

Универзитет у Београду
Математички факултет

Специфичност временских серија у економији

Мастер рад

Студент:
Милош Момировић (1006/2015)

Ментор:
Јелена Јоцковић

Београд, септембар 2018.

Садржај

1	УВОД	4
2	АНАЛИЗА ВРЕМЕНСКИХ СЕРИЈА	5
2.1	Случајни процеси	6
2.2	Стационарност и ергодичност.....	7
2.3	Аутоковаријациона и аутокорељациона функција	9
2.4	Бели шум	10
2.5	Случајно лутање	11
2.6	Линеарни процеси	12
2.7	Ауторегресиони модел - AR и Модели покретних просека - MA	14
2.7.1	Ауторегресиони модел реда p - $AR(p)$	14
2.7.2	Модели покретних просека реда q - $MA(q)$	15
2.7.3	Ауторегресиони модел покретних просека – $ARMA$	16
3	ТРЕНД-СТАЦИОНАРНА И ДИФЕРЕНЦНО-СТАЦИОНАРНА КЛАСА МОДЕЛА	18
4	$ARIMA$ модели.....	21
4.1	$ARIMA(0,1,1)$	23
5	СЕЗОНСКЕ ВРЕМЕНСКЕ СЕРИЈЕ	25
5.1	Сезонски $ARIMA$ модели	26
5.2	Сезонски $AR(1)$ модели	28
5.3	Сезонски $MA(1)$ модели	28
5.4	„Ваздухопловни“ модел	29
6	ТЕСТОВИ ЈЕДИНИЧНОГ КОРЕНА	32
7	БОКС-ЏЕНКИНСОВА СТРАТЕГИЈА.....	39
7.1	Идентификација модела.....	40
7.2	Оцењивање.....	43
7.2.1	Метод момената	43
7.2.2	Метод нелинеарних најмањих квадрата	45
7.2.3	Метод највеће веродостојности.....	47
7.3	Провера адекватности	49
8	СТРУКТУРНИ ЛОМ	52
8.1	Перонов тест јединичног корена	54
8.1.1	Прва варијанта Пероновог теста.....	54
8.1.2	Друга варијанта Пероновог теста.....	55

8.1.3	Трећа варијанта Пероновог теста	55
8.2	Зивот-Ендрјусов тест.....	56
9	Закључак	58
10	Литература.....	59

1 УВОД

Област из које потиче тема овог рада јесте економетрија, млада наука настала тридесетих година прошлог века. То је грана економске науке која повезује економску теорију, математичку економију и методе статистичке анализе, а бави се развијањем и усавршавањем метода и модела за квантитативну анализу као и развојем модела у временским серијама за економска предвиђања. Базира се на развоју статистичких метода за утврђивање економских релација, тестирање економских теорија, оцењивање и имплементацију пословних и државних политика.

Етимолошки, израз економетрија или „мерење у економији“ настало од две грчке речи: економија (грчки οίκονομία) и мерење (грчки μέτρον). Сам назив економетрија увео је у економску литературу Рагнар Фриш (Ragnar Frisch), норвешки економиста и статистичар, касније добитник прве Нобелове награде из подручја економске науке.

Анализа финансијских временских серија привукла је значајну пажњу последњих година, нарочито од 2003. године када је професорима Роберту Енгл (Robert Engle) и Клајву Гренџер (Clive Granger) додељена Нобелова награда за економске науке. Њихова изучавања допринела су анализи података о временским серијама које су фундаментално промениле начин на који економисти анализирају финансијске и макроекономске податке. Финансијске временске серије се баве процењивањем вредности актива током времена, како у теоријском смислу тако и у пракси. Њима се описују кретање цена на тржишту, извоз, годишња производња итд. Кључна својства финансијских временских серија су: постојање тренда, сезонских варијација, структурног лома и нестабилна варијанса. Због ових својстава финансијских временских серија дошло је до развоја одређених модела.

Волатилност је веома битан параметар који представља меру неодређености. Помоћу волатилности описујемо ризик промене вредности неког финансијског деривата. У математичком смислу волатилност представља стандардну девијацију. Међутим, волатилност не може да се региструје, па је потребно извршити моделирање. Кад се волатилност мења током времена онда ту њену особину називамо хетероскедастичност. Како је код класичних економетријских модела једна од основних претпоставки константна варијанса, Роберт Енгл је 1982. године увео нову класу стохастичких процеса, под називом ауторегресиони условни хетероскедастични модели (*ARCH*).

У овом раду ће на почетку бити описана анализа временских серија и сви релевантни појмови као што су случајни процеси, стационарност, аутокорељациона и аутоковаријациона функција, бели шум, случајно лутање и сл. Затим ће детаљно бити описани следећи појмови: тренд-стационарна и диференчно-стационарна класа модела, *ARIMA* модели, тестови јединичног корена, Бокс-Џенкинсова стратегија и структурни лом, који представљају битне компоненте економских временских серија.

2 АНАЛИЗА ВРЕМЕНСКИХ СЕРИЈА

Анализа временских серија представља једну од статистичких дисциплина која бележи најдинамичнији развој последњих деценија. До овог бурног развоја дошло је унутрашњом динамиком и достигнутим степеном развоја саме дисциплине, а такође и због присутне интеракције са осталим дисциплинама, посебно економијом. Развој савремене анализе временских серија је текао упоредо и са еволуцијом економских модела од статичких до динамичких, и са увођењем неизвесности у моделе, односно њиховом еволуцијом од детерминистичких до стохастичких.

Под временском серијом подразумевамо уређени низ опсервација. При томе се уређивање најчешће, али не нужно, врши у односу на време и то обично у једнаким временским интервалима. Основни циљеви у анализи временских серија су описивање, објашњавање и предвиђање временске серије. Посматрањем временске серије могу се уочити одређене детерминистичке компоненте. Једна од важнијих компонената је тренд, који изражава дугорочну тенденцију развоја серије. У зависности од тога да ли серија расте или опада, тренд може бити растући или опадајући. Такође, тренд може бити детерминистички или стохастички, што зависи од тога да ли се кретање временске серије може предвидети на основу претходних вредности или не. Поред тренда, може се јавити и сезонска компонента. Она је резултат дејства фактора који се јављају у одређеним периодима, сезонама. Временска серија садржи и случајну компоненту, која се назива бели шум. Веза ових компоненти може бити адитивна, мултипликативна или мешовита.

Коришћењем различитих модела анализе временских серија желимо описати изучавану појаву, по могућности дати објашњење зашто и како је до ње дошло, затим предвидети њено кретање у наредном периоду и напослетку, манипулацијом величина које условљавају посматрану појаву, исту држати под контролом. Да бисмо изашли у сусрет овим циљевима можемо користити алтернативне приступе анализе временских серија, односно различита методолошка и моделска решења у оквиру сваког од њих.

„Циљ анализе временских серија је да се постигну следећа четири парцијална циља, који се могу сматрати деловима једног свеопштег циља:

- *Дескрипција: У циљу изучавања основних карактеристика временске серије користимо њене графичке приказе и сумарне статистике. Опис кључних карактеристика серије има вредност по себи, али најчешће представља прву етапу анализе временске серије. Препоручује се као обавезна етапа. Наиме, често се током анализе покаже да је већ једноставним графичким приказом дошла до изражаја суштинска карактеристика посматране појаве, те да нема потребе користити сложеније статистичке методе анализе временских серија.*

- *Објашњење:* Када располажемо са више серија могуће је користити варијације једне серије у циљу објашњења варијација у другој временској серији. Један од приступа у том смислу базиран је на регресионој анализи временских серија (модел једне једначине или модел симултаних једначина), а други на анализи модела функције преноса (улазна серија се трансформише у излазну серију линеарном трансформацијом). Такође, генерализацијом модела једнодимензионих временских серија као што су на пример ауторегресиони модели, добијамо моделе вишедимензионих временских серија, тзв. векторске ауторегресионе моделе. У последње време ови модели временских серија представљају основу за структурну анализу посматране појаве (испитивање егзогености, узрочности и др.).
- *Прогнозирање:* На основу прошлих опсервација идентификујемо и оценимо модел временске серије кога потом користимо за формирање прогнозе будућих вредности серије. У свакој од наведених етапа градње модела користимо скуп статистичких тестова и критеријума којима верификујемо ваљаност коришћеног прогностичког модела у поређењу са другима конкурентским моделима.
- *Контрола:* Да бисмо постигли овај циљ анализе грађимо модел функције преноса временске серије и на основу њега формирамо прогнозу. Затим улазну серију прилагођавамо тако да резултирајући, излазни процес, буде у близини жељеног циља. Контрола као циљ анализе посебно је интересантан у анализи временских серија које се јављају у статистичкој контроли квалитета.“ ([4])

2.1 Случајни процеси

Пре него што дефинишемо појмове случајног процеса и временске серије, подсетићемо се неких основних појмова и дефиниција.

Означимо са Ω простор исхода неког експеримента. Подскупове Ω називамо догађаји, а класу свих догађаја означавамо са $\mathcal{A}$. Класи догађаја припада скуп Ω (сигуран догађај), празан скуп $\emptyset$ и класа је затворена у односу на пребројиву примену скуповних операција (комплемент скупа, унија и пресек).

Дефиниција 1. Уређена тројка $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, где је

Ω - простор исхода случајног експеримента,

$\mathcal{A}$ - σ алгебра подскупова скупа Ω ,

P - вероватноћа дефинисана на σ алгебри $\mathcal{A}$,

зове се простор вероватноћа или вероватосни модел разматраног случајног експеримента. Елементи σ алгебре $\mathcal{A}$ зову се случајни догађаји.

Дефиниција 2. Нека је дат простор вероватноћа $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, и нека је $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ пар чије су компоненте скуп реалних бројева и Борелова σ алгебра подскупова скупа реалних бројева. Функција $Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ зове се случајна величина, ако је мерљива у односу на σ алгебре $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, тј. ако за сваки Борелов скуп $B \in \mathcal{B}$ важи

$$Y^{-1}(B) = \{\omega: Y(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}.$$

Дефиниција 3. Фамилија случајних променљивих $\{X_t, t \in T, \omega \in \Omega\}$ дефинисаних над истим простором вероватноћа $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, зове се стохастички (случајан) процес, са параметарским (индексним) скупом T .

Ако је, за свако $t \in T$, простор вредности процеса скуп реалних бројева $\mathbb{R}$, тада процес називамо реалним процесом, а мерљив простор $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ називамо фазним простором процеса. Скуп T се назива параметарским или индексним скупом. Обично се индекс t интерпретира као време, а за скуп T се узима интервал $[0, +\infty)$ или неки његов подскуп. У зависности од тога какав је индексни скуп T , процесе делимо на две групе:

- Ако је скуп T дискретан скуп, тада процес представља низ случајних променљивих, каже се и случајни процес са дискретним временом. Ако је скуп T коначан, тада процес $\{X_t\}$ представља случајан n димензионални случајни вектор, облика $(X_{t_1}, X_{t_2}, X_{t_3}, \dots, X_{t_n})$;
- Ако је скуп T интервал, тада процес представља случајни процес са непрекидним временом.

Појам процеса може да се интерпретира на још један начин, ако се за скуп свих исхода експеримента Ω изабере баш скуп детерминистичких функција, дефинисаних на интервалу T . Замислимо даље да се из тог скупа детерминистичких функција неким случајним механизмом бира једна таква функција и обележимо је са X_t . На показан начин добија се случајан процес. Свака функција X_t изабрана на овај начин, назива се трајекторија или реализација случајног процеса.

2.2 Стационарност и ергодичност

Дефиниција 4. Стохастички процес је строго стационаран ако су његове коначнодимензионалне функције расподеле инваријантне у односу на t , односно ако за $t_i, t_i + k \in T, i = 1, 2, \dots$

$$F_{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}}(x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) = F_{X_{t_1+k}, \dots, X_{t_n+k}}(x_{t_1}, \dots, x_{t_n}).$$

Значи да функција расподеле стохастичког процеса остаје неизмењена када се случајан вектор коме она одговара помери (транслира) у времену за произвољно k . Појам стриктне стационарности је користан у контексту теорије вероватноће, али је од мале користи у практичном моделирању јер је базиран на непознатој функцији расподеле. Стога уводимо појам стационарности у ширем смислу. То је тип стационарности за који бисмо рекли да служи у оперативне сврхе.

Прво је потребно увести дефиниције прва два момента стохастичког процеса.

- Функција средине процеса μ_t је:

$$\mu_t = E(X_t).$$

- Функција варијансе процеса σ_t^2 је:

$$\sigma_t^2 = E(X_t - \mu_t)^2.$$

- Коваријациона функција између X_{t_1} и X_{t_2} у два временска тренутка t_1 и t_2 је:

$$\gamma(t_1, t_2) = E(X_{t_1} - \mu_{t_1})(X_{t_2} - \mu_{t_2}).$$

- Корелациона функција између X_{t_1} и X_{t_2} је:

$$\rho(t_1, t_2) = \frac{\gamma(t_1, t_2)}{\sqrt{\sigma_{t_1}^2} \sqrt{\sigma_{t_2}^2}}.$$

Дефиниција 5. Стохастички процес $\{X_t, t \in T\}$, је слабо стационаран, уколико су испуњени следећи услови:

1. $E(X_t) = \mu = \text{const}, \forall t \in T$,
2. $E(X_t^2) < \infty, \forall t \in T$,
3. $\text{Cov}(X_t, X_{t-k}) = E(X_t - \mu)E(X_{t-k} - \mu) = \gamma(k), \forall t, k \in T$,

Из строге стационарности следи слаба стационарност стохастичког процеса када је функција варијансе коначна за $\forall t \in T$, али обрнуто не мора да важи.

Стриктна стационарност назива се и стационарност у ужем смислу, комплетна стационарност или строга стационарност. Слаба стационарност назива се и стационарност у ширем смислу, а слаба стационарност другог реда и стационарност у коваријанси.

За процес се каже да је стационаран m -тог реда ако постоје сви његови моменти m -тог реда који су временски инваријантни (не зависе од почетног временског тренутка). Тако на пример, слаба стационарност другог реда значи да је процес са константном средином и варијансом, а да коваријациона и корелациона функција зависе само од временског интервала.

Важан пример стохастичких процеса јесте нормалан или Гаусов (Gauss) процес¹ код ког су стриктна и слаба стационарност еквивалентне.

Дефиниција 6. Слабо стационаран процес другог реда $\{X_t, t \in T\}$ је ергодичан ако

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \gamma_k \right) = 0.$$

Ергодичност је испуњена за већину стационарних процеса који се срећу у пракси. Ако је процес ергодичан значи да са повећањем дужине временске серије моменти из узорка конвергирају у средње квадратном смислу ка одговарајућим моментима популације. Уз услов ергодичности временски просек ће бити непристрасна и конзистентна оцена средине популације као што ће и оцена коваријационе функције бити конзистентна оцена популационе коваријационе функције.

Дефиниција 7. Временска серија је једна реализација стохастичког процеса.

Неки аутори појам временске серије и случајног процеса тумаче као идентичне термине.

2.3 Аутоковаријациона и аутокорелациона функција

Једна од основних ставки у анализи временских серија је испитивање корелације између случајне променљиве и њених прошлих вредности. За испитивање корелације користимо аутокорелациону и аутоковаријациону функцију.

Дефиниција 8. (аутоковаријациона функција) Аутоковаријациона функција $\gamma(h)$ стационарног процеса $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ дефинисана је следећом формулом

$$\begin{aligned} \gamma(h) &= \text{Cov}(X_t, X_{t-h}) = E(X_t - E(X_t))(X_{t-h} - E(X_{t-h})) \\ &= E(X_t X_{t-h}) - E(X_t)E(X_{t-h}), \forall h \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Дефиниција 9. (аутокорелациона функција) Аутокорелациона функција $\rho(h)$ слабо стационарног процеса $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ дефинисана је следећом формулом

$$\rho(h) = \rho(X_t, X_{t-h}) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \frac{\text{Cov}(X_t, X_{t-h})}{\sqrt{D(X_t)}\sqrt{D(X_{t-h})}}, \forall h \in \mathbb{Z}.$$

Особине аутоковаријационе и аутокорелационе функције:

- 1) $\gamma(0) = D(X_t), \rho(0) = 1.$
- 2) Симетричност:

¹ Стохастички процес је Гаусовски процес ако све његове коначнодимензионалне функције расподеле имају вишедимензионалну нормалну расподелу.

$$\gamma(h) = \gamma(-h), \rho(h) = \rho(-h).$$

Доказ: На основу услова стационарности следи

$$\gamma(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t-h}) = \text{Cov}(X_{t-h}, X_t) = \gamma(-h).$$

Слично добијамо и за $\rho(h) = \rho(-h)$.

$$3) |\gamma(h)| \leq \gamma(0) \text{ и } |\rho(h)| \leq 1.$$

Доказ: Случајна променљива $Y = \lambda_1 X_t + \lambda_2 X_{t-k}$ има ненегативну дисперзију, где су λ_1 и λ_2 произвољне константе. Дисперзија од Y је:

$$D(Y) = D(\lambda_1 X_t + \lambda_2 X_{t-k}) = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)D(X_t) + 2\lambda_1\lambda_2\gamma(h)$$

за $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ добијамо $\gamma(h) \geq -D(X_t)$, па је $\rho(h) \geq -1$,

за $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ добијамо $\gamma(h) \leq D(X_t)$, па је $\rho(h) \leq 1$.

2.4 Бели шум

Најпознатији пример случајног процеса са независним вредностима је тзв. сигнал белог шума, који се описује као случајан сигнал, односно случајан процес који има подједнако расподељену снагу на свим својим фреквенцијама које се налазе у неком коначном опсегу. Назив „бели шум” потиче од појма „беле светлости”, у којој је спектрална снага светлости подједанко расподељена дуж фреквенција видљивог спектра, односно бела светлост садржи све светлосне фреквенције видљивог спектра са истим интензитетом. Појам белог шума се веома често појављује у природним наукама и представља математичку идеализацију феномена који подразумева изненадне и велике флуктуације.

Бели шум дефинисан на бесконачно великом опсегу је чисто теоријска конструкција, јер како према дефиницији има подједнако расподељену снагу на свим фреквенцијама, следи да ће укупна снага овог сигнала (процеса) бити бесконачна. То значи да је немогуће генерисати овакав процес. У пракси је могуће реализовати овакав процес једино ако се дефинише на мањем опсегу фреквенција.

Математичка интерпретација белог шума је случајан процес са узајмно некорелисаним вредностима у различитим временским тренуцима, при томе се обично претпоставља да је очекивање овог процеса једнако нули. Према томе, због некорелисаности његових вредности у различитим временским тренуцима, односно $\text{Cov}(\varepsilon_s, \varepsilon_t) = 0$, закључујемо да је процес белог шума немогуће предвидети, без обзира на то колико су временски тренуци блиски. Потребно је напоменути да особина по којој су вредности белог шума некорелисане у времену, не ограничава вредности које сигнал може да узима, што значи да је било која расподела тих вредности у фиксираним тренутку могућа, али уз претпоставку да је очекивање процеса нула. Према томе и шум са нормалном расподелом може да буде бели шум. Такав шум назива се Гаусов бели шум. Поред Гусовог белог шума постоје и Пуасонов (Poisson), Кошијев (Cauchy), итд. Гаусов бели шум се веома често користи за апроксимацију већине реалних проблема са којима се сусрећемо у пракси. Зато

се израз адитивни бели Гаусов шум већ увелико користи као стандардна скраћеница, у ознаци *AWGN* (енг. additive white Gaussian noise). Треба још напоменути, да бели Гаусов шум има корисну карактеристику која произилази из некорелисаности његових вредности: $Cov(s, t) = 0$, а то је да су његове вредности уједно и независне, односно уместо појма некорелисаности може се користити и појам независности.

Дефиниција 10. (слаби бели шум) Процес ε_t се назива слаби бели шум ако за позитивну константу σ^2 важи следеће:

- 1) $E(\varepsilon_t) = 0, \forall t \in \mathbb{Z}$,
- 2) $E(\varepsilon_t) = \sigma^2, \forall t \in \mathbb{Z}$,
- 3) $\gamma(h) = Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-h}) = 0, \forall t \in \mathbb{Z}, h \neq 0$.

У претходној дефиницији није дата претпоставка о независности. Веома битна ставка за временске серије је заправо некорелисаност процеса белог шума, па је неопходно трећу ставку у дефиницији заменити јачом претпоставком:

3') ε_t и ε_{t+h} независне и једнако расподељене.

Дефиниција 11. (јаки бели шум) Процес ε_t се назива јаки бели шум уколико су променљиве ε_t и ε_{t+h} независне и једнако расподељене, чије је очекивање 0, а дисперзија $D(\varepsilon_t) = \sigma^2 = const$.

У пракси се често претпоставља да ε_t има стандардизовану нормалну² расподелу или Студентову³ t-расподелу.

2.5 Случајно лутање

Случајано лутање је математичка формализација путање која се састоји од узастопног понављања случајних корака. На пример, пут молекула који путује у течности или плину, тражење пута животиња у потрази за храном, цена варирајућих деоница и финансијски статус коцкара се може моделирати као случајно лутање. Сам појам случајног лутања увео је 1905. године енглески математичар Карл Пирсон (Karl Pearson), познат као оснивач математичке статистике. Случајно лутање такође варира у односу на параметар времена. Лутање је често у дискретном времену и индексан природним бројевима, на пример: $X_1, X_2, X_3, \dots$. Код неких типова корака се догађају у случајним временима, и у том случају позиција X_t је дефинисана за временски тренутак $t \geq 0$. Случајно лутање

² Случајна променљива X са функцијом густине $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$ има нормалну расподелу са параметрима μ и σ .

³ Случајна променљива X са функцијом густине $q(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi n} \Gamma(\frac{n}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$ има Студентову t -расподелу.

је повезан са моделима распрострањености и важна су тема у расправи о Марковским процесима⁴.

Дефиниција 12. Нека је $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ низ независних, једнако расподељених случајних величина. За сваки позитиван цео број n , S_n означава суму $X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Низ $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ се назива случајно лутање.

2.6 Линеарни процеси

У статистичком моделирању један од најбитнијих задатака јесте проналажење одговарајуће функционалне везе између одређених улазних и излазних информација. Једна од најчешћих претпоставки је да је та веза линеарна. У анализи временских серија линеарни филтер је оператор који трансформише временску серију $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ у временску серију $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$

$$Y_t = L(X_t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \omega_j X_{t-j},$$

где су коефицијенти ω_j временски инваријантни. Дефиниција линеарног филтера имплицира да вредност временске серије $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ у тренутку t зависи од сопствених прошлих и будућих вредности. Како су у пракси на располагању историјски подаци, уводи се претпоставка да је $j \geq 0$, па се долази до дефиниције линеарног филтера

$$Y_t = L(X_t) = \sum_{j=0}^{\infty} \omega_j X_{t-j},$$

где вредност $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ у тренутку t зависи само од сопствених прошлих вредности.

Уколико сума коефицијената апсолутно конвергира

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\omega_j| < \infty,$$

каже се да су стабилни.

Дефиниција 13. Процес $\{X_t, t \in T\}$ је линеаран ако може да се представи у облику

$$X_t = \mu_t + \sum_{j=0}^{\infty} \theta_j \varepsilon_{t-j} \quad (2.1)$$

⁴ Произвољни случајни процес $\{X_t, t \in T\}$ је Марковски процес ако за свако $n \in \mathbb{N}$ и за сваку n -торку временских тренутака из интервала $[0, T]$, $s_1 < s_2 < \dots < s_n < t$ као и за сваки Борелов скуп B важи:

$$P(X_t \in B | X_{s_1}, X_{s_2}, \dots, X_{s_n}) = P(X_t \in B | X_{s_n}).$$

где је μ_t детерминистичка компонента, $\{\varepsilon_t, t \in T\}$ процес белог шума, $\theta_1, \theta_2, \dots$ непознати параметри.

Основна одлика детерминистичке компоненте је та да она може да се апроксимира са неком математичком функцијом, што у ситуацији прогнозирања временске серије значи да ће изабрани тип функције важити и у будућем периоду. Сума

$$\sum_{j=0}^{\infty} \theta_j \varepsilon_{t-j},$$

представља стохастичку компоненту процеса, и она описује дејство случајних фактора у моделу. Основна претпоставка је да стохастичка компонента може да се моделира помоћу процеса белог шума.

Очекивање и варијанса линеарног процеса су

$$E(X_t) = E(\mu_t) + \sum_{j=0}^{\infty} \theta_j E(\varepsilon_{t-j}) = \mu_t + 0 = \mu_t,$$

$$Var(X_t) = Var(\mu_t) + \sum_{j=0}^{\infty} \theta_j^2 Var(\varepsilon_{t-j}) = 0 + \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \theta_j^2 = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \theta_j^2.$$

Моменти првог и другог реда су коначни у случају када је

$$\mu_t \equiv \mu = const, \quad (2.2)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \theta_j^2 < \infty. \quad (2.3)$$

Тада су аутоковаријациона и аутокорељациона функција:

$$\begin{aligned} \gamma_k &= Cov(X_t, X_{t-k}) = E((X_t - \mu)(X_{t-k} - \mu)) \\ &= E((\varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_k \varepsilon_{t-k} + \theta_{k+1} \varepsilon_{t-k-1} + \dots)(\varepsilon_{t-k} + \theta_1 \varepsilon_{t-k-1} + \dots)) \\ &= \sigma^2(\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \theta_2 \theta_{k+2} + \dots) \\ &= \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \theta_{j+k} \theta_j, \end{aligned}$$

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{\sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \theta_{j+k} \theta_j}{\sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \theta_j^2} = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} \theta_{j+k} \theta_j}{\sum_{j=0}^{\infty} \theta_j^2}.$$

Ако су испуњени услови дефинисани изразима (2.2) и (2.3) тада коваријансна функција зависи само од k па је линеарни процес слабо стационаран. Уколико се додатно претпостави да је бели шум Гаусовски тада је функција расподеле

случајног процеса потпуно одређена првим и другим моментима процеса и процес је строго стационаран.

На основу линеарног процеса (2.1) могу се извести три класе процеса.

1. Ауторегресиони модел или *AR* модел,
2. Модел покретних просека или *MA* модел,
3. Ауторегресиони модел покретних просека или *ARMA* модели.

Дефиниција 14. *Линеарна временска серија је једна реализација линеарног стохастичког процеса.*

2.7 Ауторегресиони модел - *AR* и Модел покретних просека - *MA*

2.7.1 Ауторегресиони модел реда p - *AR*(p)

Ауторегресиони модели временских серија су они модели у којима се зависна променљива у тренутку t описује у функцији од сопствених претходних вредности, тј. скуп објашњавајућих променљивих су елементи исте временске серије само у тренуцима $t - 1, t - 2, \dots, t - p$. Дакле, ауторегресиони модел дефинишемо на следећи начин:

Дефиниција 15. *Ауторегресивни модел реда p дефинисан је на следећи начин:*

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t,$$

где је ε_t бели шум, а $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ ауторегресиони параметри.

Овом моделу може се придружити карактеристична једначина следећег облика:

$$g^p - \phi_1 g^{p-1} - \phi_2 g^{p-2} - \dots - \phi_p = 0,$$

где су $g_1, g_2, \dots, g_p$ решења (корени) карактеристичне једначине. Уколико су сви корени по модулу мањи од 1, тада је одговарајућа временска серија стационарна. Уколико постоји бар један корен $g_i, i = 1, 2, \dots, p$ који је једнак вредности један по модулу, док су други корени строго мањи од један по модулу, онда је временска серија нестационарна. Уколико постоји бар један корен $g_1, g_2, \dots, g_p$ који је строго већи од један, док су други строго мањи од један по модулу, тада је временска серија експлозивна, тј. временска серија је под утицајем адитивног дејства трајно растућег ефекта неочекиваних случајних шокова.

Аутоковаријациона функција стационарног модела реда p добија се на следећи начин:

$$\gamma_k = \begin{cases} \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p} + \sigma^2, & k = 0 \\ \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p}, & k > 0 \end{cases}.$$

За $k = 0$ аутоковаријациона функција се своди на дисперзију временске серије:

$$\gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1 - \phi_1\rho_1 + \phi_2\rho_2 + \dots + \phi_p\rho_p}.$$

Када је $k > 0$ добијамо:

$$\gamma_k = \phi_1\gamma_{k-1} + \phi_2\gamma_{k-2} + \dots + \phi_p\gamma_{k-p},$$

па дељењем са γ_0 добијамо аутокорелациону функцију ауторегресионог модела реда p :

$$\rho_k = \phi_1\rho_{k-1} + \phi_2\rho_{k-2} + \dots + \phi_p\rho_{k-p}, \quad \text{za } k > 0.$$

2.7.2 Модели покретних просека реда q - $MA(q)$

Дефиниција 16. Модел покретних просека реда q или $MA(q)$, дефинише се на следећи начин:

$$X_t = \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q\varepsilon_{t-q},$$

где је ε_t процес белог шума, док су $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ параметри модела.

Ниво временске серије у тренутку t описује се у функцији од чланова процеса белог шума у тренуцима $t, t-1, \dots, t-q$.

Моделом $MA(q)$ дефинисана је слабо стационарна временска серија. То видимо из чињенице да се модел састоји од коначног збира чланова белог шума на различитим растојањима. Одатле такође следи и да је дисперзија временске серије коначна:

$$D(X_t) = D(\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q\varepsilon_{t-q}) = \sigma^2(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2).$$

Аутоковаријациона и аутокорелациона функција стационарног модела покретних просека реда q су:

$$\gamma_k = \begin{cases} (1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2)\sigma^2, & k = 0 \\ (-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \dots + \theta_{q-k}\theta_q)\sigma^2, & k = \overline{1, q}, \\ 0, & k > q \end{cases}$$

$$\rho_k = \begin{cases} 1, & \text{za } k = 0 \\ \frac{(-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \dots + \theta_{q-k}\theta_q)}{1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2}, & k = \overline{1, q}. \\ 0, & \text{za } k > q \end{cases}$$

2.7.3 Ауторегресиони модел покретних просека – *ARMA*

Често се у практичном раду са *AR* и *MA* моделима јавља потреба да модел има веома велики ред да би могао адекватно да опише динамичку структуру података временске серије. Велики број параметара у моделу, знатно отежава рад и као решење овог проблема уведена је нова класа модела за описивање временских серија. То су ауторегресиони модели покретних просека, односно *ARMA* модели. Дакле, *ARMA* модели су осмишљени тако да имају релативно мали број параметара и представљају комбинацију ауторегресионих модела и модела покретних просека, као што им и само име каже.

Општи облик ауторегресионих модела покретних просека је дефинисан са:

$$X_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} + \varepsilon_t - \sum_{i=1}^q \theta_i \varepsilon_{t-i},$$

где је $\{\varepsilon_t\}$ бели шум, а p и q су ненегативни цели бројеви који представљају ред *AR* и *MA* модела, респективно.

Специјални случајеви *ARMA*(p, q) модела су:

1. $AR(p) = ARMA(p, 0)$
2. $MA(q) = ARMA(0, q)$.

Ауторегресионе моделе покретних просека можемо дефинисати и на други начин:

$$\underbrace{(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p)}_{\Phi(L)} X_t = \theta_0 + \underbrace{(1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \dots - \theta_q L^q)}_{\Theta(L)} \varepsilon_t,$$

где је L оператор померања $L(X_t) = X_{t-1}$, а за више степене рекурзивном везом $L^k(X_t) = L^{k-1}(X_{t-1})$.

За полиноме $\Phi(L)$ и $\Theta(L)$ претпоставља се да не садрже заједничке факторе и да описују редом ауторегресиону компоненту и компоненту покретних просека стационарне и инвертибилне временске серије X_t .

Особине:

1. Стационарност овако дефинисане временске серије одређена је стационарношћу одговарајуће ауторегресионе компоненте.
2. Аутоковаријациона и аутокорељациона функција.

Аутоковаријациона функција једнака је:

$$\begin{aligned} \gamma_k &= E(X_t X_{t-k}) = \\ &= \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p} + E(\varepsilon_t X_{t-k}) - \theta_1 E(\varepsilon_{t-1} X_{t-k}) \\ &\quad - \theta_2 E(\varepsilon_{t-2} X_{t-k}) - \dots - \theta_q E(\varepsilon_{t-q} X_{t-k}). \end{aligned}$$

Како је дата временска серија линеарни процес, закључујемо да важи:

$$E(\varepsilon_{t-q}X_{t-k}) = \begin{cases} 0, & k > q \\ D(\varepsilon_t) = \sigma^2, & k = q \end{cases}$$

Према томе, за $k > q$ аутоковаријациона функција је:

$$\gamma_k = \phi_1\gamma_{k-1} + \phi_2\gamma_{k-2} + \dots + \phi_p\gamma_{k-p}.$$

Аутокорелациона функција има следећи облик:

$$\rho_k = \phi_1\rho_{k-1} + \phi_2\rho_{k-2} + \dots + \phi_p\rho_{k-p}, \quad k > q.$$

Доносимо следећи закључак везан за својства аутокорелационе функције:

- Првих q аутокорелационих коефицијената временске серије генерисане $ARMA(p, q)$ моделом зависе од параметара AR и MA компоненте.
- За растојања која су већа од реда MA компоненте, $q + 1, q + 2$, итд. ова функција се понаша као код AR модела.

За писање овог поглавља коришћена је литература [1], [2], [3], [4], [5] и [6].

3 ТРЕНД-СТАЦИОНАРНА И ДИФЕРЕНЦНО-СТАЦИОНАРНА КЛАСА МОДЕЛА

„Први приступ моделирању стохастичких процеса код којих је присутна нестационарност у средини заснован је на претпоставци да у општем случају, средина еволуира као полином по времену реда d . Оценом изабране линије тренда и рачунањем серије резидуала добија се стационаран стохастички процес. Ова класа стационарних процеса назива се тренд-стационарни процеси, а дефинишу се на основу Крамеровог (Cramer) проширења Волдове (Wold) теореме разлагања за нестационарне процесе. Представљају се као збир детерминистичке компоненте μ_t (полином по времену) и стационарне компоненте η_t која у општем случају следи ARMA процес. Овај нестационаран процес се пише у облику:

$$X_t = \mu_t + \eta_t = \sum_{j=0}^d \beta_j t^j + \psi(B)\varepsilon_t. \quad (3.1)$$

Пошто је

$$E(\eta_t) = \psi(B)E(\varepsilon_t) = 0, E(X_t) = E(\mu_t) = \sum_{j=0}^d \beta_j t^j, \quad (3.2)$$

а коефицијенти β_j остају константни током времена, овај тренд се назива детерминистички тренд. Са становишта практичне примене тренд стационарним процесом се рукује као са сваким стандардним регресионим моделом. То значи да се након регресирања опсервација временске серије на „регресоре“ $((1, t, t^2, \dots, t^d))$ дефинисане изабраним полиномом, резидуали оцењеног тренда посматрају као стационарна серија.“ ([4])

Да би се указало на карактеристике тренд-стационарних процеса може се користити једноставан пример. Нека се претпостави да је стационарна компонента процес белог шума, а детерминистичка компонента линеарни тренд ($d = 1$). Тада се процес (3.1) пише у облику:

$$X_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t. \quad (3.3)$$

Очигледно је $E(X_t) = \beta_0 + \beta_1 t$ и $Var(X_t) = Var(\varepsilon_t) = \sigma^2$. Даље се претпоставља да се на процес (3.3) који се може охарактерисати као тренд-стационарни процес, погрешно примени поступак диференцирања у циљу постизања стационарности серије. Да би се размотрило какве су последице примене овог погрешно изабраног поступка трансформације, потребно је посматрати опсервацију процеса у временском тренутку $(t - 1)$ и одузети је од (3.3). Тада следи:

$$X_t - X_{t-1} = \beta_1 + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}. \quad (3.4)$$

Дакле, добијен је $ARMA(1,1)$ процес који је нестационаран и неинвертибилан, пошто је $\phi_1 = 1$ и $\theta_1 = 1$. Нека се прва диференца овог процеса означи са W_t . Горњи $ARMA(1,1)$ процес се може написати у облику:

$$W_t = (1 - B)X_t = \beta_1 + (1 - B)\varepsilon_t. \quad (3.5)$$

Пошто је $E(W_t) = \beta_1$ константно, значи да је W_t генерисано стационарним, али неинвертибилним $MA(1)$ процесом.

У општем случају ако је полиномијални тренд реда d , а η_t представља $ARMA$ процес $\phi(B)\eta_t = \theta(B)\varepsilon_t$, тада ће диференца X_t реда d бити описана процесом:

$$(1 - B)^d X_t = \theta_0 + \frac{(1 - B)\theta(B)}{\phi(B)} \varepsilon_t, \quad \theta_0 = d! \beta_d. \quad (3.6)$$

То значи да ће MA део генерисан првим диференцама имати d јединичних корена. Као и у случају једноставног тренд стационарног процеса (3.3) варијанса од X_t ће бити једнака варијанси од η_t и биће константна током времена. На основу изложеног закључује се да ће примена погрешно изабране трансформације тренд-стационарне серије, тј. поступак диференцирања, имати за последицу генерисање неинвертибилног MA процеса.

„Други начин моделирања нестационарне серије у средини X_t заснована је на претпоставци да ће њена диференца реда d бити стационарна. Класа процеса са овим својством називају се диференчно-стационарни процеси. Да би се сагледало какве су последице погрешног третмана овог диференчно-стационарног процеса као тренд-стационарног процеса може се користити једноставан пример у коме је прва диференца серије представљена збиром константе и процеса белог шума:

$$(1 - B)X_t = \beta_1 + \varepsilon_t. \quad (3.7)$$

Другим речима до процеса датог изразом (3.7) може се доћи полазећи од $AR(1)$ процеса са константом код кога се замени $\phi_1 = 1$. Случај када је $\phi_1 > 1$ генерише експлозиван ток временске серије и као такав није од посебног интереса у анализи. Израз (3.7) може се другачије записати:

$$X_t = X_{t-1} + \beta_1 + \varepsilon_t, \quad (3.8)$$

одакле се кумулирањем промена X од почетне вредности, на пример X_0 , добија:

$$X_t = X_0 + \beta_1 t + \sum_{i=1}^t \varepsilon_i. \quad (3.9)''$$

([4])

Према изразу (3.8) ниво процеса у тренутку t зависи од претходне вредности процеса која је са своје стране под утицајем стохастичког члана. Пошто се ниво процеса стохастички мења током времена, каже се да ову класу процеса карактерише стохастички тренд.

На први поглед, процеси (3.3) и (3.9) су међусобно слични. Међутим, између њих постоје суштинске разлике. Слободан члан у изразу (3.9) није сталан коефицијент него зависи од почетне вредности X_0 , а стохастички део није стационаран јер му варијанса и аутоковаријансе зависе од времена. У случају коришћења процеса (3.3) у прогнозирању, варијанса грешке прогнозе биће ограничена без обзира на дужину хоризонта прогнозирања, зато што ε_t , односно η_t (у општем случају је процес (3.2)) имају коначну варијансу. Што се тиче прогнозе процеса датог изразом (3.9), варијанса грешке прогнозе ће неограничено расти током времена. Штавише, за целу класу тренд-стационарних процеса описаних изразом (3.2), чији је представник дат изразом (3.3), аутокорељациона структура може бити коришћена у краткорочном прогнозирању. Код дугорочног прогнозирања једина информација о будућим вредностима садржана је у његовој средини, тј. $\beta_0 + \beta_1 t$, тако да неће ни текући нити претходни догађаји мењати дугорочну прогнозу. Класу диференчно-стационарних процеса карактерише то да ће његове дугорочне прогнозе увек бити под утицајем историјских догађаја кроз акумулирање шокова ε_t .

Ако се на пример за временску серију друштвеног производа утврди да је тренд стационарна серија то значи да друштвени производ бележи сталан раст по константној стопи која је имплицирана коефицијентима полинома μ_t . Са друге стране, ако је серија друштвеног производа диференчно-стационарна серија тада и краткорочни поремећаји у производњи имају свој одраз на дугорочни раст друштвеног производа кроз кумулирање тих поремећаја. Отуда интерес истраживача да се испита карактер серије друштвеног производа, јер он у диференчно стационарном случају директно истиче везу између краткорочне стабилизационе макроекономске политике и дугорочне развојне политике.

Литература коришћена за писање овог поглавља је [3], [4] и [8].

4 ARIMA модели

Ауторегрессиони модели засновани су на идеји да се тренутна вредност серије, x_t , објасни као функција претходних вредности, $x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, x_{t-p}$, где је p број потребних корака из прошлости за прогнозирање тренутне вредности.

ARIMA модели су, у теорији, најопштија класа модела за предвиђање временских серија који се трансформацијама као што су логаритмовање и диференцирање, могу учинити стационарним. Стационарна серија нема тренд, друга особина је да корелације са одступањима од средње вредности остају константне током времена.

Процес дат изразом:

$$X_t = X_{t-1} + \beta_1 + \varepsilon_t, \quad (4.1)$$

где је β_1 константа која се не мења током времена, представља нестационаран процес који може постати стационаран вишеструким диференцирањем. При томе диференцирана серија може бити аутокорелисана. Овај процес представља класу нестационарних процеса под називом интегрисани процеси. Процес (4.1) првим диференцирањем постаје стационаран процес, процес белог шума. Израз:

$$\phi_p(B)(1-B)^d X_t = \theta_0 + \theta_q(B)\varepsilon_t, \quad (4.2)$$

добива се тако што се диференцирана серија $(1-B)^d X_t$ моделира $ARMA(p, q)$ процесом. У изразу (4.2) важи да $\phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$ и $\theta_q(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q$ представљају $AR(p)$ и $MA(q)$ полиноме по оператору доцње⁵, респективно. Да би се описао ARIMA модел, потребно је да корени карактеристичних једначина $\phi_p(B) = 0$ и $\theta_q(B) = 0$ леже ван јединичног круга, дакле неопходно је да буду испуњени стационарност и инвертабилност, као и да ова два полинома немају заједничких фактора.

„У изразу (4.2) константа θ_0 зависи од реда диференцирања. Ако је $d = 0$ процес је стационаран, а константа θ_0 је у релацији са средином процеса $\theta_0 = \mu(1 - \phi_1 - \dots - \phi_p)$, где је $\mu = E(X_t)$. За вредности $d > 0$, константа θ_0 указује на

⁵ Оператор доцње се дефинише са:

$$BX_t = X_{t-1}.$$

Овако дефинисан оператор текућу опсервацију временске серије помера један период уназад, у прошлост.

присуство детерминистичког тренда у временској серији. Константа се изоставља из израза ако диференцирана серија не садржи детерминистички тренд. Процес (4.2) назива се ауторегресиони интегрисани процес покретних просека (енг. autoregressive-integrated-moving average) реда p, d и q или према скраћеној нотацији $ARIMA(p, d, q)$ процес. Процес X_t је интегрисан реда d , у ознаци $I(d)$. У практичним применама економских временских серија, ред диференцирања d једнак је 0, 1 или 2.“ ([4])

Без смањења општости, уводи се следећа дефиниција.

Дефиниција 17. Процес X_t назива се $ARIMA(p, d, q)$ процес ако је

$$\Delta^d x_i = (1 - B)^d x_i,$$

где је Δ^d диференци оператор реда d , назива се $ARMA(p, q)$ процес. Ако је $E(\Delta^d x_i) = \mu$, модел је облика

$$\phi_p(B)(1 - B)^d X_t = \theta_0 + \theta_q(B)\varepsilon_t,$$

где је $\theta_0 = \mu(1 - \phi_1 - \dots - \phi_p)$.

Посматра се стационарни $ARMA(1,1)$ процес и његова аутокорељациона функција:

$$\rho_1 = \frac{(\phi_1 - \theta_1)(1 - \phi_1\theta_1)}{1 + \theta_1^2 - 2\phi_1\theta_1}, \rho_k = \phi_1\rho_{k-1}, k \geq 2.$$

„Ако пустимо да $\phi_1 \rightarrow 1$ добијамо да аутокорељациони коефицијенти теже јединици. У граничном случају као резултат добијамо $ARIMA(0,1,1)$ процес $(1 - B)X_t = \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1}$. Што се тиче парцијалне аутокорељационе функције $ARIMA$ процеса она је за вредности $d > 0$ на првој доцњи блиска јединици, а једнака нули на свим осталим.

Претпоставимо да је $\theta_0 = 0$, тада се $ARIMA$ процес може изразити једначинама:

$$\phi_p(B)W_t = \theta_q(B)\varepsilon_t \text{ и } W_t = (1 - B)^d X_t. \quad (4.3)$$

Значи да се диференца реда d серије X_t описује стационарним, инвертибилним $ARMA$ процесом. За $d \geq 1$ друга једначина у (4.3) се може инвертовати. Добија се:

$$X_t = S^d W_t,$$

где је S оператор бесконачне суме, дефинисан са:

$$S = (1 + B + B^2 + \dots) = (1 - B)^{-1}.$$

Дакле, ако се стационарни процес сумира или „интегрише“ d пута добиће се хомогено нестационарни $ARIMA$ процес. Отуда и назив „интегрисани“ у називу $ARIMA$ процеса. “([4])

4.1 $ARIMA(0,1,1)$

Један од најчешће коришћених $ARIMA$ процеса јесте $ARIMA(0,1,1)$ процес. Овај процес се често означава са $IMA(0,1,1)$ и њиме се моделују многе економске временске серије. Овај модел такође се користи за дефинисање метода прогнозирања који се зове експоненцијално пондерисани покретни просеци. Као и код других $ARIMA$ процеса, вредности аутокореелационих коефицијената веома споро опадају ка нули.

„Ако у израз (4.2) ставимо да је $p = 0, d = 1$ и $q = 1$, добићемо:

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}. \quad (4.4)$$

Увођењем оперетора доцње у (4.4), добиће се израз:

$$(1 - B)X_t = (1 - \theta_1 B)\varepsilon_{t-1}, \quad (4.5)$$

где је $|\theta_1| < 1$.“ ([4])

Једна од основних особина стационарних процеса јесте да стационарност у средини не имплицира стационарност у варијанси, аутоковаријанси и аутокореелацији. Међутим, ако је $ARIMA$ процес нестационаран у средини тада је нестационаран и у варијанси, аутоковаријанси и аутокореелацији. Такође, за нестационарне процесе не важи да су у својеврсној статистичкој равнотежи. То значи да је битан и временски тренутак од ког смо почели са праћењем тог процеса. Дакле, код стационарних, временски ток се прати од $t = -\infty$, док се код нестационарних прати од тренутка $t = -m$, при чему $-m$ претходи тренутку $t = 1$ у коме се региструје прва опсервација.

За дефинисање временске зависности варијансе, аутоковаријансе и аутокореелације користи се $ARIMA(0,1,1)$ процес. Ако се овај процес изрази у облику (4.5), тада је прва диференца овог процеса:

$$W_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1},$$

што значи да W_t представља стационарни $MA(1)$. Нестационарни процес X_t се може изразити коришћењем процеса W_t и белог шума. „Коришћењем оператора сумирања до тренутка $t + m$, у ознаци S_{t+m} , добијамо:

$$\begin{aligned}
X_t &= S_{t+m}W_t = (1 + B + B^2 + \dots + B^{t+m})W_t = \sum_{j=0}^{t+m} W_{t-j} = \\
&= \varepsilon_t + (1 - \theta_1)\varepsilon_{t-1} + (1 - \theta_1)\varepsilon_{t-2} + \dots + (1 - \theta_1)\varepsilon_{t-m} - \theta_1\varepsilon_{t-m-1}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

На основу израза (4.6) варијанса и аутоковаријанса нестационарног процеса X_t дефинишу се са:

$$Var(X_t) = [1 + \theta_1^2 + (1 - \theta_1)^2(t + m)]\sigma^2 \tag{4.7}$$

$$Var(X_{t-k}) = [1 + \theta_1^2 + (1 - \theta_1)^2(t + m - k)]\sigma^2 \tag{4.8}$$

$$Cov(X_t, X_{t-k}) = [1 - \theta_1 + \theta_1^2 + (1 - \theta_1)^2(t + m - k)]\sigma^2, \tag{4.9}$$

па је аутокорелација дата следећим изразом:

$$Corr(X_t, X_{t-k}) = \frac{Cov(X_t, X_{t-k})}{\sqrt{Var(X_t)Var(X_{t-k})}} \tag{4.10}$$

Према дефинисаним изразима (4.7), (4.8), (4.9) и (4.10) можемо закључити следеће:

1. Варијанса ARIMA процеса је временски зависна, а такође је $Var(X_t) \neq Var(X_{t-k})$, за $k \neq 0$.
2. Варијанса ARIMA процеса неограничено расте када $t \rightarrow \infty$.
3. Аутоковаријансе и аутокорелације ARIMA процеса су временски зависне, а такође се трансформацијом временског интервала мењају.
4. Када је t знатно веће од k , тада је аутокорелација према изразу (4.10) блиска јединици. ([4])

Дакле, на основу једне нестационарне временске серије не могу се извести закључци о посматраном процесу због временске зависности средине, варијансе и аутоковаријансе. Али ако је у питању хомогено нестационарна серија тада се поступком диференцирања добија стационаран процес код кога на основу једне реализације можемо извести коректне статистичке закључке о посматраном процесу.

За писање овог поглавља коришћена је литература [4], [7] и [9].

5 СЕЗОНСКЕ ВРЕМЕНСКЕ СЕРИЈЕ

Финансијске временске серије условљене разним утицајима на тржишту, поседују карактеристике које их одвајају од осталих временских серија. То је постојање сезонске компоненте, тренда раста, односно тренда пада и, оно најважније, постојање нестабилности варијансе (волатилности). Кључни значај при доношењу финансијских одлука имају предвиђене вредности временских серија. Из тог разлога је веома битно да те вредности буду што је могуће тачније. Уколико временска серија испољава правилности у кретању у току једне календарске године тада се она назива сезонска временска серија. Постојање ове компоненте указује да постоји већи степен корелације између опсервација истих месеци у различитим годинама него између суседних месеци. Сезонске временске серије су како им и само име каже, временске серије које карактерише одређени образац у кретању током године месечно, квартално или полугодишње. Пример сезонске компоненте појављује се код туристичке сезоне на мору коју карактерише раст у јулу, а пад у октобру. Временска серија продаје сладоледа или освежавајућих пића има све карактеристике сезонске временске серије, јер се у летњим месецима регуларно јавља знатно већи обим продаје него у осталим месецима. Појава сезонских флукуација важи, на пример, за серије у туризму, али и у производњи, кретањима залиха итд.

Слика 1. Пример серије која има сезонску компоненту⁶



Ако би се приликом моделирања наведених процеса занемарио њихов сезонски карактер, изоставила би се једна од значајних карактеристика. Такав приступ њиховом моделирању водио би ка формирању неоптималног модела. Зато је од интереса директно моделом временске серије обухватити њен сезонски карактер.

Уобичајени приступ у класичној анализи временских серија заснован је на тзв. методу разлагања временске серије односно метод декомпозиције. Два су приступа моделирању сезонске компоненте код метода разлагања. Према првом,

⁶ Извор података: Републички завод за статистику

регресионом приступу, утицај сезонске компоненте се утврђује коришћењем сезонских вештачких променљивих у оквиру класичног регресионог модела, где је зависна променљива временска серија коју разлажемо на тренд, циклус, сезону и случајну компоненту. Подваријанта овог првог приступа полази од претпоставке да се сезонска компонента може успешно моделирати тригонометријским функцијама у тзв. поступку формирања Фуриерове (Fourier) репрезентације временске серије.

У традиционалном приступу анализи временских серија, други поступак издвајања сезонске компоненте из серије користи једну од многобројних метода изравнања (најчешће метод покретних просека). Основна идеја код овог приступа базирана је на издвајању несезонског дела временске серије коришћењем симетричних покретних просека. Када се утврди „основни ток“ временске серије, преостаје да се из опсервација временске серије елиминише једноставним поступком одузимања код адитивног модела, односно поделе код мултипликативног модела, добијајући на тај начин жељену сезонску компоненту.

Може се рећи да је у почетном периоду анализе временских серија основна намена, тако издвојене сезонске компоненте, била у њеном елиминисању из временске серије. Тај поступак отклањања сезонске компоненте из временске серије назива се поступком сезонског изравнања или десезонирања.

Заједнички елемент традиционалних поступака сезонског изравнања јесте да полазе од детерминистичке природе сезонске компоненте и да претпостављају њену независност од осталих несезонских компоненти. Уколико се напусте ове претпоставке, односно пођемо од тога да сезонска компонента има стохастички карактер са корелационом структуром која дозвољава постојање међузависности несезонске и сезонске компоненте, тада смо направили корак у правцу дефинисања сезонских *ARIMA* модела.

5.1 Сезонски *ARIMA* модели

Сезонске временске серије карактеришу периодичне флукуације које се понављају у временским интервалима до годину дана. Најмањи временски период у коме се понови уочена појава назива се период сезоне и означава се са s . Ако су у питању месечне временске серије, тада је период сезоне $s = 12$, за кварталне серије $s = 4$, а за полугодишње серије $s = 2$.

„С обзиром да се посматрана појава са извесним правилностима понавља после периода сезоне, очекује се да ће опсервације раздвојене временским периодом бити међу собом корелисане. Дакле, поред графика временске серије и корелограм⁷ сезонске временске серије може бити од помоћи при утврђивању сезонског карактера серије. Лагано смањивање вредности аутокорелационих

⁷ Корелограм је графички приказ аутокорелационе функције.

коэффицијената на сезонским доцњама ($s, 2s, 3s, \dots$) показатељ је сезонске нестационарности. Слично поступку елиминисања нестационарности код несезонских серија коришћењем оператора диференцирања $(1 - B)$, за отклањање сезонске нестационарности користи се оператор сезонског диференцирања $(1 - B^s)$. Комбинујући ова два оператора диференцирања у општем случају, сезонски $ARIMA$ модел за серију X_t дефинисан је изразом:

$$\phi(B)(1 - B)^d(1 - B^s)^D X_t = \theta(B)\varepsilon_t, \quad (5.1)$$

где је оператор несезонског и сезонског диференцирања примењен са d , односно D респективно. Полиноми $\phi(B)$ и $\theta(B)$ дефинишу се на уобичајен начин. При изградњи сезонског $ARIMA$ модела примењује се итеративни поступак Бокса (Box) и Џенкинса (Jenkins) који ће касније бити детаљно објашњен у поглављу 7. Међутим, потешкоће до којих долази приликом коришћења модела (5.1) навеле су Бокса и Џенкинса да дефинишу нову класу сезонских $ARIMA$ модела. Прва од поменутих тешкоћа тиче се полинома $\phi(B)$ и $\theta(B)$ од којих бар један мора бити минимално реда s , да би обухватио аутокорељацију на сезонским доцњама. На пример, код месечних временских серија то значи да ред једног од полинома мора бити најмање 12, па се може десити да ће модел садржати исти толики број коэффицијената. Укључивање толиког броја коэффицијената у модел, од којих не морају сви бити различити од нуле, захтева разматрање великог броја модела у фази њиховог избора. Друга потешкоћа тиче се парцијалне аутокорељационе функције као основног средства за идентификацију модела (више у поглављу 7.1). Код сезонских модела типа (5.1) њена интерпретација је отежана, па се углавном користи обична аутокорељациона функција. ([4])

Из наведених разлога Бокс и Џенкинс су приступили дефинисању класе тзв. мултипликативних сезонских $ARIMA$ модела. Нека је у општем случају временска серија X_t , за коју се на основу графика или корелограма може утврдити да има карактеристике сезонске временске серије, моделирана коришћењем несезонског $ARIMA$ модела:

$$(1 - B)^d \phi_p(B) X_t = \theta_q(B) \eta_t, \quad (5.2)$$

где су $\phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$ и $\theta_q(B) = 1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q$ полиноми по оператору доцње B реда p и q респективно. Због сезонског карактера серије, процес η_t неће представљати процес белог шума. Коэффицијенти аутокорељације овог процеса на сезонским доцњама биће различити од нуле. Зато се овај процес моделира $ARIMA$ моделом:

$$(1 - B^s)^D \Phi_P(B^s) \eta_t = \Theta_Q(B^s) \varepsilon_t, \quad (5.3)$$

где су $\Phi_P(B^s) = 1 - \Phi_1 B^s - \dots - \Phi_P B^{Ps}$ и $\Theta_Q(B^s) = 1 - \Theta_1 B^s - \dots - \Theta_P B^{Qs}$ полиноми по оператору B^s реда P и Q респективно. Истовремено се претпоставља да полиноми

$\Phi_p(B^s)$ и $\Theta_Q(B^s)$ немају заједничких корена. Ови полиноми задовољавају стандардне услове стационарности, односно инвертибилности, којима се захтева да корени полинома буду по модулу мањи од јединице. Комбинујући израз (5.2) и (5.3) добија се Бокс-Џенкинсов мултипликативни сезонски *ARIMA* модел:

$$(1 - B)^d(1 - B^s)^D \phi_p(B) \Phi_p(B^s) X_t = \theta_q(B) \Theta_Q(B^s) \varepsilon_t. \quad (5.4)$$

Додавањем константе θ_0 са десне стране израза (5.4) полиноми $\phi_p(B)$ и $\theta_q(B)$ се називају регуларним ауторегресионим полиномом и полиномом покретног просека, а $\Phi_p(B^s)$ и $\Theta_Q(B^s)$ сезонским ауторегресионим полиномом и полиномом покретног просека респективно. Стандардна ознака мултипликативних сезонских *ARIMA* модела са периодом сезоне s је $ARIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$.

5.2 Сезонски *AR*(1) модели

Сезонски ауторегресиони модел првог реда

$$(1 - \Phi_1 B^s) \eta_t = \varepsilon_t, \quad (5.5)$$

у ознаци $SAR(1)_s$, добија се када се у израз (5.3) замене вредности $P = 1$, $D = 0$ и $Q = 0$.

„Услов стационарности захтева да је $|\Phi_1| < 1$. Као и код несезонског *AR*(1) модела биће $E(\eta_t) = 0$. Аутоковаријациона функција овог модела се добија множењем израза (5.5) са η_{t-k} , а затим одређивањем очекиване вредности добијеног израза. Аутокорелациона функција овог модела је $\rho_{sk} = \Phi_1^k$, за $k = 1, 2, \dots$. Значи да су аутокорелациони коефицијенти овог модела различити од нуле само на сезонским доцњама.“([4]) На пример, код месечне временске серије, где је $s = 12$, аутокорелациони коефицијенти код $SAR(1)_{12}$ модела су различити од нуле на следећим доцњама: 12, 24, 36, ...

5.3 Сезонски *MA*(1) модели

Ако је у изразу (5.3) $P = 0$, $D = 0$ и $Q = 1$ тада је дефинисан, сезонски модел покретних просека првог реда:

$$\eta_t = (1 - \Theta_1 B^s) \varepsilon_t, \quad (5.6)$$

у ознаци $SMA(1)_s$. „Услов инвертибилности захтева да је $|\Theta_1| < 1$. Као и код несезонског *MA*(1) модела и овде је $E(\eta_t) = 0$. Такође важи да је: $Var(\eta_t) = (1 + \Theta_1^2) \sigma^2$, $Cov(\eta_t, \eta_{t-1}) = 0$ и $Cov(\eta_t, \eta_{t-s}) = -\Theta_1 \sigma^2$. Према томе,

аутокорелациона функција има вредност различиту од нуле само на првој сезонској доцњи.“([4]) На пример, код месечне временске серије је $s = 12$, па је аутокорелациони коефицијент код $SMA(1)_{12}$ модела различит од нуле само на дванаестој доцњи.

5.4 „Ваздухопловни“ модел

Међу мултипликативним сезонским $ARIMA$ моделима најчешће се користе следећи: $ARIMA(1, d, 0) \times (1, D, 0)_s$, $ARIMA(1, d, 0) \times (0, D, 1)_s$, $ARIMA(0, d, 1) \times (1, D, 0)_s$ и $ARIMA(0, d, 1) \times (0, D, 1)_s$, где d и D узимају вредност 0 или 1.

Као последњу илустрацију мултипликативних $ARIMA$ модела наводи се управо четврти модел код кога је $d = D = 1$, односно ради се о $ARIMA(0, 1, 1) \times (0, 1, 1)_s$ моделу који има облик:

$$(1 - B)(1 - B^s)X_t = (1 - \theta_1 B)(1 - \theta_1 B^s)\varepsilon_t. \quad (5.7)$$

Њега су Бокс и Џенкинс користили у анализи временске серије броја повезаних путника у ваздушном саобраћају, па се стога у литератури назива „ваздухопловни“ модел (енг. airline model). Инвертибилност овог модела захтева $|\theta_1| < 1$ и $|\theta_1| < 1$. Ако се прве и сезонске диференце означе са W_t , тада се модел (5.7) пише у облику:

$$W_t = (1 - B - B^s - B^{s+1})X_t = (1 - \theta_1 B - \theta_1 B^s + \theta_1 \theta_1 B^{s+1})\varepsilon_t. \quad (5.8)$$

Аутоковаријанса од W_t на k -тој доцњи је:

$$\begin{aligned} \gamma_k = E(W_t W_{t-k}) &= E[(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_1 \varepsilon_{t-s} + \theta_1 \theta_1 \varepsilon_{t-s-1}) \times \\ &(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-k-1} - \theta_1 \varepsilon_{t-s-k} + \theta_1 \theta_1 \varepsilon_{t-s-1-k})], \end{aligned} \quad (5.9)$$

одакле је

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= (1 + \theta_1^2)(1 + \theta_1^2)\sigma^2, \\ \gamma_1 &= -\theta_1(1 + \theta_1^2)\sigma^2, \\ \gamma_{s-1} &= \theta_1 \theta_1 \sigma^2, \\ \gamma_s &= -\theta_1(1 + \theta_1^2)\sigma^2, \\ \gamma_{s+1} &= \theta_1 \theta_1 \sigma^2, \end{aligned} \quad (5.10)$$

а све остале аутоковаријансе су једнаке нули. На основу аутоковаријационе функције се добијају аутокорелациони коефицијенти:

$$\begin{aligned}\rho_0 &= \frac{-\theta_1}{1 + \theta_1^2}, \\ \rho_{s-1} &= \frac{\theta_1 \theta_1}{(1 + \theta_1^2)(1 + \theta_1^2)} = \rho_{s+1}, \\ \rho_s &= \frac{-\theta_1}{1 + \theta_1^2},\end{aligned}\tag{5.11}$$

а остали аутокорелациони коефицијенти су једнаки нули.

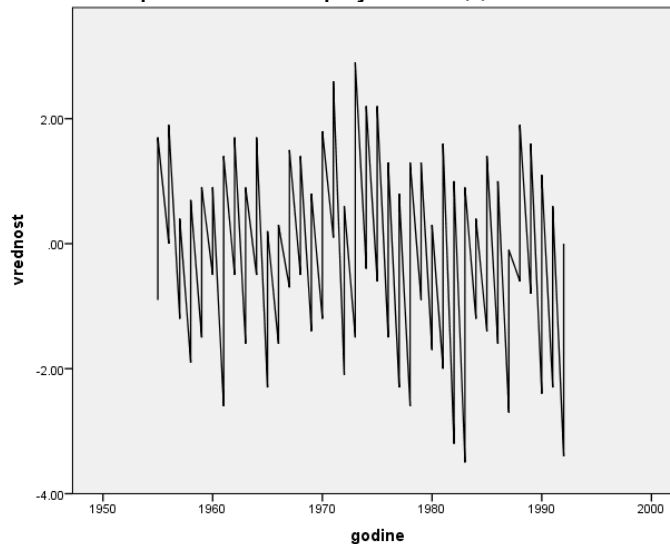
Ако је тачна претпоставка да серији одговара „ваздухопловни“ модел, тада варијанса оцењених узорачких аутокорелационих коефицијената на доцњама вишим од $s + 1$ гласи:

$$Var(\hat{\rho}_k) = \frac{1 + 2(\hat{\rho}_1^2 + \hat{\rho}_{s-1}^2 + \hat{\rho}_s^2 + \hat{\rho}_{s+1}^2)}{n}, k > s + 1.\tag{5.12}$$

Коришћењем овог резултата и познатог израза аутокорелационе функције (5.11) може се идентификовати сезонски $ARIMA(0,1,1) \times (0,1,1)_s$ модел.

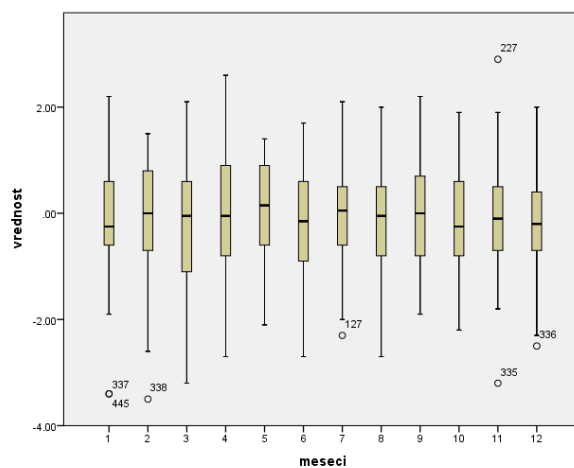
Пример 1. Графички приказ сезонске временске серије коришћењем пакета SPSS⁸

Слика 2. Приказ сезонске временске серије по годинама



⁸ Извор података: <https://www.itl.nist.gov/div898/handbook/pmc/section4/pmc4412.htm>

Слика 3. Приказ сезонске временске серије по месецима коришћењем Бокс плот дијаграма



Коришћена литература је [4], [7], [8] и [11].

6 ТЕСТОВИ ЈЕДИНИЧНОГ КОРЕНА

„Поред визуелног начина одређивања реда деференцирања на основу обичног и парцијалног узорачког корелограма, могуће је и на формалним статистичким поступком вршити тестирања о присуству једног или више јединичних корена. За приказ поступка тестирања биће користишћени ауторегресиони модели. Посматрајмо AR процес првог реда:

$$(1 - \alpha B)X_t = \varepsilon_t, \quad (6.1)$$

где је B тзв. оператор доцње.

За произвољну константу μ важи:

$$B\mu \equiv \mu.$$

Заменом једнакости $(1 - \alpha B) = [(1 - B) + (1 - \alpha)B]$, једначина (6.1) се пише у облику:

$$(1 - B)X_t + (1 - \alpha)X_{t-1} = \varepsilon_t, \quad (6.2)$$

односно

$$\Delta X_t = (\alpha - 1)X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (6.3)$$

где је $\Delta X_t = (1 - B)X_t$, при чему се коефицијент $(\alpha - 1)$ може оценити методом најмањих квадрата. Оцена коефицијента α омогућује тестирање нулте хипотезе: $\alpha = 1$, против алтернативне: $\alpha < 1$. Дакле, претпоставка нулте хипотезе је да је процес нестационаран, а претпоставка алтернативне је стационарност процеса.“([4])

Фулер (Fuller) је показао да однос коефицијента $(\alpha - 1)$ и његове стандардне грешке нема стандарду t -расподелу чак ни у асимптотском случају. Овај однос називамо Дики-Фулерова статистика (Dickey-Fuller). Расподелу ове статистике означавамо са τ .

Ако се у регресиони модел (6.3) уведе константа β_0 добиће се модел:

$$\Delta X_t = \beta_0 + (\alpha - 1)X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (6.4)$$

на основу кога се тестира нулту хипотезу о постојању јединичног корена. Затим се нултом хипотезом тестира да посматрани процес представља случајно лутање са константом. Увођењем ове константе у модел мења се расподела првобитне Дики-Фулерове статистике.

Ако се у једнакост (6.4) уведе линеарни тренд, могуће је исказати алтернативну хипотезу о тренд-стационарности посматране временске серије. При овом тестирање претпоставка нулте хипотезе је постојање диференцне-стационарности. Посматра се модел облика:

$$\Delta X_t = \beta_0 + \beta_1 t + (\alpha - 1)X_{t-1} + \varepsilon_t. \quad (6.5)$$

У случају ове модификације мења се првобитна расподела Дики-Фулерове статистике. У примени овог теста основна претпоставка је да серија резидуала оцењених модела (6.3), (6.4) и (6.5) представља процес белог шума. Чланови $X_{t-i}, i = 1, 2, \dots, p$ се уводе ако ова претпоставка није испуњена. При томе се претпоставља да је већа вероватноћа да ће серија резидуала проширеног модела следити процес белог шума, него што је то био случај пре проширивања модела. На овој начин добија се проширени Дики-Фулеров тест (енг. augmented Dickey-Fuller test). Тест статистику Дики-Фулеровог теста означава се са DF , док се тест статистика проширеног Дики-Фулеровог теста означава са ADF . Сада се при тестирању постојања јединичног корена користи модел:

$$\Delta X_t = \beta_0 + \beta_1 t + (\alpha - 1)X_{t-1} + \sum_{i=1}^p \lambda_i \Delta X_{t-i} + \varepsilon_t. \quad (6.6)$$

где је p број зависних променљивих са доцњом која се одређује тако да серија резидуала оцењеног модела представља процес белог шума. Овај тест заснован је на односу оцене коефицијента уз X_{t-i} и његове стандардне грешке.

Уколико на основу модела (6.6) одбацимо нулту хипотезу о постојању јединичног корена (дакле, није диференцно-стационарна), тада је могуће да је тренд-стационарна. Али ако се не одбаци нулта хипотеза о постојању једног јединичног корена, тада се тестира хипотеза о постојању другог јединичног корена. У том случају користи се прва диференца временске серије, која пореди однос коефицијента уз ΔX_{t-1} и одговарајућа критичне вредности Дики-Фулерове статистике, при чему зависна променљива ΔX_{t-1} постаје $\Delta \Delta X_{t-1}$.

У литератури Дики-Фулеров тест и проширени Дики-Фулеров тест називају се тестови засновани на „ t – односу”.

Поред ових тестова, Дики и Фулер дефинисали су тест статистике засноване на принципу количника максималне веродостојности који су засновани на регресионим F - тестовима. Ако претпоставимо да временској серији X_t одговара модел (6.4), тада се нулта хипотеза облика:

$$(\beta_0, \alpha) = (0, 1),$$

тестира коришћењем статистике количника веродостојности која се назива Φ_1 статистика.

Статистика Φ_1 рачуна се помоћу количника [3]:

$$\frac{((OSKG - BSKG)/g)}{BSKG/(n - k)} \quad (6.7)$$

има F расподелу са g и $(n - k)$ степени слободe, где је $OSKG$ ($BSKG$) сума резидуала у регресионом моделу са (без) ограничења на параметре, g број ограничења на параметре модела, n дужина временске серије, k број регресора у моделу без ограничења на параметре.

Тестира се нулта хипотеза облика:

$$(\beta_0, \beta_1, \alpha) = (0, 0, 1),$$

користећи модел (6.5). Тест статистика за тестирање ове хипотезе је Φ_2 статистика која се добија помоћу количника (6.7), при чему имамо три ограничења на параметра дефинисаних нултом хипотезом. Такође, истим моделом би се тестирала нулта хипотеза облика:

$$(\beta_0, \beta_1, \alpha) = (\beta_0, 0, 1).$$

За тестирање ове статистике користи се Φ_3 статистика. Основна претпоставка при овом тестирању је да постоји један јединични корен (временској серији одговара модел случајног лутања са константом). Ако се на основу Φ_3 статистике утврди одсуство линеарног тенда, користи се модел (6.4).

Критичне вредности Φ статистика налазе се у Табели 1.

Тест јединичног корена који је заснован на Дурбин-Ватсоновој (Durbin- Watson) статистици је тест који су предложили Саргн (Sargan) и Баргава (Bhargava). Посматра се модел:

$$X_t = \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t. \quad (6.8)$$

„Следећом формулом дефинисана је интеграциона Дурбин-Ватсонова статистика:

$$IDW = \frac{\sum_{t=2}^n (X_t - X_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2}, \quad (6.9)$$

где је $\bar{X}$ средина временске серије. Бројилац у изразу (6.9) једнак је суми квадрата резидуала када је $\alpha = 1$ у изразу (6.8). Тада се очекује да ће Дурбин-Ватсонова статистика дата изразом (6.9) бити једнака нули. Ако је IDW статистика

значајно већа од нуле тада је процес стационаран (нултог је реда интегрисаности).

Ако у израз (6.8) уведемо константу тада разматрамо процес случајног лутања са константом чија је тест статистика дефинисана са:

$$IDW_1 = \frac{\sum_{t=2}^n (X_t - X_{t-1})^2 - \frac{1}{n-1} (X_n - X_1)^2}{\frac{1}{(n-1)^2} \sum_{t=1}^n \left[(n-1)X_t - (t-1)X_n - (n-1)X_1 - (n-1) \left(\bar{X} - \frac{1}{2}(X_1 + X_n) \right) \right]^2} \quad (6.10)$$

и која се користи за тестирање присуства јединичног корена. Уколико је израчуната вредност статистике (6.8) и (6.9) већа од одговарајуће критичне вредности дате у Табели 2, тада се нулта хипотеза одбацује.“ ([4])

Табела 1. Критичне вредности Дики-Фулеровог теста

N	Модел	Ниво значајности	β_∞	Грешка оцене	β_1	β_2
1	Без константе	1%	-2.5658	0.0023	-1.960	-10.04
		5%	-1.9393	0.0008	-0.0398	0.00
		10%	-1.6156	0.0007	-0.181	0.00
1	Без тренда	1%	-3.4335	0.0024	-5.999	-29.25
		5%	-2.8621	0.0011	-2.738	-8.36
		10%	-2.5671	0.0009	-1.438	-4.48
1	Са трендом	1%	-3.9638	0.0019	-8.353	-47.44
		5%	-3.4126	0.0012	-4.039	-17.83
		10%	-3.1279	0.0009	-2.418	-7.58
2	Без тренда	1%	-3.9001	0.0022	-10.534	-30.03
		5%	-3.3377	0.0012	-5.967	-8.98
		10%	-3.0462	0.0009	-4.069	-5.73
2	Са трендом	1%	-4.3266	0.0022	-15.531	-34.03
		5%	-3.7809	0.0013	-9.421	-15.06
		10%	-3.4959	0.0009	-7.203	-4.01
3	Без тренда	1%	-4.2981	0.0023	-13.79	-46.37
		5%	-3.7429	0.0012	-8.352	-13.41
		10%	-3.4518	0.0010	-6.241	-2.79
3	Са трендом	1%	-4.6676	0.0022	-18.492	-49.35
		5%	-4.1193	0.0011	-12.024	-13.13
		10%	-3.8344	0.0009	-9.188	-4.85
4	Без тренда	1%	-4.6493	0.0023	-17.188	-46.37
		5%	-4.1000	0.0012	-10.745	-13.41
		10%	-3.4518	0.0009	-6.241	-2.79
4	Са трендом	1%	-4.6676	0.0021	-18.492	-49.35
		5%	-4.1193	0.0012	-12.024	-13.13
		10%	-3.8344	0.0010	-9.188	-4.85

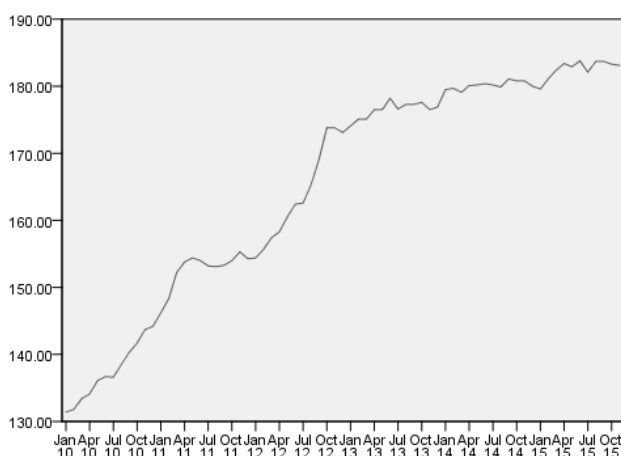
где N представља број серија за које се тестира нулта хипотеза да нису коинтегрисане, β_{∞} представља асимптотску критичну вредност са стандардном грешком оцене у наредној колони.

Табела 2. Критичне вредности Дурбин-Ватсонове статистике

Величина узорка	Процес случајног лутања			Процес случајног лутања са константом		
	1%	2.5%	5%	1%	2.5%	5%
20	1.50	1.28	1.10	1.86	1.62	1.45
25	1.28	1.08	0.93	1.57	1.36	1.21
30	1.11	0.92	0.79	1.36	1.18	1.04
35	0.98	0.81	0.69	1.18	1.05	0.91
40	0.87	0.73	0.61	1.06	0.93	0.81
45	0.79	0.66	0.55	0.97	0.86	0.73
50	0.72	0.59	0.50	0.89	0.76	0.66
60	0.63	0.51	0.42	0.75	0.65	0.56
70	0.54	0.44	0.37	0.66	0.56	0.48
80	0.47	0.39	0.32	0.58	0.50	0.43
90	0.41	0.35	0.29	0.52	0.45	0.39
100	0.37	0.32	0.26	0.47	0.40	0.35

Пример 2. Како је одређивање стационарности први корак при анализи временских серија, у овом примеру је приказана провера стационарности, односно провера постојања јединичног корена кроз програмске пакете СПСС (SPSS) и Р (R). Анализирамо временску серију која представља индекс потрошачких цена у Републици Србији⁹. Месечно кретање индекса потрошачких цена у периоду од јануара 2010. до новембра 2015. приказано је на Слици 4. Стационарност временске серије ће се кроз овај пример проверавати коришћењем корелограма из пакета СПСС, као и статистичким тестовима из пакета Р.

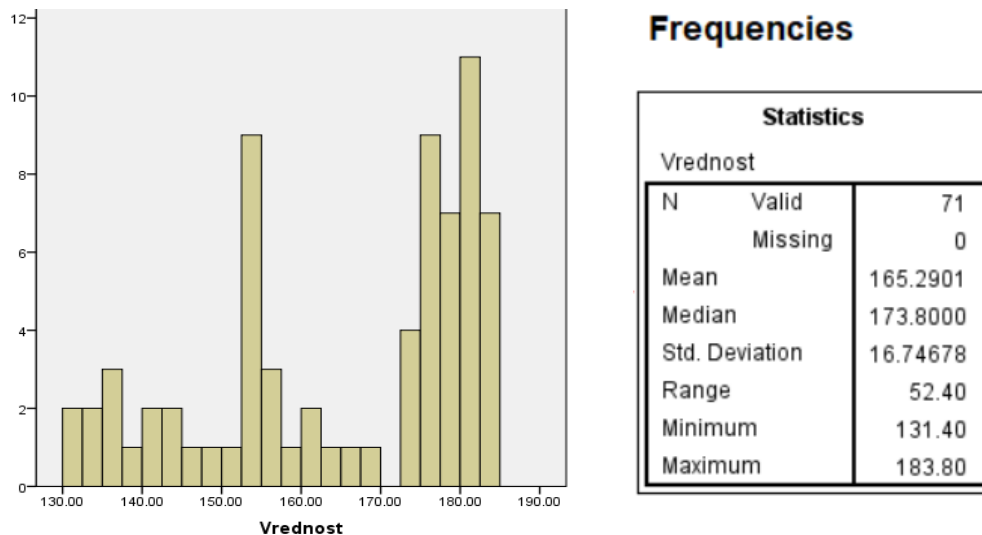
Слика 4. Месечно кретање индекса потрошачких цена јануара 2010 - новембар 2015



⁹ Извор података: Републички завод за статистику

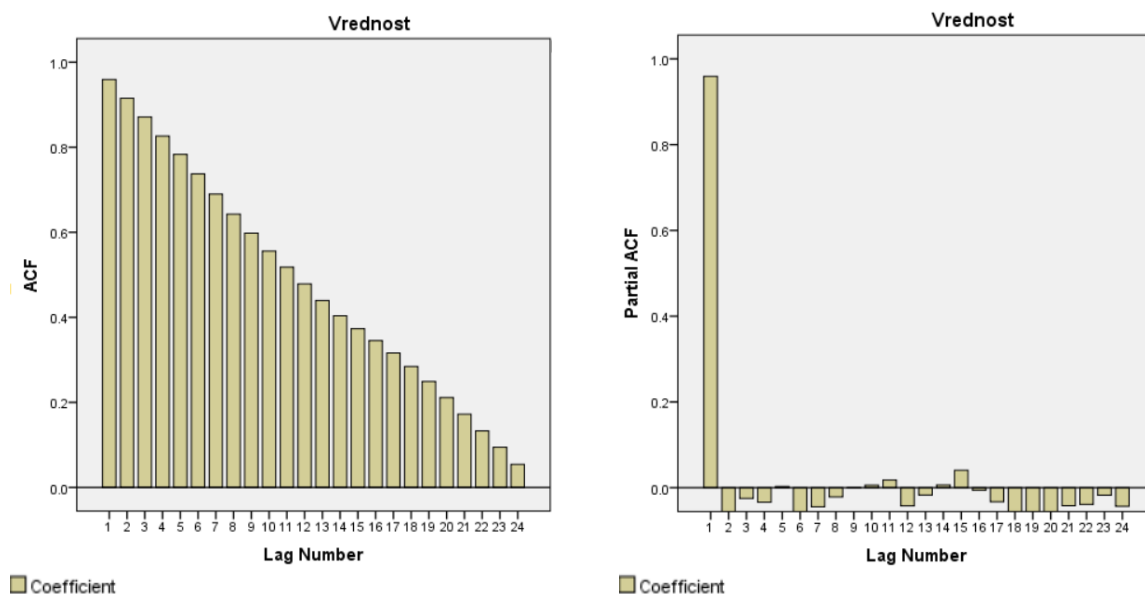
На хистограму (Слика 5.) је приказано месечно кретање индекса потрошачких цена у току 71 месеци. Индекс се кретао у интервалу од најнижег 131.40 у току јануара 2010 до највишег 183.80 забележеног у јуну 2015. Средња вредност је 165.29, док је стандардно одступање 16.75.

Слика 5. Хистограм месечног кретања индекса потрошачких цена и фреквенције



На основу корелограма (Слика 6.) добијених применом СПСС-а може се закључити да серија није стационарна.

Слика 6. Корелограми (обична и парцијална аутокорељациона функција)



На основу резултата *ADF* и *KPSS* теста (Слика 7.) може се закључити да серија није стационарна.

Слика 7. Приказ *ADF* и *KPSS*¹⁰ теста

```
Augmented Dickey-Fuller Test

data: baza$B
Dickey-Fuller = -1.0892, Lag order = 4, p-value = 0.9176
alternative hypothesis: stationary

KPSS Test for Level Stationarity

data: baza$B
KPSS Level = 3.4057, Truncation lag parameter = 1, p-value = 0.01
```

Велика p вредност у *ADF* тесту и мала p вредност у *KPSS* доводи до закључка да је серија настационарна и да је потребно извршити диференцирање како би се добила стационарна временска серија.

Литература коришћена за писање поглавља је [4], [8], [9] и [11].

¹⁰ *KPSS* тестом се тестира нулта хипотеза да је временска серија стационарна, а алтернативна да постоји јединични корен.

7 БОКС-ЏЕНКИНСОВА СТРАТЕГИЈА

Општу стратегију моделирања *ARIMA* процеса конципирали су Бокс и Џенкинс, па се према њима ова стратегија назива Бокс-Џенкинсова методологија. Ова методологија има три основне етапе: идентификација модела, његово оцењивање и провера његове адекватности. „Да би модел био добар потребно је да задовољи следеће принципе: економичност, идентификабилност, конзинстентност са подацима, конзинстентност са теоријом, прихватљивост података, успешност прогнозирања и обухватност.

1. *Економичност (енг. parsimony).* Циљ овог принципа је да се на што једноставнији начин опише посматрана појава. Каже се да је економичан онај модел који садржи релативно мали број коефицијената. Уколико су код два модела остале особине једнаке, једноставнији модел је пожељнији од сложенијег. Првобитни модел се затим проширује да би се на основу статистичких тестова утврдило да ли је оправдано да се уместо једноставнијег користи сложенији. Овај приступ се често користи у анализи временских серија. Неки аналитичари препоручују другачији приступ. Да се од општег дође до посебног. Према овом принципу полази се од општег модела, а затим се статистичким тестовима врши његово редуковање.
2. *Идентификабилност (енг. Identifiability).* Када модел није идентификован постоје барем два скупа вредности коефицијената који су у сагласности са подацима. Овај принцип је битан како код економетријског модела тако и код вишедимензионих и структурних модела временских серија.
3. *Конзинстентност са подацима.* Провера конзинстентности са подацима спроводи се помоћу разних статистичких тестова. Од модела се очекује да обезбеди добро прилагођавање подацима, а резидуали морају бити релативно мали и да имају карактеристике потпуно случајног процеса.
4. *Конзинстентност са теоријом.* Модел мора бити конзинстенан са претходним сазнањем без обзира на то да ли је извор тог сазнања у теорији или здравом разуму.
5. *Прихватљивост података.* Модел не сме да предвиђа вредности које не задовољавају нека дефинициона ограничења.
6. *Успешност прогнозирања.* Овај принцип указује на прецизност прогноза добијених на основу модела временских серија. Овај принцип је у блиској вези са појмом структурне стабилности, односно константности

коэффициента модела. За модел кажемо да је структурно стабилан уколико његово поновно оцењивање, на основу опсервација ван узорка који је коришћен за првобитно оцењивање, не доводи до статистички значајне промене оцењених коефицијената. Код модела временских серија критеријум успешности прогнозирања проверавамо тако што користимо опсервације ван узорка за оцењивање у циљу провере степена прецизности прогноза модела. Уколико један од модела има мању средње квадратну грешку прогнозе, а све остале карактеристике модела су једнаке, тада за тај модел кажемо да је успешнији са становништа прогнозирања, те је прихватљивији за коришћење од конкурентских модела.

7. *Обухватност* (енг. *encompassing*). За модел се каже да обухвата конкурентски модел ако може да објасни резултате добијене тим другим моделом. У том случају конкурентски модел не садржи информације које би се могле користити у циљу побољшања изабраног модела. Да би модел имао ову особину не мора бити општији од конкурента. Модел поред тога што треба да објасни и опише податке, треба да објасни успех или промашај конкурентског модела у објашњењу истих података.“ ([4])

Према Бокс-Џенкинсовој методологији за идентификацију *ARIMA* модела поред узорачких, обичних и парцијалних корелограма, користе се и формални статистички тестови јединичног корена за ред диференцирања (Поглавље 6), инверзна аутокорељациона функција као и бројни критеријуми избора реда процеса. На крају овог поглавља биће приказано како се врши провера адекватности оцењених модела.

Бокс-Џенкинсова методологија заснована је на троетапном поступку градње модела временских серија: идентификација, оцењивање и провера адекватности.

7.1 Идентификација модела

Под овом етапом подразумева се поступак коришћења података временске серије у циљу издвајања уже класе економичних *ARIMA* модела који могу бити потенцијални генератори датог скупа података. Применом Бокс-Џенкинсове методологије најпре се на основу графика временске серије, обичних и парцијалних корелограма утврди да ли је потребно серију претходно трансформисати (коришћењем Бокс-Коксове трансформације¹¹ или диференцирањем), да би се

¹¹ За временску серију X_t и коефицијент трансформације λ , трансформисана серија је:

$$X_t^{(\lambda)} = \begin{cases} \frac{(X_t^2)}{\lambda}, & \lambda \neq 0 \\ \log X_t, & \lambda = 0 \end{cases}.$$

затим изабрала одговарајућа класа AR, MA или $ARMA$ модела. Са изабраним моделом прелази се на наредну етапу.

У процесу идентификације модела полазимо од $ARIMA(p, d, q)$ модела:

$$(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p)(1 - B)^d X_t = \theta_0 + (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q) \varepsilon_t \quad (7.1)$$

„Процес индентификације $ARIMA$ модела има следеће етапе:

- На основу графичког приказа временске серије врши се избор трансформације. На основу графика може се добити информација да ли серија садржи тренд, сезону, нестандардне опсервације, променљиву варијансу или да ли има неку необичну карактеристику.
- Користе се обичне и парцијалне аутокореелационе функције ради утврђивања потребног реда диференцирања.
- Следећи корак је одређивање p и q . Код несезонских временских серија p и q су обично мањи од три.
- Одређивање реда диференцирања. Пре ове етапе претпостави се да је урађена Бокс-Коксова трансформација. Уколико узорачка аутокореелациона функција опада, то је показатељ да је у питању нестационарност и да постоји потреба за диференцирањем. За одређивање реда диференцирања користе се и тестови јединичног корена који су детаљно објашњени у Поглављу 6.
- Одређивање реда процеса. Ред процеса се одређује на основу оцењених аутокореелационих функција за диференцирану серију, тако што се пореди изглед узорачког корелограма са изгледом теоријских корелограма познатих модела нижег реда.
- Избор модела. Бокс-Џенкинсовом методологијом се препоручује да се за избор одговарајућег модела користи статистички утемељен скуп правила. Код свих тих правила прва претпоставка је да је ред диференцирања унапред одређен, а циљ поступка јесте одређивање одговарајуће вредности p и q . Први корак је минимизирање функције:

$$\delta(p, q) = \ln \widehat{\sigma}_{p,q}^2 + \frac{p+q}{n} g(n) \quad (7.2)$$

где је $\widehat{\sigma}_{p,q}^2$ оцена варијансе резидуала $ARMA(p, q)$ модела добијена по методи највеће веродостојности, $g(n)$ представља ненегативну функцију пенала или казнену функцију.“ ([4])

Функцијом $\delta(p, q)$ описане су две међусобно супротне појаве. Овом функцијом се прво може постићи смањење варијансе, односно прецизније

оцењивање, што се постиже повећањем броја коефицијената. Истом функцијом постиже се економичност у градњи модела, што је могуће смањењем броја коефицијента. Два споменута циља су могућа јер се повећањем броја коефицијента $\ln \widehat{\sigma}_{p,q}^2$ смањује, а $(p+q)q(n)/n$ расте.

Ако је у изразу (7.2) $g(n) = 2$, добиће се Акаикеов (Ekeik) информациони систем, у ознаци AIC . Акаике је предложио и критеријум коначне грешке прогнозирања, у ознаци FPE , који се добија на следећи начин:

$$FPE(p, q) = \frac{n + p + q}{n - p - q} \widehat{\sigma}_{p,q}^2.$$

Бајесов информациони критеријум добија се када је у (7.2) $g(n) = \ln(n)$.

У пракси се користе и критеријуми код којих први сабирак укључује варијансу грешке прогнозе за један корак унапред, а други сабирак узима у обзир број оцењених коефицијената, односно узима се у обзир казна уколико се повећава број коефицијената. Нека су P и Q фиксне границе полинома $\phi(B)$ и $\theta(B)$. Вредности p^* и q^* бирају се тако да се добије минимум функције $AIC(p, q)$, при чему AIC представља Акаикеов информациони критеријум. Дакле, тражи се функција:

$$AIC(p^*, q^*) = \min_{p,q} AIC(p, q), p \in \{0, 1, \dots, P\}, q \in \{0, 1, \dots, Q\}.$$

- Одређивање инверзне аутокорељационе функције. Инверзна аутокорељациома функција у Бокс-Џенкинсовој методологији представља аутокорељациону функцију $ARMA$ модела у коме су полиноми $\phi(B)$ и $\theta(B)$ заменили места. Дакле, ако за диференцирану серију W_t важи $\phi(B)W_t = \theta(B)$, тада се одговарајући процес $ARMA(q, p)$ назива дуални или инверзни процес.

„Инверзна аутокорељациона функција се може као и парцијална користити за одређивање реда процеса. Зато се аутокорељациона функција сматра конкурентом парцијалној функцији у одређивању реда процеса. Једини недостатак ове функције јесте компликовано оцењивање. Један од начина јесте апроксимација AR серије процесом вишег реда.

Инверзни аутокорељациони коефицијент на k -тој доцњи за $AR(p)$ дефинише се следећом формулом:

$$\rho_k^{(I)} = \begin{cases} \frac{-\phi_k + \sum_{j=1}^{p-k} \phi_j \phi_{j+k}}{1 + \sum_{j=1}^p \phi_j^2}, & k \leq p \\ 0, & k > p \end{cases}.$$

За тестирање статистичке значајности инверзних аутокералионих функција може се користити 95% интервал поверења једнак $\pm \frac{1.96}{\sqrt{n}}$. ” ([4])

Парцијална аутокорелациона функција се ређе користи у пракси због компликованог рачуна приликом оцењивања.

7.2 Оцењивање

Када се врши оцењивање потребно је ефикасно искористи расположиве податке у циљу закључивања о његовим коефицијентима.

Први корак при оцени параметара јесте оцењивање средине и варијансе.

$\mu = E(X_t)$ - оцена средине.

$\sigma^2 = E(\varepsilon_t^2)$ - оцена варијансе.

Затим, је потребно оценити коефицијенте $\phi' = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p]$ и $\theta' = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q]$, у моделу:

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p)(X_t - \mu) = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q)\varepsilon_t \quad (7.3)$$

где је $X_t, t = 1, 2, \dots, n$ стационарна серија или је постала стационарна након трансформације, а ε_t једнако расподељене случајне величине са $N(0, \sigma^2)$ расподелом.

7.2.1 Метод момената

Овај метод заснован је на изједначавању одговарајућих теоријских момената који су функција непознатих коефицијената модела са одговарајућим реализованим вредностима узорачких момената. На пример, овим методом добија се да је узорачка средина $\bar{X}$, оцена средине популације μ .

Користећи формуле:

$$\gamma_k - \phi_1 \gamma_{k-1} = E(\varepsilon_t X_{t-k}), k > 0$$

$$\frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \rho_k = \phi_1 \rho_{k-1},$$

за случај $AR(1)$ модела имамо везу $\rho_1 = \phi_1$. Према методу момената, ρ_1 је једнако са r_1 који представља узорачки аутокорелациони коефицијент на првој доцњи. Тада је оцена коефицијента ϕ_1 дефинисана са:

$$\hat{\phi}_1 = r_1.$$

У случају $AR(2)$ модела користимо везе $\rho_1 = \phi_1 + \phi_2\rho_1$ и $\rho_2 = \phi_2 + \phi_1\rho_1$. Према методу момената важи $\rho_1 = r_1$ и $\rho_2 = r_2$ па се добија:

$$\begin{aligned} r_1 &= \phi_1 + \phi_2 r_1 \\ r_2 &= \phi_2 + \phi_1 r_1, \end{aligned}$$

те се решавањем претходних једначина добијају оцене:

$$\hat{\phi}_1 = \frac{r_1(1 - r_2)}{1 - r_1^2},$$

$$\hat{\phi}_2 = \frac{r_2 - r_1^2}{1 - r_1^2}.$$

У општем случају, за процес $AR(p)$ оцене коефицијената $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ рачунају се решавањем следећих једначина:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \phi_1 + \rho_1\phi_2 + \dots + \rho_{p-1}\phi_p \\ &\vdots \\ \rho_p &= \rho_{p-1}\phi_1 + \rho_{p-2}\phi_2 + \dots + \phi_p \end{aligned}$$

које се називају Јул-Вокерове (Yule-Walker) једначине. Према методи момената ρ_k замењују се са r_k . Оцена варијансе белог шума рачуна се помоћу формуле:

$$\hat{\sigma}^2 = S^2(1 - \hat{\phi}_1 r_1 - \hat{\phi}_2 r_2 - \dots - \hat{\phi}_p r_p),$$

где је S^2 узорачка коваријанса процеса која представља непристрасну оцену¹² непознате варијансе. А оцена средине представља средину опсервација временске серије.

За $AR(1)$ модел важи $\hat{\phi}_1 = r_1$, па је оцена варијансе процеса белог шума:

$$\hat{\sigma}^2 = S^2(1 - r_1^2).$$

За $MA(1)$ процес важи:

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1}{1 + \theta_1^2}.$$

Када ρ_1 заменимо са r_1 добићемо квадратну једначину:

$$r_1\theta_1^2 + \theta_1 + r_1 = 0,$$

коју решавамо по θ_1 . Ова једначина има два реална корена ако је $|r_1| < 0.5$. Међутим, само један од њих задовољава услов инвертабилности. Тада се оцена непознатог коефицијента $MA(1)$ процеса по методи момената рачуна према формули:

¹² Нека је $X_1, X_2, \dots, X_n$ прост случајан узорак обима n за обележје X и нека је θ непознати параметар у расподели обележја X . Статистика $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ је непристрасна оцена параметра θ ако је:

$$E(f(X_1, X_2, \dots, X_n)) = \theta.$$

$$\hat{\theta}_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4r_1^2}}{2r_1}.$$

Ако је $r_1 = \pm 0.5$ тада постоји јединствено решење квадратне једначне једнако ± 1 , али које није инвертабилно. У пракси се врло често дешава да је $|r_1| > 0.5$. Тада не постоји јединствено решење квадратне једначине, па се коефицијенти не могу оценити методом момената.

Оцена средине представља средину опсервација временске серије, док се оцена варијансе белог шума рачуна према формули:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{S^2}{1 + \hat{\theta}_1^2}.$$

Примена методе момената на $MA(q), q > 1$ моделе је много сложенија јер је потребно решити q једначина са q непознатих коефицијената.

Оцењивање $ARMA(1,1)$ модела врши се помоћу аутокореелационе функције:

$$\rho_k = \frac{(\phi_1 - \theta_1)(1 - \phi_1\theta_1)}{1 - 2\phi_1\theta_1 + \theta_1^2} \phi_1^{k-1},$$

где је $\phi_1 = \frac{\rho_1}{\rho_2}$ па је оцена за ϕ_1 дата формулом:

$$\hat{\phi}_1 = \frac{r_2}{r_1}.$$

Оцена за θ_1 добија се решавањем квадратне једначине:

$$r_1 = \frac{(\hat{\phi}_1 - \theta_1)(1 - \hat{\phi}_1\theta_1)}{1 - 2\hat{\phi}_1\theta_1 + \theta_1^2}.$$

Средина се оцењује као средина опсервација стационарне временске серије. Оцена варијансе процеса белог шума оцењује се са:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1 - \hat{\phi}_1^2}{1 - 2\hat{\phi}_1\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_1^2} S^2.$$

7.2.2 Метод нелинеарних најмањих квадрата

За AR модел се вредности временске серије с доцњом посматрају као регресори у класичном регресионом моделу. Важи да ако су испуњене претпоставке о некорелисаности грешака модела и њихове независности од регресора, тада применом метода обичних најмањих квадрата у класичном регресионом моделу добијамо непристрасне и конзистентне оцене. Тако, на пример, за $AR(1)$ модел који је облика:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \xi_t,$$

методом обичних најмањих квадрата оцена непознатог коефицијента је:

$$\hat{\phi}_1 = \frac{\sum_{t=2}^n X_t X_{t-1}}{\sum_{t=2}^n X_{t-1}^2} = \frac{\sum_{t=2}^n (\phi_1 X_{t-1} - \xi_t) X_{t-1}}{\sum_{t=2}^n X_{t-1}^2} = \phi_1 + \frac{\sum_{t=2}^n \xi_t X_{t-1}}{\sum_{t=2}^n X_{t-1}^2}.$$

Ако серија грешака ξ_t представља процес белог шума, тада је очекивана вредност оцене $\hat{\phi}_1$ једнака непознатом коефицијенту ϕ_1 . Дакле, у том случају оцена методом обичних најмањих квадрата у $AR(1)$ моделу представља непристрасну оцену непознатог коефицијента.

„Ако серија грешака ξ_t не представља процес белог шума, тада се полазни $AR(1)$ модел може дефинисати као $ARMA(1,1)$ модел дефинисан формулом:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}.” ([4])$$

Тада је $E(X_{t-1} \xi_t) = -\theta_1 \sigma^2 \neq 0$, што значи да је серија грешака корелисана са регресором у моделу. Овом особином модела временске серије нарушена је основна претпоставка класичног регресионог модела, па оцена коефицијента ϕ_1 није ни непристрасна, ни конзистентна.

Дакле, метода обичних најмањих квадрата даје непристрасне и конзистентне оцене ако се ради о AR моделима. Ако се ради о MA или $ARMA$ моделима, тада примена метода обичних најмањих квадрата даје пристрасне и неконзистентне оцене непознатих коефицијената. Зато се у пракси при анализи временске серије чешће користи метод нелинеарних најмањих квадрата.

За оцењивање коефицијента $MA(q)$ или $ARMA(q)$ користи се Гаус-Њутнов (Gauss-Newton) алгоритам. Овим алгоритмом апроксимира се функција $\varepsilon_t = \varepsilon_t(\theta_1)$ Тејлоровим развојем функције око почетне оцене θ_1^* :

$$\varepsilon_t(\theta_1) \approx \varepsilon_t(\theta_1^*) + (\theta_1 - \theta_1^*) \frac{d\varepsilon_t(\theta_1^*)}{d\theta_1}.$$

За $MA(1)$ модел први извод функције по непознатом коефицијенту је облика:

$$\varepsilon_t = X_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1},$$

па је

$$\frac{d\varepsilon_t(\theta_1)}{d\theta_1} = \frac{\theta_1 d\varepsilon_{t-1}(\theta_1)}{d\theta_1} + \varepsilon_{t-1}(\theta_1),$$

са почетном вредношћу $\frac{d\varepsilon_0(\theta_1)}{d\theta_1}$. Пошто је Тејлоров развој линеаран по непознатом параметру, сума квадрата рачуната помоћу њега се може минимизирати да би се добила нова оцена за θ_1 . Поступак се итеративно наставља уз замену вредности θ_1^* новом оценом. Поступак се завршава када разлика између оцена или суме квадрата резидуала у две узастопне итерације буде довољно мала.

Оцене за $MA(q)$ и $ARMA(p,q)$ захтевају вишедимензиони Гаус-Њутнов алгоритам. Сваки поступак има два заједничка елемента без обзира на број коефицијената за која се врши оцењивање. Први елемент представља избор почетних вредности коефицијената које су потребне како би започео итеративни поступак. Други елемент представља одређивање почетних вредности грешака и опсервација код модела. То се врши тако што се функцијом $\varepsilon_t = \varepsilon_t(\phi_1, \theta_1)$ минимизира условна сума квадрата $S(\phi_1, \theta_1) = \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2$. Модел $ARMA(1,1)$ се може записати у облику:

$$\varepsilon_t = X_t - \phi_1 X_{t-1} + \theta_1 \varepsilon_{t-1}.$$

На основу опсервација серије могу се израчунати резидуали, а затим и тражену вредност суме квадрата. Да би се то постигло, морају се прво одредити ε_0 и X_0 . Вредност ε_0 се одређује тако што се изједначи са очекиваном вредношћу, док се за X_0 узима да је једнако нули. Уколико је у модел укључена и константа, онда се узима средина свих опсервација.

7.2.3 Метод највеће веродостојности

Метод највеће веродостојности користи се када се врши оцењивање коефицијента $ARMA$ модела за врло кратке временске серије. Овај метод користи све информације које даје временска серије, а не само прва два момента као у случају методе момената. Такође, овај метод користи већ познате асимптотске резултате који важе под општим условима.

Посматрајмо $ARMA(p,q)$ модел:

$$X_t - \mu = \phi_1(X_{t-1} - \mu) + \dots + \phi_p(X_{t-p} - \mu) + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q\varepsilon_{t-q}.$$

Претпоставља се да за процес белог шума $\{\varepsilon_t\}$ важи да су елементи међусобно независни и подједнако расподељени са $N(0, \sigma^2)$ расподелом. Функција густине за $\varepsilon' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ дефинисана је са:

$$P(\varepsilon|\phi, \mu, \theta, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left[\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2\right],$$

где је $\phi' = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p)$ и $\theta' = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q)$. $ARMA(p, q)$ модел се може написати у облику:

$$\varepsilon_t = \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q} + (X_t - \mu) - \phi_1 (X_{t-1} - \mu) - \dots - \phi_p (X_{t-p} - \mu).$$

Сада се може дефинисати функција густине за $X' = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ која је еквивалентна функцији веродостојности коефицијента $(\phi, \mu, \theta, \sigma^2)$. Облика је:

$$L(\phi, \mu, \theta, \sigma^2 | X) = g_1(\phi, \mu, \theta, \sigma^2) \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} S(\phi, \mu, \theta) \right] \quad (7.4)$$

где је g_1 функција непознатих коефицијентата, док се функција

$$S(\phi, \mu, \theta) = \sum_{t=1-p-q}^n E(u_t | \omega)^2,$$

назива безусловна сума квадрата, а функција L безусловна функција веродостојности. Важи $\omega = (X, \phi, \mu, \theta, \sigma^2)$, одакле је $E(u_t | \omega)$ условна очекивана вредност од u_t за дате опсервације временске серије и непознате коефицијенте модела који се оцењују. Процес u_t дефинише се са:

$$u_t = \begin{cases} \varepsilon_t, & t = 1, 2, \dots, n \\ g_2(X^*, \varepsilon^*), & t \leq 0 \end{cases},$$

где је g_2 линеарне функција почетних вредности $X^* = (X_{1-p}, \dots, X_{-1}, X_0)$ и $\varepsilon^* = (\varepsilon_{1-q}, \dots, \varepsilon_{-1}, \varepsilon_0)$. Функције g_1 и g_2 су специфичне за сваки $ARMA$ модел.

Максимизирањем функције (7.4) добијају се оцене највеће веродостојности непознатих коефицијената. Коришћењем алгоритама могу се добити нумерички довољно тачна апроксимативна решења. У тим случајевима, функција g_1 отежава максимизирање функције веродостојности. Обично се занемарује функција g_1 и максимизира функција $\exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} S(\phi, \mu, \theta) \right]$ или што је еквивалентно минимизира се $S(\phi, \mu, \theta)$ а затим се користи метод најмањих квадрата.

Варијансе и корелације међу оценама коефицијената су:

$$AR(1): Var(\hat{\phi}_1) \approx \frac{1 - \phi_1^2}{n}$$

$$AR(2): Var(\hat{\phi}_1) \approx Var(\hat{\phi}_2) \approx \frac{1 - \phi_2^2}{n}$$

$$AR(2): Corr(\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2) \approx \frac{\phi_1}{1 - \phi_2} = -\rho_1$$

$$MA(1): Var(\hat{\theta}_1) \approx \frac{1 - \theta_1^2}{n}$$

$$MA(2): Var(\hat{\theta}_1) \approx Var(\hat{\theta}_2) \approx \frac{1 - \theta_2^2}{n}$$

$$MA(2): Corr(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) \approx \frac{\theta_1}{1 - \theta_2}$$

$$ARMA(1,1): Var(\hat{\phi}_1) \approx \frac{1 - \phi_1^2}{n} \left(\frac{1 - \phi_1 \theta_1}{\phi_1 - \theta_1} \right)^2$$

$$ARMA(1,1): Var(\hat{\theta}_1) \approx \frac{1 - \theta_1^2}{n} \left(\frac{1 - \phi_1 \theta_1}{\phi_1 - \theta_1} \right)^2$$

$$ARMA(1,1): Corr(\hat{\phi}_1, \hat{\theta}_2) \approx \frac{\sqrt{(1 - \phi_1^2)(1 - \theta_1^2)}}{1 - \phi_1 \theta_1}$$

„Када се вредност коефицијента ϕ_1 приближава границама стационарности варијанса оценое коефицијента $AR(1)$ модела се смањује.“([4]) Оцена коефицијента ϕ_1 биће непрецизнија ако серији прилагођавамо $AR(2)$ модел, а $\phi_2=0$. „У случају $ARMA(1,1)$ модела када су коефицијенти ϕ_1 и θ_1 приближно једнаки међусобно, варијанса оценое оба коефицијента може узети веома велике вредности. У случају $AR(2)$, $MA(2)$ и $ARMA(1,1)$ модела оценое коефицијената могу бити високо корелисане чак и у великим узорцима.“([4])

У пракси се саветује да се у малим узорцима користи метод највеће веродостојности, посебно када се вредности коефицијената приближавају границама инвертабилности. Ако ова вредност није блиска границама инвертабилности тада се може користити и метод условних најмањих квадрата. За финалну оценоу се ређе користи метод момената и најмањих квадрата јер приликом оцењивања варијансе процеса белог шума метод условних најмањих квадрата може довести до прецењивања, а метод безусловних најмањих квадрата може довести до потцењивања праве вредности.

7.3 Провера адекватности

Под провером адекватности модела подразумева се суочавање прилагођеног модела подацима у циљу откривања његових евентуалних недостатака. Основни кораци су: проверка статистичке значајности оцењених коефицијената и испуњености претпоставке да резидуали оцењеног модела представљају процес белог шума. Уколико се покаже да модел није задовољавајући, могуће је његово побољшање, па се наставља поступак градње $ARIMA$ за дату временску серију. У

супротно, адекватан модел се може користити за прогнозирање. Дакле, провером адекватности модела проверава се да ли су испуњене претпоставке модела.

Прва претпоставка је да $\{\varepsilon_t\}$ представља процес белог шума. „То значи да су ε_t независне случајне величине са средином нула и константном варијансом.“([4]) Да би се извршила анализа модела, прво се анализира добијена серија резидуала који представљају оцене белог шума. Посматра се хистограм резидуала ($\hat{\varepsilon}_t/\hat{\sigma}$) како би се утврдило да ли су резидуали нормално распоређени. Затим се коришћењем χ^2 - теста тестира хипотеза да резидуали заправо и имају нормалну расподелу.

Провера да оцењени резидуали представљају процес белог шума, врши се на основу израчунате узорачке, обичне или парцијалне аутокорелационе функције тако што се тестира статистичка значајност сваког појединачног коефицијента. На крају, испитивање адекватности модела врши се оценом општијег модела и провером његових особина у односу на изабрани модел.

Тестирање статистичке значајности оцењене узорачке, обичне и парцијалне аутокорелационе функције врши се тако што се тестира хипотеза о вредности одговарајућих аутокорелационих коефицијената. Ако је тачна претпоставка да серија резидуала представља процес белог шума, њени аутокорелациони коефицијенти на свим доцњама требало би да буду једнаки нули. Статистички поступак је заснован на израчунатим аутокорелационим коефицијентима и њиховој стандардној грешци која је према апроксимацији једнака $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Бокс и Пирс (Pirs) су дефинисали тест статистику:

$$Q = n \sum_{k=1}^K \hat{\rho}_k^2,$$

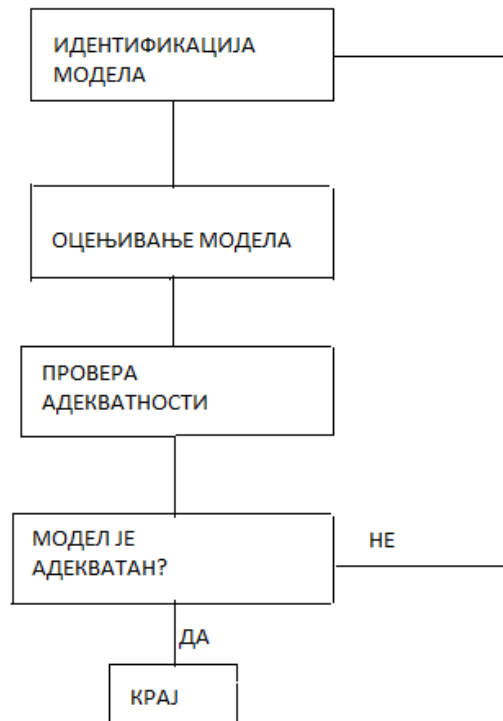
којом тестирамо нулту хипотезу да су сви аутокорелациони коефицијенти једнаки нули, против алтернативне да је бар један различит од нуле. Важи да за довољно велико n , Q има χ^2 - расподелу са $K - p - q$ степени слободе. Уколико модел има и константу, тада се овај број степени слободе умањује за један. Максималан број аутокорелационих коефицијената K се бира тако да пондери ψ_j буду занемарљиви за $j > K$. У пракси се препоручује да је $K = \sqrt{n}$.

Да би расподела Q тест статистике под нултом хипотезом била што ближе χ^2 -расподели, користи се модификација:

$$Q^* = n(n+2) \sum_{k=1}^K \frac{\hat{\rho}_k^2}{n-k}.$$

Из неједнакости $\frac{n+2}{n-k} > 1$ важи $Q < Q^*$.

Из свега дефинисаног, закључује се да се Бокс-Џенкинсова стратегија може приказати следећим дијаграмом:



На основу дијаграма се види да ако модел није адекватан потребна је његова поновна спецификација. Следи затим поновно оцењивање новог модела и провера његове адекватности. Дакле, градња модела се може сматрати итеративним процесом који се завршава када се нађе одговарајући модел у складу са општим принципима моделирања.

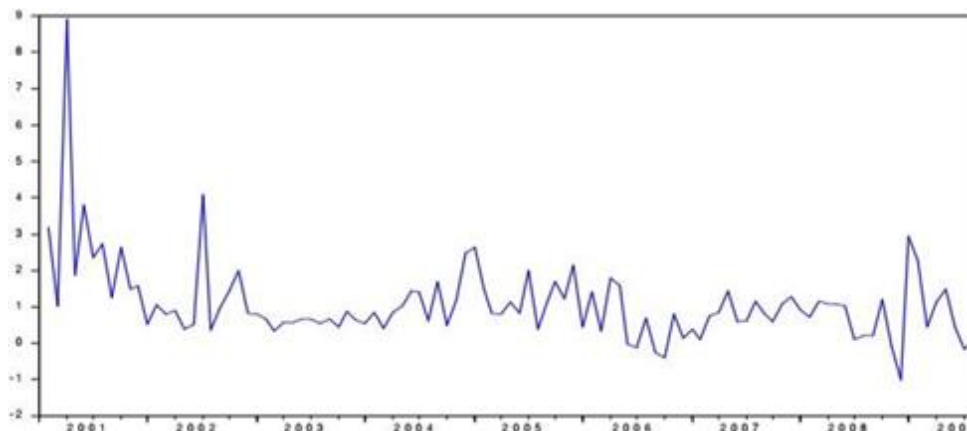
Коришћена је следећа литература: [4], [7], [9] и [10].

8 СТРУКТУРНИ ЛОМ

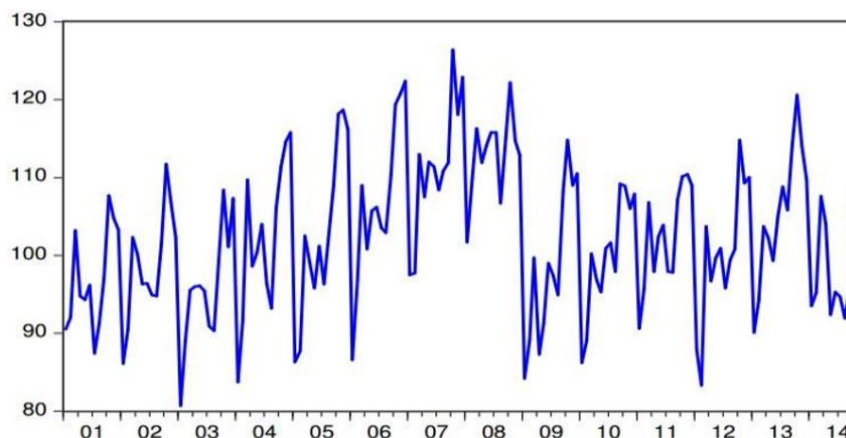
Структурни лом представља скуп опсервација које одступају од претходног тока временске серије. Он је најчешће резултат неке интервенције, у смислу догађаја који ће утицати на кретање временске серије.

Наиме, структурни лом је резултат интервенције. Структурни лом означава скуп опсервација који није сагласан са претходним током временске серије. На пример, почетак процеса транзиције повлачи за собом низ радикалних мера у економској политици (девалвација валуте и промена режима девизног курса, реформа пореског система, приватизација, и сл.). Такве мере мењају кретање следећих временских серија: инфлација, увоз, извоз и реални девизни курс, запосленост. Бомбардовање Србије од стране НАТО земаља током 1999. године означава интервенцију која је утицала на значајан пад у нивоу привредне активности, а тиме и на кретање оних економских величина којима се прати та активност, као што су индекс индустријске производње, извоз, запосленост.

Слика 8. Једнократни структурни лом ([9])



Слика 9. Трајни структурни лом ([9])



Док се једнократно дејство интервенције означава кроз појаву једне или неколико нестандартних опсервација временске серије, трајни утицај означава перманентну промену у кретању временске серије.

Структурни лом трајног карактера се манифестује на један од следећа три начина:

1. промена одсечка функције тренда,
2. промена нагиба функције тренда,
3. промена одечка и нагиба функције тренда.

Ефекат интервенције може се описати моделом следећег типа:

$$Z_t = v(L)I_t + \underbrace{\frac{(1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \dots - \theta_q L^q)}{(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p)}}_{ARMA} a_t,$$

где је $v(L)$ полином по оператору доцње L , којим се моделира присуство структурног лома. Полином $v(L)$ дефинише се према следећем:

$$v(L) = \frac{\omega(L)}{\lambda(L)} L^k,$$

$$\omega(L) = \omega_0 - \omega_1 L - \omega_2 L^2 - \dots - \omega_m L^m,$$

$$\lambda(L) = 1 - \lambda_1 L - \lambda_2 L^2 - \dots - \lambda_r L^r,$$

где су $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ параметри полинома $\omega(L)$ и $\lambda(L)$. Полиномом $\omega(L)$ описује се очекивани почетак интервенције, док се полиномом $\lambda(L)$ моделира трајан ефекат интервенције. Параметар k означава период времена који треба да протекне да би се дејство интервенције манифестовало на кретање временске серије.

Полиному $v(L)$ се придружије вештачка променљива I_t , која се дефинише на један од следећа два начина:

$$I_t = IM_t = \begin{cases} 1, & t = TL \\ 0, & t \neq TL \end{cases}, I_t = S_t = \begin{cases} 1, & t \geq TL \\ 0, & t < TL \end{cases}$$

где је TL тренутак структурног лома.

Вештачка променљива IM_t је импулсна вештачка променљива. Она узима вредност један за тренутак структурног лома. Вештачка променљива S_t једнака је вредности један, за све податке од тренутка структурног лома. За период пре лома вредност S_t је нула. Ова два типа вештачке променљиве се међусобно не искључују зато што важи: $IM_t = S_t - S_{t-1} = (1 - L)S_t$.

Када се занемари информација о постојању структурног лома, тада последице на оцењивање параметара модела могу бити озбиљне. Неке од њих су:

1. Прецењује се оцена варијансе временске серије.

2. Оцене аутокорељационих коефицијената су пристрасне.
 - У случају једнократног структурног лома оценама се потцењују стварне вредности параметара.
 - У случају трајног структурног лома оценама се прецењују стварне вредности параметара.
3. DF тест јединичног корена је непоуздан.
 - У случају једнократног структурног лома у првој разлици серије са јединичним кореном, тест је пристрасан у правцу одбацивања хипотезе о постојању јединичног корена у полазној серији.
 - У случају трајног структурног лома у тренду стационарне временске серије, тест је пристрасан у правцу прихватања хипотезе о постојању јединичног корена.
4. Прогнозирање будућег кретања временске серије је непоуздано.

Присуство сваке импулсне вештачке променљиве моделира се искључивањем не само те променљиве, већ и њених поменутих вредности са доцњама: $1, 2, \dots, K + 1$. Овако постављен број доцњи има своје упориште у резултату да $ADF(K)$ тест коренспондира $ADF(K + 1)$ репрезентација временске серије. Уколико уместо импулсне, дату једначину проширимо вештачком променљивом, тада се мења расподела DF статистике. То имплицира неопходност примене другог приступа у тестирању када временска серија поседује трајни структурни лом. У случају постојања структурног лома трајног типа, може се користити већи број посебно дефинисаних тестова јединичног корена.

8.1 Перонов тест јединичног корена

Пероновим (Perron) тестом тестира се нулта хипотеза да серија представља случајно кретање са константним прираштајима који поседује лом, и алтернативне хипотезе да је серија стационарна око линеарног тренда са ломом. У зависности од тога да ли је лом присутан у слободном члану, тренду или оба елемента линеарне функције детерминистичког трена, дефинисане су три варијанте теста.

8.1.1 Прва варијанта Пероновог теста

Нулта хипотеза је да временска серија представља случајно кретање са константним прираштајем. У првом тренутку након лома, $TL + 1$, мења се ниво константног прираштаја случајног кретања. Запис је:

$$Z_t = b + b_A VITL_t + Z_{t-1} + a_t,$$

$$VITL_t = 1, t = TL + 1 \text{ и } VITL_t = 0, t \neq TL + 1.$$

Претпоставка алтернативне хипотезе је да је временска серија тренд-стационарна. При томе, одсечак функције линеарног тренда се трајно мења један корак од тренутка TL . Користе се следећи изрази:

$$Z_t = \mu + \beta t + \beta_t VSTL_t + a_t,$$

$$VSTL_t = 0, t \leq TL \text{ и } VSTL_t = 0, t > TL.$$

8.1.2 Друга варијанта Пероновог теста

Нулта хипотеза је претпоставка да временска серија представља случајно кретање са константним прираштајем. У тренутку $TL + 1$, трајно се мења ниво константног прираштаја случајног кретања. Запис је:

$$Z_t = b + b_B VITL_t + Z_{t-1} + a_t.$$

Претпоставка алтернативне хипотезе је да је временска серија стационарна око тренда чији се нагиб трајно мења један корак од тренутка лома TL . Користе се следећи изрази:

$$Z_t = \mu + \beta t + \beta_t VSTL_t^* + a_t,$$

$$VSTL_t^* = 0, t \leq TL \text{ и } VSTL_t^* = 0, t > TL.$$

8.1.3 Трећа варијанта Пероновог теста

Нулта хипотеза је претпоставка да временска серија представља случајно кретање са константним прираштајем. Од тренутка $TL + 1$ трајно се мења ниво константног прираштаја случајног кретања и то за једну вредност у $TL + 1$ и другу у осталим тренуцима $TL + 2$, $TL + 3$, итд. Запис је:

$$Z_t = b + b_{1C} VITL_t + b_{2C} VITL_t + Z_{t-1} + a_t.$$

Алтернативна хипотеза дефинисана је као тврђење да је временска серија стационарна око тренда чији се нагиб трајно мења почев од тренутка $TL + 1$. Користе се следећи изрази:

$$Z_t = \mu + \beta t + \beta_{1C} VSTL_t + \beta_{2C} VSTL_t + a_t,$$

$$VSTL_t = 0, t \leq TL \text{ и } VSTL_t = 0, t > TL.$$

Променљиве $VITL_t$, $VSTL_t$, $VSTL_t^*$ називају се вештачке променљиве. Перонове статистике дефинишу се као ADF тест статистика али тако да су у базичној регресији дефинисане поменуте вештачке променљиве. Овако дефинисано тестирање претпоставља да је присуство структурног лома еквивалентно промени случајне грешке модела која утиче на кретање временске серије на дужи период времена.

Расподеле Перонових статистика зависе од обима узорка и тренутка појаве структурног лома. То значи да приликом употребе конкретних критичних вредности треба имати у виду наведене параметре. У Табели 3 дате се критичне вредности Пероновог теста за ниво значајности 5%.

8.2 Зивот-Ендрјусов тест

Недостатак Пероновог теста је претпоставка да је тренутак структурног лома унапред познат. У пракси је чешћа појава да је структурни лом ендегени догађај чији је тренутак појављивања непознати параметар који треба оценити у поступку тестирања. Зивот-Ендрјусовим (Zivot-Andrews) тест истовремено испитује постојање јединичног корена и идентификује тренутак статистички значајног структурног лома.

Нулта хипотеза дефинисана је као тврђење да је серија случајно кретање са константним прираштајем. Алтернативном хипотезом претпоставља се стационарност око линеарног тренда. Приликом тестирања користе се регресионе једначине дефинисане Пероновим тестом, с тим што се искључује вештачка променљива $VITL$ код трећег теста.

Кључна идеја теста је оцена тренутка структурног лома, тако да се алтернативној хипотези о стационарности да највећи могући пондер. Приказ алгоритма је:

1. Сваки тренутак времена у расположивој временској серији јесте потенцијални тренутак структурног лома. За сваки временски тренутак, осим оних који припадају интервалу првих и последњих 10-15% опсервација временске серије, дефинишу се адекватне вештачке променљиве. Оне се потом редом укључују у регресиону једначину ADF статистике. Једначина се оцењује за сваку тако постављену вештачку променљиву, што омогућава добијање низа вредности ADF статистике.
2. Из скупа вредности ADF статистике издвајамо ону која је најмања. То је управо вредност Зивот-Ендрјусовог теста.
3. Ако је вредност Зивот-Ендрјусовог теста мања од одговарајуће критичне вредности, тада се прихвата алтернативна хипотеза да серија стационарно осцилира око линеарног тренда са ломом који је детектован за тренутак постизања минималне вредности ADF статистике.
4. Критичне вредности Зивот-Ендрјусовог теста приказане су у Табели 3.

Табела 3. Табела критичних вредности Пероновог и Зивот-Ендрјусовог теста за ниво значајности 5% и асимптотске услове

	Перонов тест									Зивот-Ендрјусовог тест
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	
Прва варијанта Пероновог теста	- 3,68	- 3,77	- 3,76	- 3,72	- 3,76	- 3,76	- 3,80	- 3,75	- 3,79	-4,80
Друга варијанта Пероновог теста	- 3,65	- 3,80	- 3,87	- 3,94	- 3,96	- 3,95	- 3,85	- 3,82	- 3,68	-4,42
Трећа варијанта Пероновог теста	- 3,75	- 3,99	- 4,17	- 4,22	- 4,24	- 4,24	- 4,18	- 4,04	- 3,80	-5,08

За ово поглавље коришћена је литература [8], [9] и [10].

9 Закључак

Анализа временских серија је статистичка дисциплина која бележи најдинамичнији развој последњих деценија. Како модели временских серија испитују утицај историјских вредности једне појаве на њену садашњу и будућу вредност, ови модели представљају веома корисно и ефикасно средство за предвиђање будућих вредности и доношење одлука у економији, индустрији, туризму итд. Убрзани развој економије у свету са собом носи све већу потребу за информацијама које су производ временских серија у финансијама, односно информације које се могу добити моделовањем. Зато су у овом раду представљене основе и специфичности за даље разумевање економских временских серија.

Представљене су три групе модела временских серија, а то су ауторегресивни модели - AR , модели покретних просека - MA и ауторегресиони процеси покретних просека - $ARMA$. Због могућности да претпоставка о стационарности буде нарушена, у раду су представљени ауторегресиони интегрисани модели покретних просека - $ARIMA$. Велики акценат стављен је на утврђивање стационарности, односно нестационарности ових модела. Приказани су тестови и објашњени графикони и колеограми, а након тога су објашњени и поуздани тестови јединичног корена помоћу којих се на ефикасан начин утврђује стационарност.

Приликом анализе временских серија честа је појава структурног лома зато је у овом раду темељно приказано како и на који начин се ова појава може моделирати и да на тај начин у што мањој мери утиче на прогнозу и нарушава ток временске серије. У пракси се моделирање у великој мери ослања и на интуицију аналитичара при чему постоји доста субјективности.

10 Литература

- [1] Милутин Достанић, Данко Јоцић, Милош Арсеновић, „Теорија мере, функционална анализа, теорија оператора“, у Београду 2012.
- [2] Павле Младеновић, „Вероватноћа и статистика“, у Београду 2008.
- [3] Златко Ковачић, „Мултивариациона анализа“, у Београду 1994.
- [4] Златко Ковачић, „Анализа временских серија“, у Београду 1995.
- [5] Слободанка Јанковић, „Елементи финансијске математике“, у Београду, 2014.
- [6] Милан Меркле, „Вероватноћа и статистика“, у Београду, 2002.
- [7] Robert H. Shumwa, David S. Stoffer, „Time Series Analysis and Its Applications“
- [8] Ruey Tsay, „Analyses of financial time series“
- [9] Gian Luigi Mazzi, „Handbook on Seasonal Adjustment“, у Луксембургу, 2018.
- [10] Зорица Младеновић, Александра Нојковић, „Примењена анализа временских серија“, у Београду, 2012.
- [11] <https://cran.r-project.org/>