УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

– МАСТЕР РАД –

Опције на форвард и фјучерс уговоре

Аутор:
Ивана Рогић 1027/2015

Ментор:
др Бојана Милошевић

Београд, 2018

Садржај

Поглавље 1

Увод

Опције (енгл. *options*) су вредносни папири који се односе на неке друге вредносне папире и чија је цена изведена из тих других вредносних папира. Опција је уговор који ономе ко га поседује даје право, али не и обавезу, да купи или да прода неки вредносни папир (активу) под одређеним условима. У овом раду бавићемо се опцијама на форвард и фјучерс уговоре.

Форвард уговор (енгл. *forward contract*) је уговор којим се странка обавезује да купи или прода робу (или вредносне папире, новац, акције) по уговореној цени у тренутку T, који ће јој бити испоручени у тренутку T.

Фјучерс уговор (енгл. *futures contract*), као и форвард уговор, представља споразум да се купи или прода роба по уговореној цени у неком будућем тренутку.

Форвардне, односно фјучерсне опције су вредносни папири који се односе на форвардне, односно фјучерсне уговоре. Активирањем ове опције стиче се позиција у форвард, односно фјучерс уговору.

Комисија за трговину фјучерсима у Америци *(The Commodity Futures Trading Commission)* дозволила је трговање опцијама на фјучерс уговоре 1982. на ексерименталној бази. Стална трговина одобрена је 1987. и од тада популарност ових опција код инвеститора расте великом брзином.

У овом раду размотрићемо како функционишу форвардне и фјучерсне опције, одредићемо горње и доње границе за њихове цене и уочити разлику између фјучерсних опција и опција на активу. Видећемо како се може одредити цена фјучерсних опција помоћу биномног модела или преко формула сличних оним које су Блек[1], Шолс[2] и Мертон[3] извели за опције које се односе на акције.

[1]Фишер Блек (1938 -1995) - амерички економиста
[2]Мајрон Шолс (1941 -) - канадско - амерички економиста
[3]Роберт Мертон (1944 -) - амерички економиста

Поглавље 2

Форвард и фјучерс уговори

2.1 Основне сличности и разлике између фјучерс и форвард уговора

Заједничке карактеристике форвард и фјучерс уговора су да купац (односно продавац) преузима обавезу да купи (прода) активу (на пример, финансијске инструменте, житарице, злато, валуте...) на датум доспећа (енгл. *maturity date*), у одређеној количини (енгл. *contract size*), по уговореној цени (енгл. *delivery price*) K, која се уговара на дан склапања уговора, а важи на датум доспећа. Рок доспећа T је временски период од тренутка склапања уговора до датума његовог доспећа, изражен у годинама. Каже се да купац активе заузима дугу позицију (енгл. *long position*) у форварду (фјучерсу), а продавац кратку позицију (енгл. *short position*).

Основна разлика између ова два финансијска деривата је што се форварди склапају директно између две стране, док са фјучерсима није тако. Трговина фјучерсима се одвија на берзама и уговорене стране су познате јавности, за разлику од форварда који се могу склапати договором две стране и не постоји никаква обавеза објављивања.

Поред тога, форварди се најчешће реализују на датум доспећа прометом активе форварда и новца, тј. инвеститор који заузима кратку позицију у форварду испоручује активу инвеститору који заузима дугу позицију за коју плаћа уговорену цену. За разлику од форварда, фјучерси се могу реализовати на два начина: инвеститор који заузима дугу позицију чека датум доспећа фјучерса и купује активу по условима наведеним у уговору, или пре датума доспећа заузима кратку позицију у фјучерсу на исту активу и са истим датумом доспећа. Ово последње, назива се још и треговина уназад (енгл. *reversing trade*) или неутралисање, односно ликвидирање позиције, јер се продаје претходно купљено право. Већина шпекуланата [1] на овај начин врши ликвидирање преузетих позција, јер њихов циљ није стварна испорука активе, већ остваривање профита преузимањем ризика.

Разлика фјучерса у односу на форвард је и у томе што датум доспећа код њих није потпуно одређен, већ се одређује месец испоруке, тако да инвеститор који заузима кратку позицију у фјучерсу има право да изабере дан, током месеца испоруке, када ће да изврши испоруку.

Како су форварди уговори између две стране, увек постоји потенцијална опасност да се они не реализују. Тешко је наћи испоручиоца робе, односно активе, као што је и тешко наћи заинтересованог купца, због чега се овим уговорима знатно мање тргује.

2.2 Наплата дуге и кратке позиције код форвард уговора

Инвеститор који је заузео дугу позицију у форварду са роком доспећа T година, у обавези је да на датум доспећа форварда купи активу чија је цена у том тренутку S_T, по уговореној цени K. Наплата (енгл. *payoff*) дуге позиције у форварду за јединицу активе је

$$S_T - K.$$

Слично, инвеститор који је заузео кратку позицију у форварду са роком доспећа T, у обавези је да на датум доспећа форварда прода активу чија је тренутна тржишна цена S_T, по уговореној цени K. Наплата кратке позиције у форварду, односно добит, за јединицу активе је

$$K - S_T.$$

За сачињавање овог уговора није потребно платити никакву суму, због чега наплата за форвард уговор представља тотални добитак или губитак за инвеститора.

2.3 Дневно усклађивање рачуна маргина код фјучерс уговора

Саставни део сваке трговине фјучерсима је операција клиринга, односно дневног усклађивања рачуна маргина са тржишном ценом фјучерса (енгл. *daily settlement, marketing to market*), због чега се сваког

[1]Шпекулација је трговина робом или вредносним папирима које карактерише неуобичајено висок ниво ризика, који је компезован могућношћу огромне добити.

трговачког дана одређује одговарајућа фјучерсна цена (енгл. *settlement price, closing price*). Начин њеног формирања се разликује у зависности од тржишта и врсте фјучерса. На пример, та цена може представљати тежинску суму фјучерсних цена у последњих неколико минута трговачког дана или фјучерсну цену по којој је реализована последња трговина.

Операција клиринга се одвија преко клириншких кућа. Свака трговина на берзи се мора остварити преко чланова берзе, а финансијско поравнање сваке трансакције преко клириншке куће. Клириншка кућа води рачуна о томе да се цео финансијки аранжман уредно изврши и у те сврхе користи иницијалну маргину (енгл. *initial margin*). То је новчани износ који купци и продавци морају оставити као депозит код клириншке куће, чиме се осигурава уредно извршавање обавезе после закључивања уговора. Свака клириншка кућа одређује висину иницијалне маргине у зависности од околности које владају на тржишту. На крају сваког дана трговања, рачун маргине се прилагођава у складу са добитком или губитком инвеститора који настаје због промене фјучерсне цене на тржишту. Доња граница до које може пасти сума на рачуну маргине се назива маргина одржавања (енгл. *maintenance margin*) и она најчешће износи 75% иницијалне маргине. Када вредност на рачуну маргине достигне маргину одржавања, инвеститору се упућује позив (енгл. *margin call*) да до следећег дана допуни рачун маргине до иницијалне маргине. Рачун маргине се допуњава делом суме која се назива маргина варирања (енгл. *variation margin*), а који је инвеститор положио код брокерске куће[2]. Уколико инвеститор не обезбеди маргину варирања, брокер ликвидира његову позицију у фјучерсу. После поравнања свих трансакција клијент може повући сва средства која је положио на име маргина.

У случају пада фјучерсне цене неког трговачког дана после склапања уговора, инвеститор који заузима дугу позицију у фјучерсу је на губитку, јер се обавезао да ће купити активу по уговореној цени која је сада виша од фјучерсне цене, тако да се његов рачун маргине смањио за разлику фјучерсне цене и уговорене цене. Због тога брокер мора платити, преко неког члана клириншке куће, губитак који клириншка кућа прослеђује брокеру инвеститора који заузима кратку позицију. Његов рачун маргине се повећава за добијењу разлику.

Обратно, ако дође до раста фјучерсне цене, јер је инвеститор који заузима кратку позицију на губитку, његов рачун маргине се умањује за разлику фјучерсне цене и уговорене цене, при чему се за ту суму увећава рачун маргине инвеститора са дугом позицијом. Аналогно се мењају рачуни маргина оба инвеститора на крају сваког трговачког дана до датума доспећа када долази до промене фјучерсне цене на

[2]Фирма која делује као посредник у трансакцијама између инвеститора.

тржишту.

Пример 1 *Претпоставимо да је инвеститор заузео 5 кратких позиција у фјучерсима на сребро, по фјучерсној цени* 19.97 *USD за унцу*[3] *(oz). Фјучерс гласи на* 5000 *oz сребра, иницијална маргина је* 1000 *USD, а маргина одржавања* 750 *USD.*

Како је инвестотор продао 5 фјучерс уговора, иницијална маргина износи $5 \cdot 1000 = 5000$ *USD, а маргина одржавања* $5 \cdot 750 = 3750$.

Ако је цена првог дана по склапању уговора 20 *USD за унцу, кратка позиција је на губитку за* 0.03 *USD за унцу, што износи* $0.03 \cdot 5000 = 150$ *по фјучерсу, односно укупно* 750 *USD за 5 фјучерса. Рачун маргине инвеститора који заузима кратку позицију је умањен за тај износ, па се на крају првог дана на њему налази* 4250 *USD. Истовремено је рачун маргине инвеститора са дугом позицијом увећан за* 750 *и износи* 5750. *Како маргина одржавања није достигнута, инвеститору са кратком позицијом се не упућује позив за допуну рачуна маргине.*

Претпоставимо да је другог дана је фјучерсна цена 20.15 *USD за унцу. Кратка позиција је поново на губитку од* 0.15 *USD за унцу, осносно* $0.15 \cdot 5000 = 750$ *USD по фјучерсу, а укупоно* 3750 *за 5 фјучерса. Рачун маргине инвеститора са кратком позицијом се смањује за ту суму и сада инзоси* 500. *Како је та сума мања од маргине одржавања, инвеститору се упућује позив да допуни рачун маргине из маргине варирања сумом од* 4500 *USD.*

Трећег дана инвеститор ликвидира позицију у фјучерсу, када је фјучерсна цена 19.95 *USD за унцу. Добитак кратке позиције је* $20.15 - 19.95 = 0.2$ *USD за унцу, тј.* 1000 *по фјучерсу, па је укупни добитак* 5000. *Ликвидирањем позиције на рачуну маргине се налази сума* 10000 *USD.*

Иницијална маргина 5000 *USD и допуна* 4500 *USD одређују укупно улагање инвеститора, што са износом маргине од* 10000 *USD након ликвидирања позиције даје добитак од* 500 *USD, колико износи разлика између фјучерсне цене и уговорене цене трећег дана, помножене бројем позиција у фјучерсима и бројем јединица активе на које фјучерси гласе:* $(19.97 - 19.95) \cdot 5000 \cdot 5 = 500$.

Табела приказана на слици (2.1) илуструје дневно усклађивање рачуна маргина које је описано у примеру[4].

[3] Унца представља стандардну меру тежине племенитих метала и износи 28.35 грама.

[4] Пример је преузет из литературе [5]

Дан	Уговорена цена	Тржишна цена	Дневна добит	Кумулативна сума добити	Рачун маргине	Допуна рачуна маргине
0	19.97				5 000	
1		20	-750	-750	4 250	
2		20.15	-3 750	-4 500	500	4 500
3		19.95	5 000	500	10 000	

Табела 2.1: Усклађивање рачуна маргина за кратку позицију у 5 фјучерсних уговора за сребро. Иницијална маргина је 1000 USD по уговору, укупно 5000 USD, а маргина одржавања је 750 USD по уговору, односно укупно 3750.

За писање овог поглавља коришћена је литература [3], [5], и [4].

Поглавље 3

Опције на фјучерс уговоре

3.1 Особине

Дефиниција 3.1.1 *Фјучерсне опције су опције чија је подлога фјучерс. То је финансијски уговор којим се стиче право, али не и обавеза да се ступи у фјучерсни уговор, по договореним условима.*

Услови који су присутни у овом уговору су:

- *уговорена цена* или *цена по истеку (engl. strike price, exercise price)* фјучерс уговора;
- *уговорено време до истека опције (engl. time to maturity, strike time, exercise time).*

У зависности од тога да ли се уговор односи на куповину или продају фјучерса, постоје две врсте ових опција:

- фјучерсна кол опција је право да се купи фјучерс уговор по одређеној цени, одосно реализацијом њен власник заузима дугу позицију у фјучерсу;
- фјучерсна пут опција је право да се прода фјучерс уговор по одређеној цени, и ако се реализује њен власник заузима кратку позицију у фјучерсу.

У погледу времена извршавања фјучерсне опције су најчешће америчке, тако да се могу активирати у било ком тренутку у току трајања уговора. Датум доспећа опције је најчешће на, или неколико дана пре првог дана месеца испоруке фјучерса.

3.1.1 Неке врсте фјучерсних опција

Најпопуларније фјучерсне опције као подлогу имају фјучерсе чија је актива кукуруз, соја, памук, шећерна репа и трска, сирова нафта, природни гас, злато, као и каматоносне фјучерсе: обвезнице, благајничке записе, берзанске индексе (S&P 500), итд.

Каматоносни фјучерс је врста фјучерса чија је актива обвезница. Постоје два основна типа ових фјучерса: први, код којих је актива нека дугорочна или средњорочна државна обвезница у које спадају, на пример, фјучерси који се односе на обвезнице (енгл. *Treasury bonds futures*) или фјучерси који се односе на благајничке записе (енгл. *Treasury notes futures*) и други, код којих је актива краткорочна обезница, на пример, фјучерси на благајничке новчанице (енгл. *Treasury bill futures*) или фјучерси на доларске депозите (енгл. *Eurodollar futures*).

Цена каматоносних фјучерсних опција расте, када порасте цена обезнице на коју се тај фјучерс односи (односно, када падне каматна стопа). И обрнуто, цена каматоносних фјучерсних опција пада, када падне и цена обвезнице (тј. када порасте каматна стопа). Тако, на пример, инвеститор који мисли да ће краткорочна каматна стопа порасти може да шпекулише куповином продајне фјучерсне опције на доларске депозите, док, на пример, инвеститор који мисли да ће краткорочa каматна стопа пасти, шпекулише куповином куповне опције на доларске депозите. Слично, инвеститор који мисли да ће дугорочна каматна стопа порасти купује продајну опцију на благајничке записе, док инвеститор који мисли да ће дугорочна капатна стопа пасти, купије куповну фјучесну опцију на благајничке записе.

3.1.2 Разлози за популарност фјучерсних опција

Природно питање које се намеће је због чега људи тргују фјучерсним опцијама које се односе на неку активу уместо опцијама на саму активу. Главни разлог је тај што се фјучерсним уговорима много лакше тргује на берзи. Поред тога, фјучерсна цена је позната у сваком тренутку на тржишту фјучерса, док цена активе није увек лако доступна. На пример, цена фјучерса који се односи на неку обвезницу је позната одмах у тренутку склапања уговора, док се тренутна тржишна цена обезнице може добити тек након контактирања једног или више трговаца.

Такође, важна чињеница везана за фјучерсне опције је та да активирање опције не мора да значи да ће актива на коју се опција односила бити испоручена, јер у највећем броју случајева, инвеститори ликвидирају позиције у фјучерсима пре испоруке активе. Фјучерсне опције се због тога обично исплаћују у готовини. То углавном користе инвеститори са ограниченим капиталом који нису у могућности да обезбеде активу или уговорену цену за испуњење фјучерсног уговора.

Још једна од предности фјучерсних опција је та да се фјучерсима и фјучерсним опцијама тргује истовремено, у једној трансакцији. Такође, трошкови трансакција су обично нижи него код опција које се односе на неку активу.

3.2 Вредност дуге позиције у фјучерсној опцији на датум доспећа

Као што је већ поменуто, на берзама се тргује америчким фјучерсним опцијама. Да би се одредиле вредности ових опција, размотримо најпре европске фјучерсне опције које могу да се активирају само у време доспећа.

Претпоставимо да имамо фјучерсну кол опцију чији је датум доспећа T на фјучерс уговор са датумом доспећа у тренутку T_1, $T \leq T_1$. Притом, нека је уговорена цена фјучерсне опције K, која њеном реализацијом постаје уговорена цена фјучерс уговора на који она гласи. Означићемо са F_t цену фјучерс уговора на који се опција односи у тренутку $t, t \leq T_1$.

Ако је цена фјучерс уговора у тренутку T мања од уговорене цене опције K на тај уговор ($F_T < K$), вредност опције је нула, јер нећемо куповати фјучерс уговор по цени K, када на тржишту можемо да га купимо по нижој цени F_T.

Да би фјучерсна кол опција била активирана неопходно је да важи: $F_T > K$. Тада нам опција омогућава да фјучерсни уговор чија је цена F_T у тренутку T, купимо по јефтинијој уговореној цени К. Активирањем фјучерсне кол опције, онај ко је поседује заузима дугу позицију у фјучерс уговору на који се односила та опција, и остварује профит који је једнак вредности уговорене цене фјучерс уговора у тренутку T минус уговорена цена фјучерсне опције ($F_T - K$).

Дакле, наплата дуге позиције у европској куповној фјучерсној опцији једнака је:

$$\max\{F_T - K, 0\}$$

Ствар је обрнута ако је у питању фјучерсна пут опција. Ако је у тренутку T цена фјучерс уговора F_T већа од уговорене цене опције K ($F_T > K$), опција је безвредна, јер нема смисла продавати фјучерс уговор по цени K ако то можемо урадити на тржишту по већој цени F_T.

Ако је у тренутку T, $F_T < K$, онда фјучерсна пут опција има вредност: на берзи можемо купити фјучерс уговор по цени F_T и продати га по цени K и тако остварити профит $K - F_T$. Дакле, активирањем пут опције, онај ко је поседује заузима кратку позицију у фјучерс уговору плус профит у вредности $K - F_T$.

Према томе, наплата дуге позиције у европској продајној фјучерсној опцији једнака је

$$\max\{K - F_T, 0\}$$

Пример 2 *Претпоставимо да је 15. август и да инвеститор има једну кол опцију која се односи на фјучерс уговор за куповину бакра у септембру са уговореном ценом 320 центи по килограму. Уговором је договорена продаја 25 000 килограма бакра. Претпоставимо да је цена бакра за испоруку у септембру 331 цент, и да је последња уговорена цена 14. августа била 330 центи.*

Ако се опција на фјучерс уговор за куповину бакра активира, инвеститор би зарадио:

$$25000(330 - 320)centi = \$2500$$

и плус би имао дугу позицију за фјучерс уговор који му омогућује да купи 25 000 килограма бакра у септембру.

Ако жели инвеститор може одмах купити бакар на основу фјучерс уговора. То би значило да је остварио добит од $2500 *од активирања опције и:*

$$25000(331 - 330)centi = \$250$$

што представља промену цене од последње уговорене цене. Дакле, укупна добит од активирања опције 15. августа је $2750*, што је управо* $25000(F - K)$*, где је* F *уговорена цена у тренутку активирања опције а* K *је уговорена цена.*

Да није имао куповну фјучерсну опцију, инвеститор би купио бакар по последњој уговореној цени од 330 *центи и тиме остварио добит од:*

$$25000(331 - 330)centi = \$250$$

јер би у септембру бакар плаћао по цени од 331*. Дакле, улагање у опцију се исплатило.*

3.3 Горње и доње границе за цене фјучерсних опција

Претпоставићемо да важи следеће:

- не постоје трошкови новчаних трансакција,

- све подлеже истој каматној стопи,
- позајмице и улози у банку имају исту каматну стопу и увек можемо да купимо или продамо опцију или финансијски инструмент на који се она односи по тржишној цени,
- не постоји арбитража *(engl. arbitrage)* - прављење сигурног профита без ризика.

Теорема 3.1 *Горња граница цене европске куповне фјучерсне опције је:*

$$c_t \leq F_t e^{-r(T-t)}, t \leq T$$

Доказ. Уколико би важило супротно, арбитражер[1] би

- заузео кратку позицију у опцији (продао опцију) са датумом доспећа у тренутку T и уговореном ценом фјучерсне опције K, (односно фјучерс уговора, ако се опција реализује);
- уложио суму $F_t e^{-r(T-t)}$ на банковни рачун уз каматну стопу r;
- заузео дугу позицију у фјучерсу истог типа са роком доспећа T (купио фјучерс уговор) као што је онај на који гласи опција, али са уговореном ценом F_t.

Ако на датум доспећа опције важи да је $F_T \geq K$, она се реализује и арбитражер има обавезу да прода фјучерс по цени K. Наплата кратке позиције у тој опцији износи $-(F_T - K)$.

Пошто је заузео дугу позицију у фјучерс уговору, арбитражер на датум доспећа фјучерса у обавези је да купи активу чија је цена у том тренутку F_T, по уговореној цени F_t и тиме заради суму једнаку $F_T - F_t$.

Износ $F_t e^{-r(T-t)}$ уложен у банку по каматној стопи r током интервала дужине $(T-t)$ нарасте до F_t.

Дакле, арбитражни портфолио[2] вреди $-(F_T - K) + F_T - F_t + F_t = K$

Ако је $F_T < K$, опција се не реализује и арбитражни портфолио вреди: $F_T - F_t + F_t = F_T$. □

Теорема 3.2 *Доња граница цене европске куповне фјучерсне опције има вредност:*

$$c_t \geq max\{(F_t - K)e^{-r(T-t)}, 0\}, t \leq T. \tag{3.1}$$

[1]Онај који прави сигуран профит без ризика

[2]Колекција вредносних папира састављена тако да осигура сигуран профит без ризика.

Доказ. Ако је куповна опција на губитку, тј. ако важи $F_t < K$, тада важи неједнакост (3.1). Због тога ћемо разматрати случај када опција није на губитку, тј. када је $F_t \geq K$. Упоредићемо вредности два портфолија. Први портфолио се састоји од:

- европске куповне фјучерсне опције са датумом доспећа у тренутку T,
- и суме $Ke^{-r(T-t)}$ уложене на банковни рачун уз каматну стопу r.

Вредност овог портфолија у тренутку t је: $\Pi_t^1 = c_t + Ke^{-r(T-t)}$

Други портфолио се састоји од:

- износа $F_t e^{-r(T-t)}$ уложеног на банковни рачун уз каматну стопу r,
- и дуге позиције у фјучерсу истог типа као фјучерс на који гласи опција, осим што је његова уговорена цена F_t.

Вредност овог портфолија је $\Pi_t^2 = F_t e^{-r(T-t)}$

Ако на датум доспећа куповне опције важи да је $F_T \geq K$, она се реализује и власник првог портфолија остварује наплату $F_T - K$, тако да заједно са сумом $Ke^{-r(T-t)}$ која у банци по каматној стопи r нарасте до K, вредност првог портфолија у тренутку T је $\Pi_T^1 = F_T$. Вредност уложене суме у другом портфолију у тренутку T је F_t, а вредност дуге позиције у фјучерсу је $F_T - F_t$, тако да је вредност другог портфолија једнака $\Pi_T^2 = F_T$

Ако је $F_T < K$, куповна опција се неће реализовати. Вредност првог портфолија је $\Pi_T^1 = K$, а другог $\Pi_T^2 = F_T$. Први портфолио је вреднији од другог.

На датум доспећа опције први портфолио вреди бар колико и други, а може се показати да то важи и у произвољном тренутку t пре датума доспећа. Ако претпоставимо супротно, да у произвољном тренутку $t < T$,

$$c_t < (F_t - K)e^{-r(T-t)}, \tag{3.2}$$

арбитражер може креирати портфолио који у тренутку t обезбеђује профит $\Pi_t = (F_t - K)e^{-r(T-t)} - c_t > 0$ на следећи начин:

- позајмљивањем суме $(F_t - K)e^{-r(T-t)}$ из банке уз каматну стопу r;
- заузимањем кратке позиције у фјучерсу по уговореној цени F_t;
- заузимањем дуге позиције у куповној фјучерсној опцији са уговореном ценом K и датумом доспећа у тренутку T.

На датум доспећа опције арбитражер дугује суму $F_t - K$, док је вредност његове кратке позиције у фјучерсу $-(F_T - F_t)$.

Ако је $F_T \geq K$, арбитражер реализује куповну опцију чија је наплата једнака $F_T - K$, па је вредност његовог портфолија на датум доспећа опције $\Pi_T = -(F_t - K) - (F_T - F_t) + F_T - K = 0$.

Ако је $F_T < K$, не реализује се куповна опција, и вредност арбитражног портфолија на датум доспећа опције је $\Pi_T = -(F_t - K) - (F_T - F_t) = K - F_T > 0$. Према томе, претпоставка (3.2) имплицира могућност арбитраже, одакле следи да важи (3.1). □

Теорема 3.3 *Горња граница цене европске продајне фјучерсне опције је:*

$$p_t \leq Ke^{-r(T-t)}, t \leq T.$$

Доказ. Уколико би важило супротно, арбитражер би:

- заузео кратку позицију у опцији са датумом доспећа у тренутку T,
- и уложио у банку суму $Ke^{-r(T-t)}$ уз каматну стопу r.

На датум доспећа опције, ако је $F_T < K$, она се реализује и арбитражер има обавезу да заузме дугу позицију у фјучерсу са уговореном ценом К и вредност одговарајуће наплате је $-(K - F_T)$. Заједно са сумом К на банковном рачуну, арбитражни портфолио вреди F_T.

Ако је $F_T \geq K$, опција се не реализује и арбитражер поседује суму K. □

За европске продајне фјучерсне опције се такође може одредити доња граница њихове цене.

Теорема 3.4 *Доња граница цене европске продајне фјучерсне опције има вредност:*

$$p_t \geq max\{(K - F_t)e^{-r(T-t)}, 0\}, t \leq T. \tag{3.3}$$

Америчка фјучерсна опција даје власнику више могућности за реализацију, тако да је вреднија од одговарајуће европске опције. Отуда, за цену америчких куповних и продајних фјучерсних опција би важила доња граница (3.1), односно (3.3). Међутим, америчка опција се може реализовати и у том случају је њена наплата $F_t - K$, што је веће од доње границе цене одговарајуће европске опције (3.1) за износ $(F_t - K)(1 - e^{-r(T-t)})$, одакле се може закључити да је оптимално америчку куповну фјучерсну опцију реализовати раније. Аналогно важи и за америчку продајну фјучерсну опцију.

3.4 Сличности и разлике између опција на активу и фјучерсних опција

У овом поглављу упоредићемо фјучерсне опције и опције чија је актива иста као актива фјучерса (енгл. *spot options, options on spot*), које имају исту уговорену цену и датум доспећа.

Наплата куповне опције на активу, са уговореном ценом K је једнака:

$$max\{S_T - K, 0\}$$

где је S_T цена активе у тренутку истека опције. Наплата куповне фјучерсне опције са истом уговореном ценом је

$$max\{F_T - K, 0\}$$

где је F_T цена фјучерса у тренутку истека опције. Ако се датум доспећа фјучерса поклапа са датумом доспећа опције, тада је $F_T = S_T$, због чега су цене опције на активу и фјучерсне опције једнаке. Слично, европска продајна фјучерсна опција вреди исто као и одговарајућа продајна опција на активу када фјучерс истиче у исто време као и опција.

Међутим, уколико је датум доспећа фјучерса након датума доспећа опције, цена европске куповне фјучерсне опције је виша од цене одговарајуће европске куповне опције на активу, док је цена европске продајне фјучерсне опције нижа од цене одговарајуће опције на активу.

На тржишту се обично тргује америчким фјучерсним опцијама. Под претпоставком да је безризична каматна стопа позитивна, увек постоји вероватноћа да ће бити оптимално активирати америчку фјучерсну опцију пре њеног доспећа. Због тога су америчке фјучерсне опције вредније од одговарајућих европских.

За америчке опције генерално не можемо закључити да је америчка фјучерсна опција вредна као и одговарајућа америчка опција на активу када се датуми доспећа фјучерса и опције поклапају, јер се у многим ситуацијама фјучерсна опција реализује раније и власнику обезбеђује већи профит. У том случају, као и када је датум доспећа фјучерса након датума доспећа опције, важи исти однос цена америчких куповних фјучерсних опција и опција на активу као и за европске опције.

3.5 Пут - кол паритет

Пут - кол паритет је веза која постоји између цена европских пут и кол опција, које имају исту уговорену цену, време до истека и односе се на исти вредносни папир. Из пут - кол паритета следи да, знајући цену једне од те две врсте опција, почетну и уговорену цену вредносног папира на кога се односи опција, каматну стопу и време до доспећа, можемо наћи цену друге опције.

Сада ћемо извести пут - кол паритет за европске фјучерсне опције. Претпоставимо да имамо европску куповну и подајну опцију са истом уговореном ценом K и временом доспећа T. Можемо формирати два портфолија. Први се састоји од:

- европске куповне фјучерсе опције,
- суме $Ke^{-r(T-t)}$ уложене у банку по каматној стопи r.

Други портфолио садржи:

- европску продајну фјучерсну опцију,
- дугу позицију у фјучерсу истог типа као фјучерс на који гласи опција, са уговореном ценом F_t,
- суму $F_t e^{-r(T-t)}$ уложену на банковни рачун уз каматну стопу r.

Ако на датум доспећа опције T, важи да је $F_T \geq K$, она се реализује и власник првог портфолија остварује профит $F_T - K$. Заједно са сумом $Ke^{-r(T-t)}$ која до тренутка T, по каматној стопи r нарасте до K, први портфолио вреди $F_T - K + K = F_T$. Ако је $F_T < K$ опција се не реализује и вредност првог портфолија је K. Дакле у тренутку T важи:

$$\Pi_T^1 = max\{F_T, K\}.$$

Ако је $F_T \geq K$, продајна опција из другог портфолија се неће реализовати. Вредност дуге позиције у фјучерсу је $F_T - F_t$, а новац уложен у банку по каматној стопи r до тренутка T вреди F_t, тако да је вредност другог портфолија F_T. Ако је $F_T < K$, продајна фјучерсна опција се реализује и власник остварује профит од $K - F_T$. У овом случају други портфолио вреди $K - F_T + F_T - F_t + F_t = K$. Дакле вредност другог портфолија је такође:

$$\Pi_T^2 = max\{F_T, K\}.$$

Како су вредности оба портфолија у тренутку T једнака и европске опције не могу бити реализоване пре датума доспећа, следи да оба портфолија вреде исто у неком тренутку $t, t \leq T$.

У тренутку t, први портфолио вреди:

$$\Pi_t^1 = c_t + Ke^{-r(T-t)},$$

где је c_t цена европске фјучерсне куповне опције у тренутку t. Процес усклађивања маргина обезбеђује да фјучерс уговор из другог портфолија у тренутку $t, t \leq T$, вреди 0, тако да је вредност другог портфолија у тренутку t:

$$\Pi_t^2 = p_t + F_t e^{-r(T-t)},$$

где је p_t цена европске фјучерсне продајне опције. Дакле, формула за пут - кол паритет за фјучерсне европске опције је:

$$c_t + Ke^{-r(T-t)} = p_t + F_t e^{-r(T-t)}. \tag{3.4}$$

Као што је показано у поглављу 3.4, када се датум доспећа фјучерса поклапа са датумом доспећа опције, цене фјучерсне опције и опције на активу су једнаке. Стога, једнакост 3.4 даје везу између цене куповне опције на активу, продајне опције на активу и цене фјучерса када обе опције доспевају у исто време када и фјучерс.

Пример 3 *Претпоставимо да је цена европске куповне опције чија је актива сребро за испоруку за 6 месеци 0.56 долара по унци. Уговорена цена сребра је 8.5 долара по унци. Претпоставимо да је цена фјучерс уговора за испоруку кроз 6 месеци тренутно 8 долара и да је годишња неутрална каматна стопа за шестомесечну инвестицију 10%. Из пут - кол паритета следи да је цена европске продајне опције на активу, са истим датумом доспећа као и куповна опција, једнака:*

$$0.56 + 8.5 \cdot e^{-0.1 \cdot 6/12} - 8 \cdot e^{-0.1 \cdot 6/12} = 1.04.$$

Однос цена америчких фјучерсних опција у пут - кол паритету је:

$$Ke^{-r(T-t)} - F_t \leq P_t - C_t \leq K - F_t e^{-r(T-t)}, t \leq T \tag{3.5}$$

Да би показали релацију (3.5) упоредићемо вредности два портфолија. Први се састоји од:

- америчке куповне фјучерсне опције,
- износа $Ke^{-r(T-t)}$ уложеног у банку по каматној стопи r.

Други портфолио садржи:

- дугу позицију у фјучерсу са уговореном ценом F_t
- износ F_t уложен на банковни рачун
- европску продајну фјучерсну опцију.

На датум доспећа опције, ако је $F_T \geq K$ и ако се није раније реализовала, реализује се америчка куповна опција. Тада власник првог портфолија заузима дугу позицију у фјучерсу са уговореном ценом K и наплата куповне опције је $F_T - K$. Износ стављен у банку, после времена $T - t$ нарасте до K, тако да је вредност првог портфолија:

$$\Pi_T^1 = F_T - K + K = F_T.$$

Продајна опција из другог портфолија се неће реализовати, док је вредност дуге позиције у фјучерсу са уговореном ценом F_t једнака $F_T - F_t$. Заједно са новцем који у банци нарасте до износа $F_t e^{r(T-t)}$, други портфолио вреди:

$$\Pi_T^2 = F_T - F_t + F_t e^{r(T-t)} = F_T + F_t(e^{r(T-t)} - 1).$$

У овом случају је други портфолио вреднији од првог.

Ако је $F_T < K$, реализује се европска продајна опција, док је америчка куповна опција безвредна, тако да је вредност првог портфолија:

$$\Pi_T^1 = K.$$

Реализацијом продајне опције власник другог портфолија заузима кратку позицију у фјучерсу са уговореном ценом K и наплата опције је $K - F_T$. Када се узме у обзир вредност дуге позиције у фјучерсу са уговореном ценом F_t и износ $F_t e^{r(T-t)}$ на банковном рачуну, вредност другог портфолија је:

$$\Pi_T^2 = K - F_T + F_T - F_t + F_t e^{r(T-t)} = K + F_t(e^{r(T-t)} - 1).$$

И у овом случају је други портфолио вреднији од првог.

Нека је $\tau < T$ тренутак када је повољно реализовати америчку куповну опцију , односно, нека је $F_\tau \geq K$. Реализацијом те опције власник првог портфолија заузима дугу позицију у фјучерсу са уговореном ценом K и наплата опције је $F_\tau - K$. Вредност првог портфолија у тренутку τ је:

$$\Pi_\tau^1 = F_\tau - K + K e^{-r(T-t)} e^{r(\tau-t)} = F_\tau - K(1 - e^{-r(T-\tau)},$$

а вредност другог портфолија:

$$\Pi_\tau^2 = F_\tau - F_t + F_t e^{r(\tau-t)} + p_\tau = F_\tau - F_t(e^{r(\tau-t)} - 1) + p_\tau,$$

тако да је први портфолио у произвољном тренутку $t \leq T$ мање вредан другог, односно $C_t + K e^{-r(T-t)} < F_t + p_t$. Цена америчке продајне фјучерсне опције је виша од цене одговарајуће европске, одакле следи $C_t + K e^{-r(T-t)} \leq F_t + P_t$.

Да би се показала десна страна паритета 2.5, креираћемо поново два портфолија. Први се састоји од:

- америчке продајне фјучерсне опције,
- суме $F_t e^{-r(T-t)}$ уложене на банковни рачун,
- дуге позиције у фјучерсу са уговореном ценом F_t,

док се други састоји од:

- европске куповне фјучерсне опције,
- износа K уложеног на банковни рачун.

Ако је $F_T \geq K$, реализује се куповна фјучерсна опција, чији власник заузима дугу позицију у фјучерсу са уговореном ценом K и наплата опције је $F_T - K$, па су вредности портфолија једнаке:

$$\Pi_T^1 = F_t + F_T - F_t = F_T,$$
$$\Pi_T^2 = F_T - K + Ke^{r(T-t)} = F_T + K(e^{r(T-t)} - 1).$$

Ако је $F_T < K$, реализује се продајна опција, ако се није реализовала до датума доспећа, тако да њен власник заузима кратку позицију у фјучерсу са уговореном ценом К и наплата опције је $K - F_T$. Тада је:

$$\Pi_T^1 = K - F_T + F_t + F_T - F_t = K,$$
$$\Pi_T^2 = Ke^{r(T-t)},$$

односно, други портфолио је вреднији од првог.

Нека је $\tau < T$ повољан тренутак за реализацију америчке продајне фјучерсне опције. Тада је $F_\tau < K$ и

$$\Pi_\tau^1 = K - F_\tau + F_t e^{-r(T-t)} e^{r(\tau-t)} + F_\tau - F_t = K - F_t(1 - e^{-r(T-\tau)}),$$
$$\Pi_\tau^2 = c_\tau + Ke^{r(\tau-t)},$$

из чега се закључује да је у произвољном тренутку $t \leq T$, први портфолио мање вредан од другог, односно, $P_t + F_t e^{-r(T-t)} < c_t + K \leq C_t + K$, чиме је доказана и десна страна неједнакости 2.5.

Однос цена америчких фјучерсних опција у пут - кол паритету не зависи од природе активе фјучерса и може се применити на све врсте фјучерса.

3.6 Вредновање фјучерсних опција помоћу Биномног модела

Велике финансијске институције користе опције да би се заштитиле од будућих ризика, промена каматних цена или других флуктуација на тржишту. Обезбеђење од ризика или хеџинг (енгл. *hedging*) је основни проблем сваког великог инвеститора. Сходно томе, поставља се питање како одредити цену опције.

Веома корисна и популарна техника за одређивање цена опција подразумева конструисање биномног стабла. То је дијаграм који представља различите путање којима се може кретати цена вредносниг папира на који се опција односи, током њеног трајања. Претпоставка је да се цена вредносног папира креће по принципу случајног лутања: у сваком тренутку, постоји одређена вероватноћа да ће цена порасти за одређени проценат, као и да ће цена пасти за одређени проценат. Како смањујемо временски период на чијем крају долази до промене цена, овај модел постаје еквивалентан Блек-Шолс-Мертоновом моделу за одређивање цене акција, о коме ће бити речи касније.

Биномни модел је један од првих случајних процеса који је искоришћен за моделирање цена акција и први пут је представљен у раду Кокса, Роса и Рубинштајна 1979. године [2].

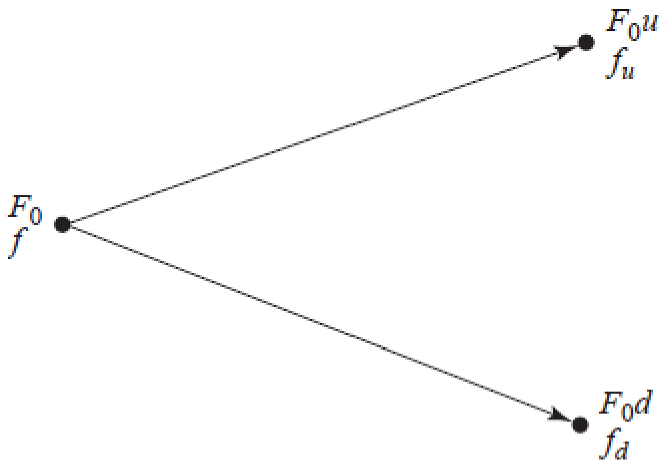
За налажење цена опција, поред биномног модела, користимо и принцип процене која је неутрална од ризика (енгл. *Risk - Neutral Valuation*). Према том принципу, цена опције је садашња вредност математичког очекивања од добити опције.

3.6.1 Биномни модел са једним кораком

Нека је садашња цена фјучерс уговора F_0, а цену куповне фјучерсне опције са истеком T означићемо са f. Претпостављамо да током живота опције, цена фјучерса може да порасте са фактором $u > 1$ и износи F_0u или да опадне до F_0d са фактором $d < 1$ (Слика 3.1). Ако цена фјучерса порасте на F_0u, добит од куповне опције је $f_u = max\{uF_0 - K, 0\}$, а ако цена фјучерса падне на F_0d, добит износи $f_d = max\{dF_0 - K, 0\}$, где је K уговорена цена.

Претпоставимо да смо формирали портфолио који се састоји од:

- Δ фјучерс уговора које смо купили (заузели дугу позицију) и чија је тренутна цена F_0;
- продали смо једну европску куповну опцију која се односи на фјучерсе (кратка позиција).



Слика 3.1: Биномни модел са једним кораком

Циљ нам је да нађемо ону вредност Δ, која ће овај портфолио да направи безризичним, што значи да ће вредност портфолија у тренутку T бити иста, било да вредност фјучерса порасте, било да падне.

Ако цена фјучерса порасте, куповна опција коју смо продали ће се активирати, а вредност дуге позиције у фјучерсу, због дневног усклађивања рачуна маргина је $F_0u - F_0$, па је вредност портфолија једнака $(F_0u - F_0)\Delta - f_u$. Слично, ако цена фјучерса падне у тренутку T вредност портфолија је $(F_0d - F_0)\Delta - f_d$. Да би портфолио био безризичан, тј. независан од промене цене фјучерс уговора, те две вредности ћемо изједначити:

$$(F_0u - F_0)\Delta - f_u = (F_0d - F_0)\Delta - f_d.$$

Одатле добијамо да је:

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{F_0u - F_0d}. \tag{3.6}$$

Ако је Δ изабрано на овај начин, портфолио је безризичан и он треба да заради, по каматној стопи без ризика r исто онолико колико би се добило када би почетна средства била уложена у банку. Садашња вредност тог портфолија је:

$$[(F_0u - F_0)\Delta - f_u]e^{-rT}.$$

За овај портфолио платили смо у нултом тренутку $-f$, јер смо продали једну европску куповну опцију а добит од Δ фјучерс уговора у нултом тренутку је $F_0 - F_0 = 0$. Одавде следи:

$$-f = [(F_0u - F_0)\Delta - f_u]e^{-rT}.$$

Када заменимо израз за Δ добијамо:

$$f = e^{-rT}[pf_u + (1-p)f_d], \tag{3.7}$$

где је

$$p = \frac{1-d}{u-d}. \tag{3.8}$$

Једнакост (3.8) представља вероватноћу, која је неутрална од ризика, да цена фјучерс уговора порасте током живота опције која се односи на тај фјучерс.

Пример 4 *Претпоставимо да је тренутна цена фјучерса 30 и да ће или порасти на 33 или пасти на 28 током следећег месеца. Разматрамо једномесечну куповну фјучерсну опцију са уговореном ценом 29 и игнорисаћемо дневно усклађивање рачуна маргина са тржишном ценом.*

Ако се испостави да је цена фјучерса порасла на 33, добит од опције је 4 (активираћемо куповну фјучерсну опцију и купити фјучерс по уговореној цени 29 а тренутна тржишна цена је 33), а вредност фјучерса је 3. Ако цена пак падне на 28, добит од опције је 0 (неће се активирати опција јер је тренутна тржишна цена мања од уговорене), а вредност фјучерс уговора је -2.[3]

Да би се заштитили од промене цена, размотрићемо портфолио који се састоји од кратке позиције у куповној фјучерсној опцији и дуге позиције у Δ *фјучерс уговора. Ако цена фјучерса порасте на 33, вредност портфолија је* $3\Delta - 4$*, а ако цена падне на 28, портфолио вреди* -2Δ*, јер је дуга позиција је на губитку, а куповна опција се неће активирати. Портфолио је безризичан ако му је вредност иста без обзира на промену цене, дакле:* $3\Delta - 4 = -2\Delta, \Delta = 0.8$*. За ову вредност* Δ *портфолио ће за месец дана вредети* $3\cdot 0.8 - 4 = -1.6$*. Ако претпоставимо да је безризична годишња каматна стопа* 6%*, садашња вредност портфолија је* $-1.6 \cdot e^{-0.06 \cdot 1/12} = -1.592$*. Како је вредност фјучерса данас нула, вредност опције мора бити* 1.592*.*

Сада ћемо израчунати цену опције користећи формулу (3.7).

$$u = 33/30 = 1.1, d = 28/30 = 0.9333, \; r = 0.06, T = 1/12$$
$$f_u = max\{33 - 29, 0\} = 4, f_d = max\{28 - 30, 0\} = 0$$

Из једначине (3.8), добијамо:

[3] Ово је апроксимирана вредност, у смислу да се добит или губитак од фјучерс уговора не разматра у тренутку T, већ сваког дана у периоду од 0 до T. Повећавајући број корака у биномном моделу, односно смањујући временски интервал на коме посматрамо промену цене, апромсимација постаје боља

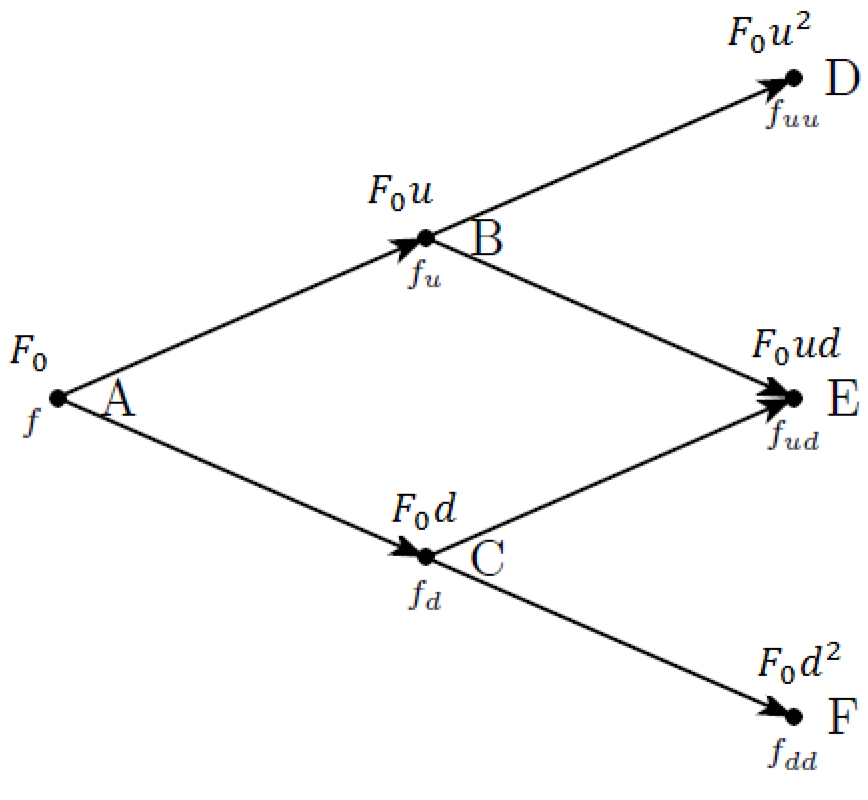
$$p = \frac{1-0.9333}{1.1-0.9333} = 0.4.$$

И коначно из (3.7) следи:

$$f = e^{-0.06 \cdot 1/12}[0.4 \cdot 4 + 0.6 \cdot 0] = 1.592.$$

3.6.2 Биномни модел са два корака

Претходну анализу можемо проширити на још један корак. Претпоставимо да се цена фјучерса мења на идентичан начин као и у биномном моделу са једним кораком, може да порасте са фактором $u > 1$ или да опадне са фактором $d < 1$. Цена фјучерс уговора након две промене може бити F_0u^2, F_0ud или F_0d^2, док је добит редом f_{uu}, f_{ud} и f_{dd} (слика 3.2). Циљ је наћи вредност опције f при оваквом моделу.



Слика 3.2: Биномни модел са два корака

Претпоставимо да чворови $[B, D, E]$, $[C, E, F]$ и $[A, B, C]$ образују биномни модел са једним кораком и да је дужина временског интервала Δt. Из једнакости 3.7 добијамо:

$$f_u = e^{-r\Delta t}[pf_{uu} + (1-p)f_{ud}], \tag{3.9}$$

$$f_d = e^{-r\Delta t}[pf_{ud} + (1-p)f_{dd}], \tag{3.10}$$

$$f = e^{-r\Delta t}[pf_u + (1-p)f_d]. \tag{3.11}$$

Замењујући једнакости 3.9 и 3.10 у 3.11, добијамо:

$$f = e^{-2r\Delta t}[p^2 f_{uu} + 2p(1-p)f_{ud} + (1-p)^2 f_{dd}]. \tag{3.12}$$

Променљиве $p^2, 2p(1-p), (1-p)^2$ представљају вероватноће достизања горњег, средњег и доњег чвора биномног стабла са два корака. Дакле, цена опције једнака је очекиваном добитку у свету неутралном од ризика, који је умањен за безризичну каматну стопу.

Све опције које смо до сада разматрали биле су европске. Сада ћемо видети како можемо вредновати америчке фјучерсне опције користећи биномни модел. Америчке опције се могу реализовати у било ком тренутку пре времена доспећа, стога је потребно проверити у сваком тренутку промене цене фјучерса да ли је оптимално реализовати америчку фјучерсну опцију. Вредност америчке опције у последњем чвору биномног стабла (у тренутку доспећа) једнака је европској опцији.

За америчке куповне опције важи следеће тврђење:

Теорема 3.5 *Америчку куповну опцију без дивиденди никада не треба активирати пре времена истека.*

Доказ. Ако се америчка кол опција активира у тренутку $t < T$, где је T време истека, мора бити $F_t > K$ (власник кол опције купује акцију, или фјучерс уговор, по нижој цени K). У том тренутку он направи добит од $F_t - K$ и кад тај износ стави у банку, он до тренутка T нарасте до $(F_t - K)e^{r(T-t)}$.

Међутим, за власника америчке опције постоји боља стратегија: он прода у тренутку t одговарајућу акцију (односно фјучерс) без покрића, коју треба да купи у тренутку истека T да би дао ономе коме ју је продао. У тренутку T ће, пошто има кол опцију, платити за ту акцију цену $min\{F_T, K\}$. Дакле, у тренутку t, инвеститор добија од продаје акције суму F_t коју улаже у банку и која до тренутка T нарасте до $F_t e^{r(T-t)}$. Пошто у тренутку T он мора да купи акцију, његово укупно стање је

$$F_t e^{r(T-t)} - min\{F_T, K\} \geq (F_t - K)e^{r(T-t)},$$

јер је

$$min\{F_T, K\} \leq K e^{r(T-t)}.$$

□

Када је реч о пут опцијама, њих можемо активирати и пре истека уговореног времена, и то ћемо радити у случају када је добит од опције већа од цене опције у том тренутку. Након прве промене цене фјучерса у биномном моделу, добит од опције биће:

$$f_u = max\{e^{-r\Delta t}[pf_{uu} + (1-p)f_{ud}], K - F_0 u\} \tag{3.13}$$

$$f_d = max\{e^{-r\Delta t}[pf_{ud} + (1-p)f_{dd}], K - F_0 d\}. \tag{3.14}$$

Принцип активирања америчке пут опције видећемо у следећем примеру.

Пример 5 *Претпоставимо да је тренутна цена фјучерса* 50$. *Током следећа два тромесечна периода претпоставља се да ће цена или порасти* 6% *или опасти* 5%. *Претпоставићемо још и да је безризична каматна стопа* 5%. *Израчунаћемо вредност европске и америчке куповне и продајне фјучерсне опције са уговореном ценом* 51$ *и временом доспећа кроз* 6 *месеци.*

Како се претпоставља да ће се цена фјучерса мењати два пута у наредних 6 *месеци, користићемо биномни модел са два корака. Имамо да је:*

$$F_0 = 50, K = 51, T = 0.5, r = 0.05, u = 1.06, d = 0.95.$$

Вредности f_{uu}, f_{ud}, f_{dd}*, које представљају добит од фјучерсне куповне опције након друге промене цене, рачунамо на следећи начин:*

$$\begin{aligned} f_{uu} &= max\{F_0u^2 - K, 0\} = max\{56.18 - 51, 0\} = 5.18, \\ f_{ud} &= max\{F_0ud - K, 0\} = max\{50.35 - 51, 0\} = 0, \\ f_{dd} &= max\{F_0d^2 - K, 0\} = max\{45.125 - 51, 0\} = 0. \end{aligned}$$

Из једнакости 3.8 добијамо вероватноћу раста цене фјучерса.

$$p = \tfrac{1-d}{u-d} = \tfrac{1-0.95}{1.06-0.95} = 0.4545$$

Коначно, вредност европске куповне фјучерсне опције добијамо из једнакости 3.12, где је $\Delta t = 0.25$ *јер се промена цене дешава на 3 месеца.*

$$\begin{aligned} c = e^{-2\cdot 0.05\cdot 0.25}&[0.4545^2 \cdot 5.18 + 2\cdot 0.4545\cdot(1-0.4545)\cdot 0 + (1-0.4545)^2\cdot 0] \\ &= e^{-0.025}\cdot 1.07 = 1.0438 \end{aligned}$$

Из пут - кол паритета 3.4 добијамо вредност продајне европске фјучерсне опције:

$$\begin{aligned} p &= c + (K - F_0)e^{-rT} \\ &= 1.0438 + (51-50)e^{-0.05\cdot 0.5} = 2.0191 \end{aligned}$$

Сада ћемо наћи вредност америчке куповне и продајне опције и видети да ли је у овом случају оптимално реализовати америчку продајну опцију пре времена истека.

Из теореме 3.5 закључујемо да је цена америчке куповне фјучерсне опције једнака цени европске, односно $C = 1.0438$*. Пут - кол паритет за америчке опције не важи и њих можемо активирати пре истека. Најпре ћемо израчунати* f_{uu}, f_{ud} *и* f_{dd} *за пут опције.*

$$
\begin{aligned}
f_{uu} &= max\{K - F_0u^2, 0\} = max\{51 - 56.18, 0\} = 0, \\
f_{ud} &= max\{K - F_0ud, 0\} = max\{51 - 50.35, 0\} = 0.65, \\
f_{dd} &= max\{K - F_0d^2, 0\} = max\{51 - 45.125, 0\} = 5.875.
\end{aligned}
$$

Сада можемо израчунати f_u *и* f_d*, односно добит од продајне опције након прве промене цене фјучерса и видети да ли је тада оптимално активирати америчку продајну опцију. Из једнакости 3.13 и 3.14 добијамо:*

$$
\begin{aligned}
f_u &= max\{e^{-0.05 \cdot 0.25}[0.4545 \cdot 0 + (1 - 0.4545) \cdot 0.65], 51 - 50 \cdot 1.06\} \\
&= max\{0.3501, -2\} = 0.3501 \\
f_d &= max\{e^{-0.05 \cdot 0.25}[0.4545 \cdot 0.65 + (1 - 0.4545) \cdot 5.875], 51 - 50 \cdot 0.95\} \\
&= max\{3.4565, 3.5\} = 3.5
\end{aligned}
$$

Како је, у случају пада фјучерсне цене (чвор C са слике 3.2) након прве промене, добит од опције већа од цене опције у том тренутку ($3.5 > 3.4565$*), закључујемо да је у овом случају оптимално активирати америчку продајну опцију пре истека. И коначно, из 3.11, добијамо вредност америчке продајне опције:*

$$
P = e^{0.05 \cdot 0.25}[0.4545 \cdot 0.3501 + (1 - 0.4545) \cdot 3.5] = 2.0425
$$

Као што је и било очекивано, вредност америчке пут опције већа је од европске пут опције.

3.6.3 Биномни модел са више корака

Код овог модела параметар u, који представља раст цене фјучерса, биће једнак $e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$, где је σ волатилност[4] цене фјучерса, а Δt је дужина једног временског интервала. Параметар d које означава пад цене фјучерс уговора биће $e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$. Волатилност σ је дефинисана тако да је стандардна девијација добити опције у кратком временском интервалу Δt једнака $\sigma\sqrt{T}$. Параметре u и d треба одабрати тако да одговарају волатилости. Вредности за u и d дали су Кокс, Рос и Рубинштајн 1979. године, а доказ се може наћи у [2] и [7].

[4]Мера неодређености у будућем кретању цена акција или неког другог вредносног папира, у овом случају фјучерс уговора.

3.7 Блек - Шолсова формула за вредновање фјучерсних опција

Блек - Шолсова формула је једна од најважнијих формула у вези са финансијским тржиштима. Дата је 1973. у раду [1], а први комплетан доказ ове формуле дао је Мертон (енгл. Robert Merton), који је ову формулу и назвао Блек - Шолсовом формулом. За ове резултате су Мајрон Шолс (енгл. Majron Scholes) и Мертон добили Нобелову награду за економију 1997. године, а Блек (енгл. Fischer Black), који је преминуо 1995. године, није доживео ово велико признање, али је поменут његов допринос.

Ова формула првобитно је била изведена за цену опција које се односе на акције. Сада ћемо аналогно извести формулу која се односи на цену фјучерсних опција.

Пре тога, навешћемо теорему које ће бити коришћена у доказу Блек - Шолсове теореме.

Теорема 3.6 (Љапуновљева теорема) *Нека је (X_n) низ независних случајних величина, са коначним математичким очекивањем μ_i и дисперзијом σ_i^2. Означимо са $s_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$. Ако за неко $\delta > 0$ важи услов Љапунова[5]:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^{2+\delta}} \sum_{i=1}^{n} E[|X_i - \mu_i|^{2+\delta}] = 0$$

тада за низ (X_n) важи:

$$\lim_{n\to\infty} P\{\frac{1}{s_n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_i)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

.

Теорема 3.7 (Блек - Шолсова формула) *Цена куповне фјучерсне опције у тренутку 0 са уговореном ценом K, временом до истека T и безризичном каматном стопом r износи:*

$$c = e^{-rT}[F_0\Phi(d_1) - K\Phi(d_2)], \tag{3.15}$$

где је

[5]Александар Михаилович Љапунов (1857 - 1918.) - Руски математичар и физичар

$$d_1 = \frac{\ln\frac{F_0}{K} + \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}},\ d_2 = \frac{\ln\frac{F_0}{K} - \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}} = d1 - \sigma\sqrt{T},$$

а $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$ *је функција расподеле стандардизоване нормалне случајне променљиве.*

Доказ. Претпоставимо да се цена фјучерса крећу по биномном моделу са n корака, односно да, за довољно велико n, у тренуцима $\frac{T}{n}, \frac{2T}{n}, \ldots \frac{nT}{n} = T$ цена фјучерса или расте са фактором $u = e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} \approx 1 + \sigma\sqrt{\frac{T}{n}} + \frac{\sigma^2 T}{2n}$ или опада са фактором $d = e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} \approx 1 - \sigma\sqrt{\frac{T}{n}} + \frac{\sigma^2 T}{2n}$. Из једнакости (3.8) и замењујући вредности за u и d, добијамо:

$$p = \frac{1-d}{u-d} \approx \frac{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}} - \frac{\sigma^2 T}{2n}}{2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} = \frac{1}{2} - \frac{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}{4}. \tag{3.16}$$

Означићемо са (Y_i) следећи низ независних Бернулијевих случајних променљивих:

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{ако цена фјучерса порасте у тренутку } i\Delta \\ 0, & \text{ако цена фјучерса падне у тренутку } i\Delta \end{cases} \quad (3.16)$$

Код биномног модела цена фјучерса расте са вероватноћом p, а опада са вероватноћом $1-p$, тако да случајне променљиве Y_i имају следећу расподелу:

$$Y_i : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}.$$

Број раста цена у биномном моделу са n корака може се изразити помоћу случајних променљивих Y_i који служе као бројачи, и тај број је једнак $\sum_{i=1}^{n} Y_i$, док је број пада цена фјучерса једнак $n - \sum_{i=1}^{n} Y_i$. Вредност, односно цена, фјучерса у тренутку T је тада:

$$F_T = F_0 u^{\sum_{i=1}^{n} Y_i} d^{n - \sum_{i=1}^{n} Y_i} = F_0 (\tfrac{u}{d})^{\sum_{i=1}^{n} Y_i} d^n.$$

Добит од опције у тренутку T једнака је:

$$max\{F_0(\frac{u}{d})^{\sum_{i=1}^{n} Y_i} d^n - K, 0\} = max\{F_0 e^{2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\sum_{i=1}^{n} Y_i} e^{-\sigma\sqrt{nT}} - K, 0\}. \tag{3.17}$$

У складу са принципом неутралности од ризика, цена опције треба да буде једнака дисконтованој вредности математичког очекивања добити од опције, тј.

$$c = (1 + \tfrac{rT}{n})^{-n} E(max\{F_0 e^{2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\sum_{i=1}^{n} Y_i} e^{-\sigma\sqrt{nT}} - K, 0\}) =$$
$$(1 + \tfrac{rT}{n})^{-n} E(max\{F_0 e^{W_n} - K, 0\}),$$

где је

$$W_n = 2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\sum_{i=1}^{n} Y_i - \sigma\sqrt{nT}. \tag{3.18}$$

Као што смо већ споменули $Y_i, i = 1, ..., n$ су Бернулијеве случајне променљиве и $EY_i = p, DY_i = p(1-p)$. Означићемо са $s_n^2 = \sum_{i=1}^{n} DY_i = np(1-p)$. Проверићемо да ли важи услов Љапунова из Теореме 3.6. Изабраћемо $\delta = 1$ и показати да важи:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^3}\sum_{i=1}^{n} E((Y_i - \mu_i)^3) = 0$$

.

Замењујући вредности за очекивање и дисперзију добијамо:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(np(1-p))^{\frac{3}{2}}}\sum_{i=1}^{n} E((Y_i - p)^3) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(np(1-p))^{\frac{3}{2}}}\sum_{i=1}^{n} E(Y_i^3 - 3Y_i^2 p + 3Y_i p^2 - p^3) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(np(1-p))^{\frac{3}{2}}}\sum_{i=1}^{n}(p - 3p^2 + 3p^3 - p^3) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(np(1-p))^{\frac{3}{2}}} n(p - 3p^2 + 2p^3) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(np(1-p))^{\frac{3}{2}}} np(1-p)(1-2p) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}(p(1-p))^{\frac{1}{2}}}(1-2p)$$

.

У једнакости (3.16) имали смо:

$$p = \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}{4}$$
$$p(1-p) = \tfrac{1}{4}(1 - \tfrac{\sigma^2\frac{T}{n}}{4}).$$

Замењујући вредности за p у претходни лимес, добијамо:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1 - 2(\frac{1}{2} - \frac{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}{4})}{n^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{4}(1 - \frac{\sigma^2\frac{T}{n}}{4}))^{\frac{1}{2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sigma\sqrt{T}}{2\sqrt{n}}}{n^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}(1 - \frac{\sigma^2\frac{T}{n}}{4})^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma\sqrt{T}}{n(1 - \frac{\sigma^2\frac{T}{n}}{4})^{\frac{1}{2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma\sqrt{T}}{\sqrt{n^2 - \frac{\sigma^2 T}{4}n}} = 0$$

.

Дакле, за $\delta = 1$ важи услов Љапунова, па из Теореме 3.6 следи да са растом n расподела $\sum_{i=1}^{n} Y_i$ тежи ка нормалној расподели. Случајна промењлива W_n има приближно нормалну расподелу, јер је једнака производу нормалне случајне промењливе помножене константом и од које је одузета константа. Сада ћемо наћи параметре те расподеле. Како је $E(\sum_{i=1}^{n} Y_i) = np$ и $D(\sum_{i=1}^{n} Y_i) = np(1-p)$ добијамо

$$E(W_n) = 2\sigma\sqrt{\tfrac{T}{n}} \cdot np - \sigma\sqrt{nT} = 2\sigma\sqrt{nT} \cdot p - \sigma\sqrt{nT} = 2\sigma\sqrt{nT}(p - \tfrac{1}{2}).$$

Када заменимо једначину (3.16) за p добијамо очекивање за W_n:

$$E(W_n) = -2\sigma\sqrt{nT}\frac{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}{4} = -\frac{\sigma^2 T}{2} \tag{3.19}$$

Дисперзија ће бити једнака:

$$D(W_n) = 4\sigma^2\tfrac{T}{n}D(\textstyle\sum_{i=1} nY_i) = 4\sigma^2\tfrac{T}{n} \cdot np(1-p).$$

Замењујући (3.16) добијамо:

$$D(W_n) = \sigma^2 T(1 - \tfrac{\sigma^2\frac{T}{n}}{4}).$$

Кад $n \to \infty, W_n \to W$. Очекивање за W_n не зависи од n, па следи да је $E(W) = -\frac{\sigma^2 T}{2}$. За довољно велико n, $\frac{T}{n} \to 0$, тако да је:

$$D(W) = \sigma^2 T. \tag{3.20}$$

Када $n \to \infty$, добијамо да је цена опције, при процењивању неутралном од ризика, једнака

$$c = e^{-rT}E(max\{F_0 e^W - K, 0)\}), \tag{3.21}$$

где је W случајна променљива са расподелом $N(-\frac{\sigma^2 T}{2}, \sigma^2 T)$. Да бисмо нашли математичко очекивање које фигурише у цени за кол опцију (3.21), треба да нађемо расподелу случајне променљиве $max\{F_0 e^W - K, 0\}$, а за то нам, пре свега, треба густина случајне променљиве $X = F_0 e^W$. Ова случајна променљива узима само позитивне вредности. Њена функција расподеле G биће: за $x > 0$

$$G(x) = P(F_0 e^W \leq x) = P(W \leq \ln \tfrac{x}{F_0}) = P\Big(\frac{W + \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}} \leq \frac{\ln \frac{x}{F_0} + \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}}\Big) = \int_{-\infty}^{\frac{\ln \frac{x}{F_0} + \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt.$$

Одговарајућа густина је тада

$$g(x) = G'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln \frac{x}{F_0} + \frac{\sigma^2 T}{2})^2}{2\sigma^2 T}} \cdot \frac{1}{x\sigma\sqrt{T}}. \tag{3.22}$$

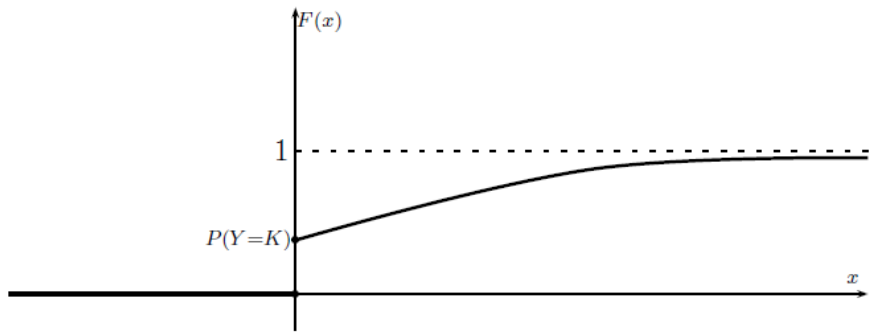
Сада треба да нађемо расподелу F случајне променљиве

$$max\{F_0 e^W - K, 0\} = max\{X - K, 0\}.$$

Имамо

$$F(x) = P(max\{X - K, 0\} \leq x)$$

$$= \begin{cases} 0, & x < 0 \\ P(X \leq K), & x = 0 \\ P(X \leq K) + P(K \leq X \leq K + x), & x > 0 \end{cases}$$



Слика 3.3: График расподеле F

Из вероватноће је познато да се у општем случају свака функција расподеле може представити као линеарна комбинација чисто дискретне, апсолутно непрекидне и сингуларне расподеле. Овде имамо случај да је расподела F линерана комбинација једне дискретне (дегенерисане у тачку) расподеле и једне апсолутно непрекидне расподеле (Слика 3.3):

$$F(x) = \alpha F_1(x) + (1-\alpha)F_2(x),$$

где је

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

$$\alpha = P(X \le K), 1-\alpha = P(X > K),$$

$$F_2(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{P(K \le X \le K+x)}{P(X>K)}, & x > 0 \end{cases}$$

Имамо

$$P(X \le K) = \int_{-\infty}^{K} g(t)dt,$$

$$P(K \le X \le K+x) = \int_{K}^{K+x} g(t)dt = \int_0^x g(z+K)dz.$$

Одатле добијамо

$$F_2(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{\int_0^x g(z+K)dz}{P(X>K)}, & x \ge 0. \end{cases}$$

Сада можемо наћи математичко очекивање:

$$E(max\{X-K,0\}) = \int_0^\infty xdF(x) = \int_0^\infty xd(\alpha F_1(x) + (1-\alpha)F_2(x))$$
$$= \int_0^\infty xg(x+K)dx = \int_K^\infty (y-K)g(y)dy.$$

Последњу једнакост смо добили помоћу смене $x + K = y$. Када уврстимо густину g из (3.22), добијамо:

$$I = \int_K^\infty (y-K)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln\frac{y}{F_0}+\frac{\sigma^2 T}{2})^2}{2\sigma^2 T}} \cdot \frac{1}{y\sigma\sqrt{T}}dy$$

Уводимо смену

$$z = \frac{\ln\frac{y}{F_0}+\frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$dz = \frac{dy}{y\sigma\sqrt{T}},$$

$$y = F_0 e^{\sigma\sqrt{T}z - \frac{\sigma^2 T}{2}}.$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\ln\frac{K}{F_0} + \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}}}^{\infty} (F_0 e^{\sigma\sqrt{T}z - \frac{\sigma^2 T}{2}} - K) e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Раздвојићемо овај интеграл на два интеграла, $I = I_1 - I_2$, где је:

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\ln\frac{K}{F_0} + \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}}}^{\infty} (F_0 e^{\sigma\sqrt{T}z - \frac{\sigma^2 T}{2}}) e^{-\frac{z^2}{2}} dz,$$

$$I_2 = \frac{K}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\ln\frac{K}{F_0} + \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}}}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Други интеграл је једноставан и следи да је

$$I_2 = K\Phi(-\frac{\ln\frac{K}{F_0} + \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}}) = K\Phi(\frac{-\ln\frac{K}{F_0} - \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}}) = K\Phi(\frac{\ln\frac{F_0}{K} - \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}}).$$

Подинтегралну функцију из интеграла I_1 можемо записати као

$$e^{\sigma\sqrt{T}z - \frac{\sigma^2 T}{2} - \frac{z^2}{2}} = e^{-\frac{z^2 - 2z\sigma\sqrt{T} + \sigma^2 T}{2}} = e^{-\frac{(z-\sigma\sqrt{T})^2}{2}},$$

тако да се I_1 може записати као

$$I_1 = \frac{F0}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\ln\frac{K}{F_0} + \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}}}^{\infty} e^{-\frac{(z-\sigma\sqrt{T})^2}{2}} dz.$$

Сменом

$$y = z - \sigma\sqrt{T},$$
$$dy = dz,$$
$$z = \frac{\ln\frac{K}{F_0} + \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}} \to y = \frac{\ln\frac{K}{F_0} - \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}}$$

добијамо

$$\begin{aligned} I_1 &= F_0 \int_{\frac{\ln\frac{K}{F_0} - \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &= F_0\Phi(-\frac{\ln\frac{K}{F_0} - \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}}) \\ &= F_0\Phi(\frac{-\ln\frac{K}{F_0} + \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}}) \\ &= F_0\Phi(\frac{\ln\frac{F_0}{K} + \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}}). \end{aligned}$$

Одузимањем интеграла I_1 и I_2 добијамо I, односно математичко очекивање случајне променљиве $max\{Y - K, 0\}$.

$$c = e^{-rT}[F_0\Phi(d_1) - K\Phi(d_2)],$$

где су d_1 и d_2

$$d_1 = \frac{\ln\frac{F_0}{K} + \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}}$$
$$d_2 = \frac{\ln\frac{F_0}{K} - \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}},$$

чиме је доказ теореме завршен. □

Из формуле за пут - кол паритет може се наћи цена продајне опције на фјучерсе са истом почетном вредношћу F_0, временом до истека T и уговореном ценом K, тј важи:

Последица 3.7.1 *Цена продајне фјучерсне опције у тренутку 0 са уговореном ценом K, временом до истека T и безризичном каматном стопом r износи:*

$$p = e^{-rT}[K\Phi(-d_2) - F_0\Phi(-d_1)],$$

где су d_1 и d_2 константе дефинисане у формулацији теореме 3.7.

Доказ. Цена продајне фјучерсне опције се лако добија, користећи претходну теорему и пут - кол паритет:

$$c + Ke^{-rT} = p + F_0 e^{-rT}.$$

Када изразимо p и уврстимо формулу (3.15), добијамо:

$$\begin{aligned} p &= e^{-rT}[F_0\Phi(d_1) - K\Phi(d_2) + K - F_0] \\ &= e^{-rT}[K(1 - \Phi(d_2)) - F_0(1 - \Phi(d_1))] \\ &= e^{-rT}[K\Phi(-d_2) - F_0\Phi(-d_1)] \end{aligned}$$

□

Пример 6 *У овом примеру одредићемо цену европске продајне фјучерсне опције на робу. Претпоставимо да је време до истека опције 4 месеца, тренутна цена фјучерса је 20 долара, уговорена цена је 20 долара, годишња безризична каматна стопа 9% и волатилност цене фјучерса је 25% на годисњем нивоу.*

Дакле, имамо да је

$$F_0 = 20, K = 20, r = 0.09, T = 4/12, \sigma = 0.25, \ln\frac{F_0}{K} = 0.$$

$$d_1 = \frac{\ln\frac{F_0}{K} + \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\sigma\sqrt{T}}{2} = 0.07216$$
$$d_2 = \frac{\ln\frac{F_0}{K} - \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}} = -\frac{\sigma\sqrt{T}}{2} = -0.07216$$
$$\Phi(-d_1) = 0.4712, \Phi(-d_2) = 0.5288.$$

Из Блек - Шолсове формуле следи да је цена европске продајне фјучерсне опције једнака

$$p = e^{-rT}[K\Phi(-d_2) - F_0\Phi(-d_1)]$$
$$p = e^{-0.09 \cdot 4/12}(20 \cdot 0.5288 - 20 \cdot 0.4712) = 1.12.$$

За писање овог поглавља коришћена је литература [3], [5], [4] и [6].

Поглавље 4

Опције на форвард уговоре

4.1 Особине

Форвардне опције су сличне фјучерсним опцијама, осим што за подлогу имају форвард. Дакле, реализацијом куповне (односно продајне) форвардне опције власник заузима дугу (односно кратку) позицију у форварду са уговореном ценом која је једнака уговореној цени опције. У тренутку реализације форвардне опције не врши се никаква исплата, већ се врши на датум доспећа форварда. За разлику од фјучерсних, форвардним опцијама се не тргује на организованим тржиштима, већ на ОТЦ тржиштима.[1]

Пример 7 *Европска куповна форвардна опција са датумом доспећа у септембру има уговорену цену 100 USD и датум доспећа форварда је у децембру. Уколико се реализује, њен власник ће заузети дугу позицију у форварду са уговореном ценом 100 USD, што значи да ће морати да купи активу на коју се форвард односи по уговореној цени од 100 USD. У јулу је на тржишту цена форварда истог типа 110 USD. Уколико би тада власник опције заузео кратку позицију у форварду који је доступан на тржишту, односно уколико би пристао да прода активу по цени од 110 USD, он би у септембру, ако се опција буде реализовала, осигурао профит 10 USD јер би купио активу на коју се форвард односио по цени од 100 USD а продао је по цени 110 USD.*

[1] ОТЦ тржиште (енгл. Over-The-Counter Market) - тржиште на коме учесници тргују између себе комуницирајући преко телефона, електронске поште или других платформи. На ОТЦ тржиштима трговци објављују цене по којим би купили или продали одређену робу или финансијски инструмент и трговина може бити обављена без знања других учесника.

4.2 Вредност дуге позиције у форвардној опцији на датум доспећа

Иако су форвардна и фјучерсна цена једнаке када је каматна стопа константна, цене форвардних и фјучерсних опција се разликују због тога што се разликују вредности дугих (кратких) позиција у форвардима и фјучерсима. Те разлике настају због тога што насупрот форварду код кога нема протока кеша до датума доспећа, код фјучерса се усклађује рачун маргина.

Нека је датум доспећа форварда у тренутку T_1, а датум доспећа европске куповне форвардне опције у тренутку T, при чему је $T_1 \geq T$. Вредност дуге позиције у тој опцији на датум доспећа је

$$max\{(F_T - K)e^{-r(T_1-T)}, 0\},$$

где је F_T форвардна цена на датум доспећа опције. Због тога, у случају реализације опције, опција вреди колико и дуга позиција у форварду.

Аналогно, вредност дуге позиције у европској продајној форвардној је једнака:

$$max\{(K - F_T)e^{-r(T_1-T)}, 0\}.$$

4.3 Горње и доње границе за цене форвардних опција

Претпоставићемо да важе исти услови и ознаке као и за фјучерсне опције, осим што у овом случају F_t означава цену форвард уговора на који се опција односи.

Теорема 4.1 *Горња граница цене европске куповне форвардне опције је*

$$c_t \leq F_t e^{-r(T_1-t)}, t \leq T.$$

Доказ. Ако би важило супротно, арбитражер би:

- заузео кратку позицију у опцији са датумом доспећа у тренутку T,
- уложио суму $F_t e^{-r(T_1-t)}$ на банковни рачун уз каматну стопу r,
- заузео дугу позицију у форварду истог типа као што је онај на који гласи опција, али са уговореном ценом F_t.

Ако на датум доспећа опције важи $F_T \geq K$, она се реализује и арбитражер има обавезу да заузме кратку позицију у форварду са уговореном ценом K. Вредност кратке позиције у тој опцији је $-(F_T - K)e^{-r(T_1-T)}$, а вредност дуге позиције у форварду са уговореном ценом F_t је $(F_T - F_t)e^{-r(T_1-T)}$, па заједно са сумом $F_t e^{-r(T_1-T)}$ на рачуну, арбитражни порфолио вреди:

$$-(F_T - K)e^{-r(T_1-T)} + (F_T - F_t)e^{-r(T_1-T)} + F_t e^{-r(T_1-T)} = Ke^{-r(T_1-T)}.$$

Ако је $F_T < K$, опција се не реализује, тако да је вредност арбитражног портфолија:

$$(F_T - F_t)e^{-r(T_1-T)} + F_t e^{-r(T1-T)} = F_T e^{-r(T_1-T)}.$$

$\square$

Теорема 4.2 *Доња граница цене европске куповне форвардне опције има вредност:*

$$c_t \geq max\{(F_t - K)e^{-r(T_1-t)}, 0\}, t \leq T. \tag{4.1}$$

Доказ. Ако је куповна опција на губитку, тј. ако је $F_t < K$, тада важи неједнакост (3.1). Због тога ће у наставку бити разматран случај кад опција није на губитку, тј. када је $F_t \geq K$. Упоредићемо вредности два портфолија. Први портфолио се састоји од:

- европске куповне фровардне опције са датумом доспећа T,
- суме $Ke^{-r(T_1-t)}$ уложене у банку уз каматну стопу r.

Вредност портфолија у тренутку t је $\Pi_t^1 = c_t + Ke^{-r(T_1-t)}$.

Други портфолио се састоји од:

- износа $F_t e^{-r(T_1-t)}$ уложеног на банковни рачун уз каматну стопу r,
- дуге позиције у форварду који је истог типа као форвард на који гласи опција, осим што је његова уговорена цена F_t.

Вредност другог порфолија је $\Pi_t^2 = F_t e^{-r(T_1-t)}$.

Ако на датум доспећа куповне опције важи да је $F_T \geq K$, она се реализује и власник првог портфолија заузима дугу позицију у форварду са уговореном ценом K, па је вредност те позиције $(F_T - K)e^{-r(T_1-T)}$. Сума $Ke^{-r(T_1-t)}$ уложена у банку после времена T вреди $Ke^{-r(T_1-t)}e^{r(T-t)}$ $= Ke^{-r(T_1-T)}$. Дакле, вредност првог портфолија је $\Pi_T^1 = F_T e^{-r(T_1-T)}$.

Вредност суме уложене у банку у другом портфолију у тренутку T је $F_t e^{-r(T_1-T)}$, док је вредност дуге позиције у форварду $(F_T - F_t)e^{-r(T_1-T)}$, тако да је вредност другог портфолија $\Pi_T^2 = F_T e^{-r(T_1-T)}$.

Ако је $F_T < K$, куповна опција се неће реализовати, због чега је вредност првог портфолија $\Pi_T^1 = Ke^{-r(T_1-T)}$, а другог $\Pi_T^2 = F_T e^{-r(T_1-T)}$, тако да је први портфолио вреднији од другог.

На датум доспећа опције први портфолио вреди бар колико и други, а може се доказати да то важи и у произвољном тренутку t пре датума доспећа опције. Ако се претпостави супротно, да у произвољном тренутку $t < T$, важи:

$$c_t < (F_t - K)e^{-r(T_1-t)}, \tag{4.2}$$

арбитражер може креирати портфолио који у тренутку t обезбеђује профит $\Pi_t = (F_t - K)e^{-r(T_1-t)} - c_t > 0$, на следећи начин:

- позајмљивањем суме $(F_t - K)e^{-r(T_1-T)}$ из банке уз каматну стопу r,
- заузимањем кратке позиције у форварду са уговореном ценом F_t,
- заузимањем дуге позиције у куповној форвардној опцији са уговореном ценом K и датумом доспећа у тренутку T.

На датум доспећа опције, арбитражер дугује суму $(F_t - K)e^{-r(T_1-T)}$, док је вредност његове кратке позиције у форварду $-(F_T - F_t)e^{-r(T_1-T)}$.

Ако је $F_T \geq K$, арбитражер реализује куповну опцију, заузима дугу позицију у форварду са уговореном ценом K и вредност те позиције је $(F_T - K)e^{-r(T_1-T)}$, тако да је вредност његовог портфолија на датум доспећа опције:

$$\Pi_T = -(F_t - K)e^{-r(T_1-T)} - (F_T - F_t)e^{-r(T_1-T)} + (F_T - K)e^{-r(T_1-T)} = 0.$$

Ако је $F_T < K$, не реализује се куповна опција, па је вредност арбитражног портфолија на датум доспећа опције:

$$\Pi_T = -(F_t - K)e^{-r(T_1-T)} - (F_T - F_t)e^{-r(T_1-T)} = (K - F_T)e^{-r(T_1-T)} > 0.$$

Како претпоставка (3.2) имплицира могућност арбитраже, одатле следи да важи (3.1). □

Теорема 4.3 *Горња граница цене европске продајне форвардне опције је:*

$$p_t \leq Ke^{-r(T_1-t)}, t \leq T.$$

Доказ. Ако би важило супротно, арбитражер би:

- заузео кратку позицију у опцији са датумом доспећа у тренутку T,

- уложио у банку суму $Ke^{-r(T_1-t)}$ уз каматну стопу r.

На датум доспећа опције, ако је $F_T < K$, она се реализује, арбитразхер има обавезу да заузме дугу позицију у форварду са уговореном ценом K и вредност те позиције је $(F_T - K)e^{-r(T_1-T)}$. Зајдно са сумом $Ke^{-r(T_1-T)}$ на банковном рачуну, арбитражни портфолио вреди $F_T e^{-r(T_1-T)}$.

Уколико је $F_T \geq K$, опција се не реализује и арбитражер поседује суму $Ke^{-r(T_1-T)}$. □

Теорема 4.4 *Доња граница цене европске продајне форвардне опције има вредност:*

$$p_t \geq max\{(K - F_t)e^{-r(T_1-t)}, 0\}, t \leq T.$$

Доказ је сличан доказу претходне теореме па ће бити изостављен.

Још једна разлика између форвардних и фјучерсних опција је та да су цене америчких форвардних опција једнаке ценама одговарајућих европских форвардних опција.

Теорема 4.5 *Америчка куповна форвардна опција вреди као одговарајућа европска куповна опција, тј.* $C_t = c_t, t \leq T$

Америчка продајна форвардна опција вреди као одговарајућа европска продајна опција, тј. $P_t = p_t, t \leq T$

Доказ. Како власник америчке куповне опције има више могућности да реализује опцију у односу на власника евроске куповне опције, следи да је $C_t \geq c_t$, у сваком тренутку $t \leq T$. На датум доспећа опције важи да је $C_T = c_T$.

Да би се доказало да је $C_t \leq c_t, t < T$, претпоставићемо супротно, тј. да важи $C_t > c_t$ за неко $t < T$. Тада арбитражер може

- заузети кратку позицију у вреднијој америчкој опцији,
- заузети дугу позицију у мање вредној европској опцији,
- располагати ризиком у премијама у износу $C_t - c_t$.

Ако се америчка опција није реализовала раније и ако је на датум доспећа опције $F_T \geq K$, обе опције се реализују и арбитражер заузима супротне позиције у форвардима истог типа, па је вредност арбитражног портфолија једнака нули.

Ако је $F_T < K$, опције се не реализују, тако да је вредност арбитражног портфолија поново једнака нули.

Међутим, ако је власник америчке куповне опције одлучио да реализује опцију у неком тренутку $\tau < T$, када је $F_\tau \geq K$, арбитражер има обавезу да заузме кратку позицију у форварду са уговореном ценом K. У том случају на датум доспећа опција, за $F_T \geq K$, реализује се европска куповна опција и арбитражер заузима дугу позицију у форварду са уговореном ценом K. Како он заузима супротне позиције у форвардима истог типа, вредност арбитражног портфолија је једнака нули.

Ако је $F_T < K$, европска куповна опција се не реализује и вредност арбитражног портфолија је једнака вредности кратке позиције у форварду, тј. $-(F_T - K)e^{-r(T_1-T)} > 0$. Имајући у виду да је претпоставка $C_t > c_t$ довела до могућности за арбитражу, мора важити $C_t = c_t, t \leq T$.

Једнакост цена америчке и европске продајне форвардне оције доказује се аналогно. □

Последица 4.3.1 *Америчку куповну форвардну опцију није оптимално реализовати пре датума доспећа.*

Доказ. Тврђење следи директно из претходне теореме. □

Последица 4.3.2 *Границе цене америчке куповне и продајне форвардне опције имају вредности:*

$$max\{(F_t - K)e^{-r(T_1-t)}, 0\} \leq C_t \leq F_t e^{-r(T_1-t)}, t \leq T, \tag{4.3}$$

$$max\{(K - F_t)e^{-r(T_1-t)}, 0\} \leq P_t \leq K e^{-r(T_1-t)}, t \leq T. \tag{4.4}$$

Доказ. Неједнакост 4.3 директно следи из Теореме 4.2 и 4.5, а аналогно се доказује и 4.4. □

4.4 Пут - кол паритет

Пут - кол паритет који укључује заштиту дуге позиције у форварду заузимањем дуге позиције у продајној форвардној опцији и кратке у куповној форвардној опцији је облика:

$$F_t e^{-r(T_1-t)} + p_t = c_t + K e^{-r(T_1-t)}, t \leq T, \tag{4.5}$$

при чему је K уговорена цена опција, датум доспећа опције је у тренутку T, а датум доспећа форварда у тренутку T_1, где је $T \leq T_1$.

Релација (4.5) важи и за америчке форвардне опције јер су њихове цене једнаке ценама одговарајућих европских опција (Теорема 4.5).

За писање овог поглавља коришћена је литература [5], и [4].

Поглавље 5

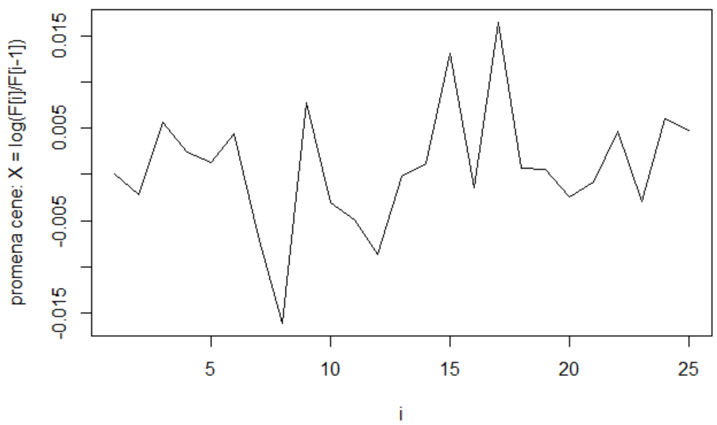
Додатак: Блек - Шолсова формула у програмском језику R

У овом поглављу ћемо приказати како се могу одредити параметри Блек - Шолсовог модела и израчунати цена фјучерсне опције. Као пример користићемо фјучерсне опције које као подлогу имају фјучерс уговор за куповину злата. На крају ћемо упоредити стварну цену опције са оном коју смо добили из Блек Шолсовог модела.

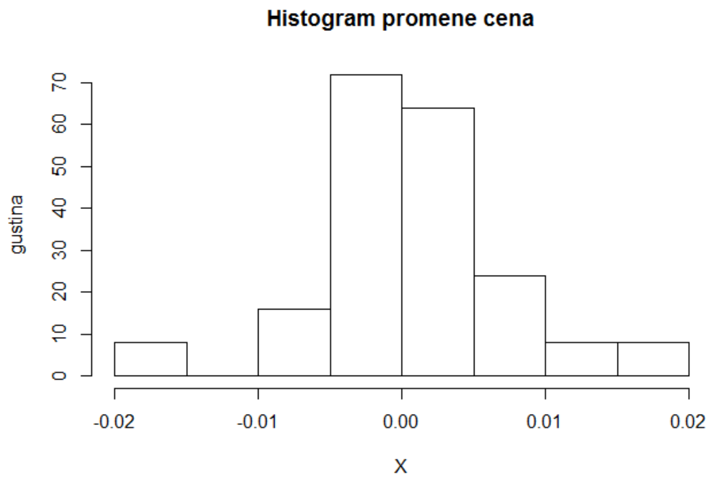
Најпре ћемо на сајту [9] пронаћи цене фјучерс уговора на злато. Те податке искористићемо да оценимо параметар σ у Блек - Шолсовом моделу.

Волатилност σ оценићемо статистичким путем на основу претходних вредности промена цена фјучерс уговора и услова да се промена цена фјучерса понаша у складу са геометријским Брауновим кретањем. Ево како ћемо то урадити: посматраћемо серију цена дужине n, $F_0, F_1, ...F_n$ и означићемо са $X_k = ln\frac{F_k}{F_{k-1}}, k = 1, 2, ..n$ логаритамску промену цена фјучерс уговора.

Прво питање које се поставља је - колико велики узорак одабрати? Генерално, што већи узорак, то је оцена прецизнија. Међутим, волатилност се мења током времена, тако да подаци о ценама које су превише старе неће бити релевантне за предвиђање будуће волатилности. Препорука дата у [3] је да се користи онај број дана на који ће се применити волатилност, односно, ако ће се оцена волатилности користити за вредновање опције са датумом доспећа кроз две године, онда треба користити дневне цене у претходне две године. Време до истека опције чију вредност тражимо је 25 дана, те стога користимо цене фјучерс уговора од претходних 25 дана. Овај узотак промена цена фјучерс уговора треба да задовољи претпоставку о нормалној расподељености и независности.



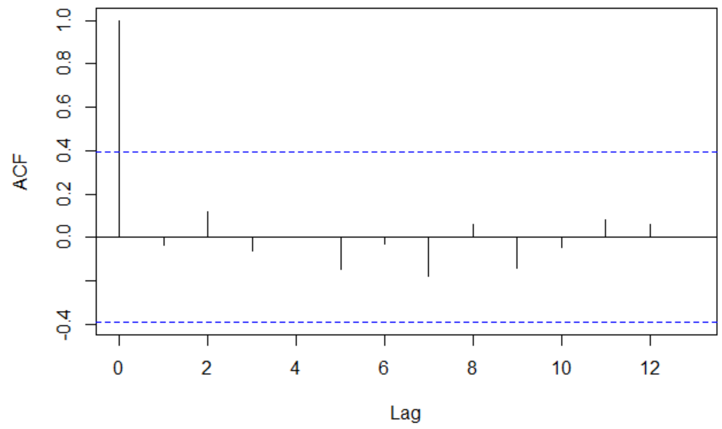
Слика 5.1: Промена цена фјучера



Слика 5.2: Хистограм промене цена фјучера

На основу хистограма (Слика 5.2) и p- вредности Шапиро - Вилк теста (0.5735) можемо прихватити хипотезу о нормалној расподељености узорка промена цена фјучерс уговора.

Некорелисаност узорка проверавамо на основу корелограма (Слика 5.3) и Бокс - Пирсоновог теста. С обзиром да је p-вредност теста 0.9609, закључујемо да је узорак некорелисан.



Слика 5.3: Корелограм

Пошто смо показали да је узорак из нормалне расподеле сада лако можемо оценити параметре те расподеле:

$$\bar{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k; \bar{D_n} = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X_n})^2 \approx \frac{\sigma^2}{252}$$

Како су цене фјучерс уговора биле на дневном нивоу, а Блек - Шолсова формула захтева вредност на годишњем нивоу, оцену дисперзије множимо са 252 (јер година има приближно 252 радна дана). Дакле, параметар волатилности је приближно 10.57%.

У Блек - Шолсовој формули фигурише и параметар r, односно безризична каматна стопа. Она представља камату коју инвеститор добија након одређеног времена ако уложи у апсолутно безризичну инвестицију. У пракси, безризична каматна стопа не постоји јер чак и најсигурнија инвестиција са собом носи мали ризик. Због тога, као оцена безризичне каматне стопе може се користити каматна стопа тромесечне благајничке новчанице. За ове новчанице гарантује држава (Сједињене Америчке Државе) и због тога се сматрају сигурном инвестицијом. На сајту [8] можемо пронаћи каматну стопу благајничке новчанице са датумом доспећа кроз 13 недеља, $r = 2.11\%$.

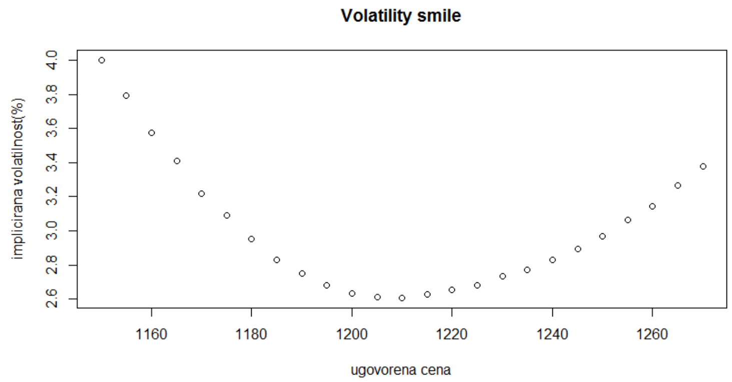
Сада можемо израчунати цену фјучерсне куповне и продајне опције са датумом доспећа 25.09.2018 и уговореном ценом 1200 USD. Тренутна цена (на дан 31.8.2018) фјучерс уговора на тржишту је 1200.3 USD.

Користећи Блек - Шолсову формулу и оцене параметара волатилности и безризичне каматне стопе добијамо да је цена куповне фјучерсне опције једнака 13.28 USD, а цена продајне фјучерсне опције 12.98 USD.

Добијене податке ћемо упоредити са стварним вредностима које се могу наћи на [10]. Стварни подаци говоре да је цена куповне фјучерсне опције са уговореном ценом 1200 USD и датумом доспећа 25.09.2018 једнака 12.5 USD, односно 10.9 USD за продајну фјучерсну опцију.

Ова разлика у цени опције на берзи од оне која се добије када се у Блек - Шолсову формулу за цену опције уврсти оцена за волатилност добијена на основу предисторије процеса значи да сама берза другачије оцењује волатилност цене. Ту волатилност називамо имплицирана волатилност (енгл. *implied volatility*) - она вредност параметра σ која се добије из Блек - Шолсове формуле за познату цену опције.

Поново ћемо са сајта [10] преузети цене продајних и куповних фјучерсних опција са датумом доспећа 25.9.2018, које се односе на фјучерс уговор чија је тренутна цена 1200.3. За сваку од тих опција можемо израчунаћемо имплициране волатилности и нацртати график зависности имплициране волатилности од уговорене цене фјучерса, односно *volatility smile*.



Слика 5.4: Volatility smile

Према Блек - Шолсовом моделу график имплициране волатилности у односу на уговорену цену треба да буде права, односно да је имплицирана волатилност иста за све опције које истичу на исти дан, независно од њихове уговорене цене. Међутим, то није случај у реалном свету. *Volatility smile* је почео да се појављује на графицима зависности имплициране волатилности и уговорене цене након краха берзе 1987. године. Тада су трговци схватили да на берзи може доћи до непредвиђених догађаја и то су узели у обзир приликом одређивања цена опција, дозволивши да волатилност зависи од уговорене цене и времена доспећа. Такође, из овог графика се може закључити да се волатилност повећава како опције постају више исплативе, тј. ако су у новцу (енгл. *in the money*) или неисплативе, односно ван новца (енгл. *out of the money*).

5.1 R код

У наставку следи комплетан код коришћен у претходном примеру.

Учитавање података из Excel табеле и прављење узорка који представља промену цена фјучерс уговора:

```
setwd("C:/Users/Ivana/Desktop/Master rad/GoldFutures")
fjucersi <-read.csv("Gold_Futures.csv")
fjucersi
cene_fjucersa <-fjucersi$Price
cene_fjucersa <-cene_fjucersa[1:25]
cene_fjucersa

promena_cena<-function(cene){
  p<-vector()
  p[1]<-0
  for(i in 2:length(cene)){
    p[i]<-log(cene[i]/cene[i-1])
  }
  return(p)
}

X<-promena_cena(cene_fjucersa)
X

plot(X, type="l", xlab = "i", ylab = "promena cene: X = log(F[i
    ]/F[i-1]) ")
```

Провера нормалности и некорелисаности узорка:

```
hist(X, freq = FALSE, ylab = "gustina")
shapiro.test(X)
> shapiro.test(X)

  Shapiro-Wilk normality test

data:  X
W = 0.96713, p-value = 0.5735

> acf(X)
> Box.test(X, lag = 5)

  Box-Pierce test

data:  X
X-squared = 1.0205, df = 5, p-value = 0.9609
```

Оцена параметара нормалне расподеле:

```
mi <-mean(X)
mi

ocena_disperzije <- function(X){
```

```
  n<-length(X)
  mi<-mean(X)
  disp<- 1/(n-1) * sum((X-mi)^2)
}

sigma<-sqrt(252*ocena_disperzije(X))
sigma

> mi
[1] 0.0007723012
> sigma
[1] 0.1057545
```

Блек - Шолсова формула:

```
K <-1200
F <-cene_fjucersa[1]
T <- 17/252
r <-2.11/100

BS <-function(F, K, T, r, sig, tip_opcije = "c"){
  d1 <- (log(F/K)+(sig^2/2)*T)/(sig*sqrt(T))
  d2 <- d1- sig * sqrt(T)
  if(tip_opcije == "c"){
    rezultat <-exp(-r*T) * (F*pnorm(d1) - K*pnorm(d2))
  }
  if(tip_opcije == "p"){
    rezultat <-exp(-r*T) * (K*pnorm(-d2) - F*pnorm(-d1))
  }
  return(rezultat)
}

c <- BS(F, K, T, r, sigma, "c")
p <- BS(F, K, T, r, sigma, "p")

> c
[1] 13.28251
> p
[1] 12.98294
```

Имплицирана волатилност и *volatility smile*:

```
implicirana_volatilnost <- function(F, K, T, r, market, tip_
    opcije){
  sig <- 0.20
  sig_u <- 1
  sig_d <- 0.001
  brojac <- 0
  greska <- BS(F, K, T, r, sig, tip_opcije) - market

  #ponavljamo postupak sve dok greska ne postane dovoljno mala
  #ili dok brojac ne dodje do 1000
  while(abs(greska) > 0.00001 && brojac < 1000){
    if(greska < 0){
```

```
      sig_d <- sig
      sig <- (sig_u + sig)/2
    }else{
      sig_u <- sig
      sig <- (sig_d + sig)/2
    }
    greska <- BS(F, K, T, r, sig, tip_opcije) - market
    brojac <- brojac + 1
  }

  #ako brojac dodje do 1000, vracamo NA
  if(brojac == 1000){
    return(NA)
  }else{
    return(sig)
  }
}

opcije<-read.csv("Fjucersne_opcije.csv")
opcije

imp_sigma<-c()
for(i in 1:length(opcije$F)){
  imp_sigma[i]<-implicirana_volatilnost(opcije$F[i], opcije$
    ugovorena_cena[i], as.numeric(opcije$T[i]), r, opcije$cena_
    kol_opcije[i], "c")
}
imp_sigma
mean(imp_sigma)

plot(opcije$ugovorena_cena, imp_sigma*100, xlab="ugovorena cena
    ", ylab="implicirana volatilnost(%)", main="Volatility smile
    ")

> mean(imp_sigma)
[1] 0.03006123
> imp_sigma
 [1] 0.03377009 0.03266233 0.03141955 0.03066318
 [5] 0.02966408 0.02892355 0.02829988 0.02768883
 [9] 0.02733252 0.02679610 0.02656742 0.02626486
[13] 0.02606212 0.02610668 0.02635045 0.02679496
[17] 0.02748771 0.02828688 0.02954537 0.03090653
[21] 0.03218328 0.03406838 0.03574125 0.03793351
[25] 0.04001128
```

Поглавље 6

Закључак

Фјучерсне опције су опције чија је подлога фјучерс. Реализација куповне фјучерсне опције омогућава њеном власнику заузимање дуге позиције у фјучерсу, а власник добија суму која је једнака разлици фјучерсне цене при последњем усклађивању рачуна маргине и уговорене цене. Власник реализацијом продајне опције заузима кратку позицију у фјучерсу и добија суму једнаку разлици уговорене цене и фјучерсне цене при последњем усклађивању рачуна маргине. Фјучерсне опције су најчешће америчког типа, при чему је датум доспећа опције најчешће на, или неколико дана пре првог дана месеца испоруке фјучерса.

Ако се датум доспећа фјучерса поклапа са датумом доспећа опције, цене европске фјучерсне опције и европске опције на активу су једнаке. Ова чињеница се често користи за вредновање европских опција на активу. За америчке фјучерсне и опције које се односе на активу не важи овај резултат јер се у многим ситуацијама фјучерсна опција реализује раније и власнику обезбеђује већи приход, па самим тим цена америчке куповне фјучерне опције је виша од цене одговарајуће америчке куповне опције на активу, док је цена америчке продајне фјучерсне опције нижа од америчке продајне опције на активу.

Форвардне опције су опције чија је актива форвард. Реализацијом куповне форвардне опције власник заузима дугу позицију у форварду са уговореном ценом која је једнака уговореној цени опције. Реализацијом продајне форвардне опције власник заузима кратку позицију у форварду са уговореном ценом која је једнака уговореној цени опције. Форвард уговори се склапају директно између две стране, нема дневног усклађивања рачуна маргина као код фјучерс уговора, па се због тога разликују вредности дугих и кратких позиција у форвардима и фјучерсима, па самим тим и вредности форвардних и фјучерсних опција.

Једну од најважнијих формула за вредновање опција извели су Фишер Блек и Мајрон Шолс 1973. године, а први комплетан доказ дао је

Мертон. На основу ове формуле долази се до цене куповних и продајних фјучерсних и форвардних опција.

Као што смо видели на примеру фјучерсних опција чија је подлога фјучерс уговор на злато, применом Блек Шолсовог модела нећемо добити исте вредности цена опција као што су и на берзи. Један од разлога је тај што берза другачије оцењује волатилност, допуштајући, притом, да волатилност зависи од уговорене цене и датума истека фјучерсне опције. У овом раду, волатилност смо оценили на основу историјских података о кретању цена фјучерс уговора током времена, претпостављајући притом да је волатилност константна. Постоје и други начини за оцењивање параметра σ као што су ARCH и GARCH модели који узимају у обзир чињеницу да волатилност није константна. У неком од наредних истраживања могли бисмо оценити волатилност користећи један од ова два модела и видети да ли ће се у том случају добити прецизнија цена фјучерсне опције.

Литература

[1] Black, F., Scholes, M. (1973). *The pricing of options and corporate liabilities*. Journal of Political Economics 81, 635-654.

[2] Cox, J., Ross, S., Rubinstein, M. (1979). *Option Pricing: A Simplified Approach*. Journal of Financial Mathematics, 229-264.

[3] Hull, J. (2015). *Options, futures, and other derivatives - Ninth edition.* Toronto: University of Toronto.

[4] Janković, S., Milošević, B. (2016). *Elementi finansijske matematike.* Beograd: Matematički fakultet.

[5] Jovanović, M., Milošević, M. (2016). *Finansijska matematika: udžbenik sa zadacima - Prvo izdanje*. Niš: Prirodno - matematički fakultet.

[6] Mladenović, P. (2008). *Verovatnoća i statistika*, Beograd: Matematički fakultet.

[7] Ross, S. (1999). *An Introduction to Mathematical Finance*. University Press. Cambridge.

[8] *Daily Treasury Bill Rates Data*. Preuzeto 30. avgusta, 2018, `https://www.treasury.gov/resource-center/data-chart-center/interest-rates/Pages/TextView.aspx?data=billrates`

[9] *Gold Futures Historical Data*. Preuzeto 30. avgusta, 2018, sa `https://www.investing.com/commodities/gold-historical-data`

[10] *Gold Futures Contracts*. Preuzeto 30. avgusta, 2018, sa `https://www.investing.com/commodities/gold-contracts?&page=optqte&sym=GCV18`

[11] *Risk-Free Rate Of Return*. Preuzeto 30. avgusta, 2018, sa `https://www.investopedia.com/terms/r/risk-freerate.asp`

[12] *The only thing smiling today is Volatility*. Preuzeto 30. avgusta, 2018, sa `https://www.r-bloggers.com/the-only-thing-smiling-today-is-volatility/`

[13] *Volatility Smile*. Preuzeto 30. avgusta, 2018, sa https://www.investopedia.com/terms/v/volatilitysmile.asp

Биографија

Ивана Рогић је рођена 25. фебруара 1992. године у Ужицу. Основну школу "Стари град" завршила је 2007. године као вуковац. Исте године уписала је гимназију "Ужичка гимназија"и завршила је 2011. године. Школске 2011/12 године уписала је Математички факултет у Београду, смер Статистика, актуарска и финансијска математика на ком је дипломирала 2015. године са просечном оценом 8.81. Од школске 2015/16 године студент је мастер студија, смер Статистика, актуарска и финансијска математика. Након завршене прве године мастер студија почела је да ради у IT компанији "FIS" као софтвер тестер.