da je

$$a^0 = 1. \tag{2}$$

Zaista, ako je $a \neq 0$ i n prirodan broj, očigledno je :

$$\frac{a^n}{a^n} = 1.$$

Sa druge strane, ako u jednakost (1) stavimo da je $m = n$, imamo da je:

$$\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n}$$

$$\frac{a^n}{a^n} = a^0.$$

Ako jednakost (1) treba da važi za sve cele brojeve m i n, dakle i za $m = 0$ onda se po definiciji uzima da je

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0, n \in \mathbb{N}). \tag{3}$$

Zaista, ako u jednakost (1) zamenimo da je $m = 0$ dobijamo: $\frac{a^0}{a^n} = a^{0-n}$, gde već znamo da je $a^0 = 1$. Dakle, uvođenjem definicija (2) i (3) definisali smo izraz a^n i u slučaju kada je n ceo broj. Vidi se da važe i osnovni zakoni stepenovanja i kada su m i n proizvoljni celi brojevi, pa otuda i teorema.

Teorema 1. *Za svako $a, b \in \mathbb{R}$ i svako $m, n \in \mathbb{Z}$ važi:*

S.1 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

S.2 $a^m : a^n = a^{m-n}, \quad a \neq 0$.

S.3 $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

S.4 $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$.

S.5 $(a : b)^m = a^m : b^m, \quad b \neq 0$.

2.3 Stepen čiji je izložilac racionalan broj

Da bismo definisali stepen broja čiji je izložilac racionalan broj, najpre, ćemo uvesti pojam n-tog korena zadatog broja.

Teorema 2. *Za svaki pozitivan realan broj x i $n \in \mathbb{N}$ postoji i jednoznačno je određen pozitivan realan broj y, takav da je $y^n = x$.*

Dokaz. Uočimo podskup realnih brojeva $A = \{z \geq 0 | z^n \leq x\}, A \neq \varnothing$ (skup A je neprazan jer važi sledeća činjenica: ako je $z = 0$ tada je sigurno tačno da je $0^n \leq x$, jer nam je x strogo pozitivan broj). A da li je skup A ograničen odozgo? Zavisno od toga da li je $x \geq 1$ ili $x \leq 1$, imamo:

i) $x \leq 1 \Rightarrow (\forall z \in A) z \leq 1$

ii) $x \geq 1 \Rightarrow (\forall z \in A) z \leq x$

pa je svakako skup A ograničen odozgo. Dakle, na osnovu teoreme o supremumu, postoji $y = \sup A$. Dokažimo da je $y^n = x$.
Pretpostavimo da je $y^n < x$.
Ideja dokaza jeste da y „malo" povećamo. Neka je $0 < h \leq 1$ i posmatrajmo brojeve $(y + h)^n$ i pokažimo da možemo izabrati h tako da je $(y + h)^n < x$.

$$\begin{aligned}(y+h)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^{n-k} h^k = y^n + h \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} y^{n-k} h^{k-1} \\ &\leq y^n + h \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} y^{n-k} = y^n + h[(1+y)^n - y^n]\end{aligned}$$

Izaberimo h tako da je

$$h < \frac{x - y^n}{(y+1)^n - y^n}.$$

Tada je prema prethodnom, $(y+h)^n \leq y^n + x - y^n = x$. Dakle, postoji elemenat $y + h \in A$, $y + h > y$ što je u suprotnom sa $y = \sup A$, što daje zaključak da je nemoguće da bude $y^n < x$. Slično se pokazuje da je $y^n > x$ nemoguće.
Zato je $y^n = x$.
Dokažimo još jedinstvenost za y.
Pretpostavimo da postoje dva broja, y_1, y_2 sa osobinom da je ${y_1}^n = x, {y_2}^n = x$ i neka je $y_1 < y_2$. Prema osobini monotonosti stepene funkcije imamo:
$x = {y_1}^n < {y_2}^n = x$, što je nemoguće, pa je ovime dokazana i jedinstvenost za y. □

Definicija 2.3.1. *Broj y iz prethodne teoreme se zove n -ti koren iz x i označava $y = \sqrt[n]{x}$*

Definicija 2.3.2. *$\sqrt[n]{x}$ je:*

1) 0 *ako je* $x = 0$,

2) jedinstveni pozitivan broj y za koji je $y^n = x$ ako je n paran i $x > 0$,

3) za neparno n jedinstveni realan broj za koji je $y^n = x, x \in \mathbb{R}$.

Svojstva korena:

1)

$$(\sqrt[n]{x})^n = x \quad za \quad \begin{cases} n & \text{parno}, \quad x \geq 0 \\ n & \text{neparno}, \quad x \in \mathbb{R} \end{cases},$$

2)

$$\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} x, & n \quad \text{neparno} \\ |x|, & n \quad \text{parno} \end{cases},$$

3)

$$\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}, \quad x, y \geq 0,$$

4)

$$\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}, \quad x, y \geq 0, y \neq 0,$$

5)
$$(\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}, x \geq 0,$$

6)
$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n\cdot m]{x}.$$

Definicija 2.3.3. *Za $x > 0$ i za proizvoljan $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ je po definiciji*
$$x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}.$$

Teorema 3. *Za svako $x > 0, y > 0$ i $r, s \in \mathbb{Q}$ važe sledeći zakoni stepenovanja:*

S.1
$$x^r \cdot x^s = x^{r+s},$$

S.2
$$\frac{x^r}{x^s} = x^{r-s},$$

S.3
$$(x^r)^s = x^{r\cdot s},$$

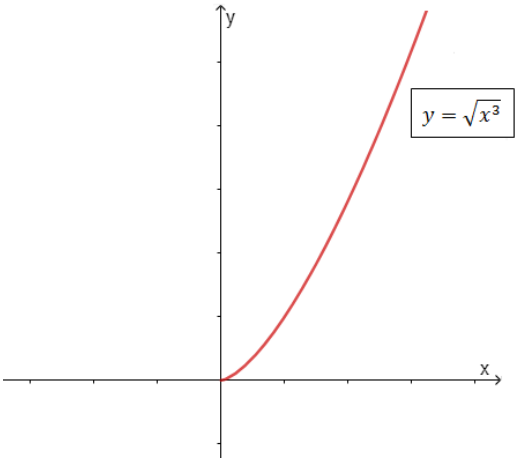
S.4
$$(x \cdot y)^r = x^r \cdot y^r,$$

S.5
$$\left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r}, \quad y \neq 0.$$

Dokaz ostavljamo čitaocu, uz napomenu da se poziva na osnovne zakone stepenovanja koji važe za stepene sa celim i prirodnim izložiocem. Izučavajući stepenu funkciju veoma je korisno poznavati njen grafik.
Posmatrajmo sada funkciju
$$y = f(x) = x^r,$$
gde je $r = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, (m, n) = 1$.
Razmotrimo tri slučaja grafika funkcije u zavisnosti od parnosti brojeva m i n:

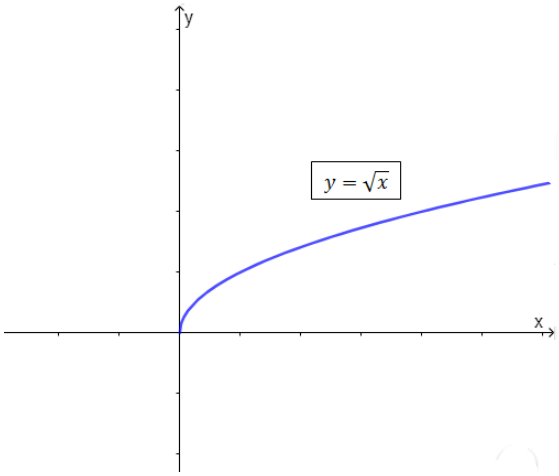
1) Neka je n paran, a m neparan broj i $x > 0$.
Funkcija $y = \sqrt[n]{x^m}$ je definisana na skupu $[0, +\infty)$ ako je $m > 0$ i na skupu $(0, +\infty)$ ako je $m < 0$.

1.1)



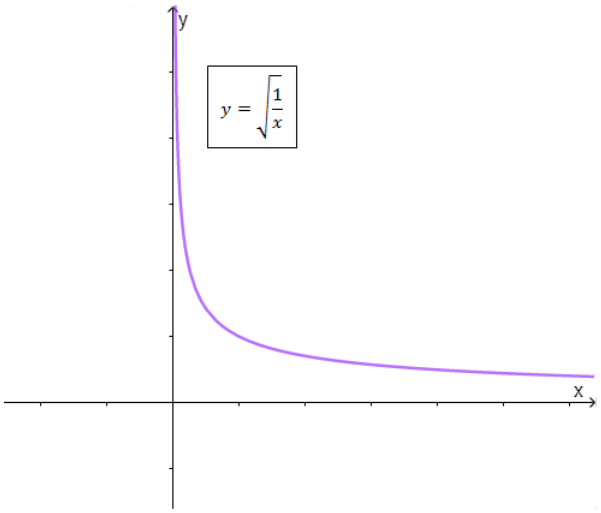
Slika 3: $\frac{m}{n} > 1$

1.2)



Slika 4: $0 < \frac{m}{n} < 1$

1.3)

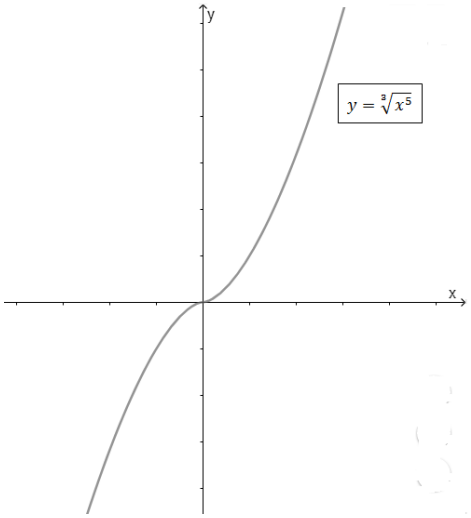


Slika 5: $\frac{m}{n} < 0$

Sa grafika datih funkcija možemo izdvojiti sledeće osobine:
Funkcija iz primera 1.1) je rastuća na svom domenu, pozitivna, jednaka je nuli za $x = 0$ i konveksna je.
Funkcija iz primera 1.2) je takodje rastuća, pozitivna, jednaka je nuli za $x = 0$ i konkavna je.
Funkcija iz primera 1.3) je opadajuća na svom domenu, pozitivna, nema nulu i konveksna je.

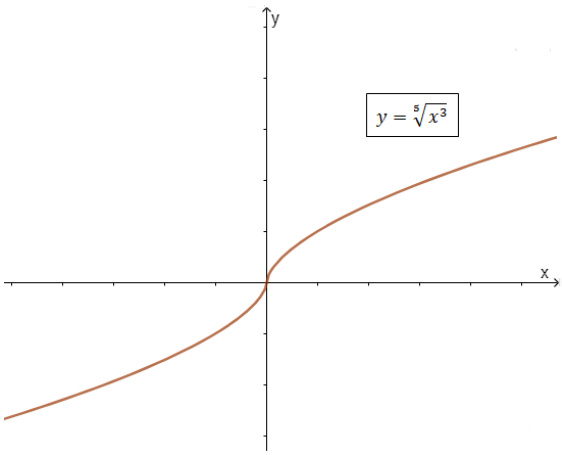
2) Neka su n i m neparni brojevi i $x \in \mathbb{R}$.

2.1)



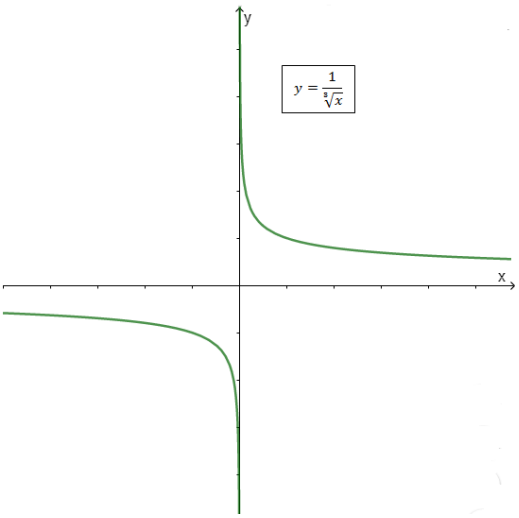
Slika 6: $\frac{m}{n} > 1$

2.2)



Slika 7: $0 < \frac{m}{n} < 1$

2.3)

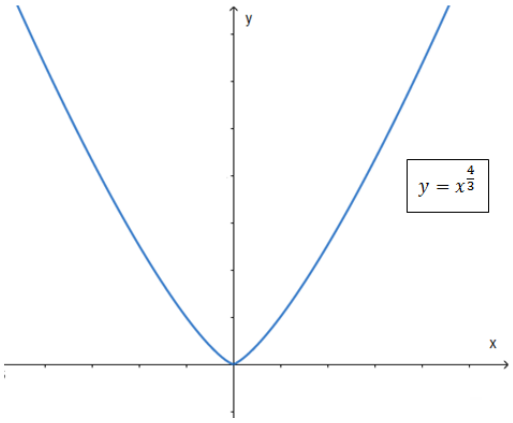


Slika 8: $\frac{m}{n} < 0$

Ako posmatramo slučaj 2) možemo izdvojiti sledeće:
Funkcija iz primera 2.1) je rastuća na svom domenu, neparna, jednaka je nuli za $x = 0$, konveksna je za $x \in (0, +\infty)$, a konkavna za $x \in (-\infty, 0)$.
Funkcija iz primera 2.2) je takođe rastuća, neparna, jednaka je nuli za $x = 0$, konkavna je za $x \in (0, +\infty)$, a konveksna za $x \in (-\infty, 0)$.
Funkcija iz primera 2.3) za $x \neq 0$ je pozitivna za $x \in (0, +\infty)$ i konveksna, negativna je za $x \in (-\infty, 0)$ i konkavna. Takođe, funkcija je opadajuća na intervalu $(-\infty, 0)$ i na intervalu $(0, +\infty)$.

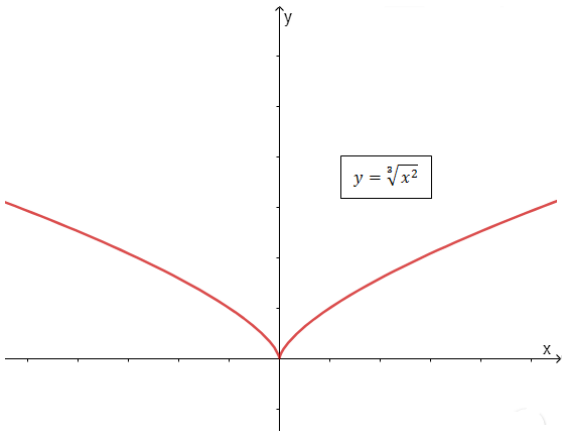
3) Neka je n neparan, a m paran broj i $x \in \mathbb{R}$.

3.1)



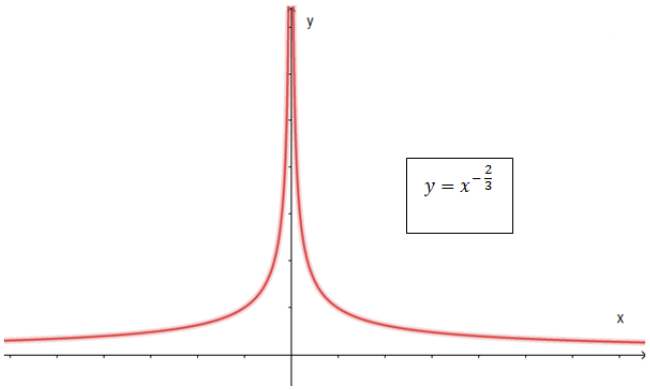
Slika 9: $\frac{m}{n} > 1$

3.2)



Slika 10: $0 < \frac{m}{n} < 1$

3.3)



Slika 11: $\frac{m}{n} < 0, \quad x \neq 0$

Iz primera 3) možemo izdvojiti sledeće osobine:
Funkcija iz primera 3.1) je pozitivna, parna, jednaka je nuli za $x = 0$, opadajuća na intervalu $(-\infty, 0)$ i rastuća na intervalu $(0, +\infty)$, konveksna je.

Funkcija iz primera 3.2) je pozitivna, parna, jednaka je nuli za $x = 0$, opadajuća i konkavna na intervalu $(-\infty, 0)$, a rastuća i takođe konkavna na intervalu $(0, +\infty)$.
Funkcija iz primera 3.3) je pozitivna, parna, rastuća i konveksna na intervalu $(-\infty, 0)$, a opadajuća i opet konveksna na intervalu $(0, +\infty)$.

2.4 Stepena funkcija čiji je izložilac realan broj

Postavlja se pitanje, može li se i za one brojeve $x \in \mathbb{R}$ koji nisu racionalni definisati a^x, ali tako da ostanu na snazi osnovna svojstva stepena. Odgovor je potvrdan, ali dokaz nije jednostavan.
Pretpostavimo da imamo fiksirano $a > 1$. Osnovnim operacijama stepene funkcije sa racionalnim izložiocem $a^r, r \in \mathbb{Q}$, dodajmo još i:

(1) za $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ i $r_1 < r_2 \Rightarrow a^{r_1} < a^{r_2}$

(2) ako je $r_0 \in \mathbb{Q}$, tada je $\lim\limits_{r \to r_0} a^r = a^{r_0}, \quad r \in \mathbb{Q}$.

Pošto svojstvo (2) nije trivijalno, dokazaćemo ga:
Imamo dva specijalna slučaja:
Prvi sličaj: $r_0 = 0$, tj. $\lim\limits_{r \to 0} a^r = 1, r \in \mathbb{Q}$. Na osnovu (1) imamo:

$$a^{\frac{-1}{n}} < a^r < a^{\frac{1}{n}}, \quad |r| \leq \frac{1}{n}.$$

Znamo da važi: $\lim\limits_{n \to \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$, kao i $\lim\limits_{n \to \infty} a^{\frac{-1}{n}} = 1$. To znači da za dato $\epsilon > 0$ može naći $n \in \mathbb{N}$ tako da je $1 - \epsilon < a^{\frac{-1}{n}}$ i $a^{\frac{1}{n}} < 1 + \epsilon$.
Treba izabrati $\delta > 0$ tako da je $\delta < \frac{1}{n}$, pa za:

$$|r| < \delta \Rightarrow |a^r - 1| < \epsilon.$$

Drugi slučaj: $r_0 \neq 0$ i $r_0 \in \mathbb{Q}$. Treba da $a^r - a^{r_0}$ bude proizvoljno malo.

$$|a^r - a^{r_0}| = |a^{r_0}(a^{r-r_0} - 1)| < a^{r_0} \cdot \frac{\epsilon}{a^{r_0}} = \epsilon, \quad \text{za} \quad |r - r_0| < \delta.$$

Hoćemo sada da vidimo šta će biti a^x za proizvoljan realan broj x. Neka je $x \in \mathbb{R}$. Hoćemo funkciju a^r da proširimo na veći skup i ona će ispunjavati

sva svojstva kao a^r.
Formirajmo dva skupa:
$A = \{a^r | r \in \mathbb{Q}, r < x\}$ i $B = \{a^r | r \in \mathbb{Q}, r > x\}$.
S obzirom na monotonost u svojstvu (1) i $a > 1$ sledi: A je ograničen odozgo i B je ograničen odozdo, pa postoje $s = \sup A$ i $i = \inf B$ i važi $s \leq i$.
Dokažimo da je $s = i$.
Pretpostavimo da je $s < i$. Iskoristimo svojstvo supremuma i infimuma:
Izaberimo $r_1 < x$ i $r_2 > x$ tako da je $s - \epsilon < a^{r_1} < s < i < a^{r_2} < i + \epsilon$.
Kako je $r_1 < x < r_2$ imamo:

$$|r_1 - r_2| < \delta \Rightarrow a^{r_2} - a^{r_1} < \epsilon \Rightarrow i - s < \epsilon, \text{za svako} \epsilon > 0.$$

A ovo je u suprotnom da proizvoljan fiksiran broj bude manji od proizvoljnog ϵ.

Definicija 2.4.1. *Funkcija*

$$a^x \stackrel{\text{def}}{=} i = s$$

predstavlja ***stepenu funkciju sa realnim eksponentom, odnosno eksponencijalnu funkciju****.*

Uvođenjem ove definicije stepena čiji je izložilac realan broj, ostaju da važe osnovna svojstva stepena, što potvrđuje sledeća teorema.

Teorema 4. *Neka je $a > 1$, tada važe sledeća svojstva:*

S.1

$$\lim_{r \to x} a^r = a^x, \quad r \in \mathbb{Q}, \quad x \in \mathbb{R},$$

S.2

$$a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R},$$

S.3

$$(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 \cdot x_2}, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R},$$

S.4

$$x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R},$$

S.5

$$\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad x_0 \in \mathbb{R},$$

S.6

$$(\forall y > 0) \quad (!\exists x \in \mathbb{R}) \quad a^x = y.$$

Ako je $0 < a < 1$, opisani postupak se može ponoviti i dolazimo opet do funkcije a^x, koja ima iste osobine kao i za slučaj $a > 1$, s tim što se osobina $S.4$ iz prethodne teomere zamenjuje sa

$$x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

3 Eksponencijalna funkcija

3.1 Definicija eksponencijalne funkcije pomoću osobina realnih brojeva

Iz prethodnog poglavlja znamo šta znači izraz a^x za $a > 1$ i $x \in \mathbb{R}$. To znači da se svakom realnom broju x pridružuje realan broj a^x, čime je definisana jedna funkcija $f(x)$, tzv. *eksponencijalna funkcija.*

Definicija 3.1.1. *Neka je $a \neq 1$ pozitivna konstanta, $x \in \mathbb{R}$, funkcija*

$$y = f(x) = a^x$$

naziva se ***eksponencijalna funkcija sa osnovom a.***

Za $a = 1$ važi $a^x = 1^x = 1$, za svako $x \in \mathbb{R}$, a to je konstantna funkcija. Osobine i grafik eksponencijalne funkcije zavise od vrednosti konstante a.

Teorema 5.

a) Ako je $a > 1$, tada za funkciju $y = a^x$ važi:

1. *Pozitivna za svako $x \in \mathbb{R}$.*
2. *Rastuća na $\mathbb{R}$, a grafik sadrži tačku $(0, 1)$.*
   Kada je $x > 0$, tada je $a^x > 1$, a kada je $x < 0$, tada je $0 < a^x < 1$.

b) *Ako je $0 < a < 1$, tada za funkciju $y = a^x$ važi:*

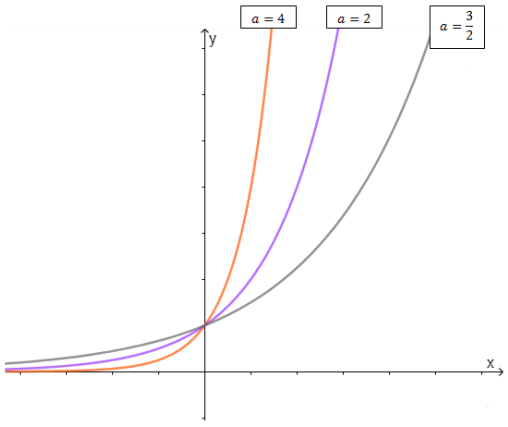
1. *Pozitivna za svako $x \in \mathbb{R}$.*

2. *Opadajuća na $\mathbb{R}$, a grafik sadrži tačku $(0, 1)$.*
   Kada je $x > 0$, tada je $0 < a^x < 1$, a kada je $x < 0$, tada je $a^x > 1$.

Sve ove osobine najbolje vidimo na primerima kroz grafik eksponencijalne funkcije za različite vrednosti parametra a.

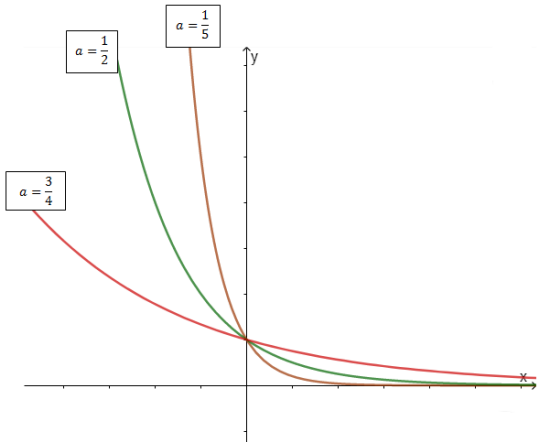
Na slikama ispod su dati grafici eksponencijalnih funkcija kada je osnova $a > 1$ i kada je osnova $0 < a < 1$.

2.1)



Slika 12: $a > 1$

2.2)



Slika 13: $0 < a < 1$

Sa slika možemo izvesti par osobina vezanih za odnos samih grafika funkcija u zavisnosti od parametra a.
Pa tako, za osnove

$$a_1, a_2, a_3 \ldots > 1,$$

vrednosti funkcija

$$y_1 = {a_1}^x, y_2 = {a_2}^x, y_3 = {a_3}^x \ldots,$$

za $x > 0$ su u istom poretku kao i parametri $a_1, a_2, a_3 \ldots$, a za $x < 0$ oni su u obrnutom poretku.
A kada su parametri

$$0 < a_1, a_2, a_3 \ldots < 1,$$

vrednosti funkcija

$$y_1 = {a_1}^x, \quad y_2 = {a_2}^x, \quad y_3 = {a_3}^x \ldots,$$

za $x > 0$ su u obrnutom poretku, a za $x < 0$ oni su u istom poretku.

Osnovna svojstva eksponencijalne funkcije:

E.1 Za svako $a > 0$ i svako $x \in \mathbb{R}$ je $a^x > 0$.

E.2 Za svako $a > 0$ i svako $x \in \mathbb{R}$ i $y \in \mathbb{R}$ je $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.

E.3 Za svako $a > 0$ i svako $x \in \mathbb{R}$ i $y \in \mathbb{R}$ je $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$.

E.4 Za svako $a > 0$, $b > 0$ i svako $x \in \mathbb{R}$ je $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$.

E.5 I Za svako $a > 1$ i svako x_1 i x_2 iz skupa $\mathbb{R}$, takve da je $x_1 < x_2$, važi $a^{x_1} < a^{x_2}$, tj. funkcija a^x je strogo rastuća na skupu $\mathbb{R}$.

II Za svako $0 < a < 1$ i svako x_1 i x_2 iz skupa $\mathbb{R}$, takve da je $x_1 < x_2$, važi $a^{x_1} > a^{x_2}$, tj. funkcija a^x je strogo opadajuća na skupu $\mathbb{R}$.

3.2 Eksponencijalna funkcija i funkcionalne jednačine

Teorema 6. *Postoji tačno jedna funkcija $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ tako da važi sledeće:*

1. *f je neprekidna.*
2. *$f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$.*
3. *$f(1) = a, \quad a > 0, \quad a \neq 1$.*

Dokaz je zasnovan na ideji da postoji neprekidna funkcija na skupu realnih brojeva koja zadovoljava $f(x + y) = f(x) + f(y)$, a jedina takva je funkcija $f(x) = c \cdot x, c = const$, pa ćemo prvo dokazati lemu koja govori o ovome.

Lema 1. *Postoji tačno jedna, do na konstantu, neprekidna funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da je $f(x + y) = f(x) + f(y)$ za svako $x, y \in \mathbb{R}$.*

Dokaz. $f(x) = c \cdot x$ zadovoljava navedenu lemu. Pretpostavimo da f zadovoljava ovu jednačinu i pokažimo da je ovog oblika.
Indukcijom će važiti

$$f(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \ldots + f(x_n)$$

za $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Specijalno, uzmimo da je $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$, pa onda imamo:

$$f(n \cdot x) = n \cdot f(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Zamenimo,

$$x$$

sa

$$\frac{1}{n} \cdot x$$

odakle dobijemo:

$$f(x) = n \cdot f\left(\frac{1}{n} \cdot x\right)$$

tj.

$$f\left(\frac{1}{n} \cdot x\right) = \frac{1}{n} \cdot f(x).$$

Odnosno, imamo:

$$f\left(\frac{m}{n} \cdot x\right) = \frac{m}{n} \cdot f(x).$$

Označimo $f(1) = c$ tada je

$$f(r \cdot x) = r \cdot f(x), \quad r \in \mathbb{Q}_+.$$

Ako je $r \in \mathbb{Q}$ važi i sledeće:
$f(0) = 0$ što sledi iz činjenice da je $f(0 + 0) = 2 \cdot f(0) = 0$, kao i
$f(-x) = -f(x)$, za svako $x \in \mathbb{R}$.
Otuda imamo

$$f(r) = r \cdot c, \quad r \in \mathbb{Q}.$$

Uzmimo proizvoljan iracionalan broj

$$x \in \mathbb{I}$$

tada je

$$x = \lim_{n \to \infty} r_n, \quad r_n \in \mathbb{Q}.$$

Uz neprekidnost, dobijemo:

$$f(x) = f(\lim_{n \to \infty} r_n) = \lim_{n \to \infty} f(r_n) = \lim_{n \to \infty} c \cdot r_n = c \cdot x.$$

□

Uz pomoć leme, dokažimo teoremu sada:

Dokaz. Označimo

$$g(x) = \ln f(x),$$

pa važi:

$$g(x+y) = \ln f(x+y) = \ln\left(f(x) \cdot f(y)\right) = \ln f(x) + \ln f(y) = g(x) + g(y).$$

Pošto $g(x)$ zadovoljava uslove leme i $g(x)$ je neprekidna, po lemi sledi:

$$g(x) = c \cdot x,$$

tj. $g(x)$ je linearna. Dakle,

$$f(x) = e^{c \cdot x} = a^x,$$

gde je $e^c = a$. □

3.3 Definicija eksponencijalne funkcije pomoću stepenih redova

Definicija 3.3.1. *Eksponencijalna funkcija* $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *definiše se kao*

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Teorema 7. *Za eksponencijalnu funkciju važe sledeća osnovna svojstva:*

E.1 $\exp(z_1) \cdot \exp(z_2) = \exp(z_1 + z_2)$.

E.2 Za svako $z \in \mathbb{C}$, $\exp(z) \neq 0$ *i* $\exp(-z) = \dfrac{1}{\exp(z)}$.

E.3 Funkcija exp *je beskonačno puta diferencijabilna i* $(\exp)^{(n)} = \exp$, *za svako* $n \in \mathbb{N}$.

E.4 Restrikcija exp *na realnu osu je rastuća funkcija i*

$$\lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0.$$

E.5 $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$.

Dokaz. (E.1)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{{z_1}^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{{z_2}^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n = (*),$$

gde je

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{{z_1}^k}{k!} \cdot \frac{{z_2}^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \cdot \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} {z_1}^k \cdot {z_2}^{n-k} = \frac{1}{n!} \cdot (z_1 + z_2)^n$$

otuda je,

$$(*) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!} = \exp(z_1 + z_2).$$

(E.2)

$$\exp(z) \cdot \exp(-z) \overset{\text{E.1}}{=} \exp(0) = 1.$$

(E.3)

$$\exp'(z) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z^n}{n!}\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z).$$

Ovaj zapis važi jer koristimo činjenicu da redovi i izvodni redovi ravnomerno konvergiraju u datom radijusu.

(E.5)Pošto je $\exp'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, za $x \in \mathbb{R}$, tada je i za $x > 0 \quad \exp'(x) > 0$.

Neka je (**) $\exp(x) \cdot \exp(-x) = 1$, otuda imamo i $\exp(-x) > 0$ za $x > 0$, pa je $\exp(x)$ strogo rastuća za $x \in \mathbb{R}$ i

$$\lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$$

pa iz (**) sledi

$$\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0.$$

(E.6)

$$z_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}, \quad \overline{z_n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\overline{z^k}}{k!},$$

odakle sledi da je

$$\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z}).$$

□

Uvedimo sada nove oznake za eksponencijalnu funkciju.

Definicija 3.3.2.

$$\exp(1) = e \left(= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\right)$$

$$\exp(z) = e^z.$$

4 Logaritamska funkcija

4.1 Logaritamska funkcija kao funkcija realne promenljive

Imajući u vidu da se funkcijom $y = a^x, a > 0, a \neq 1$ vrši bijektivno preslikavanje skupa $\mathbb{R}$ na skup $(0, +\infty)$, zaključujemo da postoji inverzna funkcija ove funkcije.

Definicija 4.1.1. *Inverzna funkcija*

$$f^{-1} : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$$

funkcije

$$f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$$

date sa

$$f(x) = a^x, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

zove se ***logaritamska funkcija sa osnovom a.***
Pišemo

$$x = \log_a y \Leftrightarrow a^x = y$$

tj.

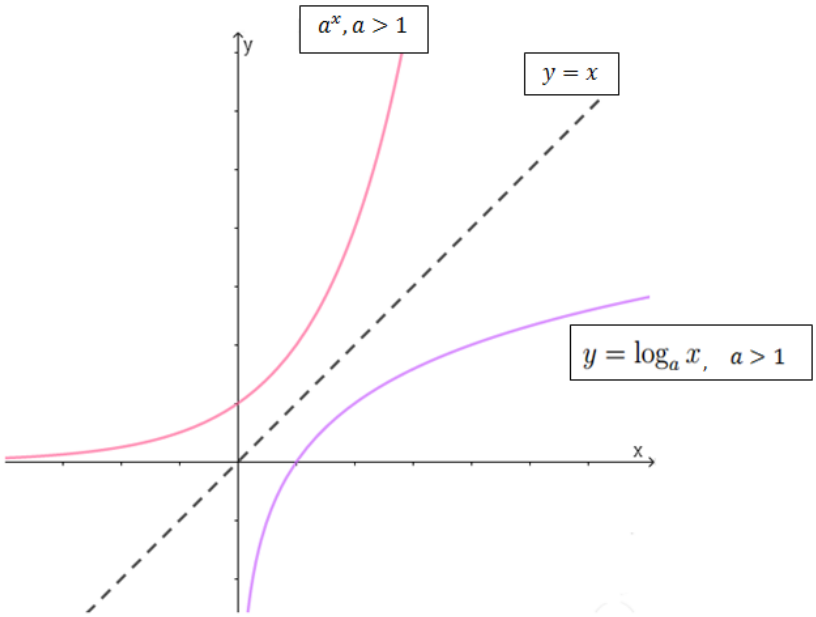
$$\log_a a^x = x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad a^{\log_a y} = y, \quad y > 0.$$

Grafik funkcije $y = \log_a x$ skiciraćemo koristeći grafik i osobine funkcije $y = a^x$.
Razmatraćemo dva slučaja u zavisnosti od vrednosti parametra a.

I slučaj: $a > 1$

Funkcija $y = a^x$ je rastuća na oblasti definisanosti $\mathbb{R}$, a kodomen joj je $(0, +\infty)$, pa je funkcija $y = \log_a x$ rastuća na oblasti definisanosti $(0, +\infty)$, a kodomen joj je $\mathbb{R}$.

2.1)

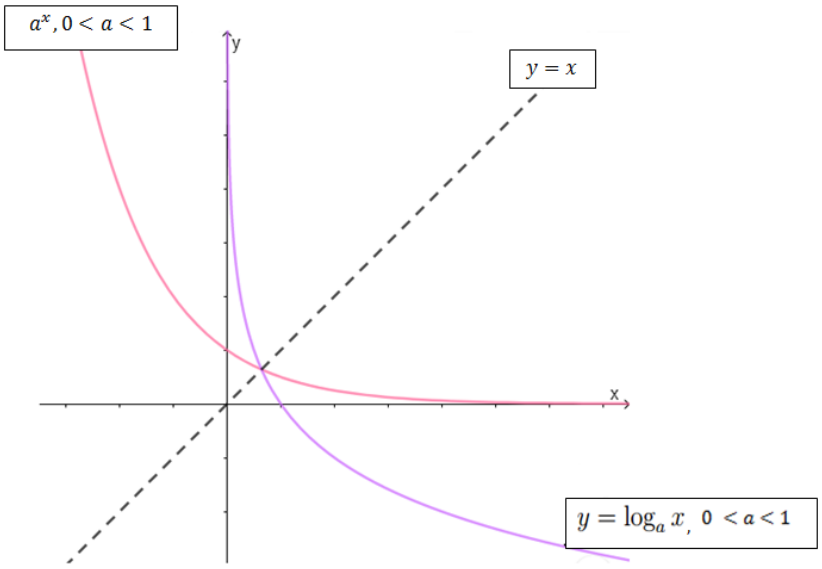


Slika 14: $a > 1$

II slučaj: $0 < a < 1$

Funkcija $y = a^x$ je opadajuća na oblasti definisanosti $\mathbb{R}$, a kodomen joj je $(0, +\infty)$, pa je funkcija $y = \log_a x$ opadajuća na oblasti definisanosti $(0, +\infty)$, a kodomen joj je $\mathbb{R}$.

2.2)



Slika 15: $0 < a < 1$

Osnovna svojstva logaritamske funkcije $y = \log_a x$ su:

- Funkcija f je definisana za svako $x \in \mathbb{R}_+$.
- Nula funkcije je $x = 1$, tj. $\log_a 1 = 0, \quad (a > 0, \quad a \neq 1)$.
- $\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2, \quad (x_1, x_2 > 0)$.
- Za $0 < a < 1$ funkcija je pozitivna za $x \in (0, 1)$ i negativna za $x \in (1, +\infty)$, a za $a > 1$ funkcija je pozitivna za $x \in (1, +\infty)$ i negativna za $x \in (0, 1)$.
- Za $0 < a < 1$,funkcija $y = \log_a x$ je strogo opadajuća, a za $a > 1$, funkcija $y = \log_a x$ je strogo rastuća.
- $\log_a$ je neprekidna funkcija (kao inverzna neprekidne).

4.2 Logaritamska funkcija kao funkcija kompleksne promenljive

Pre nego što uvedemo logaritamsku funkciju definisanu na skupu $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, navedimo pomoćne leme i teoreme koje će nam biti potrebne za to.

Definicija 4.2.1. *Za $z \in \mathbb{C}^*$ definišemo*

$$\operatorname{Arg} z = \{\phi \in \mathbb{R} \quad : \quad z = |z| \operatorname{cis} \phi\} = \{\phi \in \mathbb{R} \quad : \quad z = |z| e^{i\phi}\}.$$

Lema 2. *Svako $z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ može se predstaviti u obliku*

$$z = e^{\ln|z| + i\phi}, \quad \phi \in \operatorname{Arg} z.^1$$

Dokaz. Krenimo od polarne forme kompleksnog broja z

$$z = |z| \cdot e^{i\phi}, \quad \phi \in \operatorname{Arg} z.$$

Sa druge strane znamo da je $|z| = e^{\ln|z|}$, pa stoga imamo:

$$z = e^{\ln|z|} \cdot e^{i\phi},$$

ŏdnosno

$$z = e^{\ln|z| + i\phi}, \quad \phi \in \operatorname{Arg} z.$$

□

Lema 3. *Neka su $w, z \in \mathbb{C}^*$. Tada:*

a) $w = z$ akko $|w| = |z|$ i $\operatorname{Arg} w = \operatorname{Arg} z$.

Ako je $w = \rho e^{i\theta}$ tada je

b) $w = z$ akko $\rho = |z|$ i $\theta \in \operatorname{Arg} z$.

Teorema 8. *Neka je $z \in \mathbb{C}^*$. Tada je*

$$e^w = z$$

akko

$$w = \ln|z| + i\phi, \quad \phi \in \operatorname{Arg} z.$$

[1] ln je oznaka tzv. prirodnog logaritma koji za osnovu ima iracionalan broj $e = 2,718\ldots$

Dokaz. Neka je $w = u + iv$. Koristeći osobine eksponencijalne funkcije, imamo:

$$e^w = e^u \cdot e^{iv} = z.$$

Ako iskoristimo Lemu 3 dobijamo:

$$e^u = |z| \quad i \quad v \in \operatorname{Arg} z.$$

Odnosno, iz realne analize važi:

$$e^u = |z| \Leftrightarrow u = \ln |z|.$$

Jednačina $e^w = z$ ima beskonačno mnogo rešenja i taj skup označimo sa $\operatorname{Ln} z$. Dakle,

$$\operatorname{Ln} z = \{w \quad | \quad e^w = z\} = \{\ln |z| + i\phi \quad | \quad \phi \in \operatorname{Arg} z\}.$$

□

Iz ove teoreme dobijamo definiciju logaritma kompleksnog broja $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, koja glasi:

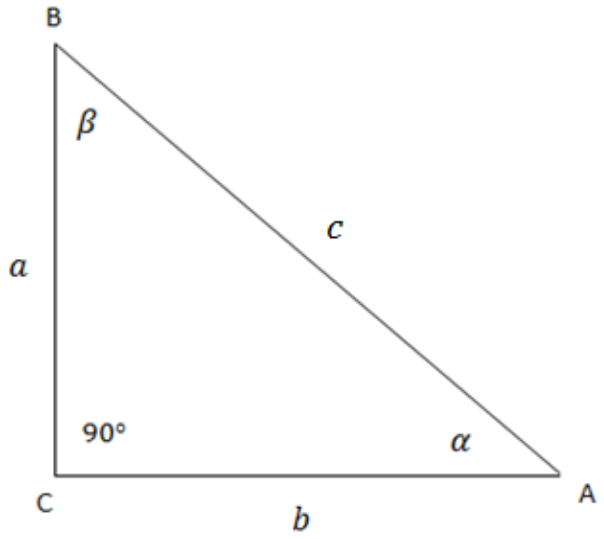
Definicija 4.2.2. *Logaritam kompleksnog broja $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, u oznaci $\operatorname{Ln} z$ definiše se kao:*

$$\operatorname{Ln} z = \{w \quad | \quad e^w = z\} = \{\ln |z| + i\phi \quad | \quad \phi \in \operatorname{Arg} z\}.$$

5 Trigonometrijske funkcije

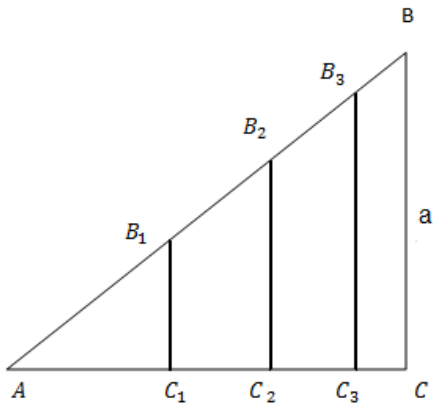
5.1 Definicija trigonometrijskih funkcija oštrog ugla

Neka je trougao ABC pravougli, gde je C teme pravog ugla.
Stranice trougla koje su naspram oštrih uglova, CA i CB, nazivaju se katete, a stranica AB naspram pravog ugla, hipotenuza.
Označimo sa a dužinu katete CB, sa b dužinu katete CA i sa c dužinu hipotenuze AB i neka je α mera ugla CAB u stepenima i β mera ugla CBA u stepenima, dok je mera ugla ACB jednaka $90°$.



Slika 16: Trougao ABC

Znamo da su svi pravougli trouglovi sa jednakim jednim oštrim uglom međusobno slični i obratno. Takođe, kod sličnih trouglova odgovarajuće stranice su proporcionalne.



Slika 17: Trougao ABC

Iz ove činjenice sledi da količnik naspramne katete ugla α i hipotenuze ne zavisi od promena stranica a i c. Dakle,

$$\frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2} = \ldots = \frac{a}{c}.$$

Slično je sa količnikom nalegle katete i hipotenuze i količnikom kateta. Oni su nepromenljivi ako je ugao α stalan.

Međutim, promenom ugla α, menjaju se i ovi količnici. Dakle, u pravouglom trouglu količnici: $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{a}{b}$ i $\frac{b}{a}$ su zavisni od ugla α. Oni su određene funkcije ugla α pa se mogu precizno i definisati kao tzv. ***trigonometrijske funkcije oštrog ugla*** preko količnika dužina stranica pravouglog trougla.

Definicija 5.1.1.

1. *Broj* $\frac{a}{c}$ *naziva se sinus ugla* α *i obeležava se sa* $\sin\alpha$.
2. *Broj* $\frac{b}{c}$ *naziva se kosinus ugla* α *i obeležava se sa* $\cos\alpha$.
3. *Broj* $\frac{a}{b}$ *naziva se tangens ugla* α *i obeležava se sa* $\mathrm{tg}\,\alpha$.
4. *Broj* $\frac{b}{a}$ *naziva se kotangens ugla* α *i obeležava se sa* $\mathrm{ctg}\,\alpha$.

Dakle,

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a},$$

tj.

- $\sin\alpha$ je količnik naspramne katete ugla α i hipotenuze;
- $\cos\alpha$ je količnik nalegle katete ugla α i hipotenuze;
- $\operatorname{tg}\alpha$ je količnik naspramne i nalegle katete ugla α;
- $\operatorname{ctg}\alpha$ je količnik nalegle katete i naspramne katete ugla α.

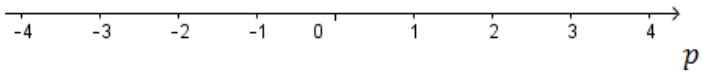
Vidimo da ovi količnici zavise od ugla α, pa ako se menja α onda se i $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ i $\operatorname{ctg}\alpha$ menjaju. Prema tome, definisane su četiri funkcije:

$$\alpha \mapsto \sin\alpha, \quad \alpha \mapsto \cos\alpha, \quad \alpha \mapsto \operatorname{tg}\alpha, \quad \alpha \mapsto \operatorname{ctg}\alpha.$$

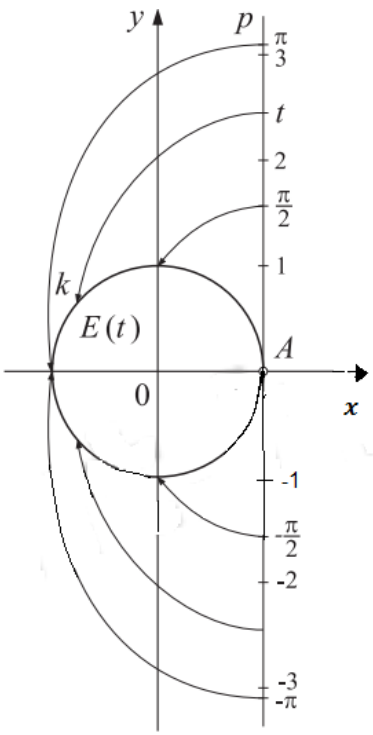
Ove funkcije se nazivaju *trigonometrijske funkcije* oštrog ugla.

5.2 Definicija trigonometrijskih funkcija pomoću trigonometrijskog kruga

Posmatrajmo brojevnu osu p i uočimo kružnicu k čiji je centar koordinatni početak, a poluprečnik 1.



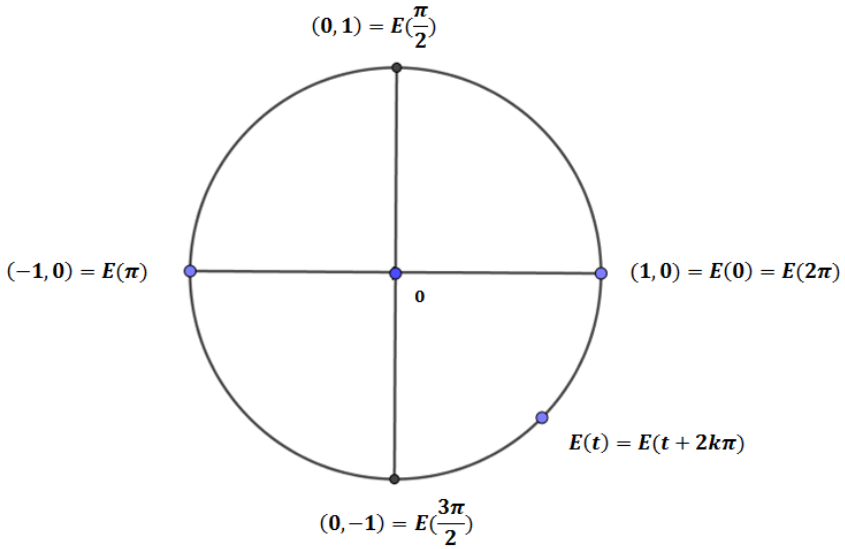
Slika 18: Brojevna osa p



Slika 19: Trigonometrijska kružnica

Na kružnicu k ,,prislonimo" brojevnu osu p koja je paralelna y-osi i to tako da broju 0 odgovara tačka $A(1,0)$ kružnice k.
Zamislimo da se osa p namotava na kružnicu i to; pozitivni deo prave namotava se u smeru suprotnom od kretanja kazaljki na satu, a negativni deo prave namotava se u smeru kretanja kazaljki na satu, gde je tačka A fiksna.
Interval $[0, 2\pi)$ ose p se preslikava na čitavu kružnicu k jer je njena dužina 2π po definiciji samog broja π [b] Isto će biti i sa svakim intervalom dužine 2π. Na taj način se svaki realni broj t brojevne ose p preslikava u jednu tačku, označimo je sa $E(t)$ na kružnici k.
Jedinična kružnica na koju su smešteni realni brojevi naziva se ***trigonometrijska kružinica***.
Na primer brojevima 0 i 2π pridružuje se tačka $(1,0)$, broju $\frac{\pi}{2}$ se pridružuje tačka $(0,1)$, broju π pridružuje se tačka $(-1,0)$ i broju $\frac{3\pi}{2}$ tačka $(0,-1)$.

[b] Broj π definišemo tako da je dužina jedinične kružnice 2π.

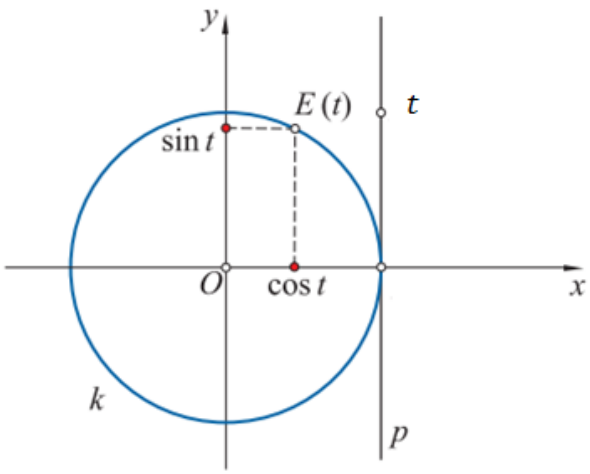


Slika 20: Trigonometrijska kružnica

Možemo zaključiti da se svake dve tačke koje su na brojevnoj osi p udaljene za 2π ili za umnožak broja 2π namotavanjem stope u jednu tačku kružnice, tj. važi :

$E(t + 2k\pi) = E(t)$, za svaki $t \in \mathbb{R}$ i $k \in \mathbb{Z}$.

Definišimo trigonometrijske funkcije:
Neka je t proizvoljan realan broj, a $E(t)$ njemu pridružena tačka jediničine kružnice.



Slika 21: Trigonometrijske funkcije $\sin t$ i $\cos t$

Tada je

$$E(t) = (\cos t, \sin t).$$

Tj. apscisa tačke $E(t)$ naziva se *kosinus broja* t i označava se sa $\cos t$,
a ordinata tačke $E(t)$ naziva se *sinus broja* t i označava sa $\sin t$.
Funkcije kosinus i sinus definisane su na skupu $\mathbb{R}$, a kodomen im je $[-1, 1]$ jer su koordinate tačke $E(t)$ brojevi ne veći od 1 po apsolutnoj vrednosti.

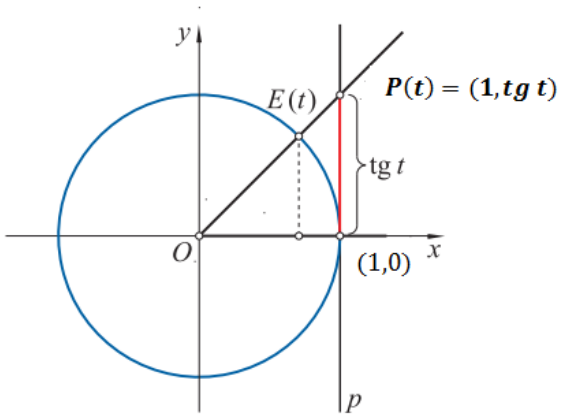
$$\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$$

i

$$\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1].$$

Definišimo i ostale trignometrijske funkcije na sličan način.

Neka je t proizvoljan realan broj, takav da je $\cos t \neq 0$, tj. $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, a $E(t)$ njemu pridružena tačka kružnice. Neka je prava p tangenta kružnice, koja je paralelna osi y i dodiruje kružnicu u tački $(1, 0)$. Presek poluprave $OE(t)$ sa tangentom p označimo sa tačkom P.



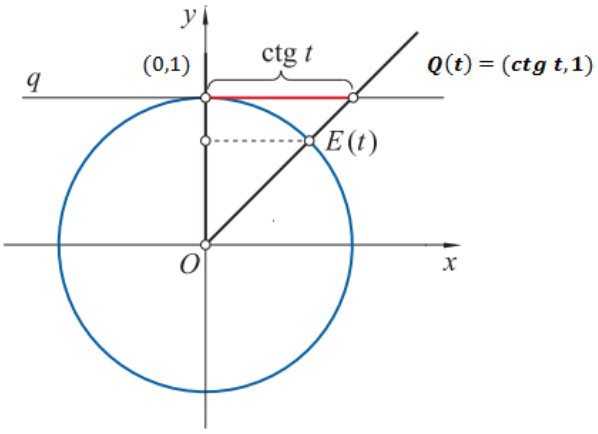
Slika 22: Trigonometrijska funkcija $\operatorname{tg} t$

Tada je

$$P(t) = (1, \operatorname{tg} t),$$

tj. ordinata tačke P naziva se *tangens broja* t i označava se sa $\operatorname{tg} t$.

Neka je t proizvoljan realan broj, takav da je $\sin t \neq 0$, tj. $t \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, a $E(t)$ njemu pridružena tačka kružnice. Neka je prava q tangenta kružnice, koja je paralelna osi x i dodiruje kružnicu u tački $(0, 1)$. Presek poluprave $OE(t)$ sa tangentom q označimo sa tačkom Q.



Slika 23: Trigonometrijska funkcija $\operatorname{ctg} t$

Tada je

$$Q(t) = (\operatorname{ctg} t, 1),$$

tj. apscisa tačke Q naziva se *kotangens broja* t i označava se sa $\operatorname{ctg} t$.

Jednostavno se dokazuje da važe osnovni trigonometrijski identiteti:

1) $\sin t^2 + \cos t^2 = 1$

2) $\operatorname{tg} t = \dfrac{\sin t}{\cos t}$

3) $\operatorname{ctg} t = \dfrac{\cos t}{\sin t}$

4) $\operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t = 1$

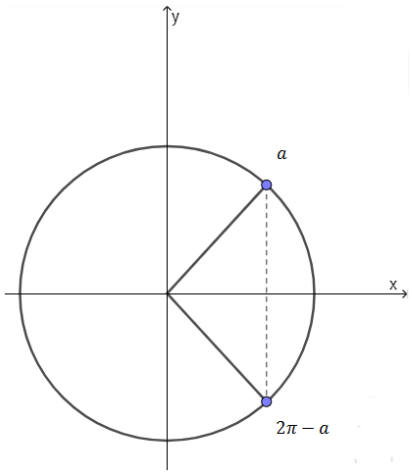
5) $\operatorname{tg} t = \dfrac{1}{\operatorname{ctg} t}$

6) $\operatorname{ctg} t = \dfrac{1}{\operatorname{tg} t}$

Navedimo neka bitna svojstva trigonometrijskih funkcija:

- 2π ***periodičnost***
  $\sin t$ i $\cos t$ su periodične funkcije sa osnovim periodom 2π. Dakle važi: $\sin(t+2\pi) = \sin t$ i $\cos(t+2\pi) = \cos t$. Pokažimo da je stvarno osnovni period 2π.
  Pretpostavimo suprotno, neka postoji neki period, označimo ga sa T , $T \in (0, 2\pi)$ tako da je $\sin(t+T) = \sin t$ i $\cos(t+T) = \cos t$, za svako $t \in \mathbb{R}$.
  Ako bi ovo bilo tačno, tada bi važilo sledeće:
  ako je $t = 0$ onda je $\sin T = \sin 0 = 0$, odakle imamo i :
  $\sin T^2 + \cos T^2 = 1$, odakle je $\cos T^2 = 1$, tj. $\cos T \in \{-1, 1\}$ odnosno $T \in \{\pi, 0\}$ tj. $T = \pi$.
  Ali ni ovo neće da važi jer ako posmatramo jednačinu $\sin(t+T) = \sin t$ za $t = \frac{\pi}{2}, T = \pi$ imamo da važi $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2}$ tj. $-1 = 1$, što je nemoguće. Dakle, 2π je osnovni period, ne postoji manji od njega.

- ***parnost*** $\cos t$ je parna [3] , a $\sin t$ je neparna [4]funkcija.



Slika 24

Pokažimo da ovo stvarno važi.
Pretpostavimo da imamo neki broj

$$s = 2k\pi + a, \quad a \in [0, 2\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$$

tada je

$$-s = -2k\pi - a = (2\pi - a) - 2(k+1)\pi.$$

Otuda će biti:

$$\cos(-s) = \cos(2\pi - a) = \cos a = \cos s$$

i

$$\sin(-s) = \sin(2\pi - a) = -\sin a = -\sin s.$$

[3]Funkcija $f(x)$ je parna ako važi: $f(-x) = f(x)$, za svako $x \in \mathbb{R}$
[4]Funkcija $f(x)$ je neparna ako važi: $f(-x) = -f(x)$, za svako $x \in \mathbb{R}$

- ***ograničenost***
  Prema definiciji trigonometrijskih funkcija možemo zaključiti da su funkcije sin i cos ograničene, a funkcije tg i ctg su neograničene. Odnosno, kako važi da je:

$$\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1],$$

$$\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1],$$

$$\operatorname{tg} : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R}$$

$$\operatorname{ctg} : \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$$

  imamo

$$\sin t \in [-1, 1],$$

$$\cos t \in [-1, 1]$$

  za svaki realan broj t.

6 Inverzne trigonometrijske funkcije

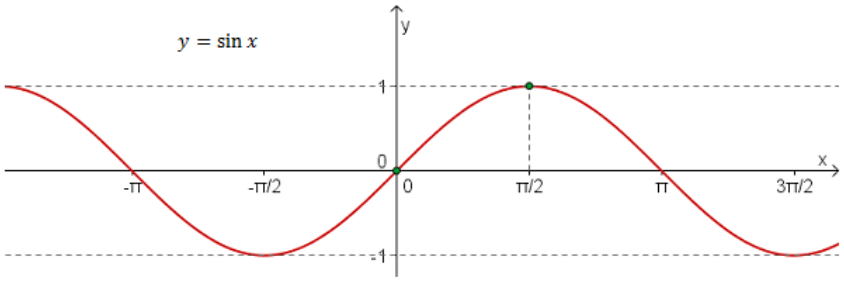
Osnovne trigonometrijske funkcije nisu bijekcije, pa da bismo definisali njihove inverzne funkcije, potrebno je najpre izvršiti restrikcije domena i kodomena. Stoga je potrebno obratiti pažnju.

Ne možemo da kažemo da je arcsin inverzna funkcija funkcije sin jer sin nije ni ,,1-1" ni ,,NA". Funkcija arcsin je inverz restrikcije sin funkcije.
Dakle, funkcija sin posmatrana na svom prirodnom domenu tj. funkcija $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nije ,,1-1" ni ,,NA", pa moramo na pogodan način da izaberemo njen domen i kodomen.
Neka je f funkcija sa domenom $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ i kodomenom $[-1, 1]$ tj.

$$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1],$$

data formulom

$$f(x) = \sin x.$$



Slika 25: Grafik funkcije sin

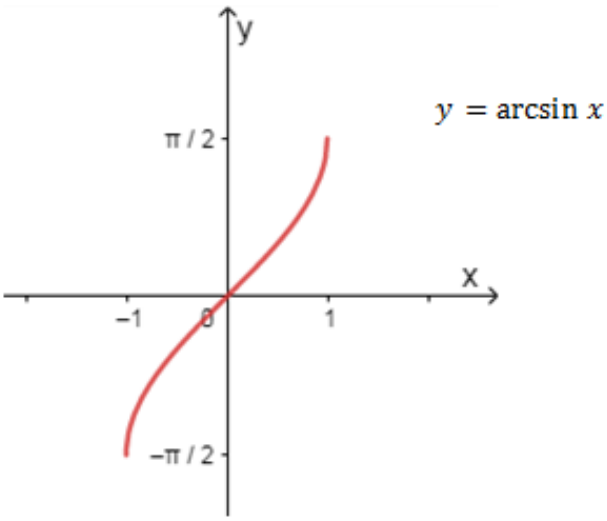
Prema svojstvima osnovnih trigonometrijskih funkcija vidimo da je ova funkcija ,,NA", kao i da je strogo rastuća na intervalu $[-1, 1]$, pa je bijekcija. Dakle, postoji njena inverzna funkcija

$$f^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

koja se naziva arkus sinus i označava se sa :

$$F(x) = \arcsin x.$$

Grafik funkcije $y = \arcsin x$ simetričan je grafiku funkcije $f(x)$ u odnosu na pravu $y = x$.



Slika 26: Grafik funkcije arcsin

Svojstva funkcije $F(x) = \arcsin x, \quad x \in [-1, 1]$ su:

1) funkcija je monotono rastuća.

2) funkcija je neparna, tj.važi: $\arcsin(-x) = -\arcsin x, \quad x \in [-1, 1]$.

3) nula funkcije je $x = 0$.

Postavlja se pitanje, u kakvoj su vezi funkcije f i f^{-1}? Ono što je zanimljivo jeste:

- $f^{-1}(f(x)) = \arcsin(\sin x) = x \quad$ za $\quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
- $f(f^{-1}(x)) = \sin(\arcsin x) = x \quad$ za $\quad x \in [-1, 1]$.

Zadržimo se na osobini $f^{-1}(f(x))$.
Neka je

$$g(x) = f^{-1}(f(x)) = \arcsin(\sin x), \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Znamo da je

$$g(x) = x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Posmatrajmo sledeći interval

$$\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$$

i odaberimo neko x iz njega. Tada je

$$x - \pi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

pa je

$$\arcsin(\sin(x - \pi)) = x - \pi.$$

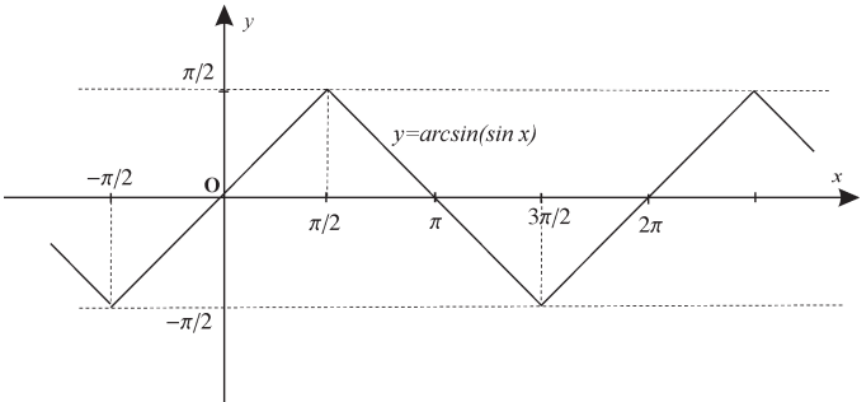
Sa druge strane, $\sin(x - \pi) = -\sin x$ i zato je

$$\arcsin(\sin(x - \pi)) = \arcsin(-\sin x) = -\arcsin(\sin x),$$

zbog neparnosti funkcije $\arcsin x$.
Dakle, $x - \pi = -\arcsin(\sin x)$ za $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.
Konačno imamo da je

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \pi - x, & x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \end{cases}.$$

Grafik funkcije $g(x) = \arcsin(\sin x)$ prikazan je na sledećoj slici.



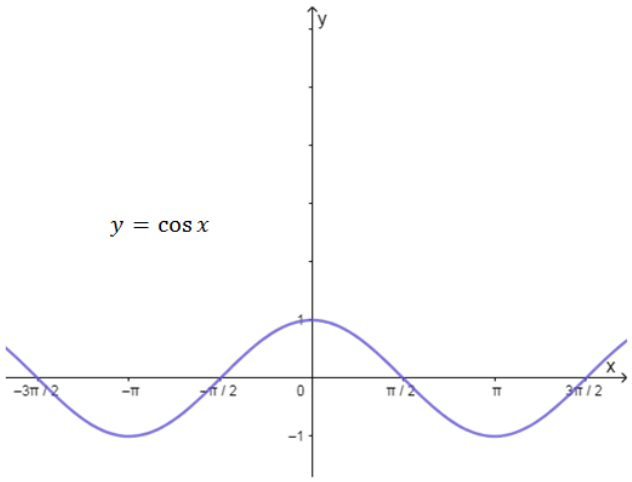
Slika 27: Grafik funkcije $g(x) = \arcsin(\sin x)$

Sličan postupak kao za sinus možemo sprovesti za funkciju $y = \cos x$. Posmatrajmo funkciju f sa domenom $[0, \pi]$ i kodomenom $[-1, 1]$, tj.

$$f : [0, \pi] \to [-1, 1]$$

datu sa

$$f(x) = \cos x.$$



Slika 28: Grafik funkcije cos

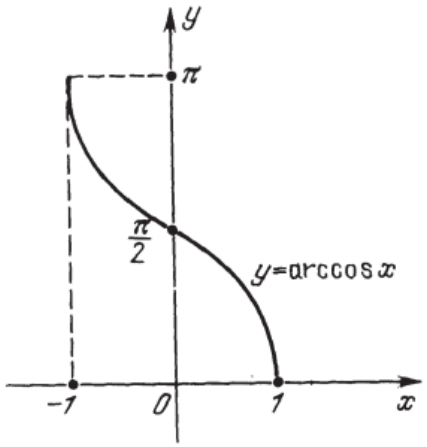
Vidimo da je ova funkcija bijekcija, pa postoji njena inverzna funkcija, tj.

$$f^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

koja se naziva arkus kosinus i označava se sa :

$$F_1(x) = \arccos x.$$

Grafik ove funkcije prikazaćemo na slici:



Slika 29: Grafik funkcije $\arccos x$

Svojstva funkcije $y = \arccos x, \quad x \in [-1, 1]$ su:

1) funkcija je monotono opadajuća.

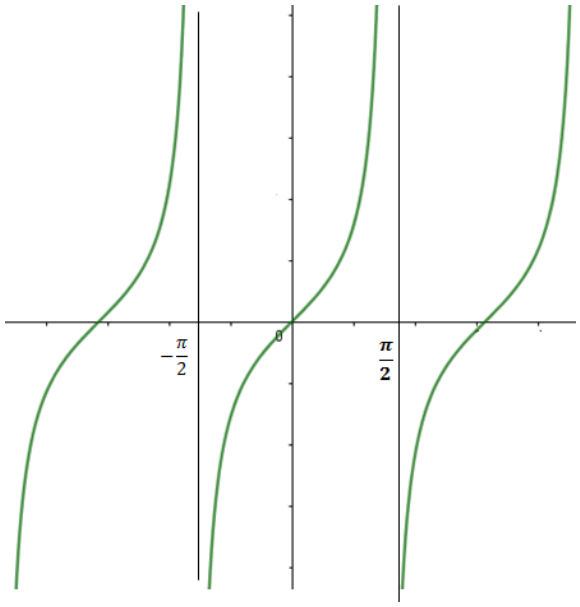
2) funkcija nije ni parna ni neparna tj. $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$, $x \in [-1, 1]$.

3) nula funkcije je $x = 1$.

Veza između ove dve funkcije je:

- $f^{-1}(f(x)) = \arccos(\cos x) = x$ za $x \in [0, \pi]$.
- $f(f^{-1}(x)) = \cos(\arccos x) = x$ za $x \in [-1, 1]$.

Posmatrajmo sada grafik funkcije $f(x) = \operatorname{tg} x$ i vidimo da ovako data funkcija očigledno nema inverznu jer nije bijektivna.



Slika 30: Grafik funkcije $\operatorname{tg} x$

Međutim, ako za datu funkciju pogodno izaberemo domen $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, a kodomen $\mathbb{R}$, zaključujemo da tako dobijamo bijektivnu funkciju

$$f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R},$$

čiju inverznu funkciju označavamo sa arctg . Dakle, za funkciju

$$\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

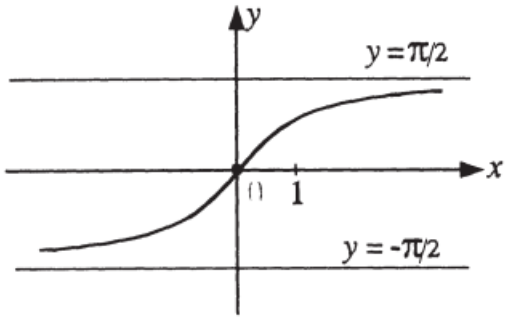
važi

$$y = \operatorname{tg} x \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} y, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Ono što je zajedničko za ove dve funkcije jeste:

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y) = y, \quad y \in \mathbb{R}.$$

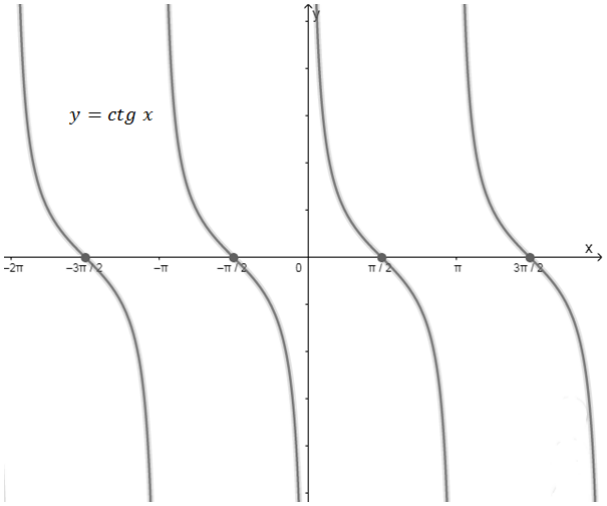


Slika 31: Grafik funkcije $\operatorname{arctg} x$

Osnovne osobine funkcije $y = \operatorname{arctg} x$ se lako izvode čitajući njen grafik.
Funkcija $\operatorname{arctg} x$ je neparna, strogo rastuća i
$|\operatorname{arctg} x| \leq \dfrac{\pi}{2}, \quad x \in \mathbb{R},$
pozitivna je za pozitivne, a negativna za negativne vrednosti argumenta i ima nulu u tački $x = 0$.

Analogno, kao i za funkciju arctg uvodimo inverznu funkciju funkcije

$$f : (0, \pi) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \operatorname{ctg} x.$$



Slika 32: Grafik funkcije $\operatorname{ctg} x$

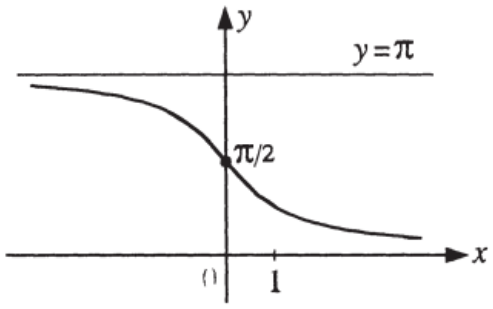
Dakle, funkcija

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to (0, \pi), \quad f^{-1}(y) = \operatorname{arcctg} y$$

je inverzna funkcija funkcije $f(x) = \operatorname{ctg} x$.
Za ove dve funkcije važe jednakosti:

$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x, \quad x \in (0, \pi)$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} y) = y, \quad y \in \mathbb{R}.$$



Slika 33: Grafik funkcije $\operatorname{arcctg} x$

Osobine funkcije $y = \operatorname{arcctg} x$ su :

- Funkcija $\operatorname{arctg} x$ nije ni parna ni neparna, već važi:

  $\operatorname{arcctg}(-x) = -\operatorname{arcctg} x + \pi.$

- Funkcija $\operatorname{arcctg} x$ je strogo opadajuća.
- Funkcija $\operatorname{arcctg} x$ nema nulu.

7 Zaključak

Pojam funkcije i preslikavanja jeste nešto što se u matematici izučava kroz čitav period školovanja. Još u petom razredu osnovne škole prvi put se pominje pojam preslikavanja i funkcije, gde se njegovo dublje izučavanje nastavlja kroz ceo period srednje škole, a samim tim, kroz mnogo drugih oblasti i sfera života u kojima matematika i sama funkcija imaju veliku primenu.
S toga, smatram da je veoma važno razumeti i naučiti sam pojam funkcije kao i sve načine njenog definisanja.

Ovaj rad je i nastao iz želje da se malo više udubim u samu suštinu svih elementarnih funkcija, njihovih osnovnih osobina i crtanja grafika i razjasnim česte nedoumice koje se javljaju u vezi sa njima. Nadam se da ovaj rad može biti od pomoći pojedinim učenicima i njihovim profesorima prilikom samog izučavanja elementarnih funkcija i preslikavanja.

Literatura

[1] Jovan D. Kečkić, Olivera Stojković, Slobodanka Kečkić, Matematika za 2.razred srednje škole, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 2003.

[2] Pavle Miličić, Vladimir Stojanović, Zoran Kadelburg, Branislav Boriĭić, Matematika za 1.razred srednje škole, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 2005.

[3] Dušan Adnađević, Zoran Kadelburg, Matematička analiza 1, Matematički fakultet, Beograd, 2008.

[4] Miodrag Mateljević, Kompleksne funkcije, Matematički fakultet, Beograd, april 2006.

[5] http://www.pmf.ni.ac.rs/pmf/predmeti/1517/Elementarne

[6] https://element.hr/artikli/file/1208 pristupljeno 20.08.2016.

[7] http://elib.mi.sanu.ac.rs/files/journals/nm/201/nm380103.pdf