Универзитет у Београду

Математички факултет

Мастер рад

Операторне и блок матрице и њихова примена

Ментор:
др Данко Јоцић

Аутор:
Матија Миловић

Члан комисије:
др Ђорђе Кртинић

Члан комисије:
др Стефан Милошевић

Септембар, 2018.

Садржај

Предговор

У овом мастер раду приказане су основне особине операторних матрица које дејствују на директним сумама Hilbert-ових простора, са највећим нагласком на позитивност и контрактибилност, као и њихова примена у операторним неједнакостима. Рад се састоји од четири главе.

У првој глави приказане су основне дефиниције и својства ограничених оператора на Hilbert-овим просторима. Уведен је појам адјунгованог оператора, класе самоадјунгованих оператора са парцијалним уређењем на њој, поткласе позитивних оператора као и класе контрактибилних пресликавања. Коначно, уведен је појам директног збира Hilbert-ових простора, заједно са операторним матрицама и њиховим елементарним особинама.

У другој глави је изложена теорија контрактибилних 2×2 операторних матрица. Почевши од једноставнијих критеријума контрактибилности операторних матрица димензија 2×1 и 1×2 дати су основни критеријуми контрактибилности и приказана је факторизација произвољне 2×2 контрактибилне операторне матрице.

У трећој глави је представљена теорија позитивних 2×2 операторних матрица облика $\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix}$. Дат је основни критеријум позитивности и разне врсте факторизација истих. Уз помоћ Levinson-овог система операторних једначина дати су оперативнији критеријуми провере позитивности, као и, прецизније, инвертибилности и сингуларности позитивних операторних матрица. За детаљнији преглед на материју изложену у другој и трећој глави погледати [FF].

Четврта глава почиње навођењем познатог тврђења о поларној декомпозицији ограничених оператора. Затим се представља класа јако квадратно сумабилних (j.к.с.) низова оператора и показује се слаба конвергенција реда $\sum_{n=1}^{\infty} A_n X B_n$, за j.к.с. низове $\{A_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и произвољан ограничен оператор X. Коришћењењем технике изложене у претходним главама, на елегантан начин, помоћу карактеризације позитивности операторних матрица, изводи се доказ уопштења неједнакости Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky-ог, помоћу које се на крају показује јака конвергенција горе напоменутог реда. За детаљнију причу о неједнакости Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky-ог за елементарне операторе на Schatten-овим идеалима или за слабе*-интеграле операторно вредносних функција погледати [J99] и [J05] (као и тамошње референце).

Глава 1

Контракције на Hilbert-овим просторима

1 Ограничени линеарни оператори на Hilbert-овим просторима

На почетку уводимо основне појмове и ознаке везане за ограничене линеарне операторе на Hilbert-овим просторима.

Са $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}'$ ћемо означавати комплексне Hilbert-ове просторе. Такође, са $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ћемо означавати скаларни производ, а са $\|\cdot\|$ скаларним производом индуковану норму на оба Hilbert-ова простора (када је недвосмислено о ком Hilbert-овом простору је реч).

Дефиниција **1.1.** *Линеаран оператор $T\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ је* ***ограничен*** *ако постоји позитиван број M такав да за свако $h \in \mathcal{H}$ важи $\|Th\| \leqslant M\|h\|$. Инфимум бројева M за које важи претходна неједнакост назива се* ***нормом*** *оператора T и означава са $\|T\|$.*

Лако се покаже да је овај инфимум у ствари и минимум, тако да за ограничене операторе увек важи неједнакост $\|Th\| \leqslant \|T\|\|h\|$, за свако $h \in \mathcal{H}$. Класу свих ограничених линеарних оператора означавамо са $\mathfrak{B}(\mathcal{H},\mathcal{H}')$.

Став **1.1.** ***Линеаран оператор $T\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ је непрекидан ако и само ако је ограничен.***

За доказ Става 1.1 погледати [АДЈ, Став 2.7].

Дефиниција **1.2.** *За $T \in \mathfrak{B}(\mathcal{H},\mathcal{H}')$ кажемо да је* ***одоздо ограничен*** *ако постоји $c > 0$ тако да је $\|Th\| \geqslant c\|h\|$, за свако $h \in \mathcal{H}$.*

Следећа лема, чији се доказ може наћи у [АДЈ, Лема 2.8], нам даје неопходан и довољан услов егзистенције и ограничености инверза линеарног оператора.

Лема **1.1.** ***Сурјективни оператор $T \in \mathfrak{B}(\mathcal{H},\mathcal{H}')$ има инверзни оператор који је (такође линеаран) ограничен ако и само ако је одоздо ограничен.***

Кроз цео рад ћемо са $\mathbf{0}$ означавати нула оператор, а са I јединични оператор.

Дефиниција **1.3.** *За ограничен оператор T ћемо рећи да је* ***сингуларан*** *ако има нетривијално језгро.*

Дефиниција **1.4.** *Нека је $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$.* ***Адјунговани*** *оператор T^* ограниченом оператору T је јединствени оператор из $\mathcal{B}(\mathcal{H}', \mathcal{H})$, такав да је за свако $h \in \mathcal{H}$ и $h' \in \mathcal{H}'$*

$$\left\langle Th, h' \right\rangle = \left\langle h, T^* h' \right\rangle.$$

Адјунгован оператор увек постоји и јединствен је, погледати [W, Теорема 4.13]. У следећем ставу су дефинисане основне особине адјунговања.

Став 1.2. ***За све $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$, $C \in \mathcal{B}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$ и свако $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ је***

1° $(\alpha A + \beta B)^* = \bar{\alpha} A^* + \bar{\beta} B^*$,

2° $A^{**} = A$,

3° $(CA)^* = A^* C^*$,

4° $I^* = I$,

5° $\|A^*\| = \|A\|$,

6° $\|A^* A\| = \|AA^*\| = \|A\|^2$,

7° $A^* A = 0$ ***ако и само ако је*** $A = 0$,

8° A ***је инвертибилан ако и само ако је*** A^* ***инвертибилан, а у том случају је*** $(A^*)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^*$.

Између језгра и слике међусобно адјунгованих оператора постоји следећа веза:

Теорема 1.2. ***За сваки $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ важи***

1° $\mathcal{N}(A) = \mathcal{R}(A^*)^{\perp} \stackrel{\text{деф}}{=} \mathcal{H} \ominus \overline{\mathcal{R}(A^*)}$ ***и*** $\mathcal{N}(A^*) = \mathcal{R}(A)^{\perp} \stackrel{\text{деф}}{=} \mathcal{H}' \ominus \overline{\mathcal{R}(A)}$,

2° $\mathcal{H} = \mathcal{N}(A) \oplus \overline{\mathcal{R}(A^*)}$ ***и*** $\mathcal{H}' = \mathcal{N}(A^*) \oplus \overline{\mathcal{R}(A)}$,

3° $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A^* A)$,

4° $\overline{\mathcal{R}(A)} = \overline{\mathcal{R}(AA^*)}$.

Докази претходна два тврђења се могу видети у [W, Теореме 4.13, 4.14, 4.17 и 4.19] или су њихова директна последица. Сваки слабо конвергентан низ оператора из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ се адјунговањем преводи у исти такав низ и адјунговање пролази кроз слаби лимес, о чему говори следећа

Теорема 1.3. ***Адјунговање је слабо непрекидна операција на $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.***

Доказ претходне теореме се може наћи у [АДЈ, Теорема 11.15].

Дефиниција **1.5.** *Оператор $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ се назива* ***изометријом*** *ако је $\|Th\| = \|h\|$, за свако $h \in \mathcal{H}$, а* ***коизометријом*** *ако је $\|T^* h'\| = \|h'\|$, за свако $h' \in \mathcal{H}'$. Оператор T је* ***унитаран*** *ако је изометрија и ако је $\mathcal{R}(T) = \mathcal{H}'$.*

Из $\|Th\|^2 = \langle Th, Th\rangle = \langle T^*Th, h\rangle$ и $\|h\|^2 = \langle Ih, h\rangle$, на основу једнакости квадратних форми добијамо да је T изометрија ако и само ако је $T^*T = I$. Слично, T је коизометрија (тј, T^* је изометрија) ако и само ако је $TT^* = I$. Како је изометрија увек инјекција, из дефиниције следи да је унитаран оператор увек инвертибилан. Ако је T унитаран, из инвертибилности и $T^*T = I$ (карактеризација изометричности) следи да је $T^{-1} = T^*$, па је T и коизометрија. Обрнуто, ако је T изометрија и коизометрија, важи $T^*T = TT^* = I$, па је T бијекција, а самим тим, уз изометричност, и унитаран. Тиме смо управо показали следећи:

Став 1.3. ***Оператор** $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ **је унитаран ако и само ако су** T **и** T^* **изометрије и тада је** $T^{-1} = T^*$.*

Следећи став говори о раширењу линеарног оператора по непрекидности на затворење његовог домена.

Став 1.4. ***Нека су** $\mathcal{H}$ **и** $\mathcal{H}'$ **Hilbert-ови простори и** $\mathcal{L}$ **свуда густ векторски потпростор од** $\mathcal{H}$ **(тј.** $\overline{\mathcal{L}} = \mathcal{H}$**). Нека је** $A_0\colon \mathcal{L} \to \mathcal{H}'$ **линеаран оператор такав да је***

$$\|A_0\|_{\mathcal{L}} \overset{\text{деф}}{=} \sup_{\|h\|=1, h\in\mathcal{L}} \|A_0 h\| < +\infty.$$

***Тада постоји јединствен непрекидан линеаран оператор** $A\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ **такав да је** $Ah = A_0 h$ **за свако** $h \in \mathcal{L}$**. При томе је** $\|A\| = \|A_0\|_{\mathcal{L}}$.*

Доказ претходног става се може наћи у [АДЈ, Став 7.3]. Сада наводимо једну помоћну лему која ће нам бити од велике користи при доказима у наредним поглављима.

Лема 1.4. ***Нека су оператори** $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ **и** $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}'')$ **такви да постоји позитивна константа** M **таква да је** $\|Ah\| \leqslant M\|Bh\|$**, за свако** $h \in \mathcal{H}$**. Онда постоји оператор** $C\colon \overline{\mathcal{R}(B)} \to \mathcal{H}'$ **такав да је** $A = CB$**, за који важи** $\|C\| \leqslant M$.*

△ Дефинисаћемо прво оператор C на $\mathcal{R}(B)$. Нека је $g \in \mathcal{R}(B)$ произвољан. Онда постоји $h \in \mathcal{H}$ такво да је $g = Bh$. Дефинишемо $Cg \overset{\text{деф}}{=} Ah$. Уколико је $g = Bh = Bh_1$, за $h, h_1 \in \mathcal{H}$, важи $\|A(h_1 - h)\| \leqslant M\|B(h_1 - h)\| = 0$, одакле је $Ah = Ah_1$, па је дефиниција пресликавања C коректна. За произвољне $g_1 = Bh_1, g_2 = Bh_2 \in \mathcal{R}(B)$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ имамо

$$\begin{aligned} C(\alpha g_1 + \beta g_2) &= C(\alpha Bh_1 + \beta Bh_2) = CB(\alpha h_1 + \beta h_2) \\ &= A(\alpha h_1 + \beta h_2) = \alpha Ah_1 + \beta Ah_2 = \alpha Cg_1 + \beta Cg_2, \end{aligned}$$

па је пресликавање C линеарно. На основу дефиниције је за свако $h \in \mathcal{H}$ $CBh = Ah$, тј. $A = CB$. За произвољно $g = Bh \in \mathcal{R}(B)$ је $\|Cg\| = \|Ah\| \leqslant M\|Bh\| = M\|g\|$, па је $\|C\| \leqslant M$. На основу Леме 1.4 оператор C је могуће продужити на $\overline{\mathcal{R}(B)}$ без увећања норме и оно задовољава услове леме. □

Напоменимо да случају једнакости у Леми 1.4 важи да је $\|C\| = M$. Такође, оператор C се може додефинисати на цео простор $\mathcal{H}''$, стављајући $Cg \overset{\text{деф}}{=} 0$, за $g \in \overline{\mathcal{R}(B)}^{\perp}$, при чему ће и даље наравно важити $\|C\| \leqslant M$.

2 Контракције и позитивни оператори на Hilbert-овим просторима

Дефиниција **1.6.** *Оператор* $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ *се назива* ***контракцијом*** *ако је* $\|T\| \leqslant 1$. T *се назива* ***строгом контракцијом*** *ако је* $\|T\| < 1$.

Како је $\|T\| = \|T^*\|$ важи да је T (строга) контракција ако и само ако је T^* (строга) контракција.

Дефиниција **1.7.** *Оператор* $Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *се назива* ***самоадјунгованим*** *ако је* $Q = Q^*$.

Дефиниција **1.8.** *Оператор* $Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *се назива* ***позитивним*** *(у ознаци* $Q \geqslant 0$*) ако је* $\langle Qh, h\rangle \geqslant 0$*, за свако* $h \in \mathcal{H}$*. За оператор* Q *ћемо рећи да је* ***строго позитиван*** *ако је* $\langle Qh, h\rangle > 0$*, за свако* $h \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$*. За оператор* Q *ћемо рећи да је* ***позитиван и инвертибилан*** *ако постоји* $\delta > 0$ *такво да је* $Q - \delta I$ *позитиван оператор.*

Напоменимо да је позитиван оператор увек самоадјунгован. У класу самоадјунгованих оператора уводи се (делимично) уређење $\leqslant$ на следећи начин.

Дефиниција **1.9.** *За самоадјунговане операторе ћемо рећи да важи* $A \leqslant B$ *ако и само ако је* $\langle Af, f\rangle \leqslant \langle Bf, f\rangle$ *за свако* $f \in \mathcal{H}$.

Став **1.5.** ***Нека су оператори*** $A, B, C, D \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ***самоадјунговани,*** $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ***и*** $\alpha \geqslant 0$ ***произвољни. Тада важи:***

1° ***ако је*** $A \leqslant B$ ***и*** $B \leqslant C$***, онда је и*** $A \leqslant C$***,***

2° ***ако је*** $A \leqslant B$ ***и*** $C \leqslant D$***, онда је и*** $A + C \leqslant B + D$***,***

3° ***ако је*** $A \leqslant B$***, онда је*** $\alpha A \leqslant \alpha B$***,***

4° ***ако је*** $A \leqslant B$***, онда је*** $P^*AP \leqslant P^*BP$ ***и***

5° $0 \leqslant P^*P \leqslant \|P\|^2 I$***.***

△ За произвољно $h \in \mathcal{H}$ имамо:

1° Из $A \leqslant B$ и $B \leqslant C$ следи $\langle Ah, h\rangle \leqslant \langle Bh, h\rangle Ch, h\rangle$, па је $A \leqslant C$.

2° Из $A \leqslant B$ и $C \leqslant D$ следи $\langle (A + C)h, h\rangle = \langle Ah, h\rangle + \langle Ch, h\rangle \leqslant \langle Bh, h\rangle + \langle Dh, h\rangle = \langle (B + D)h, h\rangle$, па је $A + C \leqslant B + D$.

3° Из $A \leqslant B$ и $\alpha \geqslant 0$ следи $\langle (\alpha A)h, h\rangle = \alpha\langle Ah, h\rangle \leqslant \alpha\langle Bh, h\rangle = \langle (\alpha B)h, h\rangle$, па је $\alpha A \leqslant \alpha B$.

4° Из $A \leqslant B$, за произвољно $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ следи $\langle P^*APh, h\rangle = \langle APh, Ph\rangle \leqslant \langle BPh, Ph\rangle = \langle P^*BPh, h\rangle$, па је $P^*AP \leqslant P^*BP$.

5° За произвољно $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ важи $\langle P^*Ph, h\rangle = \langle Ph, Ph\rangle = \|Ph\|^2 \geqslant 0$, па је $P^*P \geqslant 0$. С друге стране је $\langle P^*Ph, h\rangle = \|Ph\|^2 \leqslant \|P\|^2\|h\|^2 = \|P\|^2\langle h, h\rangle = \langle (\|P\|^2 I)h, h\rangle$, па је $P^*P \leqslant \|P\|^2 I$.

$\square$

Као лаку последицу Става 1.5 наводимо следећу лему која ће нам бити од користи у доказу главне неједнакости последњег поглавља.

Лема 1.5. ***Нека су оператори*** $P, Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ***произвољни. Тада је:***

$$P^*Q^*QP \leqslant \|Q\|^2 P^*P. \tag{1.1}$$

$\triangle$ Како је на основу својства 5° Става 1.5, $Q^*Q \leqslant \|Q\|^2 I$, на основу својства 4° истог става добијамо да је $P^*Q^*QP \leqslant P^*(\|Q\|^2 I)P = \|Q\|^2 P^*P$. $\square$

Имамо следећу везу између контракција и позитивних оператора.

Став 1.6. ***Нека је*** $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$***. Тада је*** T ***контракција ако и само ако је*** $I - T^*T$ ***позитиван оператор у*** $\mathcal{B}(\mathcal{H})$***.***

$\triangle$ За произвољно $h \in \mathcal{H}$ је $\|h\|^2 - \|Th\|^2 = \langle h, h\rangle - \langle Th, Th\rangle = \langle (I - T^*T)h, h\rangle$, одакле тврђење директно следи. $\square$

Сваки позитиван оператор се може кореновати, како то показује следећа

Теорема 1.6. [квадратни корен позитивног оператора] ***За дати позитиван оператор*** $Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ***постоји јединствен позитиван оператор*** $S \geqslant 0$ ***(у ознаци*** $S = \sqrt{Q}$***) за који је*** $S^2 = Q$***, при чему*** S ***комутира са свим операторима са којима комутира и*** Q***.***

Доказ претходног тврђења се може пронаћи у [АДЈ, Теорема 12.9]. Норма квадратног корена позитивног оператора се лако рачуна, што нам показује следећа

Лема 1.7. ***Нека је оператор*** $Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ***позитиван. Тада је:***

$$\|\sqrt{Q}\| = \sqrt{\|Q\|}. \tag{1.2}$$

$\triangle$ На основу Става 1.2 имамо $\|Q\| = \|\sqrt{Q}\sqrt{Q}\| = \|\sqrt{Q}^*\sqrt{Q}\| = \|\sqrt{Q}\|^2$, одакле корeновањем добијамо једакост (1.2). $\square$
Напоменимо да се квадратни корен позитивног оператора Q може добити као униформни лимес одговарајућег низа оператора $p_n(Q)$, где $p_n \in \mathbb{C}[X]$, $n \in \mathbb{N}$. Такође, Q је инвертибилан ако и само ако је $\sqrt{Q}$ инвертибилан и важи $\sqrt{Q}^{-1} = \sqrt{Q^{-1}}$. Свакој контракцији ћемо доделити следећи битан оператор.

Дефиниција 1.10. *Нека је* $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ *контракција. Оператор* $\sqrt{I - T^*T}$ *назива се* ***оператором дефекта*** *оператора* T *и означава са* D_T*, а затворење његове слике означава се са* $\mathcal{D}_T = \overline{\mathcal{R}(D_T)}$*.*

Очигледно је да је $T(I - T^*T) = (I - TT^*)T$, па је и за сваки полином $p \in \mathbb{C}[X]$

$$Tp(I - T^*T) = p(I - TT^*)T.$$

Узимајући низ полинома такав да $p_n(t) \rightrightarrows \sqrt{t}$ на $[0, 1]$, добијамо су D_T и D_{T^*} униформни лимеси оператора $p_n(I - T^*T)$ и $p_n(I - TT^*)$, редом. Како је онда $Tp_n(I - T^*T) = p_n(I - TT^*)T$ за свако $n \in \mathbb{N}$, преласком на граничну вредност добијамо да важи следећи битан идентитет:

$$TD_T = D_{T^*}T. \tag{1.3}$$

Како за свако $h \in \mathcal{H}$ имамо да важи

$$\|h\|^2 - \|Th\|^2 = \langle (I - T^*T)h, h\rangle = \langle D_T^2 h, h\rangle = \|D_T\|^2$$

добијамо још један важан идентитет везан за оператор и његов оператор дефекта:

$$\|h\|^2 = \|Th\|^2 + \|D_T h\|^2 \quad \text{за свако } h \in \mathcal{H}. \tag{1.4}$$

Докажимо сада следећу карактеризацију строге контрактивности.

Став 1.7. ***Оператор $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ је строга контракција ако и само је $I - T^*T$, или еквивалентно, $I - TT^*$ позитиван и инвертибилан. Контракција T је и строга контракција ако и само ако је D_T, или еквивалентно, D_{T^*} инвертибилан.***

$\triangle$ Нека је T строга контракција. Тада је $\|T\| = \|T^*\| \leqslant 1$, па за свако $h \in \mathcal{H}$ важи да је $\|Th\|$, $\|T^*h\| \leqslant \|h\|$. Одатле добијамо:

$$\|(I - T^*T)h\|^2 = \langle (I - T^*T)h, h\rangle = \|h\|^2 - \|Th\|^2 \geqslant \|h\|^2 - \|T\|^2\|h\|^2 = (1 - \|T\|^2)\|h\|^2$$

и

$$\|(I - TT^*)h\|^2 = \langle (I - TT^*)h, h\rangle = \|h\|^2 - \|T^*h\|^2 \geqslant \|h\|^2 - \|T^*\|^2\|h\|^2 = (1 - \|T^*\|^2)\|h\|^2$$

одакле, како су $1 - \|T\|^2 > 0$ и $1 - \|T^*\|^2 > 0$ следи да је $I - T^*T \geqslant (1 - \|T\|^2)I$ и $I - TT^* \geqslant (1 - \|T^*\|^2 I)$, па су оператори $I - T^*T$ и $I - TT^*$ позитивни и инвертибилни. Обрнуто, нека постоје δ_1 или $\delta_2 > 0$ такви да је $I - T^*T \geqslant \delta_1 I$ и $I - TT^* \geqslant \delta_2 I$. За свако $h \in \mathcal{H}$ је онда

$$\|Th\|^2 = \|h\|^2 - \|(I - T^*T)h\|^2 \leqslant \|h\|^2 - \delta_1\|h\|^2 = (1 - \delta_1)\|h\|^2$$

или

$$\|T^*h\|^2 = \|h\|^2 - \|(I - TT^*)h\|^2 \leqslant \|h\|^2 - \delta_2\|h\|^2 = (1 - \delta_2)\|h\|^2$$

одакле узимањем супремума по $h \in \mathcal{H}$ јединичне норме добијамо да је $\|T\| \leqslant \sqrt{1 - \delta_1} < 1$ или $\|T^*\| \leqslant \sqrt{1 - \delta_2} < 1$, па је, у оба случаја (како је $\|T\| = \|T^*\|$), оператор T строга контракција. Последњи део тврђења следи из чињенице да су оператори $I - T^*T$ и D_T, као и $I - TT^*$ и D_{T^*} истовремено позитивни и инвертибилни. $\square$

За крај одељка ћемо навести теореме аналогне теоремама о конвергенцији монотоних и ограничених реалних низова. Доказ наредне теореме се може пронаћи у [АДЈ, Теорема 12.7].

Теорема 1.8. ***Нека је $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ низ позитивних оператора у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, таквих да је $A_n \geqslant A_{n+1}$ за свако $n \in \mathbb{N}$ (тј, монотоно опадајући низ позитивних ограничених оператора). Тада постоји позитиван $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ такав да је $A = s - \lim_{n\to\infty} A_n$.***

Директна последица је следећа теорема која ће нам бити од значаја код јако квадратно сумабилних низова оператора.

Теорема 1.9. ***Нека је $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ низ позитивних оператора у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ таквих да је $A_n \leqslant A_{n+1}$ за свако $n \in \mathbb{N}$ и нека постоји реалан $M \geqslant 0$ такав да је $\|A_n\| \leqslant M$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Тада постоји позитиван $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ такав да је $A = s - \lim_{n\to\infty} A_n$ и притом је $\|A\| \leqslant M$.***

$\triangle$ Посматрајмо низ оператора $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ дефинисаних са $B_n \overset{\text{деф}}{=} MI - A_n$ за свако $n \in \mathbb{N}$. За произвољно $h \in \mathcal{H}$ је $\langle B_n h, h\rangle = M\|h\|^2 - \langle A_n h, h\rangle \geqslant M\|h\|^2 - \|A_n\|\|h\|^2 \geqslant 0$, па су оператори B_n позитивни. Такође је за свако $n \in \mathbb{N}$, $B_n - B_{n+1} = (MI - A_n) - (MI - A_{n+1}) = A_{n+1} - A_n \geqslant 0$, па је низ $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и монотоно опадајући. На основу Теореме 1.8, знамо да постоји $B \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ такав да је $B = s-\lim_{n\to\infty} B_n = s-\lim_{n\to\infty} M - A_n$ који је позитиван. Директно следи да и низ $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ јако конвергира и то ка ограниченом оператору $A = MI - B$. За произвољно $h \in \mathcal{H}$ имамо $\langle Ah, h\rangle = \langle \lim_{n\to\infty} A_n h, h\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle A_n h, h\rangle \geqslant 0$, као и $\|Ah\| = \|\lim_{n\to\infty} A_n h\| = \lim_{n\to\infty}\|A_n h\| \leqslant M\|h\|$, на основу непрекидности скаларног производа и норме, одакле следи позитивност, као и тражена процена норме оператора A. $\square$

3 Директан збир Hilbert-ових простора

У овој секцији ћемо увести директан збир највише пребројиве фамилије Hilbert-ових простора и основне особине и идентитете везане за њега.
Нека је $\{\mathcal{H}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ низ Hilbert-ових простора. Посматрајмо следећи скуп:

$$\bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n = \left\{ h \in \prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n : \sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\|_{\mathcal{H}_n}^2 < \infty \right\}. \tag{1.5}$$

Скуп $\bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n$ се на природан начин може опремити скаларним производом и он ће бити Hilbert-ов простор.

Теорема 1.10. ***Пресликавање*** $\langle .,.\rangle_{\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n} : \bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n \times \bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n \to \mathbb{C}$ ***дефинисано са:***

$$\langle h, g\rangle_{\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n} \overset{\text{деф}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \langle h_n, g_n\rangle_{\mathcal{H}_n} \tag{1.6}$$

је скаларни производ на $\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n$ ***и чини га Hilbert-овим простором.***

$\triangle$ Докажимо прво да је израз (1.6) добро дефинисан. Нека су $h, g \in \bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n$ произвољни. Коришћењем неједнакости Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky-ог на сваком од простора $\mathcal{H}_n$, као и на простору квадратно сумабилних низова добијамо:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle h_n, g_n\rangle_{\mathcal{H}_n}| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\|_{\mathcal{H}_n}\|g_n\|_{\mathcal{H}_n} \leqslant \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\|h_n\|_{\mathcal{H}_n}^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\|g_n\|_{\mathcal{H}_n}^2} < \infty,$$

па ред у (1.6) апсолутно конвергира, одакле следи његова добра дефинисаност. Докажимо сада да израз (1.6) дефинише скаларни производ на $\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n$. Нека су $f, g, h \in \bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n$ и $\lambda \in \mathbb{C}$ произвољни. Како су сви $\mathcal{H}_n$ Hilbert-ови простори, из линеарности суме реда, као и линеарности и непрекидности комплексног конјуговања следи:

$$\begin{aligned}\langle f+g, h\rangle_{\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n} &= \sum_{n=1}^{\infty}\langle f_n + g_n, h_n\rangle_{\mathcal{H}_n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\langle f_n, h_n\rangle_{\mathcal{H}_n} + \sum_{n=1}^{\infty}\langle g_n, h_n\rangle_{\mathcal{H}_n} = \langle f, h\rangle_{\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n} + \langle g, h\rangle_{\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n},\end{aligned}$$

$$\overline{\langle f,g\rangle_{\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n}} = \overline{\sum_{n=1}^{\infty}\langle f_n,g_n\rangle_{\mathcal{H}_n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\overline{\langle f_n,g_n\rangle_{\mathcal{H}n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\langle g_n,f_n\rangle_{\mathcal{H}_n} = \langle g,f\rangle_{\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n},$$

$$\langle \lambda f,g\rangle_{\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n} = \sum_{n=1}^{\infty}\langle \lambda f_n,g_n\rangle_{\mathcal{H}_n} = \lambda\sum_{n=1}^{\infty}\langle f_n,g_n\rangle_{\mathcal{H}_n} = \lambda\langle f,g\rangle_{\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n}$$

и, како је за свако $n\in\mathbb{N}$, израз $\langle h_n,h_n\rangle_{\mathcal{H}_n}=0$ ако и само је $h_n=0$, следи:

$$\langle h,h\rangle_{\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n} = \sum_{n=1}^{\infty}\langle h_n,h_n\rangle_{\mathcal{H}_n} = 0 \quad \text{ако и само ако је } h_n=0, \text{ за свако } n\in\mathbb{N},$$

због позитивности сваког члана горњег реда, па је $h=0$ у $\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n$. Дакле (1.6) дефинише скаларни производ на $\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n$. Што се њиме индуковане норме тиче, у наставку рада ће нам бити користан следећи израз (који ће се додуше користити у форми коначног збира):

$$\|h\|^2_{\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n} = \sum_{n=1}^{\infty}\langle h_n,h_n\rangle_{\mathcal{H}_n} = \sum_{n=1}^{\infty}\|h_n\|^2_{\mathcal{H}_n}.$$

Докажимо сад комплетност простора $\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n$ у норми индукованој скаларним производом (1.6). На основу [АДЈ, Став 7.1], довољно је показати да је сваки апсолутно конвергентан ред у $\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n$ и конвергентан. Нека је $(h^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ произвољан апсолутно конвергентан ред у $\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n$, тј. нека је

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left\|h_n^{(k)}\right\|^2_{\mathcal{H}_n}} = \sum_{k=1}^{\infty}\left\|h^{(k)}\right\|_{\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n} =: C < +\infty, \tag{1.7}$$

за неко $C\geqslant 0$. Из неједнакости Minkowski-ог директно добијамо

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left\|h_n^{(k)}\right\|_{\mathcal{H}_n}\right)^2} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left\|h_n^{(k)}\right\|^2_{\mathcal{H}_n}} = C, \tag{1.8}$$

одакле следи да је за свако $n\in\mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\|h_n^{(k)}\right\|_{\mathcal{H}_n} \leqslant C < +\infty. \tag{1.9}$$

Како је сваки од простора $\mathcal{H}_n$ Hilbert-ов, следи да апсолутно конвергентни редови у (1.9) и конвергирају у тим просторима, тј. постоје $g_n := \sum_{k=1}^{\infty} h_n^{(k)} \in \mathcal{H}$, за свако $n\in\mathbb{N}$. Нека је $g := (g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n$. Из основне неједнакости за Hilbert-ове просторе $\mathcal{H}_n$ и неједнакости (1.8) добијамо:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|g_n\|^2_{\mathcal{H}_n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left\|\sum_{k=1}^{\infty}h_n^{(k)}\right\|^2_{\mathcal{H}_n} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left\|h_n^{(k)}\right\|_{\mathcal{H}_n}\right)^2 \leqslant C^2 < +\infty, \tag{1.10}$$

одакле следи да $g\in\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n$. Додатно, упоређивањем једнакости (1.7) и неједнакости (1.10), добили смо да за сваки апсолутно конвергентан ред $(h^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ важи слаба основна неједнакост

$$\left\|\left(\sum_{k=1}^{\infty}h_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_{\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left\|\sum_{k=1}^{\infty}h_n^{(k)}\right\|^2_{\mathcal{H}_n}} \leqslant C = \sum_{k=1}^{\infty}\left\|h^{(k)}\right\|_{\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n}. \tag{1.11}$$

Применом слабе основне неједнакости на остатак реда, добијамо

$$\left\| g - \sum_{k=1}^{K} h^{(k)} \right\|_{\bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n} = \left\| \sum_{k=K+1}^{\infty} h^{(k)} \right\|_{\bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n} \leqslant \sum_{k=K+1}^{\infty} \left\| h^{(k)} \right\|_{\bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n} \to 0, \tag{1.12}$$

кад $K \to \infty$, јер је ред са десне стране неједнакости (1.12) остатак конвергентног реда. Дакле, ред $\sum_{k=1}^{\infty} h^{(k)}$ конвергира ка g, у норми простора $\bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n$, чиме је доказ завршен. □

Претходна Теорема 1.10 оправдава следећу дефиницију.

ДЕФИНИЦИЈА **1.11.** *Нека је $\{\mathcal{H}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ низ Hilbert-ових простора. Тада $\bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n$ називамо **директном сумом Hilbert-ових простора** $\{\mathcal{H}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ у односу на скаларни производ* (1.6).

У наставку ћемо се бавити само случајем производа коначне фамилије $\{\mathcal{H}_i\}_{i=1}^n$ Hilbert-ових простора. У том случају, дефинисан је $\bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{H}_i \overset{\text{деф}}{=} \prod_{k=1}^{n} \mathcal{H}_i$, као и скаларни производ на њему са

$$\langle\langle f, g\rangle\rangle \overset{\text{деф}}{=} \langle f, g\rangle_{\bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{H}_i} \overset{\text{деф}}{=} \sum_{i=1}^{n} \langle f_i, g_i\rangle_{\mathcal{H}_i},$$

у односу на који је $\bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{H}_i$ Hilbert-ов простор.

ДЕФИНИЦИЈА **1.12.** *Нека су $\{\mathcal{H}_i\}_{i=1}^n$ и $\{\mathcal{G}_j\}_{j=1}^m$ коначне фамилије Hilbert-ових простора и нека су $T_{i,j} \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_i, \mathcal{G}_j)$. Тада је **операторна матрица** пресликавање*

$$[T_{i,j}]_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant m}} : \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{H}_i \to \bigoplus_{j=1}^{m} \mathcal{G}_j : \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} T_{1,j} h_j \\ \sum_{j=1}^{n} T_{2,j} h_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} T_{m,j} h_j \end{bmatrix}, \tag{1.13}$$

при чему можемо користити и нотацију $\begin{bmatrix} T_{1,1} & T_{1,2} & \dots & T_{1,n} \\ T_{2,1} & T_{2,2} & \dots & T_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{m,1} & T_{m,2} & \dots & T_{m,n} \end{bmatrix} \overset{\text{деф}}{=} [T_{i,j}]_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant m}}.$

Као и у случају скаларних матрица, наведено пресликавање Hilbert-ових простора је и линеарно.

СТАВ **1.8.** ***Пресликавање** $[T_{i,j}]_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant m}}$ **дефинисано у** (1.13) **је линеарно.***

△ За све $(g_i)_{i=1}^n, (h_i)_{i=1}^n \in \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{H}_i$ и за свако $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ имамо:

$$[T_{i,j}]_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant m}} (\alpha(g_i)_{i=1}^n + \beta(h_i)_{i=1}^n) = \left(\sum_{j=1}^{n} T_{i,j}(\alpha g_j + \beta h_j) \right)_{i=1}^{m}$$

$$= \alpha \left(\sum_{j=1}^{n} T_{i,j} g_j \right)_{i=1}^{m} + \beta \left(\sum_{j=1}^{n} T_{i,j} h_j \right)_{i=1}^{m} = \alpha [T_{i,j}]_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant m}} (g_i)_{i=1}^n + \beta [T_{i,j}]_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant m}} (h_i)_{i=1}^n$$

□

Такође, и рачунање адјунгованог оператора операторној матрици $[T_{i,j}]_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}}$ је аналогно случају скаларне матрице.

Став 1.9. ***За свако*** $n \in \mathbb{N}$ ***и за свако*** $[T_{i,j}]_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}} \in \mathcal{B}(\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{H}_i, \bigoplus_{j=1}^m \mathcal{G}_j)$***, је***

$$[T_{i,j}]^*_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}} = [T^*_{j,i}]_{\substack{1\leqslant j\leqslant m\\ 1\leqslant i\leqslant n}}. \tag{1.14}$$

△ За све $(h_i)_{i=1}^n \in \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{H}_i$ и $(g_j)_{j=1}^m \in \bigoplus_{j=1}^m \mathcal{G}_j$ је

$$\begin{aligned}\left\langle [T_{i,j}]_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}} (h_i)_{i=1}^n, (g_i)_{j=1}^m \right\rangle_{\bigoplus_{j=1}^m \mathcal{G}_j} &= \left\langle \left(\sum_{i=1}^n T_{j,i} h_i \right)_{j=1}^m, (g_j)_{j=1}^m \right\rangle_{\bigoplus_{j=1}^m \mathcal{G}_j} \\ &= \sum_{j=1}^m \left\langle \sum_{i=1}^n T_{j,i} h_i, g_j \right\rangle_{\mathcal{G}_j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \langle h_i, T^*_{i,j} g_j \rangle_{\mathcal{H}_i} = \sum_{i=1}^n \left\langle h_i, \sum_{j=1}^m T^*_{i,j} g_j \right\rangle_{\mathcal{H}_i} \\ &= \left\langle (h_i)_{i=1}^n, \left(\sum_{j=1}^m T^*_{i,j} g_j \right)_{i=1}^n \right\rangle_{\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{H}_i} = \left\langle (h_i)_{i=1}^n, [T^*_{j,i}]_{\substack{1\leqslant j\leqslant m\\ 1\leqslant i\leqslant n}} (g_j)_{j=1}^n \right\rangle_{\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{H}_i},\end{aligned}$$

чиме је доказ завршен. □

Глава 2

Контрактивност блок операторних матрица

1 Контрактивност блок операторних матрица димензија 2×1 и 1×2

Нека су $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}'$, $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ Hilbert-ови простори и T операторна матрица облика

$$T = \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}' \oplus \mathcal{H}_2, \tag{2.1}$$

где су A и C оператори који дејствују на одговарајућим просторима. Следећа лема игра основну улогу у свим доказима овог поглавља.

Лема 2.1. ***Оператор*** T ***дефинисан у*** (2.1) ***је контракција ако и само ако је*** A ***контракција и постоји контракција*** $Y\colon \mathcal{D}_A \to \mathcal{H}_2$ ***таква да је***

$$C = Y D_A. \tag{2.2}$$

У том случају, формула

$$W D_T \overset{\text{деф}}{=} D_Y D_A \tag{2.3}$$

дефинише унитаран оператор $W\colon \mathcal{D}_T \to \mathcal{D}_Y$***. Посебно,*** T ***је изометрија ако и само ако је*** Y ***изометрија.***

$\triangle$ Нека је A контракција и нека важи (2.2), где је Y контракција. Користећи једнакост (1.4) добијамо:

$$\begin{aligned} \|h\|^2 - \|Th\|^2 &= \|h\|^2 - \|Ah\|^2 - \|YD_Ah\|^2 \\ &= \|D_Ah\|^2 - \|YD_Ah\|^2 = \|D_YD_Ah\|^2 \geqslant 0 \quad \text{за свако } h \in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

Дакле, T је контракција и из претходног имамо да је $\|D_Th\|^2 = \|h\|^2 - \|Th\|^2 = \|D_YD_Ah\|^2$, тј. $\|D_Th\| = \|D_YD_Ah\|$ за свако $h \in \mathcal{H}$, па на основу Леме 1.4 постоји W које задовољава (2.3) које је изометрија простора $\mathcal{D}_T$ и $\mathcal{D}_Y$ и које је очигледно на, па је унитаран. Обрнуто, ако је T контракција, за свако $h \in \mathcal{H}$ је $\|Th\|^2 = \|Ah\|^2 + \|Ch\|^2 \leqslant \|h\|^2$, па су и оператори A и C такође контракције. Имамо:

$$\|Ch\|^2 \leqslant \|h\|^2 - \|Ah\|^2 = \|D_Ah\|^2 \quad \text{за свако } h \in \mathcal{H}.$$

На основу Леме 1.4 постоји контракција $Y : \mathcal{R}(D_A) \to \mathcal{H}_2$ таква да важи (2.2). На основу Става 1.4, Y се продужује до контракције на $\mathcal{D}_A$. $\square$

Следеће тврђење је директна последица Леме 2.1 и Става 1.7.

Лема 2.2. ***Нека је*** A ***строга контракција. Тада је оператор*** T ***дефинисан у*** (2.1) ***строга контракција ако и само ако је*** Y ***из*** (2.2) ***строга контракција.***

$\triangle$ Како је A строга контракција, на основу Става 1.7, оператор D_A је инвертибилан. На основу (2.3) је оператор D_T инвертибилан ако и само ако је D_Y инвертибилан, па коначан закључак следи опет из Става 1.7. $\square$

Посматрајмо сада оператор T облика

$$T = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} : \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}' \tag{2.4}$$

где су A и B оператори који дејствују на одговарајућим просторима. Примењујући Лему 2.1 на $T^* = \begin{bmatrix} A^* \\ B^* \end{bmatrix} : \mathcal{H}' \to \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}_1$ добијамо следећи резултат.

Лема 2.3. ***Оператор*** T ***дефинисан у*** (2.4) ***је контракција ако и само ако је*** A ***контракција и постоји контракција*** $X : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{D}_{A^*}$ ***таква да је***

$$B = D_{A^*} X. \tag{2.5}$$

У том случају, формула

$$W D_{T^*} \overset{\text{деф}}{=} D_{X^*} D_{A^*} \tag{2.6}$$

дефинише унитаран оператор $W : \mathcal{D}_{T^*} \to \mathcal{D}_{X^*}$***. Посебно,*** T ***је изометрија ако и само ако је*** X ***изометрија.***

Став 2.1. ***Нека је*** $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ ***контракција. Тада је оператор***

$$R_T \overset{\text{деф}}{=} \begin{bmatrix} T & D_{T^*} \\ D_T & -T^* \end{bmatrix} : \mathcal{H} \oplus \mathcal{D}_{T^*} \to \mathcal{H}' \oplus \mathcal{D}_T \tag{2.7}$$

унитаран.

$\triangle$ Адјунговањем једнакости (1.3) добијамо да је

$$T^* \mathcal{D}_{T^*} \subseteq \mathcal{D}_T, \tag{2.8}$$

па је оператор R_T добро дефинисан. Применом Леме 2.1 добијамо да су колоне оператора R_T изометрије (контракција Y је заправо јединични оператор, па је и изометрија). На основу (1.3) колоне су и међусобно ортогоналне, па је оператор R_T изометрија. Како је $R_T^* = R_{T^*}$ матрица истог облика добијамо да је и оператор R_T^* такође изометрија. На основу Става 1.3, R_T је унитаран оператор, чиме је доказ завршен. $\square$

Дефиниција 2.1. *Оператор* R_T *дефинисан у* (2.7) *назива се* ***матрицом ротације*** *оператора* T.

Став 2.2. ***Нека је*** T ***контракција облика*** (2.4) ***и нека је*** X ***њоме индукована контракција која задовољава*** (2.5)***. Тада је оператор*** $W\colon \mathcal{D}_T \to \mathcal{D}_A \oplus \mathcal{D}_X$ ***дефинисан са***

$$WD_T \overset{\text{деф}}{=} \begin{bmatrix} D_A & -A^*X \\ 0 & D_X \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

унитаран.

$\triangle$ На основу Става 2.1, као и једнакости (1.4) добијамо да је блок операторна матрица

$$T' = \begin{bmatrix} A & D_{A^*}X \\ D_A & -A^*X \\ 0 & D_X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & D_{A^*} & 0 \\ D_A & -A^* & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & X \\ 0 & D_X \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

изометрија простора $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}_1$ у простор $\mathcal{H}'\oplus\mathcal{D}_A\oplus\mathcal{D}_X$ као композиција две изометрије. Примењујући Лему 2.1 на $T' = \begin{bmatrix} A' \\ C' \end{bmatrix}$, где је $A' = \begin{bmatrix} A & D_{A^*}X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} = T$ (због једнакости (2.5)) и $C' = \begin{bmatrix} D_A & -A^*X \\ 0 & D_X \end{bmatrix}$, како је T' изометрија, следи да постоји контракција $W\colon \mathcal{D}_T \to \mathcal{D}_A \oplus \mathcal{D}_X$, тдј $C' = WD_T$. Како је операторна матрица C' горње троугаона и оператори са дијагонале имају густу слику, следи да је оператор W сурјективан, па је и унитаран, чиме је доказ завршен. $\square$

Од значаја за наредне доказе ће нам бити и следећа два тврђења дуална Леми 2.3 и претходном Ставу 2.2 чији су докази аналогни наведеним тврђењима, те су изостављени.

Лема 2.4. ***Оператор*** T ***дефинисан у*** (2.4) ***је контракција ако и само ако је*** B ***контракција и постоји контракција*** $X\colon \mathcal{H} \to \mathcal{D}_{B^*}$ ***таква да је***

$$A = D_{B^*}X. \tag{2.11}$$

У том случају, формула

$$W_*D_{T^*} \overset{\text{деф}}{=} D_{X^*}D_{B^*} \tag{2.12}$$

дефинише унитаран оператор $W_*\colon \mathcal{D}_{T^*} \to \mathcal{D}_{X^*}$***. Посебно,*** T ***је изометрија ако и само ако је*** X ***изометрија.***

Став 2.3. ***Нека је*** T ***контракција облика*** (2.4) ***и нека је*** X ***њоме индукована контракција која задовољава*** (2.11)***. Тада је оператор*** $W\colon \mathcal{D}_T \to \mathcal{D}_X \oplus \mathcal{D}_B$ ***дефинисан са***

$$WD_T \overset{\text{деф}}{=} \begin{bmatrix} D_X & 0 \\ -B^*\Gamma & D_B \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

унитаран.

2 Контрактивност доње троугаоних блок операторних матрица димензије 2×2

У овој секцији ћемо дати комплетну карактеризацију свих контракибилних доње троугаоних блок операторних матрица димензије 2×2. У овој секцији ћемо посматрати оператор T облика

$$T = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix} : \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}' \oplus \mathcal{H}_2, \tag{2.14}$$

где оператори A, C и D дејствују на одговарајућим просторима.

Лема 2.5. ***Оператор T дефинисан у (2.14) је контракција ако и само ако су оператори A и D контракције и постоји контракција $\Gamma\colon \mathcal{D}_A \to \mathcal{D}_{D^*}$ таква да је оператор C облика***

$$C = D_{D^*}\Gamma D_A. \tag{2.15}$$

$\triangle$ Претпоставимо да је операторна матрица T контракција. Нека су $h \in \mathcal{H}$ и $h_1 \in \mathcal{H}_1$ произвољни. Тада је

$$\left\| \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ 0 \end{bmatrix} \right\|^2 = \|Ah\|^2 + \|Ch\|^2 \leqslant \left\| \begin{bmatrix} h \\ 0 \end{bmatrix} \right\|^2 = \|h\|^2$$

и

$$\left\| \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ h_1 \end{bmatrix} \right\|^2 = \|Dh_1\|^2 \leqslant \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ h_1 \end{bmatrix} \right\|^2 = \|h_1\|^2,$$

одакле следи да су оператори A и D (и C) контракције. Дакле, контрактивност оператора A и D је потребан услова за контрактивност операторне матрице T, па ћемо у наставку доказа претпоставити да је тај услов испуњен. Из Леме 2.1 следи да је T контракција ако и само ако је пресликавање $Y\colon \mathcal{D}_{\begin{bmatrix} A & 0 \end{bmatrix}} \to \mathcal{H}_2$ дефинисано са

$$\begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} = Y D_{\begin{bmatrix} A & 0 \end{bmatrix}} \tag{2.16}$$

контракција. Директним рачуном добијамо

$$\begin{aligned} D_{\begin{bmatrix} A & 0 \end{bmatrix}} &= \sqrt{I - \begin{bmatrix} A & 0 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} A & 0 \end{bmatrix}} = \sqrt{\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A^* \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \end{bmatrix}} \\ &= \sqrt{\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A^*A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} = \sqrt{\begin{bmatrix} D_A^2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} D_A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{2.17}$$

где је последња матрица очигледно тражени позитиван корен матрице. Дакле оператор Y је врста облика $\begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \end{bmatrix}$ и његов домен је $\mathcal{D}_{\begin{bmatrix} A & 0 \end{bmatrix}} = \mathcal{D}_A \oplus \mathcal{H}_1$. Заменом (2.17) у (2.16) добијамо

$$\begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \tag{2.18}$$

па је $C = Y_1 D_A$ и $D = Y_2$. На основу Леме 2.3, врста $\begin{bmatrix} D & Y_1 \end{bmatrix}$ (чија контрактивност је еквивалентна контрактивности $Y = \begin{bmatrix} Y_1 & D \end{bmatrix}$) је контракција ако и само ако једнакост $Y_1 = D_{D^*}\Gamma$ дефинише контракцију $\Gamma\colon \mathcal{D}_A \to \mathcal{D}_{D^*}$. Коришћењем једнакости $C = Y_1 D_A$

добијамо коначно да је доње троугаона операторна матрица T контракција ако и само ако су оператори A и C контракције и постоји контракција $\Gamma\colon \mathcal{D}_A \to \mathcal{D}_{D^*}$ таква да је

$$C = Y_1 D_A = D_{D^*}\Gamma D_A,$$

што је требало и доказати. □

Став 2.4. ***Нека је*** T ***контракција облика*** (2.14) ***и*** Γ ***њоме индукована контракција дефинисана једнакошћу*** (2.15)***. Тада су оператори*** $W\colon \mathcal{D}_T \to \mathcal{D}_\Gamma \oplus \mathcal{D}_D$ ***и*** $W_*\colon \mathcal{D}_{T^*} \to \mathcal{D}_{A^*} \oplus \mathcal{D}_{\Gamma^*}$ ***дефинисани са***

$$WD_T \overset{\text{деф}}{=} \begin{bmatrix} D_\Gamma D_A & 0 \\ -D^*\Gamma D_A & D_D \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

и

$$W_* D_{T^*} \overset{\text{деф}}{=} \begin{bmatrix} D_{A^*} & -A\Gamma^* D_{D^*} \\ 0 & D_{\Gamma^*} D_{D^*} \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

унитарни.

△ На основу Леме 2.1 примењену на контракцију $T = \begin{bmatrix} A' \\ C' \end{bmatrix}$, где је $A' = \begin{bmatrix} A & 0 \end{bmatrix}$ и $C' = \begin{bmatrix} D_{D^*}\Gamma D_A & D \end{bmatrix}$, добијамо да постоји контракција $Y = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \end{bmatrix} : \mathcal{D}_A \oplus \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ тдј. $C' = YA'$, и притом из једнакости (2.18) следи да је $Y_1 = D_{D^*}\Gamma$ и $Y_2 = D$. Даље, на основу Леме 2.1 следи да постоји унитаран оператор $W_1\colon \mathcal{D}_T \to \mathcal{D}_Y$ такав да је

$$W_1 D_T = D_{\begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} D_A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}. \tag{2.21}$$

Како је $Y = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \end{bmatrix}$ контракција и важи $Y_1 = D_{D^*}\Gamma = D_{Y_2^*}\Gamma$, следи да је Γ контракција која задовољава једнакост (2.11), па на основу Става 2.3 следи да постоји унитаран оператор $W_2\colon \mathcal{D}_Y \to \mathcal{D}_\Gamma \oplus \mathcal{D}_D$ такав да је

$$W_2 D_{\begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} D_\Gamma & 0 \\ -D^*\Gamma & D_D \end{bmatrix}. \tag{2.22}$$

Тада је оператор $W = W_2 W_1\colon \mathcal{D}_T \to \mathcal{D}_\Gamma \oplus \mathcal{D}_D$ унитаран и важи

$$\begin{aligned} WD_T = W_2 W_1 D_T = W_2 D_{\begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} D_A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} D_\Gamma & 0 \\ -D^*\Gamma & D_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_\Gamma D_A & 0 \\ -D^*\Gamma D_A & D_D \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

па је оператор W тражени унитарни оператор који задовољава (2.19). Примењивањем претходно доказаног на оператор T^* аналогно долазимо да је оператора W_* дефинисан једнакошћу (2.20) такође унитаран, чиме је доказ завршен. □

Став 2.5. ***Оператор*** T ***дефинисан у*** (2.14) ***је контракција ако и само ако је*** A ***контракција и формула*** $C = YD_A$ ***дефинише оператор*** $Y\colon \mathcal{D}_A \to \mathcal{H}_2$ ***такав да је оператор*** $\begin{bmatrix} Y & D \end{bmatrix} : \mathcal{D}_A \oplus \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ ***контракција.***

$\triangle$ Нека је T контракција. На основу Леме 2.5 оператори A и D су контракције и постоји контракција $\Gamma\colon \mathcal{D}_A \to \mathcal{D}_{D^*}$ тдј. важи једнакост $C = D_{D^*}\Gamma D_A$. Дефинишемо оператор $Y \overset{\text{деф}}{=} D_{D^*}\Gamma\colon \mathcal{D}_A \to \mathcal{H}_2$. Сада, на основу Леме 2.4 директно следи да је врста оператор $\begin{bmatrix} Y & D \end{bmatrix} : \mathcal{D}_A \oplus \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ контракција. Обратно, ако је A контракција и $C = YD_A$, где је $Y\colon \mathcal{D}_A \to \mathcal{H}_2$ оператор тдј. $\begin{bmatrix} Y & D \end{bmatrix}$ контракција, на основу Леме 2.4 следи да је и оператор D контракција и да постоји контракција $\Gamma\colon \mathcal{D}_A \to \mathcal{D}_{D^*}$ тдј $Y = D_{D^*}\Gamma$. Дакле, важи једнакост (2.15), па је на основу Леме 2.5 доње троугаона операторна матрица T контракција, чиме је доказ завршен. $\square$

3 Контрактивност операторних блок матрица димензије 2×2

У овој секцији ћемо извести општи облик контрактибилне 2×2 матрице. Нека је T блок операторна матрица облика:

$$T = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} : \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}' \oplus \mathcal{H}_2 \tag{2.23}$$

где су A, B, C и D оператори који дејстују на одговарајућим просторима. Све претходне резултате у овом поглављу, као специјалне случајеве обухвата наредна

Теорема 2.6. ***Оператор T дефинисан у (2.23) је контракција ако и само ако је A контракција и оператори B, C и D су облика***

$$B = D_{A^*}X, \quad C = YD_A \quad \textit{и} \quad D = D_{Y^*}\Gamma D_X - YA^*X \tag{2.24}$$

где су оператори $X\colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{D}_{A^*}$, $Y\colon \mathcal{D}_A \to \mathcal{H}_2$ и $\Gamma\colon \mathcal{D}_X \to \mathcal{D}_{Y^*}$ контракције.

$\triangle$ Нека је T контракција. Посматрајући T као колону $T = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} \end{bmatrix}$, из Леме 2.1 следи да је и оператор $\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$ такође контракција. С друге стране, посматрајући T као врсту $\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} \end{bmatrix}$, из Леме 2.3 следи да је и оператор $\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix}$ такође контракција. Дакле, услови да су прва колона $\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix}$ и прва врста $\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$ контракције су очигледно потребни да операторна матрица T буде контракција, па ћемо у наставку доказа претпоставити да су они задовољени. На основу Леме 2.3, постоји контракција $X\colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{D}_{A^*}$ таква да је $B = D_{A^*}X$. На основу Леме 2.1 постоји контракција $Y\colon \mathcal{D}_A \to \mathcal{H}_2$ таква да је $C = YD_A$. Из Става 2.2 следи да је оператор $W_1\colon \mathcal{D}_{\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}} \to \mathcal{D}_A \oplus \mathcal{D}_X$ дефинисан једнакошћу

$$W_1 D_{\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} D_A & -A^*X \\ 0 & D_X \end{bmatrix} \tag{2.25}$$

унитаран. Нека је $A' = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$ и $C' = \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} YD_A & D \end{bmatrix}$. Применом Леме 2.1 на оператор $T = \begin{bmatrix} A' \\ C' \end{bmatrix}$ добијамо да је оператор $Y'\colon \mathcal{D}_{\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}} \to \mathcal{H}_2$ дефинисан једнакошћу

$$Y' D_{\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} YD_A & D \end{bmatrix} \tag{2.26}$$

контракција. Посматрајмо оператор $Y'W_1^*\colon \mathcal{D}_A \oplus \mathcal{D}_X \to \mathcal{H}_2$. Можемо га сматрати врста оператором $\begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \end{bmatrix}$, са компонентама $Y_1\colon \mathcal{D}_A \to \mathcal{H}_2$ и $Y_2 \mathcal{D}_X \to \mathcal{H}_2$. Коришћењем $Y'W_1^* = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \end{bmatrix}$, као и једнакости (2.25) и (2.26) добијамо

$$\begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_A & -A^*X \\ 0 & D_X \end{bmatrix} = Y'W_1^*W_1 D_{\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}} = Y' D_{\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} YD_A & D \end{bmatrix}. \tag{2.27}$$

Одавде следи да је $Y_1 D_A = Y D_A$, па је $Y_1 = Y$ (јер су домени оба оператора $\mathcal{D}_A$). На основу Леме 2.3 следи да је врста оператор $\begin{bmatrix} Y & Y_2 \end{bmatrix}$ контракција ако и само ако израз $Y_2 = D_{Y^*}\Gamma$ дефинише контракцију $\Gamma\colon \mathcal{D}_X \to \mathcal{D}_{Y^*}$. Убацивањем $Y_1 = Y$ и $Y_2 = D_{Y^*}\Gamma$ у једнакост (2.27) добијамо $-YA^*X + D_{Y^*}\Gamma D_X = D$, па важи и последња једнакост у (2.24), чиме је доказ завршен. □

Став 2.6. ***Нека је оператор T контракција облика* (2.23) *и X, Y и Γ њоме индуковане контракције дефинисане у* (2.24). *Тада су оператори $W\colon \mathcal{D}_T \to \mathcal{D}_Y \oplus \mathcal{D}_\Gamma$ и $W_*\colon \mathcal{D}_{T^*} \to \mathcal{D}_{X^*} \oplus \mathcal{D}_{\Gamma^*}$ дефинисани са***

$$WD_T \stackrel{\text{деф}}{=} \begin{bmatrix} D_Y D_A & -(D_Y A^* X + Y^*\Gamma D_X) \\ 0 & D_\Gamma D_X \end{bmatrix} \tag{2.28}$$

и

$$W_* D_{T^*} \stackrel{\text{деф}}{=} \begin{bmatrix} D_{X^*} D_{A^*} & -(D_{X^*} A Y^* + X\Gamma^* D_{Y^*}) \\ 0 & D_{\Gamma^*} D_{Y^*} \end{bmatrix} \tag{2.29}$$

унитарни.

△ Како је оператор $T = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \end{bmatrix}$ контракција, применом Леме 2.1, као и у прошлом доказу добијамо имамо контракцију Y' дефинисану са (2.26) и нека је оператор $W'\colon \mathcal{D}_T \to \mathcal{D}_{Y'}$ индуковани унитарни оператор. Тада важи $W' D_T = D_{Y'} D_{\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}}$. Из претходног доказа Теореме 2.6 имамо унитаран оператор W_1 дефинисан са (2.25), као и следећу везу

$$Y'W_1^* = \begin{bmatrix} Y & D_{Y^*}\Gamma \end{bmatrix}, \tag{2.30}$$

где је контракција $\Gamma\colon \mathcal{D}_X \to \mathcal{D}_{Y^*}$ добијена применом Леме 2.3 на контракцију $Y'W_1^* = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \end{bmatrix}$ (видети једнакост (2.27)). Додатно, Став 2.2 нам даје унитаран оператор $W_2\colon \mathcal{D}_{\begin{bmatrix} Y & D_{Y^*}\Gamma \end{bmatrix}} \to \mathcal{D}_Y \oplus \mathcal{D}_\Gamma$ дефинисан једнакошћу

$$W_2 D_{\begin{bmatrix} Y & D_{Y^*}\Gamma \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} D_Y & -Y^*\Gamma \\ 0 & D_\Gamma \end{bmatrix}. \tag{2.31}$$

Користећи $D_{\begin{bmatrix} Y & D_{Y^*}\Gamma \end{bmatrix}} = Y'W_1^*$ добијамо једнакост

$$D^2_{\begin{bmatrix} Y & D_{Y^*}\Gamma \end{bmatrix}} = I - W_1 (Y')^* Y' W_1^* = W_1 D^2_{Y'} W_1^*. \tag{2.32}$$

Следи да за сваки полином $p \in \mathbb{C}[X]$ важи $p(D^2_{Y'}) = W_1^* p(D^2_{\begin{bmatrix} Y & D_{Y^*}\Gamma \end{bmatrix}}) W_1$, па формирањем низа полинома који униформно тежи квадратном корену, при граничном преласку добијамо једнакост

$$D_{Y'} = W_1^* D_{\begin{bmatrix} Y & D_{Y^*}\Gamma \end{bmatrix}} W_1. \tag{2.33}$$

Ово и једнакост (2.25) нам даје

$$\begin{aligned} W'D_T = D_{Y'}D_{\begin{bmatrix}A & B\end{bmatrix}} &= W_1^*D_{\begin{bmatrix}Y & D_{Y^*}\Gamma\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}D_A & -A^*X\\ 0 & D_X\end{bmatrix} \\ &= W_1^*W_2^*\begin{bmatrix}D_Y & -Y^*\Gamma\\ 0 & D_\Gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D_A & -A^*X\\ 0 & D_X\end{bmatrix} = W_1^*W_2^*\begin{bmatrix}D_YD_A & -(D_YA^*X+Y^*\Gamma D_X)\\ 0 & D_\Gamma D_X\end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{2.34}$$

па је оператор $W = W_2W_2W'$ који је дефинисан једнакошћу (2.28) унитаран, као композиција унитарних. Примењивањем претходног на оператор T^*, добијамо да је и оператор W_* дефинисан једнакошћу (2.29) такође унитаран, чиме је доказ завршен. □

Следећи став је лака последица претходних тврђења.

Став 2.7. ***Нека је T контракција дефинисана у (2.23), X, Y и Γ њоме индуковане контракције које задовољавају (2.24) и нека су A, X и Y строге контракције. Тада је T строга контракција ако и само ако је Γ строга контракција.***

△ Из једнакости (2.28), како је W инвертибилан, следи да је D_T инвертибилан ако и само ако је операторна матрица WD_T инвертибилна. Како је она горње троугаона, њена инвертибилност је еквивалентна инвертибилности оператора са дијагонале, тј. оператора D_YD_A и $D_\Gamma D_X$. Како су оператори A, X и Y сви строге контракције, њихови дефекти D_A, D_X и D_Y су инвертибилни. Дакле D_T је инвертибилан ако и само ако је D_Γ инвертибилан, па коначан закључак следи из Става 1.7. □

Лема (2.2) нам говори да су оператори A, X и Y сви строге контракције ако и само ако су оба блок оператора $\begin{bmatrix}A & B\end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix}A^* & C^*\end{bmatrix}$ строге контракције. Дакле, ако су $\begin{bmatrix}A & B\end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix}A^* & C^*\end{bmatrix}$ строге контракције, онда је оператор T из (2.23) строга контракција ако и само ако је Γ из (2.24) строга контракција. Као последицу Теореме 2.6 имамо следећи став о факторизацији.

Став 2.8. ***Ако је оператор T дефинисан у (2.23) контракција, онда се T може факторисати:***

$$T = \begin{bmatrix}I & 0 & 0\\ 0 & Y & D_{Y^*}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A & D_A^* & 0\\ D_A & -A^* & 0\\ 0 & 0 & \Gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I & 0\\ 0 & X\\ 0 & D_X\end{bmatrix} \tag{2.35}$$

где су X, Y и Γ контракције дефинисане у (2.24) које дејствују на одговарајућим просторима.

△ Теорема 2.6 нам обезбеђује постојање свих наведених контракција и притом важе једнакости (2.24). Множењем матрица са десне стране једнакости (2.35), користећи (2.24) добијамо

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix}I & 0 & 0\\ 0 & Y & D_{Y^*}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A & D_A^* & 0\\ D_A & -A^* & 0\\ 0 & 0 & \Gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I & 0\\ 0 & X\\ 0 & D_X\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}I & 0 & 0\\ 0 & Y & D_{Y^*}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A & D_{A^*}X\\ D_A & -A^*X\\ 0 & \Gamma D_X\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}A & D_{A^*}X\\ YD_A & -YA^*X + D_{Y^*}\Gamma D_X\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix} = T, \end{aligned}$$

чиме је доказ теореме завршен. $\square$

Следећи став, који је у суштини већ доказан, је такође директна последица Теореме 2.6 и има важну улогу у многим применама.

Став 2.9. ***Нека је T блок операторна матрица облика (2.23), где су оператори A, B и C фиксирани. Тада постоји оператор D такав да је матрица T контракција ако и само ако су операторне матрице***

$$\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \quad \textit{\textbf{и}} \quad \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} \tag{2.36}$$

обе контракције. У том случају, формула (2.24) успоставља 1−1 коресподенцију између скупа свих контрактибилних операторних матрица T облика (2.23) и скупа свих контракција $\Gamma\colon \mathcal{D}_X \to \mathcal{D}_{Y^*}$.

У претходном Ставу 2.9, контракција T је јединствено одређена задатим контракцијама (2.36) ако и само ако је X или Y^* изометрија, јер је у том случају оператор D_X или D_{Y^*} нула оператор одакле је $D_{Y^*}\Gamma D_X$ такође нула оператор, па је оператор D јединствено одређен једнакошћу $D = -YA^*X$. У супротном, узимањем $\Gamma = \mathbf{0}$ добијамо претходни случај, а узимањем $\Gamma \neq \mathbf{0}$ тако да ни $D_{Y^*}\Gamma D_X$ није нула оператор добијамо другачији оператор D, а самим тим и другачију операторну матрицу T.

Глава 3

Позитивна дефинитност операторних матрица

1 Позитивно дефинитне 2×2 блок матрице

У овом поглављу ћемо дати комплетну карактеризацију свих позитивно дефинитних 2×2 операторних матрица.
Кроз цело поглавље ћемо посматрати операторну матрицу T дефинисану са:

$$T = \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

која дејствује на производу Hilbert-ових простора $\mathcal{H} \oplus \mathcal{G}$, где су A, B и C линеарни оператори који који пресликавају одговарајуће Hilbert-ове просторе. На основу 4° у Теореми 1.2 знамо да је за сваки позитиван оператор Q који дејствује на $\mathcal{H}$, $\overline{\mathcal{R}(Q)} = \overline{\mathcal{R}(\sqrt{Q})}$, тј да је затворење слике квадратног корена позитивног оператора једнако затворењу његове слике. Наредна теорема је позитивно дефинитна верзија Леме 2.5 која је дала потпуну карактеризацију свих доње троугаоних контрактибилних блок матрица.

Теорема 3.1. ***Операторна матрица*** T ***дефинисана у*** (3.1) ***је позитивна ако и само ако су*** A ***и*** C ***оба позитивни и постоји контракција*** $\Gamma\colon \overline{\mathcal{R}(C)} \to \overline{\mathcal{R}(A)}$ ***која задовољава***

$$B = \sqrt{A}\Gamma\sqrt{C}. \tag{3.2}$$

△ Претпоставимо да је T позитивна матрица. За произвољно $h \in \mathcal{H}$ и $g \in \mathcal{G}$ имамо да је:

$$\left\langle \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} h \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} Ah \\ B^*h \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} h \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = \langle Ah, h \rangle \geqslant 0,$$

$$\left\langle \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} Bg \\ Cg \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix} \right\rangle = \langle Cg, g \rangle \geqslant 0,$$

одакле следи да су A и C позитивни оператори. Даље, за произвољне $h \in \mathcal{H}$ и $g \in \mathcal{G}$ је:

$$0 \leqslant \left\langle \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ g \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} h \\ g \end{bmatrix} \right\rangle = \|\sqrt{A}h\|^2 + 2\mathfrak{Re}\langle Bg, h \rangle + \|\sqrt{C}g\|^2. \tag{3.3}$$

Тврдимо да постоји позитивна конастанта M таква да је

$$\|Bg\| \leqslant M\|\sqrt{C}g\| \quad \text{за свако } g \in \mathcal{G}. \tag{3.4}$$

Претпоставимо супротно. Онда постоји низ $\{g_n\}_{n\geqslant 1}$ у $\mathcal{G}$ такав да за свако $n \geqslant 1$ важи $n\|\sqrt{C}g_n\| \leqslant \|Bg_n\| \neq 0$. Уз одговарајућу нормализацију можемо претпоставити да је $\|Bg_n\| = 1$, за свако $n \geqslant 1$. Стављајући $g = -ng_n$ и $h = Bg_n$ у (3.3) добијамо

$$\begin{aligned}0 &\leqslant \|\sqrt{A}h\|^2 - 2n\mathfrak{Re}\langle Bg_n, h\rangle + n^2\|\sqrt{C}g_n\|^2 \\ &\leqslant \|\sqrt{A}\|^2\|Bg_n\|^2 - 2n\|Bg_n\|^2 + n^2\frac{\|Bg_n\|^2}{n^2} = \|\sqrt{A}\|^2 - 2n + 1.\end{aligned}$$

За довољно велико n последњи израз је негативан, одакле добијамо контрадикцију. Дакле, неједнакост (3.4) важи. На основу Леме 1.4 добијамо да постоји оператор $Q\colon \overline{\mathcal{R}(C)} \to \mathcal{H}$ такав да је $B = Q\sqrt{C}$. Замењујући $B = Q\sqrt{C}$ у (3.3) добијамо

$$0 \leqslant \|\sqrt{A}h\|^2 + 2\mathfrak{Re}\langle\sqrt{C}g, Q^*h\rangle + \|\sqrt{C}g\|^2 = \|\sqrt{C}g + Q^*h\|^2 + \|\sqrt{A}h\|^2 - \|Q^*h\|^2. \tag{3.5}$$

Како је $\overline{\mathcal{R}(C)} \supseteq \mathcal{R}(Q^*)$, за дато $h \in \mathcal{H}$ можемо наћи низ $\{g_n\}_{n\geqslant 1}$ у $\mathcal{G}$ такав да је $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{C}g_n = -Q^*h$, тј. да је израз $\|\sqrt{C}g_n + Q^*h\|^2$ произвољно мали. Одавде из (3.5) закључујемо да је $\|Q^*h\| \leqslant \|\sqrt{A}h\|$, за свако $h \in \mathcal{H}$. На основу Леме 1.4 добијамо да постоји контракција $\Gamma_1\colon \overline{\mathcal{R}(A)} \to \overline{\mathcal{R}C}$ таква да је $Q^* = \Gamma_1\sqrt{A}$. Узимањем $\Gamma \overset{\text{деф}}{=} \Gamma_1^*$ добијамо $B = Q\sqrt{C} = \sqrt{A}\Gamma\sqrt{C}$, тј. да важи (3.2), чиме је први смер доказа завршен.

Докажимо сада други смер. Претпоставимо да (3.2) важи. Користећи једнакост (1.4) добијамо:

$$\begin{aligned}&\langle T(h,g),(h,g)\rangle = \|\sqrt{A}h\|^2 + 2\mathfrak{Re}\langle\sqrt{A}\Gamma\sqrt{C}g, h\rangle + \|\sqrt{C}g\|^2 \\ &= \|\sqrt{A}h + \Gamma\sqrt{C}g\|^2 - \|\Gamma\sqrt{C}g\|^2 + \|\sqrt{C}g\|^2 = \|\sqrt{A}h + \Gamma\sqrt{C}g\|^2 + \|D_\Gamma\sqrt{C}g\|^2 \geqslant 0,\end{aligned} \tag{3.6}$$

па је оператор T позитиван. □

Као последицу ове теореме имамо следећи став.

Став 3.1. ***Нека је** T **позитиван оператор облика** (3.1) **и** Γ **индукована контракција дефинисана у** (3.2). **Тада су оператори** $W\colon \overline{\mathcal{R}(T)} \to \overline{\mathcal{R}(A)} \oplus \mathcal{D}_\Gamma$ **и** $W_*\colon \mathcal{D}_{\Gamma^*} \oplus \overline{\mathcal{R}(C)} \to \overline{\mathcal{R}(T)}$ **дефинисани са***

$$\Delta = \begin{bmatrix}\sqrt{A} & \Gamma\sqrt{C} \\ 0 & D_\Gamma\sqrt{C}\end{bmatrix} = W\sqrt{T} \tag{3.7}$$

и

$$\Delta_* = \begin{bmatrix}\sqrt{A}D_{\Gamma^*} & \sqrt{A}\Gamma \\ 0 & \sqrt{C}\end{bmatrix} = \sqrt{T}W_* \tag{3.8}$$

унитарни.

△ Како је, на основу Става 1.14, $\Delta = \begin{bmatrix}\sqrt{A} & 0 \\ \sqrt{C}\Gamma^* & \sqrt{C}D_\Gamma\end{bmatrix}$, директним рачуном добијамо да је $\Delta^*\Delta = T = \sqrt{T}\sqrt{T}$, па за свако $x \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{G}$ важи једнакост

$$\|\Delta x\|^2 = \langle\Delta^*\Delta x, x\rangle = \langle Tx, x\rangle = \|\sqrt{T}x\|^2,$$

па на основу Леме 1.4 постоји унитаран оператор $W\colon \overline{\mathcal{R}(\sqrt{T})} \to \overline{\mathcal{R}(\Delta)}$ тдј. $\Delta = W\sqrt{T}$. Слично, директним рачуном добијамо да је $\Delta_*\Delta_*^* = T = \sqrt{T}\sqrt{T}$, одакле следи да постоји унитаран оператор $W_1\colon \overline{\mathcal{R}(\sqrt{T})} \to \overline{\mathcal{R}(\Delta_*^*)}$ тдј. $\Delta_*^* = W_1\sqrt{T}$. Адјунговањем и стављањем $W_* \overset{\text{деф}}{=} W_1^*$ добијамо тражени унитарни оператор који задовољава (3.8). □

Приметимо да нам једначина (3.7) даје горње троугаону факторизацију оператора T у смислу да је $T = \Delta^*\Delta$, где је Δ горње троугаона блок операторна матрица. С друге стране, једначина (3.8) нам даје доње троугаону факторизацију оператора T у смислу да је $T = \Delta_1^*\Delta_1$, где је $\Delta_1 = \Delta_*^*$ доње троугаона блок операторна матрица.

Став 3.2. ***Нека је T позитиван оператор облика (3.1). Тада се T може факторисати***

$$T = \begin{bmatrix} \sqrt{A} & 0 \\ 0 & \sqrt{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \Gamma \\ \Gamma^* & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{A} & 0 \\ 0 & \sqrt{C} \end{bmatrix}. \tag{3.9}$$

△ Директним рачуном добијамо да је производ матрица са десне стране једнакости (3.9) једнак T у (3.1), где је оператор B дат једнакошћу (3.2). Како је операторна матрица T позитивна, коначан закључак следи из Теореме 3.1. □

Следећи став даје карактеризацију позитивних и инвертибилних операторних матрица.

Став 3.3. ***Оператор T дефинисан у (3.1) је позитиван и инвертибилан ако и само ако су оператори A и C позитивни и инвертибилни и важи једнакост (3.2), где је Γ строга контракција.***

△ Ако је T позитиван и инвертибилан, онда постоји $\delta \geq 0$ такво да је $T \geqslant \delta I$. За произвољно $h \in \mathcal{H}$ и $g \in \mathcal{G}$ добијамо:

$$\left\langle \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} h \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} Ah \\ B^*h \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} h \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = \langle Ah, h\rangle \geqslant \delta\langle h, h\rangle,$$

$$\left\langle \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} Bg \\ Cg \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix} \right\rangle = \langle Cg, g\rangle \geqslant \delta\langle g, g\rangle,$$

па су и оператори A и C позитивни и инвертибилни. Дакле, у наставку можемо без умањења општости претпоставити да су оператори A и C позитивни и инвертибилни. Једнакост (3.7) показује да је $\sqrt{T}$ инвертибилан ако и само ако је D_Γ инвертибилан, или еквивалентно, ако и само ако је Γ строга контракција (Став 1.7). Дакле $T = \sqrt{T}\sqrt{T}$ је инвертибилан ако и само је Γ строга контракција, чиме је доказ завршен. □

2 Levinson-ови системи операторних једначина димензије 2

За операторну матрицу $\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \in \mathfrak{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{G})$ посматрајмо следећи систем операторних једначина:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -F \\ G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q \\ E \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

где су оператори $F, Q \in \mathfrak{B}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$, и $G, E \in \mathfrak{B}(\mathcal{G})$.

Лема 3.2. ***Нека је оператор A инвертибилан и нека су оператори G и Q познати. Тада постоје јединствени оператори F и E који су решења система (3.10):***

$$F = A^{-1}BG - A^{-1}Q \tag{3.11}$$
$$E = CG - B^*A^{-1}BG + B^*A^{-1}Q. \tag{3.12}$$

△ Како је $-AF + BG = Q$, следи да је $AF = BG - Q$, па, како је оператор A инвертибилан, оператор F добијамо множењем последње једнакости са A^{-1}. Заменом добијеног F у једначину $-B^*F + CG = E$ добијамо тражени израз за оператор E. Јединственост решења следи из инвертибилности оператора A. □

Levinson-ов систем за операторну матрицу T из (3.1) је:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -F \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ E \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

где је $E \in \mathcal{B}(\mathcal{G})$ и $G \in \mathcal{B}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$. Ако је оператор A инвертибилан, из претходне Леме 3.2, добијамо јединствена решења (3.13):

$$F = A^{-1}B \quad \text{и} \quad E = C - B^*A^{-1}B. \tag{3.14}$$

Став 3.4. ***Нека су оператори $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ и $C \in \mathfrak{B}(\mathcal{G})$ позитивни и инвертибилни. Тада је оператор T дефинисан у (3.1) позитиван (позитиван и инвертибилан) (позитиван и сингуларан) ако и само ако је решење E Levinson-овог система (3.13) позитивно (позитивно и инвертибилно) (позитивно и сингуларно).***

△ За произвољно $g \in \mathcal{G}$, једначина (3.13) даје $T\begin{bmatrix} -Fg \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ Eg \end{bmatrix}$. Скалараним множењем ове једнакости са $\begin{bmatrix} -Fg \\ g \end{bmatrix}$ добијамо:

$$\left\langle T\begin{bmatrix} -Fg \\ g \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -Fg \\ g \end{bmatrix} \right\rangle = \langle Eg, g \rangle. \tag{3.15}$$

Одавде директно следи да позитивност (и инвертибилност) операторне матрице T имплицира позитивност (и инвертибилност) оператора E. С друге стране, претпоставимо да је оператор E позитиван. За произвољно $g \in \mathcal{G}$, из једнакости (3.14) следи $Eg = Cg - B^*A^{-1}Bg$, одакле скаларним множењем последње једнакости са g добијамо:

$$\langle Eg, g \rangle = \langle Cg, g \rangle - \left\langle B^*A^{-1}Bg, g \right\rangle = \|\sqrt{C}g\|^2 - \|\sqrt{A}^{-1}Bg\|^2. \tag{3.16}$$

Из позитивности оператора E и (3.16) следи да је $\|\sqrt{A}^{-1}Bg\| \leqslant \|\sqrt{C}g\|$, за свако $g \in \mathcal{G}$, па на основу Леме 1.4 постоји контракција $\Gamma\colon \overline{\mathcal{R}(C)} \to \overline{\mathcal{R}(A)}$ таква да је $\Gamma\sqrt{C} = \sqrt{A}^{-1}B$, или еквивалентно, $B = \sqrt{A}\Gamma\sqrt{C}$. Позитивност операторне матрице T сада следи диретно из Теореме 3.1. Заменом $B = \sqrt{A}\Gamma\sqrt{C}$ у (3.14) добијамо:

$$E = C - \sqrt{C}\Gamma^*\sqrt{A}A^{-1}\sqrt{A}\Gamma\sqrt{C} = C - \sqrt{C}\Gamma^*\Gamma\sqrt{C} = \sqrt{C}(I - \Gamma^*\Gamma)\sqrt{C} = \sqrt{C}D_\Gamma^2\sqrt{C}. \tag{3.17}$$

Како је оператор C инвертибилан, једнакост (3.17) нам говори да је оператор E позитиван и инвертибилан ако и само ако је оператор D_Γ^2 (а самим тим и D_Γ) позитиван и инвертибилан, што на основу Става 1.7 важи ако и само ако је Γ строга контракција. На основу Става 3.3 следи да је операторна матрица T позитивна и инвертибилна ако и само ако је оператор E позитиван и инвертибилан. Нека је сада оператор E позитван и сингуларан. На основу претходно доказаног знамо да је опеаторна матрица T позитивна. Убацивањем произвољног не-нула вектора g из језгра оператора E у једнакост (3.13) директно добијамо сингуларност од T, јер $\begin{bmatrix} -Fg \\ g \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ припада језгру од T. С друге стране, ако је операторна матрица T позитивна и сингуларна, онда је на основу вец доказаног и оператор E позитиван и постоји не-нула вектор $\begin{bmatrix} h \\ g \end{bmatrix} \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{G}$ такав да је $T\begin{bmatrix} -h \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Убацивањем у (3.1) и решавањем добијамо $h = A^{-1}Bg$. Следи да је $g \neq 0$ и на основу (3.14) добијамо да је $h = Fg$. Дакле, из (3.13) имамо: $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = T\begin{bmatrix} -Fg \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ Eg \end{bmatrix}$, па не-нула вектор g припада језгру оператора E. Дакле, оператор E је сингуларан, чиме је доказ завршен. $\square$

Претходни Став 3.4 нам даје оперативнији критеријум провере позитивности оператора T дефинисаног у (3.1) у односу на Теорему 3.1 када су оператори A и C строго позитиван и инвертибиланни. Теорема 3.1 тврди да је оператор T позитиван ако и само ако је оператор $\Gamma = \sqrt{A}^{-1}B\sqrt{C}^{-1}$ контракција, па је за коришћење овог критеријума потребно израчунати инверзе квадратних коренова оба оператора A и C. Са друге стране, Став 3.4 нам даје позитивност оператора T ако и само ако је позитиван оператор $E = C - B^*A^{-1}B$, за чије нам је израчунавање довољан инверз оператора A. Сличан закључак важи и за позитивност и инвертибилност, када Став 3.4 упоредимо са Ставом 3.3. Наредни став је лака последица Теореме 3.1, Става 3.4 и (3.14).

СТАВ 3.5. ***Нека је T позитивна операторна матрица облика (3.1), где су оператори A и C оба позитивни и инвертибилни и Γ јединствена контракција дефинисана са $B = \sqrt{A}\Gamma\sqrt{C}$. Тада је јединствено решење Levinson-овог система (3.13):***

$$F = \sqrt{A}^{-1}\Gamma\sqrt{C} \quad \text{и} \quad E = \sqrt{C}D_\Gamma^2\sqrt{C}. \tag{3.18}$$

Додатно, операторна матрица T је позитивна и инвертибилна (позитвна и сингуларна) ако и само ако је Γ строга контракција (D_Γ је сингуларан).

△ Да једнакости (3.18) дају јединствено решење Levinson-овог система (3.13), видели смо у доказу Става 3.4. Такође је инвертибилност, као и сингуларност операторне матрице T еквивалентно инвертибилности, тј. сингуларности оператора E, редом.

Како је оператор C, а самим тим и $\sqrt{C}$ инвертибилан, из једнакости $E = \sqrt{C}D_\Gamma^2\sqrt{C}$ следи да је E инвертибилан ако и само ако је D_Γ^2, па и D_Γ, инвертибилан. На основу Става 1.7, следи да је операторна матрица T инвертибилна ако и само ако је Γ строга контракција. Такође операторна матрица T је сингуларна ако и само ако је оператор E сингуларан. Докажимо да је E сингуларан ако и само ако је D_Γ сингуларан. Ако је $g \in \mathcal{G} \setminus \{0\}$ такав да је $Eg = 0$, због инвертибилности оператора $\sqrt{C}$ следи да је $D_\Gamma^2\sqrt{C}g = 0$, па и $D_\Gamma\sqrt{C}g = 0$, где је $\sqrt{C}g \in \overline{\mathcal{R}(C)} \setminus \{0\}$, одакле следи сингуларност оператора D_Γ. Обрнуто, нека је $f \in \overline{\mathcal{R}(C)} \setminus \{0\}$ такав да је $D_\Gamma f = 0$. Тада је $f = \sqrt{C}g$ за неко $g \in \mathcal{G} \setminus \{0\}$ и важи $Eg = \sqrt{C}D_\Gamma^2\sqrt{C}g = \sqrt{C}D_\Gamma^2 f = 0$, па је оператор E сингуларан, чиме је доказ завршен. □

За крај ове секције ћемо навести и дуал Levinson-овог система (3.13). Нека је T оператор дефинисан у (3.1). Посматрајмо следећи систем операторних једначина:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_* \\ -F_* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_* \\ Q_* \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

где оператори F_*, G_*, E_* и Q_* дејствују на одговарајућим просторима. Следећа лема је дуал Леме 3.2, стога је због сличности доказа исти и изостављен.

Лема 3.3. ***Нека је оператор C инвертибилан и нека су оператори G_* и Q_* познати. Тада постоје јединствени оператори F_* и E_* који су решења система (3.19):***

$$F_* = C^{-1}B^*G_* - C^{-1}Q_* \tag{3.20}$$
$$E_* = AG_* - BC^{-1}B^*G_* + BC^{-1}Q_*. \tag{3.21}$$

Дуал Levinson-овог система (3.13) је:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ -F_* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_* \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

где је $E_* \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ и $F_* \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$. Ако је оператор C инвертибилан, онда нам из претходне Леме 3.3 директно следи да је:

$$F_* = C^{-1}B^* \quad \text{и} \quad E_* = A - BC^{-1}B^* \tag{3.23}$$

јединствено решење система (3.22). Дуал Става 3.4 је следеће тврђење.

Став 3.6. ***Нека су оператори $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ и $C \in \mathfrak{B}(\mathcal{G})$ позитивни и инвертибилни. Тада је оператор T дефинисан у (3.1) позитиван (позитиван и инвертибилан) (позитиван и сингуларан) ако и само ако је решење E_* Levinson-овог система (3.22) позитивно (позитивно и инвертибилно) (позитивно и сингуларно).***

△ Посматрајмо операторну матрицу

$$\hat{I} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{\mathcal{H}\to\mathcal{G}} & I_\mathcal{G} \\ I_\mathcal{H} & \mathbf{0}_{\mathcal{G}\to\mathcal{H}} \end{bmatrix} : \mathcal{H} \oplus \mathcal{G} \to \mathcal{G} \oplus \mathcal{H}, \tag{3.24}$$

тј. оператор $\hat{I}$ такав да је $\hat{I}(h, g) = (g, h)$, за свако $h \in \mathcal{H}$ и $g \in \mathcal{G}$. Множењем слева система (3.22) са $\hat{I}$ добијамо Levinson-ов систем (3.13) где су оператори A, B и C

замењени операторима C, B^* и A, редом, док улоге оператора E и F имају оператори E_* и F_*, редом. Сада коначан закључак следи из Става 3.4 и чињенице да је операторна матрица T позитивна (позитивна и инвертибилна) (позитивна и сингуларна) ако и само ако је операторна матрица $\hat{I}T\hat{I}^* = \begin{bmatrix} C & B^* \\ B & A \end{bmatrix}$ позитивна (позитивна и инвертибилна) (позитивна и сингуларна). $\square$

Слично Ставу 3.4 и његов дуални Став 3.6 такође даје оперативнији критеријум провере позитивности (и прецизније инвертибилности и сингуларности). Главна разлика је сто је за рачунање оператора $E = C - B^*A^{-1}B$ потребно инвертовање оператора A, док је за рачунање оператора $E_* = A - BC^{-1}B^*$ потребно инвертовање оператора C. У зависности да ли је лаксе инвертовати оператор A или C (што у коначно димензионим случајевима може зависити од димензија оператора, поготову ако је један од њих димензије 1) сада можемо бирати који ћемо од наведена 2 става применити.

За крај поглавља наводимо и став који је дуалан Ставу 3.5. Његов доказ је једноставна последица Теореме 3.1 и (3.23), па је стога и изостављен.

Став 3.7. ***Нека је T позитивна операторна матрица облика (3.1), где су оператори A и C оба позитивни и инвертибилни и Γ јединствена контракција дефинисана са $B = \sqrt{A}\Gamma\sqrt{C}$. Тада је јединствено решење Levinson-овог система (3.22):***

$$F_* = \sqrt{C}^{-1}\Gamma^*\sqrt{A} \quad \text{\textit{и}} \quad E_* = \sqrt{A}D_{\Gamma^*}^2\sqrt{A}. \tag{3.25}$$

Додатно, операторна матрица T је позитивна и инвертибилна (позитивна и сингуларна) ако и само ако је Γ строга контракција (D_{Γ^*} је сингуларан).

Глава 4

Уопштење неједнакости Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky-ог

1 Поларна декомпозиција ограниченог оператора

Дефиниција **4.1.** *Оператор $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ назива се* ***парцијалном изометријом*** *ако постоји затворен потпростор $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$ такав да је $\|Vf\| = \|f\|$ за свако $f \in \mathcal{M}$, а $\|Vf\| = 0$ за $f \in \mathcal{M}^{\perp}$. Притом се сам $\mathcal{M}$ назива* ***почетним*** *или иницијалним, а $\mathcal{R}(V) = V(\mathcal{M})$* ***крајњим простором*** *парцијалне изометрије V.*

Доказ следећег важног тврђења се може наћи у [АДЈ, Теорема 12.22].

Теорема **4.1.** **[поларна декомпозиција ограниченог оператора]** ***За сваки*** $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ***постоји позитиван оператор*** D ***и парцијална изометрија*** V ***такви да је*** $A = VD$. ***Штавише, оваква репрезентација је јединствена уколико су*** D ***и*** V ***спрегнути релацијом*** $\mathcal{N}(V) = \mathcal{N}(D)$.

Уобичајена ознака за оператор $\sqrt{A^*A}$ је $|A|$, па је $A = V\,|A|$ (видимо из доказа претходне теореме), што се назива **поларном декомпозицијом** за A. При томе је V парцијална изометрија из $\overline{\mathcal{R}(A^*)} = \overline{\mathcal{R}(|A|)}$ у $\overline{\mathcal{R}(A)}$ и $V = 0$ на $\mathcal{N}(|A|) = \mathcal{N}(A)$.

Став **4.1.** ***Нека је*** $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ***и*** $A = V\,|A|$ ***његова поларна декомпозиција. Тада је за свако*** $\theta \in [0,1]$***:***

$$V\,|A|^{\theta} = |A^*|^{\theta}\,V. \tag{4.1}$$

$\triangle$ Индукцијом се лако покаже да је за свако $n \in \mathbb{N}$ задовољено $A(A^*A)^n = (AA^*)^n A$. Одавде следи да за сваки полином $p \in \mathbb{C}[X]$ важи да је $Ap(A^*A) = p(AA^*)A$. Узимајући низ полинома који униформно тежи ка функцији $x \mapsto x^{\frac{\theta}{2}}$ на $[-\|A\|^2, \|A\|^2]$, преласком на униформни лимес добијамо једнакост $A\,|A|^{\theta} = |A^*|^{\theta}\,A$, па је

$$V\,|A|\,|A|^{\theta} = V\,|A|^{\theta}\,|A| = |A^*|^{\theta}\,V\,|A|\,. \tag{4.2}$$

Нека је $f \in \mathcal{R}(|A|)$ произвољно. Тада постоји $g \in \mathcal{H}$ такво да је $f = |A|\,g$. Из (4.2) следи да је $V\,|A|^{\theta} f = V\,|A|^{1+\theta} g = |A^*|^{\theta}\,V\,|A|\,g = |A^*|^{\theta}\,Vf$, па је на основу Става 1.4, $V\,|A|^{\theta} = |A^*|^{\theta}\,V$ на $\overline{\mathcal{R}(|A|)}$. Како је $V = 0$ на $\mathcal{N}(|A|) = \mathcal{N}(|A|^{\theta})$, за $f \in \mathcal{N}(|A|)$ важи $V\,|A|^{\theta} f = |A^*|^{\theta}\,Vf = 0$, па због $\mathcal{H} = \overline{\mathcal{R}(|A|)} \oplus \mathcal{N}(|A|)$ једнакост (4.1) важи на целом $\mathcal{H}$, чиме је доказ завршен. $\square$

2 Јако квадратно сумабилни низови оператора

Дефиниција **4.2.** *За низ оператора $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ кажемо да је* ***јако квадратно сумабилан*** *(скраћено ј.к.с.) ако за свако $f \in \mathcal{H}$ важи:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|A_n f\|^2 < \infty. \tag{4.3}$$

За ј.к.с. низ оператора $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ важи да је:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle A_n^* A_n f, f\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \|A_n f\|^2 < \infty \quad \text{за свако } f \in \mathcal{H}, \tag{4.4}$$

одакле ограниченост оператора $\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* A_n$ следи из Теореме Banach-Steinhaus-а, као и слаба конвергенција низа парцијалних сума $\sum_{n=1}^{N} A_n^* A_n$ ка $\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* A_n$ када $N \to \infty$. Како је у питању монотоно растући низ позитивних оператора по нормама униформно ограничених са $\|\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* A_n\|$, на основу Теореме 1.9 следи и јака конвергенција датог реда, што оправдава сам назив оваквих низова оператора.

Теорема **4.2.** ***Нека су дати низови $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ такви да је $\sum_{n=1}^{\infty} \|A_n^* f\|^2 + \|B_n f\|^2 < \infty$, за свако $f \in \mathcal{H}$ (тј. такви да су низови оператора $\{A_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ јако квадратно сумабилни). Тада за свако $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ред:***

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n X B_n \tag{4.5}$$

слабо конвергира у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ и за његову норму важи:

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} A_n X B_n\right\| \leqslant \sqrt{\left\|\sum_{n=1}^{\infty} A_n A_n^*\right\|}\sqrt{\left\|\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* B_n\right\|}\|X\|. \tag{4.6}$$

△ Због квадратне сумабилности низова $\{A_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ изрази $\sum_{n=1}^{\infty} A_n A_n^*$ и $\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* B_n$ дефинишу ограничене линеарне операторе на $\mathcal{H}$. За произвољне $f, g \in \mathcal{H}$ имамо:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} |\langle A_n X B_n f, g\rangle| &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|X\|\|B_n f\|\|A_n^* g\| \leqslant \|X\|\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \|B_n f\|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \|A_n^* g\|^2} \\ &= \|X\|\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \langle B_n^* B_n f, f\rangle}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \langle A_n A_n^* g, g\rangle} \leqslant \sqrt{\left\|\sum_{n=1}^{\infty} A_n A_n^*\right\|}\sqrt{\left\|\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* B_n\right\|}\|X\|\|f\|\|g\|,\end{aligned} \tag{4.7}$$

па ред $\langle \sum_{n=1}^{\infty} A_n X B_n f, g\rangle$ конвергира за свако $f, g \in \mathcal{H}$. Дакле низ парцијалних сума $\sum_{n=1}^{N} A_n X B_n$ слабо конвергира ка оператору $\sum_{n=1}^{\infty} A_n X B_n$, кад $N \to \infty$, па његова ограниченост, као и тражена процена норме следе из (4.7):

$$\left|\left\langle \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n X B_n\right) f, g\right\rangle\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\langle A_n X B_n f, g\rangle| \leqslant \sqrt{\left\|\sum_{n=1}^{\infty} A_n A_n^*\right\|}\sqrt{\left\|\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* B_n\right\|}\|X\|\|f\|\|g\|$$

узимањем супремума по $\|f\| = \|g\| = 1$. $\square$

Како је на основу Теореме 1.3 адјунговање слабо непрекидна операција на $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, из претходне Теореме 4.2, добијамо следећу корисну последицу:

Последица 4.3. ***Нека су дати низови*** $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ***и*** $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ***у*** $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ***такви да је*** $\sum_{n=1}^{\infty}\|A_n^* f\|^2 + \|B_n f\|^2 < \infty$ ***за свако*** $f \in \mathcal{H}$***. Тада редови*** $\sum_{n=1}^{\infty} A_n X B_n$ ***и*** $\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* X^* A_n^*$ ***слабо конвергирају и важи:***

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n X B_n\right)^* = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* X^* A_n^*. \tag{4.8}$$

3 Уопштење неједнакости Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky-ог

Ову секцију започињемо помоћном лемом, директном последицом Става 4.1.

Лема 4.4. ***Нека је*** $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ***и*** $\theta \in [0,1]$***. Ако је*** $X = V\,|X|$ ***поларна декомпозиција оператора*** X***, онда важи једнакост:***

$$X = |X^*|^{1-\theta}\, V\, |X|^{\theta}. \tag{4.9}$$

$\triangle$ Из Става 4.1, директним рачуном добијамо $X = V\,|X| = V\,|X|^{1-\theta}\,|X|^{\theta} = |X^*|^{1-\theta}\,V\,|X|^{\theta}$, тј. тражену једнакост (4.9). $\square$

Користећи претходну Лему 4.5, добијамо следећу корисну неједнакост.

Лема 4.5. ***Нека је*** $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ***и*** $f, g \in \mathcal{H}$***. Тада важи:***

$$|\langle Xf, g\rangle| \leqslant \sqrt{\langle |X|^{2\theta} f, f\rangle \langle |X^*|^{2-2\theta} g, g\rangle}. \tag{4.10}$$

$\triangle$ Корисћењем неједнакости Cauchy-Schwarz-Bunjakowsky-ог и једнакости (4.9) добијамо:

$$\begin{aligned}|\langle Xf, g\rangle|^2 &= |\langle V\,|X|\,f, g\rangle|^2 = \left|\langle |X^*|^{1-\theta}\,V\,|X|^{\theta} f, g\rangle\right|^2 = \left|\langle V\,|X|^{\theta} f, |X^*|^{1-\theta} g\rangle\right|^2 \\ &\leqslant \langle V\,|X|^{\theta} f, V\,|X|^{\theta} f\rangle \langle |X^*|^{1-\theta} g, |X^*|^{1-\theta} g\rangle = \langle |X|^{2\theta} f, f\rangle \langle |X^*|^{2-2\theta} g, g\rangle,\end{aligned}$$

па тражену неједнакост (4.10) добијамо кореновањем претходног израза. $\square$

За доказивање главне неједнакости у наставку ће нам до значаја бити следеће тврђење.

Став 4.2. ***Нека је*** $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ***и*** $\theta \in [0,1]$***. Тада је операторна матрица:***

$$\begin{bmatrix} |X|^{2\theta} & X^* \\ X & |X^*|^{2-2\theta} \end{bmatrix} : \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \to \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \tag{4.11}$$

позитивно дефинитна.

△ Нека су $f, g \in \mathcal{H}$ произвољни. Тада је:

$$\left\langle \begin{bmatrix} |X|^{2\theta} & X^* \\ X & |X^*|^{2-2\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \right\rangle = \langle |X|^{2\theta} f, f\rangle + \langle X^* g, f\rangle + \langle Xf, g\rangle + \langle |X|^{2-2\theta} g, g\rangle$$
$$\geqslant 2\sqrt{\langle |X|^{2\theta} f, f\rangle \langle |X|^{2-2\theta} g, g\rangle} + 2\mathfrak{Re}\langle Xf, g\rangle \geqslant 2\,|\langle Xf, g\rangle| + 2\mathfrak{Re}\langle Xf, g\rangle \geqslant 0,$$

где смо користили неједнакост између аритметичке и геометријске средине, као и неједнакост (4.10). □

На основу Става 1.5 знамо да је за сваки позитиван оператор C и произвољан ограничен оператор D, оператор D^*CD такође позитиван. Као директну последицу овога имамо следећу лему.

Лема 4.6. ***За произвољне операторе*** $A, B, X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ***и произвољно*** $\theta \in [0,1]$ ***је операторна матрица:***

$$\begin{bmatrix} A\,|X^*|^{2-2\theta} A^* & AXB \\ B^* X^* A^* & B^*\,|X|^{2\theta} B \end{bmatrix} : \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \to \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \tag{4.12}$$

позитивно дефинитна.

△ Директним рачуном добијамо

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & B \\ A^* & 0 \end{bmatrix}\right)^* \begin{bmatrix} |X|^{2\theta} & X^* \\ X & |X^*|^{2-2\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & B \\ A^* & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & A \\ B^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^* A^* & |X|^{2\theta} B \\ |X^*|^{2-2\theta} A^* & XB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\,|X^*|^{2-2\theta} A^* & AXB \\ B^* X^* A^* & B^*\,|X|^{2\theta} B \end{bmatrix},$$

одакле на основу Леме 4.2 следи позитивна дефинитност тражене матрице (4.12). □

Теорема 4.7. ***Нека су*** $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ***и*** $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ***низови оператора у*** $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ***такви да је*** $\sum_{n=1}^{\infty} \|A_n^* f\|^2 + \|B_n f\|^2 < \infty$ ***за свако*** $f \in \mathcal{H}$***. Тада је за свако*** $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ***и свако*** $\theta \in [0,1]$ ***операторна матрица:***

$$\begin{bmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} A_n\,|X^*|^{2-2\theta} A_n^* & \sum_{n=1}^{\infty} A_n X B_n \\ \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* X^* A_n^* & \sum_{n=1}^{\infty} B_n^*\,|X|^{2\theta} B_n \end{bmatrix} : \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \to \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \tag{4.13}$$

позитивно дефинитна.

△ Редови који се појављују као матрични елементи у 2×2 блок операторној матрици у (4.13) представљају ограничене линеарне операторе на основу Теореме 4.2. Конкретно, за њене вандијагоналне елементе ово је експлицитно исказано у Теоремом 4.2 и њеном Последицом 4.3, за дијагонални елемент $\sum_{n=1}^{\infty} A_n\,|X^*|^{2-2\theta} A_n^*$ ограниченост следи из Теореме 4.2, применом на $|X^*|^{2-2\theta}$ уместо X у случају $B_n := A_n^*$, за свако $n \in \mathbb{N}$, док се ограниченост суме $\sum_{n=1}^{\infty} B_n^*\,|X|^{2\theta} B_n$ доказује се аналогно. Како је

$$\begin{bmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} A_n\,|X^*|^{2-2\theta} A_n^* & \sum_{n=1}^{\infty} A_n X B_n \\ \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* X^* A_n^* & \sum_{n=1}^{\infty} B_n^*\,|X|^{2\theta} B_n \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} A_n\,|X^*|^{2-2\theta} A_n^* & A_n X B_n \\ B_n^* X^* A_n^* & B_n^*\,|X|^{2\theta} B_n \end{bmatrix} \geqslant 0$$

на основу Леме 4.6, подупрте чињеницом да је сума позитивних оператора (па и операторних матрица) такође позитиван оператор. □

Користећи претходну Теорему 4.7 и Теорему 3.1 долазимо до главног тврђења овог поглавља.

Теорема 4.8. [Уопштење неједнакости Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky-ог] ***Нека су*** $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ***и*** $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ***низови оператора у*** $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ***такви да је*** $\sum_{n=1}^{\infty}\|A_n^* f\|^2 + \|B_n f\|^2 < \infty$ ***за свако*** $f \in \mathcal{H}$***. Тада за свако*** $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ***и свако*** $\theta \in [0,1]$ ***важи:***

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} A_n X B_n\right|^2 \leqslant \left\|\sum_{n=1}^{\infty} A_n |X^*|^{2-2\theta} A_n^*\right\| \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* |X|^{2\theta} B_n. \tag{4.14}$$

Специјално, узимајући $\theta = 1$ ***добијамо***

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} A_n X B_n\right|^2 \leqslant \left\|\sum_{n=1}^{\infty} A_n A_n^*\right\| \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* X^* X B_n, \tag{4.15}$$

при чему ред $\sum_{n=1}^{\infty} A_n X B_n$***, штавише, јако конвергира.***

△ На основу Теореме 4.7 је операторна матрица (4.13) позитивно дефинитна. Како су елементи главне дијагонале позитивни, а елементи споредне дијагонале један другом адјунговани, матрица (4.13) је облика (3.1), па како је и позитивно дефинитна, на основу Теореме 3.1 следи да важи једнакост (3.2), то јест да постоји контракција $\Gamma\colon \overline{\mathcal{R}(\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* |X|^{2\theta} B_n)} \to \overline{\mathcal{R}(\sum_{n=1}^{\infty} A_n |X^*|^{2-2\theta} A_n^*)}$, таква да је:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n X B_n = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} A_n |X^*|^{2-2\theta} A_n^*}\,\Gamma\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* |X|^{2\theta} B_n}. \tag{4.16}$$

Користећи неједнакост (1.1), $\|\Gamma\| \leqslant 1$ и (1.2), добијамо:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=1}^{\infty} A_n X B_n\right|^2 &= \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* |X|^{2\theta} B_n}\,\Gamma^* \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n |X^*|^{2-2\theta} A_n^*\right)\Gamma\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* |X|^{2\theta} B_n} \\
&= \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* |X|^{2\theta} B_n}\left(\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} A_n |X^*|^{2-2\theta} A_n^*}\,\Gamma\right)^* \left(\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} A_n |X^*|^{2-2\theta} A_n^*}\,\Gamma\right)\cdot \\
&\quad\cdot\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* |X|^{2\theta} B_n} \leqslant \left\|\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} A_n |X^*|^{2-2\theta} A_n^*}\,\Gamma\right\|^2 \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* |X|^{2\theta} B_n \\
&\leqslant \left\|\sum_{n=1}^{\infty} A_n |X^*|^{2-2\theta} A_n^*\right\| \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* |X|^{2\theta} B_n.
\end{aligned}$$

За утврђивање јаке конвергенције реда $\sum_{n=1}^{\infty} A_n X B_n$ довољно је применити (4.15) на остатак реда $\sum_{n=N}^{\infty} A_n X B_n$ и за свако $f \in \mathcal{H}$ добити

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{n=N}^{\infty} A_n X B_n f\right\|^2 &= \left\langle\left|\sum_{n=N}^{\infty} A_n X B_n\right|^2 f, f\right\rangle \\
&\leqslant \left\|\sum_{n=N}^{\infty} A_n A_n^*\right\| \left\langle \sum_{n=N}^{\infty} B_n^* X^* X B_n f, f\right\rangle \leqslant \left\|\sum_{n=1}^{\infty} A_n A_n^*\right\| \|X\|^2 \sum_{n=N}^{\infty} \|B_n f\|^2 \to 0,
\end{aligned}$$

кад $N \to \infty$, чиме је доказ завршен. □

Литература

[АДЈ] М. Арсеновић, М. Достанић, Д. Јоцић, Теорија мере, Функционална анализа и Теорија оператора, Завод за уџбенике, Београд, 2012.

[FF] C. Foias, A. E. Frazho, The Commutant Lifting Approach to Interpolation Problems, Springer Basel AG, 1990

[J05] D. Jocić, *Cauchy–Schwarz norm inequalities for weak*-integrals of operator valued functions* J. Funct. Anal. **218** (2005), 318–346.

[J99] D.R. Jocić, *The Cauchy-Schwarz norm inequality for elementary operators in Schatten ideals*, J. London Math. Soc. (2) **60** (1999), 925–934.

[W] J. Weidmann, Linear Operators in Hilbert Spaces, Springer-Verlag, New York, 1980.