



УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Снежана Ракочевић

ВЕРИЖНИ РАЗЛОМЦИ И ТЕОРИЈА МУЗИКЕ

- МАСТЕР РАД -

Београд, 2018.



УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Снежана Ракочевић

ВЕРИЖНИ РАЗЛОМЦИ И ТЕОРИЈА МУЗИКЕ

- МАСТЕР РАД -

Име и презиме ментора: Проф. др Небојша Икодиновић

Име и презиме студента: Снежана Ракочевић, број индекса 1034/2016.

Београд, 2018.

САДРЖАЈ:

1.	УВОД.....	1
2.	ВЕРИЖНИ РАЗЛОМЦИ.....	3
2.1.	Појам верижног разломка.....	3
2.2.	Еуклидов алгоритам и верижни разломци.....	5
2.3.	Особине верижних разломака.....	9
2.4.	Апроксимације реалног броја.....	18
2.5.	Рационалне апроксимације прве и друге врсте.....	21
3.	ТЕОРИЈА МУЗИКЕ.....	26
3.1.	Звук и тон.....	26
3.2.	Речник музичких појмова.....	28
3.3.	Питагорејско подешавање по квинтама.....	37
3.4.	Природно или хармонијско подешавање.....	41
3.5.	Једнако темперована скала.....	44
3.6.	Средњотонско темперовање.....	47
3.7.	Добро темперовање.....	48
4.	ВЕРИЖНИ РАЗЛОМЦИ И ТЕОРИЈА МУЗИКЕ.....	49
5.	ЗАКЉУЧАК.....	54
6.	ЛИТЕРАТУРА.....	55

1. УВОД

"Не би ли се музика могла описати као математика осећаја, а математика као музика разума? Њихов дух је исти. Тако музичар осећа математику, а математичар мисли музику. Једна ће појачати осећај другој кад засја људски ум подигнут у савршенство."

Владимир Девиде (1925.- 2010.) хрватски математичар, јапанолог, академик и књижевник

Математика и музика...

Већина људи би рекли да ова два, изузетно значајна дела људског живота, немају везе јадна с другом. Музику сви познају, користе, осећају... а математику представљају бројеви, користе је при трговини и, наравно, у току школовања зато што морају.

Међутим, математика и музика су нераскидиво повезане. И стално присутне, свесно или несвесно. Обе имају своја правила, своје светове који се преплићу. И једна и друга су уметности. За већину несхватљиво, али тачно.

Математика је рационална, строга, непопустљива и бездушна у свом свету. Тражи пуно. Пуно одрицања и љубави.

И музика тражи пуно, пуно одрицања и љубави. Музика изазива дубоке емоције, али и математика. Обје су апстрактне, снажне, дубоке. Имају своје језике и постају разумљиве тек када се ти језици добро савладају. Бирају своје следбенике, траже интелект, креативност, имагинацију.

Снажне, неухватљиве, математика и музика представљају, за наш свет, космичке силе које непрестано плешу своју игру, у снажном загрљају. За нас, који смо увучени у ту игру, преостаје нам да уживамо.

У овом раду објаснићу верижне разломке и њихове основне особине, како можемо било који реалан број представити у облику коначног или бесконачног облика верижног разломка, и оно што је најважније у овој причи, како најбоље апроксимирати неки број.

У другом поглављу ћу представити основе теорије музике, како се формирају скале, на које проблеме се наилазило при покушајима да се достигне савршенство у формирању истих.

У последњем поглављу, користећи верижне разломке, објаснићу зашто је одређена скала најпогоднија и најчешће коришћена.

2. ВЕРИЖНИ РАЗЛОМЦИ

2.1. ПОЈАМ ВЕРИЖНОГ РАЗЛОМКА

Дефиниција: Општи верижни разломак је израз облика

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \frac{b_3}{a_3 + \ddots}}}$$

где a_i и b_i могу бити реални или комплексни бројеви.

Краћи запис општег верижног разломка је $\left[a_0, \frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \dots \right]$.

Дефиниција: Прост верижни разломак је израз облика

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \ddots}}}$$

где су $a_1, a_2, \dots$ природни бројеви и a_0 цео број.

Краћи запис простог верижног разломка је $[a_0, a_1, a_2, \dots]$. Овакав запис користимо и када $a_1, a_2, \dots$ нису природни бројеви.

Осим ако није другачије наглашено, под појмом верижног разломка подразумева се прост верижни разломак.

Поред оваквог бесконачног верижног разломка разликујемо и коначан верижни разломак.

Дефиниција: Коначан верижни разломак је израз облика

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n-2} + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}}}$$

при чему је a_0 цео број, $a_1, a_2, \dots, a_n$ природни бројеви и $a_n \neq 1$.

Краћи запис коначног верижног разломка је $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$.

Дефиниција: Израз $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_k]$ називамо k -том конвергентом за $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$, а израз $a'_k = [a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_n]$ k -тим комплетним количником ($n \geq k$).

Важи да је $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n] = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, [a_k, \dots, a_n]] = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a'_k]$.

2.2. ЕУКЛИДОВ АЛГОРИТАМ И ВЕРИЖНИ РАЗЛОМЦИ

Коришћењем Еуклидовога алгоритма, можемо показати како се реалан број може развити у верижни разломак.

Дефиниција: Размера две дужи је количник мерних бројева те две дужи мерених истом јединицом мере.

Дефиниција: Ако је размера две дужи рационалан број, кажемо да су те две дужи самерљиве. Уколико је размера две дужи ирационалан број, кажемо да су те две дужи несамерљиве.

Еуклидов алгоритам је један од најстаријих алгоритама и представља поступак у којем у коначном броју корака налазимо заједничку меру и однос двеју самерљивих величина, и који се никада не завршава уколико су те две величине несамерљиве.

Нека су АВ и PQ две неједнаке дужи при чему је $|AB| > |PQ|$. Ако је дуж PQ садржана цео број a пута у дужи АВ, број a називамо мерни број дужи АВ, при чему PQ представљамо као јединичну дуж и важи да је $|AB| = a \cdot |PQ|$.

Ако не постоји a такво да је $|AB| = a \cdot |PQ|$, а постоји трећа дуж CD таква да је

$$|AB| = m \cdot |CD| \text{ и } |PQ| = n \cdot |CD|,$$

тада је CD дуж која представља заједничку меру дужи АВ и PQ и важи:

$$|AB| : |PQ| = \frac{m}{n} \quad \text{или} \quad |AB| = \frac{m}{n} |PQ| \quad \text{или} \quad |PQ| = \frac{n}{m} |AB|.$$

Ако означимо $p = \frac{m}{n}$, важи да је $|AB| = p \cdot |PQ|$, при чему је p рационалан број. Тада су AB и PQ самерљиве дужи, тј. однос њихових дужина је рационалан број.

Ако не постоји таква дуж CD , не постоји ни рационалан број p и дужи AB и PQ су несамерљиве, однос њихових дужина је ирационалан број.

Нека су дате величине a_0 и a_1 при чему је $a_0 > a_1$. Ако се a_1 садржи у a_0 q_0 пута, тада важи да је $a_0 = q_0 \cdot a_1 + a_2$ ($0 < a_2 < a_1$). Поступак настављамо тако што се a_2 садржи q_1 пута у a_1 , односно $a_1 = q_1 \cdot a_2 + a_3$ ($0 < a_3 < a_2$). И тако редом док не дођемо да је $a_k = q_k \cdot a$, при чему је $q_k \geq 2$.

Одавде закључујемо да је a заједничка мера за a_0 и a_1 .

Дакле,

$$a_0 = q_0 \cdot a_1 + a_2$$

$$a_1 = q_1 \cdot a_2 + a_3$$

$\vdots$

$$a_k = q_k \cdot a$$

при чему је $a_0 > a_1 > a_2 > \dots > a$; $q_i \geq 1$ ($0 \leq i < k$); $q_k \geq 2$.

Сваку од ових једнакости можемо да запишемо на следећи начин:

$$\frac{a_0}{a_1} = q_0 + \frac{a_2}{a_1}$$

$$\frac{a_1}{a_2} = q_1 + \frac{a_3}{a_2}$$

$\vdots$

$$\frac{a_k}{a} = q_k$$

Разломак $\frac{a_0}{a_1}$ можемо изразити преко коефицијената q_i :

$$\begin{aligned}\frac{a_0}{a_1} &= q_0 + \frac{a_2}{a_1} = q_0 + \frac{1}{\frac{a_1}{a_2}} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{a_3}{a_2}} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\frac{a_2}{a_3}}} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{a_4}{a_3}}} = \\ &= q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \frac{a_5}{a_4}}}} = \dots = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{q_{k-2} + \frac{1}{q_{k-1} + \frac{1}{q_k}}}}}}.\end{aligned}$$

На овај начин рационалан број $\frac{a_0}{a_1}$ смо представили у облику коначног верижног разломка

$$[q_0, q_1, q_2, \dots, q_{k-1}, q_k].$$

У случају да не постоји a такво да је у k -том кораку $a_k = q_k \cdot a$, поступак се наставља у бесконачно много корака, тј.

$$\frac{a_0}{a_1} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{\ddots}}} = [q_0, q_1, q_2, q_3, \dots].$$

Тада су a_0 и a_1 несамерљиве, и њихов однос можемо представити бесконачним верижним разломком.

Пример: Број $\frac{49}{13}$ растављамо у верижни разломак на следећи начин:

$$\frac{49}{13} = 3 + \frac{10}{13} = 3 + \frac{1}{\frac{13}{10}} = 3 + \frac{1}{1 + \frac{3}{10}} = 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{10}{3}}} = 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3}}} = [3, 1, 3, 3].$$

У случају да је разломак негативан, можемо га претворити на два начина у верижни разломак. Први начин се састоји да се његов супротан број претвори у верижни разломак и да се испред добијеног разломка стави знак " - ". Други начин је да се негативан разломак представи као збир негативног целог броја и позитивног правог разломка.

На пример:

$$-\frac{49}{13} = -4 + \frac{3}{13} = -4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{3}} = [-4, 4, 3].$$

Пример: Ирационалан број $\sqrt{3}$ разлажемо у верижни разломак на следећи начин:

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{x_1},$$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} = 1 + \frac{1}{x_2},$$

$$x_2 = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3}+1 = 2 + \frac{1}{x_3},$$

$$\frac{1}{x_3} = \sqrt{3}-1, \quad x_3 = \frac{\sqrt{3}+1}{2} = x_1 \quad \text{итд.}$$

На тај начин долазимо до: $\sqrt{3} = [1, 1, 2, 1, 2, \dots]$.

2.3. ОСОБИНЕ ВЕРИЖНИХ РАЗЛОМАКА

Теорема 1. Сваки коначан верижни разломак можемо заменити њему једнаким рационалним бројем.

Доказ: Нека је дат коначан верижни разломак $a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n-2} + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}}}$.

$$a_{n-1} + \frac{1}{a_n} = \frac{a_{n-1}a_n + 1}{a_n} = \frac{A_1}{a_n} \text{ што је рационалан број.}$$

$$a_{n-2} + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}} = a_{n-2} + \frac{1}{\frac{A_1}{a_n}} = \frac{a_{n-2}A_1 + a_n}{A_1} = \frac{A_2}{A_1} \text{ што је, такође, рационалан број.}$$

Понављајући поступак добијамо да је полазни верижни разломак једнак рационалном броју $\frac{A_{n+1}}{A_n}$. ■

Теорема 2. Сваки рационалан број се може на тачно један начин развити у коначан верижни разломак $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n]$, при чему је $a_n \neq 1$.

Ако допустимо да је $a_n = 1$, постоји још тачно један начин, а то је

$$[a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n - 1, 1].$$

Доказ: Означимо рационалан број $\frac{p}{q}$. Користимо индукцију по q . За $q = 1$, тврђење је тривијално.

Претпоставимо да је $q > 1$ и да је тврђење тачно за све рационалне бројеве са имениоцем мањим од q . a_0 је једнак целобројном делу разломка $\frac{p}{q}$, па је $\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{\frac{q}{p - a_0 q}}$ при чему

се по индукцијској претпоставци разломак $\frac{q}{p - a_0 q} \geq 1$ може развити у верижни разломак на тачно један начин.

Ова особина је доказана и преко Еуклидовог алгоритма. ■

Верижни разломци нису погодни за основне рачунске операције.

Реципрочна вредност верижног разломка $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$ је верижни разломак

$$[0, a_0, a_1, a_2, \dots, a_n], \text{ тј.}$$

$$[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n] \cdot [0, a_0, a_1, a_2, \dots, a_n] = 1 \quad (a_0 \geq 1).$$

Верижном разломку $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$ је супротан верижни разломак

$$[-1 - a_0, 1, a_1 - 1, a_2, \dots, a_n], \text{ тј.}$$

$$[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n] + [-1 - a_0, 1, a_1 - 1, a_2, \dots, a_n] = 0 \quad (a_1 > 1).$$

Теорема 3. За верижни разломак $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$ k -та конвергента $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k]$ једнака је $\frac{p_k}{q_k}$ где низови (p_k) и (q_k) задовољавају:

$$p_{-2} = 0, \quad p_{-1} = 1, \quad p_0 = a_0, \quad p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}$$

$$q_{-2} = 1, \quad q_{-1} = 0, \quad q_0 = 1, \quad q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} \quad \text{за } 2 \leq k < n.$$

Доказ: Нека је x број представљен верижним разломком $x = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$, при чему су количници a_i једнозначно одређени Еуклидовим поступком.

Бројеви $x_0 = [a_0]$, $x_1 = [a_0, a_1]$, $x_2 = [a_0, a_1, a_2]$, и тако даље, представљају рационалне апроксимације броја x .

Тврђење је тачно за $n \leq 1$:

$$x_0 = \frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1} = \frac{a_0 p_{-1} + p_{-2}}{a_0 q_{-1} + q_{-2}},$$

$$x_1 = \frac{p_1}{q_1} = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1} = \frac{a_1 p_0 + p_{-1}}{a_1 q_0 + q_{-1}},$$

$$x_2 = \frac{p_2}{q_2} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = a_0 + \frac{a_2}{a_1 a_2 + 1} = \frac{a_2(a_0 a_1 + 1) + a_0}{a_1 a_2 + 1} = \frac{a_2 p_1 + p_0}{a_2 q_1 + q_0}.$$

Тврђење доказујемо индукцијом:

Претпоставимо да тврђење важи за неко k :

$$x_k = \frac{p_k}{q_k} = \frac{a_k p_{k-1} + p_{k-2}}{a_k q_{k-1} + q_{k-2}}, \text{ доказујемо да важи за } k+1:$$

$$x_{k+1} = \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} = [a_0, a_1, \dots, a_k, a_{k+1}] = \left[a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, a_k + \frac{1}{a_{k+1}} \right] = (\text{по претпоставци индукције})$$

$$= \frac{\left(a_k + \frac{1}{a_{k+1}} \right) p_{k-1} + p_{k-2}}{\left(a_k + \frac{1}{a_{k+1}} \right) q_{k-1} + q_{k-2}} = \frac{a_{k+1} (a_k p_{k-1} + p_{k-2}) + p_{k-1}}{a_{k+1} (a_k q_{k-1} + q_{k-2}) + q_{k-1}} = \frac{a_{k+1} p_k + p_{k-1}}{a_{k+1} q_k + q_{k-1}}. \quad \blacksquare$$

Последица 1. $x = \frac{a'_k p_{k-1} + p_{k-2}}{a'_k q_{k-1} + q_{k-2}}$ за $2 \leq k < n$, при чему је

$a'_k = [a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_n]$ је k -ти комплетни количник ($n \geq k$).

Последица 2. Како у изразима за p_k и q_k нема негативних бројева, то су низови (p_k) и (q_k) строго растући, тј. $p_k < p_{k+1}$ и $q_k < q_{k+1}$ за $0 \leq k < n$

Теорема 4. Ако је $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$, онда је $[a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0] = \frac{p_n}{p_{n-1}}$.

Доказ: Тврђење доказујемо индукцијом по n .

За $n = 0$, тврђење је тривијално. Претпоставимо да тврђење важи за $n-1$, односно да је

$$[a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0] = \frac{p_{n-1}}{p_{n-2}}. \text{ Тада је}$$

$$[a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0] = a_n + \frac{1}{[a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0]} = a_n + \frac{p_{n-2}}{p_{n-1}} = \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2}}{p_{n-1}} = \frac{p_n}{p_{n-1}}. \quad \blacksquare$$

Теорема 5. Ако су p_k и q_k дефинисани као у **теорему 3.**, онда важи:

$$p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k-1} \quad \text{и} \quad p_k q_{k-2} - p_{k-2} q_k = (-1)^k a_k$$

Доказ: Тврђење важи за $k = 1$:

$$p_0 q_{-1} - p_{-1} q_0 = a_0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1 = (-1)^{0-1}$$

$$p_1 q_0 - p_0 q_1 = (a_1 p_0 + p_{-1}) q_0 - p_0 (a_1 q_0 + q_{-1}) = -(p_0 q_{-1} - p_{-1} q_0) = -(-1) = 1 = (-1)^0.$$

Доказ изводимо индукцијом. Претпоставимо да тврђење важи за произвољно k :

$$p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k-1}, \text{ доказујемо да важи за } k+1:$$

$$\begin{aligned} p_{k+1} q_k - p_k q_{k+1} &= (a_{k+1} p_k + p_{k-1}) q_k - p_k (a_{k+1} q_k + q_{k-1}) = a_{k+1} p_k q_k + p_{k-1} q_k - a_{k+1} p_k q_k - p_k q_{k-1} = \\ &= -(p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k) = -(-1)^{k-1} = (-1)^k. \end{aligned}$$

Други део теореме $p_k q_{k-2} - p_{k-2} q_k = (-1)^k a_k$ доказује се користећи први део.

$$\begin{aligned} p_k q_{k-2} - p_{k-2} q_k &= (a_k p_{k-1} + p_{k-2}) q_{k-2} - p_{k-2} (a_k q_{k-1} + q_{k-2}) = \\ a_k p_{k-1} q_{k-2} + p_{k-2} q_{k-2} - a_k p_{k-2} q_{k-1} - p_{k-2} q_{k-2} &= a_k (p_{k-1} q_{k-2} - p_{k-2} q_{k-1}) = (-1)^{k-2} a_k = (-1)^k a_k \end{aligned}$$

чиме је теорема доказана. ■

Последица 1. Делећи једнакост $p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k-1}$ са $q_k q_{k-1}$ добијамо

$$\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = \frac{(-1)^{k-1}}{q_{k-1} q_k},$$

а делећи једнакост $p_k q_{k-2} - p_{k-2} q_k = (-1)^k a_k$ са $q_k q_{k-2}$ добијамо

$$\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} = \frac{(-1)^k a_k}{q_{k-2} q_k}.$$

Последица 2. Конвергенти $\frac{p_k}{q_k}$ простог верижног разломка су нескративи, односно p_k и

q_k су узајамно прости, $NZD(p_k, q_k) = 1$.

Последица 3. Низ верижних разломака са парним индексом јесте низ монотono растућих бројева, а низ верижних разломака са непарним индексом јесте низ монотono опадајућих бројева, тј:

$$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < \dots < \frac{p}{q} < \dots < \frac{p_5}{q_5} < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1}$$

Или, свака парна апроксимација је боља од претходне парне и свака непарна апроксимација је боља од претходне непарне.

Доказ: Развијајући једнакост $\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = \frac{(-1)^{k-1}}{q_{k-1} q_k}$ добијамо:

$$\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_0}{q_0} = \frac{1}{q_0 q_1} \quad (1)$$

$$\frac{p_2}{q_2} - \frac{p_1}{q_1} = -\frac{1}{q_1 q_2} \quad (2)$$

$$\frac{p_3}{q_3} - \frac{p_2}{q_2} = \frac{1}{q_2 q_3} \quad (3)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$\frac{p}{q} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = -\frac{1}{q_{n-1} q}$$

где је $\frac{p}{q} = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$ и с обзиром да је $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n] = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n - 1, 1]$,

можемо претпоставити да је n парно.

Како је низ (q_k) строго растући, разломци на десним странама бивају све мањи по апсолутној вредности, па кад саберемо једнакости (1) и (2), (3) и (4) итд., добијамо да је

$$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < \dots < \frac{p}{q},$$

а ако саберемо (2) и (3), (4) и (5) итд, добијамо да је

$$\frac{p_1}{q_1} > \frac{p_3}{q_3} > \frac{p_5}{q_5} > \dots > \frac{p}{q}. \quad \blacksquare$$

Последица 4. Низ сегмената $\left[\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1} \right], \left[\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2} \right], \dots, \left[\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}, \frac{p_k}{q_k} \right], \dots$ је такав низ сегмената да сваки члан низа садржи све наредне чланове низа и дужина низа тих сегмената монотono тежи ка нули.

Последица 5. Верижни разломак $x = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$ можемо написати у облику

$$a_0 + \frac{1}{q_0 q_1} - \frac{1}{q_1 q_2} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1} q_n} \text{ тј,}$$

$$x = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n] = a_0 + \frac{1}{q_0 q_1} - \frac{1}{q_1 q_2} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1} q_n}.$$

Теорема 6.
$$\frac{1}{q_k q_{k+2}} < \left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}}.$$

Доказ: Нека је $x = [a_0, a_1, \dots]$ и нека је $a'_k = [a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_n]$, тада важи

$$x = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a'_k] \text{ и } x = \frac{a'_{k+1} p_k + p_{k-1}}{a'_{k+1} q_k + q_{k-1}}.$$

$$\left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| = \left| \frac{a'_{k+1} p_k + p_{k-1}}{a'_{k+1} q_k + q_{k-1}} - \frac{p_k}{q_k} \right| = \frac{|p_{k-1} q_k - p_k q_{k-1}|}{q_k (a'_{k+1} q_k + q_{k-1})}.$$

С обзиром да је $a'_{k+1} = [a_{k+1}, a_{k+2}, \dots] < a_{k+1} + 1$

$$a'_{k+1} q_k + q_{k-1} < (a_{k+1} + 1) q_k + q_{k-1} = (a_{k+1} q_k + q_{k-1}) + q_k = q_{k+1} + q_k \leq a_{k+2} q_{k+1} + q_k = q_{k+2}$$

следи да је $\left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| > \frac{1}{q_k q_{k+2}}.$

Како је $a'_{k+1} > a_{k+1}$,

$$a'_{k+1} q_k + q_{k-1} > a_{k+1} q_k + q_{k-1} = q_{k+1} \text{ следи да је } \left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}}. \quad \blacksquare$$

Последица 1. Како је $q_{k+1} > q_k$, и на основу претходног, важи:

$$\left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k^2}.$$

Теорема 7. Ако су a, b, c, d природни бројеви са $ad - bc = \pm 1$ и $b > d$, и ако је

$$\frac{a}{b} = [a_0, a_1, \dots, a_n] = [a_0, a_1, \dots, a_n - 1, 1] \quad (a_n > 1),$$

$$\text{онда је } \frac{c}{d} = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}] \text{ и } ad - bc = (-1)^{n-1},$$

$$\text{или } \frac{c}{d} = [a_0, a_1, \dots, a_n - 1] \text{ и } ad - bc = (-1)^n.$$

Доказ: Тврђење следи из особине верижних разломака да је $p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k-1}$. Како разломак можемо представити на два начина, у зависности да ли се развој завршава јединицом, то можемо по жељи подесити парност броја k . ■

Теорема 8. Представљање ирационалног броја у облику (простог) верижног разломка је јединствено.

Доказ: Ирационалан број можемо представити у облику бесконачног верижног разломка на исти начин као и рационалан број. Како је a_0 целобројна вредност броја x и

$$a_n = [a'_n] = \frac{1}{a'_{n-1} - a_{n-1}} \text{ за } n \geq 1 \text{ следи да је свако } a_n \text{ једнозначно одређено.}$$

Тада је $x = [a_0, a_1, \dots]$. Посматрајмо низ $x_n = [a_0, a_1, \dots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$. Како важи да је

$$x_0 < x_2 < \dots < x < \dots < x_3 < x_1 \text{ и } |x_{n+1} - x_n| = \frac{1}{q_n q_{n+1}} \rightarrow 0, \text{ низ } (x_n) \text{ конвергира ка } x. \quad \blacksquare$$

Теорема 9. Ако за природне бројеве a, b, c, d и реалан број $t > 1$ важи $b > d$, $|ad - bc| = 1$ и

$$x = \frac{ta + c}{tb + d}, \text{ онда су } \frac{a}{b} \text{ и } \frac{c}{d} \text{ узастопни конвергенти броја } x.$$

Доказ: Низ конвергената $\frac{p_n}{q_n}$ конвергира броју $x = \frac{a'_{n+1} p_n + p_{n-1}}{a'_{n+1} q_n + q_{n-1}}$ где су a'_n комплетни

количници, а x се налази између два узастопна конвергента $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ и $\frac{p_n}{q_n}$.

Број t је једнозначно одређен са $t = a'_{n+1}$, $t > 1$ и можемо га развити у верижни разломак

$$t = [a_{n+1}, a_{n+2}, \dots], (a_{n+1} \geq 1), \text{ па је } x = \frac{ta + c}{tb + d} = x = [a_0, a_1, \dots, a_n, t].$$

Нека је $\frac{a}{b} = [a_0, a_1, \dots, a_n]$. Можемо подесити парност броја n тако да је $ad - bc = (-1)^{n-1}$ и

$\frac{c}{d} = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}]$. Тада у броју $x = [a_0, a_1, \dots, a_{n+1}, \dots]$ су узастопни конвергенти $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ и $\frac{p_n}{q_n}$

једнаки $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$. ■

2.4. АПРОКСИМАЦИЈЕ РЕАЛНОГ БРОЈА

Низ конвергенти $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$ представљају верижне апроксимације реалног броја $x = [a_0.a_1, \dots]$ и

конвергира ка том броју, односно осцилује око вредности броја x , тако да је апсолутна

грешка апроксимације $\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right|$ мања од апсолутне разлике две узастопне апроксимације

$$\left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|.$$

Теорема 10. $\frac{p_k}{q_k}$ је најбоља апроксимација броја x разломцима са именицима не већим

од q_k , односно: Ако је $q \leq q_k$ ($k > 1$) природан број и $\frac{p}{q} \neq \frac{p_k}{q_k}$ онда је $|p - qx| > |p_k - q_k x|$.

Доказ: Прво доказујемо да је $|p_{k-1} - q_{k-1}x| > |p_k - q_k x|$.

Како је $x_k = \frac{p_k}{q_k} = \frac{a'_k p_{k-1} + p_{k-2}}{a'_k q_{k-1} + q_{k-2}}$, то је

$$|p_{k-1} - q_{k-1}x| = \frac{a'_{k+1}}{q_k a'_{k+1} + q_{k-1}} > \frac{1}{q_k a'_{k+1} + q_{k-1}} = |p_k - q_k x|.$$

Нека су p, q произвољни, при чему је $q \leq q_k$. Како је (на основу теореме 5.)

$p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = \pm 1$, то постоје цели бројеви u, v такви да су решења система једначина

$u p_{k-1} + v p_k = p$ и $u q_{k-1} + v q_k = q$.

Решавањем овог система се добија $u = \pm(p q_k - q p_k)$ и $v = \pm(p q_{k-1} - q p_{k-1})$.

Тада је $|p - qx| = u(p_{k-1} - q_{k-1}x) + v(p_k - q_k x)$.

На основу последице те теореме, $p_{k-1} - q_{k-1}x$ и $p_k - q_kx$ су различитог знака, а због $0 < q \leq q_k$ следи да су u и v такође различитог знака или $uv = 0$, што значи да су $u(p_{k-1} - q_{k-1}x)$ и $v(p_k - q_kx)$ истог знака.

$$|p - qx| = |u| \cdot |p_{k-1} - q_{k-1}x| + |v| \cdot |p_k - q_kx| \geq |p_k - q_kx|. \quad \blacksquare$$

Последица 1. $\left| x - \frac{p}{q} \right| > \left| x - \frac{p_k}{q_k} \right|$ за свако $q \leq q_k$.

Теорема 11. Међу два узастопна конвергента за x , бар један задовољава $\left| \frac{p}{q} - x \right| < \frac{1}{2q^2}$.

Доказ: Како се x налази између два конвергента $\frac{p_n}{q_n}$ и $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ важи

$$\left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - x \right| + \left| \frac{p_n}{q_n} - x \right| = \left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{q_n q_{n+1}} = \frac{1}{2q_n q_{n+1}} + \frac{1}{2q_n q_{n+1}} < \frac{1}{2q_n q_{n+1}} + \frac{1}{2q_{n+1} q_{n+2}} < \frac{1}{2q_n^2} + \frac{1}{2q_{n+1}^2}$$

па је бар једна од неједнакости $\left| \frac{p_n}{q_n} - x \right| < \frac{1}{2q_n^2}$ и $\left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - x \right| < \frac{1}{2q_{n+1}^2}$ тачна. $\blacksquare$

Ова теорема показује да за ирационалан број x постоји бесконачно много рационалних бројева $\frac{p}{q}$ за које је $\left| \frac{p}{q} - x \right| < \frac{1}{2q^2}$.

Теорема 12. Ако разломак $\frac{p}{q}$ задовољава $\left| \frac{p}{q} - x \right| < \frac{1}{2q^2}$, онда је $\frac{p}{q}$ конвергента за x .

Доказ: Нека је $\frac{p}{q} = [a_0, a_1, \dots, a_n]$, можемо подесити парност броја n тако да је

$$(-1)^{n-1} \left(\frac{p}{q} - x \right) > 0. \text{ Означимо } \frac{p_n}{q_n} = \frac{p}{q} \text{ и } \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \text{ конвергенте за } \frac{p}{q}, \text{ и } x = \frac{tp_n + p_{n-1}}{tq_n + q_{n-1}}.$$

$$\text{Тада је } \frac{1}{2q_n^2} > (-1)^{n-1} \left(\frac{p}{q} - x \right) =$$

$$(-1)^{n-1} \left(\frac{p_n}{q_n} - \frac{tp_n + p_{n-1}}{tq_n + q_{n-1}} \right) = (-1)^{n-1} \frac{p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n}{q_n (tq_n + q_{n-1})} = \frac{1}{q_n (tq_n + q_{n-1})} > \frac{1}{q_n (tq_n + q_{n-1})} = \frac{1}{(t+1)q_n^2},$$

одавде је $t + 1 > 2$ односно $t > 1$, па на основу *теореме 9*. следи да су $\frac{p_n}{q_n}$ и $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$

конвергенти за x . ■

2.5. РАЦИОНАЛНЕ АПРОКСИМАЦИЈЕ ПРВЕ И ДРУГЕ ВРСТЕ

Дефиниција: Рационалан број $\frac{p_k}{q_k}$ ($q_k > 0$), јесте **најбоља рационална апроксимација**

реалног броја x прве врсте ако важи неједнакост:

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| > \left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| \text{ за све разломке } \frac{p}{q} \neq \frac{p_k}{q_k} \text{ такве да је } 0 < q \leq q_k.$$

Дефиниција: Рационалан број $\frac{p_k}{q_k}$ ($q_k > 0$), јесте **најбоља рационална апроксимација**

реалног броја x друге врсте ако важи неједнакост:

$$|p - qx| > |p_k - q_k x| \text{ за све разломке } \frac{p}{q} \neq \frac{p_k}{q_k} \text{ такве да је } 0 < q \leq q_k.$$

Дефиниција: **Секундарне конвергенте** броја x за две узастопне конвергенте $\frac{p_k}{q_k}$ и $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$,

дефинисане су низовима:

$$\frac{p_{k,j}}{q_{k,j}} = \frac{p_k + j \cdot p_{k+1}}{q_k + j \cdot q_{k+1}}, \quad \text{где је } j \in \{1, 2, \dots, a_{k+2} - 1\}, \text{ и одређују } \textit{међуверижни низ} \text{ за верижне}$$

разломке $\frac{p_k}{q_k}$ и $\frac{p_{k+2}}{q_{k+2}}$.

Својства најбољих рационалних апроксимација

Својство 1. Рационалан број јесте најбоља апроксимација друге врсте ако и само ако јесте верижна апроксимација за задани број.

Својство 2. Најбоља рационална апроксимација друге врсте јесте и најбоља рационална апроксимација прве врсте. Обратно не мора да важи.

Својство 3. За задан реалан број x коначне верижне апроксимације јесу најбоље апроксимације прве врсте. Обратно не мора да важи.

Својство 4. Свака најбоља апроксимација друге врсте броја x је конвергента. Обрнуто, свака конвергента је најбоља рационална апроксимација друге врсте броја x , осим изолованог случаја $x = a_0 + \frac{1}{2}$ и $\frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1}$

Својство 5. Свака најбоља рационална апроксимација прве врсте броја x је конвергента или нека секундарна конвергента тог броја.

Претходно својство одређује скуп у коме се налазе све најбоље рационалне апроксимације прве врсте.

Нека су за реалан број x одређене верижне апроксимације $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}]$ и

$\frac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, \dots, a_n]$. Ако постоји природан број $a'_n \in \{1, \dots, a_n - 1\}$ такав да је рационалан број

$\frac{p'_n}{q'_n} = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a'_n]$ најбоља рационална апроксимација прве врсте која припада

међуверижном низу за задан реалан број x , онда такве разломке називамо **међуверижним апроксимацијама прве врсте**. Најмањи такав број a'_n , уколико постоји, називамо

међуверижна цифра која претходи верижној цифри a_n а разломак $\frac{p'_n}{q'_n}$ који је тиме

одређен називамо **прва међуверижна апроксимација прве врсте** реалног броја x .

Својство 6. Нека су за реалан број x дате две узастопне верижне апроксимације

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}] \text{ и } \frac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, \dots, a_n]. \text{ Ако постоји прва међуверижна апроксимација}$$

прве врсте $\frac{p'_n}{q'_n} = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a'_n]$ са међуверижном цифром $0 < a'_n < a_n$, тада су сви

рационални бројеви $\frac{p''_n}{q''_n} = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a''_n]$ редом за $a'_n < a''_n < a_n$, све боље међуверижне

апроксимације прве врсте заданог реалног броја x .

Доказ: Нека постоји прва међуверижна апроксимација прве врсте $\frac{p'_n}{q'_n}$, тада је она са

различите стране реалног броја x у односу на конвергенту $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$, нпр. нека је $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} < x < \frac{p'_n}{q'_n}$

и нека је $a''_n = a'_n + 1 < a_n$. Према Својству 5, постоји природан број j' такав да је

$$\frac{p'_n}{q'_n} = \frac{p_{n-2} + j' \cdot p_{n-1}}{q_{n-2} + j' \cdot q_{n-1}}. \text{ Одредимо:}$$

$$p''_n = a''_n \cdot p_{n-1} + p_{n-2} = (a'_n + 1)p_{n-1} + p_{n-2} = p_{n-2} + a'_n \cdot p_{n-1} + p_{n-1} = p'_n + p_{n-1}.$$

На сличан начин је $q''_n = q'_n + q_{n-1}$.

Тада разломак $\frac{p''_n}{q''_n} = \frac{p'_n + p_{n-1}}{q'_n + q_{n-1}} = \frac{p_{n-2} + (j' + 1) \cdot p_{n-1}}{q_{n-2} + (j' + 1) \cdot q_{n-1}}$ припада међуверижном низу у коме се

налазе могуће међуверижне апроксимације прве врсте. Закључујемо да разломак $\frac{p''_n}{q''_n}$ са

исте стране броја x као и $\frac{p'_n}{q'_n}$, односно важи да је $\frac{p''_n}{q''_n} - x > 0$. Закључујемо:

$$0 < \frac{p''_n}{q''_n} - x = \frac{p'_n + p_{n-1}}{q'_n + q_{n-1}} - x = \frac{q'_n(p'_n + p_{n-1}) + p'_n q_{n-1} - p'_n q_{n-1}}{q'_n(q'_n + q_{n-1})} - x = \frac{p'_n}{q'_n} - x + \frac{p_{n-1}q'_n - p'_n q_{n-1}}{q'_n(q'_n + q_{n-1})} < \frac{p'_n}{q'_n} - x$$

јер је $p_{n-1}q'_n - p'_n q_{n-1} < 0$.

Дакле, разломак $\frac{p''_n}{q''_n}$ из међуверижног низа је боља апроксимација од разломка $\frac{p'_n}{q'_n}$. ■

Постоје најбоље рационалне апроксимације прве врсте које нису добијене одсецањем верижног развоја.

Пример: Развој броја e у верижни разломак је: $e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, \dots]$

Верижне апроксимације броја e су:

$$\frac{p_0}{q_0} = [2] = 2$$

$$\frac{p_1}{q_1} = [2, 1] = 3$$

$$\frac{p_2}{q_2} = [2, 1, 2] = \frac{8}{3}$$

$$\frac{p_3}{q_3} = [2, 1, 2, 1] = \frac{11}{4}$$

$$\frac{p_4}{q_4} = [2, 1, 2, 1, 1] = \frac{19}{7}$$

$$\frac{p_5}{q_5} = [2, 1, 2, 1, 1, 4] = \frac{87}{32} \quad \text{итд.}$$

Између верижних апроксимација $\frac{p_1}{q_1}$ и $\frac{p_2}{q_2}$ постоји једна најбоља апроксимација прве

врсте $[2, 1, 1] = \frac{5}{2}$.

Између верижних апроксимација $\frac{p_4}{q_4}$ и $\frac{p_5}{q_5}$ постоје две најбоље апроксимација прве врсте

$$[2, 1, 2, 1, 1, 2] = \frac{48}{18} \text{ и } [2, 1, 2, 1, 1, 3] = \frac{65}{25}.$$

3. ТЕОРИЈА МУЗИКЕ

3.1. ЗВУК И ТОН

Наш свет је окружен звуцима, било да је то шуштање лишћа, цвркутање птица или жубор воде, звукови су свуда око нас. Слушајући, фасциниран звуковима које производи моћна природа, било да је то опчињавајућа песма птица или застрашујући удари грома, покушавајући да их опонаша ударањем о различите предмете или испуштањем сопствених звукова, човек је створио музику за себе. Природи је то већ било нормално.

Међутим, како се наука развијала, стварала се и потреба да се музика објасни, створе правила по којим се она изводи и начини да се запише. Различити услови, потребе, различите културе створиле су и музику прилагођену карактеристичним особинама времена у којем је настала.

Тако сада знамо да је звук механички талас који настаје осциловањем тела у еластичној средини. Осцилаторно кретање је периодично кретање по истој путањи, при чему тело пролази кроз једну (равнотежну тачку) у различитим смеровима. Ако је то осциловање хармонијско (може се представити синусним законима), онда такав звук називамо тон, у супротним су шум и бука. Број осцилација у секунди назива се фреквенција која и одређује висину тона.

Музички тон је звук који има четири карактеристике: висину (зависи од фреквенције), интензитет (зависи од амплитуде), трајање и боју.

Човек производи звук треперењем (осциловањем) гласних жица које покреће ваздушна струја из плућа. Музички инструменти производе звук на различите начине: ударањем (бубањ, добош, клавир...), трзањем жице (гитара, харфа...), трењем (гудачки инструменти), треперењем ваздуха (дувачки инструменти).

Људско уво реагује на звукове фреквенције од 16 до 20000Hz (осцилација у секунди). Унутар тог распона нису сви звукови "музички корисни". Најчешће се користе звуци од

65Hz, а највиши тон клавира има фреквенцију од 4096 Hz. Зависно од инструмента, користе се звукови и већих фреквенција.

Унутар тог опсега, људско уво може разликовати веома велики број тонова, али и редукује много таласних фреквенција на један одређени број тонских висина. Разлика између висина два тона на које људско уво реагује назива се диференцијалним прагом.

Да ли ћемо чути неки звук, не зависи само од његове фреквенције, већ и од интензитета.

Боја тона је одговорна зашто су људски гласови различити, како распознајемо који музички инструмент производи тон без обзира на његову висину и интензитет. Разлог лежи у томе што је звук сложен и састоји се од много чистих звукова, а наш слушни апарат раздваја звук на спектар једноставних таласа, односно детектује спектрограм за сваки звук. Боју тона одређују виши хармоници, или аликвотни тонови који се налазе поред основног тона. Ако је основни тон фреквенције f , аликвотни тонови имају фреквенцију $2f$, $3f$, $4f$, ... У зависности од јачине тих аликвотних тонова је одређена боја тона.

3.2. РЕЧНИК МУЗИЧКИХ ПОЈМОВА

Да би овај рад био разумљив и читаоцима којима теорија музике није блиска, потребно је упознати се са основним музичким појмовима.

ТОНСКИ СИСТЕМ подразумева целокупни систем тонова који су у употреби у одређеној стилској музичкој епохи и сређен је акустичким или естетским принципима.

Сваки тон има своје име. Именујемо их помоћу седам основних тонова која гласе у музичком алфabetу *c, d, e, f, g, a, h* а у солмизацији *de, re, mi, fa, sol, la, si*.

Знакови помоћу којих се бележе тонови зову се *ноте* и бележе се у линијски систем који се састоји од пет размакнутих водоравних линија.

Низ тонова који следе редом музичког алфабета до укључиво почетног имена, зове се *лествица* или *скала*. Основна лествица почиње од тона *c*.

Сваки поједини тон у лествици представља један *ступањ* лествице. Ступањ показује положај (место) тона у лествици.



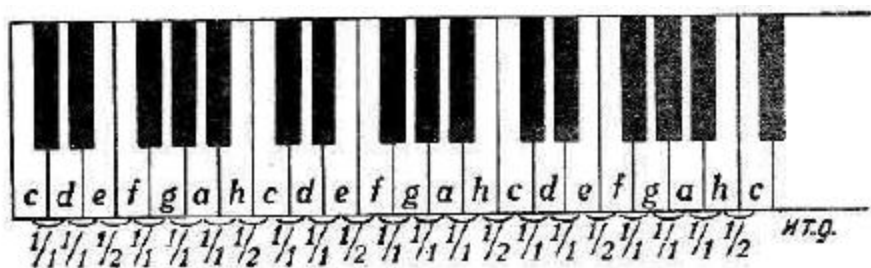
Слика1. Основна скала (C-дур)

Размак између суседних тонова у лествици зове се *степен*, односно степен је растојање између било које два суседна тона у лествици.

Постоје две врсте степена: *полустепен* и *цео степен*.

Полустепен је најмање растојање у висини између два суседна тона између којих се не може уметнути ни један тон. *Цео степен* се састоји из два полустепена.

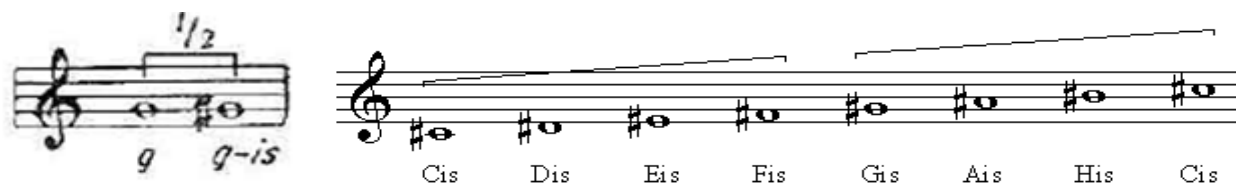
На примеру клавијатуре, полустепен је између тонова црне и беле дирке, као и између тонова белих дирки међу којима се не налази црна дирка.



Слика 2. Распоред полустепена и целих степена на клавијатури

Поред основних тонова *c, d, e, f, g, a, h* постоје и *повишени* и *снижени* тонови.

Повисилица је знак $\sharp$ који се пише испред ноте и означава повећање ноте испред које се налази за један полустепен. Таква нота, односно тај тон, добија име тако што се основном имену додаје наставак -is, (c-is, d-is, e-is, итд.).



Слика 3. Пример основног и повишеног тона G, повишени тонови прве октаве

Снизилица је знак $\flat$ који се пише испред ноте и означава снижење ноте испред које се налази за један полустепен. Таква нота, односно тај тон, добија име тако што се основном имену додаје наставак -es, (c-es, d-es, итд., снижено e је es, снижено a је as, а уместе h-es се често користи be).



Слика 4. Пример основног и сниженог тона G, снижени тонови прве октаве

Тон може да буде и два пута повишен (тада име тона добија наставак -isis, и повишен је за цео степен), као и два пута снижен (на име тона се додаје -eses, и снижен је за цео степен).

Како је између тонова *c* и *d* један цео степен, то повишени тон *c* (*cis*) и снижени тон *d* (*des*) представљају исти тон. Такви тонови који исто звуче а различито се зову и бележе називају се **енхармонијски тонови**.

ИНТЕРВАЛ (лат. *intervallum*, размак) у музици представља размак између било која два тона у лествици, од којих се нижи назива доњим а виши горњим. Интервали се пре свега деле на *хармонијске*, код којих два тона звуче истовремено, и *мелодијске*, код којих се два тона чују један за другим.

Интервали се, према величини зову: **прима, секунда, терца, кварта, квинта, секста, септима и октава**.

Прима је интервал између два тона истог имена:



Секунда је интервал између два (суседна) тона:



Терца је интервал између три лествична ступња:



Кварта је интервал између четири лествична ступња:



Квинта је интервал између пет лествичних ступњева:



Секста је интервал између шест лествичних ступњева:



Септима је интервал између седам лествичних ступњева:



Октава је интервал између осам лествичних ступњева:



Висина тона је одређена његовом фреквенцијом. Друга дефиниција **октаве** је да је то интервал који чини основни тон или тоника са тоном који има двоструко већу фреквенцију.

Такође, **скала** или **лествица** се може дефинисати као једносмеран и постепен систем тонова у распону октаве, у оквиру једног тонског система. У различитим културама широм света користе се различите скале.

У западњачкој култури, а и у старој Грчкој, коришћене су скале подељене на 12 делова, тзв. хроматска лествица која има 12 тонова у оквиру октаве.



Слика 5. Тонове једне октаве приказани на клавијатури

На основу дефиниције основних интервала не може се закључити колико полустепена садржи исти. На пример, интервал c - e је терца (први и трећи ступањ) и садржи четири полустепена. Истовремено је и d - f терца (други и четврти ступањ) али садржи три полустепена. На основу броја полустепена који се налазе у интервалу, разликујемо:

Чиста прима је интервал код кога су доњи и горњи тон идентични.

Мала секунда је интервал код кога је размак између тонова један полустепен.

Пример: c-des.

Велика секунда је интервал код кога је размак између тонова цео степен. Пример: c-d.

Прекомерна секунда је интервал код кога је размак између тонова три полустепена.

Пример: c-dis. По звучности је еквивалентна малој терци.

Умањена терца је терца код које је размак између тонова цео степен. Пример: c-eses. По звучности је еквивалентна великој секунди. Умањена терца се састоји од две мале секунде
 $M2 + M2 = UM3$

Мала терца је терца код које је размак између тонова три полустепена. Пример: c-es.

Велика терца је терца код које је размак између тонова четири полустепена. Пример: c-e.

Прекомерна терца је терца где је размак између тонова пет полустепена. Пример: c-eis. По звучности је еквивалентна чистој квати.

Умањена кварта је кварта код које је размак између тонова четири полустепена. Пример: c-fes. По звучности је еквивалентна великој терци.

Чиста кварта је кварта код које је размак између тонова пет полустепена. Пример: c-ef.

Прекомерна кварта је кварта код које је размак између тонова шест полустепена. Пример: c-fis.

Умањена квинта је квинта код које је размак између тонова шест полустепена. Пример: c-ges. По звучности је еквивалентна прекомерној квати.

Чиста квинта је квинта код које је размак између тонова седам полустепена. Пример: c-g.

Прекомерна квинта је квинта код које је размак између тонова осам полустепена. Пример: c-gis. По звучности је еквивалентна малој сексти.

Умањена секста је секста где је размак између тонова седам полустепена. Пример: c-asas. По звучности је еквивалентна чистој квинти.

Мала секста је секста код које је размак између тонова осам полустепена. Пример: c-as.

Велика секста је секста код које је размак између тонова девет полустепена. Пример: c -a.

Прекомерна секста је секста код које је размак између тонова десет полустепена. Пример: c-a^{is}. По звучности је еквивалентна малој септими.

Умањена септима је септима код које је размак између тонова девет полустепена. Пример: c-heses. По звучности је еквивалентна великој сексти

Мала септима је септима где је размак између тонова десет полустепена. Пример: c-b.

Велика септима је септима код које је размак између тонова једанаест полустепена. Пример: c-h.

Прекомерна септима је септима код које је размак између тонова дванаест полустепена. Пример: c-h^{is}. По звучности је еквивалентна чистој октави.

Умањена октава је октава код које је размак између тонова једанаест полустепена. Пример: c¹-ces². По звучности је еквивалентна великој септими.

Чиста октава је октава где је размак између тонова дванаест полустепена. Пример: c¹-c².

ПОДЕЛА ИНТЕРВАЛА ПРЕМА САЗВУЧЈУ

Интервали се деле према сазвучју на:

- **консонантне**; консонанта је звучни однос између два тона, који је смирен и не тражи разрешење;

- **дисонантне**; дисонанта је звучни однос између два тона који је немиран и напет и тражи разрешење у консонанту.

Савршене консонанце су чиста прима, кварта (у извесним случајевима се сматра дисонанцом), квинта и октава.

Несавршене консонанце су велика и мала терца и велика и мала секста.

Дисонанце су све секунде и септима и сви умањени и прекомерни интервали.

ВРСТЕ СКАЛА

Хроматска лествица је сачињена од самих полустепена. Има 12 тонова у оквиру октаве.

Дијатонске скале су скале састављене од целих степена и полустепена. Септатонска скала, подељена на седам тонова, је најзаступљенија у западњачкој култури.

Најчешће коришћене скале су *дурске* (јонске) и *молска* (еолска), а биле су у употреби још у старој Грчкој.

Дурска лествица (природна) има седам *ступњева* и завршни осми који је поновљени први за октаву више. Између **III** и **IV**, и **VII** и **VIII** (првог) ступња налазе се *полустепени*, док се између осталих ступњева налазе *цели степени*. Основни дур је С-дур, без повисилица и снизилица.



Слика 6. С-дур

Молска лествица (природна) такође има седам ступњева и завршни осми који је поновљени први за октаву више али има полустепене између **II** и **III**, и између **V** и **VI** ступња, док се између осталих ступњева налазе *цели степени*. Основни мол је А-мол, без повисилица и снизилица.



Слика 7. А-мол

КВИНТНИ И КВАРТНИ КРУГ

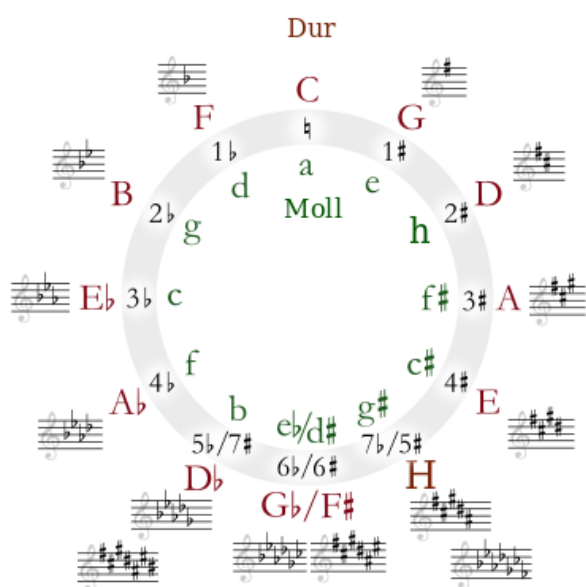
Како хроматска скала садржи дванаест полутонова, од сваког се може направити дурска, односно молска скала, користећи повисилице (снизилице) да би добили полустепене на одговарајућим ступњевима.

Као што је речено, С-дур је основна дурска скала без повисилица. Дурска скала са једном повисилицом је G-дур и има једну повисилицу на тон F. Интервал C - G је чиста квинта. Крећући се тако по квинтном низу, (квинта од G је D, па D-дур има две повисилице) који се (пошто је теоријски бесконачан) назива и квинтни круг, добијамо дурске скале од којих свака следећа има једну повисилицу више.

У низу са снизилицама почињемо увек на четвртом ступњу претходне лествице па тај низ називамо квартни. Такође, свака наредна скала има једну снизилицу више.

Како је A - мол основна молска скала, без повисилица и снизилица, по истом принципу можемо формирати молске лествице од сваког тона хроматске лествице.

Прикажемо ли такав поступак кружно тако што ћемо у смеру кретања казаљке на сату приказивати скале за једну повисилицу више, а у смеру супротно кретања казаљке на сату приказивати скале за једну снизилицу више, добијамо **квинтни и квартни круг**.

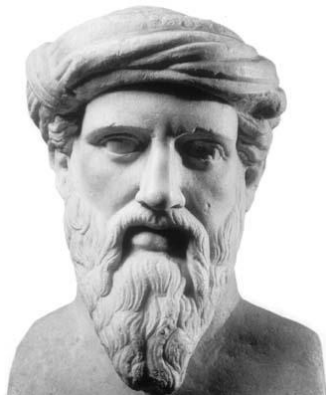


Слика 8. Квинтни и квартни круг

ТОНСКИ СИСТЕМИ или **СИСТЕМИ ПОДЕШАВАЊА** су, у ствари, различити покушаји да се музичке чињенице (скеле, интервали, ...) објасне и теоријски дефинишу и настале су математичком обрадом тих појава за потребе музичке праксе.

3.3. ПИТАГОРЕЈСКО ПОДЕШАВАЊЕ ПО КВИНТАМА

Почеци *теорије музике* (науке која се бави тумачењем музичких елемената, правила и закона по којима се они примењују приликом стварања и извођења музичких дела, од чије праксе је ова наука и настала) се везују за грчког математичара Питагору (6. век пне).



Слика 9. Питагора

Основна Питагорина идеја је била да је свака хармонија (коју чујемо, коју видимо...) математичка хармонија, да су принципи математике, у ствари принципи свега и да се у основи свега постојећег налази број. Питагорин закон малих бројева каже да су два тона консонантна ако је однос њихових фреквенција једнак односу малих природних бројева.

Легенда каже да су Питагору, пролазећи поред ковачнице, привукли складни звуци који су производили ударци чекића о наковањ. Поредeћи тежине чекића који су производили складне тонове, закључио је да је однос њихових тежина 2:1, 3:2 и 4:3.

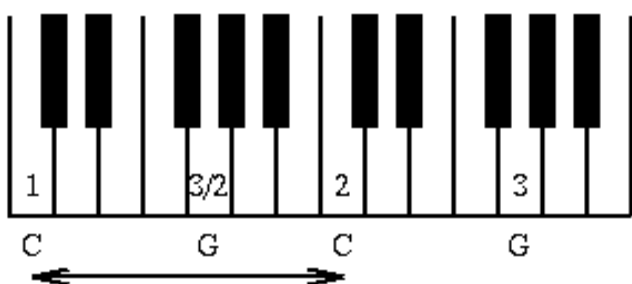
Није могуће утврдити тачност ове приче, али је сигурно да је Питагора вршио огледе на монохорду (моно-један и хорде-жица) и закључује да висина тона који жица производи зависи од њене дужине, тј. што је жица краћа, то је тон виши. Даље, ако жицу скратимо на њену половину, однос 2:1, тон ће бити виши за октаву, ако је скратимо за трећину, однос 3:2, тон је виши за квинту, а ако скратимо за четвртину, однос 4:3, тон је виши за кварту. Једноставно, скраћивањем жице повећава се њена фреквенција, а растојање у "висини" два тона је однос њихових фреквенција.

Дијатонска лествица, лествица састављена од степена и полустепена, је постојала још у старој Грчкој. Питагора је први покушао да одговори на питање одакле то да човек природно пева лествицу, иако се зна да између два тона можемо разликовати низ међутонова. Још није нађен одговор на "природност" певања лествице, али је Питагора

открио нека основна начела у вези са висинама тонова. У основи његове теорије се налазе три интервала: октава, квинта и кварта. Користећи два једноставна правила:

- множећи фреквенцију тона са 2, добија се фреквенција тона који је за октаву виши од почетног;
- множећи фреквенцију са $3/2$ добија се савршена квинта у односу на полазни тон,

Питагора је одредио фреквенције свих 12 тонова дијатонске скале узимајући да је фреквенција основног тона 1.



Једна октава

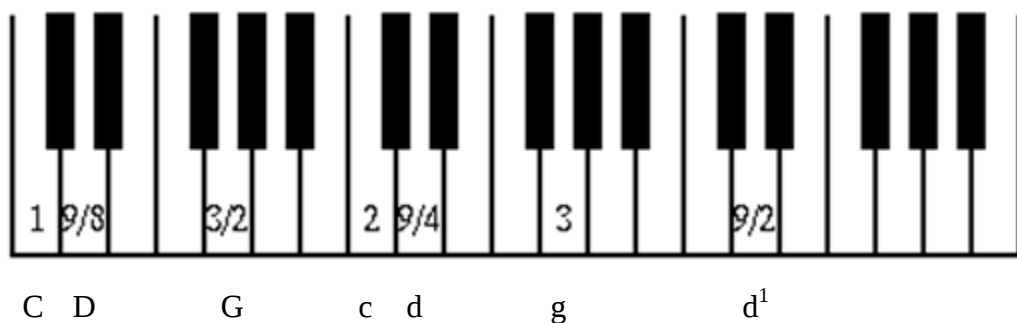
G је савршена квинта
у другој октави

Нека је C основни тон чија је фреквенција f , онда је G-квинта горе која има фреквенцију $(3/2)f$, а октава више (c) фреквенцију $2f$. Из следеће октаве се враћамо у нижу множећи дату фреквенцију са $1/2$. Великим словима означимо тонове прве октаве а малим словима тонове више октаве.

На тај начин добијемо:

$C=1$, $G = 3/2$, $d = 3/2 \cdot 3/2 = 9/4$ (d у следећој октави је квинта од G).

$D = 9/4 \cdot 1/2 = 9/8$ (D је за октаву ниже од d).



$A = 3/2 \cdot 9/8 = 27/16$ (A је квинта од D),

$e = 3/2 \cdot 27/16 = 81/32$ (e је квинта од A),

$E = 81/32 \cdot 1/2 = 81/64$ (E је за октаву ниже од e),

$H = 3/2 \cdot 81/64 = 243/128$ (H је квинта од E),

F добијамо када од C узмемо квинту надоле, $F' = 2/3$, па октаву горе, $F = 4/3$.

На тај начин добијамо Питагорејску скалу чије су фреквенције у следећим односима:

C	D	E	F	G	A	H	c
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	2

Наставимо ли поступак добићемо све полутонове да би на крају опет добили C.

Ако хоћемо да, полазећи од C, добијемо Cis који се налази у седмој квинти

C - G - d - a - e - h - fis - cis

па спустимо за четири октаве. То значи да ако први тон C има фреквенцију 1, после седам квинти тон има фреквенцију $(3/2)^7$. Како је наш тон Cis удаљен од тако добијеног cis за четири октаве, његову фреквенцију треба поделити са 2^4 , односно фреквенција тона Cis је $3^7/2^{11} = 2187/2048$.

Ако хоћемо да одредимо тон Des, који се такође налази између C и D, користимо сличан поступак али користећи кварте. Des се налази у низу C - F - B - es - as - des, и пета је кварта али нижи за две октаве. То значи да је Des на фреквенцији $(4/3)^5 : 2^2 = 256/243$.

На тај начин смо одредили односе за оба тона који се могу ставити између C и D. Ти тонови Des и Cis се налазе у односу: $2187/2048 : 256/243 = 531441/524288$.

Ова разлика се јавља између повишеног и сниженог суседног тона (cis - des, dis - es, e - fes, fis - ges, gis - as, ais - b, his - c) и назива се *Питагорин зарез*.

Односно, повишени доњи тонови виши су од одговарајућих снижених горњих тонова (cis је виши од des, итд.). По квинтном кругу, дванаеста квинта од тона c је his, који је енхармонијски једнак тону c. Ако кренемо од es, после дванаест квинтних корака, долазимо до dis (es - b - f - c - g - d - a - e - h - fis - cis - gis - dis) који нису једнаки.

Дакле, код питагорејског система подешавања разликујемо две врсте полустепена: P = 256/243 (дијатонски питагорејски полустепен) и A = 2187/2048 (питагорејски апотом).

Сваки цели степен садржи дијатонски полустепен и један апотом што износи $(256/243)$ $(2187/2048) = 9/8$. Међутим, постоје и цели степени који садрже два дијатонска полустепена тј. $(256/243)^2 = 65536/59049$. С обзиром да постоје две врсте полустепена и две врсте целих степени, сви тоналитети неће бити подједнако добри. Највећи проблем је квинта $gis-es$ која је за вредност питагорејског зареза виша од чисте квинте. Како тај интервал звучи завијајуће, названа је "вучја квинта".

Дакле, подешавањем по чистим квинтама после дванаест квинтних корака и спуштањем у почетну октаву добијамо тон виши од полазног за интервал Питагориног зареза. Ако бисмо клавир наштамовали на овај начин, све кварте и квинте би биле чисте а сви остали интервали би били нечисти. Питагорејска скала је математички савршена у односу на почетни тон. Да би добили савршене и остале интервале, било би потребно конструисати инструмент са клавијатуром која би имала најмање 21 дирку за једну октаву. Очигледно, такав инструмент би био врло сложен за коришћење, ако не и немогућ.

Ова скала се користила у средњем веку у певању и, углавном је задовољавала музичке укусе до појаве хармоније када се код истовременог свирања различитих тонова учавала несавршеност других интервала. Ако би се, у току концерта прелазило у други тоналитет, односно мењала се скала у којој се изводи музичко дело, то би захтевало поновно штимовање инструмената што би изазвало велике потешкоће ако би у току концерта при свакој промени тоналитета штимери морали да излазе на сцену.

Овај систем подешавања није одговарао ни музичким потребама и укусима, као ни замишљеним математичким захтевима што је наметнуло потрагу за новим решењима.

3.4. ПРИРОДНО ИЛИ ХАРМОНИЈСКО ПОДЕШАВАЊЕ

Природно или чисто или хармонијско подешавање јавило се већ у старој Грчкој, а заснива се на одређивању односа међу висинама тонова према односима фреквенција виших хармоника.

Хармонијски горњи тонови налазе се у односима $1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6$, итд. Прва два тона чине најпотпунију консонанцу и чине интервал октаве изражену односом природних бројева $1:2$. Други и трећи хармоник образују квинту и њихов је однос (у наведеном редоследу) $2:3$. Трећи и четврти хармоник образују кварту са односом $3:4$. На тај начин можемо добити све интервале дијатонске дурске скале:

$1 : 2$ - октава

$2 : 3$ - квинта

$3 : 4$ - кварта

$4 : 5$ - велика терца

$5 : 6$ - мала терца

$5 : 8$ - мала секста

$3 : 5$ - велика секста

$5 : 9$ - мала септима

$8 : 15$ - велика септима

Ова лествица се разликује од питагорејске због чињенице да односи у њој нису дефинисани само квинтама, квартама и октавама, него и другим, а нарочито терцама и секстама.

На основу овога добијамо:

$$G/F = (3/2) / (4/3) = 9/8 \text{ (велики цели степен),}$$

$$D/C = 9/8 \Rightarrow D = C \cdot 9/8 = 9/8,$$

$$E/D = (5/4) / (9/8) = 10/9 \text{ (мали цели степен),}$$

$$F/E = (4/3)/(5/4) = 16/15 \text{ (полустепен),}$$

$$c/H = 16/15 \Rightarrow H = c \cdot 15/16 = 15/8,$$

$$H/A = 9/8 \Rightarrow A = H \cdot 8/9 = 5/3.$$

Таква лествица изгледа овако:

c		d		e		f		g		a		h		c
1		9/8		5/4		4/3		3/2		5/3		15/8		2
	9/8		10/9		16/15		9/8		9/8		10/9		16/15	

где први ред означава однос тона према полазном, првом тону скале, а други, односе суседних тонова.

Однос између велике и мале терце је $(5/4)/(6/5) = 25/24$ што одговара хроматском полустепену и на тај начин се добија однос C-is према C.

D-es добијамо: C + кварта - велика терца, или $(4/3) / (5/4) = 16/15$.

Уочавамо да C-is и D-es немају исту фреквенцију, а требало би да су енхармонијски тонови.

Такође се може добити полустепен ако се цели степен 9/8 подели са претходно израчунатим полустепеном 25/24 па се добија нова вредност полустепена 27/25.

Ако се вредност полустепена 9/8 подели са 16/15 добија се још један полустепен 135/128.

Проблем ове природне интонације је постојање два цела степена и велики број различитих полустепена, чак четири. Даље, повишени тонови су нижи од снижених тонова (cis је нижи од des, ...).

Велика терца је у питагорејској лествици одређена односом $81/64$, а у природној лествици $5/4$ (чиста терца). Тај однос $(81/64)/(5/4) = 81/80$ натива се *синтонички зарез*.

И у природној и у питагорејској лествици се разликују повишени доњи од снижених горњих тонова. Док је у питагорејској снижени горњи тон нижи од повишеног доњег тона (des је нижи од cis), у природној скали је обротно (des је виши од cis).

И у природној лествици постоји проблем као и у питагорејској, потребно је имати више од 21 тон у октави. Осим тога, постоји други проблем. Велика секунда C - D је одређена односом $9/8$, а велика секста C - A односом $5/3$. D - A је чиста квинта чији би однос требао да буде $3/2$, а из претходног односа то је $5/3 : 9/8 = 40/27$. У вишегласном певању то доводи до прекида у хармонијској прогресији, односно тон од кога смо кренули при повратку се разликује од почетног.

Дакле, као и питагорејска лествица тако и природна је стварала проблем у промени тоналитета јер интервали нису једнаки. Овакве лествице су ограничавале композиторе, а модулације би биле могуће уз додавање екстремно великог броја дирки, односно лествица би морала бити подељена на много више делова.

Питагорин систем је био задовољавајући док је музика била једногласна. Са појавом хармоније (16. век) јавила се потреба увођења чисте терце што ствара нове проблеме. Зато је настављена потрага за новим системом у коме би сви интервали били чисти и биле задовољене потребе хармонијске музике.

3.5. ЈЕДНАКО ТЕМПЕРОВАНА СКАЛА

Решење проблема питагорејске и природне скале је било да се октава подели на 12 једнаких интервала, односно једнако *темперованом* скалом.

Темперовање представља намерно одступање од савршених интервала. Такав начин је, у ствари, компромис између теорије и праксе, односно, сваки интервал, осим октаве и приме, одступа од теоријских односа, али је са друге стране, музичка пракса поједностављена.

Ако са p означимо полустепен и фреквенцију основног тона (тонике) C са 1, тада је

$$C = 1 = p^0 \text{ и за октаву виши } c = p^{12} = 2.$$

Одавде следи да је $p = \sqrt[12]{2} = 1,05946$. Како изложилац представља удаљеност тона од тонике, тако прелазимо на логаритаме што омогућава сабирање интервала, (велика и мала терца чине квинту, $4 + 3 = 7$ или $p^4 \cdot p^3 = p^7$).

Да би што прецизније изразили интервал, уводи се мања јединица, *cent*. Цела октава је подељена на 1200 *cent*, односно вредност једног полустепена је 100 *cent*.

Тада је $s^{100} = p$ ($s = 1 \text{ cent}$), $s^{1200} = p^{12} = 2$, следи да је $s = \sqrt[1200]{2} = 1,00058$.

Ако желимо да неки интервал I изразимо у *cent*, треба да израчунамо логаритам од I у бази s .

Користећи једноставне логаритамске идентитете: $\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$ и $\log a^n = n \log a$,

добивамо:

$$\log_s I = \frac{\log I}{\log s} = 1200 \frac{\log I}{\log 2}$$

У овако темперованој скали квинта износи 700 *cent*, мала терца 300 *cent*, велика терца 400 *cent* и кварта 500 *cent*, што је подела на једнаке интервале. Међутим, савршена квинта је

$3/2 = 702 \text{ cent}$, незнатно одступање као и кварта $4/3 = 498 \text{ cent}$. мала терца је $315,31 \text{ cent}$ а велика $386,64 \text{ cent}$. У квинтном кругу, грешке се крећу до 42 cent .

Вредност Питагориног зареза $531441/524288$ је 24 cent , а синтоничког зареза $81/80$ је 22 cent .

Ако интервале у центима заокруглимо на цели број, следеће табеле показује системе подешавања, где је у другој врсти представљен однос фреквенција према првом тону, а у трећој врсти је изражено у центима.

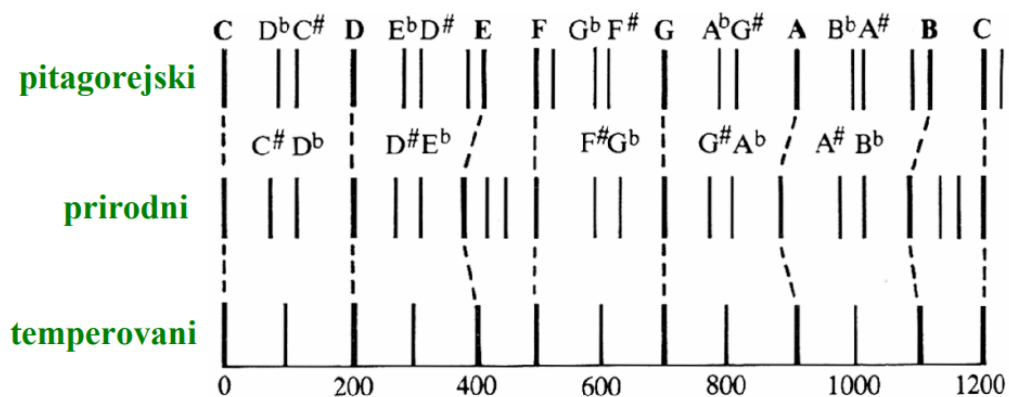
c	cis	d	es	e	f	fis	g	gis	a	b	h	c ¹
1	2187/2028	9/8	32/27	81/64	4/3	729/512	3/2	6561/4096	27/16	16/9	243/128	2
0	114	204	294	408	498	612	702	816	906	996	1110	1200

Питагорејски систем подешавања

c	cis	d	es	e	f	fis	g	gis	a	b	h	c ¹
1	16/15	9/8	6/5	5/4	4/3	45/32	3/2	8/5	5/3	9/5	15/8	2
0	112	204	316	386	498	590	702	813	884	1018	1088	1200

Природни систем подешавања

Одступање од 10 cent се тешко може опазити. Но, одступања већа од 20 cent се јасно чују.



Слика 10: Редослед тонова у различитим системима подешавања

Једнако темперована скала се данас користи и има велику предност јер је лако прећи у други тоналитет и омогућава хармонијску независност. Међутим, замерке су да су сви интервали, осим приме и октаве, помало раштимовани и да даје једнаке и безличне тоналитете.

3.6. СРЕДЊОТОНСКО ТЕМПЕРОВАЊЕ

Појавом хармоније у средњем веку, све више пажње се посвећивало терцама, па питагорејска скала, са савршеним квинтама и квартама а превеликим терцама, није била задовољавајућа. Решење се нашло у задржавању Питагориног подешавање по квинтама, али се прве четири квинте смање онолико колико је потребно да терца која настаје као четврта квинта не буде превисока, него природна а цели степени представљају геометријску средину великог ($9/8$) и малог ($10/9$) степена. Тако су квинте износиле 696,5 *cent*, уместо савршених 702, тј. смањене су за четвртину синтоничког зареза. На тај начин је добијена савршена терца (386 *cent*) а средњи тон D је тачно на средини између C и E, па отуда назив средњотонско. Квинте су се узлазно смањивале до *gis* а силазно до *es*.

$E_s \leftarrow B \leftarrow F \leftarrow C \rightarrow G \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow H \rightarrow F_{is} \rightarrow C_{is} \rightarrow G_{is}$

Све квинте су биле чисте осим квинте *gis* - *es* где су се накупила сва подешавања. Таква квинта је дисонантна, продорна, односно представља "вучју квинту".

Музичари су се, покушавајући да избегну овај интервал, ограничавали на тоналитете са највише три повисилице и снизилице. Овакво темпериовање се задржало у музичкој пракси готово четири века.

3.7. ДОБРО ТЕМПЕРОВАЊЕ

У тежњи да се елиминишу вучји интервали и омогући слободан прелазак у друге тоналитете, развило се више врста тзв, доброг темперовања. Једно решење је да се неке квинте за различите износе сузе, а неке оставе тачним у циљу поништавања Питагориног зареза. Све квинте између тонова F, C, G, D, A, E и H се смање за шестину Питагориног зареза ($24 : 6 = 4 \text{ cent}$) и износе 698 цент, а квинте између Fis, Cis, Gis, B, Es оставе тачне 702 cent.

Овакво темперовање чува основне карактеристике средњотонског али нема вучјих интервала. Карактеристика је и да су сви трозвучи прихватљиви али различити, па се и тоналитети разликују у боји.

За музичаре 20. века који заговарају једнолико темперовање, обојени тоналитети представљају романтичне бесмислице.

Темперовану лествицу је заговарао J. C. Бах. Написао је збирку композиција *Добро темперовани клавир* (*Wohltemperiertes Klavier*) у свих 12 дур и 12 мол лествица да би истражио разлику у тоналитетима, које добро темперовани системи садржи. Људи оштријег слуха тврде да је темперовани систем компромис и да се тиме губи естетска вредност. Музичари разликују сва три подешавања и изабраће одговарајуће зависно од музичког контекста. Певачи и гудачи користе природну лествицу, а клавијатуристи темперовану. Ако певач пева уз пратњу клавира, и он ће користити темперовану скалу. У сваком случају, све скале се користе, и треба имати на уму да ниједна није "Богом дата", односно није урођена, већ је стечена, усвојена на основу разних експеримената.

4. ВЕРИЖНИ РАЗЛОМЦИ И ТЕОРИЈА МУЗИКЕ

У музици западне културе је најчешће коришћена скала подељена на дванаест полустепена, односно на седам ступњева, септатонска скала. У неким другим културама октаву деле на пет (пентатонска скала), шест (секстатонска скала) делова итд. Поставља се питање на колико делова би требало поделити октаву да би добили најбоље интервале.

Користећи верижне разломке, математика долази до закључака који се поклапају са музичком праксом.

Питагорино одређивање тонова се заснива на принципу октаве и квинте. Ако фреквенцију првог тона посматрамо као јединичну, фреквенцију тона за октаву виши добијамо множећи фреквенцију основног тона са 2. Или све октаве су степени основе 2. Ниже октаве у односу на основни тон добијамо дељењем основног тона степеном броја 2. Квинте у односу на основни тон су степени броје $3/2$. Принцип Питагорине скале је ићи навише по квинтама, па кад дођемо до жељеног тона, вратити се натраг за одговарајући број октава.

На тај начин долазимо до бесконачно много тонова унутар сваке октаве који су задати односом облика:

$$\frac{1}{2^m} \left(\frac{3}{2} \right)^n \quad \text{при чему су } m, n \in \mathbb{Z}$$

Како важи да је $\frac{1}{2^m} \left(\frac{3}{2} \right)^n \neq 1$ јер је $3^n \neq 2^{m+n}$, ниједан од тих тонова се не поклапа са основним тоном, па тај поступак стално производи нове тонове. Међутим, скала са бесконачно много тонова је немогућа па је нормално да процес стварања нових тонова зауставимо када добијемо приближно поклапање са основним тоном.

Проблем се своди на решавање једначине

$$\frac{3}{2} = 2^x \quad \text{односно} \quad x = \log_2 \frac{3}{2} = \frac{\log\left(\frac{3}{2}\right)}{\log 2} \quad \text{и одређивање разломка } \frac{m}{n} \text{ који ће бити}$$

најбоља рационална апроксимација број x .

$$\frac{\log(3/2)}{\log 2} = 0 + \frac{1}{\frac{\log 2}{\log(3/2)}} = 0 + \frac{1}{\frac{\log(3/2)(2/3)2}{\log(3/2)}} = 0 + \frac{1}{\frac{\log(3/2) + \log((2/3) \cdot 2)}{\log(3/2)}} =$$

$$0 + \frac{1}{1 + \frac{\log(4/3)}{\log(3/2)}} = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{\log(3/2)}{\log(4/3)}}} = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{\log(4/3)(3/4)(3/2)}{\log(4/3)}}} =$$

$$0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{\log(9/8)}{\log(4/3)}}} = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{\log(4/3)}{\log(9/8)}}}} = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{\log(9/8)^2(8/9)^2(4/3)}{\log(9/8)}}}} =$$

$$0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \dots}}}}$$

Настављајући поступак, добијамо $x = [0, 1, 1, 2, 2, 3, 1, 5, \dots]$ па апроксимације броја x су:

$$x_0 = \frac{0}{1} \quad x_1 = \frac{1}{1} \quad x_2 = \frac{1}{2} \quad x_3 = \frac{3}{5} \quad x_4 = \frac{7}{12} \quad x_5 = \frac{24}{41} \quad x_6 = \frac{31}{53}$$

$$x_7 = \frac{179}{306} \quad \text{итд.}$$

Између x_2 и x_3 могућа је једна апроксимација $x_{2,3}' = [0, 1, 1, 1] = \frac{2}{3}$, између x_3 и x_4

такође једна апроксимација $x_{3,4}' = [0, 1, 1, 2, 1] = \frac{4}{7}$ а између x_4 и x_5 си могуће две апроксимације:

$$x_{4,5}' = [0, 1, 1, 2, 2, 1] = \frac{10}{17} \text{ и } x_{4,5}'' = [0, 1, 1, 2, 2, 2] = \frac{17}{29}$$

$\frac{10}{17}$ је лошија апроксимација од $\frac{17}{29}$.

Најбоље апроксимације броја x до одређеног имениоца су:

$$\frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{7}{12}, \frac{17}{29}, \frac{24}{41}, \frac{31}{53}, \dots$$

Шта нам кажу ове апроксимације?

Апросимација броја $x = \log_2 \frac{3}{2}$ бројем $\frac{3}{5}$ значи да октаву треба поделити на пет делова с тим да је квинта трећи тон и $2^{3/5} \approx 1,516 = 716 \text{ cent}$.

Апросимација броја $x = \log_2 \frac{3}{2}$ бројем $\frac{4}{7}$ значи да октаву треба поделити на седам делова с тим да је квинта четврти тон и $2^{4/7} \approx 1,486 = 686 \text{ cent}$.

Апросимација броја $x = \log_2 \frac{3}{2}$ бројем $\frac{7}{12}$ значи да октаву треба поделити на дванаест делова с тим да је квинта седми тон и $2^{7/12} \approx 1,498 = 702 \text{ cent}$, што је само 2 cent удаљено од савршене квинте која има 700 cent.

Апросимација броја $x = \log_2 \frac{3}{2}$ бројем $\frac{17}{29}$ значи да октаву треба поделити на двадесет девет делова с тим да је квинта седамнаести тон и $2^{17/29} \approx 1,501 = 701 \text{ cent}$.

Апроксимација броја $x = \log_2 \frac{3}{2}$ бројем $\frac{24}{41}$ значи да октаву треба поделити на 41 део с тим да је квинта 24 тон и $2^{24/41} \approx 1,5004$.

Очигледно да подела октаве на 29 и 41 део даје незнатно чистију квинту у односу на поделу на 12 полутонова. Поставља се питање како би изгледао инструмент и како би било могуће свирати на њему ако би имао толико дирки. Очигледно, како је теорија и доказала, најбоља подела скале је на 12 полустепена.

Кад је у питању кварта, проблем се своди на верижну апроксимацију броја

$$x = \frac{\log(4/3)}{\log 2} = [0, 2, 2, 2, \dots]$$

$$x_0 = \frac{0}{1}, \quad x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{2}{5}, \quad x_3 = \frac{5}{12}, \text{ итд.}$$

Између x_2 и x_3 могућа је једна апроксимација $x_{2,3}' = [0, 2, 2, 1] = \frac{3}{7}$ која је лошија од $\frac{5}{12}$.

Дакле, закључак је да се коректна кварта добија као пети тон у скали са 12 полутонова. У овом случају, кварта је 498 *cent*, што је одступање од 2 *cent* од савршених 500.

Сличним поступком се добијају велика терца :

$$x = \frac{\log(5/4)}{\log 2} = [0, 3, 9, \dots] \text{ са апроксимацијама } x_0 = \frac{0}{1}, \quad x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{9}{28}, \text{ итд.}$$

Између x_0 и x_1 могућа су две апроксимације $\frac{1}{1}$ и $\frac{1}{2}$, а између x_1 и x_2 апроксимације $\frac{8}{25}$,

$\frac{7}{22}$, $\frac{6}{19}$ и лошије $\frac{5}{16}$, $\frac{4}{13}$, $\frac{3}{10}$ и $\frac{2}{7}$.

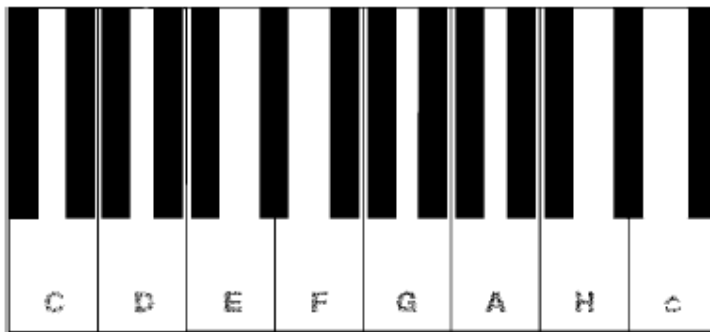
За малу терцу $x = \frac{\log(6/5)}{\log 2} = [0, 3, 1, 4, \dots]$ са апроксимацијама $x_0 = \frac{0}{1}$, $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{1}{4}$,

$$x_3 = \frac{5}{19}, \text{ итд.}$$

Између x_0 и x_1 могућа су две апроксимације $\frac{1}{1}$ и $\frac{1}{2}$, а између x_2 и x_3 апроксимације $\frac{4}{15}$, $\frac{3}{11}$ и лошија $\frac{2}{7}$.

Најбоља подела октаве, за коректне терце је подела на 19 полутонова, уз велику терцу као шести полутон. Иста подела даје коректне мале терце као пети полутон. Тада би квинта била подношљива као једанаести тон од 695 *cent* и подношљива кварта као осми тон од 505 *cent*.

Таква скала би изгледала овако:



Слика 11. Клавијатура са поделом октаве на 19 полутонова.

Интересантно је да је у Кини, око 40 године пре нове ере, краљ Фанг открио да у подели октаве на 53 тона, савршена квинта је 31 тон. Мало је вероватно да је користио апроксимације ирационалних бројева верижним разломцима али се његов закључак

поклапа са шестом апроксимацијом броја $x = \log_2 \frac{3}{2} \approx \frac{31}{53}$

5. ЗАКЉУЧАК

Човек чује гласове од 16 Hz до 20000 Hz, што одговара распону од око 10 октава, а ретки су гласови који се могу кретати изван распона од две октаве. Унутар једне октаве постоји много тонова које човек може разликовати, а музика је изабрала да користи одређен број тонова унутар једне октаве.

Музичка пракса се усмерила на поделу на 12 тонова. Иако то није једина подела која се користи, ово је најчешћа.

Математика, као наука која све прожима па и музику, наметнула је потребу да се теоријски објасни оно до чега је искуство довело. Коришћењем верижних разломака објашњено је зашто је подела октаве на 12 тонова најприхватљивија, као и шта би значило и какве би резултате дала подела октаве на неки други број тонова.

6. ЛИТЕРАТУРА

1. Звонимир Шикић: Математика и музика, Загреб, 1999.
2. Душан Ђукић: Верижни разломци, Београд, 2011.
3. Јелена Видић: Верижни разломци, примери и примене, мастер рад, Београдски Универзитет
4. Милош Чанак: Математика и музика, Београд, 2009.
5. Матеја Ђумић, Мирела Јукић Бокун: Примјене Еуклидовог алгоритма, Осјечки математички лист 13, 2013.
6. Matthew Bartha: Piano Tuning And Continued Fractions
<https://www.whitman.edu/Documents/Academics/Mathematics/bartha.pdf>
7. Инес Цулек: Глазба и математика, дипломски рад, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera, Осijek, 2015.
8. Радослав Димитријевић: Еуклидов алгоритам, ПМФ Ниш, Математика и информатика 1 (1-2), 2008.
9. Madarász Sz. Rozália: Matemetika i muzika, PMF Novi Sad, Prvi festival nauke u Novom Sadu, Novi Sad, februar 2009.
10. Милош Радојчић: Општа математика, математика Египта, Месопотамије и старе Грчке, Математички факултет, Београд
11. Павел Ројко: Психолошке основе интонације и ритма, Музичка академија, Загреб, 2012.
12. Крешимир Циндрић: Теорија угађања глазбала, THEORIA, година XI, број 11, септембар 2009.
<http://hdgt.hr/wp-content/uploads/sites/184/2014/10/Theoria-11.pdf>
13. <https://stajkarajic.wordpress.com/диатонски-тонски-систем/>
14. Марко Тајчевић: Основна теорија музике, треће издање, Просвета Београд, 1962.
15. www.viser.edu.rs/download.php?id=3951
16. <https://oeis.org/DUNNE/TEMPERAMENT.HTML#wolf>