УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

– МАСТЕР РАД –

# Коинтеграција временских серија с применом у макроекономским моделима

*Аутор:*
Јелена Рогић 1025/2015

*Ментор:*
др Бојана Милошевић

Београд, 2018

# Садржај

# Поглавље 1

# Увод

Под појмом коинтеграције подразумева се стационарност линеарне комбинације индивидуално нестационарних временских серија.

Како је нестационарност својствена макроекономским временским серијама, оне обично захтевају трансформације како би се обезбедила њихова стационарна репрезентација. Најчешће коришћена је трансформација коначним разликама. Проблем је што коришћењем првих разлика постоји могућност уклањања релевантне дугорочне равнотежне везе између посматраних серија. Коинтеграциона анализа даје могућност да се оцени дугорочна веза у случају нестационарних временских серија што ће бити предмет изучавања овог рада.

Како је једна од кључних тема у практичном моделирању макроекономских временских серија утврђивање броја јединичних корена које поседује посматрана временска серија, на почетку рада биће описани Дики-Фулер, Филипс-Перон и Квјатковски-Филипс-Шмит-Шин тест јединичног корена. У наставку биће описан појам коинтеграције, као и дата њена формална дефиниција према Енглу и Грејнџеру. Такође, биће објашњен модел са корекцијом равнотежне грешке.

Затим ћемо истовремено посматрати понашање две или више временских серија. Циљ нам је да конструишемо вишедимензиони модел који ће описати кретање и међусобне утицаје посматраних серија. У анализи макроекономских векторских временских серија најзаступљенији је ауторегресиони модел (VAR модел). У четвртом поглављу биће речи о анализи коинтегрисаних временских серија са јединичним кореном у оквиру овог модела.

# Поглавље 2

# Тестови јединичног корена

Једна од кључних тема у практичном моделирању макроекономских временских серија односи се на утврђивање броја јединичних корена које поседује посматрана временска серија. У циљу утврђивања да ли је временска серија стационарна или не и ако није стационарна колико је број јединичних корена користе се тестови једничног корена.

У приказу поступка тестирања присуства јединичног корена сконцентрисаћемо се на ауторегресивне моделе. Овај избор модела није посебно рестриктиван, јер ће ARIMA модел увек имати AR репрезентацију, ако је MA полином инвертибилан [5].

Постоји велики број различитих тестова јединичног корена. Први од њих дефинисали су Дики и Фулер (енгл. Dickey-Fuller) [2]. У наставку ће поред Дики-Фулеровог теста бити описани и PP и KPSS тестови јединичног корена.

## 2.1 Дики-Фулеров тест

Овај тест је добио име по својим ауторима. Један је од најчешће коришћених и краће се назива ДФ тест.

Претпоставимо да је временска серија $X_t$ генерисана $AR(1)$ моделом:

$$(1-\alpha B)X_t = e_t, \tag{2.1}$$

где $B$ представља оператор доцње првог реда који је дефинисан са:

$$BX_t = X_{t-1},$$

односно $B$ је оператор који текућу опсервацију временске серије помера један период уназад (у прошлост).

Како је $(1-\alpha B) = [(1-B)+(1-\alpha)B]$, једначину 2.1 пишемо у облику

$$(1-B)X_t + (1-\alpha)X_{t-1} = e_t,$$

односно

$$\Delta X_t = (\alpha - 1)X_{t-1} + e_t, \tag{2.2}$$

где је $\Delta X_t = (1-B)X_t$. Природа кретања $X_t$ зависи од вредности параметра $\alpha$: за $\alpha < 1$, $X_t$ следи стационарну путању; док за $\alpha = 1$, $X_t$ поседује јединични корен. Тестирамо претпоставку о нестационарности против алтернативне да је посматрани процес стационаран. Ово тврђење се може представити следећим хипотезама:

$$H_0 : \alpha = 1 \text{ } (X_t \text{ поседује један јединични корен})$$

$$H_1 : \alpha < 1 \text{ } (X_t \text{ је стационарна временска серија}).$$

Нулту хипотезу проверавамо уз помоћ тест статистике која се рачуна на основу података из узорка обима $T : X_1, X_2, ..., X_T$. Први корак је израчунавање параметра $\alpha$ применом методе најмањих квадрата. Ова метода минимизира резидуалну суму квадрата, где су резидуали дати са:

$$e_t = X_t - \hat{\alpha}X_{t-1}, t = 2, 3, ..., T$$

при чему је са $\hat{\alpha}$ означена оцењена вредност параметра $\alpha$. Минимум ће бити у тачки где је први извод једнак 0, а други извод позитиван. Дакле, резидуалну суму квадрата:

$$\sum_{t=2}^{T} e_t^2 = \sum_{t=2}^{T} (X_t - \hat{\alpha}X_{t-1})^2$$

минимизирамо решавањем следеће једначине:

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\alpha}} \Big( \sum_{t=2}^{T} e_t^2 \Big) = 0.$$

Како је

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \hat{\alpha}} \Big( \sum_{t=2}^{T} e_t^2 \Big) &= \frac{\partial}{\partial \hat{\alpha}} \Big( \sum_{t=2}^{T} (X_t - \hat{\alpha}X_{t-1})^2 \Big) \\
&= \sum_{t=2}^{T} 2(X_t - \hat{\alpha}X_{t-1})(-X_{t-1}) \\
&= 2\Big( \sum_{t=2}^{T} (-X_t X_{t-1}) + \hat{\alpha} \sum_{t=2}^{T} X_{t-1}^2 \Big),
\end{aligned}$$

следи да је оцена параметра $\alpha$ једнака:

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_{t=2}^{T} X_t X_{t-1}}{\sum_{t=2}^{T} X_{t-1}^2}.$$

Како је $\frac{\partial^2}{\partial^2 \hat{\alpha}} \Big( \sum_{t=2}^{T} e_t^2 \Big) = \sum_{t=2}^{T} X_{t-1}^2 > 0$, оцена $\hat{\alpha}$ непознатог параметра $\alpha$ је оцена добијена методом најмањих квадрата.

Следећи корак је израчунавање стандардне грешке оцене $\hat{\alpha}$, $s(\hat{\alpha})$ на следећи начин [8]:

$$s(\hat{\alpha}) = \sqrt{\frac{s^2}{\sum_{t=2}^{T} X_{t-1}^2}},$$

где је $s^2$ оцена дисперзије $\sigma^2$:

$$s^2 = \frac{\sum_{t=2}^{T} X_t^2 - \hat{\alpha} \sum_{t=2}^{T} X_t X_{t-1}}{(T-1)-1}.$$

Уколико се оцена $\hat{\alpha}$ не разликује много од 1, може се закључити да је нулта хипотеза тачна. На основу тога можемо образовати тест статистику облика $\frac{\hat{\alpha}-1}{s(\hat{\alpha})}$. Од тога да ли серија има јединични корен или не зависи и расподела ове тест статистике. Под претпоставком да је $\hat{\alpha}$ оцена параметра стандардног линеарног регресионог модела, ова тест статистика би имала $t$-расподелу. Насупрот томе, ако серија има јединични корен, тада оцена $\hat{\alpha}$ нема нормалну расподелу, па ни тест статистика нема $t$-расподелу [8].

Да тест статистика не припада класи познатих теоријских расподела, тј. да има нестандардну расподелу, први су показали Дики и Фулер. Ова расподела се означава као $\tau$-расподела или расподела ДФ теста јединичног корена.

Дики и Фулер су применом метода симулације одредили критичне вредности за узорке различитог обима. Критична вредност $\tau^k$ се може одредити за сваки обим узорка употребом формуле. За ниво значајности 5% гласи:

$$\tau^k = -1.9393 - \frac{0.398}{T}.$$

Затим се одређује да ли се нулта хипотеза прихвата или одбија. Наиме, ако је израчуната вредност тест статистике већа од критичне вредности, хипотеза $H_0$ се одбацује и закључујемо да је серија стационарна. У супротном, нулту хипотезу прихватамо и закључујемо да серија има бар један јединични корен.

Ако у регресиони модел 2.2 уведемо додатни параметар (константу), добићемо следећи модел:

$$\Delta X_t = \beta_0 + (\alpha - 1)X_{t-1} + e_t, \tag{2.3}$$

на основу кога тестирамо нулту хипотезу о постојању јединичног корена, али, за разлику од модела 2.2, сада алтернативном хипотезом претпостављамо за посматрани процес да представља процес случајног хода са константом.

Наредна модификација модела 2.3 састоји се у увођењу линеарног тренда што нам омогућава да искажемо алтернативну хипотезу о тренд стационарности посматране временске серије. Нулта хипотеза о диференцној стационарности против алтернативне хипотезе о тренд стационарности тестира се на основу модела:

$$\Delta X_t = \beta_0 + \beta_1 t + (\alpha - 1)X_{t-1} + e_t. \tag{2.4}$$

У примени Дики-Фулеровог теста претпостављамо да је серија резидуала оцењених модела 2.2 - 2.4 процес белог шума, што код већине временских серија није испуњено. Према предложеној корекцији тих модела додају се вредности зависне промењиве са доцњом, односно чланови $\Delta X_{t-i}, i = 1, 2, ..., p$. На овај начин се превазилази постојање аутокорелације у полазном AR(1) моделу. Овим је омогућено дефинисање проширеног Дики-Фулеровог теста (енгл. Augmented Dickey-Fuller). Одговарајућу статистику означавамо као ADF(p) статистику. Дакле уз све наведене модификације препоручује се да се при тестирању постојања јединичног корена користи модел:

$$\Delta X_t = \beta_0 + \beta_1 t + (\alpha - 1)X_{t-i} + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \Delta X_{t-i} + e_t. \tag{2.5}$$

где $p$ представља број зависних промењивих са доцњом. Величину $p$ одређујемо тако да серија резидуала оцењеног модела представља процес белог шума.

Уколико на основу модела 2.5 одбацимо хипотезу о постојању јединичног корена, односно констатујемо да серија није диференцно стационарна, тада је могуће да је временска серија тренд стационарна. За све наведене модификације у табели 2.1 налазе се критичне вредности Дики-Фулерових статистика. Затим, ако за оригиналну временску серију на основу Дики-Фулерове статистике не одбацимо нулту хипотезу о постојању јединичног корена, тестира се присуство другог јединичног корена коришћењем модела 2.5, али сада за прву разлику временске серије. У том случају поредимо стандардну грешку коефицијената уз $\Delta X_{t-1}$, при чему зависна променљива у моделу 2.5 постаје $\Delta^2 X_t$.

Поред изложених тестова јединичног корена заснованих на "$t$-односу", Дики и Фулер су дефинисали и три статистике засноване на принципу количника веродостојности. Ако претпоставимо да временској серији $X_t$ одговара модел 2.3 тада нулту хипотезу да је $(\beta_0, \alpha) = (0, 1)$, против алтернативне да нулта хипотеза није тачна, тестирамо коришћењем статистике количника веродостојности која се назива $\Phi_1$ статистика. Као што су показали Дики и Фулер ова статистика нема стандардну $F$-расподелу. Критичне вредности ове и осталих статистика $\Phi$ тестова дате су у табели 2.2.

На основу модела 2.4 тестирамо нулту хипотезу $(\beta_0, \beta_1, \alpha) = (0, 0, 1)$, против алтернативне да нулта хипотеза није тачна. Основу теста наведене хипотезе представља статистика количника веродостојности који се назива $\Phi_2$ статистика. Модел дат изразом 2.5 користимо и за тестирање нулте хипотезе $(\beta_0, \beta_1, \alpha) = (\beta_0, 0, 1)$, против алтернативне да нулта хипотеза није тачна. Основу овог теста такође представља статистика количника веродостојности која се назива $\Phi_3$ статистика. У овом случају према нултој хипотези претпоставља се да постоји један јединични корен, односно да временској серији одговара модел случајног хода са константом. Тек ако се на основу $\Phi_3$ статистике утврди одсуство линеарног тренда, као полазни користи се модел 2.3.

У следећој табели резимираћемо три типа ДФ теста јединичног корена

| ДФ тест-статистика | $E(X_t)$ | Модел који се оцењује |
|---|---|---|
| $\tau$ | 0 | $\Delta X_t = (\alpha - 1)X_{t-1} + e_t$ |
| $\tau_\mu$ | $\mu$ | $\Delta X_t = \beta_0 + (\alpha - 1)X_{t-1} + e_t$ |
| $\tau_t$ | $\mu + bt$ | $\Delta X_t = \beta_0 + \beta_1 t + (\alpha - 1)X_{t-1} + e_t$ |

Алгоритам тестирања можемо сумирати наредним корацима:

- I корак. Примењује се $\tau_t$ статистика:
  - $\tau_t > \tau_t^k \Rightarrow$ Постоји бар један јединични корен
  - $\tau_t < \tau_t^k \Rightarrow$ Серија је тренд-стационарна

- Ако је $\tau_t > \tau_t^k$ прелазимо на II корак: Да ли у серији постоји константни прираст?
  - Ф тест: Да ли је средња вредност $\Delta X_t$ различита од нуле?
    II.1. ДА: Серија има један јединични корен са прирастом.
    II.2. НЕ: Понављамо тестирање, али према $\tau_\mu$
- III корак.
  Из II.1. Да ли постоји други јединични корен?
  Из II.2. Да ли серија има један јединични корен, али без константног прираста?

## 2.2 PP тест

Филипс-Перон (енгл. Phillips-Perron) или краће PP тест је известан вид корекције DF теста, стога је дефинисан за исте хипотезе као и код ДФ теста. Тест статистика је постављена тако да представља модификацију DF статистике са циљем повећања поузданости тестирања када у регресионом моделу постоји аутокорелација и када је потребно водити рачуна о присуству детерминистичке компоненте [8]. PP тест статистика се дефинише на следећи начин:

$$Z_t = \frac{s}{s_\infty}\tau_t - 0.5\left(\frac{s_\infty^2 - s^2}{s_\infty^2}\right)\left(\frac{Ts(\hat{\alpha})}{s^2}\right).$$

Са $s^2$ и $s_\infty^2$ означене су редом обична и дугорочна оцена дисперзије случајне грешке модела [8], док $s(\hat{\alpha})$ представља стандардну грешку оцене $\hat{\alpha}$ у моделу:

$$\Delta X_t = \beta_0 + \beta_1 t + \alpha X_{t-1} + e_t,$$

а $\tau_t$ DF статистику за исти модел. Када важи нулта хипотеза статистика $Z_t$ има расподелу која је асимптотски идентична расподели DF теста, па се користи исти скуп критичних вредности.

## 2.3 KPSS тест

Квјатковски-Филипс-Шмит-Шин (енгл. Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin) тест познат је под називом KPSS тест јединичног корена и заснива се на потпуно другачијем приступу од DF теста. Посматрајмо модел:

$$X_t = X_0 + \beta t + e_t, t = 1, 2, ..., T \tag{2.6}$$

и претпоставимо да $e_t$ поседује један јединични корен:

$$e_t = e_{t-1} + v_t, e_0 = 0, \tag{2.7}$$

тако да је сада $v_t$ процес бели шум са средњом вредношћу 0 и дисперзијом $\sigma_v^2$. Ако се 2.7 замени у 2.6 у добија се следеће:

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 + \beta t + e_t \\ &= X_0 + \beta t + e_{t-1} + v_t \\ &= X_0 + \beta t + e_{t-2} + v_t + v_{t-1} \\ &= ... \\ &= X_0 + \beta t + \sum_{j=1}^{t} v_j, \end{aligned}$$

где је $t = 1, 2, ...$

Оно од чега ће зависити стационарност серије јесте сума случајних грешака $\sum_{j=1}^{t} v_j$. Серија ће бити стационарна једино онда када је дисперзија случајне величине $v_j$ једнака нули. У случају да су у питању случајне компоненте са дисперзијом која је различита од нуле, тада ће посматрана временска серија поседовати јединични корен, јер је добијена сабирањем стационарних случајних промењљивих. Из ових закључака формирамо хипотезе KSPP теста:

$$H_0 : \sigma_v^2 = 0, \text{ односно } X_t \text{ је стационарна временска серија}$$

$$H_1 : \sigma_v^2 > 0, \text{ односно } X_t \text{ има један јединични корен.}$$

Дакле, овај тест се своди на тестирање да ли је дисперзија случајне компоненте $v_t$ једнака или већа од нуле, стога се у основи тест-статистике налази оцена дисперзије. Резидуале $\hat{e}_t$ добијамо када методом најмањег квадрата оценимо параметар $\beta$ из релације 2.6, а потом и парцијалне суме резидуала $S_t = \sum_{i=1}^{t} \hat{e}_i, t = 1, 2, ...T$. Затим се формира величина $\sum_{t=1}^{T} S_t^2$ која се нормира оценом дугорочне дисперзије $s_\infty^2$ случајне компоненте $\sum_{j=1}^{t} v_j$. Одавде изводимо KSPP статистику која има следећи облик:

$$KPSS = \frac{\frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^{T} S_t^2}{s_\infty^2}.$$

Величина $s^2_\infty$ представља Њуи-Вестову оцену дугорочне дисперзије [8]

$$\sigma^2_\infty = \lim_{T\to\infty} T^{-1} D\Big(\sum_{t=1}^{T} v_t\Big),$$

која се добија на следећи начин:

$$\begin{aligned} s^2_\infty &= \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\hat{e}_t^2 + 2\sum_{t=1}^{L} w_j\Big(\frac{1}{T}\sum_{t=j+1}^{T}\hat{e}_t\hat{e}_{t-j}\Big) \\ &= \frac{\sum\limits_{t=1}^{T}\hat{e}_t^2}{T}\left(1 + 2w_1\frac{\sum\limits_{t=2}^{T}\hat{e}_t\hat{e}_{t-j}}{\sum\limits_{t=1}^{T}\hat{e}_t^2} + ... + 2w_L\frac{\sum\limits_{t=L+1}^{T}\hat{e}_t\hat{e}_{t-L}}{\sum\limits_{t=1}^{T}\hat{e}_t^2}\right). \end{aligned}$$

У питању је уобичајена оцена дисперзије случајне грешке модела, $s^2 = \sum\limits_{t=1}^{T}\hat{e}_t^2/T$, која се множи датим елементом у загради да би се укључила информација о аутокорелисаности података. Параметар $L$ бира се на следећи начин: $L = \Big[4\Big(\frac{T}{100}\Big)^{1/4}\Big]$ [8]. Величина $w_j$ је Бартлетов (троугаони) прозор доцње и дефинише се као $w_j = 1 - \frac{j}{L+1}, j = 1, ..., L$ и 0 за остале доње. На овај начин се претпоставља да аутокорелација линеарно опада током времена и да не постоји за доцње строго веће од $L$.

## 2.4 Статистичке таблице за тестове јединичног корена

Табела 2.1: Критичне вредности Дики-Фулерових $\tau$ статистика

| $N$ | Модел | Ниво значајности | $\beta_\infty$ | Оцена грешке | $\beta_1$ | $\beta_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Без константе | 1% | -2.5658 | 0.0023 | -1.960 | -10.04 |
| | | 5% | -1.9393 | 0.0008 | -1.398 | 0.00 |
| | | 10% | -1.6156 | 0.0007 | -1.181 | 0.00 |
| 1 | Без тренда | 1% | -3.4335 | 0.0024 | -5.999 | -29.25 |
| | | 5% | -2.8621 | 0.0011 | -2.738 | -8.36 |
| | | 10% | -2.5671 | 0.0009 | -1.438 | -4.48 |
| 1 | Са трендом | 1% | -3.9638 | 0.0019 | -8.535 | -47.44 |
| | | 5% | -3.4126 | 0.0012 | -4.039 | -17.83 |
| | | 10% | -3.1279 | 0.0009 | -2.418 | -7.58 |
| 2 | Без тренда | 1% | -3.9001 | 0.0022 | -10.534 | -30.03 |
| | | 5% | -3.3377 | 0.0012 | -5.967 | -8.98 |
| | | 10% | -3.0462 | 0.0009 | -4.069 | -5.73 |
| 2 | Са трендом | 1% | -4.3266 | 0.0022 | -15.531 | -34.03 |
| | | 5% | -3.7809 | 0.0013 | -9.421 | -15.06 |
| | | 10% | -3.4849 | 0.0009 | -7.203 | -4.01 |
| 3 | Без тренда | 1% | -4.2981 | 0.0023 | -13.79 | -46.37 |
| | | 5% | -3.7429 | 0.0012 | -8.352 | -13.41 |
| | | 10% | -3.4518 | 0.0010 | -6.241 | -2.79 |
| 3 | Са трендом | 1% | -4.6676 | 0.0022 | -18.492 | -49.35 |
| | | 5% | -4.1193 | 0.0011 | -12.024 | -13.13 |
| | | 10% | -3.8344 | 0.0009 | -9.188 | -4.85 |
| 4 | Без тренда | 1% | -4.6493 | 0.0023 | -17.188 | -59.20 |
| | | 5% | -4.1000 | 0.0012 | -10.745 | -21.57 |
| | | 10% | -3.8110 | 0.0009 | -8.317 | -5.19 |
| 4 | Са трендом | 1% | -4.9695 | 0.0021 | -22.504 | -50.22 |
| | | 5% | -4.4294 | 0.0012 | -14.501 | -19.54 |
| | | 10% | -4.1474 | 0.0010 | -11.165 | -9.88 |

| $N$ | Модел | Ниво значајности | $\beta_\infty$ | Оцена грешке | $\beta_1$ | $\beta_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | Без тренда | 1% | -4.9587 | 0.0026 | -22.140 | -37.29 |
| | | 5% | -4.4185 | 0.0013 | -13.641 | -21.16 |
| | | 10% | -4.1327 | 0.0009 | -10.638 | -5.48 |
| 5 | Са трендом | 1% | -5.2497 | 0.0024 | -26.606 | -49.56 |
| | | 5% | -4.7154 | 0.0013 | -17.432 | -16.50 |
| | | 10% | -4.4345 | 0.0010 | -13.654 | -5.77 |
| 6 | Без тренда | 1% | -5.2400 | 0.0029 | -26.278 | -41.65 |
| | | 5% | -4.7048 | 0.0018 | -17.120 | -11.17 |
| | | 10% | -4.4242 | 0.0010 | -13.345 | 0.00 |
| 6 | Са трендом | 1% | -5.5127 | 0.0033 | -30.735 | -52.50 |
| | | 5% | -4.9767 | 0.0017 | -20.833 | -9.05 |
| | | 10% | -4.6999 | 0.0011 | -16.445 | 0.00 |

Вредности из табеле преузете су са [7].

За ма коју величину узорка ($n$) оцењена критична вредност теста се рачуна на следећи начин: $\beta_\infty + \frac{\beta_1}{n} + \frac{\beta_2}{n^2}$. $N$ представља број I(1) серија за које се тестира нулта хипотеза да нису коинтегрисане, а $\beta_\infty$ представља асимптотску критичну вредност са стандардном грешком оцене у наредној колони.

Табела 2.2: Критичне вредности Дики-Фулерових Φ статистика

| Величина | $\Phi_1$ | | | $\Phi_2$ | | | $\Phi_3$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| узорка | 10% | 5% | 1% | 10% | 5% | 1% | 10% | 5% | 1% |
| 25 | 4.12 | 5.18 | 7.88 | 4.67 | 5.68 | 8.21 | 5.91 | 7.24 | 10.61 |
| 50 | 3.94 | 4.86 | 7.06 | 4.31 | 5.13 | 7.02 | 5.61 | 6.73 | 9.31 |
| 100 | 3.86 | 4.71 | 6.70 | 4.16 | 4.88 | 6.50 | 5.47 | 6.49 | 8.73 |
| 250 | 3.81 | 4.63 | 6.52 | 4.07 | 4.75 | 6.22 | 5.39 | 6.34 | 8.43 |
| 500 | 3.79 | 4.61 | 6.47 | 4.05 | 4.71 | 6.15 | 5.36 | 6.30 | 8.34 |
| $\infty$ | 3.78 | 4.59 | 6.43 | 4.03 | 4.68 | 6.09 | 5.34 | 6.25 | 8.27 |

Вредности из табеле преузете су са [2].

За писање овог поглавља коришћена је литература: [2], [5], [7] и [8].

# Поглавље 3

# Коинтеграција

## 3.1 Линеарна регресија код временских серија са јединичним кореном

Једна од претпоставки класичног линеарног регресионог модела односи се на својство објашњавајућих променљивих да узимају фиксиране вредности из поновљених узорака. Дисперзија објашњавајућих променљивих је нула јер оне нису случајне променљиве. У случају да је поменута претпоставка нетачна не може се доказати да се методом најмањих квадрата добијају конзистентне оцене [8].

Ако објашњавајућа променљива има јединични корен, није стационарна, онда њена дисперзија расте током времена и таква променљива не узима фиксиране вредности из поновљених узорака. Одавде следи да се класични линеарни регресиони модели не могу користити при изучавању међусобне зависности нестационарних временских серија. Један од начина оцењивања зависности између нестационарних временских серија је њихова трансформација тако да се добију стационарне временске серије. У ту сврху се најчешће користе коначне разлике временских серија.

Нека су $Y_t$ и $X_t$ временске серије са једним јединичним кореном, посматрајмо модел облика:

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + \gamma X_{t-1} + \delta Y_{t-1} + e_t.$$

Ако је $|\delta| < 1$ модел је стабилан и постиже се дугорочна равнотежа, па је $Y_t = Y_{t-1} = Y', X_t = X_{t-1} = X'$. Посматрамо следећи модел:

$$Y' = \alpha^* + \beta^* X',$$

где је $\alpha^* = \dfrac{\alpha}{1-\delta}$ и $\beta^* = \dfrac{\beta+\gamma}{1-\delta}$. Коефицијент $\beta^*$ мери дугорочни утицај промењиве $X_t$. Ако међутим користимо модел са првим разликама

$$\Delta Y_t = \beta \Delta X_t + \gamma \Delta X_{t-1} + \delta \Delta Y_{t-1} + \epsilon_t,$$

добијамо да је $\Delta Y_t = \Delta Y_{t-1} = \Delta X_t = \Delta X_{t-1} = 0$, па се ништа не може закључити о дугорочној повезаности $Y_t$ и $X_t$. У случају нестационарних временских серија оцена дугорочне равнотежне везе може се разматрати искључиво на основу концепта коинтеграције, о чему ће бити речи у наставку рада.

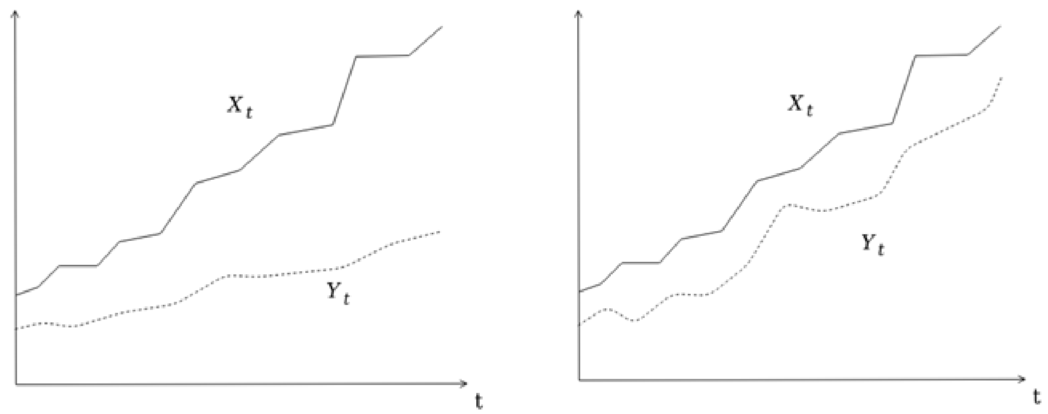
## 3.2 Дефиниција коинтеграције

Под појмом коинтеграције подразумева се стационарност линеарне комбинације индивидуално нестационарних временских серија. Претпоставимо да постоје две макроекономске временске серије, од којих свака поседује сопствени стохастички тренд, али се серије не одаљавају много једна од друге. Према томе, могуће су ситуације у којима заједничко кретање нестационарних серија поприма стационарни карактер. У наставку је дата формална дефиниција појма коинтеграције према Енглеу и Грејнџеру (1987).

**Дефиниција 3.2.1** *Кажемо да је временска серија интегрисана реда* $d$ *ако има* $d$ *јединичних корена. Односно, ред интегрисаност одговара броју примењених коначних разлика да би се обезбедила стационарна репрезентација временске серије.*

**Дефиниција 3.2.2** *За две временске серије* $X_t$ *и* $Y_t$ *кажемо да су коинтегрисане реда* $(d, b)$*, где је* $d \geq b > 0$ *(ознака:* $X_t, Y_t \sim CI(d, b)$*) ако је ред интегрисаности обе серије једнак* $d$ *и постоји нетривијална линеарна комбинација ових серија* $Z_t = \alpha_1 X_t + \alpha_2 Y_t$*, чији је ред интегрисаности* $(d-b)$*. Вектор коефицијената линеарне комбинације* $[\alpha_1, \alpha_2]$ *назива се вектор коинтеграционих коефицијената. Уопштење на случај више временских серија је директно, при чему више не важи захтев да свака серија мора бити истог реда интегрисаности.*

На слици испод су представљена два пара нестационарних временских серија. Серије на левој слици се током времена удаљавају једна од друге, односно немамо утисак да њихова разлика представља стационарну серију. С друге стране, кретање две временске серије на слици десно је усклађено током времена па се може претпоставити да су серије коинтегрисане.




Слика 3.1: Две нестационарне временске серије: некоинтегрисане (лево), коинтегрисане (десно)

## 3.3 Модел са корекцијом равнотежне грешке

У моделирању макроекономских временских серија значајно место заузима модел са корекцијом равнотежне грешке (енгл. *error correction model*). Модел ћемо прво објаснити на примеру међузависности између временских серија $Y_t$ и $X_t$ чија је равнотежна релација $Y_t = \beta_0 + \beta X_t$.

Модел са корекцијом равнотежне грешке има следећи облик:

$$\Delta Y_t = \gamma_0(Y_{t-1} - \beta_0 - \beta X_{t-1}) + \sum_{i=1}^{k} \gamma_{1i}\Delta Y_{t-i} + \sum_{i=1}^{k} \gamma_{2i}\Delta X_{t-i} + e_t,$$

где су $\gamma_0, \gamma_{11}, ..., \gamma_{1k}, \gamma_{21}, ..., \gamma_{2k}$ параметри а $e_t$ случајна грешка, при чему важи да је $\gamma_0 < 0$.

Кључни део модела је $(Y_{t-1} - \beta_0 - \beta X_{t-1})$, односно одступање $Y_t$ од равнотежног нивоа $Y_t = \beta_0 + \beta X_t$ до којег је дошло у периоду $t-1$. Управо због тога се дати елемент назива равнотежна грешка. У наставку модела промена $Y_t$, $\Delta Y_t$, током периода $t$ моделира се на основу информације колика равнотежна грешка је направљена у периоду $t-1$.

Претпоставимо да зависна променљива расте брже него што је то у сагласности са равнотежном релацијом. То има за последицу да ће $Y_{t-1}$ "одлутати"изнад равнотежне путање, па ће вредност израза $(Y_{t-1} - \beta_0 - \beta X_{t-1})$ бити позитивна. Међутим, како је $\gamma_0 < 0$, доћи ће на кратак рок до успорења раста зависне променљиве, што ће довести до тога да се $Y_t$ врати на дугорочну путању. Слично, ако зависна променљива опадне испод нивоа који предвиђа равнотежна релација, па ће вредност израза $(Y_{t-1} - \beta_0 - \beta X_{t-1})$ бити негативна. Међутим, $Y_t$ ће се вратити на дугорочну путању због негативног знака параметра $\gamma_0$. Одавде је јасно да равнотежна грешка има корективну улогу. Параметар $\gamma_0$ се још назива и коефицијент прилагођавања, јер показује колики део промене $Y_t$ се усклађује у сваком периоду према путањи дугорочне равнотежне везе.

Променљиве $\Delta Y_{t-1}, \Delta Y_{t-2}, ..., \Delta Y_{t-k}$, $\Delta X_{t-1}, \Delta X_{t-2}, ..., \Delta X_{t-k}$ се користе за описивање такозване краткорочне динамике. Број ових променљивих зависи од структуре корелације почетних временских серија.

Уочавамо да су у моделу укључене променљиве нивоа ($Y_{t-1}$ и $X_{t-1}$) и првих разлика. Претпоставимо да су $Y_t$ и $X_t$ првог реда интегрисаности, тј. $X_t \sim I(1)$ и $Y_t \sim I(1)$ , тада су и $\Delta Y_t$ и $\Delta X_t$ стационарне серије, тј. $\Delta X_t \sim I(0)$ и $\Delta Y_t \sim I(0)$. Тада једину нестационарну компоненту у моделу представља променљива $(Y_{t-1} - \beta_0 - \beta X_{t-1})$. Да би важио знак једнакости у смислу нивоа интегрисаности леве и десне стране, потребно је да линеарна комбинација буде стационарна, а тиме и временске серије $Y_t$ и $X_t$ коинтегрисане.

Између модела са корекцијом равнотежне грешке и коинтеграције постоји јака веза па важи да ако су временске серије коинтегрисане онда се увек могу представити помоћу овог модела, али и обрнуто, односно ако се једна од временских серија може описати помоћу модела са корекцијом равнотежне грешке онда су оне коинтегрисане. Ова веза представља фундаментални резултат Грејнџер-Јохансенове теореме репрезентације. Према овој теореми модел са корекцијом равнотежне грешке садржи информације о нивоу временских серија, чак и ако су оне нестационарне.

## 3.4 Тест коинтеграције

На основу објашњења модела са корекцијом равнотежне грешке намеће се поступак провере коинтегрисаности временских серија.

У наставку ће бити изложен поступак тестирања коинтеграције и оцењивања модела са корекцијом равнотежне грешке који су осмислили Енгел и Грејнџер. Дати тест подразумева да посматране временске серије образују само једну равнотежну релацију. Ова претпоставка је у општем случају тачна само када су у питању две временске серије. Међутим, ако се ради о скупу већег броја нестационарних временских серија оне могу образовати више равнотежних релација. У том случају поступак тестирања је другачији.

Претпоставимо да желимо да испитамо да ли су временске серије, $X_t$ и $Y_t$, коинтегрисане. Најпре је потребно проверити да ли је испуњен предуслов за постојање коинтеграционе релације, односно да ли су серије $I(1)$ или $I(0)$ процеси. То проверавамо неким од тестова јединичних корена описаних у другом поглављу. Ако су обе серије $I(1)$ процеси, онда има смисла тестирати да ли су серије коинтегрисане. Да би се то проверило, оцењује се дугорочна веза међу њима:

$$Y_t = \beta_0 + \beta X_t + e_t.$$

Методом најмањих квадрата најпре се добијају оцене параметара, а затим серија резидуала, као разлика између стварних и података оцењених моделом. Временске серије су коинтегрисане ако необјашњени део кретања $Y_t$ представља стационарну компоненту. Та компонента је серија резидуала $r_t$.

Дакле, ако је $r_t$ стационарно, временске серије $X_t$ и $Y_t$ су коинтегрисане, док ако је $r_t$ нестационарно, ове временске серије нису коинтегрисане. Отуда закључујемо да се тест коинтеграције своди на тест јединичног корена серије резидуала $r_t$. Односно, тестирамо нулту хипотезу да је $r_t \sim I(1)$, против алтернативне хипотезе да је $r_t \sim I(0)$. Како су обе серије $X_t$ и $Y_t$ $I(1)$ процеси, хипотеза $H_0$ значи да серије нису коинтегрисане. С друге стране, ако су резидуали модела стационарни, тада ће $X_t$ и $Y_t$ бити коинтегрисане.

Дики-Фулеров или проширени Дики-Фулеров тест се могу користити за тестирање стационарности серије резидуала. Критичне вредности проширеног Дики-Фулеровог теста одређујемо на основу података из табеле 2.1, при чему водимо рачуна о броју временских серија (вредност $N$ у табели 2.1) између којих испитујемо постојање коинтеграционе везе као и да ли коинтеграциона једначина садржи као детерминистичке компоненте само константу или константу и тренд.

Ако дођемо до закључка да су дате временске серије коинтегрисане, онда се одговарајуће оцене добијене методом обичних најмањих квадрата могу сматрати оценама параметара дугорочне равнотежне везе.

Стационарни резидуали представљају равнотежну грешку која се користи за формулацију модела са корекцијом равнотежне грешке:

$$\Delta Y_t = \gamma_0 r_{t-1} + \sum_{i=1}^{k} \gamma_{1i} \Delta Y_{t-i} + \sum_{i=1}^{k} \gamma_{2i} \Delta X_{t-i} + e_t.$$

Ова једначина се може оценити применом метода најмањих квадрата, јер су све њене променљиве стационарне.

За писање овог поглавља коришћена је литература: [3], [5] и [8].

# Поглавље 4

# Коинтеграција у VAR моделу

У овом поглављу истовремено посматрамо понашање две или више временских серија. Циљ нам је да конструишемо вишедимензиони модел који ће описати кретање и међусобне утицаје посматраних серија. Зато најпре уводимо појам векторске временске серије.

**Дефиниција 4.0.1** *Векторска временска серија $X_t$ дефинише се на следећи начин:*

$$X_t = \begin{bmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \\ \vdots \\ X_{mt} \end{bmatrix}, \ t = 1, 2, ...$$

*У овом вектору димензије $m \times 1$ компоненте су временске серије $X_{1t}$, $X_{2t}$, ..., $X_{mt}$.*

У анализи макроекономских векторских временских серија најзаступљенији је ауторегресиони модел (VAR модел). Овај модел омогућава моделирање сваке променљиве према сопственим претходним вредностима, као и претходним вредностима осталих променљивих у систему.

У овом поглављу биће речи о анализи коинтегрисаних временских серија са јединичним кореном у оквиру VAR модела.

**Дефиниција 4.0.2** *VAR модел векторске временске серије $X_t$, димензије $m$ и реда $k$ има следећи облик:*

$$X_t = \Psi_1 X_{t-1} + \Psi_2 X_{t-2} + ... + \Psi_k X_{t-k} + \varepsilon_t.$$

*У претходном моделу параметри $\Psi_1, \Psi_2, ..., \Psi_k$ су матрице димензије $m \times m$. Случајна грешка модела је $\varepsilon_t$ који је векторски случајни процес* *бели шум димензије* $m \times 1$ *и који представља некорелисане временске серије чија је средња вредност 0, а дисперзија коначна. Важи следеће:*

$$E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-k}^{'}) = \begin{cases} \Sigma, & k = 0 \\ 1, & k \neq 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

*где је са* $\Sigma$ *означена коваријациона матрица процеса.*

## 4.1 Коинтеграција у VAR моделу

Посматрајмо VAR(2) модел са две временске серије $x_t$ и $y_t$ које поседују по један јединични корен:

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t-2} \\ y_{t-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix}$$

Ако са обе стране једнакости одузмемо $\begin{bmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{bmatrix}$ и потом користимо релацију $\begin{bmatrix} \Delta x_{t-1} \\ \Delta y_{t-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_{t-2} \\ y_{t-2} \end{bmatrix}$, тада добијамо векторску форму модела са корекцијом равнотежне грешке:

$$\begin{bmatrix} \Delta x_t \\ \Delta y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} - 1 & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_{t-1} \\ \Delta y_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

односно

$$\Delta X_t = \Pi X_{t-1} + \Gamma \Delta X_{t-1} + \varepsilon_t,$$

при чему је $\Pi = \Psi_1 + \Psi_2 - I, \Gamma = -\Psi_2$.

Према претпоставци, свака од компоненти, $x_t$ и $y_t$, вектора $X_t$ има по један јединични корен. На левој страни једнакости 4.2 налази се стационарна репрезентација временских серија ($\Delta X_t$), док се на десној страни налази њихова нестационарна форма $X_{t-1}$, као и стационарна са доцњом првог реда $\Delta X_{t-1}$. Постоје два решења, тако да случајна грешка и даље буде векторски бели шум:

1. Ранг матрице $\Pi$ је нула. Тада се једначина своди на VAR модел првих разлика ($\Delta X_t = \Gamma \Delta X_{t-1} + \varepsilon_t$).

2. Ранг матрице $\Pi$ једнак је један и матрица се може представити на следећи начин $\Pi = \gamma\beta^{'}$, где су $\gamma$ и $\beta$ вектори параметара димензија $2\times 1$, тако да је линеарна комбинација $\beta^{'}X_t = \beta^{'}[x_t y_t]^{'}$ стационарна, односно да су компоненте $x_t$ и $y_t$ коинтегрисане.

Посматрани резултати могу се уопштити за случај VAR модела реда $k$ димензије $m$:

$$X_t = \Psi_1 X_{t-1} + \Psi_2 X_{t-2} + ... + \Psi_k X_{t-k} + \varepsilon_t,$$

коме одговара карактеристична једначина облика:

$$|I_m - \Psi_1 h - \Psi_2 h^2 - ... - \Psi_k h^k| = 0.$$

Ако су сва решења ове једначине једнака један онда су компоненте временске серије интегрисане реда један.

Векторска форма модела са корекцијом равнотежне грешке дефинише се као:

$$\Delta X_t = \Pi X_{t-1} + \Gamma_1 \Delta X_{t-1} + ... + \Gamma_{k-1}\Delta X_{t-k+1} + \varepsilon_t,$$

при чему је $\Pi = \Psi_1 + \Psi_2 + ... + \Psi_k - I_m, \Gamma_j = -\sum\limits_{i=j+1}^{k} \Psi_i, j = 1, ..., k-1.$

Како су компоненте у VAR моделу интегрисане реда један следи да су сва решења претходне једначине једнака један, односно да је вредност детерминанте матрице $\Pi$ једнака нули. Матрица $\Pi$ је сингуларна:

$$|I_m - \Psi_1 h - \Psi_2 h^2 - ... - \Psi_k h^k| = 0, h_1 = ... = h_{km} = 1 \Rightarrow$$

$$|I_m - \Psi_1 - \Psi_2 - ... - \Psi_k| = 0 \Rightarrow |\Pi| = 0.$$

Када је матрица $\Pi$ сингуларна, могућа су два закључка:

1. Матрица $\Pi$ је нула матрица. У том случају векторски модел са корекцијом равнотежне грешке своди се на VAR модел првих разлика реда $k-1$ и временске серије у вектору $X_t$ нису коинтегрисане.

2. Ранг матрице $\Pi$ је мањи од $m$ и већи од нуле. Нека је ранг једнак $r$ тако да је $0 < r < m$, тада је $\Pi = \gamma\beta^{'}$, где су $\gamma$ и $\beta$ матрице параметара димензије $m \times r$. У овом случају временске серије у вектору $X_t$ су коинтегрисане.

## 4.2 Оцена коинтеграционих параметара у векторском моделу равнотежне грешке

Најчешће коришћен приступ у оцени коинтеграционих параметара познат је под називом Јохансенова процедура која се заснива на методу максималне веродостојности.

Претпоставимо да су компоненте векторске временске серије $X_t$ димензије $m$ коинтегрисане. Посматрамо векторски модел равнотежне грешке:

$$\Delta X_t = \Pi X_{t-1} + \Gamma_1 \Delta X_{t-1} + ... + \Gamma_{k-1} \Delta X_{t-k+1} + \varepsilon_t,$$

при чему је $\Pi = \Psi_1 + \Psi_2 + ... + \Psi_k - I, \Gamma_j = -\sum_{i=j+1}^{k} \Psi_i, j = 1, ..., k-1$ ранг коинтеграције је $0 < r < m$, тако да важи: $\Pi = \gamma\beta'$.

Оцене непознатих параметара краткорочне динамике, $\hat{\Gamma_1}, \hat{\Gamma_2}, ..., \hat{\Gamma_{k-1}}$, добијају се применом методе најмањих квадрата при чему се добија вектор резидуала $R_{0t}$. На исти начин се оцењује зависност $X_{t-1}$ од $\Delta X_{t-1}, \Delta X_{t-2}, ..., \Delta X_{t-k+1}$ и добија се вектор резидуала $R_{1t}$.

Сада се полазни модел може приказати као:

$$R_{0t} = \gamma\beta' R_{1t} + \varepsilon_t.$$

Даље, оцењујемо параметре матрице $\gamma$ уз претпоставку да је матрица $\beta$ позната. Ако уведемо ознаку:

$$S_{ij} = T^{-1} \sum_{t=1}^{T} R_{it} R'_{jt}, i, j = 0, 1,$$

оцену, $\hat{\gamma}$, добијамо применом методе најмањих квадрата као функцију од $\beta$:

$$\hat{\gamma} = \gamma(\beta) = S_{01}\beta(\beta' S_{11}\beta)^{-1}. \tag{4.3}$$

Следећи корак је оцена параметра $\beta$ методом максималне веродостојности.

Под претпоставком да су компоненте векторске случајне грешке $\varepsilon_t$ нормално расподељене, максимална вредност функције веродостојности је:

$$L_{max}^{-2/T}(\beta) = |\hat{\Sigma}(\beta)|. \tag{4.4}$$

Видимо да је тражена оцена параметра $\beta$, она вредност параметра за коју 4.4 достиже максимум, односно која минимизира $|\hat{\Sigma}(\beta)|$. Па је оцена коваријационе матрице случајних грешки:

$$\hat{\Sigma}(\beta) = T^{-1}\sum_{t=1}^{T}(R_{0t} - \gamma\beta' R_{1t})(R_{0t} - \gamma\beta' R_{1t})',$$

према већ уведеним ознакама, једнака:

$$\hat{\Sigma}(\beta) = S_{00} - S_{01}\beta\gamma' - \gamma\beta' S_{10} + \gamma\beta' S_{11}\beta\gamma'$$

Користећи 4.3 добијамо да је:

$$\hat{\Sigma}(\beta) = S_{00} - S_{01}\beta(\beta' S_{11}\beta)^{-1}\beta' S_{10} + S_{01}\beta(\beta' S_{11}\beta)^{-1}\beta' S_{10} + S_{01}\beta(\beta' S_{11}\beta)^{-1}\beta' S_{11}\beta(\beta' S_{11}\beta)^{-1}\beta' S_{10}\ ,$$

односно:

$$\hat{\Sigma}(\beta) = S_{00} - S_{01}\beta(\beta' S_{11}\beta)^{-1}\beta' S_{10}. \tag{4.5}$$

За инвертибилне квадратне матрице $A, B, C$ важи следећа особина детерминанте матрице:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B' & C \end{vmatrix} = |A||C - B' A^{-1}B| = |C||A - BC^{-1}B'|. \tag{4.6}$$

Применом особине 4.6 на матрицу $\begin{bmatrix} S_{00} & S_{01}\beta \\ \beta' S_{10} & \beta' S_{11}\beta \end{bmatrix}$ добијамо:

$$|S_{00}||\beta' S_{11}\beta - \beta' S_{10}S_{00}^{-1}S_{01}\beta| = |\beta' S_{11}\beta||S_{00} - S_{01}\beta(\beta' S_{11}\beta)^{-1}\beta' S_{10}|.$$

одакле, на основу 4.5 следи да је вредност детерминанте оцене коваријационе матрице случајних грешки једнака:

$$|\hat{\Sigma}(\beta)| = |S_{00}|\frac{|\beta'(S_{11} - S_{10}S_{00}^{-1}S_{01})\beta|}{|\beta' S_{11}\beta|}.$$

Подсетимо да је тражена оцена параметра $\beta$, она вредност параметра за коју 4.4 достиже максимум, односно која минимизира $|\hat{\Sigma}(\beta)|$. Дакле потребна нам је оцена за коју

$$\frac{|\beta'(S_{11} - S_{10}S_{00}^{-1}S_{01})\beta|}{|\beta' S_{11}\beta|}. \tag{4.7}$$

достиже најмању вредност. Да бисмо добили оцену матрице $\beta$, искористићемо следећу лему:

**Лема 4.2.1** *Нека су $M$ и $N$ симетричне и позитивно дефинисане матрице димензије $m \times m$. Максимална вредност функције*

$$f(x) = \frac{|x'Mx|}{|x'Nx|},$$

*добија се одређивањем* $m$ *карактеристичних вредности и* $m$ *карактеристичних вектора из:*

$$|\sigma N - M| = 0. \tag{4.8}$$

Доказ се може наћи у [4].

Применом релације 4.8 на 4.7 добијамо:

$$|\sigma S_{11} - (S_{11} - S_{10}S_{00}^{-1}S_{01})| = 0,$$

односно за $\lambda = 1 - \sigma$ добијамо:

$$|\lambda S_{11} - S_{10}S_{00}^{-1}S_{01}| = 0.$$

Решавањем претходне једначине добија се $m$ карактеристичних вредности $\hat{\lambda}_1 > \hat{\lambda}_2 > ... > \hat{\lambda}_m \geq 0$. Одговарајући карактеристични вектори су $v_1, v_2, ..., v_m$. Тражена оцена матрице $\beta$ је:

$$\hat{\beta} = (v_1, v_2, ..., v_r),$$

при чему важи да је:

$$\hat{\beta}' S_{11} \hat{\beta} = I_r. \tag{4.9}$$

Дакле, сада остаје још да се на основу $\hat{\beta}$ добије коначна оцена параметара матрице $\gamma$. Оцена 4.3 се на основу 4.9 своди на:

$$\hat{\gamma} = S_{01}\hat{\beta}.$$

Максимална вредност функције веродостојности узорка се изводи према израчунатим карактеристичним вредностима на следећи начин:

$$L_{max}^{-2/T} = |S_{00}| \frac{|\hat{\beta}'(S_{11} - S_{10}S_{00}^{-1}S_{01}\hat{\beta}|)}{|\hat{\beta}' S_{11}\hat{\beta}|}| = |S_{00}| \prod_{i=1}^{m}(1 - \hat{\lambda}_i).$$

Карактеристична вредност $\hat{\lambda}_i, i = 1, 2, ..., m$ је показатељ корелисаности између линеарне комбинације нивоа временских серија и коначих разлика временских серија. Што је $\hat{\lambda}_i$ ближе један то је линеарна комбинација нестационарних временских серија у већој сагласности са стационарним делом модела. Овако јака корелација је могућа једино када линеарна комбинација нестационарних елемената постаје стационарна. У том случају су посматране временске серије коинтегрисане. У другом случају, ако је $\hat{\lambda}_i = 0$ онда су линеарна комбинација нестационарних елемената и одговарајући стационарни елементи слабо корелисани. У овом случају је линеарна комбинација нестационарних елемената и сама нестационарна, односно коинтегрисаност између посматраних временских серија вероватно не постоји.

У наставку рада биће приказан статистички поступак којим се тестира коинтегрисаност временских серија.

## 4.3 Тестирање постојања коинтеграције у векторском моделу равнотежне грешке

Нека је $r$ број стационарних линеарних комбинација, а $m-r$, при чему је $m > r$ број нестационарних комбинација. Као први корак у тестирању постављају се следеће хипотезе:

$$H_0 : rang(\Psi) = r, \text{ постоји } r \text{ стационарних релација}$$

$$H_1 : rang(\Psi) = m, \text{ постоји } m \text{ стационарних релација}$$

Ако претпоставимо да је тачна нулта хипотеза, максимална вредност функције веродостојности добија се према:

$$L_{max}^{-2/T}[r] = |S_{00}| \prod_{i=1}^{r} (1 - \hat{\lambda}_i).$$

А ако претпоставимо да је тачна алтернативна хипотеза, максимална вредност функције веродостојности добија се на основу израза:

$$L_{max}^{-2/T}[m] = |S_{00}| \prod_{i=1}^{m} (1 - \hat{\lambda}_i).$$

Као тест статистика користи се количник веродостојности:

$$\begin{aligned}
(Q(H_0|H_1))^{-\dfrac{2}{T}} &= \frac{|S_{00}| \prod_{i=1}^{r} (1 - \hat{\lambda}_i)}{|S_{00}| \prod_{i=1}^{m} (1 - \hat{\lambda}_i)} \\
&= \frac{(1-\hat{\lambda}_1) \times (1-\hat{\lambda}_2) \times ... \times (1-\hat{\lambda}_r)}{(1-\hat{\lambda}_1) \times (1-\hat{\lambda}_2) \times ... \times (1-\hat{\lambda}_r) \times (1-\hat{\lambda}_{r+1}) \times ... \times (1-\hat{\lambda}_m)} \\
&= \frac{1}{(1-\hat{\lambda}_{r+1}) \times ... \times (1-\hat{\lambda}_m)}.
\end{aligned}$$

На основу претходне релације дефинишемо Јохансенову статистику трага (ознака: $\tau_{m-r}$):

$$-2ln(Q(H_0|H_1)) = -T \sum_{i=r+1}^{m} ln(1-\hat{\lambda}_i).$$

Уколико важи нулта хипотеза, асимптотска расподела тест статистике је Дики-Фулерова расподела која зависи од $m-r$ и детерминистичких компоненти. Расподела не зависи од краткорочне динамике, односно од броја доцњи $k$, али се ефекат краткорочне динамике не може занемарити код узорка мањег обима. Због тога се Јохансенова статистика трага може кориговати тако што се обим узорка $T$ замењује бројем степени слободе сваке једначине VAR модела, односно онда статистика има облик:

$$\tau_{m-r} = -(T-km) \sum_{i=r+1}^{m} ln(1-\hat{\lambda}_i).$$

Приликом тестирања примењујемо секвенцијални поступак, тј. прво тестирамо $H_0 : r = 0$ против алтернативне $H_0 : r > 0$. Ако прихватимо $H_0$ (ако је $\tau_m < K_m$) поступак тестирања се зауставља и закључак је да коинтеграција не постоји. Уколико је $\tau_m > K_m$, одбацује се нулта хипотеза, то значи да постоји бар један вектор коинтеграције па тестирамо $H_0 : r = 1$ против алтернативне $H_0 : r > 1$. Дискриминацију између хипотеза сада остварујемо на основу вредности тест-статистике $\tau_{m-1} = -T \sum_{i=2}^{m} ln(1-\hat{\lambda}_i)$. Ако прихватимо $H_0$ то значи да постоји тачно један вектор коинтеграције, у супротном се наставља тестирање све док се коначно не прихвати нулта хипотеза.

За писање овог поглавља коришћена је литература: [4], [6] и [8].

# Поглавље 5

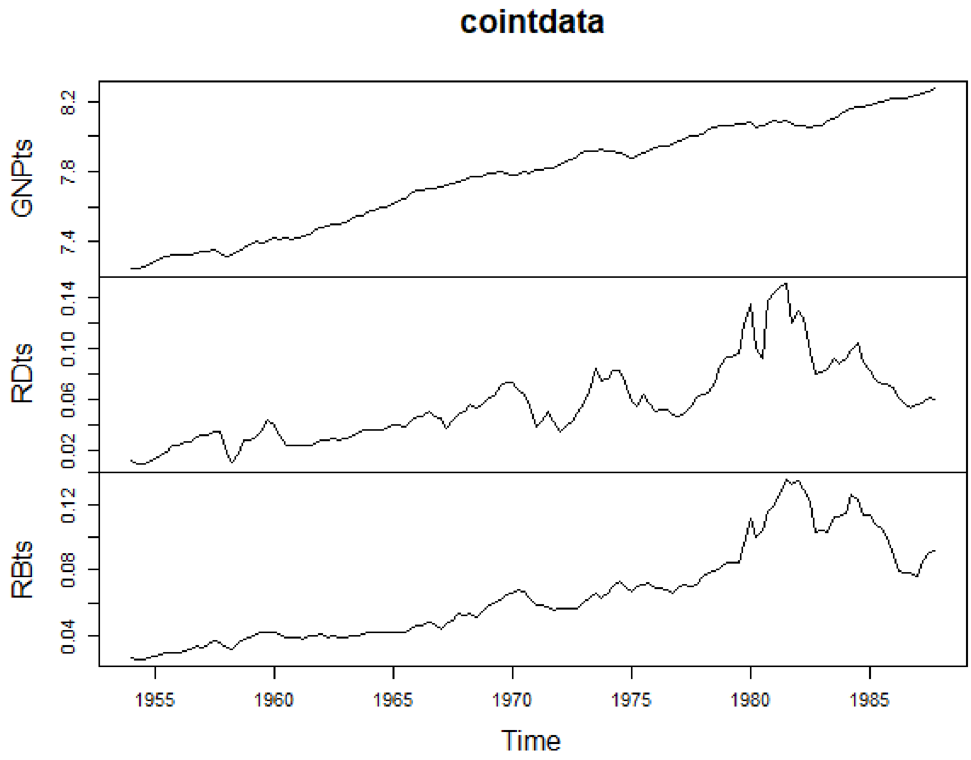
# Примена коинтеграционе анализе

У овом поглављу биће дат пример анализе и моделирања коинтегрисаних временских серија. Сви тестови биће обављени у статистичком софтверу R.

Посматрајмо везу између бруто националног производа (БНП), дисконтне каматне стопе за краткорочне хартије од вредности и приноса на дугорочне хартије од вредности у Сједињеним Америчким Државама, у периоду од 1954. до 1987 године. База је преузета са [9]. Подаци су дати квартално и означени су на следећи начин:

- BNP - Природни логаритам бруто националног производа САД-а,
- RD - Дисконтна каматна стопа за краткорочне хартије од вредности са роком доспећа од 91 дан,
- RB - Принос на дугорочне (20 година) хартије од вредности.

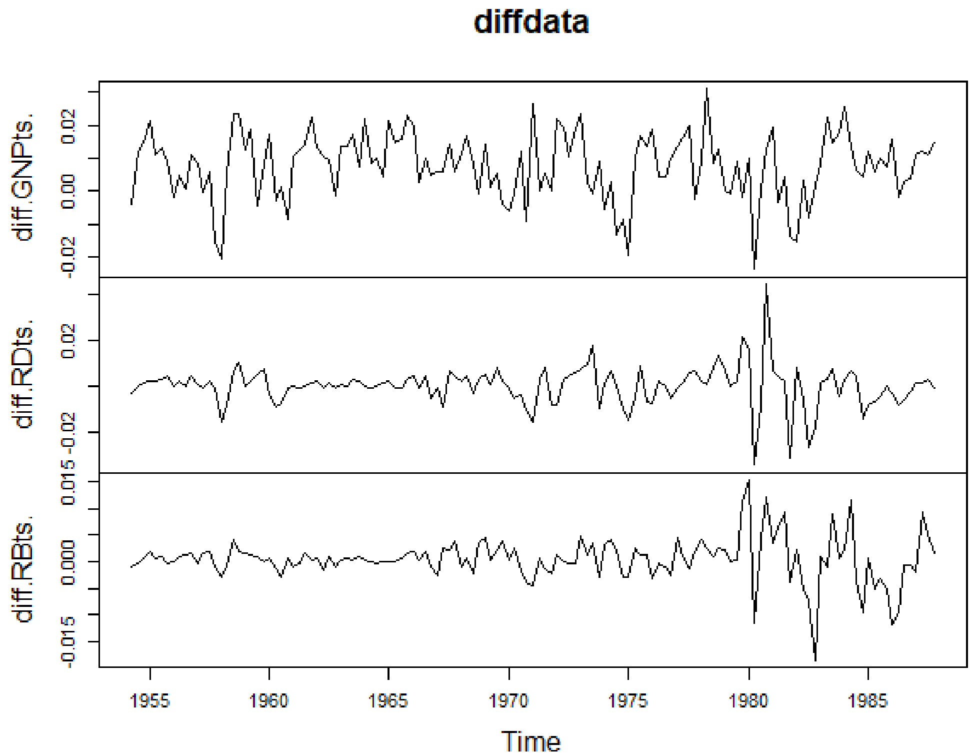
Први корак је учитавање података у статистички софтвер R. Како су подаци смештени у Excel, користимо функцију read.xlsx из пакета xlsx да бисмо их учитали у R. Даље, желимо да направимо објекте временксе серије и за то користимо функцију ts из пакета tseries. На крају, податке смо спојили у један објекат који је назван cointdata. На графику испод приказане су све три временсе серије које ћемо анализирати у наставку.




Приметимо, да све три посматране серије имају сличне трајекторије, па има смисла испитивати њихову коинтегрисаност.

За почетак проверимо да ли серије задовољавају услове, односно да ли оне нестационарне док су серије њихових првих разлика стационарне. За ову проверу користићемо Филипс-Перон тест и проширену верзију Дики-Фулеровог теста који су детаљно описани у првом делу рада. У R-овом пакету tseries имплементиран је PP тест. Док се DF тест налази у пакету urca - функција ur.df.

Како тестове примењујемо и на прве разлике серија да бисмо утврдили ред интегрисаности, представићемо и прве разлике посматраних серија на графикону испод.




Када тестирамо оригиналне серије, добијамо p-вредности теста редом: 0.6611, 0.3093 и 0.461, а како је алтернативна хипотеза PP теста стационарност, закључујемо да је свака од посматраних серија нестационарна. У друга три теста, у којима тестирамо прве разлике серија, p-вредност теста је мања од 0.05 па можемо закључити да се нулта хипотеза одбацује, односно серије су стационарне. Дакле, на онову P теста долазимо до закључка да све три серије припадају класи I(1). То ћемо проверити још једним тестом јединичног корена - проширеним Дики-Фулеровим тестом.

**R код 5.1: Проширени Дики-Фулер тест**

```
summary(ur.df(BNPts, type = "trend", lag = 1))
summary(ur.df(RDts, type = "trend", lag = 3))
summary(ur.df(RBts, type = "trend", lag = 1))

summary(ur.df(diff(BNPts), type = "none", lag = 1))
summary(ur.df(diff(RDts), type = "none", lag = 1))
summary(ur.df(diff(RBts), type = "none", lag = 1))
```

Приметимо да све три серије имају растући тренд па има смисла да оценимо параметре модела са константом и трендом. Вредност *lag* параметра је 1 за променљиве BNP и RB, док су за RD три *lag* променљиве биле значајне. Претходно смо тестирали и за вредност *lag* параметра 2, односно 4, али смо добили да последња променљива није значајна. Даље, тестирамо хипотезу $\Phi_3 = (\beta_0, \beta_1, \alpha) = (\beta_0, 0, 1)$ користећи F статистику. Резултати су приказани у табели испод. Вредности тест статистика за претходне моделе су редом, 2.4789 , 3.8239, 2.7629. Критичне вредности Дики Фулерових $\Phi$ се могу пронаћи у табели 2.2. Критична вредност за узорак од 100 обсервација и нивое значајности $10\%, 5\%$ и $1\%$ су редом 5.47, 6.49 и 8.73. Дакле, нулта хипотеза се не може одбацити, односно све три посматране серије садрже бар један јединични корен. До истог закључка се долази ако се посматрају $\tau$ статистике, али се овај пут критичне вредности рачунају на основу табеле 2.1.

| Тест статистика | BNP | RD | RB | 1% | 5% | 10% |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\tau_3$ | -2.1636 | -2.6657 | -2.3253 | -3.99 | -3.43 | -3.13 |
| $\Phi_2$ | 10.8195 | 2.6227 | 2.2411 | 6.22 | 4.75 | 4.07 |
| $\Phi_3$ | 2.4789 | 3.8239 | 2.7629 | 8.73 | 6.49 | 5.47 |

У наредној итерацији настављамо са употребом истог теста на прве разлике серија да бисмо проверили да ли је број јединичних корена тачно један или је већи. Резултати су приказани у табели испод.

| Тест статистика | BNP | RD | RB | 1% | 5% | 10% |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\tau_1$ | -4.1202 | -10.0326 | -7.0143 | -2.58 | -1.95 | -1.62 |

Дакле, нулта хипотеза се не може прихватити, односно закључујемо да су све серије I(1), односно да поседују тачно један јединични корен. Тиме смо потврдили резултате добијене ПП тестом. Сада можемо испитати коинтегрисаност серија.

**R код 5.2: Оцењивање параметара модела корекције равнотежне грешке**

```
lr.reg1 <- lm(RBts ~ RDts + BNPts)
summary(lr.reg1)
lr.reg2 <- lm(RDts ~ RBts + BNPts - 1)
summary(lr.reg2)
lr.reg3 <- lm(BNPts ~ RDts + RBts)
summary(lr.reg3)

error1 <- ts(residuals(lr.reg1), start = c(1954, 1), end = c(1987, 4))
error2 <- ts(residuals(lr.reg2), start = c(1954, 1), end = c(1987, 4))
error3 <- ts(residuals(lr.reg3), start = c(1954, 1), end = c(1987, 4))
```

У поступку тестирања постојања коинтеграције прво смо применом метода најмањих квадрата оценили зависност приноса на дугорочне хартије од вредности од бруто националног производа и дисконтне каматне стопе на краткорочне хартије од вредности. Оцењени модел има следећи облик:

$$R\hat{B}ts_t = -0.2770 + 0.5622 \cdot RDts_t + 0.0398 \cdot BNPts_t.$$

На исти начин смо оценили и друге две линеарне комбинације.

**Call: lm(formula = RBts ∼ RDts + BNPts)**

Residuals:

| Min | 1Q | Median | 3Q | Max |
|---|---|---|---|---|
| -0.0196748 | -0.0061820 | -0.0004199 | 0.0056569 | 0.0233167 |

Coefficients:

| | Estimate | Std. Error | t value | Pr(> \|t\|) |
|---|---|---|---|---|
| (Intercept) | -0.277013 | 0.030401 | -9.112 | 1.08e-15 *** |
| RDts | 0.562181 | 0.039966 | 14.067 | < 2e-16 *** |
| BNPts | 0.039859 | 0.004127 | 9.659 | < 2e-16 *** |

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.009074 on 133 degrees of freedom

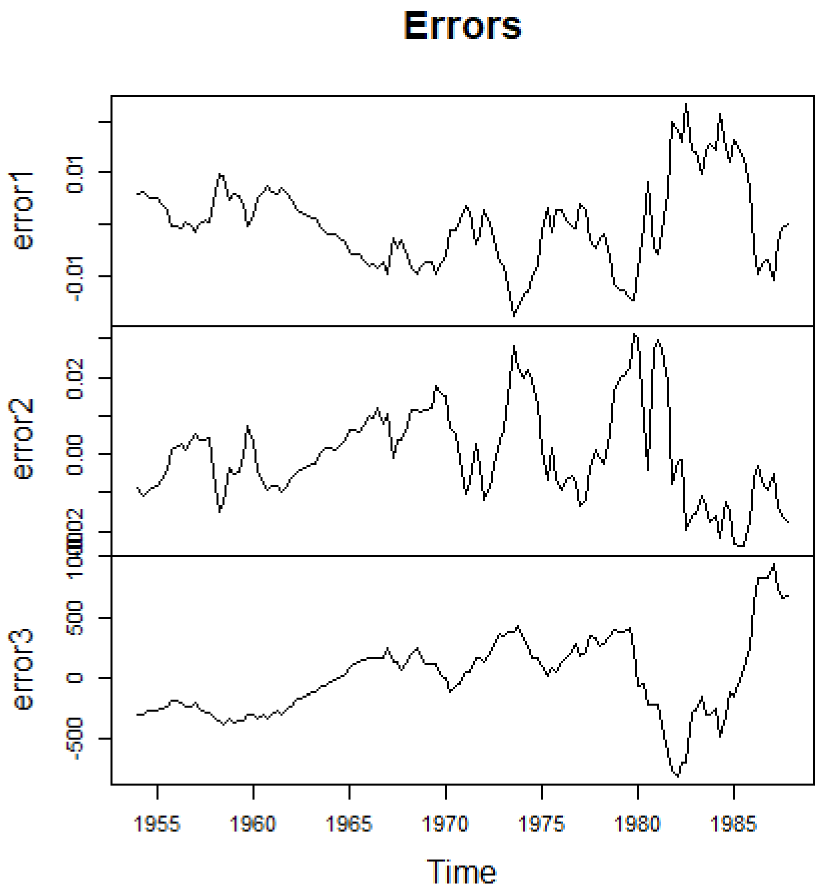
Multiple R-squared: 0.9053, Adjusted R-squared: 0.9039

F-statistic: 636 on 2 and 133 DF, p-value: < 2.2e-16

Постојање коинтеграције проверавамо на основу проширеног Дики-Фулер теста. За то користимо серију резидуала, $r_t$, која је приказана на графику испод.

**R код 5.3: Тестирање стационарности резидуала**

```
summary(ur.df(error1, type = "none", lag = 1))
summary(ur.df(error2, type = "none", lag = 1))
summary(ur.df(error3, type = "none", lag = 3))
```




Постављамо хипотезе:

$H_0 : r_t$ поседује јединични корен (односно серије нису коинтегрисане)
$H_1 : r_t$ је стационарно (односно временске серије су коинтегрисане)

Дискриминацију између хипотеза остварујемо према оцењеној једначини (прва линеарна веза):

$$\Delta\hat{r_t} = -0.10592 \cdot r_{t-1} + 0.15332 \cdot \Delta r_{t-1}.$$

Вредност $t$-статистике параметра $r_{t-1}$ је управо вредност тест статистике према којој се врши дискриминација између хипотеза. Испод су дати резултати АДФ теста примењеног на резидуале прве линеарне комбинације. Слично се добија за преостале две.

**Call: lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 - 1 + z.diff.lag)**

Residuals:

| Min | 1Q | Median | 3Q | Max |
|---|---|---|---|---|
| -0.0140480 | -0.0018310 | -0.0003144 | 0.0017617 | 0.01348467 |

Coefficients:

| | Estimate | Std. Error | t value | Pr(> \|t\|) |
|---|---|---|---|---|
| z.lag.1 | -0.10592 | 0.03648 | -2.904 | 0.00432 ** |
| z.diff.lag | 0.15332 | 0.08584 | 1.7867 | 0.07636 . |

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.003717 on 132 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.06974, Adjusted R-squared: 0.05564
F-statistic: 4.948 on 2 and 133 DF, p-value: 0.008471

На основу Дики-Фулерове $\tau$ статистике можемо одбацити нулту хипотезу, односно закључујемо да су резидуали све три линеарне везе стационарни. Дакле, серије су коинтегрисане.

| Тест статистика | error1 | error2 | error3 | 1% | 5% | 10% |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\tau_1$ | -2.9039 | -3.4591 | -2.5481 | -2.58 | -1.95 | -1.62 |

Следећи корак је оцењивање параметара модела корекције равнотежне грешке.

Да бисмо текућу опсервацију временске серије померили један период уназад, односто у прошлост, користимо функцију *lag()*. Затим креирамо табелу у којој се налазе прве разлике посматраних и серија које смо померили уназад као и резидуали, такође померени за један период у прошлост *(USAdata)*.

**R код 5.4: Прве разлике и серије померене уназад**

```
error.lagged < − lag(as.numeric(error1))
error.lagged < − ts(error.lagged, start = c(1954,1), end = c(1987,4))
error.lagged < − window(error.lagged, start=c(1954,3), end=c(1987,4))

RB.D1 < − diff(RBts)
RB.D1Sn1 < − lag(as.numeric(RB.D1))
RB.D1Sn1 < − ts(RB.D1Sn1, start = c(1954,2), end = c(1987,4))
RB.D1Sn1 < − window(RB.D1Sn1, start=c(1954,3), end=c(1987,4))
RB.D1 < − window(RB.D1, start = c(1954,3), end=c(1987,4))

USAdata < − data.frame(cbind(RB.D1, RB.D1Sn1, RD.D1, RD.D1Sn1,
        BNP.D1, BNP.D1Sn1, error.lagged))
USAdata < − ts(USAdata, start= c(1954,3), end= c(1987,4), freq= 4)
```

**R код 5.5: Модел са корекцијом равнотежне грешке**

```
ecm.reg < − lm(RB.D1 ∼ RB.D1Sn1 + RD.D1Sn1 + BNP.D1Sn1
        -1 + error.lagged, data = USAdata)

summary(ecm.reg)
```

**Call: lm(formula = RB.D1 ~ error.lagged + RB.D1Sn1 + RD.D1Sn1 + BNP.D1Sn1 - 1, data = USAdata)**

Residuals:

| Min | 1Q | Median | 3Q | Max |
|---|---|---|---|---|
| -0.015663 | -0.001705 | 0.000164 | 0.001500 | 0.012141 |

Coefficients:

| | Estimate | Std. Error | t value | Pr(> \|t\|) |
|---|---|---|---|---|
| error.lagged | -0.13827 | 0.04118 | -3.358 | 0.00103 ** |
| RB.D1Sn1 | 0.22054 | 0.10995 | 2.006 | 0.04695 * |
| RD.D1Sn1 | -0.05100 | 0.05752 | -0.887 | 0.37687 |
| BNP.D1Sn1 | 0.04902 | 0.02881 | 1.701 | 0.09130 . |

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.003979 on 130 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.1461, Adjusted R-squared: 0.1198
F-statistic: 5.561 on 4 and 130 DF, p-value: 0.000365

Оцењени модел са корекцијом равнотежне грешке има следећи облик:

$$\Delta \hat{RB}_t = -0.1383 \cdot (RB_{t-1} + 0.2770 - 0.5622 \cdot RD_{t-1} - 0.0398 \cdot BNP_{t-1}) + 0.2205 \cdot \Delta RB_{t-1} - 0.0510 \cdot \Delta RD_{t-1} + 0.0490 \cdot \Delta BNP_{t-1}.$$

Приметимо да је оцењена вредност коефицијента уз коинтеграциони резидуал негативна, што је у складу са теоријиским претпоставкама модела. Такође, p-вредности одговарајућег t-теста којим се тестира значајност коефицијента је мала, што значи да је променљива статистички значајна.

Коинтегрисаност анализираних серија тестираћемо још једним тестом - Јохансеновим тестом коинтеграције. За то ћемо користити R-ову функцију *ca.jo()* која се налази у пакету *urca*.

Број коинтеграционих фактора одређујемо на следећи начин:

**R код 5.6: Модел са корекцијом равнотежне грешке**

```
cointest < − ca.jo(cointdata, type = "trace", ecdet = "const")
summary(cointest)
```

Претпотавили смо да нема ограничења за детерминистички тренд у коинтеграционим релацијама. Ако користимо Јохансенову статистику трага, добијамо следеће:

| | Тест статистика | 10% | 5% | 1% |
|---|---|---|---|---|
| r ≤ 2 | 7.64 | 7.52 | 9.24 | 12.97 |
| r ≤ 1 | 26.87 | 17.85 | 19.96 | 24.60 |
| r = 0 | 92.79 | 32.00 | 34.91 | 41.07 |

Видимо да су вредности тест статистике веће од критичних вредности за ниво значајности теста од 5%, при важењу нулте хипотезе $r = 0$, па ту хипотезу одбацујемо. Исти је закључак и за r $\leq 1$, док за r $\leq 2$ хипотезу прихватамо, па закључујемо да је број коинтеграционих вектора два.

Да бисмо добили вектор коинтеграције у Јохансеновој репрезентацији, користимо функцију *cajorls()*, при чему за број коинтеграционих фактора узимамо $r = 2$.

**R код 5.7: Модел са корекцијом равнотежне грешке**

```
vecm < − cajorls(cointest, r = 2)
vecm$beta
```

Добијамо следеће резултате:

| | ect1 | ect2 |
|---|---|---|
| BNPts.l2 | 1 | 0 |
| RDts.l2 | 0 | 1 |
| RBts.l2 | -14.7877 | -0.9068 |
| constant | -4.1326 | -0.0042 |

Добијене су следеће коинтеграционе једнацине:

$$ect1 = GND_{t-2} + 14.78877 \cdot RB_{t-2} + 4.1326$$

$$ect2 = RD_{t-2} + 0.9068 \cdot RB_{t-2} + 0.0042.$$

# Поглавље 6

# Закључак

Како се полазни корак у анализи међузависноти макроекономских временских серија састоји у испитивању њихове стационарности, у овом раду детаљно су описани неки од најчешће коришћених тестова јединичног корена. Затим су објашњени појам коинтеграције и модел са корекцијом равнотежне грешке. Такође, разматран је и ауторегресиони VAR модел и анализа коинтегрисаних серија у у оквиру овог модела. На крају рада, на примеру стварних временских серија приказан је поступак тестирања коинтегрисаности и моделирање коинтегрисаних серија у програмском пакету R.

У раду је анализирана дугорочна и краткорочна веза између бруто националног производа Сједињених Америчких Држава, дисконтне каматне стопе за краткорочне хартије од вредности и приноса на дугорочне хартије од вредности у период од 1954. до 1987. године. Филипс-Пероновим и проширеним Дики – Фулеровим тестом утврђено је да све три серије поседују тачно један јединични корен. Након тога, тестирано је постојање коинтеграције тако што је најпре методом обичних најмањих квадрата оцењена дугороча веза између посматраних серија, а затим тестирана стационарност резидуала оцењених модела. Након што је утврђено да су резидуали све три линеарне везе стационарни, оцењени су параметри модела са корекцијом равнотежне грешке. Резултати су показали да постоји дугорочно слагање, односно коинтеграција кретања добити обвезнице, дисконтне каматне стопе и BNP-а. Такво слагање је позитивно, што је у складу са макроекономским претпоставкама, односно да раст BNP-а и каматне стопе утиче на повећање добити обвезнице. Међутим утврђено је да краткорочна веза између добити обвезнице и дисконтне каматне стопе није статистички значајна.

Класична регресиона анализа се може применити уколико су дате временске серије стационарне, у супротном ако регресијом желимо да моделирамо нестационарне серије суочићемо се са проблемом који је познат под називом "лажна"корелација и "бесмислена"регресија. Концепт коинтеграције омогућава аналитичарима да тестирају дугорочну везу између промењљивих на основу стварних вредности нестационарних временских серија. Зато он представља основу савременог макроекономског моделирања.

# Литература

[1] Bernhard, P. (2008), Analysis of Integrated and Cointegrated Time Series with R, Springer Science+Business Media, LLC, 233 Spring Street, New York, NY 10013, USA

[2] Dickey, D.A and W.A. Fuller (1981), Likelihood Ratio Statistics for Autoregressive Time Series with Unit Root, Econometrica 49, 1022-1057

[3] Engle, R. F, Granger, C.W.J (1987), Co-integration and error correction: Representation, estimation, and testing
Econometrica, vol.55(2), 251-276

[4] Johansen S. (2006), Likelihood Based Inference on Cointegration in the Vector Autoregressive Model, Oxford University Press, Oxford

[5] Ковачић Ј. З. (1995), Анализа временских серија, Економски факултет, Београд

[6] Lutkepohl, H. (2005), New Introduction to Multiple Time Series Analysis, Springer-Verlag, Berlin

[7] MacKinnon, J. G. (1991), Critical values for cointegration tests, Department of Economics, Queen's University, Canada

[8] Младеновић З., Нојковић, А. (2012), Примењена анализа временских серија, Центар за издавачку делатност Економског факултета у Београду

[9] *U.S. macroeconomic data.* Преузето 1. септембра, 2018, http://www.jmulti.de/

# Биографија

Јелена Рогић је рођена 25. фебруара 1992. године у Ужицу. Основну школу "Стари град" завршила је 2007. године. Исте године уписала је гимназију "Ужичка гимназија"и завршила је 2011. године. Школске 2011/12 године уписала је Математички факултет у Београду, смер Статистика, актуарска и финансијска математика на ком је дипломирала 2015. Од школске 2015/16 године студент је мастер студија, смер Статистика, актуарска и финансијска математика. Након завршене прве године мастер студија почела је да ради у банци као аналитичар података.