ПРОБЛЕМИ

ИЗ

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНОГ И ИНТЕГРАЛНОГ РАЧУНА

НАПИСАО

МИЈАЛКО В. ЋИРИЋ

ПРОФЕСОР РАЦИОНАЛНЕ МЕХАНИКЕ НА ВЕЛИКОЈ ШКОЛИ

СВЕСКА ДРУГА

БЕОГРАД

ШТАМПАНО У КРАЉЕВСКО-СРПСКОЈ ДРЖАВНОЈ ШТАМПАРИЈИ

1891

ПРЕДГОВОР

Иста досадања жеља: да се нашим младим математичарима на Великој Школи олакша проучавање математичких наука, крепила ме је при изради ове друге свеске проблема. Та иста жеља крепиће ме вазда и у даљем моме раду.

При изради ове друге свеске, поред цитираних дела у предговору ка првој свесци, служио сам се још и делом: *Grundriss der Differential und Integral Rechnung, I und II Theil; von M. Stegemann, 1880*, које ће ми и даље корисно послужити. У последњи XII одељак ставио сам проблеме који се односе на разне делове диференцијалног рачуна; већи број тих проблема примена је теорије maxima и minima.

Да напоменем само да је Dr. Oscar Schlömilch, у првој свесци своје збирке стр. 233—235, у кратко изложио теорију и примену *реципрочних maxima и minima.*

Што је и ова друга свеска проблема тако брзо угледала света највећа благодарност с моје стране припада заступнику управника државне штампарије г. Б. Ђ. Јовановићу.

2 Фебруара 1890 год.
Београд

МИЈАЛКО В. ЋИРИЋ
ПРОФЕСОР РАЦИОНАЛНЕ МЕХАНИКЕ
НА ВЕЛИКОЈ ШКОЛИ

Мој омиљени професор на Париском универзитету, свима математичарима добро познати, Господин Хермит почаствовао ме је, о новој години, овим одговором: *En vous remerciant de vos souhaits de bonne année et vous offrant mes voeux pour votre bonheur, je vous prie Monsieur de recevoir, comme souvenir des leçons de la Sorbonne, un exemplaire de la nouvelle édition de mon cours qui vous sera envoyé par l'éditeur. Je saisis en même temps l'occasion de vous faire mon compliment sur votre ouvrage, bien que les calculs m'aient seuls permis d'en juger. Toutes les questions sont judicieusement choisies et traitées avec élégance; à la page 293, je vous indiquerai pour joindre aux autres exemples la relation suivante:*

$$\frac{D_x^n (x^2 - 1)^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot n} = \Sigma n_p^2 (x + 1)^{n-p} (x - 1)^p$$

où $p = 0, 1, 2, \cdot \cdot \cdot n$ *et* $n_p = \dfrac{n(n-1) \cdot \cdot \cdot (n-p+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot p}$.

Charles Hermite

Membre de l'Jnstitut.

Надежда Ђ...

VII

Развијање функција у редове

1 Проблем

Развити у редове функције

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \text{ и } \sqrt{1-x}.$$

Претпостављајући да се вредност x-а налази између — 1 и + 1, знамо да је

$$(1)\quad (1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}x^n + \cdots,$$

па развили ми функцију $(1+x)^m$, по биномном или Mac-Laurin-овом обрасцу.

Применимо горњи образац (1) на задате функције $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ и $\sqrt{1-x}$, које можемо написати овако $(1-x)^{\mp\frac{1}{2}}$. Ако у једначини под (1) сменимо x са — x а m са $-\frac{1}{2}$ за прву функцију, а за другу m са $+\frac{1}{2}$, претпоставив да апсолутна вредност x-а не досеже вредност јединице, видећемо да ће чиниоци

$$\frac{m}{1}, \quad \frac{m-1}{2}, \ldots, \quad \frac{m-n+1}{n},$$

бити у првом случају ови

$$-\frac{1}{2}, \quad -\frac{3}{4}, \ldots, \quad -\frac{2n-1}{2n};$$

а, у другом

$$\frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{4}, \ldots, \quad -\frac{2n-3}{2n}.$$

Сви чланови, почев од другог, у једном реду биће једног и истог знака. Дакле, дате функције развијене у редове биће представљене на овај начин, давши резултатима најсиметричнији облик, (за $x^2 < 1$)

$$(2) \quad \frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}x^n + \cdots,$$

и

$$(3) \quad \sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}\frac{x}{1} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^3}{3} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{x^5}{5} - \cdots$$

$$\cdots - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}\frac{x^n}{2n-1} - \cdots$$

Остављамо читаоцу да се увери, да бисмо исте редове добили кад бисмо дате функције развили по Mac-Laurin-овом обрасцу.

До ових редова, можемо доћи и на други начи. Према једначини под (1) имамо

$$\frac{1}{(1+x)^m} = 1 - \frac{m}{1}x + \frac{m(m+1)}{1\cdot 2}x^2 - \cdots$$

$$\cdots + (-1)^n \frac{m(m+1)\cdots(m+n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}x^n + \cdots.$$

Сменив $+x$ са $-x$ добиђемо

$$(4)\qquad \frac{1}{(1-x)^m} = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m+1)}{1\cdot 2}x^2 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{m(m+1)\cdots(m+n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}x^n + \cdots.$$

Стављајући m равно целим бројевима 1, 2, 3, $\cdots$, добиђемо

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots,$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots,$$

$$\frac{1}{(1-x)^3} = 1 + 3x + 6x^2 + \cdots + \frac{(n+1)(n+2)}{1\cdot 2}x^n + \cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Ставив у једначину под (4) $m = \frac{1}{2}$, добиђемо образац под (2).

Редови под (2) и (3) дају нам могућности, да можемо развити у ред $\cos x$ и $\operatorname{tang} x$ по степенима од $\sin x$. Тако је

$$(5)\qquad \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 x - \frac{1}{8}\sin^4 x$$

$$- \frac{1}{16}\sin^6 x - \cdots,$$

$$(6)\quad \operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \sin x + \frac{1}{2}\sin^3 x$$

$$+ \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\sin^5 x + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\sin^7 x + \cdots.$$

Примедба. Да бисмо добили ред m-тог степена неког бинома $a + b$, треба дати изразу $(a + b)^m$ један или други од двају облика

$$a^m\left(1 + \frac{b}{a}\right)^m, \quad b^m\left(1 + \frac{a}{b}\right)^m$$

према томе да ли је апсолутна вредност количине a већа или мања од апсолутне вредности количине b.

2 Проблем

Дата су два бесконачна реда збирљива

$$(1)\quad u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots,$$

$$(2)\quad v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots;$$

доказати да је ред

$$(3)\quad u_0v_0 + (u_0v_1 + u_1v_0) + (u_0v_2 + u_1v_1 + u_2v_0) + \cdots$$
$$\cdots + (u_0v_n + u_1v_{n-1} + \cdots + u_nv_0) + \cdots,$$

збирљив и раван производу прва два реда.

Ставимо, краткоће ради,

$$\operatorname{mod} u_0 = U_0,\ \operatorname{mod} u_1 = U_1, \cdots, \operatorname{mod} u_n = U_n, \cdots,$$

$$\operatorname{mod} v_0 = V_0,\ \operatorname{mod} v_1 = V_1, \cdots, \operatorname{mod} v_n = V_n, \cdots;$$

исто тако, ставимо

$$u_0v_0 = w_0,$$

$$u_0v_1 + u_1v_0 = w_1,$$

$$u_0v_2 + u_1v_1 + u_2v_0 = w_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_0v_k + u_1v_{k-1} + \cdot\ \cdot + u_kv_0 = w_k,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Напоменимо да се у многим делима употребљава означавање $|x|$, да би се представила апсолутна вредност количине x ако је x стварно, модул од x ако је уображено.

Cauchy *(Cours d'Analyse algébrique)* и Abel *(Oeuvres complètes, t. I, VII)*, први су поставили правило о множењу двају бесконачних редова који су збирљиви. По томе је правилу

$$(u_0 + u_1 + u_2 + \cdot\cdot\cdot + u_n + \cdot\cdot\cdot)(v_0 + v_1 + v_2 + \cdot\cdot\cdot + v_n + \cdot\cdot\cdot)$$

$$= w_0 + w_1 + w_2 + \cdot\cdot\cdot + w_n + \cdot\cdot\cdot,$$

ако су редови

$$U_0 + U_1 + U_2 + \cdot\cdot\cdot + U_n + \cdot\cdot\cdot,$$

$$V_0 + V_1 + V_2 + \cdot\cdot\cdot + V_n + \cdot\cdot\cdot,$$

збирљиви.

Ово правило вреди и онда ако је само један од редова под (1) и (2), нпр. први, такав да је ред, који постаје из аналитичких модула његових чланова, збирљив.

Нека S и S' представљају суме двају датих збирљивих редова

$$S = u_0 + u_1 + \cdot\cdot\cdot + u_n + \cdot\cdot\cdot,$$

$$S' = v_0 + v_1 + \cdot\cdot\cdot + v_n + \cdot\cdot\cdot,$$

од којих је први апсолутно збирљив (тј. да је ред, који постаје из модула његових чланова, збирљив). Нека је S'' сума трећег реда

$$S'' = w_0 + w_1 + \cdot \cdot \cdot + w_n + \cdot \cdot \cdot ,$$

чији је општи члан $w_n = (u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdot \cdot \cdot + u_n v_0)$.

Да бисмо доказали горње правило, треба само да докажемо да разлике

$$\Delta_{2n} = w_0 + w_1 + \cdot \cdot \cdot + w_{2n} - (u_0 + u_1 + \cdot \cdot \cdot + u_n)(v_0 + v_1 + \cdot \cdot \cdot + v_n),$$

$$\Delta_{2n+1} = w_0 + w_1 + \cdot \cdot \cdot + w_{2n+1} - (u_0 + u_1 + \cdot \cdot \cdot + u_{n+1})(v_0 + v_1 + \cdot \cdot \cdot + v_n),$$

теже нули кад n бесконачно расте.

Нека је ε једна бесконачно мала количина, која тежи нули при бесконачном рашћењу n-a.

Уредив разлике по сказаљкама n-a, наћи ћемо

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} \Delta_{2n} &= u_0(v_{n+1} + v_{n+2} + \ldots + v_{2n}) + u_1(v_{n+1} + v_{n+2} + \ldots + v_{2n-1}) + \ldots + u_{n-1} v_{n+1} \\ &+ u_{n+1}(v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1}) + u_{n+2}(v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-2}) + \ldots + u_{2n} v_0, \\ \Delta_{2n+1} &= u_0(v_{n+1} + v_{n+2} + \ldots + v_{2n+1}) + u_1(v_{n+1} + v_{n+2} + \ldots + v_{2n}) + \ldots + u_n v_{n+1} \\ &+ u_{n+2}(v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1}) + u_{n+3}(v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-2}) + \ldots + u_{2n+1} v_0. \end{aligned} \right.$$

Претпоставив ред S апсолутно збирљив, то је ред

$$U_0 + U_1 + \cdot \cdot \cdot + U_n + \cdot \cdot \cdot$$

збирљив, и ми можемо изабрати један сталан број A такав да је

$$U_0 + U_1 + \cdot \cdot \cdot + U_n < A.$$

Пошто је ред S' збирљив, то ће апсолутна вредност суме његових n + 1 првих чланова бити мања од произвољно изабратог броја B, тј.

$$\operatorname{mod}(v_0 + v_1 + \cdot \cdot \cdot + v_n) < B.$$

Осим тога, ми можемо узети n довољно велико тако да је

$$U_{n+1} + U_{n+2} + \cdot \cdot \cdot + U_{n+m} < \frac{\varepsilon}{A + B};$$

и

$$\mathrm{mod}\,(v_{n+1} + v_{n+2} + \cdot \cdot \cdot + v_{n+m}) < \frac{\varepsilon}{A + B}.$$

Ако сада у изразу за Δ_{2n} под (4), сваку заграду у првој линији заменимо са $\frac{\varepsilon}{A + B}$, а $u_0, u_1, \cdot \cdot \cdot, u_{n-1}$ са U_0, $U_1, \cdot \cdot \cdot, U_{n-1}$, и аналогу замену учинимо у другој линији исте Δ_{2n} разлике, добићемо

$$\mathrm{mod}\,\Delta_{2n} \leqq U_0 \frac{\varepsilon}{A + B} + U_1 \frac{\varepsilon}{A + B} + \cdot \cdot \cdot + U_{n-1} \frac{\varepsilon}{A + B}$$

$$+ U_{n+1} B + U_{n+2} B + \cdot \cdot \cdot + U_{2n} B;$$

или

$$\mathrm{mod}\,\Delta_{2n} \leqq \frac{\varepsilon}{A + B} (U_0 + U_1 + \cdot \cdot \cdot + U_{n-1})$$

$$+ B(U_{n+1} + U_{n+2} + \cdot \cdot \cdot + U_{2n}),$$

или

$$\mathrm{mod}\,\Delta_{2n} \leqq \frac{\varepsilon}{A + B} A$$

$$+ B \frac{\varepsilon}{A + B}$$

или, на послетку,

$$\mathrm{mod}\,\Delta_{2n} \leqq \varepsilon.$$

На исти начин доказали бисмо $\mathrm{mod}\,\Delta_{2n+1} \leqq \varepsilon$, тј. да и разлика Δ_{2n+1} тежи нули при бесконачном рашћењу n-а.

Доказав да те разлике под (4) теже нули, доказали смо у исто време да је производ двају збирљивих редова раван једном реду такође збирљивом. *(Crelle, journal für die reine* *und angewandte Mathematik, B. 79, S. 182, 1875. Ueber die Multiplicationsregel für zwei unendliche Reihen, von Herrn F. Mertens in Krakau)*; види такође *E. Picard, Cours d'Analyse lith., p. 14, 1886—87.*

Према овоме можемо поставити правило:

Дата су два збирљива реда

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots,$$

$$S' = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots;$$

множењем двају задатих редова образујмо ред S''. *Ако је ред* S'' *збирљив, он ће извесно представљати производ* SS'.

И заиста, посматрајмо два реда

$$S_1 = u_0 + u_1 x + \cdots + u_n x^n + \cdots,$$

$$S_2 = v_0 + v_1 x + \cdots + v_n x^n + \cdots,$$

претпоставив збирљиви за $x = 1$. Они ће, за $|x| < 1$, бити апсолутно збирљиви. Ми ћемо, у том размаку (интервалу), применити пређашње правило на редове S_1 и S_2 и образоваћемо ред S_3, који ће представљати њихов производ,

$$S_3 = u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 v_0) x + \cdots + (u_0 v_n + \cdots + u_n v_0) x^n + \cdots.$$

Ред S_3 представља производ $S_1 S_2$ за сваку вредност x-а мању од јединице. Претпоставимо да је ред S_3 збирљив за $x = 1$; дакле, за $x < 1$, имамо

$$S_1 S_2 = S_3.$$

Ако се x приближава јединици али остаје мање од један, то ће се S_1 разликовати од S за ε (бесконачно мало), тј. $S_1 = S - \varepsilon$. Тако исто $S_2 = S' - \varepsilon'$, $S_3 = S'' - \varepsilon''$, где ε, ε', ε'' постају тим мање, што се x све више и више јединици приближава. Дакле

$$(S - \varepsilon)(S' - \varepsilon') = S'' - \varepsilon'',$$

откуда је стална разлика

$$SS' - S'' = \varepsilon' S + \varepsilon S' - \varepsilon'' - \varepsilon\varepsilon'$$

представљена сумом од четири променљива члана, који могу бити толико мали колико хоћемо. Дакле је та стална разлика $SS' - S''$ равна нули и ми имамо

$$S'' = SS'.$$

3 Проблем

Наћи суму увек конвергентног реда

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$$

Означимо тражену суму са $\Phi(x)$, то ћемо добити

$$\Phi'(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots,$$

дакле је

$$\Phi'(x) = \Phi(x),$$

која се једначина може написати

$$\frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} = 1,$$

или

$$\frac{d \cdot \mathrm{Log}[\Phi(x)]}{dx} = \frac{d(x)}{dx}.$$

Отуда следује

$$\mathrm{Log}[\Phi(x)] = x + c,$$

или

$$\Phi(x) = e^{c+x}.$$

тј.

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots = e^{c+x} = e^c e^x.$$

За $x = o$, добија се $e^c = 1$, па је према томе

$$(1) \quad e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Примедба. Ако бисмо хтели ред са остатком, онда ћемо радити овако: ставимо

$$e^x = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdot \cdot \cdot + a_n x^n + R,$$

па ћемо, диференцијалећи последњу једначину, добити

$$e^x = 1a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdot \cdot \cdot + na_n x^{n-1} + \frac{dR}{dx};$$

ова једначина постаје идентична са пређашњом, ако је прво

$$1a_1 = 1, \quad 2a_2 = a_1, \quad 3a_3 = a_2, \cdot \cdot \cdot, \quad na_n = a_{n-1}$$

тј ако је

$$a_1 = \frac{1}{1}, \; a_2 = \frac{1}{1 \cdot 2}, \; a_3 = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \cdot \cdot \cdot, \; a_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot n},$$

и ако је још поред тога

$$(2) \quad \frac{dR}{dx} = a_n x^n + R.$$

Да бисмо упростили последњи услов, ставимо

$$R = e^x \psi(x);$$

једначина под (2) постаје тада

$$\psi'(x) = a_n x^n e^{-x} = \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot n} e^{-x},$$

према томе је, због $\psi(x) = \psi(o) + x \psi'(\theta x)$,

$$\psi(x) = \frac{\theta^n x^{n+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot n} e^{-\theta x};$$

отуда се добија R, а за тим је

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \cdot \cdot \cdot + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot n}$$

$$+ \frac{\theta^n x^{n+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot n} e^{(1-\theta)x}.$$

При бесконачном рашћењу n-а, за свако коначно x, имамо

$$\lim \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot n} = 0,$$

тада остатак R тежи ка нули, и тако се долази опет на познати ред.

Према овоме узмимо, за одредбу функције e^x, образац

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \cdot \cdot \cdot + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot n} + \cdot \cdot \cdot,$$

који вреди за релне вредности x-а, то ћемо имати

$$e^y = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1 \cdot 2} + \cdot \cdot \cdot + \frac{y^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot n} + \cdot \cdot \cdot;$$

отуда ћемо извести множењем

$$e^x e^y = 1 + \frac{x+y}{1} + \cdot \cdot \cdot$$

$$\cdot \cdot \cdot + \left[\frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\frac{y}{1!} + \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\frac{y^2}{2!} + \cdot \cdot \cdot\right] + \cdot \cdot \cdot,$$

или

$$e^x e^y = 1 + \frac{x+y}{1} + \cdot \cdot \cdot$$

$$\cdot \cdot \cdot + \frac{1}{n!}\left[x^n + \frac{n}{1}x^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^{n-2}y^2 + \cdot \cdot \cdot\right] + \cdot \cdot \cdot,$$

или још

$$e^x e^y = 1 + \frac{x+y}{1} + \cdot \cdot + \frac{(x+y)^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot n} + \cdot \cdot \cdot ,$$

или, на послетку,

$$e^x e^y = e^{x+y}.$$

Функција e^x, одређена као што рекосмо, прво је непрекидна (континуарна) према Абеловој теореми; друго она је таква да је

$$(3) \quad e^x e^y = e^{x+y},$$

и у опште има сва својства релне изложилачке (експоненцијалне) функције која се отуда може извести.

4 Проблем

Развити у редове уређене по степенима од r, функције

$$e^{r\cos\theta}\cos(r\sin\theta) \quad и \quad e^{r\cos\theta}\sin(r\sin\theta).$$

Ми ћемо овде применити оно што је казано у предпрошлом проблему.

Први чинитељ задатих функција, јесте

$$(1) \quad e^{r\cos\theta} = 1 + \frac{\cos\theta}{1} r + \frac{\cos^2\theta}{1 \cdot 2} r^2 + \cdot \cdot \cdot$$

$$\cdot \cdot \cdot + \frac{\cos^n\theta}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot n} r^n + \cdot \cdot \cdot ,$$

ред збирљив, па ма какво r било.

Тако исто имамо

$$(2) \quad \cos(r\sin\theta) = 1 - \frac{\sin^2\theta}{1 \cdot 2} r^2 + \frac{\sin^4\theta}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} r^4 - \cdot \cdot \cdot ,$$

$$(3) \quad \sin(r\sin\theta) = \frac{\sin\theta}{1} r - \frac{\sin^3\theta}{1 \quad 2 \quad 3} r^3$$

$$+ \frac{\sin^5\theta}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} r^5 - \cdot\cdot\cdot,$$

редове такође збирљиве за ма какво r.

Редове под (2) и (3) могли смо добити и помоћу Euler-ових образаца:

$$\cos(r\sin\theta) = \frac{e^{ir\sin\theta} + e^{-ir\sin\theta}}{2},$$

$$\sin(r\sin\theta) = \frac{e^{ir\sin\theta} - e^{-ir\sin\theta}}{2i}.$$

Множећи редове под (1) и (2), по Абеловој теореми, добићемо

$$e^{r\cos\theta}\cos(r\sin\theta) = \Big(1 + \frac{\cos\theta}{1} r + \frac{\cos^2\theta}{1\cdot 2} r^2 + \cdot\cdot\cdot$$

$$\cdot\cdot\cdot + \frac{\cos^n\theta}{n!} + \cdot\cdot\cdot\Big)\Big(1 - \frac{\sin^2\theta}{1\cdot 2} r^2 + \frac{\sin^4\theta}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} r^4 - \cdot\cdot\cdot\Big)$$

$$= 1 + \Big(-\frac{\sin^2\theta}{1\cdot 2} r^2 + \frac{\cos\theta}{1} r\Big) + \Big(\frac{\sin^4\theta}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} r^4 - \frac{\cos\theta\sin^2\theta}{1\cdot 2} r^3$$

$$+ \frac{\cos^2\theta}{1\cdot 2} r^2\Big) + \Big(-\frac{\sin^6\theta}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} r^6 + \frac{\cos\theta\sin^4\theta}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} r^5$$

$$- \frac{\cos^2\theta\sin^2\theta}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2} r^4 + \frac{\cos^3\theta}{1\cdot 2\cdot 3} r^3\Big) + \cdot\cdot\cdot,$$

или

$$e^{r\cos\theta}\cos(r\sin\theta) = 1 + \frac{\cos\theta}{1} r + \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{1\cdot 2} r^2$$

$$+ \frac{\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta}{1\cdot 2\cdot 3} r^3 + \cdot\cdot\cdot,$$

или, на послетку,

$$\text{(A)}\quad e^{r\cos\theta}\cos(r\sin\theta)=1+\frac{\cos\theta}{1}r+\frac{\cos 2\theta}{1\cdot 2}r^2$$

$$+\frac{\cos 3\theta}{1\cdot 2\cdot 3}r^3+\cdots+\frac{\cos n\theta}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}r^n+\cdots$$

На исти начин, множећи редове под (1) и (3), добићемо

$$e^{r\cos\theta}\sin(r\sin\theta)$$

$$=\left(1+\frac{\cos\theta}{1}r+\frac{\cos^2\theta}{1\cdot 2}r^2+\cdots\right)\left(\frac{\sin\theta}{1}r-\frac{\sin^3\theta}{1\cdot2\cdot3}r^3+\cdots\right)$$

$$=\frac{\sin\theta}{1}r+\left(-\frac{\sin^3\theta}{1\cdot2\cdot3}r^3+\frac{\cos\theta}{1}\frac{\sin\theta}{1}r^2\right)+\left(\frac{\sin^5\theta}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}r^5\right.$$

$$\left.-\frac{\cos\theta\sin^3\theta}{1\cdot2\cdot3}r^4+\frac{\cos^2\theta\sin\theta}{1\cdot2}r^3\right)+\cdots$$

$$=\frac{\sin\theta}{1}r+\frac{2\cos\theta\sin\theta}{1\cdot 2}r^2+\frac{3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta}{1\cdot2\cdot3}r^3+\cdots,$$

или, на послетку,

$$\text{(B)}\quad e^{r\cos\theta}\sin(r\sin\theta)=\frac{\sin\theta}{1}r+\frac{\sin 2\theta}{1\cdot 2}r^2$$

$$+\frac{\sin 3\theta}{1\cdot2\cdot3}r^3+\cdots+\frac{\sin n\theta}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}r^n+\cdots$$

Редове под (A) и (B) можемо добити на много краћи и елегантнији начин. Помножимо другу од задатих функција са i, па их саберимо, добићемо

$$e^{r\cos\theta}\cos(r\sin\theta)+i\,e^{r\cos\theta}\sin(r\sin\theta)$$

$$=e^{r\cos\theta}[\cos(r\sin\theta)+i\sin(r\sin\theta)]$$

$$= e^{r\cos\theta} e^{i r \sin\theta} = e^{r(\cos\theta + i\sin\theta)}.$$

Сада развимо у ред последњу функцију

$$e^{r(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

$$= 1 + \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{1} r + \frac{\cos 2\theta + i\sin 2\theta}{1\cdot 2} r^2 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{\cos n\theta + i\sin n\theta}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} r^n + \cdots,$$

или

$$e^{r\cos\theta}\cos(r\sin\theta) + i e^{r\cos\theta}\sin(r\sin\theta)$$

$$= 1 + \frac{\cos\theta}{1} r + \frac{\cos 2\theta}{1\cdot 2} r^2 + \cdots + \frac{\cos n\theta}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} r^n + \cdots$$

$$+ i\left(\frac{\sin\theta}{1} r + \frac{\sin 2\theta}{1\cdot 2} r^2 + \cdots + \frac{\sin n\theta}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} r^n + \cdots\right).$$

Изједначив стварне и уображене делове у овој једначини добићемо редове под (A) и (B).

Редове (A) и (B) можемо добити и на овај начин. Имамо редове (1) и (2); општи члан производа $e^{r\cos\theta}\cos(r\sin\theta)$ биће

$$r^n\left[\frac{\cos^n\theta}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} - \frac{\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta}{(n-2)!\ 2!} + \cdots \pm \frac{\sin^n\theta}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\right]$$

или

$$\frac{r^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\left[\cos^n\theta - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta + \cdots \pm \sin^n\theta\right],$$

или, због Moivre-овог обрасца,

$$\frac{r^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\cos n\theta,$$

а то је општи члан реда под (A).

Тако исто општи члан производа редова (1) и (3) биће

$$r^n\left[\frac{\cos^{n-1}\theta \sin\theta}{(n-1)!} - \frac{\cos^{n-3}\theta \sin^3\theta}{(n-3)!\ 3!} + \cdots\right],$$

или

$$\frac{r^n}{1\cdot2\cdot3\cdots n}\left[\frac{n}{1}\cos^{n-1}\theta \sin\theta - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}\cos^{n-3}\theta \sin^3\theta + \cdots\right],$$

који, због Moivre-овог обрасца, постаје

$$\frac{r^n}{1\cdot2\cdot3\cdots n}\sin n\theta,$$

а то је општи члан реда под (B).

Редови под (A) и (B) дају нам ове четири комбинације

$$\frac{1}{2}[e^{r\cos\theta} + e^{-r\cos\theta}]\cos(r\sin\theta) = 1 + \frac{\cos 2\theta}{1\cdot2}r^2$$

$$+ \frac{\cos 4\theta}{1\cdot2\cdot3\cdot4}r^4 + \frac{\cos 6\theta}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}r^6 + \cdots,$$

$$\frac{1}{2}[e^{r\cos\theta} - e^{-r\cos\theta}]\cos(r\sin\theta) = \frac{\cos\theta}{1}r + \frac{\cos 3\theta}{1\cdot2\cdot3}r^3$$

$$+ \frac{\cos 5\theta}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}r^5 + \cdots,$$

$$\frac{1}{2}[e^{r\cos\theta} + e^{-r\cos\theta}]\sin(r\sin\theta) = \frac{\sin\theta}{1}r + \frac{\sin 3\theta}{1\cdot2\cdot3}r^3$$

$$+ \frac{\sin 5\theta}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}r^5 + \cdots,$$

$$\frac{1}{2}[e^{r\cos\theta} - e^{-r\cos\theta}]\sin(r\sin\theta) = \frac{\sin 2\theta}{1\cdot2}r^2 + \frac{\sin 4\theta}{1\cdot2\cdot3\cdot4}r^4$$

$$+ \frac{\sin 6\theta}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}r^6 + \cdots.$$

За $\theta = \frac{1}{4}\pi$ и $\theta = \frac{1}{3}\pi$, добијамо из ових разне специјалне обрасце.

Остављајући читаоцу да се увери да бисмо исте редове добили по Mac-Laurin-овом обрасцу, ми ћемо прећи на једну важну примедбу.

Примедба. Треба сумирати ред

$$1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots,$$

у случају кад је $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Горњи ред збирљив је за свако r и θ и разлаже се у

$$U = 1 + \frac{\cos\theta}{1} r + \frac{\cos 2\theta}{1 \cdot 2} r^2 + \frac{\cos 3\theta}{1 \cdot 2 \cdot 3} r^3 + \cdots,$$

$$V = \frac{\sin\theta}{1} r + \frac{\sin 2\theta}{1 \cdot 2} r^2 + \frac{\sin 3\theta}{1 \cdot 2 \cdot 3} r^3 + \cdots.$$

Приметимо да вреде ове једначине

$$\frac{dU}{dr} = U\cos\theta - V\sin\theta, \quad \frac{dV}{dr} = U\sin\theta + V\cos\theta,$$

из којих се добијају ове

$$U\frac{dU}{dr} + V\frac{dV}{dr} = (U^2 + V^2)\cos\theta,$$

$$U\frac{dV}{dr} - V\frac{dU}{dr} = (U^2 + V^2)\sin\theta.$$

Ове пак могу бити простије представљене, ако се стави

$$U + iV = P[\cos\Omega + i\sin\Omega],$$

према томе је

$$U^2 + V^2 = P^2, \ \operatorname{arctang}\frac{V}{U} + k\pi = \Omega.$$

То је тада

$$U\frac{dU}{dr} + V\frac{dV}{dr} = P\frac{dP}{dr},$$

$$U\frac{dV}{dr} - V\frac{dU}{dr} = (U^2 + V^2)\frac{d\Omega}{dr};$$

услед ових означења, горње једначине постају

$$\frac{dP}{dr} = P\cos\theta \quad \text{или} \quad \frac{d\operatorname{Log}P}{dr} = \frac{d(r\cos\theta)}{dr},$$

$$\frac{d\Omega}{dr} = \sin\theta \quad \text{или} \quad \frac{d\Omega}{dr} = \frac{d(r\sin\theta)}{dr}.$$

Отуда се добијају вредности

$$P = e^{r\cos\theta + a}, \quad \Omega = r\sin\theta + b,$$

где су a и b константне количине. Ове се одређују узев специјални случај $r = o$ и као крајни резултат добијамо једначине

$$e^{r\cos\theta}\cos(r\sin\theta) = 1 + \frac{\cos\theta}{1}r + \frac{\cos 2\theta}{1\cdot 2}r^2 + \frac{\cos 3\theta}{1\cdot 2\cdot 3}r^3 + \cdots,$$

$$e^{r\cos\theta}\sin(r\sin\theta) = \frac{\sin\theta}{1}r + \frac{\sin 2\theta}{1\cdot 2}r^2 + \cdots.$$

Умножимо ли другу једначину са i и саберемо ли са првом, то се налази да једначина

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1\cdot 2} + \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots,$$

важи и за сваку комплексну количину z.

5 Проблем

Развити у ред функцију

$$\frac{1 - x\cos\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2}.$$

Задату функцију можемо написати овако

$$\frac{1 - x\cos\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2} = \frac{1 - x\cos\theta}{(x - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta} = \frac{1 - x\cos\theta}{(x - e^{i\theta})(x - e^{-\theta i})}$$

$$= \frac{1 - x\cos\theta}{(1 - xe^{\theta i})(1 - xe^{-\theta i})}.$$

Сада је

$$(1) \quad \frac{1}{1 - xe^{\theta i}} = 1 + xe^{\theta i} + x^2 e^{2\theta i} + \cdots$$

$$\cdots + x^n e^{n\theta i} + \cdots,$$

ред збирљив за $|x| < \operatorname{mod} e^{\theta i} < 1$.

Исто тако

$$(2) \quad \frac{1}{1 - xe^{-\theta i}} = 1 + xe^{-\theta i} + x^2 e^{-2\theta i} + \cdots,$$

$$\cdots + x^n e^{-n\theta i} + \cdots,$$

ред збирљив за $|x| < \operatorname{mod} e^{-\theta i} < 1$.

Производ редова (1) и (2) биће дат једначином

$$\frac{1}{(1 - xe^{\theta i})(1 - xe^{-\theta i})} = 1 + x(e^{\theta i} + e^{-\theta i})$$

$$+ x^2(e^{2\theta i} + 1 + e^{-2\theta i})$$

$$+ x^3(e^{3\theta i} + e^{\theta i} + e^{-\theta i} + e^{-3\theta i}) + \cdot \cdot \cdot$$

$$= 1 + 2x\cos\theta + 2x^2\left(\cos 2\theta + \frac{1}{2}\right) + 2x^3(\cos 3\theta + \cos\theta) + \cdot \cdot \cdot$$

$$\cdot \cdot \cdot + 2x^{2n}\left[\cos 2n\theta + \cos 2(n-1)\theta + \cdot \cdot \cdot + \frac{1}{2}\right]$$

$$+ 2x^{2n+1}[\cos(2n+1)\theta + \cos(2n-1)\theta + \cdot \cdot \cdot + \cos\theta] + \cdot \cdot \cdot$$

Множећи последњу једначину са $1 - x\cos\theta$, добићемо

$$\frac{1 - x\cos\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2} = 1 + 2x\cos\theta + 2x^2\left(\cos 2\theta + \frac{1}{2}\right) + \cdot \cdot \cdot$$

$$\cdot \cdot \cdot + 2x^{2n}\left[\cos 2n\theta + \cos 2(n-1)\theta + \cdot \cdot \cdot + \frac{1}{2}\right] + \cdot \cdot \cdot$$

$$-\left[x\cos\theta + 2x^2\cos^2\theta + 2x^3\left(\cos 2\theta\cos\theta + \frac{1}{2}\cos\theta\right) + \cdot \cdot \cdot\right.$$

$$\left.\cdot \cdot \cdot + 2x^{2n+1}\left(\cos 2n\theta\cos\theta + \cdot \cdot \cdot\right) + \cdot \cdot \cdot\right];$$

или, по свођењу,

$$(3) \quad \frac{1 - x\cos\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2} = 1 + x\cos\theta + x^2\cos 2\theta + x^3\cos 3\theta + \cdot \cdot \cdot$$

$$\cdot \cdot \cdot + x^n\cos n\theta + \cdot \cdot \cdot$$

Ред под (3) можемо добити и на други начин, ако задату функцију напишемо у овом облику

$$\frac{1 - x\cos\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2} = \frac{1}{2}\,\frac{(1 - xe^{\theta i}) + (1 - xe^{-\theta i})}{(1 - xe^{\theta i})(1 - xe^{-\theta i})}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1 - xe^{-\theta i}} + \frac{1}{1 - xe^{\theta i}}\right].$$

Остаје нам да саберемо редове под (1) и (2), знајући да је

$$e^{n\theta i} + e^{-n\theta i} = 2\cos n\theta,$$

и да поделимо са 2 па ћемо добити ред под (3).

Примедба. Ред (3) добићемо и на овај начин: нека U означава суму од n чланова континуарног реда,

$$U = 1 + x\cos\theta + x^2\cos 2\theta + x^3\cos 3\theta + \cdots$$
$$\cdots + x^{n-1}\cos(n-1)\theta.$$

Да бисмо нашли U, помножимо с обе стране са

$$1 - 2x\cos\theta + x^2,$$

и знајући да је на десној страни

$$2\cos k\theta\cos\theta = \cos(k-1)\theta + \cos(k+1)\theta,$$

добијамо

$$(1-2x\cos\theta+x^2)\,U = 1 - x\cos\theta - x^n\cos n\theta + x^{n+1}\cos(n-1)\theta,$$

откуда је U равно

$$\frac{1 - x\cos\theta - x^n\cos n\theta + x^{n+1}\cos(n-1)\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2},$$

$$= 1 + x\cos\theta + x^2\cos 2\theta + \cdots + x^{n-1}\cos(n-1)\theta.$$

При бесконачном рашћењу n — а, добијамо

$$(3)\quad \frac{1-x\cos\theta}{1-2x\cos\theta+x^2} = 1 + x\cos\theta + x^2\cos 2\theta + x^3\cos 3\theta + \cdots$$

$$-1 < x < 1.$$

Последица овога јесте једначина

$$\frac{1-x^2}{1-2x\cos\theta+x^2}=1+2\,(x\cos\theta+x^2\cos 2\theta+x^3\cos 3\theta+\cdots),$$

$$-1<x<+1.$$

На са свим сличан начин, посматрајмо једначину

$$V=x\sin\theta+x^2\sin 2\theta+x^3\sin 3\theta+\cdots+x^{n-1}\sin(n-1)\theta,$$

то се, пре свега, добија

$$(1-2x\cos\theta+x^2)\,V=x\sin\theta-x^n\sin n\theta+x^{n+1}\sin(n-1)\theta.$$

Отуда је

$$\frac{x\sin\theta-x^n\sin n\theta+x^{n+1}\sin(n-1)\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}$$

$$=x\sin\theta+x^2\sin 2\theta+x^3\sin 3\theta+\cdots+x^{n-1}\sin(n-1)\theta.$$

За $n=\infty$ добијамо једначину

$$(4)\quad \frac{x\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}=x\sin\theta+x^2\sin 2\theta+x^3\sin 3\theta+\cdots$$

$$-1<x<+1,$$

коју можемо скратити са x.

Додајмо к овоме неколико примедаба о разломљеној функцији

$$\frac{1}{1-2\alpha z+\beta z^2}.$$

Ставимо краткоће ради

$$a=\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta},\qquad b=\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta},$$

при чему $\alpha^2>\beta$ мора бити, да би a и b биле релне количине. То је $a+b=2\alpha$, $ab=\beta$; отуда

$$\frac{1}{1-2\alpha z+\beta z^2}=\frac{1}{1-(a+b)z+abz^2}$$

$$=\frac{1}{a-b}\left[\frac{a}{1-az}-\frac{b}{1-bz}\right].$$

У случају, када су апсолутне вредности од az и bz прави разломци, може се на десној страни употребити формула

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdot\cdot\cdot,$$

$$-1<x<+1,$$

исто тако за $x=az$, као и за $x=bz$; услед тога добија се резултат облика

$$\frac{1}{1-2\alpha z+\beta z^2}=1+C_1z+C_2z^2+C_3z^3+\cdot\cdot\cdot,$$

а управо је

$$C_n=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}=\frac{(\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta})^{n+1}-(\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta})^{n+1}}{2\sqrt{\alpha^2-\beta}}.$$

При даљем развијању бројитеља може се биномни образац употребити за целе и положне изложитеље, па је

$$C_n=(n+1)_1\alpha^n+(n+1)_3\alpha^{n-2}(\alpha^2-\beta)+(n+1)_5\alpha^{n-4}(\alpha^2-\beta)^2$$

$$+(n+)_7\alpha^{n-6}(\alpha^2-\alpha)^3+\cdot\cdot\cdot,$$

дакле

$$C_1=2\alpha,\ C_2=4\alpha^2-\beta,\ C_3=8\alpha^3-4\alpha\beta,\cdot\cdot\cdot$$

Под условом да је, у исто време,

$$\alpha^2>\beta,\ [(\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta})z]^2<1 \text{ и } [(\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta})z]^2<1,$$

вреди једначина

$$\frac{1}{1-2\alpha z+\beta z^2}=1+2\alpha z+(4\alpha^2-\beta)z^2+(8\alpha^3-4\alpha\beta)z^3+\cdots$$

Претходни закључци губе њихову примену, ако је $\alpha^2<\beta$, јер под тим условом a и b постају уображени. Тада у овом случају β положно и $\sqrt{\beta}>\alpha$ мора бити, то се може ставити

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\beta}}=\cos\theta,\quad z=\frac{x}{\sqrt{\beta}},$$

па је

$$\frac{1}{1-2\alpha z+\beta z^2}=\frac{1}{1-2x\cos\theta+x^2}.$$

Овде се, под условом $x^2<1$, може применити образац под (4), па се добија

$$\frac{1}{1-2\alpha z+\beta z^2}=\frac{1}{\sin\theta}\{\sin\theta+x\sin 2\theta+x^2\sin 3\theta+x^3\sin 4\theta+\cdots\}$$

$$=1+C_1z+C_2z^2+C_3z^3+\cdots.$$

Вредност од C_n дата је једначином

$$C_n=\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}\sqrt{\beta^n},$$

или, по једном познатом обрасцу,

$$C_n=\sqrt{\beta^n}\{(n+1)_1\cos^n\theta-(n+1)_3\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta$$

$$+(n+1)_5\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta-\cdots\};$$

заменом вредности

$$\cos\theta=\frac{\alpha}{\sqrt{\beta}},\quad \sin\theta=\frac{\sqrt{\beta-\alpha^2}}{\sqrt{\beta}},$$

добијамо

$$C_n = (n+1)_1\alpha^n - (n+1)_3\alpha^{n-2}(\beta-\alpha^2) + (n+1)_5\alpha^{n-4}(\beta-\alpha^2)^2$$
$$- (n-1)_7\alpha^{n-6}(\beta-\alpha^2)^3 + \cdot\cdot\cdot\cdot$$

Под условом да је, у исто време,

$$\alpha^2 < \beta < \frac{1}{z^2},$$

важи једначина

$$\frac{1}{1-2\alpha z+\beta z^2} = 1 + 2\alpha z + (4\alpha^2-\beta)z^2 + (8\alpha^3 - 4\alpha\beta)z^3 + \cdot\cdot\cdot$$

Сачиниоци од z, z^2, z^3, итд., овде су исти као и у ранијој једначини, али су услови, да једначина вреди, други.

Кад би на послетку $\beta = \alpha^2$ било, то бисмо, за $az = x$, добили важан образац.

6 Проблем

Доказати једначину

$$\frac{1^m}{1} + \frac{2^m}{1\cdot2} + \frac{3^m}{1\cdot2\cdot3} + \frac{4^m}{1\cdot2\cdot3\cdot4} + \cdot\cdot\cdot = ne,$$

где су m *и* n *цели бројеви.*

Ставимо

$$(1) \quad y_m = \frac{1^m}{1}x + \frac{2^m}{1\cdot2}x^2 + \frac{3^m}{1\cdot2\cdot3}x^3 + \cdot\cdot\cdot,$$

где је x независно променљива количина. Отуда, диференцијалећи, добијамо

$$(2) \quad y'_m = \frac{1^{m+1}}{1} + \frac{2^{m+1}}{1\cdot2}x + \frac{3^{m+1}}{1\cdot2\cdot3}x^2 + \cdot\cdot\cdot;$$

откуда видимо да је

$$(3) \quad y_{m+1} = xy'_m.$$

Из једначина (1) и (2), за m = o, добијамо једначину

$$y_0' = 1 + y_0,$$

која даје вредност за y_0. Тако је

$$y_0' = e^x.$$

Помоћу једначине под (3) добијамо постепено

$$y_1 = xe^x = P_1e^x,$$

$$y_2 = (x + x^2)e^x = P_2e^x,$$

$$y_3 = (x + 3x^2 + x^3)e^x = P_3e^x,$$

$$y_4 = (x + 7x^2 + 6x^3 + x^4)e^x = P_4e^x,$$

$$y_5 = (1 + 15x^2 + 25x^3 + 10x^4 + x^5)e^x = P_5e^x,$$

. . . .

где P_1, P_2, P_3, · · ·, представљају целе полиноме. Значајно би било да се нађе општа форма полинома.

Довољно је сада да се докаже да, ако је

$$y_{m-1} = P_{m-1}e^x,$$

онда имамо такође

$$(4) \quad y_m = P_me^x.$$

Но очевидно, према једначини под (3), имамо

$$P_m = x(P_{m-1} + P'_{m-1}).$$

Ако сада, у једначинама (1) и (4), заменимо x јединицом, добићемо

$$y_m = ne$$

тј. задату једначину. *(Nouvelle correspondance mathématique, t. 4, p. 220, 1878).*

7 Проблем

Развити у ред, по „растећим“ степенима x-a, *израз*

$$(a + x)^4.$$

Ставимо

$$(1)\quad (a + x)^4 = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \cdots$$

Кад једначина под (1) вреди за сваку вредност x-a, диференцијалећи је, добићемо

$$4(a + x)^3 = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + 5Fx^4 + \cdots,$$

$$3\cdot 4\,(a + x)^2 = 1\cdot 2C + 2\cdot 3Dx + 3\cdot 4Ex^2 + 4\cdot 5Fx^3 + \cdots,$$

$$2\cdot 3\cdot 4\,(a + x) = 1\cdot 2\cdot 3\,D + 2\cdot 3\cdot 4\,Ex + 3\cdot 4\cdot 5\,Fx^2 + \cdots,$$

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\,E + 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\,Fx + \cdots,$$

$$0 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\,F + 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\,Gx + \cdots.$$

Ако и даље диференцијалимо, на левој страни добијамо нулу; дакле десна страна остаје увек нули равна.

Пошто сада све горње једначине вреде за сваку вредност x-a, то, стављајући x = o, добијамо из истих

$$a^4 = A \qquad \text{или} \quad A = a^4,$$

$$4a^3 = B \qquad \text{„} \quad B = 4a^3,$$

$$3\cdot 4\,a^2 = 1\cdot 2\,C \qquad \text{„} \quad C = 6a^2$$

$$2\cdot 3\cdot 4\,a = 1\cdot 2\cdot 3\,D \qquad \text{„} \quad D = 4a,$$

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\,E \qquad \text{„} \quad E = 1.$$

Сви сачиниоци, који долазе после E, као што се лако дознаје, равни су нули.

Заменом нађених вредности за A, B, C, · · ·, у једначину под (1) добићемо

$$(2)\quad (a+x)^4 = a^4 + 4a^3x + 6a^2x^2 + 4ax^3 + x^4.$$

Образац под (2) добили бисмо из обрасца

$$(a+x)^m = a^m + \frac{m}{1}a^{m-1}x + \cdots,$$

ако само у последњем ставимо $m = 4$.

8 Проблем

Развити у ред функцију

$$\sin(a+bx),$$

по растећим степенима x-a.

Ставимо

$$(1)\quad \sin(a+bx) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \cdots.$$

Пошто ова једначина важи за сваку вредност x-a, то ћемо, диференцијалећи је постепено, добити

$$b\cos(a+bx) = B + 2\,Cx + 3\,Dx^2 + 4\,Ex^3 + \cdots,$$

$$-b^2\sin(a+bx) = 1\cdot 2\,C + 2\cdot 3\,Dx + 3\cdot 4\,Ex^2 + \cdots,$$

$$-b^3\cos(a+bx) = 1\cdot 2\cdot 3\,D + 2\cdot 3\cdot 4\,Ex + \cdots,$$

$$b^4\sin(a+bx) = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\,E + 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\,Fx + \cdots,$$

$$b^5\cos(a+bx) = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\,F + 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\,Gx + \cdots.$$

Ове једначине важе за сваку вредност x-a. Ставимо ли у истим $x = 0$, добићемо

$$\sin a = A \qquad \text{или} \quad A = \sin a,$$

$$b\cos a = B \qquad „ \quad B = b\cos a,$$

$$-b^2\sin a = 1\cdot 2\,C \qquad „ \quad C = -\frac{b^2\sin a}{1\cdot 2},$$

$$-b^3\cos a = 1\cdot 2\cdot 3\,D \qquad „ \quad D = -\frac{b^3\cos a}{1\cdot 2\cdot 3},$$

$$b^4\sin a = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\,E \qquad „ \quad E = \frac{b^4\sin a}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Ако сада у једначини под (1) заменимо A, B, C, D, · · ·, њиховим вредностима, добићемо

$$(2)\quad \sin(a+bx) = \sin a + b\cos a\cdot x - \frac{b^2\sin a}{1\cdot 2}x^2 - \frac{b^3\cos a}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \cdots$$

Примедба. Према овоме, развићемо произвољну функцију f(x) у ред по растећим степенима од x, ставив

$$(1)\quad f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \cdots,$$

$$f'(x) = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + 5Fx^4 + \cdots,$$

$$f''(x) = 1\cdot 2\,C + 2\cdot 3\,Dx + 3\cdot 4\,Ex^2 + 4\cdot 5\,Fx^3 + \cdots,$$

$$f'''(x) = 1\cdot 2\cdot 3\,D + 2\cdot 3\cdot 4\,Ex + 3\cdot 4\cdot 5\,Fx^2 + \cdots,$$

$$f^{IV}(x) = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\,E + 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\,Fx + \cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Ове једначине важе за сваку вредност x-а; оне, за x = o, постају

$$f(o) = A \qquad \text{или} \qquad A = f(o),$$

$$f'(o) = B \qquad \text{„} \qquad B = f'(o),$$

$$f''(o) = 1 \cdot 2\, C \qquad \text{„} \qquad C = \frac{f''(o)}{1 \cdot 2},$$

$$f'''(o) = 1 \cdot 2 \cdot 3\, D \qquad \text{„} \qquad D = \frac{f'''(o)}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

$$f^{IV}(o) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4\, E \qquad \text{„} \qquad E = \frac{f^{IV}(o)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4},$$

. . . .

Кад се вредности од A, B, C, · · · , ставе у једначину под (1) добићемо

$$(2) \quad f(x) = f(o) + xf'(o) + x^2 \frac{f''(o)}{1 \cdot 2} + x^3 \frac{f'''(o)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$$

Овај је ред познат под именом *Mac-Laurin-ов*[1]) *ред.* (M. Stegemann назива овај ред још и *Stirling-ов ред).*

9 Проблем

Развити у ред функцију

$$y = \arcsin x.$$

Ставимо и овде

$$(1) \quad \arcsin x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \cdots,$$

па ћемо, диференцијалећи је, добити

$$(2) \quad \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = B + 2\,Cx + 3\,Dx^2 + 4\,Ex^3 + 5\,Fx^4 + \cdots$$

[1]) Mac-Laurin (Colin) рођен 1698 у Kilmoddan-у; † 1746.

Али је

$$(3)\quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2$$

$$+ \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \cdot\cdot\cdot\cdot$$

Отуда, сравнив једначине под (2) и (3),

$$B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + 5Fx^4 + \cdot\cdot\cdot$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \cdot\cdot\cdot;$$

из које пак добијамо

$$B = 1,$$

$$2C = o \qquad \text{или} \qquad C = o,$$

$$3D = \frac{1}{2} \qquad \text{„} \qquad D = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2},$$

$$4E = o \qquad \text{„} \qquad E = o,$$

$$5F = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} \qquad \text{„} \qquad F = \frac{1}{5}\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4},$$

. . . .

Ставимо ли у једначину под (1) $x = o$, добићемо

$$A = o.$$

Ако заменимо A, B, C, D, . . ., њиховим вредностима, једначина (1) постаје

$$(4)\quad \operatorname{arc}\sin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdot\cdot\cdot$$

До истог реда дошли бисмо на овај начин: *тражи се сума, за* $x^2 \leqq 1$, *конвергентног реда*

$$\frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots$$

Означимо ту суму са $F(x)$, то је

$$F'(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \cdots$$

тј.

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

или

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{d\arcsin x}{dx}.$$

Отуда је

$$F(x) = \arcsin x + c,$$

и по одредби константне c добија се

$$\arcsin x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} + \cdots,$$

$$x^2 \leqq 1.$$

Задату функцију можемо развити у ред и по Mac-Laurin-овом обрасцу.

Знамо да је, за функције једне променљиве количине, *образац Taylor-ов* [1]) ово

$$f(x + h) = f(x) + \frac{h}{1}f'(x) + \frac{h^2}{1 \cdot 2}f''(x) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{h^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}(1-\theta)^{n-p+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots np}f^{(n+1)}(x+\theta h),$$

[1]) Taylor (Brook) рођен 1685 у Edmonton-у; † 1731.

чији је општи члан $\frac{h^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} f^{(n)}(x)$, а последњи његов члан представља остатак реда. Тај се остатак пише двојако

$$R = \frac{h^{n+1}}{1\cdot 2\cdot 3 \cdots n(n+1)} f^{(n+1)}(x+\theta h) \quad (p=n+1, \text{ Lagrange}),$$

или

$$R = \frac{h^{n+1}(1-\theta)^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} f^{(n+1)}(x+\theta h) \quad (p = 1, \text{ Cauchy}).$$

Последњи облик остатка више се употребљава, ма да је први симетричнији.

За исте функције, имамо *образац Mac-Laurin-ов*

$$\text{(a)} \quad f(x)=f(o)+\frac{x}{1}f'(o)+\frac{x^2}{1\cdot 2}f''(o)+\cdots+\frac{x^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}f^{(n)}(o)+R,$$

где је

$$\text{(I)} \quad R = \frac{x^{n+1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n(n+1)} f^{(n+1)}(\theta x), \quad (p = n+1);$$

$$\text{(II)} \quad R = \frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} f^{(n+1)}(\theta x), \quad (p = 1).$$

Ми смо, у првој свесци страна 187, доказали образац

$$\text{(III)} \quad \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 2m}\,\frac{d^{2m+1}\arcsin x}{dx^{2m+1}}$$

$$= \frac{1}{(1-x^2)^{2m+\frac{1}{2}}}\left[x^{2m} + \frac{2m(2m-1)}{1\cdot 2}\,\frac{1}{2}\,x^{2m-2}\right.$$

$$\left. + \frac{2m(2m-1)(2m-2)(2m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\,\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,x^{2m-4} + \cdots\right].$$

Тако исто, у првој свесци страна 192, нашли смо да су сви изводи парног реда равни нули за $x = o$, и да је у опште

$$y_0^{(2m+1)} = 1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot \cdot \cdot (2m-1)^2.$$

Ставив $x = o$ у једначину под (III), наћи ћемо

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot (2m+1)} \left[\frac{d^{2m+1} \operatorname{arc}\sin x}{dx^{2m+1}}\right]_{x=o}$$

$$= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdot \cdot (2m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdot \cdot 2m} \frac{1}{2m+1}.$$

Овде је $f(x) = \operatorname{arc}\sin x$, па је према овоме по Mac-Laurin-овом обрасцу

$$(5) \quad \operatorname{arc}\sin x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} + \cdot \cdot \cdot$$

$$\cdot \cdot \cdot + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdot \cdot (2m-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdot \cdot (2m-2)} \frac{x^{2m-1}}{2m-1} + R;$$

где је, по обрасцу под (II), остатак

$$R = \frac{x^{2m+1}(1-\theta)^{2m}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot 2m} f^{(2m+1)}(\theta x).$$

Заменив $f^{(2m+1)}(\theta x)$ његовом вредношћу, изведеној из обрасца под (III), добићемо

$$R = \frac{x^{2m+1}(1-\theta)^{2m}}{(1-\theta^2x^2)^{2m+\frac{1}{2}}} \left[(\theta x)^{2m} + \frac{2m(2m-1)}{1 \cdot 2}\frac{1}{2}(\theta x)^{2m-2}\right.$$

$$\left. + \frac{2m(2m-1)(2m-2)(2m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}(\theta x)^{2m-4} + \cdot \cdot \cdot \right].$$

Ограничавајући се на положне вредности x-а, ми ћемо доказати да остатак R тежи нули кад m бесконачно расте, ако је $o < x < 1$.

И заиста, у последњој једначини вредност израза у загради мања је од вредности реда

$$(\theta x)^{2m}+\frac{2m(2m-1)}{1\cdot 2}(\theta x)^{2m-2}$$

$$+\frac{2m(2m-1)(2m-2)(2m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(\theta x)^{2m-4}+\cdots.$$

Вредност пак овог последњег реда своди се на

$$\frac{1}{2}[(1+\theta x)^{2m}+(1-\theta x)^{2m}].$$

Имамо дакле

$$R<\frac{x^{2m+1}(1-\theta)^{2m}}{2(1-\theta^2x^2)^{2m+\frac{1}{2}}}[(1+\theta x)^{2m}+(1-\theta x)^{2m}],$$

или

$$R<\frac{x^{2m+1}}{2\sqrt{1-\theta^2x^2}}\left[\left(\frac{1-\theta}{1-\theta x}\right)^{2m}+\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{2m}\right].$$

Знајући да је $\theta<1$ и $o<x<1$, очевидно је да су $\frac{1-\theta}{1-\theta x}$ и $\frac{1-\theta}{1+\theta x}$ мањи од јединице и да, према томе, оба члана под заградом теже нули кад m бесконачно расте. Они су равни јединици само за $\theta=o$. Дакле је увек

$$R<\frac{x^{2m+1}}{\sqrt{1-\theta^2x^2}}<\frac{x^{2m+1}}{\sqrt{1-x^2}},$$

и за $m=\infty$ имамо

$$\lim R=o.$$

Образац

$$(4)\qquad \arcsin x=\frac{x}{1}+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5}+\cdots,$$

доказан је за вредности x-а, које се находе између -1 и $+1$; исти вреди и за $x=-1$ и за $x=+1$, пошто је десно ред збирљив за те вредности x-а и непрекидна функција x-а.

Овај се ред може корисно употребити за израчунавање броја π. Ставимо

$$x = \frac{1}{2}, \text{ то је } \arcsin x = \operatorname{arc}(30^\circ) = \frac{\pi}{6};$$

отуда добијамо

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\,\frac{1}{5 \cdot 2^5} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2m}\,\frac{1}{(2m+1) \cdot 2^{2m+1}} + \cdots$$

10 Проблем

Тражи се сума реда

$$\frac{1}{1}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \cdots,$$

који је, за $x^2 < 1$, *конвергентан.*

Означимо ли суму задатог реда са $F(x)$, то је

$$F'(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots,$$

тј.

$$F'(x) = \frac{1}{1-x}.$$

У место последње једначине, можемо написати ову

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{d \operatorname{Log}\left(\frac{1}{1-x}\right)}{dx},$$

из које интегралењем добијамо

$$F(x) = \mathrm{Log}\left(\frac{1}{1-x}\right) + C;$$

откуда, ставив место F(x) његову вредност,

$$\frac{1}{1}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdot \cdot \cdot = \mathrm{Log}\left(\frac{1}{1-x}\right) + C.$$

Константна C одређује се тиме, што се x-у даје једна ма која специјална вредност која се налази између -1 и $+1$; најбоље је ставити $x = o$, помоћу које се налази да је константна C равна нули, дакле

$$(1) \quad \mathrm{Log}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{1}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdot \cdot \cdot,$$

$$x^2 < 1.$$

Кад бисмо, као у претходном проблему, развили функцију $\mathrm{Log}\left(\frac{1}{1-x}\right)$ по Mac-Laurin-овом обрасцу, добили бисмо образац под (1). Видели бисмо и овде да остатак, при бесконачном рашћењу n-а, тежи нули.

Ставимо ли у обрасцу под (1) најпре $x = +y$, за тим $x = -y$, то ћемо, одузимањем тако добивених једначина, добити ову

$$\mathrm{Log}\left(\frac{1+y}{1-y}\right) = 2\left(\frac{1}{1}y + \frac{1}{2}y^3 + \frac{1}{5}y^5 + \cdot \cdot \cdot\right),$$

$$y^2 < 1.$$

Из ове се могу извести још и ови обрасци

$$\mathrm{Log}\, z = \frac{1}{2}\{\mathrm{Log}(z+1) + \mathrm{Log}(z-1)\}$$

$$+ \frac{1}{2z^2-1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2z^2-1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2z^2-1}\right)^5 + \cdots,$$

$$z > 1;$$

$$\mathrm{Log}(z+2) = 2[\mathrm{Log}(z+1) - \mathrm{Log}(z-1)] + \mathrm{Log}(z-2)$$

$$+ 2\left\{\frac{2}{z^3-3z} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{z^3-3z}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{2}{z^3-3z}\right)^5 + \cdots\right\},$$

$$z > 2.$$

Примедба. Тражимо суму реда

$$\frac{1}{1}z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{4}z^4 + \cdots,$$

кад је z комплексна количина, тј. за

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Обадва реда

$$\frac{1}{1}r\cos\theta + \frac{1}{2}r^2\cos 2\theta + \frac{1}{3}r^3\cos 3\theta + \cdots,$$

$$\frac{1}{1}\sin\theta + \frac{1}{2}r^2\sin 2\theta + \frac{1}{3}r^3\sin 3\theta + \cdots,$$

апсолутно су збирљиви, ако је збирљив ред

$$\frac{1}{1}r + \frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{3}r^3 + \frac{1}{4}r^4 + \cdots,$$

тј. ако је $r^2 < 1$; тада су и њихове суме непрекидне функције r-а.

Означимо те суме са U и V, па ћемо диференцијалењем добити

$$\frac{dU}{dr} = \cos\theta + r\cos 2\theta + r^2\cos 3\theta + \cdots,$$

или, према петом проблему овога одељка,

$$\frac{dU}{dr} = \frac{\cos\theta - r}{1 - 2r\cos\theta + r^2},$$

коју можемо написати и овако

$$\frac{dU}{dr} = \frac{d\left[-\frac{1}{2}\operatorname{Log}(1 - 2r\cos\theta + r^2)\right]}{dr}.$$

Отуда, интегралећи последњу једначину,

$$U = -\frac{1}{2}\operatorname{Log}(1 - 2r\cos\theta + r^2) + C,$$

и кад се посматра, да онај са U означени ред ишчезава за $r = o$, то се добија $C = o$, па је по томе

$$-\frac{1}{2}\operatorname{Log}(1 - 2r\cos\theta + r^2) = \frac{1}{1}r\cos\theta + \frac{1}{2}r^2\cos 2\theta + \cdots,$$

$$r^2 < 1.$$

На сличан начин налази се да је

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{r\sin\theta}{1 - r\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{1}r\sin\theta + \frac{1}{2}r^2\sin 2\theta + \frac{1}{3}r^3\sin 3\theta + \cdots,$$

$$r^2 < 1.$$

Ставимо ли опет $r(\cos\theta + i\sin\theta) = z$ и посматрамо ли релацију

$$-\frac{1}{2}\operatorname{Log}(1-2r\cos\theta+r^2)+i\operatorname{arc\,tang}\frac{r\sin\theta}{1-r\cos\theta}$$

$$=-\operatorname{Log}[1-r(\cos\theta+i\sin\theta)]=\operatorname{Log}\left(\frac{1}{1-z}\right),$$

то се, помоћу горњих једначина, долази до једначине

$$\operatorname{Log}\left(\frac{1}{1-z}\right)=\frac{1}{1}z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3+\cdot\cdot\cdot,$$

која вреди и онда кад z представља комплексну количину, чији је модуо мањи од јединице

11 Проблем

Развити у ред функцију

$$y=\operatorname{arc\,tang}x.$$

Питање би се могло свести на тражење суме, за $x^2<1$, конвергентног реда

$$\frac{1}{1}x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\cdot\cdot\cdot.$$

Означимо суму са F(x), па је онда

$$F'(x)=1-x^2+x^4-x^6+\cdot\cdot\cdot=\frac{1}{1+x^2},$$

или

$$\frac{d\,F(x)}{dx}=\frac{d\operatorname{arc\,tang}x}{dx};$$

откуда је

$$F(x)=\operatorname{arc\,tang}x+C.$$

За специјалну вредност $x=o$ налазимо $C=o$, па је према томе

$$\operatorname{arc\,tang} x = \frac{1}{1}x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots,$$

$$x^2 < 1.$$

Исти ред нашли бисмо по методи неодређених сачинилаца; ставимо пре свега

$$(1) \quad \operatorname{arc\,tang} x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \cdots,$$

где су сачиниоци A, B, C, $\cdots$, константне (од x независне) количине, чију вредност тек треба одредити.

Диференцијалимо једначину под (1), па ћемо наћи

$$(2) \quad \frac{1}{1 + x^2} = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \cdots;$$

даље је

$$(3) \quad \frac{1}{1 + x^2} = (1+x^2)^{-1} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots.$$

Комбинисањем једначина под (2) и (3) налазимо

$$(4) \quad B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \cdots = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots.$$

Ставимо ли у једначину под (1), $x = o$, то је

$$A = o.$$

Из једначине под (4) следује

$$B = 1,$$

$$2C = o \quad \text{или} \quad C = o,$$

$$3D = -1 \quad „ \quad D = -\frac{1}{3},$$

$$4E = o \quad „ \quad E = o,$$

$$5F = 1 \qquad \text{или} \qquad F = \frac{1}{5},$$

. . . .

Заменимо сада у једначину под (1) A, B, C, . . . , њиховим вредностима, наћи ћемо исти ред

$$(5) \qquad \operatorname{arc\,tang} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Узмимо да проучимо остатак реда. Ми смо, у првој свесци страна 163, нашли да су сви изводи парног реда равни нули,

$$5F = 1 \qquad \text{или} \qquad F = \frac{1}{5},$$

. . . .

Заменимо сада у једначину под (1) A, B, C, . . . , њиховим вредностима, наћи ћемо исти ред

$$(5) \qquad \operatorname{arc\,tang} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Узмимо да проучимо остатак реда. Ми смо, у првој свесци страна 163, нашли да су сви изводи парног реда равни нули,

$$5F = 1 \qquad \text{или} \qquad F = \frac{1}{5},$$

. . . .

Заменимо сада у једначину под (1) A, B, C, . . . , њиховим вредностима, наћи ћемо исти ред

$$(5) \qquad \operatorname{arc\,tang} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Узмимо да проучимо остатак реда. Ми смо, у првој свесци страна 163, нашли да су сви изводи парног реда равни нули,

$$5F = 1 \qquad \text{или} \qquad F = \frac{1}{5},$$

$$y_0^{(2p-1)} = 1\cdot2\cdot3\cdots(2p-2)\sin\left(p\pi-\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^{p-1}\,1\cdot2\cdot3\cdots(2p-2).$$

Остатак R има за вредност

$$R = \frac{1}{2p}\,\frac{x^{2p}}{(1+\theta^2x^2)^p}\sin(2p\,\mathrm{arc\,tang}\,\theta x + p\pi)$$

или

$$R = \frac{(-1)^p}{2p}\left(\frac{x^2}{1+\theta^2x^2}\right)^p\sin(2p\,\mathrm{arc\,tang}\,\theta x).$$

За $x^2 \leqq 1$ два последња чинитеља бесконачно су мали или су коначни, а први $\frac{1}{2p}$ бесконачно мали за p бесконачно велико. Дакле је

$$\lim R = o,$$

и образац (5) вреди за све вредности x-а такве да је

$$-1 \leqq x \leqq +1.$$

То можемо доказати и помоћу другог израза за остатак

$$R = \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}\,\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{(\theta x - i)^n} - \frac{1}{(\theta x + i)^n}\right].$$

Помоћу алгебарских трансформација можемо ставити количину $\frac{1}{\theta x - i}$ у облику

$$\frac{1}{(\theta x - i)^n} = u + vi,$$

откуда је

$$\frac{1}{(\theta x + i)^n} = u - vi.$$

Отуда је

$$R = \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}\,v.$$

Но, како је количина $u^2 + v^2 = \frac{1}{(\theta^2 x^2 + 1)^n}$ бесконачно мала или коначна количина, то је тим пре случај са v, откуда закључујемо да је остатак R бесконачно мали за n бесконачно велико

За $x^2 \geqq 1$, $\frac{1}{x^2}$ биће $\leqq 1$, то ће пређашња формула дати ред за $\operatorname{arc\,tang} \frac{1}{x}$, уређен по степенима од $\frac{1}{x}$; но како је $\operatorname{arc\,tang} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tang} x$, то ћемо закључити да је

$$\operatorname{arc\,tang} x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \cdots$$

Ред под (5) може нам послужити да израчунамо π. Ставимо $x = 1$, па је $\operatorname{arc\,tang} x = \frac{\pi}{4}$ и тако добијамо

$$\text{(I)} \quad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots,$$

Leibnitz-ов ред за израчунавање броја π.

Из једначине (I) добијамо даље

$$\text{(II)} \quad \frac{\pi}{4} = 1 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right) - \cdots,$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{2}{15} - \frac{2}{63} - \frac{2}{143} - \cdots;$$

$$\text{(III)} \quad \frac{\pi}{4} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11}\right) + \cdots$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{2}{35} + \frac{2}{99} + \cdots.$$

Редови под (I), (II) и (III) очевидно су збирљиви, и из истих излази да се $\frac{\pi}{4}$ налази између $\frac{2}{3}$ и 1.

Међу тим се лако познаје, да би рачун био врло дуг, кад би се захтевало да се на шест децимала тачно израчуна вредност за $\frac{\pi}{4}$ по једном од ових редова. Зато је нужно поставити редове за π $\left(\text{или } \frac{\pi}{4}\right)$, који су брже збирљиви него три претходна реда.

Стави ли се нпр.

$$\text{(IV)} \quad \operatorname{tang} u = \frac{1}{2}, \quad u = \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{2}.$$

$$\text{(V)} \quad \operatorname{tang} v = \frac{1}{3}, \quad v = \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{3};$$

то је

$$\text{(VI)} \quad \operatorname{tang}(u+v) = \frac{\operatorname{tang} u + \operatorname{tang} v}{1 - \operatorname{tang} u \operatorname{tang} v} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}\,\frac{1}{3}}.$$

Пошто је $\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}\,\frac{1}{3}} = 1$, то, из једначине (VI), следује

$$\text{(VII)} \quad \operatorname{tang}(u + v) = 1,$$

$$\text{(VIII)} \quad u + v = \operatorname{arc\,tang} 1,$$

или

$$\text{(IX)} \quad u + v = \frac{\pi}{4}.$$

Стави ли се у једначину (IX) место u и v њихове вредности из једначина (IV) и (V), то се добија

$$\text{(X)} \quad \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4},$$

или

$$\text{(XI)} \quad \frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{3}.$$

Ако се сада замени $\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{2}$ и $\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{3}$ њиховим вредностима, добивеним према једначини под (5), имаћемо

$$\text{(XII)} \quad \frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \cdots\right)$$

$$+ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - \cdots\right),$$

или

$$\text{(XIII)} \quad \frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5}\right) - \cdots.$$

Ово је *Euler-ов ред*, који је брже збирљив од Leibnitz-овог реда.

Ми можемо извести за $\frac{\pi}{4}$ редове који су много брже збирљиви. Нека је x доста мала функција, како бисмо лако израчунали вредност лука $\varphi = \operatorname{arc\,tang} x$. Познати тригонометријски обрасци даће, помоћу једначине $\operatorname{tang}\varphi = x$, вредности тангената постепених умножених лукова φ-а, и тако ћемо добити $m\varphi$, чија ће се тангента мало разликовати од јединице и која ће, услед тога, бити близу до $\frac{\pi}{4}$. Сада ћемо имати тангент малог лука $\frac{\pi}{4} - m\varphi$ помоћу формуле

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - m\varphi\right) = \frac{1 - \operatorname{tang} m\varphi}{1 + \operatorname{tang} m\varphi},$$

и тако ћемо моћи израчунати овај лук помоћу његове тангенте. Знајући сада φ и $\frac{\pi}{4} - m\varphi$, извешћемо лако вредност за $\frac{\pi}{4}$.

John Machin († 1751) поставио је за $\frac{\pi}{4}$ ред још брже збирљив. Он ставља прво

$$\operatorname{tang} u = \frac{1}{5}.$$

Отуда, према формули $\operatorname{tang} 2u = \frac{2 \operatorname{tang} u}{1 - \operatorname{tang}^2 u}$, добијамо

$$\operatorname{tang} 2u = \frac{2\frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{5}{12},$$

$$\operatorname{tang} 4u = \frac{2\frac{5}{12}}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{120}{119}.$$

Тако је $\operatorname{tang} 4u > 1$, дакле $4u > \frac{\pi}{4}$. Сада Machin ставља даље

$$4u = \frac{\pi}{4} + v,$$

или

$$4u - v = \frac{\pi}{4}, \quad v = 4u - \frac{\pi}{4}.$$

Отуда

$$\operatorname{tang} v = \operatorname{tang}\left(4u - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tang} 4u - 1}{\operatorname{tang} 4u + 1},$$

а због $\operatorname{tang} 4u = \frac{120}{119}$, то је

$$\operatorname{tang} v = \frac{\frac{120}{119} - 1}{\frac{120}{119} + 1} = \frac{1}{239}.$$

Дакле $v = \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{239}$, и будући је $4u = 4\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{5}$, то је

$$4u - v = 4\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{239};$$

због тога је

$$\frac{\pi}{4} = 4u - v = 4\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{239},$$

или

$$\text{(XIV)} \qquad \frac{\pi}{4} = 4\left\{\frac{1}{5} - \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} - \cdot\cdot\cdot\right\}$$

$$- \left\{\frac{1}{239} - \frac{1}{3\,(239)^3} + \cdot\cdot\cdot\right\},$$

и то је *Machin-ов ред*. Ми ћемо узети овај ред и наћи вредност броја π са тачношћу од шест децимала. Имамо

$$\frac{1}{5} = 0{,}2,$$

$$\frac{1}{3\cdot 5^3} = 0{,}0026667,$$

$$\frac{1}{5\cdot 5^5} = 0{,}000064,$$

$$\frac{1}{7\cdot 5^7} = 0{,}0000018,$$

$$\frac{1}{239} = 0{,}0041841.$$

Отуда се добија

$$4\left\{\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 5^7}\right\} = 0{,}7895824$$

$$\frac{1}{239} = 0{,}0041841.$$

Одузев доњу вреност од горње, добићемо

$$\frac{\pi}{4} = 0{,}7853983,$$

дакле

$$\pi = 3{,}1415932$$

тачно до на шест децимала.

12 Проблем

Тражи се сума реда

$$1 + \frac{\mu}{1} x + \frac{\mu(\mu - 1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{\mu(\mu - 1)(\mu - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \cdots,$$

који је, за $x^2 < 1$, *конвергентан.*

Означимо са $\Phi(x)$ тражену суму, па је

$$(1 + x)\Phi'(x) = \mu \Phi(x),$$

која се може написати и овако

$$\frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} = \frac{\mu}{1 + x},$$

или

$$\frac{d \cdot \mathrm{Log}\, \Phi(x)}{dx} = \frac{d[\mu \,\mathrm{Log}\,(1 + x)]}{dx};$$

откуда, интегралећи последњу једначину,

$$\mathrm{Log}\,\Phi(x) = \mu\,\mathrm{Log}\,(1 + x) + c,$$

или

$$\Phi(x) = e^c (1 + x)^\mu.$$

Према томе је

$$1 + \frac{\mu}{1}x + \frac{\mu(\mu - 1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{\mu(\mu - 1)(\mu - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots$$

$$= e^c (1 + x)^\mu.$$

За $x = 0$, добија се $e^c 1^\mu = 1$; дакле ако је $(1 + x)^\mu$ узето у апсолутном смислу и томе сагласно $1^\mu = 1$ ставило буде, то је $e^c = 1$ и онда је

$$(1) \quad (1 + x)^\mu = 1 + \frac{\mu}{1}x + \frac{\mu(\mu - 1)}{1 \cdot 2}x^2$$

$$+ \frac{\mu(\mu - 1)(\mu - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots,$$

$$x^2 < 1.$$

Кад бисмо $(1 + x)^\mu$ развили у ред по Mac-Laurin-овом обрасцу, лако бисмо доказали да бисмо добили ред под (1) и да остатак тога реда тежи ка нули, и с тим се долази на општи биномни образац.

Примедба. — Треба ред

$$1 + \frac{\mu}{1}z + \frac{\mu(\mu - 1)}{1 \cdot 2}z^2 + \frac{\mu(\mu - 1)(\mu - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}z^3 + \dots,$$

сумирати за $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Означимо биномне сачиниоце на изабрани кратак начин, па ћемо добити два реда

$$1 + (\mu)_1 r\cos\theta + (\mu)_2 r^2\cos 2\theta + (\mu)_3 r^3\cos 3\theta + \dots,$$

$$(\mu)_1 \, r \sin\theta + (\mu)_2 \, r^2 \sin 2\theta + (\mu)_3 \, r^3 \sin 3\theta + \cdots,$$

који за цело и положно μ и за $r^2 < 1$ конвергују и њихове суме можемо означити са U и V. Приметимо сада, да постоје ове јееначине

$$\frac{dU}{dr}(1 + r\cos\theta) - \frac{dV}{dr} r\sin\theta = \mu(U\cos\theta - V\sin\theta),$$

$$\frac{dV}{dr}(1 + r\cos\theta) + \frac{dU}{dr} r\sin\theta = \mu(V\cos\theta + U\sin\theta);$$

елиминише ли се из ових једначина прво $\frac{dV}{dr}$, а за тим друго $\frac{dU}{dr}$, то се долази до ових релација

$$(1 + 2r\cos\theta + r^2)\frac{dU}{dr} = \mu\{U(r + \cos\theta) - V\sin\theta\},$$

$$(1 + 2r\cos\theta + r^2)\frac{dV}{dr} = \mu\{U\sin\theta + V(r + \cos\theta)\};$$

$$U\frac{dU}{dr} + V\frac{dV}{dr} = \frac{\mu(r + \cos\theta)}{1 + 2r\cos\theta + r^2}(U^2 + V^2),$$

$$U\frac{dV}{dr} - V\frac{dU}{dr} = \frac{\mu\sin\theta}{1 + 2r\cos\theta + r^2}(U^2 + V^2).$$

Ове се упрошћавају за

$$U + iV = P\{\cos\Omega + i\sin\Omega\}$$

и прелазе у

$$\frac{dP}{dr} = \frac{\mu(r + \cos\theta)P}{1 + 2r\cos\theta + r^2}, \quad \frac{d\Omega}{dr} = \frac{\mu\sin\theta}{1 + 2r\cos\theta + r^2},$$

које се могу написати овако

$$\frac{d\cdot \operatorname{Log} P}{dr} = \frac{d\left[\frac{1}{2}\mu \operatorname{Log}(1 + 2r\cos\theta + r^2)\right]}{dr},$$

$$\frac{d\Omega}{dr} = \frac{d\left[\mu \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{r\sin\theta}{1 + r\cos\theta}\right)\right]}{dr}.$$

Интегралећи добићемо P и Ω, при чему ћемо увучене константне одредити помоћу специјалног случаја $r = o$. Добивени резултати јесу ови

$$(1 + 2r\cos\theta + r^2)^{\frac{1}{2}\mu}\cos\left(\mu \operatorname{arc\,tang}\frac{r\sin\theta}{1 + r\cos\theta}\right)$$

$$= 1 + (\mu)_1 r\cos\theta + (\mu)_2 r^2\cos 2\theta + (\mu)_3 r^3\cos 3\theta + \cdots,$$

$$(1 + 2r\cos\theta + r^2)^{\frac{1}{2}\mu}\sin\left(\mu \operatorname{arc\,tang}\frac{r\sin\theta}{1 + r\cos\theta}\right)$$

$$= (\mu)_1 r\sin\theta + (\mu)_2 r^2\sin 2\theta + (\mu)_3 r^3\sin 3\theta + \cdots,$$

при чему $r^2 < 1$ мора бити, у случају кад μ није цео и положан број.

Умножимо ли другу једначину са i и саберемо ли је са првом, то ћемо наћи да општи биномни образац вреди и онда кад z комплексну количину представља, чији је модуо мањи од јединице.

13 Проблем

Развити у ред функцију

$$\frac{\operatorname{Log}(x + \sqrt{1 + x^2})}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Остављамо читаоцу да се увери да ће, по Mac-Laurin-овом обрасцу, добити

$$\operatorname{Log}(x + \sqrt{1 + x^2}) = \frac{x}{1} - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} - \cdots,$$

$$x^2 < 1.$$

Ова једначина важи још и у случају кад је $x^2 = 1$. Ако сада развијемо $(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}}$ по биномном обрасцу, то ћемо, множењем, добити

$$\frac{\operatorname{Log}(x + \sqrt{1 + x^2})}{\sqrt{1 + x^2}} = x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{8}{15}x^5 - \frac{16}{35}x^7 + \cdots,$$

$$x^2 < 1,$$

ред у коме је тешко познати закон постајања сачинилаца. Стави ли се, због тога,

$$\frac{\operatorname{Log}(x + \sqrt{1 + x^2})}{\sqrt{1 + x^2}} = a_1 x - a_3 x^3 + a_5 x^5 - \cdots.$$

Помножимо обе стране са $\sqrt{1 + x^2}$, диференцијалимо и помножимо још један пут са $\sqrt{1 + x^2}$, па ћемо добити

$$1 = a_1 - (3a_3 - 2a_1)x^2 + (5a_5 - 4a_3)x^4 - (7a_7 - 6a_5)x^6 + \cdots,$$

а отуда се налази да је

$$a_1 = 1,\ a_3 = \frac{2}{3}a_1 = \frac{2}{3},\ a_5 = \frac{4}{5}a_3 = \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}, \cdots.$$

Према томе је

$$\frac{\operatorname{Log}(x + \sqrt{1 + x^2})}{\sqrt{1 + x^2}} = x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}x^5 - \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}x^7 + \cdots,$$

$$x^2 < 1.$$

14 Проблем

Оверити идентичну једначину

$$C_{2n,n}+\frac{1}{3}C_{2n-2,\,n-1}C_{2,1}+\frac{1}{5}C_{2n-4,\,n-2}C_{4,2}+\cdots+\frac{1}{2n+1}C_{2n,n}$$

$$=4^n\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ \ \cdot 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ \cdot\ \cdot(2n+1)}.$$

Према првом и деветом проблему, у овоме одељку, имамо

$$(1)\quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\cdots$$

$$\cdots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ \cdot\ \cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ \cdot\ \cdot 2n}x^{2n}+\cdots,$$

$$(2)\quad \arcsin x=x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ \cdot\ \cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ \cdot\ \cdot 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots.$$

Тако исто, према 28 проблему прва свеска страна 194, наћи ћемо

$$(3)\quad \frac{1}{2}(\arcsin x)^2=\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}\frac{x^4}{4}+\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\frac{x^6}{6}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ \cdot\ \cdot 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ \cdot\ \cdot(2n+1)}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)}+\cdots$$

Из ових, множећи редове под (1) и (2) или диференцијалећи онај под (3), наћи ћемо

$$(4)\quad \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}=x+\frac{2}{3}x^3+\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}x^5+\cdots$$

$$\cdots + \frac{2\cdot4\cdot6\cdots2n}{3\cdot5\cdot7\cdots(2n+1)}x^{2n+1}+\cdots$$

Производ редова (1) и (2) раван је реду под (4).

Очевидно је

$$\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdots2n}{(2\cdot4\cdot6\cdots2n)^2}$$

$$=\frac{1}{4^n}C_{2n,n}.$$

Множећи редове (1) и (2) добићемо као производ један ред, и ако сада сачиниоца од x^{2n+1} у томе реду изједначимо са сачиниоцем од x^{2n+1} у реду под (4), који је $\frac{2\cdot4\cdot6\cdots2n}{3\cdot5\cdot7\cdots(2n+1)}$, добићемо задату једначину.

Читаоцу остављамо да се увери, да ћемо исти ред под (4) добити, кад бисмо функцију $\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ развили по Mac-Laurin-овом обрасцу.

Примедба. Кад смо се уверили, ма којим начином, да једна функција испуњава нужне услове па да се може у ред развити, можемо избећи тражење постепених извода — рачун често тежак да се изврши — и применити *методу неодређених сачинилаца* на развијање функција у редове. Ми ћемо је применити на примеру $\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$. По теорији о комплексним количинама знамо, да се ова функција може развити у ред по положним степенима x-а, за све вредности x-а бројно мање од јединице. Можемо дакле, претпоставив $x^2 < 1$, ставити

$$(5)\quad \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

откуда

$$\arcsin x = \sqrt{1-x^2}\,(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots).$$

Диференцијалећи последњу једначину добићемо

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots)$$

$$+ \sqrt{1-x^2}\,(a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots),$$

откуда

$$1 = -x(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots)$$

$$+ (1 - x^2)(a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots)$$

$$= a_1 \begin{array}{c} -a_0 \\ \\ +2a_2 \end{array} \left| x \begin{array}{c} -a_1 \\ -a_1 \\ +3a_3 \end{array} \right| x^2 - \cdots \begin{array}{c} -a_{n-1} \\ -(n-1)a_{n-1} \\ (n+1)a_{n+1} \end{array} \Bigg| x^n - \cdots$$

Изједначавајући сачиниоце непознатих, с обе стране једначине, наћи ћемо

$$1 = a_1,\ a_0 = 2a_2,\ 2a_1 = 3a_3, \cdots,\ n a_{n-1} = (n+1)a_{n+1}, \cdots.$$

Но ми знамо да је, означив са $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} =$ $a_0 + a_1 x + \cdots$, $f(o) = a_0 = o$; према томе је $a_2 = o$, $a_4 = o, \cdots$. Дакле, сви су сачинитељи парне сказаљке равни нули. То је

$$a_1 = 1,\ a_3 = \frac{2}{3},\ a_5 = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5},\ a_7 = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7}, \quad \cdots$$

Заменом ових вредности сачинилаца a_0, a_1, a_2, a_3, . . ., у једначину под (5) добиђемо исти ред под (4), који се такође у овој форми даје представити

$$\operatorname{arc\,tang} z = \frac{z}{1+z^2}\left\{1 + \frac{2}{3}\frac{z^2}{1+z^2} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}\left(\frac{z^2}{1+z^2}\right)^2 + \cdot \cdot\right\},$$

$$z^2 < \infty.$$

15 Проблем

Оверити једначину

$$(1) \quad 1 - \frac{1}{3}C_{n,1} + \frac{1}{5}C_{n,2} - \frac{1}{7}C_{n,3} + \cdot \cdot \cdot \pm \frac{1}{2n-1}C_{n,1} \mp \frac{1}{2n+1}$$

$$= \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdot \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cdot \cdot (2n+1)}.$$

Из претходног проблема знамо да је

$$(2) \quad \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_0^\infty \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdot \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cdot \cdot (2n+1)} x^{2n+1}.$$

Али је

$$\arcsin x = \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{3}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^5 - \cdots,$$

или

$$(3) \quad \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{1-x^2} - \frac{1}{3}\frac{x^3}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{5}\frac{x^5}{(1-x^2)^3} - \cdots.$$

Општи члан реда, на десној страни ове последње једначине, биће облика

$$\pm \frac{1}{2k+1} \frac{x^{2k+1}}{(1-x^2)^{k+1}}.$$

Развијен по растећим степенима x-a, он постаје

$$\pm \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \left[1 + \frac{k+1}{1} x^2 + \frac{(k+1)(k+2)}{1 \cdot 2} x^4 \right.$$

$$\left. + \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^6 + \cdot \cdot \cdot \right].$$

У загради, сачинитељ од x^{2n-2k} раван је

$$\frac{(k+1)(k+2) \cdot \cdot \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot (n-k)} = C_{n,k}.$$

Услед тога је

$$(4) \quad \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_0^\infty \left[1 - \frac{1}{3} C_{n,1} + \frac{1}{5} C_{n,2} - \frac{1}{7} C_{n,3} + \cdot \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \cdot \cdot \pm \frac{1}{2n-1} C_{n,1} \mp \frac{1}{2n+1} \right] x^{2n+1}.$$

Сравнив једначине под (2) и (4), добијамо тражени образац

$$1 - \frac{1}{3} C_{n,1} + \frac{1}{5} C_{n,2} - \frac{1}{7} C_{n,3} + \cdot \cdot \cdot \pm \frac{1}{2n-1} C_{n,1} \mp \frac{1}{2n+1}$$

$$= \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdot \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cdot \cdot (2n+1)},$$

који се може и непосредним путем доказати. *(E. Catalan, Mélanges mathématiques, t. II, p. 69, 1887).*

16 Проблем

Траже се сумњ u *и* v *увек конвергентних редова*

$$u = 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \cdots,$$

$$v = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \cdots.$$

Подигнимо на квадрат прву једначину, добићемо резултат облика

$$u^2 = 1 - \frac{a_2}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{a_4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 - \frac{a_6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} x^6 + \cdots,$$

у овоме је

$$a_n = 1 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots,$$

или, по скраћеном означењу биномних сачинилаца,

$$a_n = (n)_0 + (n)_2 + (n)_4 + (n)_6 + \cdots.$$

На сличан начин добија се

$$v^2 = \frac{b_2}{1 \cdot 2} x^2 - \frac{b_4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 + \frac{b_6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} x^6 - \cdots,$$

у коме је

$$b_n = (n)_1 + (n)_3 + (n)_5 + \cdots.$$

Из образаца за u^2 и v^2 добијамо овај

$$u^2 + v^2 = 1 - \frac{a_2 - b_2}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{a_4 - b_4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 - \frac{a_6 - b_6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} x^6 + \cdots,$$

али у овоме је

$$a_n - b_n = (n)_0 - (n)_1 + (n)_2 - (n)_3 + \cdot \cdot \cdot = 0;$$

према томе остаје

$$u^2 + v^2 = 1,$$

и ми можемо написати

$$v = \sqrt{1 - u^2}; \quad u = \sqrt{1 - v^2}.$$

Диференцијалимо ли прве једначине за u и v добићемо

$$\frac{du}{dx} = - v = - \sqrt{1 - u^2},$$

$$\frac{dv}{dx} = + u = + \sqrt{1 - v^2};$$

или у другој форми

$$\frac{d \arccos u}{dx} = \frac{d(x)}{dx},$$

$$\frac{d \arcsin v}{dx} = \frac{d(x)}{dx}.$$

Интегралећи последње једначине, прва даје

$$\arccos u = x + \alpha \quad \text{или} \quad u = \cos(x + \alpha),$$

према томе је

$$\cos(x + \alpha) = 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \cdot \cdot \cdot;$$

из које, за $x = 0$, добијамо $\cos \alpha = 1$, откуда $\alpha = 2k\pi$, где k означава један положан или одречан цео број; дакле заменом ове вредности имамо

$$(1)\quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \cdots$$

На сличан начин добијамо $v = \sin(x + \beta)$ и закључно

$$(2)\quad \sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \cdots$$

Обрасце (1) и (2) добили бисмо употребом Mac-Laurin-овога обрасца. Остављамо читаоцу тај лаки рад.

Примедба. Према овим формулама, можемо израчунати $\cos 15^\circ 25' 20''$ и $\sin 15^\circ 25' 20''$. Дужина лука једног угла од $15^\circ 25' 20''$ за полупречник један равна је 0,2691686, према томе је

$$x = 0{,}2691686\,,$$

$$\frac{x^2}{2\,!} = 0{,}0362259\,,$$

$$\frac{x^4}{4\,!} = 0{,}0002187\,,$$

$$\frac{x^6}{6\,!} = 0{,}0000005.$$

Отуда је

$$\cos 15^\circ 25' 20'' = 1 - 0{,}0362259 + 0{,}0002187 - 0{,}0000005$$

$$= 0{,}9639923.$$

Тако исто

$$x = 0{,}2691686\,,$$

$$\frac{x^3}{3\,!} = 0{,}0032503\,,$$

$$\frac{x^5}{5\,!} = 0{,}00001177.$$

Отуда је

$$\sin 15^\circ 25' 20'' = 0{,}2691686 - 0{,}0032503 + 0{,}0000117$$

$$= 0{,}2659301.$$

17 Проблем

Дате су функције

$$\cos nx \quad \textit{и} \quad \sin nx,$$

развити их у редове по степенима од $\sin x$.

Начини по којима су функције $\cos nx$ и $\sin nx$ развијане у редове по степенима од $\sin x$, доста су компликовани, док су међу тим резултати врло прости. Према једној примедби Lamé-овој, може се претпоставити да постоји један такав начин, за развијање задатих функција у редове, чији је степен простоте сличан ономе резултата. Без сумње, аналисте ће наћи овај начин, кога ћемо употребити, врло прост, као и резултати, које по њему добијамо.

Претпоставимо, по обичају, да је n цео број.

1°. *Развијање у ред* $\cos nx$. — Пошто је $\cos nx$ парна функција, која се своди на јединицу кад се променљива x стави равна нули, то можемо ставити

$$(1) \quad \cos nx = 1 + A_2 \sin^2 x + A_4 \sin^4 x + A_6 \sin^6 x + \cdot \cdot \cdot .$$

Остаје нам да одредимо сачиниоце A_2, A_4, A_6, ... Диференцијалимо два пута једначину под (1),

$$-n \sin nx = (2A_2 \sin x + 4A_4 \sin^3 x + 6A_6 \sin^5 x + \cdot \cdot \cdot) \cos x,$$

$$-n^2 \cos nx = (2A_2 + 3 \cdot 4 A_4 \sin^2 x + 5 \cdot 6 A_6 \sin^4 x + \cdot \cdot \cdot) \cos^2 x$$

$$- (2 A_2 \sin x + 4 A_4 \sin^3 x + 6 A_6 \sin^5 x + \cdot \cdot \cdot) \sin x.$$

Заменимо у овој последњој једначини $\cos^2 x$ са $1 - \sin^2 x$, па ћемо добити

$$- n^2 \cos nx = 2A_2 + \left.\begin{matrix} 3\cdot 4 A_4 \\ -2^2 A_2 \end{matrix}\right| \sin^2 x + \left.\begin{matrix} 5\cdot 6 A_6 \\ -4^2 A_4 \end{matrix}\right| \sin^4 x$$

$$+ \left.\begin{matrix} 7\cdot 8 A_8 \\ -6^2 A_6 \end{matrix}\right| \sin^6 x + \cdot\cdot\cdot\cdot$$

Помножимо сада ред (1) са n^2 и саберимо га са последњом једначином, добићемо

$$o = n^2 + 2A_2 + [3\cdot 4 A_4 + (n^2 - 2^2) A_2] \sin^2 x$$

$$+ [5\cdot 6 A_6 + (n^2 - 4^2) A_4] \sin^4 x + [7\cdot 8 A_8 + (n^2 - 6^2) A_6] \sin^6 x + \ldots$$

Стављајући сачиниоце разних степена од $\sin x$ равне нули, добићемо довољан број једначина, за одредбу непознатих сачинилаца A_2, A_4, A_6, $\cdot\cdot\cdot$. Наћи ћемо

$$(2) \quad \begin{cases} A_2 = -\dfrac{n^2}{2},\ A_4 = \dfrac{n^2(n^2-2^2)}{2\cdot 3\cdot 4},\ A_6 = -\dfrac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}, \\ A_8 = \dfrac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)(n^2-6^2)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}, \cdot\cdot\cdot\cdot \end{cases}$$

Заменом у једначину под (1) добијамо

$$(a) \quad \cos nx = 1 - \frac{n^2}{1\cdot 2}\sin^2 x + \frac{n^2(n^2-2^2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\sin^4 x$$

$$- \frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\sin^6 x$$

$$+ \frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)(n^2-6^2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdot 8}\sin^8 x - \cdot\cdot\cdot\cdot$$

2^0. *Развијање у ред* $\sin nx$. — Пошто је ово функција непарна, која постаје равна нули за $x = o$, то ћемо моћи ставити,

$$(3)\quad \sin nx = B_1 \sin x + B_3 \sin^3 x + B_5 \sin^5 x + B_7 \sin^7 x + \cdots,$$

која нам, диференцијалена два пута, даје

$$(4)\quad \begin{cases} n\cos nx = (B_1 + 3B_3\sin^2 x + 5B_5 \sin^4 x + 7B_7 \sin^6 x + \cdots)\cos x, \\ -n^2 \sin nx = (2\cdot 3B_3 \sin x + 4\cdot 5B_5 \sin^3 x + 6\cdot 7B_7 \sin^5 x + \cdots)\cos^2 x \\ \qquad - (B_1 + 3B_3 \sin^2 x + 5B_5 \sin^4 x + \cdots)\sin x. \end{cases}$$

Ако и овде заменимо $\cos^2 x$ са $1 - \sin^2 x$, добићемо

$$-n^2 \sin nx = (2\cdot 3 B_3 - B_1)\sin x + (4\cdot 5 B_5 - 3^2 B_3)\sin^3 x$$
$$+ (6\cdot 7 B_7 - 5^2 B_5)\sin^5 x + \cdots;$$

помножимо једначину (3) са n^2, па је саберимо са овом последњом, добићемо

$$(5)\quad o = [2\cdot 3 B_3 + (n^2 - 1^2) B_1]\sin x + [4\cdot 5 B_5 + (n^2 - 3^2) B_3]\sin^3 x$$
$$+ [6\cdot 7 B_7 + (n^2 - 5^2) B_5]\sin^5 x + \cdots.$$

Да бисмо добили вредности непознатих сачинилаца B_1, B_3, B_5, $\cdots$, који се находе у једначини под (3), нужно је да знамо вредност сачинитеља B_1, а остале ћемо добити помоћу те вредности. Ставимо у првој једначини под (4) $x = o$, увидећемо да је

$$n = B_1.$$

Помоћу те вредности за B_1 и једначине под (5), добијамо

$$(6)\quad \begin{cases} B_1 = n,\ B_3 = -\dfrac{n(n^2 - 1^2)}{2\cdot 3},\ B_5 = \dfrac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}, \\ B_7 = -\dfrac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)(n^2-5^2)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}, \cdots. \end{cases}$$

Дакле је

$$(b)\quad \sin nx = \frac{n}{1}\sin x - \frac{n(n^2-1^2)}{1\cdot 2\cdot 3}\sin^3 x$$

$$+\frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\sin^5 x$$

$$-\frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)(n^2-5^2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}\sin^7 x + \cdots.$$

На исти начин, у погледу на хиперболне функције, добићемо

$$(7)\quad \begin{cases} \mathrm{Ch}\,nx = \dfrac{1}{1} + \dfrac{n^2}{1\cdot 2}\mathrm{Sh}^2 x + \dfrac{n^2(n^2-2^2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\mathrm{Sh}^4 x + \cdots, \\[2ex] \mathrm{Sh}\,nx = \dfrac{n}{1}\mathrm{Sh}\,x + \dfrac{n(n^2-1^2)}{1\cdot 2\cdot 3}\mathrm{Sh}^3 x + \cdots. \end{cases}$$

У осталом једначине под (7) можемо добити из оних под (a) и (b), као и обратно; само треба на уму имати однос који постоји између кружних и хиперболних функција, одговарајући двема променљивим количинама x и $x\sqrt{-1}$.

Ред за косинус своди се на ограничен број чланова само у случају кад је n паран број; напротив, број чланова реда за синус ограничен је само у случају кад је n непаран број. Редови (a) и (b), који представљају $\cos nx$ и $\sin nx$, збирљиви су на ма какав био број n. Редови пак за $\mathrm{Ch}\,nx$ и $\mathrm{Sh}\,nx$ збирљиви су само у случају ако је $\mathrm{Sh}^2 x < 1$. *(Yvon Villarceau, Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences, t. 82, p. 1469, 1876).*

Примедба. Ми ћемо овде говорити у опште о редовима за косинус и синус умноженог лука. Помоћу обичних гониометријских формула добијају се лако ове једначине

$$\cos 2u = 2\cos^2 u - 1,$$

$$\cos 3u = 4\cos^3 u - 3\cos u,$$

$$\cos 4u = 8\cos^4 u - 8\cos^2 u + 1,$$

$$\cos 5u = 16\cos^5 u - 20\cos^3 u + 5\cos u,$$

$$\cos 6u = 32\cos^6 u - 48\cos^4 u + 18\cos^2 u - 1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

из којих излази да се, за цео и положан број m, може ставити

$$\cos mu = A_0 \cos^m u - A_2 \cos^{m-2} u + A_4 \cos^{m-4} u - \ldots,$$

или краће

$$\cos(m \operatorname{arc}\cos x) = A_0 x^m - A_2 x^{m-2} + A_4 x^{m-4} - A_6 x^{m-6} + \ldots$$

Диференцијалимо ову једначину и за тим помножимо са $\sqrt{1 - x^2}$, наћи ћемо

$$m \sin(m \operatorname{arc}\cos x)$$

$$= \sqrt{1-x^2}\,\{m A_0 x^{m-1} - (m-2) A_2 x^{m-3} + (m-4) A_4 x^{m-5} - \ldots\}.$$

Ова једначина диференцијалена по ново, умножена са $\sqrt{1 - x^2}$ и сравнив резултат са првобитном једначином, долази се до овог односа

$$4k(m-k) A_{2k} = (m - 2k + 2)(m - 2k + 1) A_{2k-2},$$

који служи на то, да бисмо изразили $A_2, A_4, A_6, \ldots$, са предходним непознатим сачиниоцем A_0. Налазимо

$$A_2 = \frac{m}{1}\frac{A_0}{2^2}, \quad A_4 = \frac{m(m-3)}{1\cdot 2}\frac{A_0}{2^4}, \ldots,$$

$$A_{2k} = \frac{m(m-k-1)(m-k-2)\cdot\cdot\cdot(m-2k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdot\cdot k}\frac{A_0}{2^{2k}}.$$

Да бисмо одредили A_0, разликујмо m парно (m = 2n) и m непарно (m = 2n + 1). У првом је случају

$$\cos 2nu = A_0 \cos^{2n} u - \cdot \cdot \cdot + (-1)^{n-1} A_{2n-2} \cos^2 u$$

$$+ (-1)^n A_{2n},$$

и за $u = \frac{1}{2}\pi$

$$\cos n\pi = (-1)^n A_{2n} \quad \text{тј.} \quad A_{2n} = 1.$$

С друге стране имамо по формули за A_{2k}, кад је $m = 2n$, $k = n$ стављено,

$$A_{2n} = 2\,\frac{A_0}{2^{2n}},$$

према томе, пошто је $A_{2n} = 1$, имамо

$$A_0 = 2^{2n-1} = 2^{m-1}.$$

У случају за m = 2n + 1 добићемо

$$\frac{\cos(2n+1)u}{\cos u} = A_0 \cos^{2n} u - \cdot \cdot \cdot + (-1)^{n-1} A_{2n-2} \cos^2 u$$

$$+ (-1)^n A_{2n},$$

и за $u = \frac{1}{2}\pi$

$$(2n+1)\cos n\pi = (-1)^n A_{2n} \quad \text{тј.} \quad A_{2n} = 2n+1.$$

С друге стране имамо по формули за A_{2k}, кад је $m = 2n+1$, $k = n$ стављено,

$$A_{2n} = \frac{2n+1}{1}\,\frac{A_0}{2^{2n}},$$

сравнив са $A_{2n} = 2n + 1$, добијамо

$$A_0 = 2^{2n} = 2^{m-1}.$$

Дакле, у сваком случају је $A_0 = 2^{m-1}$, то је

$$2\cos mu = (2\cos u)^m - \frac{m}{1}(2\cos u)^{m-2} + \frac{m(m-3)}{1\cdot 2}(2\cos u)^{m-4}$$

$$- \frac{m(m-4)(m-5)}{1\cdot 2\cdot 3}(2\cos u)^{m-6} + \cdot\cdot\cdot\cdot$$

Из ове, диференцијалењем, добијамо

$$\frac{\sin mu}{\sin u} = (2\cos u)^{m-1} - \frac{m-2}{1}(2\cos u)^{m-3}$$

$$+ \frac{(m-3)(m-4)}{1\cdot 2}(2\cos u)^{m-5}$$

$$- \frac{(m-4)(m-5)(m-6)}{1\cdot 2\cdot 3}(2\cos u)^{m-7} + \cdot\cdot\cdot\cdot$$

Нека ми се не замери што ћу, о истом питању, навести важан чланак *Sur quelques développements de* sin nx *et* cos nx; *E. Catalan. (Nouvelles annales mathématiques, 3e série, t. 2, 1883).*

I. Развијање у ред sin nx. — Знатно упрошћење уводи се у обрасце за sin nx и cos nx, уводећи 2 sin x и 2 cos x у место sin x и cos x.

1°. Директан рачун за sin 2x, sin 4x, sin 6x, · · ·, води к претпоставци

$$(1) \quad (-1)^{\frac{n}{2}-1} \sin nx = \cos x\, \Sigma A_i (2\sin x)^{n-i}$$

(n парно, i непарно).

Узев изводе оба дела горње једначине, налазимо

$$(2) \left\{ \begin{aligned} & (-1)^{\frac{n}{2}-1} n\cos nx = \Sigma\, 2(n-i) A_i (2\sin x)^{n-i-1} \\ & \qquad - \Sigma \frac{1}{2}(n-i+1) A_i (2\sin x)^{n-i+1}; \end{aligned} \right.$$

за тим узев на ново изводе

$$(3)\quad \begin{cases} -(-1)^{\frac{n}{2}-1} n^2 \sin nx = \cos x \, \Sigma \, 4\,(n-i)\,(n-i-1)\, A_i\, (2\sin x)^{n-i-2} \\ \qquad - \cos x \, \Sigma (n-i+1)^2 A_i (2\sin x)^{n-i}. \end{cases}$$

Комбинацијом једначина под (1) и (3), по скраћењу са $\cos x$, добићемо

$$(4)\quad \begin{cases} o = \Sigma (2n - i + 1)\,(i-1)\, A_i\, (2\sin x)^{n-i} \\ + \Sigma 4\,(n-i)\,(n-i-1)\, A_i\, (2\sin x)^{n-i-2}. \end{cases}$$

На десној страни, сачинитељ од $(2\sin x)^{n-i}$ биће

$$(2n - i + 1)\,(i-1)\, A_i + 4\,(n-i+2)\,(n-i+1)\, A_{i-2}.$$

На левој страни, тај је сачинитељ нула, дакле је

$$(5)\quad A_i = -\frac{(n-i+2)\,(n-i+1)}{\left(n - \frac{i-1}{2}\right)\left(\frac{i-1}{2}\right)} A_{i-2}.$$

Лако се доказује да је $A_{1} = 1$.*

---

* И заиста, из Moivre-овог обрасца, добијамо

$$\frac{\sin nx}{\cos x} = \frac{n}{1} \cos^{n-2} x \sin x$$

$$- \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos^{n-4} x \sin^3 x + \cdot \cdot \cdot ,$$

или

$$\frac{\sin nx}{\cos x} = \frac{n}{1} (1 - \sin^2 x)^{\frac{n}{2}-1} \sin x$$

$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(1-\sin^2 x)^{\frac{n}{2}-2}\sin^3 x+\ldots.$$

Но, на десноj страни, сачинитељ од $\sin^{n-1}x$ jесте, у апсолутноj вредности,

$$C_{n,1}+C_{n,3}+C_{n,5}+\ldots=2^{n-1}.$$

Услед тога je

$$A_3=-\frac{n-2}{1},$$

$$A_5=\frac{(n-3)(n-4)}{1\cdot 2},$$

$$A_7=-\frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1\cdot 2\cdot 3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

и у опште

$$(6)\quad A_i=(-1)^{\frac{i-1}{2}}C_{n-\frac{1+i}{2},\ \frac{i-1}{2}}.$$

Први од тражених образаца биће оваj

$$(A)\quad (-1)^{\frac{n}{2}-1}\frac{\sin nx}{\cos x}$$

$$=\Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}}C_{n-\frac{i+1}{2},\ \frac{i-1}{2}}(2\sin x)^{n-i},$$

(n парно, i непарно).

2°. Да бисмо добили други, довољно je заменити x са $\frac{\pi}{2}-x$, па ћемо одмах добити

$$(B) \quad \frac{\sin nx}{\sin x} = \Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} C_{n-\frac{i+1}{2}, \frac{i-1}{2}} (2\cos x)^{n-i}.$$

(n парно, i непарно).*

II. Развијање у ред cos nx. — 3°. Ако се стави

$$(7) \quad (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos nx = \cos x \, \Sigma B_i (2\sin x)^{n-i},$$

(n парно, i непарно). Јасно је, без новог рачунања, да је однос између B_i и B_{i-2}, изузев смену писмена, онај исти исказан у обрасцу под (5) тј.

$$(8) \quad B_i = -\frac{(n-i+2)(n-i+1)}{\left(n-\frac{i-1}{2}\right)\left(\frac{i-1}{2}\right)} B_{i-2}.$$

И пошто је $B_1 = 1 = A_1$, то је

$$(9) \quad B_i = A_i = (-1)^{\frac{i-1}{2}} C_{n-\frac{i+1}{2}, \frac{i-1}{2}}.$$

---

* 1°. Ако је $n = 4\mu$, означена смена даје

$$(-1)^{\frac{n}{2}-1} \sin nx = -\sin 4\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$= -\sin(-nx) = \sin nx.$$

2°. Ако је $n = 4\mu + 2$,

$$(-1)^{\frac{n}{2}-1} \sin nx = \sin(4\mu + 2)\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$= \sin(\pi - nx) = \sin nx.$$

Тражени ред биће

$$(C)\quad (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\cos nx}{\cos x}$$

$$= \Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} C_{n-\frac{i+1}{2},\ \frac{i-1}{2}} (2\sin x)^{n-i},$$

(n непарно, i непарно).

4°. Мењајући x у $\frac{\pi}{2} - x$, добијамо за тим

$$(D)\quad \frac{\sin nx}{\sin x} = \Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} C_{n-\frac{i+1}{2},\ \frac{i-1}{2}} (2\cos x)^{n-i},$$

(n непарно, i непарно).

5°. Кад је n парно, cos nx је парна функција по cos x. Сличним рачуном, пређашњему, наћи ћемо

$$(E)\quad \cos nx = \Sigma(-1)^{\frac{k}{2}} \frac{n}{2n-k} C_{n-\frac{k}{2},\ \frac{k}{2}} (2\cos x)^{n-k},$$

(n парно, k парно).

III. Примене. — 6°. Ако претпоставимо постепено n = 4, 5, 6, 7 добићемо познате вредности:

$$-\frac{\sin 4x}{\cos x} = (2\sin x)^3 - 2(2\sin x),$$

$$\frac{\sin 4x}{\cos x} = (2\cos x)^3 - 2(2\cos x),$$

$$\frac{\cos 5x}{\cos x} = (2\sin x)^4 - 3(2\sin x)^2 + 1,$$

$$\frac{\sin 5x}{\sin x} = (2\cos x)^4 - 3(2\cos x)^2 + 1,$$

$$\frac{\sin 6x}{\cos x} = (2 \sin x)^5 - 4 (2 \sin x)^3 + 3 (2 \sin x),$$

$$\frac{\sin 6x}{\sin x} = (2 \cos x)^5 - 4 (2 \cos x)^3 + 3 (2 \cos x),$$

$$-\frac{\cos 7x}{\cos x} = (2 \sin x)^6 - 5 (2 \sin x)^4 + 6 (2 \sin x)^2 - 1,$$

$$-\frac{\sin 7x}{\sin x} = (2 \cos x)^6 - 5 (2 \cos x)^4 + 6 (2 \cos x)^2 - 1,$$

$$\cos 4x = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1,$$

$$\cos 6x = 32 \cos^6 x - 48 \cos^4 x + 18 \cos^2 x - 1.$$

IV. Примедбе. — 7°. Образац (D), развијен, постаје

$$\frac{\sin nx}{\sin x} = (2 \cos x)^{n-1} - C_{n-2, 1} (2 \cos x)^{n-3} + C_{n-3, 2} (2 \cos x)^{n-5}$$
$$- C_{n-4, 3} (2 \cos x)^{n-7} + \cdots.$$

Кад се изврши на мало другојачи начин од овога што наведосмо, наћи ћемо

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\sin nx}{\sin x} = (2 \sin x)^{n-1} - \frac{n}{1} (2 \sin x)^{n-3}$$

$$+ \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2} (2 \sin x)^{n-5} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (2 \sin x)^{n-7} + \cdots.$$

Дакле, имаћемо ову идентичну једначину, у којој је n непарно,

$$\text{(F)} \qquad (2 \cos x)^{n-1} - \frac{n-2}{1} (2 \cos x)^{n-3}$$

$$+ \frac{(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2} (2 \cos x)^{n-5} - \cdots$$

$$= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \Bigg[(2 \sin x)^{n-1} - \frac{n}{1} (2 \sin x)^{n-3} + \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2} (2 \sin x)^{n-5}$$

$$- \frac{n(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (2 \sin x)^{n-7} + \cdots \Bigg].$$

8°. Пустимо, у истом обрасцу (D), нека x тежи нули; граница ка којој тежи лева страна јесте n. Отуда овај значајан образац

$$\text{(G)} \quad 2^{n-1} - 2^{n-3} C_{n-2,1} + 2^{n-5} C_{n-3,2} - 2^{n-7} C_{n-4,3} + \cdots = n.$$

(који не изискује да n буде непарно).

18 Проблем

Ако је

$$A_n = \frac{x^2(x^2+2^2)(x^2+4^2)\cdots[x^2+(2n-2)^2]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2n}, \quad A_0 = 1;$$

$$B_n = \frac{x(x^2+1^2)(x^2+3^2)\cdots[x^2+(2n-1)^2]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2n+1)}, \quad B_0 = x;$$

онда имамо обрасце

$$A_n + \frac{1}{2} A_{n-1} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} A_{n-2} + \cdots = (2n+1) \frac{B_n}{x},$$

$$B_n + \frac{1}{2} B_{n-1} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} B_{n-2} + \cdots = (2n+2) \frac{A_{n+1}}{x}.$$

(J. W. L. Glaicher).

Редови добивени развијањем cos mv и sin mv по растећим степенима од sin v вредиће за ма какав број m (то је Lagrange први доказао, ма да ти обрасци за m цео и положан број беху познати још од Viète-a, 1646), и ми можемо ставити $m = ix$, $(i = \sqrt{-1})$. Отуда ћемо добити

$$(1)\quad \cos ixv = 1 + \frac{x^2}{1\cdot 2}\sin^2 v + \frac{x^2(x^2+2^2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\sin^4 v + \cdots,$$

$$(2)\quad \frac{\sin ixv}{i} = \frac{x}{1}\sin v + \frac{x(x^2+1^2)}{1\cdot 2\cdot 3}\sin^3 v + \cdots.$$

Диференцијалимо сада обе једначине по v, и скратив чинитељем $x\cos v$, добићемо

$$\frac{\sin ixv}{i\cos v} = \frac{x}{1}\sin v + \frac{x(x^2+2^2)}{1\cdot 2\cdot 3}\sin^3 v + \cdots,$$

$$\frac{\cos ixv}{\cos v} = 1 + \frac{x^2+1^2}{1\cdot 2}\sin^2 v + \frac{(x^2+1^2)(x^2+3^2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\sin^4 v + \cdots.$$

С друге стране, ако помножимо са

$$\frac{1}{\cos v} = 1 + \frac{1}{2}\sin^2 v + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\sin^4 v + \cdots,$$

добијамо, у место једначина под (1) и (2), ове

$$\frac{\cos ixv}{\cos v} = \left(1 + \frac{x^2}{1\cdot 2}\sin^2 v + \frac{x^2(x^2+2^2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\sin^4 v + \cdots\right)$$

$$\times\left(1 + \frac{1}{2}\sin^2 v + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\sin^4 v + \cdots\right),$$

и

$$\frac{\sin ixv}{i\cos v} = \left(\frac{x}{1}\sin v + \frac{x(x^2+1^2)}{1\cdot 2\quad 3}\sin^3 v + \cdots\right)$$

$$\times\left(1 + \frac{1}{2}\sin^2 v + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\sin^4 v + \cdots\right).$$

Ако свршимо означена множења, и изједначимо сачиниоце од $\sin^{2n} v$ у оба реда добијена за $\frac{\cos ixv}{\cos v}$; тако исто изједначимо сачиниоце од $\sin^{2n+1} v$ у оба реда од $\frac{\sin ixv}{i \cos v}$, наћи ћемо одмах задате обрасце. *(Nouvelle correspondance mathématique, t. 5, p. 247, 1879).*

19 Проблем

Развити у ред функцију

$$\frac{1}{\cos x}.$$

Између различних метода да тај ред добијемо, најпростија (за сада) изгледа нам она која се састоји у томе да се стави

$$(1) \quad \frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{P_2 x^2}{1 \cdot 2} + \frac{P_4 x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{P_6 x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \cdots,$$

или

$$1 = \left(1 + \frac{P_2 x^2}{1 \cdot 2} + \frac{P_4 x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{P_6 x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \cdots\right)$$

$$\times \left(1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \cdots\right)$$

Извршив означено множење и ставив сачиниоце разних степена x-а равне нули, добићемо

$$P_2 - 1 = 0, \; P_4 - \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} P_2 + 1 = 0, \; P_6 - \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} P_4$$

$$+ \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} P_2 - 1 = 0, \cdots$$

и, у опште,

$$P_{2n} - \frac{2n(2n-1)}{1 \cdot 2} P_{2n-2}$$

$$+ \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} P_{2n-4} - \cdots \pm 1 = 0.$$

Отуда

$$P_2 = 1, \quad P_4 = 5, \quad P_6 = 61, \quad P_8 = 1385, \cdots.$$

Заменимо $P_2, P_4, P_6, \cdots$, њиховим вредностима у једначину под (1), па ћемо добити ред

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4$$

$$+ \frac{61}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} x^6 + \frac{1385}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 8} x^8 + \cdots.$$

(E. Catalan, Mélanges mathématiques, t. I. p. 92, 1885). **Читаоцу остављамо да се увери, да ћемо исти ред добити ако задату функцију развијемо по Mac-Laurin-овом образцу.**

20 Проблем

Под условом произвољног μ-а, треба развити у ред функцију

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^\mu = (1+x)^\mu (1-x)^{-\mu}.$$

Извршив означено множење следује тренутно да, за вредности x-а мање од јединице, постоји једначина овога облика

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^\mu = 1 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \cdots,$$

$$-1 < x < +1,$$

и да је сачинилац C_n одређен обрасцем

$$C_n = (-\mu)_0 (\mu)_n - (-\mu)_1 (\mu)_{n-1} + (-\mu)_2 (\mu)_{n-2} - \cdots$$
$$\cdots + (-1)^n (-\mu)_n (\mu)_0.$$

Отуда добијамо, за шест првих сачинилаца,

$$C_1 = 2\mu,$$

$$C_2 = 2\mu^2,$$

$$C_3 = \frac{2}{3}(2\mu^3 + \mu),$$

$$C_4 = \frac{2}{3}(\mu^4 + 2\mu^2),$$

$$C_5 = \frac{1}{15}(2\mu^5 + 10\mu^3 + 3\mu),$$

$$C_6 = \frac{2}{45}(2\mu^6 + 20\mu^4 + 23\mu^2).$$

Функција $(1 + x)^\mu (1 - x)^{-\mu}$ остаје иста, кад се у исто време x са $-x$ и μ са $-\mu$ смени, тиме се објашњава, да C_{2k} само парне, а C_{2k+1} само непарне степене μ-а садржи.

За довољно мало x може се ставити

$$\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)^\mu = \left(1 + \frac{2x}{1 - x}\right)^\mu$$

$$= 1 + (\mu)_1 2x(1 - x)^{-1} + (\mu)_2 (2x)^2 (1 - x)^{-2} + \cdots,$$

те се добија са даљим развијањем степена од $1 - x$ једна друга, нешто угоднија, формула за C_n, на име

$$C_n = 2(n-1)_0 (\mu)_1 + 2^2 (n-1)_1 (\mu)_2 + 2^3 (n-1)_2 (\mu)_3 + \cdots$$
$$\cdots + 2^n (n-1)_{n-1} (\mu)_n.$$

Нећe ли се сваки сачинилац за се (независно), него један сачинилац помоћу другог да израчуна, то се диференцијали једначина

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\mu} = 1 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \cdot \cdot \cdot ,$$

по x, помножи се добивени извод са $1 - x^2$ и производ сравни са првобитном једначином умноженом са 2μ; тако ћемо добити образац

$$C_{n+2} = \frac{2\mu C_{n+1} + n C_n}{n+2},$$

из кога се, почињући са $C_0 = 1$ и $C_1 = 2\mu$, могу редом израчунати C_2, C_3, C_4, ...

Аналого пређашњој формули јесу ове

$$C_{n+1} = \frac{2\mu C_n + (n-1) C_{n-1}}{n+1}, \quad C_n = \frac{2\mu C_{n-1} + (n-2) C_{n-2}}{n},$$

елиминише ли се C_{n+1} и C_{n-1} из ових трију једначина, остаће једна једначина између C_{n+2}, C_n, C_{n+2}, која се на овај начин даје представити

$$C_{n+2} = \frac{(4\mu^2 + 2n^2) C_n - (n-1)(n-2) C_{n-2}}{(n+1)(n+2)};$$

она служи за $n = 2, 4, 6, \cdot \cdot \cdot$, да израчунамо сачиниоце парних сказаљака, за $n = 3, 5, 7, \cdot \cdot \cdot$, за израчунавање сачинилаца непарних сказаљака.

Стави ли се у добивеном реду

$$x = \frac{z}{2+z},$$

то ће исти имати овај облик

$$(1+z)^{\mu} = 1 + C_1 \frac{z}{2+z} + C_2 \left(\frac{z}{2+z}\right)^2 + \cdots,$$

$$z > 1.$$

21 Проблем

Тражи се ред израза

$$2 \operatorname{Log} \left(\frac{2}{1+\sqrt{1-x}}\right).$$

Развије ли се најпре $\sqrt{1-x}$ по биномном обрасцу и употреби ли се логаритамски ред, то се добија за горњи израз

$$2 \operatorname{Log} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}x-\frac{1}{16}x^2-\cdots}\right)$$

$$= 2\left\{\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{16}x^2+\cdots\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{16}x^2+\cdots\right)^2\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{16}x^2+\cdots\right)^3+\cdots\right\}$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \cdots$$

$$+ \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{32}x^3 + \cdots$$

$$+ \frac{1}{96}x^3 + \cdots$$

$$+ \cdots$$

Овај двојни ред испуњава услове, под којима је дозвољено његове чланове уредити по стубовима; па се добија

$$2\,\mathrm{Log}\left(\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}\right)=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots,$$

$$x^2<1,$$

где је $a_1=\frac{1}{2}$, $a_2=\frac{3}{16}$, $a_3=\frac{5}{48}$. Диференцијалењем долази се лако до једначине

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}=1+1a_1x+2a_2x^2+3a_3x^3+\cdots,$$

која се са редом добивеним за $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$ може сравнити. Крајни резултат гласи

$$2\,\mathrm{Log}\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-x}}\right)=\frac{1}{2}\frac{x}{1}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{x^2}{2}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\frac{x^3}{3}+\cdots,$$

$$x^2<1,$$

или, тако исто,

$$2\,\mathrm{Log}\left(\frac{2}{1+z}\right)=\frac{1}{2}\frac{1-z^2}{1}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{(1-z^2)^2}{2}$$

$$+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\frac{(1-z^2)^3}{3}+\cdots,$$

$$0<z<\sqrt{2}.$$

Замена $z=\cos\theta$ води ка важној формули за $\mathrm{Log}\cos\frac{\theta}{2}$.

22 Проблем

Тражи се ред израза

$$\left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{2}\right)^{\mu},$$

где μ један произвољни цели број треба да значи.

У опште z^μ може се представити у облику

$$e^{\mu \operatorname{Log} z} = 1 + \frac{\mu \operatorname{Log} z}{1} + \frac{(\mu \operatorname{Log} z)^2}{1 \cdot 2} + \cdots,$$

према таме је

$$\left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{2}\right)^\mu = 1 - \frac{\mu}{1} \operatorname{Log}\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-x}}\right)$$

$$+ \frac{\mu^2}{1 \cdot 2}\left[\operatorname{Log}\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-x}}\right)\right]^2 - \cdots$$

Овде можемо у претходном проблему добивени ред употребити, при чему десна страна постаје овај двојни ред, који је везан за услов $x^2 < 1$,

$$1 - \frac{1}{1}\mu\left(\frac{1}{4}x + \frac{3}{32}x^2 + \frac{5}{96}x^3 + \cdots\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\mu^2\left(\frac{1}{16}x^2 + \frac{3}{64}x^3 + \cdots\right)$$

$$- \frac{1}{6}\mu^3\left(\frac{1}{64}x^3 + \cdots\right)$$

$$+ \cdots$$

Као што је лако увидети, овај двојни ред остаје збирљив и онда, ако се његови чланови са положним знацима узели буду; због тога се сме уредити по стубовима, па ће се добити резултат облика

$$\left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{2}\right)^\mu = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots,$$

$$x^2 < 1,$$

где су први сачиниоци

$$a_0 = 1,\ a_1 = -\frac{\mu}{4},\ a_2 = \frac{\mu^2 - 3\mu}{32}.$$

Диференцијалимо претходну једначину и употребимо идентичну једначину

$$(1 + \sqrt{1 - x})^{\mu-1} = \frac{(1 + \sqrt{1 - x})^{\mu}}{x}(1 - \sqrt{1 - x}).$$

то се лако долази до резултата

$$\mu\left(\frac{1 + \sqrt{1 - x}}{2}\right)^{\mu} = \sqrt{1 - x}\ \{\mu a_0 + (\mu - 2)a_1 x$$

$$+ (\mu - 4)a_2 x^2 + (\mu - 6)a_3 x^3 + \cdots\},$$

из кога се, још једним диференцијалењем, добија

$$\mu^2\left(\frac{1 + \sqrt{1 - x}}{2}\right)^{\mu}(1 - \sqrt{1 - x})$$

$$= [1\,\mu a_0 - 2(\mu - 2)a_1]x + [3(\mu - 2)a_1 - 4(\mu - 4)a_2]x^2$$

$$+ [5(\mu - 4)a_2 - 6(\mu - 6)a_3]x^3 + \cdots$$

Помножи ли се претходна једначина са $\mu\sqrt{1 - x}$ и сабере ли се производ са последњом једначином, то постаје

$$\mu^2\left(\frac{1 + \sqrt{1 - x}}{2}\right)^{\mu} = \mu^2 a_0 + [(\mu-2)^2 a_1 - \mu(\mu-1)a_0]x$$

$$+ [(\mu - 4)^2 a_2 - (\mu - 2)(\mu - 3)a_1]x^2 + \cdots.$$

Стави ли се сада на левој страни примитивни ред и сравне ли се сачиниоци с обе стране; добија се тада релација

$$a_k = -\frac{(\mu - 2k + 2)(\mu - 2k + 1)}{k(\mu - k)}\frac{a_{k-1}}{4},$$

из које се сада, почињући са $a_0 = 1$, одређују сачиниоци $a_1, a_2, a_3, \cdots$, што закључно води овоме резултату

$$\left(\frac{1 + \sqrt{1 - x}}{2}\right)^{\mu}$$

$$= 1 - \frac{\mu}{1}\frac{x}{4} + \frac{\mu(\mu - 3)}{1 \cdot 2}\left(\frac{x}{4}\right)^2 - \frac{\mu(\mu - 4)(\mu - 5)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(\frac{x}{4}\right)^3$$

$$+ \frac{\mu(\mu - 5)(\mu - 6)(\mu - 7)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\left(\frac{x}{4}\right)^4 - \cdots,$$

$$x^2 < 1.$$

Стави ли се $\sqrt{1 - x} = 1 - 2z$, то се добија још

$$(1 - z)^{\mu} = 1 - \frac{\mu}{1} z(1 - z) + \frac{\mu(\mu - 3)}{1 \cdot 2} z^2 (1 - z)^2$$

$$- \frac{\mu(\mu - 4)(\mu - 5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} z^3 (1 - z)^3 + \cdots,$$

$$- \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1) < z < + \frac{1}{2}.$$

Важни специјални случајеви овога јесу

$$\frac{1}{1 - z} = 1 + \frac{1}{2}(2)_1 z(1 - z) + \frac{1}{3}(4)_2 z^2 (1 - z)^2$$

$$+ \frac{1}{4}(6)_3 z^3 (1 - z)^3 + \cdots,$$

$$\frac{1}{(1 - z)^2} = 1 + \frac{1}{2}(4)_1 z(1 - z) + \frac{1}{3}(6)_2 z^2 (1 - z)^2$$

$$+ \frac{1}{4}(8)_3 z^3 (1 - z)^3 + \cdots.$$

23 Проблем

Развити у редове функције

Thx, Cothx, Cosechx *и* Sechx.

1°. Видели смо, у 19 проблему свеска прва страна 167, да се, ставив $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$, за $x = 0$, налази

$$f(0) = 1,\ f'(0) = -\frac{1}{2}, \ldots, f^{(2n-1)}(0) = 0,$$

$$f^{(2n)}(0) = (-1)^{n-1} B_{2n-1},$$

$n > 1$, а B_{2n-1} означавајући *Bernoulli-јеве бројеве.* Имаћемо дакле по Mac-Laurin-овом обрасцу, ставив ради већег упрошћења

$$A_{2n-1} = \frac{(-1)^{n-1} B_{2n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot 2n},$$

овај ред

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{1}{2}x + A_1 x^2 + A_3 x^4 + \cdot \cdot \cdot + A_{2n-1} x^{2n} + \cdot \cdot \cdot,$$

и тај ће ред бити збирљив за све вредности x-а мање од 2π, као што се то може увидети из теорије комплексних количина.

Отуда, за $2x < 2\pi$ или за $x < \pi$, добијамо

$$\frac{x}{e^x + 1} = \frac{x}{e^x - 1} - \frac{2x}{e^{2x} - 1}$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x + A_1 x^2 + A_3 x^4 + \cdot \cdot \cdot + A_{2n-1} x^{2n} + \cdot \cdot \cdot$$

$$- \left(1 - \frac{1}{2} 2x + A_1 2^2 x^2 + \cdot \cdot \cdot + A_{2n-1} 2^{2n} x^{2n} + \cdot \cdot \cdot\right),$$

откуда, по свођењу и делећи са x,

$$\frac{1}{e^x+1}=\frac{1}{2}-(2^2-1)A_1x-\cdots-(2^{2n}-1)A_{2n-1}x^{2n-1}-\cdots.$$

Према томе је

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{e^x-1}{e^x+1}=1-\dfrac{2}{e^x+1} \\ =2[(2^2-1)A_1x+\cdots+(2^{2n}-1)A_{2n-1}x^{2n-1}+\cdots]. \end{cases}$$

Заменив у тој формули x са 2x, за $x<\frac{\pi}{2}$, имамо (види прву свеску страна 69)

$$(2)\ \mathrm{Th}x=2^2(2^2-1)A_1x+\cdots+2^{2n}(2^{2n}-1)A_{2n-1}x^{2n-1}+\cdots.$$

Ако у изразу за $\frac{x}{e^x-1}$ сменимо x са — x, добићемо

$$\frac{x}{1-e^{-x}}=\frac{xe^x}{e^x-1}=1+\frac{1}{2}x+A_1x^2+\cdots$$

$$\cdots+A_{2n-1}x^{2n}+\cdots;$$

откуда, сабрав овај ред са првим, делећи са x, добијамо

$$\frac{e^x+1}{e^x-1}=2\left(\frac{1}{x}+A_1x+\cdots+A_{2n-1}x^{2n-1}+\cdots\right).$$

Ако у овоме реду сменимо x са 2x, за $x<\pi$, добићемо

$$(3)\ \mathrm{Coth}\,x=\frac{1}{x}+2^2A_1x+\cdots+2^{2n}A_{2n-1}x^{2n-1}+\cdots.$$

За тим, имајући у виду образац под (1) који даје $\mathrm{Th}\frac{x}{2}$, имамо

$$\operatorname{Cosech} x = \frac{\operatorname{Ch} x}{\operatorname{Sh} x} - \frac{\operatorname{Ch} x - 1}{\operatorname{Sh} x} = \operatorname{Coth} x - \operatorname{Th} \frac{x}{2},$$

тј., за $x < \pi$,

$$(4) \quad \operatorname{Cosech} x = \frac{1}{x} - 2[(2^1 - 1) A_1 x + \cdots$$

$$\cdots + (2^{2n-1} - 1) A_{2n-1} x^{2n-1} + \cdots].$$

Примедба. — Према 29 проблему, свеска прва страна 67, знамо да је

$$\operatorname{Sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{Ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

и према Euler-овим обрасцима

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$

лако је увидети да је

$$\cos x = \operatorname{Ch} xi, \ \sin x = \frac{1}{i} \operatorname{Sh} xi.$$

Према томе је

$$\operatorname{tang} x = \frac{1}{i} \operatorname{Th} xi, \ \operatorname{cotg} x = i \operatorname{Coth} xi, \ \operatorname{cosec} x = i \operatorname{Cosech} xi.$$

Дакле, ставив

$$a_{2n-1} = \frac{B_{2n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2n},$$

добићемо из образаца (2), (3) и (4), за исте респективне границе вредности x-a,

$$\left\{\begin{array}{l}\tan x = 2^2(2^2-1)a_1 x + \cdots + 2^{2n}(2^{2n}-1)a_{2n-1}x^{2n-1} + \cdots, \\ \cot x = \dfrac{1}{x} - 2^2 a_1 x - \cdots - 2^{2n} a_{2n-1} x^{2n-1} - \cdots, \\ \operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{x} + 2[(2^1-1)a_1 x + \cdots + (2^{2n}-1)a_{2n-1}x^{2n-1} + \cdots].\end{array}\right.$$

2°. Ако се стави

$$\operatorname{Sech} x = \frac{2e^x}{e^{2x}+1} = y,$$

имаћемо $e^{2x}y = 2e^x - y$, откуда

$$e^{2x}(D_x + 2)^n y = 2e^x - D_x^n y,$$

образац, који ће нам дати постепене изводе y-а, а за тим вредности ових извода за $x = o$. Замењујући ове последње у Mac-Laurin-ов образац, за $x < \frac{\pi}{2}$, добићемо ред за Sech x, који ће садржавати само парне степене x-а.

За тим имамо $\sec x = \operatorname{Sech} xi$, откуда ћемо, за $x < \frac{\pi}{2}$, закључити ред за sec x.

24 Проблем

Развити у ред функцију y дату једначином

$$(1) \qquad \tan y = k \tan x,$$

а $k > o$.

Ако у задатој једначини (1), у којој је k стална количина а y и x представљају два различна угла, заменимо tang y и tang x њиховим вредностима у виду изложилачких функција, добићемо

$$(2) \qquad \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{e^{iy} + e^{-iy}} = k\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}}.$$

Обема странама ове једначине додајући па за тим одузимљући јединицу, добићемо две нове једначине које нам, делећи их члан са чланом, по лаком свођењу дају

$$(3)\quad e^{2iy}=\frac{(k+1)e^{ix}-(k-1)e^{-ix}}{(k+1)e^{-ix}-(k-1)e^{ix}}=e^{2ix}\frac{1-\dfrac{k-1}{k+1}e^{-2ix}}{1-\dfrac{k-1}{k+1}e^{2ix}}.$$

Ставимо

$$n=\frac{k-1}{k+1}$$

и узмимо Неперов логаритам последње једначине (3), добићемо

$$2iy = 2ix + \mathrm{Log}(1-ne^{-2ix}) - \mathrm{Log}(1-ne^{2ix}).$$

Логаритми се могу развити у ред, ако је модуо количина ne^{-2ix}, ne^{2ix} мањи од јединице, тј. ако је $n^2 < 1$ или $k > o$.

У опште, ако је модуо z-а мањи од јединице, имамо

$$\mathrm{Log}(1-z) = -\frac{z}{1}-\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}-\dots.$$

Према томе је

$$2iy = 2ix - \left[\frac{n}{1}e^{-2ix}+\frac{n^2}{2}e^{-4ix}+\frac{n^3}{3}e^{-6ix}+\dots\right]$$

$$+\left[\frac{n}{1}e^{2ix}+\frac{n^2}{2}e^{4ix}+\frac{n^3}{3}e^{6ix}+\dots\right];$$

откуда

$$y = x + \frac{n}{1}\,\frac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{2i}+\frac{n^2}{2}\,\frac{e^{4ix}-e^{-4ix}}{2i}$$

$$+\frac{n^3}{3}\,\frac{e^{6ix}-e^{-6ix}}{2i}+\dots,$$

или

$$(4)\quad y = x + \frac{n}{1}\sin 2x + \frac{n^2}{2}\sin 4x + \frac{n^3}{3}\sin 6x + \cdots.$$

25 Проблем

Развити у ред функцију

$$(1)\quad y = \frac{n - \cos x + i\sin x}{1 - 2n\cos x + n^2},$$

за $n^2 < 1$.

Именитељ датог разломка другог је степена, и има за корене

$$n_1 = \cos x - i\sin x = e^{-ix},$$

$$n_2 = \cos x + i\sin x = e^{ix}.$$

Дакле, функција y може се написати у облику

$$y = \frac{n - \cos x + i\sin x}{(n - n_1)(n - n_2)} = \frac{n - e^{-ix}}{(n - e^{-ix})(n - e^{ix})},$$

или

$$y = \frac{1}{n - e^{ix}} = - e^{-ix}\frac{1}{1 - ne^{-ix}},$$

или развијајући $\dfrac{1}{1 - ne^{-ix}}$ у ред, збирљив за сваку апсолутну вредност n-а која је мања од јединице,

$$y = - e^{-ix}(1 + ne^{-ix} + n^2e^{-2ix} + n^3e^{-3ix} + \cdots).$$

Општи члан реда биће

$$- n^pe^{-(p+1)ix} = - n^p[\cos(p+1)x - i\sin(p+1)x];$$

према томе, изједначавајући засебно стварне и уображене делове y-а, добићемо два реда

$$(2)\quad \frac{n - \cos x}{1 - 2n\cos x + n^2} = -[\cos x + n\cos 2x + n^2\cos 3x + \cdots$$

$$\cdots + n^p\cos(p+1)x + \cdots],$$

и

$$(3)\quad \frac{\sin x}{1 - 2n\cos x + n^2} = \sin x + n\sin 2x + n^2\sin 3x + \cdots$$

$$\cdots + n^p\sin(p+1)x + \cdots$$

Дакле je

$$(4)\quad y = -[\cos x + n\cos 2x + n^2\cos 3x +$$

$$\cdots + n^p\cos(p+1)x + \cdots]$$

$$+ i[\sin x + n\sin 2x + \cdots + n^p\sin(p+1)x + \cdots].$$

26 Проблем

Развити у ред функцију y *дату једначином*

$$(1)\quad \operatorname{tang} y = \frac{n\sin x}{1 + n\cos x},$$

за $n^2 < 1$.

Први извод y-а по n дат је једначином

$$(2)\quad \frac{1}{\cos^2 y}\frac{dy}{dn} = \frac{\sin x}{(1 + n\cos x)^2};$$

замењујући $\cos^2 y$ његовом вредношћу у функцији x-а, добићемо

$$\cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tang}^2 y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{n\sin x}{1 + n\cos x}\right)^2}.$$

Ставив ту вредност у једначину (2) добићемо

$$\frac{dy}{dn} = \frac{\sin x}{1 + 2n\cos x + n^2};$$

или према обрасцу (3) у претходном проблему, за сваку апсолутну вредност n-а мању од јединице,

$$\frac{dy}{dn} = \sin x - n\sin 2x + n^2\sin 3x - \cdots$$

$$\cdots + n^{2p}\sin(2p+1)x - n^{2p+1}\sin(2p+2)x + \cdots,$$

откуда, интегралећи по n, добијамо

$$(3) \quad y = n\sin x - \frac{n^2}{2}\sin 2x + \frac{n^3}{3}\sin 3x - \cdots$$

$$\cdots + \frac{n^{2p+1}}{2p+1}\sin(2p+1)x - \frac{n^{2p+2}}{2p+2}\sin(2p+2)x + \cdots;$$

стална количина, коју бисмо требали додати услед интегралења, равна је нули, пошто је $y = o$ за $n = o$.

27 Проблем

Развити у ред функцију

$$y = \mathrm{Log}(1 - 2n\cos x + n^2)^{\frac{1}{2}},$$

за $n^2 < 1$.

Први извод y-а по n биће

$$\frac{dy}{dn} = \frac{-\cos x + n}{1 - 2n\cos x + n^2},$$

или, за $n^2 < 1$, према обрасцу под (2) 25 проблем

$$\frac{dy}{dn} = -[\cos x + n\cos 2x + n^2\cos 3x + \cdots$$

$$\cdots + n^{p-1}\cos px + \cdots].$$

Интегралимо по n последњу једначину па ћемо добити

$$y = -\left(n\cos x + \frac{n^2}{2}\cos 2x + \frac{n^3}{3}\cos 3x + \cdots\right.$$

$$\left.\cdots + \frac{n^p}{p}\cos px + \cdots\right),$$

и овде је стална количина, коју бисмо додали услед интегралења, равна нули, пошто је $y = o$ за $n = o$.

Примедба. Последња четири проблема позајмљени су из *Leçons d'Astronomie, lith., par M. Gruey, p. 14—16, 1885.*

28 Проблем

Наћи сачиниоца од α^p, при развијању у ред функције

$$\frac{1}{1 - e^\alpha x}.$$

(E. Catalan).

Задатак се своди на то да се нађе извод p-ни функције

$$(1) \quad y = \frac{1}{1 - e^\alpha x}.$$

Ако ставимо

$$(2) \quad y = \varphi(u), \quad u = e^\alpha,$$

добићемо

$$\frac{dy}{d\alpha} = e^\alpha \varphi'(u),$$

$$\frac{d^2y}{d\alpha^2} = e^\alpha \varphi'(u) + e^{2\alpha}\varphi''(u),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$(3)\quad \frac{d^p y}{d\alpha^p} = e^{\alpha}\varphi'(u) + \frac{a_2}{1\cdot 2}e^{2\alpha}\varphi''(u) + \cdot\cdot\cdot$$

$$\cdot\cdot\cdot + \frac{a_{p-1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(p-1)}\, e^{(p-1)\alpha}\varphi^{(p-1)}(u) + e^{p\alpha}\varphi^{(p)}(u).$$

Да бисмо одредили сачиниоце $a_2, a_3, \cdot\cdot\cdot, a_{p-1}$, који су независни од функције φ, узмимо

$$\varphi(u) = u^z = e^{\alpha z},$$

једначина (3) постаће, по скраћењу чинитеља $e^{\alpha z}$,

$$(4)\quad z^p = z + \frac{z(z-1)}{1\cdot 2}a_2 + \frac{z(z-1)(z-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a_3 + \cdot\cdot\cdot;$$

откуда изводимо

$$2^p = 2 + a_2,$$

$$3^p = 3 + 3a_2 + a_3,$$

$$4^p = 4 + 6a_2 + 4a_3 + a_4,$$

$$\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot;$$

а из ових

$$a_2 = 2^p - 2\cdot 1^p,$$

$$a_3 = 3^p - 3\cdot 2^p + 3\cdot 1^p,$$

$$a_4 = 4^p - 4\cdot 3^p + 6\cdot 2^p - 4\cdot 1^p,$$

$$\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot,$$

$$(5)\quad a_n = n^p - \frac{n}{1}(n-1)^p + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(n-2)^p - \cdot\cdot\cdot \pm \frac{n}{1}1^p.$$

У овом случају

$$\varphi^{(i)}(u) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot i x^i}{(1 - ux)^{i+1}},$$

и стављајући $u = 1$, што одговара за $\alpha = 0$, имамо

$$[6] \quad [\varphi^{(i)}(u)]_{u=1} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot i x^i}{(1 - x)^{i+1}}.$$

Образац (3) постаје

$$\frac{d^p y}{d\alpha^p} = \frac{x}{(1-x)^2} + a_2 \frac{x^2}{(1-x)^3} + \cdot \cdot \cdot$$

$$\cdot \cdot \cdot + a_{p-1} \frac{x^{p-1}}{(1-x)^p} + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot p \frac{x^p}{(1-x)^{p+1}}.$$

на послетку, по теореми Mac-Laurin-овој, сачинилац од α^p биће

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot p} \left(\frac{d^p y}{d\alpha^p}\right)_0.$$

Примедба. — Једначина под (5), употребив нотацију разлика, може се написати

$$a_n = \Delta^n (0^p).$$

Ако се стави

$$1 + 2^p x^p + 3^p x^p + 4^p x^p + \cdot \cdot \cdot = \frac{P_p}{(1 - x)^{p+1}},$$

дознаћемо лако:

1°. Да је P_p *један полином* $(p - 1)$ *степена, чији су сачиниоци цели бројеви.*

2°. Да је сачинилац од α^p *при развијању у ред функције* $\frac{1}{1 - e^\alpha x}$ *раван*

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot p} \frac{x P_p}{(1 - x)^{p+1}}.$$

Према добивеном разрешењу, имаћемо

$$P_p = (1-x)^{p-1} + x(1-x)^{p-2}\Delta^2(0^p) + x^2(1-x)^{p-3}\Delta^3(0^p) + \cdots$$
$$\cdots + x^{p-1}\Delta^p(0^p).$$

Нпр.

$$P_5 = x^4 + 26x^3 + 66x^2 + 26x + 1$$
$$= (1-x)^4 + x(1-x)^3\Delta^2(0^5) + x^2(1-x)^2\Delta^3(0^5)$$
$$+ x^3(1-x)\Delta^4(0^5) + x^4\Delta^5(0^5).$$

И заиста непосредним рачуном налазимо

$$\Delta^2(0^5) = 30, \ \Delta^3(0^5) = 150, \ \Delta^4(0^5) = 240, \ \Delta^5(0^5) = 120,$$

и тако ћемо имати

$$x^4 + 26x^3 + 66x^2 + 26x + x = (1-x)^4 + 30x(1-x)^3$$
$$+ 150x^2(1-x)^2 + 240x^3(1-x) + 120x^4.$$

У *Nouvelle corespondance mathématique, t. 6, p. 281, 1880,* налази се и још један начин разрешења овога проблема.

29 Проблем

Доказати да су сви изводи функције

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}},$$

равни нули за $x = o$; *закључити отуда, да се дата функција не може развити у ред по растећим степенима* x-а.

Различни редови, које смо добијали, ограничени на известан број чланова, даће увек приближну вредност функције, коју развијамо у ред кад је x довољно мала количина (или довољно велика ако степени од x опадају).

Продужујући их бесконачно, добићемо бесконачне редове. Ако су ти редови незбирљиви, они онда немају никаквог смисла. Cauchy је изнео овај значајан факат да, и кад су ти редови збирљиви, они могу не бити равни оној функцији од које произлазе. Такав је случај код задате функције.

Узмимо постепено изводе задате функције f(x),

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{2}{x^3},$$

$$f''(x) = 4 e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{1}{x^6} - 6 e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{1}{x^4} = e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{1}{x^4} \left(\frac{4}{x^2} - 6 \right)$$

$$= e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{1}{x^2} P_1(x),$$

. . . . ,

$$f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{1}{x^p} P(x),$$

где P(x) представља један полином по x, а p ма какав број.

Ми видимо да сви изводи имају $e^{-\frac{1}{x^2}}$ за чинитеља, који се, за x = o, своди на нулу.

Прозводи такви као што је

$$e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{1}{x^p},$$

узев за p ма какав цео број, опет су нули равни, за x = o.

Заиста

$$e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{1}{x^p} = \frac{1}{e^{\frac{1}{x^2}} x^p};$$

али је

$$(1)\quad e^{\frac{1}{x^2}} = 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{x^2}\right)^2 + \cdots$$

Дакле

$$e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{1}{x^p}$$

$$= \frac{1}{x^p + x^{p-2} + \frac{x^{p-4}}{1\cdot 2} + \cdots + \frac{x^{p-2k}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k} + \frac{x^{p-2k-2}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots (k+1)} + \cdots},$$

сви чланови у именитељу, чији су степени од x положни, равни су нули, за $x = o$. Пошто је ред под (1) бесконачан, то ће у последњој једначини десно у именитељу, који је такође бесконачан ред, бити чланова чији су степени од x одречни; а ти ће чланови постати бесконачно велики за $x = o$, а разломак ће постати нула, према томе и производ $e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{1}{x^p}$ своди се на нулу за $x = o$.

Ред је Mac-Laurin-ов ово

$$f(x) = f(o) + \frac{x}{1} f'(o) + \cdots + \frac{x^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} f^{(n)}(o) + R;$$

пошто су у нашем проблему $f(o), f'(o), \cdots f^{(n)}(o)$, од задате функције, равни нули за $x = o$, то се горњи ред своди на остатак R идентичан са задатом функцијом $e^{-\frac{1}{x^2}}$. Дакле, задата функција не може се у ред развити. На послетку, приметимо и то да ако имамо једну функцију $\varphi(x)$, коју можемо по Mac-Laurin-овом обрасцу у ред развити и ако ставимо

$$f(x) = \varphi(x) + e^{-\frac{1}{x^2}},$$

функција f(x) развијена у ред, по истом обрасцу, даће један ред збирљив, али који ће имати $\varphi(x)$ за суму а не f(x). Другим речима, функције $\varphi(x)$ и $\varphi(x) + e^{-\frac{1}{x^2}}$ развијене по Mac-Laurin-овом обрасцу дају један и исти ред.

30 Проблем

Из добивеног реда за функцију

$$(\arcsin x)^2,$$

извести ред

$$\operatorname{arc\,tang} z = \frac{z}{1+z^2}\left[1 + \frac{2}{3}\frac{z^2}{1+z^2} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\frac{z^2}{1+z^2}\right)^2 + \cdots\right].$$

Добивени ред за функцију $\arcsin x$ збирљив је за све вредности x-а узете у границама -1 и $+1$, па и за $x = -1$ и за $x = +1$, не водећи рачуна о знаку чланова у реду.

Ми смо, у 14 проблему овога одељка, под истим условима развили у ред функцију $(\arcsin x)^2$ и нашли смо

$$(1) \quad (\arcsin x)^2 = \frac{x^2}{1} + \frac{2}{3}\frac{x^4}{2} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\frac{x^6}{3} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}\frac{x^{2n}}{n} + \cdots.$$

До истог резултата дошли бисмо употребив методу неодређених сачинилаца.

Јасно је, да би функција $\arcsin x$, подигнута на ма какав степен и развијена по Mac-Laurin-овом обрасцу, дала ред такође збирљив за све вредности x-а узете у границама -1 и $+1$.

Диференцијалењем једначине под (1) добијамо

$$\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}x^5 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n-2)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)} x^{2n-1} + \cdots,$$

једначину у којој се претпоставља вредност x-а у границама -1 и $+1$.

Нека је

$$x = \frac{z}{(1+z^2)^{\frac{1}{2}}},$$

отуда, *(Алгебарска анализа, књига прва страна 472, Дим. Нешић)*, следује

$$\arcsin x = \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,tang} z,$$

а за тим

$$\operatorname{arc\,tang} z = \frac{z}{1+z^2}\left[1 + \frac{2}{3}\frac{z^2}{1+z^2} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}\left(\frac{z^2}{1+z^2}\right)^2 + \cdots\right].$$

Из последње једначине и из познате једначине

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{3},$$

(11 проблем страна 46; *Тригонометрија од Дим. Нешића, страна 97),* изводимо ову једначину

$$\frac{\pi}{4} = \frac{4}{10}\left[1 + \frac{2}{3}\frac{2}{10} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}\left(\frac{2}{10}\right)^2 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7}\left(\frac{2}{10}\right)^3 + \cdots\right]$$

$$+ \frac{3}{10}\left[1 + \frac{2}{3}\frac{1}{10} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7}\left(\frac{1}{10}\right)^3 + \cdots\right],$$

која је подесна за израчунавање броја π.

31 Проблем

Доказати да је могуће функцију

$$y = x \operatorname{cotg} x,$$

развити у ред облика

$$1 + a_2 \frac{x^2}{1 \cdot 2} + a_4 \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + a_{2n} \frac{x^{2n}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2n} + \cdots;$$

наћи израз за сачинитеља a_{2n} *у функцији оних што му претходе.*

Међу обрасцима, које смо нашли у 23 проблему овог одељка, нашли смо и ред за функцију $\frac{x}{e^x - 1}$. Лако је доказати да се, за стварне вредности x-а или за вредности уображене чији је модуо довољно мали, та функција може развити и у овај ред

$$\text{(A)} \qquad \frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + A_2 x^2 + A_4 x^4 + A_6 x^6 + \cdots,$$

где су сачиниоци A_2, A_4, $A_6, \cdots$, дати као функције Bernoulli-јевих бројева:

$$\text{(1)} \qquad A_2 = \frac{B_1}{1 \cdot 2}, \; A_4 = \frac{B_3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}, \; A_6 = \frac{B_5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}, \cdots$$

Ако у обрасцу (A) ставимо $x\sqrt{-1}$ у место x, добићемо, као што знамо,

$$\text{(B)} \qquad x \operatorname{cotg} x = 1 - 4A_2 x^2 + 4^2 A_4 x^4 - 4^3 A_6 x^6 + \cdots.$$

Имајући идентичну једначину

$$\operatorname{cotg} \frac{x}{2} - \operatorname{cotg} x = \frac{1}{\sin x},$$

добиħемо, услед обрасца под (B),

$$(C)\quad \frac{x}{\sin x} = 1 + 2(2-1)A_2x^2 - 2(2^3-1)A_4x^4 + 2(2^5-1)A_6x^6 - \cdots.$$

Задату функцију можемо написати овако

$$y = \frac{x}{\sin x}\cos x;$$

али је

$$\frac{x}{\sin x} = 1 + \frac{1}{2}\frac{\sin^2 x}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{\sin^4 x}{5} + \cdots,$$

откуда закључујемо да је y парна функција и да се, према томе, може развити у збирљив ред облика

$$y = 1 + a_2\frac{x^2}{1\cdot 2} + a_4\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots$$

$$\cdots + a_{2n}\frac{x^{2n}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 2n} + \cdots,$$

за вредности x-а које не превазилазе $\frac{\pi}{2}$.

Да бисмо израчунали сачинитеља $a_{2n} = \left(\frac{d^{2n}y}{dx^{2n}}\right)_0$, диференцијалимо $2n+1$ пута једначину

$$y\sin x = x\cos x,$$

по Leibnitz-овом обрасцу, па ħемо добити

$$y\sin\left(x + \frac{2n+1}{2}\pi\right) + (2n+1)y'\sin(x+n\pi) + \cdots$$

$$\cdots + \binom{2n+1}{2p}y^{(2p)}\sin\left(x + \frac{2n-2p+1}{2}\pi\right) + \cdots$$

$$\cdots + (2n+1)\,y^{(2n)} \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + y^{(2n+1)} \sin x$$

$$= x \cos\left(x + \frac{2n+1}{2}\pi\right) + (2n+1)\cos(x + n\pi);$$

откуда, стављајући $x = o$, добијамо

$$1 - \binom{2n+1}{2} a_2 + \cdots + (-1)^p \binom{2n+1}{2p} a_{2p} + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^n (2n+1)\, a_{2n} = (2n+1),$$

једначину која ће нам дати a_{2n} у функцији оних сачинитеља који му претходе.

32 Проблем

Ако ставимо

$$\frac{x}{2}\operatorname{cotg}\frac{x}{2} = 1 - B_1 \frac{x^2}{1 \cdot 2} - B_2 \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \cdots$$

$$\cdots - B_n \frac{x^{2n}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \;\cdot 2n} - \cdots,$$

имамо такође

$$\frac{x}{2}\,\frac{e^x+1}{e^x-1} = 1 + B_1 \frac{x^2}{1 \cdot 2} - B_2 \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{n-1} B_n \frac{x^{2n}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \;\cdot 2n} + \cdots$$

Израчунати првих девет сачинилаца.

Ако се стави

$$y = x \operatorname{cotg} x, \quad z = x\,\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1},$$

питање се своди да се докаже да је

$$(1) \quad \left(\frac{d^{2n}z}{dx^{2n}}\right)_0 = (-1)^n \left(\frac{d^{2n}y}{dx^{2n}}\right)_0.$$

За тим ћемо одредити сачиниоце, у реду добивеном развијањем парне функције означене са z, диференцијалећи $2n+1$ пута једначину

$$(e^x - e^{-x})z = x(e^x + e^{-x}),$$

што ће нам дати

$$(e^x + e^{-x})z + (2n+1)(e^x - e^{-x})z' + \cdots$$

$$\cdots + \binom{2n+1}{p}[e^x + (-1)^p e^{-x}]z^{(p)} + \cdots + (e^x - e^{-x})z^{(2n+1)}$$

$$= x(e^x - e^{-x}) + (2n+1)(e^x + e^{-x}).$$

Ставив $x = o$, добићемо

$$1 + \binom{2n+1}{2}\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)_0 + \cdots + \binom{2n+1}{2p}\left(\frac{d^{2p}z}{dx^{2p}}\right)_0 + \cdots$$

$$\cdots + (2n+1)\left(\frac{d^{2n}z}{dx^{2n}}\right)_0 = (2n+1).$$

Сравнив овај резултат са оним у претходном проблему, закључићемо једначину (1), што доказује постављену пропозицију.

Могли бисмо је извести и из идентичне једначине

$$x \cot g\, x = ix \frac{e^{2ix} + 1}{e^{2ix} - 1}.$$

И овде бројеви B_n представљају Bernoulli-јеве бројеве, по имену Jacques Bernoulli који их је први увео у анализу. Euler се често бавио тим бројевима; он је показао да ти бројеви играју велику улогу у многим питањима, а нарочито у сабирању редова. Седамнаест првих бројева он је израчунао, помоћу једног обрасца помоћу кога можемо добити један од њих кад знамо све оне који му претходе. Laplace је дао општи израз за сваки од ових бројева независно од осталих (Lacroix, t. III).

Ти су бројеви израчунати у свакоме делу ниже или више математике. Ево вредности првих девет бројева:

$$B_1 = \frac{1}{6},\ B_2 = \frac{1}{30},\ B_3 = \frac{1}{42},\ B_4 = \frac{1}{30},\ B_5 = \frac{5}{66},$$

$$B_6 = \frac{691}{2730},\ B_7 = \frac{7}{6},\ B_8 = \frac{3617}{510},\ B_9 = \frac{43867}{798}.$$

33 Проблем

Оверити једначину

$$(1)\quad \cos^n x - \frac{n(n-1)}{2 \cdot 2}\cos^{n-2} x \sin^2 x$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4}\cos^{n-4} x \sin^4 x - \cdot \cdot \cdot$$

$$= \cos^{2n}\frac{x}{2} - \left(\frac{n}{1}\right)^2 \cos^{2n-2}\frac{x}{2}\sin^2\frac{x}{2}$$

$$+ \left[\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\right]^2 \cos^{2n-4}\frac{x}{2}\sin^4\frac{x}{2} - \cdot \cdot \cdot \cdot$$

(E. Catalan).

Ако у Leibnitz-овом обрасцу

$$(uv)^{(n)} = uv^{(n)} + \frac{n}{1}u' v^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}u'' v^{(n-2)} + \cdot \cdot \cdot + u^{(n)} v,$$

заменимо u са $(1 - Z)^n$ а v са Z^n, добићемо

$$\frac{d^n [(1-Z)^n Z^n]}{dZ^n} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot n\Big[(1-Z)^n - \left(\frac{n}{1}\right)^2 (1-Z)^{n-1} Z$$

$$+ \left\{\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\right\}^2 (1-Z)^{n-2} Z^2 - \cdot \cdot \cdot \Big].$$

Али ми имамо

$$\frac{d(Z-Z^2)}{dZ} = 1 - 2Z,$$

$$\frac{d^2[(Z-Z^2)^2]}{dZ^2} = 2 \cdot 1 \left[(1-2Z)^2 - \frac{2 \cdot 1}{1\,1}(Z-Z^2)\right],$$

$$\frac{d^3[(Z-Z^2)^3]}{dZ^3} = 3 \cdot 2 \cdot 1 \left[(1-2Z)^3 - \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 1}(1-2Z)(Z-Z^2)\right],$$

$$\frac{d^4[(Z-Z^2)^4]}{dZ^4} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \Big[(1-2Z)^4 - \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 1}(1-2Z)^2 (Z-Z^2)$$

$$+ \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2}(Z-Z^2)^2\Big],$$

и аналогијом добијамо

$$\frac{d^n[(Z-Z^2)^n]}{dZ^n}$$

$$= n(n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \Big[(1-2Z)^n - \frac{n(n-1)}{1\,1}(1-2Z)^{n-2}(Z-Z^2)$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2}(1-2Z)^{n-4}(Z-Z^2)^2 - \cdot \cdot \cdot \Big].$$

Но како је

$$\frac{d^n[(1-Z)^n Z^n]}{dZ^n} = \frac{d^n[(Z-Z^2)^n]}{dZ^n},$$

то је

(2) $\quad (1-2Z)^n - n(n-1)(1-2Z)^{n-2}(Z-Z^2)$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 2}(1-2Z)^{n-4}(Z-Z^2)^2 - \cdots$$

$$= (1-Z)^n - \left(\frac{n}{1}\right)^2 (1-Z)^{n-1} Z$$

$$+ \left[\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\right]^2 (1-Z)^{n-2} Z^2 - \cdots.$$

Ставимо

$$Z = \sin^2 \frac{x}{2},$$

па ћемо добити

$$1 - Z = \cos^2 \frac{x}{2}, \; 1 - 2Z = \cos x,$$

$$Z - Z^2 = \frac{\sin^2 x}{2 \cdot 2}.$$

Заменимо те вредности у једначину под (2) па ћемо добити задату једначину под (1).

Примедба. — На ову једначину, вели Catalan, наишли смо проучавајући Legendre-ове полиноме X_n. *(Nouvelle correspondance mathématique, t. 3, p. 251, 1877).*

34 Проблем

Нека је дата функција f(z), *која се може развити у ред по целим и положним степенима* z-а *у унутрашњости једног круга збирљивости. Одредити функцију* f(z) *са условом да је*

$$f(z)\,f(t) = f(z+t).$$

Нека је дакле

$$(1) \quad f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_m z^m + \cdots,$$

ред збирљив у једном извесном кругу. Претпоставимо да је t у томе кругу. Дајмо количинама z и t такве вредности да $z+t$ буде у истом кругу збирљивости.

Ми ћемо помножити ред (1) са редом

$$(2)\quad f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_m t^m + \cdots,$$

и изједначити њихов производ са редом

$$(3)\quad f(z+t) = a_0 + a_1 (z+t) + a_2 (z+t)^2 + \cdots,$$

па ћемо добити једначину

$$(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_m z^m + \cdots)(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_m t^m + \cdots)$$
$$= a_0 + a_1 (z+t) + a_2 (z+t)^2 + \cdots + a_m (z+t)^m + \cdots.$$

Чланови са $z^{m-k} t^k$, с обе стране ове једначине, имају истог сачиниоца, па ма какви били бројеви m и k. Да бисмо упростили проблем, узмимо $a_0 = 1$. На левој страни последње једначине, сачинилац од $z^{m-k} t^k$ биће $a_{m-k} a_k$; на десној пак страни, сачинилац од $z^{m-k} t^k$ биће

$$a_m \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}.$$

Дакле је

$$(\mathrm{I})\quad a_{m-k} a_k = \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k} a_m.$$

Дајући броју m све могуће вредности и броју k све вредности мање од m, добићемо бесконачно много једначина; што чини много више једначина него што нам треба за одредбу сачинилаца. Али ставив $k = 1$ а $m = 2, 3, \cdots, m$, имаћемо довољан број једначина да одредимо све сачиниоце. Лако ћемо се уверити да вредности, тако одређених сачинилаца, задовољавају и оне једначине којима се нисмо служили.

За $k = 1$, имамо једначину

$$a_{m-1}\, a_1 = m\, a_m,$$

која, за $m = 2, 3, \cdot \cdot \quad, m$, даје

$$a_1^{\,2} = 2a_2,$$

$$a_2 a_1 = 3a_3,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot,$$

$$a_{m-1}\, a_1 = m a_m.$$

Множећи ове једначине једну с другом, имаћемо

$$a_1^{\,m} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \quad \cdot \cdot m\, a_m,$$

или, бришући сказаљку 1,

$$\text{(II)} \quad a_m = \frac{a^m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \quad \cdot \cdot m}.$$

Сваки сачинилац одређен је као функција од a. Вредности, нађене тим путем, задовољавају све једначине које смо занемарили, јер, за $k < m$, имамо

$$\frac{a^{m-k}}{(m-k)!}\,\frac{a^k}{k!} = \frac{a^m}{m!}\,\frac{m(m-1) \cdot \quad \cdot \cdot (m-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \quad \cdot \cdot k}.$$

Дакле ред, који има то својство да је за ма какво a

$$f(z)\, f(t) = f(z+t),$$

јесте

$$(4) \quad f(z) = 1 + az + \frac{a^2 z^2}{1 \cdot 2} + \cdot \cdot \cdot + \frac{a^m z^m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m} + \cdot \cdot \cdot .$$

Овај је ред збирљив за ма какво z; његов круг збирљивости има полупречник бесконачан, и покрива целу раван. Дакле је $f(z) = e^{az}$.

Ако ли је $a = 1$, онда је

$$f(z) = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{z^m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m} + \cdots,$$

тј. $f(z) = e^z$ кад је z релна количина. Тај се ред узима *као дифиниција функције* e^z, кад је z комплексна количина.

Примедба I. Ми бисмо могли одговорити на питање употребив редове које, по Mac-Laurin-овом обрасцу, добијамо

$$f(z) = f(o) + \frac{z}{1} f'(o) + \frac{z^2}{1 \cdot 2} f''(o) + \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(o) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{z^p}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots p} f^{(p)}(o) + \cdots,$$

$$f(t) = f(o) + \frac{t}{1} f'(o) + \frac{t^2}{1 \cdot 2} f''(o) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{t^q}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots q} f^{(q)}(o) + \cdots,$$

који су апсолутно збирљиви. Дајмо количинама z и t такве вредности да $z + t$ буде у кругу збирљивости; онда је производ првих двају редова збирљив и мора бити раван реду

$$f(z + t) = f(o) + \frac{z + t}{1} f'(o) + \frac{(z + t)^2}{1 \cdot 2} f''(o) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{(z + t)^{p+q}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (p + q)} f^{(p+q)}(o) + \cdots.$$

Лаким упоређењем дошли бисмо до једначине

$$f^{(p)}(o) \cdot f^{(q)}(o) = f^{(p+q)}(o).$$

Примедба II. Пошто је $f(z + t)$ симетрична функција промењливих количина z и t, то ћу, диференцијалећи једначину

$$f(z)\, f(t) = f(z + t)$$

најпре по z а за тим по t, добити

$$f'(z)\, f(t) = f'(z+t),$$

$$f(z)\, f'(t) = f'(z+t);$$

откуда

$$f'(z)\, f(t) = f(z)\, f'(t),$$

или

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{f'(t)}{f(t)} = a.$$

Из једначине $\frac{f'(z)}{f(z)} = a$, интегралењем, добијамо

$$\operatorname{Log} f(z) = az + b.$$

Али према једначини (4), за $z = o$, $f(o) = 1$, према томе $\operatorname{Log} f(o) = o$, то је константна количина $b = o$. Дакле

$$\operatorname{Log} f(z) = az.$$

Тако исто, интегралећи $\frac{f'(t)}{f(t)} = a$, добићемо

$$\operatorname{Log} f(t) = at.$$

Из горњих једначина добијамо

$$f(z) = e^{az},$$

$$f(t) = e^{at};$$

а, из ових је

$$f(z) \cdot f(t) = e^{az} \cdot e^{at} = e^{a(z+t)} = f(z+t).$$

35 Проблем

Развити у ред, по Mac-Laurin-овој формули, функцију

$$(1)\quad y = \frac{\cos(m \operatorname{arc\,tang} x)}{(1+x^2)^{\frac{m}{2}}},$$

где је m *ма каква стална количина.*

Ставимо

$$\operatorname{arc\,tang} x = z,$$

отуда

$$x = \operatorname{tang} z, \quad \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{m}{2}}} = \cos^m z.$$

Тако исто

$$z' = \frac{1}{1+x^2} = \cos^2 z.$$

Заменом, у задатој функцији под (1), имаћемо

$$(2)\quad y = \cos mz \cdot \cos^m z,$$

где је z функција од x. Диференцијалимо последњу једначину по x, па ћемо добити

$$y' = -(m \sin mz \cos^m z + m \cos mz \cos^{m-1} z \sin z)\, z'$$

$$= -(m \sin mz \cos^m z + m \cos mz \cos^{m-1} z \sin z) \cos^2 z$$

$$= -m \cos^{m+1} z (\sin mz \cos z + \cos mz \sin z),$$

или, на послетку,

$$y' = -m \cos^{m+1} z \sin(m+1) z.$$

Тако исто

$$y'' = [m(m+1)\cos^m z \sin z \sin(m+1)z - m(m+1)\cos^{m+1} z \cos(m+1)z]\cos^2 z$$

$$= -m(m+1)\cos^{m+2} z\,[\cos z \cos(m+1)z - \sin z \sin(m+1)z],$$

или

$$y'' = -m(m+1)\cos^{m+2} z \cos(m+2)z.$$

Диференцијалећи даље наћи ћемо

$$y''' = m(m+1)(m+2)\cos^{m+3} z \sin(m+3)z,$$

$$y^{IV} = m(m+1)(m+2)(m+3)\cos^{m+4} z \cos(m+4)z.$$

Закон је очигледан. Тако је

$$(3)\quad \begin{cases} y^{(2n-1)} = (-1)^n m(m+1)\cdots(m+2n-2)\cos^{m+2n-1} z \sin(m+2n-1)z; \\ y^{(2n)} = (-1)^n m(m+1)(m+2)\cdots(m+2n-1)\cos^{m+2n} z \cos(m+2n)z. \end{cases}$$

За $x = o$, $z = \operatorname{arc\,tang} o = k\pi$. Дакле је

$$y_o = \cos mk\pi,$$

$$y'_o = -m \sin(m+1)k\pi = m \cos\left[(m+1)k + \frac{1}{2}\right]\pi,$$

$$y''_o = -m(m+1)\cos(m+2)k\pi = m(m+1)\cos[(m+2)k+1]\pi,$$

$$y'''_o = m(m+1)(m+2)\sin(m+3)k\pi$$

$$= m(m+1)(m+2)\cos\left[(m+3)k + \frac{3}{2}\right]\pi,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

или у опште

$$y_o^{(n)} = m(m+1)(m+2)\cdots(m+n-1)\cos\left[(m+n)k + \frac{n}{2}\right]\pi.$$

$$y_{(\theta x)}^{(n+1)} = m(m+1)\cdot\cdot\cdot(m+n)$$

$$\times \cos\left[(m+n+1)\operatorname{arctang}(\theta x) + \frac{n+1}{2}\pi\right]\cos^{m+n+1}[\operatorname{arctang}(\theta x)].$$

Према овоме је тражени ред ово

$$\text{(a)}\quad y = \cos mk\pi + \frac{x}{1} m \cos\left[(m+1)k + \frac{1}{2}\right]\pi$$

$$+ \frac{x^2}{1\cdot 2} m(m+1)\cos[(m+2)k+1]\pi + \cdot\cdot\cdot$$

$$\cdot\cdot\cdot + \frac{x^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdot\cdot n} m(m+1)(m+2)\cdot\cdot\cdot(m+n-1)$$

$$\times \cos\left[(m+n)k + \frac{n}{2}\right]\pi$$

$$+ \frac{x^{n+1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdot\cdot n(n+1)} m(m+1)\cdot\cdot\cdot(m+n)$$

$$\times \cos\left[(m+n+1)\operatorname{arctang}(\theta x) + \frac{n+1}{2}\pi\right]\cos^{m+n+1}[\operatorname{arctang}(\theta x)].$$

За $k = o$, добивени ред постаје

$$(4)\quad y = 1 - \frac{m(m+1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 - \cdot\cdot\cdot$$

$$\cdot\cdot\cdot + (-1)^p \frac{m(m+1)\cdot\cdot\cdot(m+2p-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdot\cdot 2p}x^{2p} + \cdot\cdot\cdot$$

За $m = 1$, горња једначина под (4) постаје

$$y = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdot\cdot\cdot + (-1)^p x^{2p} + \cdot\cdot\cdot,$$

што нам служи као проба да смо добро радили, јер за $m = 1$, једначина под (2) постаје

$$y = \cos^2 z = \frac{1}{1 + x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^p x^{2p} + \cdots$$

Ако је m одречно тј. $m = -q$, једначина под (2) постаје

$$y = \frac{\cos qz}{\cos^q z};$$

но ми знамо да је

$$\cos qz = \cos^q z - \frac{q(q-1)}{1 \cdot 2} \cos^{q-2} z \sin^2 z + \cdots,$$

откуда, заменом, добијамо

$$y = 1 - \frac{q(q-1)}{1 \cdot 2} \operatorname{tang}^2 z + \cdots;$$

али, пошто је $\operatorname{tang}^2 z = x^2$, то је

$$y = 1 - \frac{q(q-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \cdots.$$

Да бисмо нашли услове збирљивости реда (4), посматрајмо овај ред

$$1 + \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 + \cdots$$

Сваки члан овога реда идентичан је, у апсолутној вредности, са „одговарајућим“ чланом реда (4). Услови збирљивости овога реда, важиће тим пре и за ред (4). Однос једног члана ка претходном биће

$$\frac{(m + 2n)(m + 2n + 1)}{(2n + 1)(2n + 2)} x^2,$$

тај однос тежи ка x^2 кад n бесконачно расте. Треба дакле да је $x < 1$ па да овај ред буде збирљив а према томе и онај под (4).

Ако је $x = 1$, то пређашњи однос, ставив $2n + 1 = p$, постаје

$$\frac{(m + p - 1)(m + p)}{p(p + 1)};$$

за $m > 1$, тај је однос већи од јединице и ред је незбирљив. За $m = 1$, однос је раван јединици и ред је опет незбирљив. Ако је $m < 1$ и положно, пређашњи однос, према Duhamel-овом правилу, постаје

$$\frac{(m + p)(m + p - 1)}{(m+p)(m+p-1) + p(p+1) - (m+p)(m+p-1)} = \frac{1}{1 + \alpha},$$

где је

$$\alpha = \frac{p(p + 1) - (m + p)(m + p - 1)}{(m + p)(m + p - 1)},$$

откуда

$$p\alpha = \frac{2p^2(1 - m) + \cdots}{p^2 + \cdots};$$

$\lim p\alpha = 2(1 - m)$ за $p = \infty$. Ако је та граница мања од јединице ред је и тада незбирљив

Ако ли је $m < 1$ и одречно, онда је ред збирљив.

Ако је m паран број, образац под (a) постаје

$$(4) \quad y = 1 - \frac{m(m + 1)}{1 \cdot 2} x^2$$

$$+ \frac{m(m + 1)(m + 2)(m + 3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 + \cdots$$

Ако је m непарно али k парно, функција y има исти горњи облик; ако ли је k непарно онда имамо пређашњи ред са противним знаком.

36 Проблем

Дата је једначина

$$(1) \quad x^3 + px + q = o;$$

ставив $x = -\dfrac{q}{p}y$, *тражи се да се развије у по степенима количине* $R = \dfrac{q^2}{p^3}$.

По замени добијамо једначину

$$(2) \quad Ry^3 + y - 1 = o,$$

која, за $R = o$, има за корен $y = 1$. Ми хоћемо функцију y да развијемо у ред по целим степенима од R. Ако диференцијалимо једначину (2) по R имаћемо

$$(3\,Ry^2 + 1)\,y' + y^3 = o;$$

отуда

$$y' = -\frac{y^3}{3\,Ry^2 + 1} = \frac{y-1}{R[3\,Ry^2+1]} = \frac{y^2 - y}{R[3 - 2y)},$$

или

$$y' = \frac{3\,Ry^2 - (9\,R + 2)\,y + 2}{R\,(27\,R + 4)},$$

или, на послетку, добијамо једначину

$$(\mathrm{I}) \quad R\,(27\,R + 4)\,y' - 3\,Ry^2 + (9\,R + 2)\,y - 2 = o,$$

која, диференцијалена по R, даје

$$R\,(27\,R + 4)\,y'' + \left.\begin{matrix}54\,R + 4\\ +\,9\,R + 2\end{matrix}\right|\,y' - 3y^2 + 9y - 6\,Ryy' = o,$$

или

$$R(27R + 4)y'' + (63R + 6)y' - 3y^2 + 9y - 6Ryy' = 0,$$

или, по замени,

$$\text{(II)} \quad R(27R + 4)^2y'' + (27R + 4)(63R + 6)y'$$
$$+ [9(27R + 4) + 6]y - 9(3Ry^2 + 2) = 0.$$

Комбинацијом једначина под (I) и (II) имаћемо

$$R(27R + 4)^2y'' + (27R + 4)\begin{bmatrix} 63R + 6 \\ - 9R \end{bmatrix}y'$$
$$+ \begin{bmatrix} 9(27R + 4) + 6 \\ - 9(9R + 2) \end{bmatrix}y = 0,$$

или

$$R(27R + 4)y'' + (54R + 6)y' + 6y = 0.$$

Диференцијалимо сада ову последњу једначину n пута по R, па ћемо добити

$$R(27R+4)y^{(n+2)} + \left.\begin{array}{r} n(54R+4) \\ +(54R+6) \end{array}\right| y^{(n+1)} + \left.\begin{array}{c} \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}54 \\ + n54 \\ + 6 \end{array}\right| y^{(n)} = 0,$$

или

$$R(27R + 4)y^{(n+2)} + [54(n + 1)R + 2(2n + 3)]y^{(n+1)}$$
$$+ 3[9n^2 + 9n + 2]y^{(n)} = 0,$$

или

$$R(27R + 4)y^{(n+2)} + [54(n + 1)R + 2(2n + 3)]y^{(n+1)}$$
$$+ 3(3n + 1)(3n + 2)y^{(n)} = 0.$$

За $R = 0$ имаћемо

$$\text{(III)} \quad y_0^{(n+1)} = -\frac{3}{2}\,\frac{(3n+1)(3n+2)}{2n+3}\,y_0^{(n)}.$$

Последња једначина, за $n = 1$, даје

$$y_0'' = -\frac{3}{2}\,\frac{4\cdot 5}{5}\,y_0'.$$

Али је $y_0' = -1$. Према томе, за $n = 1, 2, 3, \cdot \cdot \cdot$, једначина под (III) даје

$$y_0'' = \frac{3}{2}\,\frac{4\cdot 5}{5},$$

$$y_0''' = -\left(\frac{3}{2}\right)^2 \frac{4\cdot 5\cdot 7\cdot 8}{5\cdot 7},$$

$$y_0^{\mathrm{IV}} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \frac{4\cdot 5\cdot 7\cdot 8\cdot 10\cdot 11}{5\cdot 7\cdot 9},$$

$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;,$$

$$y_0^{(n+1)} = (-1)^{n+1}\left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{4\cdot5\cdot7\cdot8\cdot10\cdot11\cdots(3n+1)(3n+2)}{5\cdot 7\cdot 9\cdot\cdot\cdot(2n+3)}.$$

Дакле

$$y_0^{(n)} = (-1)^n\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot7\cdot8\cdot10\cdot11\cdots(3n-2)(3n-1)}{1\cdot2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot\cdot\cdot(2n+1)}.$$

Уводећи сада чинитеља

$$6\cdot 9\cdot 12\cdot\cdot\cdot 3(n-1) = 3^{n-2}[2\cdot 3\cdot\cdot\cdot(n-1)],$$

имаћемо

$$y_0^{(n)} = (-1)^n\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdots(3n-3)(3n-2)(3n-1)\,n}{3^{n-2}[2\cdot3\cdots(n-1)]\,n\cdot 1\cdot2\cdot3\cdot5\cdot7\cdots(2n+1)},$$

или

$$y_0^{(n)} = (-1)^n \frac{(3n)!}{2^{n-1}\cdot 2\cdot3\cdots(n-1)\,n\cdot 1\cdot2\cdot3\cdot5\cdot7\cdots(2n+1)};$$

или, на послетку,

$$y_0^{(n)} = (-1)^n \frac{(3n)!}{(2n+1)!} = (-1)^n (2n+2) \cdot \cdot \cdot 3n.$$

Заменив, у Mac-Laurin-овом обрасцу

$$y = y_0 + \frac{R}{1} y_0' + \frac{R^2}{1 \cdot 2} y_0'' + \cdot \cdot \cdot + \frac{R^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} y_0^{(n)} + \cdot \cdot \cdot,$$

количине: y_0, y_0', y_0'', $\cdot \cdot \cdot$, $y_0^{(n)}$, $\cdot \cdot \cdot$, њиховим вредностима, добићемо

$$(3) \quad y = 1 + \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+2) \cdot \cdot \cdot 3n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot n} R^n,$$

тј.

$$y = 1 - R + 3R^2 - 12R^3 + 55R^4 - 273R^5 + 1428R^6 - 7552R^7 + \cdot \cdot \cdot$$

Однос једног члана добивеног реда ка претходном јесте

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1}{n+1} \frac{y_0^{(n+1)}}{y_0^{(n)}} R = (-1) \frac{1}{n+1} \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(2n+2)(2n+3)} R;$$

откуда, за $n = \infty$,

$$\lim \frac{U_{n+1}}{U_n} = -\frac{27}{4} R.$$

Услов збирљивости реда (3) биће $-\frac{27}{4} R < 1$ тј.

$$R < -\frac{4}{27}.$$

Овај ред (3) биће збирљив за све тачке које су у унутрашњости једног круга збирљивости, чији је полупречник $\frac{4}{27}$.

37 Проблем

Доказати ове обрасце

$$\frac{\partial^{p+q} \mathrm{Log} \sqrt{x^2 + y^2}}{\partial x^p \partial y^q}$$

$$= (-1)^{p+q-1} \frac{(p+q-1)!}{(x^2+y^2)^{\frac{p+q}{2}}} \cos\left[(p+q) \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x} - q \frac{\pi}{2}\right],$$

$$\frac{\partial^{p+q} \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}}{\partial x^p \partial y^q}$$

$$= (-1)^{p+q} \frac{(p+q-1)!}{(x^2+y^2)^{\frac{p+q}{2}}} \sin\left[(p+p) \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x} - q \frac{\pi}{2}\right].$$

Применити Taylor-ов образац на ове две функције

$$\mathrm{Log} \sqrt{(x+h)^2 + (y+k)^2} \quad и \quad \operatorname{arc\,tang} \frac{y+k}{x+h}.$$

Узмимо две уображене количине $x + iy$ и $X + iY$, и ми можемо ставити

$$(1) \quad x + iy = e^{X+iY} = e^X (\cos Y + i \sin Y).$$

Али је $x = r\cos\omega$, $y = r\sin\omega$, то је $x + iy = r(\cos\omega + i\sin\omega) = re^{i\omega}$. Отуда ћемо имати

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad и \quad \omega = \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}.$$

Дакле је

$$(2) \quad x + iy = r(\cos\omega) + i\sin\omega)$$

$$= \sqrt{x^2+y^2} \left[\cos\left(\operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}\right) + i \sin\left(\operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}\right)\right],$$

или

$$\sqrt{x^2+y^2}\left[\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}\right)+i\sin\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}\right)\right]$$

$$= e^X(\cos Y + i\sin Y);$$

откуда пак добијамо ове једначине:

$$e^X = \sqrt{x^2+y^2},$$

$$\cos Y = \cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}\right), \quad \sin Y = \sin\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}\right).$$

Из ових је пак

$$X = \operatorname{Log}\sqrt{x^2+y^2} \quad \text{и} \quad Y = \operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x} + 2k\pi.$$

Из једначине под (1) имамо

$$\operatorname{Log}(x+iy) = X + iY$$

$$= \operatorname{Log}\sqrt{x^2+y^2} + i\left[\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x} + 2k\pi\right].$$

Диференцијалимо ову последњу једначину p пута по x и q пута по y, па ћемо добити

$$(3) \quad \frac{\partial^{p+q}\operatorname{Log}(x+iy)}{\partial x^p\,\partial y^q} = \frac{\partial^{p+q}\operatorname{Log}\sqrt{x^2+y^2}}{\partial x^p\,\partial y^q} + i\,\frac{\partial^{p+q}\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}}{\partial x^p\,\partial y^q}.$$

Но ми знамо да је

$$\frac{\partial^p\operatorname{Log}(x+iy)}{\partial x^p} = (-1)^{p-1}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdot\cdot(p-1)}{(x+iy)^p},$$

а из ове добијамо, диференцијалећи је q пута по y, ову

$$\frac{\partial^{p+q}\operatorname{Log}(x+iy)}{\partial x^p\,\partial y^q} = (-1)^{p-1}\,1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdot\cdot(p-1)\frac{\partial^q}{\partial y^q}\left[\frac{1}{(x+iy)^p}\right]$$

$$= (-1)^{p+q-1} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot (p+q-1)}{(x+iy)^{p+q}} i^q$$

$$= (-1)^{p+q-1} \frac{(p+q-1)!\, i^q (x-iy)^{p+q}}{(x^2+y^2)^{p+q}}.$$

По једначини под (2) имамо

$$(x-iy)^{p+q} = (x^2+y^2)^{\frac{p+q}{2}} \left[\cos(p+q)\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}\right.$$

$$\left.- i\sin(p+q)\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}\right].$$

Према томе је

$$(4) \qquad \frac{\partial^{p+q} \operatorname{Log}(x+iy)}{\partial x^p \partial y^q}$$

$$= (-1)^{p+q-1} \frac{(p+q-1)!\, i^q}{(x^2+y^2)^{\frac{p+q}{2}}} \left[\cos(p+q)\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}\right.$$

$$\left.- i\sin(p+q)\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}\right].$$

Приметимо да је

$$e^{2\pi i} = e^{2k\pi i} = \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi = +1,$$

$$e^{\pi i} = e^{(2k+1)\pi i} = -1,$$

$$e^{\frac{\pi i}{2}} = e^{\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi i} = +i,$$

$$e^{-\frac{\pi i}{2}} = e^{\frac{3\pi i}{2}} = e^{\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi i} = -i;$$

то је $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$, а

$$i^q = \cos\frac{q\pi}{2} + i\sin\frac{q\pi}{2}.$$

Заменимо у једначину под (4) i^q његовом вредношћу па је

$$\frac{\partial^{p+q}\operatorname{Log}(x+iy)}{\partial x^p\,\partial y^q}$$

$$=(-1)^{p+q-1}\frac{(p+q-1)!}{(x^2+y^2)^{\frac{p+q}{2}}}\left[\cos(p+q)\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}\right.$$

$$\left.-\,i\sin(p+q)\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}\right]\left[\cos\frac{q\pi}{2}+i\sin\frac{q\pi}{2}\right],$$

или

$$(5)\qquad \frac{\partial^{p+q}\operatorname{Log}(x+iy)}{\partial x^p\,\partial y^q}$$

$$=(-1)^{p+q-1}\frac{(p+q-1)!}{(x^2+y^2)^{\frac{p+q}{2}}}\left\{\cos\left[(p+q)\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}-q\frac{\pi}{2}\right]\right.$$

$$\left.-\,i\sin\left[(p+q)\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}-q\frac{\pi}{2}\right]\right\}.$$

Једначина под (3) постаје сада

$$(6)\qquad \frac{\partial^{p+q}\operatorname{Log}\sqrt{x^2+y^2}}{\partial x^p\,\partial y^q}+i\,\frac{\partial^{p+q}\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}}{\partial x^p\,\partial y^q}$$

$$=(-1)^{p+q-1}\frac{(p+q-1)!}{(x^2+y^2)^{\frac{p+q}{2}}}\left\{\cos\left[(p+q)\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}-q\frac{\pi}{2}\right]\right.$$

$$\left.-\,i\sin\left[(p+q)\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}-q\frac{\pi}{2}\right]\right\}.$$

Из ове једначине, изједначи с обе стране стварне и уображене делове, добићемо

$$\frac{\partial^{p+q}\operatorname{Log}\sqrt{x^2+y^2}}{\partial x^p\,\partial y^q}$$

$$= (-1)^{p+q-1}\frac{(p+q-1)!}{(x^2+y^2)^{\frac{p+q}{2}}}\cos\left[(p+q)\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x} - q\frac{\pi}{2}\right],$$

и

$$\frac{\partial^{p+q}\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}}{\partial x^p\,\partial y^q}$$

$$= (-1)^{p+q}\frac{(p+q-1)!}{(x^2+y^2)^{\frac{p+q}{2}}}\sin\left[(p+q)\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x} - q\frac{\pi}{2}\right];$$

обрасце које смо требали доказати. Исте обрасце могли бисмо и на други начин доказати.

Примена. Taylor-ов образац, за функције двеју промењивих количина, дат је једначином

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + \left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$+ \frac{1}{1\cdot 2}\left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \cdot\cdot\cdot$$

$$\cdot\cdot\cdot + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdot\cdot n}\left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right)^n + R,$$

где је

$$\left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right)^n = h^n\frac{\partial^n f}{\partial x^n} + \frac{n}{1}h^{n-1}k\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y} + \cdot\cdot\cdot + k^n\frac{\partial^n f}{\partial y^n},$$

а R представља остатак реда и његова је вредност

$$R = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdot\cdot n(n+1)}\left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{n+1}_{\substack{x+\theta h\\ y+\theta k}}.$$

Како је у опште

$$\frac{\partial^n \operatorname{Log}\sqrt{x^2+y^2}}{\partial x^{n-m}\,\partial y^m}$$

$$= (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(x^2+y^2)^{\frac{n}{2}}} \cos\left[n \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x} - m\frac{\pi}{2}\right],$$

то je

$$\left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right)^n = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(x^2+y^2)^{\frac{n}{2}}} \left[h^n \cos\left(n \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}\right)\right.$$

$$+ \frac{n}{1} h^{n-1} k \cos\left(n \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x} - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\left. + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} h^{n-2} k^2 \cos\left(n \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x} - 2\frac{\pi}{2}\right) + \cdot \cdot \cdot \right].$$

Дакле ћемо имати, знајући да je $0! = 1$,

$$\operatorname{Log} \sqrt{(x+h)^2 + (y+k)^2} = \operatorname{Log} \sqrt{x^2+y^2}$$

$$+ \frac{h \cos\left(\operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}\right)}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{k \cos\left(\operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x} - \frac{\pi}{2}\right)}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} + \cdot \cdot \cdot$$

$$\cdot \cdot \cdot + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot n} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x^2+y^2)^{\frac{n}{2}}} \left[h^n \cos\left(n \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{nh^{n-1}k}{1} \cos\left(n \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x} - \frac{\pi}{2}\right) + \cdot \cdot \cdot \right] + \cdot \cdot \cdot$$

Знајући да je, према другом обрасцу,

$$\frac{\partial^n \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}}{\partial x^{n-m} \partial y^m} = (-1)^n \frac{(n-1)!}{(x^2+y^2)^{\frac{n}{2}}} \sin\left(n \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x} - m\frac{\pi}{2}\right),$$

на са свим сличан начин, наћи ћемо

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{y+k}{x+h}=\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}$$

$$-\frac{h\sin\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}\right)}{(x^2+y^2)^{1/2}}-\frac{k\sin\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}-\frac{\pi}{2}\right)}{(x^2+y^2)^{1/2}}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdots n}(-1)^n\frac{(n-1)!}{(x^2+y^2)^{\frac{n}{2}}}\left[h^n\sin\left(n\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{n}{1}h^{n-1}k\sin\left(n\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}-\frac{\pi}{2}\right)+\cdots\right]+\cdots.$$

38 Проблем

Развити у ред, по Mac-Laurin-овом обрасцу, функцију

$$u=\frac{\operatorname{Log}(1-x)(1-y)}{xy-x-y}.$$

Образац Mac-Laurin-ов за функције двеју променљивих количина јесте

$$f(x,y)=f(o,o)$$

$$+\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\substack{x=o\\y=o}}+\frac{1}{1\cdot2}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2_{\substack{x=o\\y=o}}+\cdots.$$

Нађимо постепене делимичке изводе задате функције, коју ћемо написати овако

$$u(xy-x-y)=\operatorname{Log}(1-x)+\operatorname{Log}(1-y).$$

Диференцијалењем последње једначине по x добијамо

$$(1)\quad \frac{\partial u}{\partial x}(xy-x-y)+u(y-1)=-\frac{1}{1-x},$$

откуда, за $x = o$, $y = o$, пошто је $\frac{\partial u}{\partial x}$ коначна количина,

$$u = 1.$$

Диференцијалимо n пута по x једначину под (1), па ћемо добити

$$(2) \quad \frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{n+1}}(xy - x - y) + n\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(y - 1) + \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(y - 1)$$

$$= (-1)^n \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot n}{(x-1)^{n+1}}.$$

За $x = y = o$, $\frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{n+1}}$ јесте коначна количина и имаћемо

$$(n+1)\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right)_{x=y=o} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot n;$$

откуда

$$\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right)_{x=y=o} = \frac{n!}{(n+1)}.$$

Пошто је задата функција u симетрична по x и y, то је

$$\left(\frac{\partial^n u}{\partial y^n}\right)_{x=y=o} = \frac{n!}{(n+1)}.$$

Диференцијалимо једначину под (2) α пута по y, па ћемо добити

$$\frac{\partial^{n+1+\alpha} u}{\partial x^{n+1} \partial y^\alpha}(xy - x - y) + \alpha \frac{\partial^{n+\alpha} u}{\partial x^{n+1} \partial y^{\alpha-1}}(x - 1)$$

$$+ (n+1)\left[\frac{\partial^{n+\alpha} u}{\partial x^n \partial y^\alpha}(y - 1) + \alpha \frac{\partial^{n+\alpha-1} u}{\partial x^n \partial y^{\alpha-1}}\right] = o,$$

или, за $x = y = o$, добијамо овај образац

$$(n+1)\left(\frac{\partial^{n+\alpha} u}{\partial x^n \partial y^\alpha}\right)_{x=y=o}$$

$$= \alpha(n+1)\left(\frac{\partial^{n+\alpha-1}u}{\partial x^n\,\partial y^{\alpha-1}}\right)_{x=y=o} - \alpha\left(\frac{\partial^{n+\alpha}u}{\partial x^{n+1}\,\partial y^{\alpha-1}}\right)_{x=y=o}.$$

Сменимо n са $n - \alpha$, претходни образац постаје

$$(n+1-\alpha)\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^{n-\alpha}\,\partial y^{\alpha}}\right)_{x=y=o}$$

$$= \alpha(n+1-\alpha)\left(\frac{\partial^{n-1}u}{\partial x^{n-\alpha}\,\partial y^{\alpha-1}}\right)_{x=y=o} - \alpha\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^{n-\alpha+1}\,\partial y^{\alpha-1}}\right)_{x=y=o}.$$

Последња једначина, за $\alpha = 1, 2, 3, \cdots$, даће нам:

I. За $\alpha = 1$,

$$n\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^{n-1}\,\partial y}\right)_{x=y=o} = n\frac{(n-1)!}{n} - \frac{n!}{n+1}$$

$$= n!\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{n!}{n(n+1)},$$

дакле

$$\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^{n-1}\,\partial y}\right)_{x=y=o} = \frac{(n-1)!}{n(n+1)}.$$

II. За $\alpha = 2$,

$$(n-1)\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^{n-2}\,\partial y^2}\right)_{x=y=o} = 2(n-1)\frac{(n-2)!}{(n-1)n} - 2\frac{(n-1)!}{n(n+1)}$$

$$= 2(n-1)!\left[\frac{1}{(n-1)n} - \frac{1}{n(n+1)}\right] = \frac{2^2(n-1)!}{(n+1)n(n-1)},$$

или

$$\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^{n-2}\,\partial y^2}\right)_{x=y=o} = \frac{2^2(n-2)!}{(n+1)n(n-1)}.$$

Исто тако, за $\alpha = 3$, наћи ћемо

$$\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^{n-3}\,\partial y^3}\right)_{x=y=o} = \frac{2^2\cdot 3^2 (n-3)!}{(n+1)\,n\,(n-1)\,(n-2)}.$$

Аналогијом извешћемо да је

$$\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^{n-\alpha}\,\partial y^\alpha}\right)_{x=y=o} = \frac{2^2\cdot 3^2\cdot\;\cdot\;\cdot\alpha^2 (n-\alpha)!}{(n+1)n(n-1)(n-2)\cdot\cdot\cdot(n-\alpha+1)}.$$

Општи члан реда задате функције, према Mac-Laurin-овом обрасцу, биће

$$\frac{1}{1\cdot 2\;3\cdot\cdot\cdot n}\;\frac{n(n-1)\cdot\cdot\cdot(n-\alpha+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\;\cdot\;\cdot\alpha}\,x^{n-\alpha}\,y^\alpha\,\frac{\partial^n u}{\partial x^{n-\alpha}\,\partial y^\alpha},$$

или

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\;\frac{n(n-1)\cdots(n-\alpha+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\alpha}\;\frac{2^2.\,3^2.\,4^2\ldots\alpha^2(n-\alpha)!}{(n+1)n(n-1)\cdots(n-\alpha+1)}\,x^{n-\alpha}\,y^\alpha,$$

или, по скраћењу,

$$\frac{\alpha!\,(n-\alpha)!}{(n+1)!}\,x^{n-\alpha}\,y^\alpha.$$

Дакле, тражени ред дат је обрасцем

$$(3)\qquad u = 1 + \sum_o^\infty \frac{(n-\alpha)!\,\alpha!}{(n+1)!}\,x^{n-\alpha}\,y^\alpha.$$

Ставив $xy - x - y = z$, задата функција постаје

$$u = \frac{\operatorname{Log}(1+z)}{z},$$

и може се развити у ред ако се модуо z-а находи између -1 и $+1$ тј. ако је $-1 < |z| < +1$, или, што је исто, ако је

$$-1 < |xy - x - y| < +1,$$

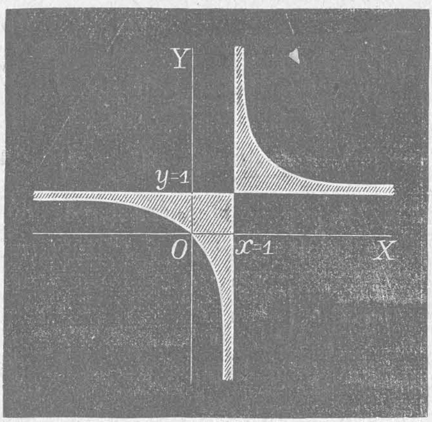
која се може написати овако

$$(4) \qquad -1 < |(x-1)(y-1)-1| < +1.$$

Задата функција u може се развити у збирљив ред под (3), ако постоји једначина под (4). Посматрајмо границе збирљивости реда под (3).

Ако је $(x-1)(y-1)-1=1$, тј. $(x-1)(y-1)=2$, то је једначина хиперболе.

Ако ли је пак $-1=(x-1)(y-1)-1$, тј. $(x-1)(y-1)=o$, то су две праве, јер је једначина задовољена са $x=+1$, $y=+1$, и то су, у исто време, асимтоте хиперболине.



Сл. 1.

Нађени ред под (3) биће збирљив за све тачке у равни, које се находе у шатираном простору, између хиперболе и правих $x=1$, $y=1$.

39 Проблем

Дата је једначина

$$(1) \qquad z = x + \alpha f(z),$$

између променљивих z, x *и сталне количине* α; *извести Lagrange-ов образац.*

Корени једначине под (1), решене по z, јесу функције од x и α. Један од тих корена своди се на x, за $\alpha = 0$. Функција једног од ових корена зависи само од независно-промењљивих количина α и x.

Lagrange-ов ред има за предмет, у случају кад је α мало, да се може развити по степенима од α ма каква функција F(z) корена z, који се своди на x за $\alpha = 0$.

Очевидно, по Mac-Laurin-овом обрасцу, имамо

$$(2)\quad F(z) = F(0) + \frac{\alpha}{1}\left(\frac{dF}{d\alpha}\right)_0 + \frac{\alpha^2}{1\cdot 2}\left(\frac{d^2F}{d\alpha^2}\right)_0 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{\alpha^m}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m}\left(\frac{d^mF}{d\alpha^m}\right)_0 + \cdots,$$

где $\left(\frac{d^mF}{d\alpha^m}\right)_0$ представља вредност, за $\alpha = 0$, делимичког извода, m тог реда по α, функције F посматране као функција независно промењљивих количина α и x. Питање се дакле своди на то, да се израчуна $\left(\frac{d^mF}{d\alpha^m}\right)_0$.

1°. Диференцијалимо једначину (1) по x, па за тим по α, добићемо

$$(3)\quad \frac{dz}{dx} = 1 + \alpha f'(z)\frac{dz}{dx},$$

$$(4)\quad \frac{dz}{d\alpha} = f(z) + \alpha f'(z)\frac{dz}{d\alpha};$$

елиминишући $\alpha f'(z)$ између једначина под (3) и (4), добићемо

$$(5)\quad \frac{dz}{d\alpha} = f(z)\frac{dz}{dx};$$

откуда

$$(6)\quad \frac{d^2z}{d\alpha\, dx} = f'(z)\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + f(z)\frac{d^2z}{dx^2}.$$

2°. С друге стране, водећи рачуна о једначинама (5) и (6) и узев ма какву функцију $\varphi(z)$, имамо

$$\frac{d \cdot \varphi(z) \frac{dz}{dx}}{d\alpha} = \varphi'(z) \frac{dz}{d\alpha} \frac{dz}{dx} + \varphi(z) \frac{d^2 z}{dx\, d\alpha}$$

$$= \varphi'(z) f(z) \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \varphi(z) f'(z) \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \varphi(z) f(z) \frac{d^2 z}{dx^2},$$

или

$$(7) \qquad \frac{d \cdot \varphi(z) \frac{dz}{dx}}{d\alpha} = \frac{d \cdot \varphi(z) f(z) \frac{dz}{dx}}{dx}.$$

Претпоставимо да, за једну извесну вредност m, имамо једначину

$$(8) \qquad \frac{d^m \cdot \varphi(z) \frac{dz}{dx}}{d\alpha^m} = \frac{d^m \cdot \varphi(z) f^m(z) \frac{dz}{dx}}{dx^m};$$

диференцијалећи последњу једначину по α, добићемо

$$\frac{d^{m+1} \cdot \varphi(z) \frac{dz}{dx}}{d\alpha^{m+1}} = \frac{d^m.}{dx^m} \frac{d \cdot \varphi(z) f^m(z) \frac{dz}{dx}}{d\alpha};$$

или, на основу једначине под (7),

$$\frac{d \cdot \varphi(z)\ f^m(z) \frac{dz}{dx}}{d\alpha} = \frac{d \cdot \varphi(z)\ f^{m+1}(z) \frac{dz}{dx}}{dx},$$

откуда

$$\frac{d^{m+1} \cdot \varphi(z) \frac{dz}{dx}}{d\alpha^{m+1}} = \frac{d^{m+1} \cdot \varphi(z)\ f^{m+1}(z) \frac{dz}{dx}}{dx^{m+1}}.$$

Ако је једначина под (8) истинита за једну вредност m-a, она ће бити истинита и за вредност која за овом долази; али она је доказана за $m = 1$, јер се своди на једначину под (7). Дакле, она вреди за ма какво m.

3^e. Сада је лако израчунати $\left(\frac{d^m F}{d\alpha^m}\right)_0$. И заиста, имајући у виду једначине под (5) и (8), добићемо

$$\frac{dF}{d\alpha} = F'(z)\frac{dz}{d\alpha} = F'(z)\, f(z)\frac{dz}{dx},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{d^m F}{d\alpha^m} = \frac{d^{m-1}\cdot F'(z) f(z)\frac{dz}{dx}}{d\alpha^{m-1}} = \frac{d^{m-1}\cdot F'(z) f^m(z)\frac{dz}{dx}}{dx^{m-1}}.$$

Ако у општем изразу за $\frac{d^m F}{d\alpha^m}$ ставимо $\alpha = 0$, и ако приметимо да, за ову вредност од α, једначине (1) и (3) дају $z = x$ и $\frac{dz}{dx} = 1$, то ћемо имати

$$\left(\frac{d^m F}{d\alpha^m}\right)_0 = \frac{d^{m-1}\cdot F'(x) f^m(x)}{dx^{m-1}};$$

дакле, на послетку,

$$(9)\quad F(z) = F(x) + \frac{\alpha}{1} F'(x) f(x) + \frac{\alpha^2}{1\cdot 2}\frac{d\cdot F'(x) f^2(x)}{dx} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\alpha^m}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot m}\frac{d^{m-1}\cdot F'(x)\, f^m(x)}{dx^{m-1}} + \ldots$$

То је тражени Lagrange-ов образац. За специјални случај, када је $F(z) = z$, он постаје

$$(10)\quad z = x + \alpha f(x) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\alpha^m}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot m}\frac{d^{m-1}. f^m(x)}{dx^{m-1}} + \ldots.$$

Ако је α довољно мало, ред је Lagrange-ов брзо збирљив. *(Leçons d'Astronomie, M. Gruey, lith., p. 16, 1885).*

M. Gruey, у своме делу страна 192, применио је образац (10) на функцију

$$(11)\qquad u = nt + e \sin u;$$

па је, ставив $z = u$, $x = nt = \xi$, $\alpha = e$, $f(z) = \sin z = \sin u$, добио

$$u = \xi + e \sin \xi + \frac{e^2}{1 \cdot 2} \frac{d \cdot \sin^2 \xi}{d\xi} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{e^m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m} \frac{d^{m-1} \cdot \sin^m \xi}{d\xi^{m-1}} + \cdots.$$

Остаје да нађемо $\frac{d^{m-1} \cdot \sin^m \xi}{d\xi^{m-1}}$. Но, ми знамо да је

$$e^{i\xi} = \cos \xi + i \sin \xi$$

$$e^{-i\xi} = \cos \xi - i \sin \xi,$$

откуда

$$2i \sin \xi = e^{i\xi} - e^{-i\xi}.$$

У случају за m парно, последња једначина, подигнута на m-ни степен, постаје

$$2^m (-1)^{\frac{m}{2}} \sin^m \xi = 2 \Big[\cos m\xi - \frac{m}{1} \cos (m - 2) \xi$$

$$+ \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \cos (m - 4) \xi - \cdots \Big].$$

Диференцијалимо m — 1 пута последњу једначину, добићемо

$$2^{m-1} (-1)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{m-1} \cdot \sin^m \xi}{d\xi^{m-1}}$$

$$=(-1)^{\frac{m}{2}}\left[m^{m-1}\sin m\xi - \frac{m}{1}(m-2)^{m-1}\sin(m-2)\xi + \cdots\right],$$

образац кога, на исти начин, налазимо у случају за m непарно; тако да је општи члан реда функције u ово

$$\frac{e^m}{1\cdot2\cdot3\cdots m\cdot2^{m-1}}\left[m^{m-1}\sin m\xi - \frac{m}{1}(m-2)^{m-1}\sin(m-2)\xi\right.$$

$$\left.+\frac{m(m-1)}{1\cdot2}(m-4)^{m-1}\sin(m-4)\xi - \cdots\right].$$

Зауставив се на члановима шестог реда, наћи ћемо

$$(12)\qquad u = \xi + e\sin\xi + \frac{e^2}{2}\sin 2\xi + \frac{e^3}{8}(3\sin 3\xi - \sin\xi)$$

$$+\frac{e^4}{6}(2\sin 4\xi - \sin 2\xi)$$

$$+\frac{e^5}{3\cdot2^5}(5^3\sin 5\xi - 3^4\sin 3\xi + 2\sin\xi)$$

$$+\frac{e^6}{3\cdot5\cdot2^4}(3^4\sin 6\xi - 2^6\sin 4\xi + 5\sin 2\xi),$$

једначину која даје u за ма какву вредност t-а или $\xi = nt$.

Примедба. — Због велике важности постављеног питања навешћу да *H. Laurent, (Traité d'Analyse, t. I, p. 180, 1885)*, вели о Лагражовом обрасцу ово: „Овај образац има за цељ да изнесе појединости при израчунавању једног корена једначине

$$(1)\qquad z = x + tf(z),$$

у којој је z непозната. Да бисмо нашли корен z, ми га можемо развити у ред по Taylor-овом обрасцу, сматрајући га као једну емплицитну функцију t-а. Имамо

$$(2) \quad \frac{dz}{dt} = tf'(z)\frac{dz}{dt} + f(z);$$

ова једначина даје

$$(3) \quad \frac{dz}{dt} = \frac{f(z)}{1 - tf'(z)}.$$

Диференцијалећи још једначину (2), увукли бисмо $\frac{d^2z}{dt^2}$ који би се могао израчунати; али, продужив тако, изгледа да је тешко добити закон образовања извода по z; добија се једна елегантнија формула уводећи у питање, као што је то чинио Lagrange, изводе z-а по x. Диференцијалећи једначину под (1) по x, добијамо

$$\frac{dz}{dx} = tf'(z)\frac{dz}{dx} + 1,$$

или

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{1 - tf'(z)};$$

сравнив ову формулу са оном под (3) добићемо

$$(4) \quad \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx} f(z),$$

дакле, да диференцијалимо z по t, можемо се ограничити на диференцијалење по x и резултат помножити са f(z). Ова формула може се уопштити и лако је увидети да је

$$\frac{d}{dt}\left[\varphi(z)\frac{dz}{dx}\right] = \frac{d}{dx}\left[\varphi(z)\frac{dz}{dt}\right],$$

што се оверава извршив означења диференцијалења. Имамо

$$\varphi'(z)\frac{dz}{dt}\frac{dz}{dx} + \varphi(z)\frac{d^2z}{dx\,dt}$$

за вредност свакога дела пређашње формуле. Применив ту примедбу на једначину под (4), имамо

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left[f(z)\frac{dz}{dx}\right] = \frac{d}{dx}\left[f(z)\frac{dz}{dt}\right]$$

$$= \frac{d}{dx}\left[f^2(z)\frac{dz}{dx}\right].$$

Диференцијалећи на ново, добијамо

$$\frac{d^3z}{dt^3} = \frac{d}{dx}\frac{d}{dt}\left[f^2(z)\frac{dz}{dx}\right] = \frac{d^2}{dx^2}\left[f^2(z)\frac{dz}{dt}\right]$$

$$= \frac{d^2}{dx^2}\left[f^3(z)\frac{dz}{dx}\right],$$

и на послетку

$$(5) \qquad \frac{d^nz}{dt^n} = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[f^n(z)\frac{dz}{dx}\right].$$

Ова формула, за $t = o$, постаје

$$\frac{d^nz}{dt^n} = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[f^n(x)].$$

Taylor-ов образац даје тада

$$(6) \quad z = x + tf(x) + \frac{t^2}{1 \cdot 2}\frac{d}{dx}[f^2(x)]$$

$$+ \frac{t^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}\frac{d^2}{dx^2}[f^3(x)] + \cdot \cdot \cdot ;$$

знајући да ова формула мора бити попуњена остатком

$$\frac{t^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot n}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[f^n(z)\frac{dz}{dt}\right],$$

у коме се t са ωt мора заменити. Ма шта било, у опште, неће бити нужно да се израчунава тај остатак, и, ако је t мало, моћи ћемо се служити обрасцем под (6).

Кад бисмо применили апроксимативну Њутнову методу на једначину (1), узев x за прву приближну вредност z-а, имали бисмо за члан корекције $\frac{tf(x)}{1 - tf'(x)}$, или, претпоставив t врло мало,

$$tf(x)\left[1 + tf'(x) + t^2 f'^2(x) + \cdots\right],$$

или, на послетку,

$$tf(x) + \frac{t^2}{z}\frac{d}{dx}f^2(x) + \cdots.$$

Употребити Њутнову формулу, то је дакле употребити два прва члана формуле (6).

Формула (6) само је један особени случај Lagrange-ове формуле, која даје ред једне ма које функције $\Pi(z)$ корена z.

Та се формула изналази израчунав $\frac{d^n \Pi(z)}{dt^n}$; имајући у виду једначину под (4), имамо

$$\frac{d\Pi(z)}{dt} = \Pi'(z)\frac{dz}{dt} = \Pi'(z)\frac{dz}{dx}f(z),$$

$$\frac{d^2\Pi(z)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\Pi'(z) f(z)\frac{dz}{dx}\right] = \frac{d}{dx}\left[\Pi'(z) f(z)\frac{dz}{dt}\right]$$

$$= \frac{d}{dx}\left[\Pi'(z) f^2(z)\frac{dz}{dx}\right],$$

и, у опште,

$$\frac{d^n\Pi(z)}{dt^n} = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[\Pi'(z) f^n(z)\frac{dz}{dx}\right].$$

За $t = o$, имамо

$$\frac{d^n \Pi(z)}{dt^n} = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[\Pi'(x) f^n(x)];$$

Mac-Laurin-ов образац даје тада

$$\Pi(z) = \Pi(x) + t[\Pi'(x) f(x)] + \frac{t^2}{1 \cdot 2} \frac{d}{dx}[\Pi'(x) f(x)] + \cdots''.$$

Исти образац под (9), страна 134.

Оверити ове резултате:

1). *Доказати да ћемо развијањем* $\cos^3 x$ *добити*

$$\cos^3 x = 1 - \frac{3x^2}{2} + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^n \frac{3^{2n} + 3}{4} \frac{x^{2n}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2n} + \cdots,$$

ред збирљив.

2). *Доказати да ћемо, применив Taylor-ов образац и резултат који смо добили у 16 проблему свеска прва страна 162, на функцију* $\operatorname{arc\,tang}(x + h)$, *добити*

$$\operatorname{arc\,tang}(x+h) = \operatorname{arc\,tang} x + h \sin^2\varphi - \frac{h^2}{2} \sin^2\varphi \sin^2\varphi + \cdots$$

$$+ (-1)^{n-1} \frac{h^n}{n} \sin^n\varphi \sin n\varphi + \cdots,$$

$$-1 < x < +1,$$

где је $\frac{\pi}{2} - \varphi = \operatorname{arc\,tang} x$. *Ставив* $h = -x$, *наћи ћемо ред*

$$(1) \quad \frac{\pi}{2} - \varphi = \cos\varphi \sin\varphi + \frac{\cos^2\varphi \sin 2\varphi}{2} + \frac{\cos^3\varphi \sin 3\varphi}{3} + \cdots$$

3). *Доказати ове једначине*

$$(1)\quad a^x = 1 + \frac{x \operatorname{Log} a}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2}(\operatorname{Log} a)^2 + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}(\operatorname{Log} a)^3 + \cdots,$$

$$(2)\quad \operatorname{Log}(a+x) = \operatorname{Log} a + \frac{x}{a} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{a^2} + \frac{1}{3}\frac{x^3}{a^3} - \frac{1}{4}\frac{x^4}{a^4} + \cdots,$$

$$(3)\quad \operatorname{Log}\frac{1+x}{1-x} = 2\left\{x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right\}.$$

4). *Доказати да ћемо, развијањем у ред функције* $\operatorname{Log}[x + \sqrt{1+x^2}]$ *по Mac-Laurin-овом обрасцу, добити*

$$\operatorname{Log}[x + \sqrt{1+x^2}] = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} - \cdots$$

(Страна 53).

5). *Доказати да ћемо добити ред*

$$[\operatorname{Log}(x + \sqrt{1+x^2})]^2$$

$$= \frac{x^2}{1} - \frac{2}{3}\frac{x^4}{2} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}\frac{x^6}{3} - \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7}\frac{x^8}{4} + \cdots,$$

$$x^2 < 1;$$

било да смо помножили ред у пређашњој нумери самим собом, било да смо $[\operatorname{Log}(x + \sqrt{1+x^2}]^2$ *развили по Mac-Laurin-овом обрасцу.*

6). *Знајући да је*

$$\frac{1}{1 + x + x^2 + x^3}$$

$$= \frac{1}{1+x}\,\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1-x}{1+x^2}\right) = \frac{1-x}{1-x^4},$$

имамо три различна пута за добијање траженог реда, који, за $x^2 < 1$, *гласи*

$$\frac{1}{1 + x + x^2 + x^3}$$

$$= 1 - x + x^4 - x^5 + x^8 - x^9 + x^{12} - x^{13} + \cdot \cdot \cdot$$

7). *Доказати да вреди једначина*

$$\frac{\text{Log}\,(1+x)}{1+x} = \frac{1}{1}x - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)x^3 - \cdot \cdot \cdot,$$

за све вредности x-а *које се између* -1 *и* $+1$ *налазе.*

8). *Доказати да, за свако* x, *вреди ред*

$$(1) \quad e^{ax + \frac{b}{x}} = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$+ \frac{B_1}{x} + \frac{B_2}{x^2} + \frac{B_3}{x^3} + \cdot \cdot \cdot,$$

у коме A_n *и* B_n *имају вредности*

$$A_n = \frac{a^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot n} \left\{ 1 + \frac{ab}{1 \cdot (n+1)} + \frac{a^2 b^2}{1 \cdot 2 (n+1)(n+2)} + \cdot \cdot \cdot \right\},$$

$$B_n = \frac{b^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot n} \left\{ 1 + \frac{ab}{1 \cdot (n+1)} + \frac{a^2 b^2}{1 \cdot 2 (n+1)(n+2)} + \cdot \cdot \cdot \right\}.$$

Стави ли се сума конвергентног реда

$$1 + \frac{u}{1^2} + \frac{u^2}{(1 \cdot 2)^2} + \frac{u^2}{(1 \cdot 2 \cdot 3)^2} + \cdot \cdot \cdot = \varphi(u),$$

то се ред под (1) може заменити обликом

$$+\frac{\lambda}{1}x+\frac{\lambda(\lambda^2+1^2)}{1\cdot2\cdot3}x^3+\cdots,$$

$$x^2<1;$$

откуда се могу извести редови за

$$\frac{e^{\lambda\,\mathrm{arc\,sin\,x}}+e^{-\lambda\,\mathrm{arc\,sin\,x}}}{2}\quad и\quad \frac{e^{\lambda\,\mathrm{arc\,sin\,x}}-e^{-\lambda\,\mathrm{arc\,sin\,x}}}{2}.$$

13). *Доказати ове једначине*

$$(1)\quad \cos[\mu\,\mathrm{Log}(x+\sqrt{1+x^2})]$$

$$=1-\frac{\mu^2}{1\cdot2}x^2+\frac{\mu^2(\mu^2+2^2)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}x^4-\frac{\mu^2(\mu^2+2^2)(\mu^2+4^2)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}x^6+\cdots.$$

$$x^2<1;$$

$$(2)\quad \sin[\mu\,\mathrm{Log}(x+\sqrt{1+x^2})]$$

$$=\frac{\mu}{1}x-\frac{\mu(\mu^2+1^2)}{1\cdot2\cdot3}x^3+\frac{\mu(\mu^2+1^2)(\mu^2+3^2)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}x^5-\cdots.$$

$$x^2<1;$$

какви ће бити обрасци (1) и (2) ако се стави

$$\mathrm{Log}(x+\sqrt{1+x^2})=z?$$

14). *Доказати да се функције*

$$\cos\mu(\mathrm{arc\,sin\,x})\quad и\quad \sin\mu(\mathrm{arc\,sin\,x}),$$

могу развити, по Mac-Laurin-овом обрасцу, у редове:

$$(1)\quad \cos\mu(\mathrm{arc\,sin\,x}=1-\frac{\mu^2}{1\cdot2}x^2+\cdots$$

$$\cdots+(-1)^n\frac{\mu^2(\mu^2-2^2)\cdots[\mu^2-(2n-2)^2]}{1\cdot2\cdot3\cdots2n}x^{2n}+\cdots,$$

18). *Доказати једначине*

$$(1)\quad \mathrm{Arg\,Th}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,\frac{1+x}{1-x} = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots,$$

$$(2)\quad \mathrm{Arg\,Coth}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,\frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{1}{(2n-1)x^{2n-1}} + \cdots,$$

$$(3)\quad \mathrm{Arg\,Sh}x = x - \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{x^5}{5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\,\frac{x^7}{7} + \cdots$$

19). *Доказати да је према 31 проблему*

$$(D)\quad \mathrm{tang}\,x = 4(4-1)A_2x - 4^2(4^2-1)A_4x^3 + 4^3(4^3-1)A_6x^5 - \ldots;$$

а према овоме обрасцу и ономе из 19 проблема за $\frac{1}{\cos x}$ *идентична једначина* $\mathrm{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = \mathrm{tang}\,x + \frac{1}{\cos x}$ *даје*

$$(E)\quad \mathrm{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = 1 + x + \frac{1}{1\cdot 2}x^2 + \frac{1}{1\cdot 3}x^3$$

$$+ \frac{5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 + \frac{4}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 3\cdot 5}x^5 + \frac{61}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}x^6 + \frac{31}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}x^7$$

$$+ \frac{1385}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 8}x^8 + \frac{496}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}x^9 + \cdots,$$

$$(F)\quad \mathrm{Log\,tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = x + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}x^3$$

$$+ \frac{5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^5 + \frac{61}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 7}x^7 + \frac{1385}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 9}x^9 + \cdots$$

(Mélanges mathématiques, t. I, p. 93, 1885).

20). *Доказати једначине*

$$(1)\quad \cotg x = \frac{1}{x} + \frac{1}{\pi + x} - \frac{1}{\pi - x} + \frac{1}{2\pi + x} - \frac{1}{2\pi - x} + \cdots,$$

$$(2)\quad \tang x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x} - \frac{1}{\frac{\pi}{2} + x} + \frac{1}{\frac{3\pi}{2} - x} - \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + x} + \cdots.$$

21). *Доказати да је, за све вредности* x-а *чије су апсолутне вредности мање од* π,

$$(1)\quad \mathrm{Log}\,\frac{\sin x}{x} = -\frac{S_2}{1}\frac{x^2}{\pi^2} - \frac{S_4}{2}\frac{x^4}{\pi^4} - \cdots$$

$$\cdots - \frac{S_{2n}}{n}\frac{x^{2n}}{\pi^{2n}} - \cdots,$$

$$(2)\quad \mathrm{Log}\cos x = -(2^2-1)\frac{S_2}{1}\frac{x^2}{\pi^2} - (2^4-1)\frac{S_4}{2}\frac{x^4}{\pi^4} - \cdots$$

$$\cdots - (2^{2n}-1)\frac{S_{2n}}{n}\frac{x^{2n}}{\pi^{2n}} - \cdots,$$

где је

$$S_p = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots.$$

22). *Доказати формуле:*

$$(A)\quad \begin{cases} x\cotg x = 1 - \dfrac{2S_2x^2}{\pi^2} - \dfrac{2S_4x^4}{\pi^4} - \dfrac{2S_6x^6}{\pi^6} - \cdots, \\[2ex] \tang x = \dfrac{2(2^2-1)S_2x}{\pi^2} + \dfrac{2(2^4-1)S_4x^3}{\pi^4} \\[2ex] \qquad + \dfrac{2(2^6-1)S_6x^5}{\pi^6} + \cdots; \end{cases}$$

$$
(B)\begin{cases}
x\cot g\, x = 1 - \dfrac{2^2 B_1 x^2}{1\cdot 2} - \dfrac{2^4 B_2 x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \dfrac{2^6 B_3 x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} - \cdots, \\
\operatorname{tang} x = \dfrac{2^2(2^2-1)B_1 x}{1\cdot 2} + \dfrac{2^4(2^4-1)B_2 x^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \\
\qquad + \dfrac{2^6(2^6-1)B_3 x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \cdots
\end{cases}
$$

23). *Доказати однос*

$$
x \operatorname{cosec} x = 1 + \frac{2(2^1-1)B_1 x^2}{1\cdot 2} + \frac{2(2^3-1)B_2 x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{2(2^5-1)B_3 x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \cdots
$$

24). *Доказати једначине*

$$
1^0.\quad C_{n,1} - C_{n,2}C_{3,2} + C_{n,3}C_{4,2} - C_{n,4}C_{5,2} + \cdots \pm C_{n,n}C_{n+1,2} = 0.
$$

$$
2^0.\quad \frac{1}{2}C_{2p+2,p+1} = \frac{1}{p+1}C_{2p,p} - \frac{1}{p-1}C_{2,1}C_{2p-2,p-1} + \frac{1}{p-3}C_{4,2}C_{2p-4,p-2} - \cdots + C_{2p,p}.
$$

(E. Catalan, Mathésis, t. VI, p. 23, 1886).

25). *Доказати једначину*

$$
1 - \frac{n-1}{1}\sin^2\varphi\cos^2\varphi + \frac{(n-2)(n-3)}{1\cdot 2}\sin^4\varphi\cos^4\varphi - \cdots
$$

$$
= \sin^{2n}\varphi + \sin^{2n-2}\varphi\cos^2\varphi + \cdots + \cos^{2n}\varphi.
$$

(E. Catalan, Mathésis, t. VI, p. 47).

26). *Оверити идентичну једначину*

$$(2a)^{n-1} - C_{n-2,1}(2a)^{n-3} + C_{n-3,2}(2a)^{n-5} - \cdots$$

$$= C_{n,1}\, a^{n-1} + C_{n,3}\, a^{n-3}(a^2-1) + C_{n,5}\, a^{n-5}(a^2-1)^2 + \cdots$$

(E. Catalan).

27). *Знајући да* C_m^n *означава број комбинација* m *предмета* n *са* n; *доказати овај образац*

$$k\, C_a^k + (k-1)\, C_a^{k-1} C_b^2 + (k-2)\, C_a^{k-2} C_b^2 + \cdots = \frac{a}{a+b}\, C_{a+b}^k \cdot k.$$

(H. Laurent).

28). *Из добивеног реда за* $\cos(2p \arcsin x)$ *закључити идентичну једначину*

$$1 - \frac{2^2 \cdot n^2}{2} + \frac{2^4 \cdot n^2(n^2-1^2)}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{2^6 n^2 (n^2-1^2)(n^2-2^2)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$$

$$+ \frac{2^8 n^2 (n^2-1^2)(n^2-2^2)(n^2-3^2)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} - \cdots = \pm 1.$$

(E. L.)

29). *Доказати да је*

$$\frac{\arccos \sqrt{\dfrac{1-x}{1-y}}}{\sqrt{(1-x)(1-y)}}$$

$$= 1 + \frac{2}{3}\left(x + \frac{1}{2}y\right) + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}\left(x^2 + \frac{1}{2}xy + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}y^2\right) + \cdots$$

Задаци:

1). *Доказати да се* $\operatorname{tang} x$ *може развити у ред по Mac-Laurin-овом обрасцу кад је* $x < \frac{\pi}{2}$. *Наћи закон зависности сачинитеља. Исто питање за* $\sec x$.

2). *На подобан начин, оних под 9) и 10) страна 143, развити у редове функције*

$$\frac{1}{24}[\mathrm{Log}(1+x)^4] \quad \text{и} \quad \frac{1}{120}[\mathrm{Log}(1+x)^5].$$

3). *Применити правило о множењу апсолутно збирљивих редова, да добијемо квадрат реда*

$$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots,$$

и доказати да ће производ бити ред незбирљив.

4). *Доказати да је ред*

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{an^2+bnz},$$

апсолутно **збирљив**, *ако је релни (стварни) део од* a *одречан, па ма* b *била положна, одречна, релна или уображена количина;* **a** *и* b *су сталне количине а* z *ма каква променљива.*

5). *Доказати да је хипергеометричан ред*

$$f(\alpha,\beta,\gamma,x)=1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2+\cdots$$

$$\cdots+\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\,\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n\cdot\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}x^n+\cdots,$$

апсолутно збирљив за вредности x-a *чији је модуо мањи од јединице и да је исти још апсолутно збирљив за вредности* x-a *чији је модуо раван јединици, ако је увек* $\gamma'-\alpha'-\beta'>0$, *стављајући:* $\alpha=\alpha'+i\alpha''$, $\beta=\beta'+i\beta''$, $\gamma=\gamma'+i\gamma''$.

6). *Доказати да се, за довољно мале вредности* x-а, *сваки рационални разломак* $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, *чији именитељ нема нулу за корен, може развити у ред уређен по целим и положним степенима* x-а, *који расту. Показати како треба радити, те да добијемо ред. Доказати да су, ако је* $\varphi(x)$ *полином* p-ног *степена,* $p+1$ *узастопних сачинитеља добивеног реда:* $A_n, A_{n+1}, \cdots, A_{n+p}$, *везани једначином облика* $A_{n+p} + \alpha_1 A_{n+p-1} + \cdots + \alpha_p A_n = 0$, *где су* $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_p$, *сталне количине. Применити на разломак* $\frac{1 - x\cos\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2}$.

7). *Доказати да, ако постоје две непрекидне функције* φ *и* ψ, *задовољавајући једначине*

$$\varphi(x + y) = \varphi(x)\,\varphi(y) - \psi(x)\,\psi(y),$$

$$\psi(x + y) = \psi(x)\,\varphi(y) + \psi(y)\,\varphi(x),$$

да се ове функције могу развити у ред по Mac-Laurin-овом обрасцу и да ћемо, ставив $\left(\lim \frac{\psi(x)}{x}\right)_{x=0} = a$, *имати* $\varphi(x) = e^{\lambda x}\cos ax$, $\psi(x) = e^{\lambda x}\sin ax$, *где је* λ *произвољна стална количина. Узећемо да је* e^{cx} *једина непрекидна функција која задовољава* $f(x + y) = f(x)\,f(y)$ *и применићемо ту теорему на* $\varphi(x)^2 + \psi(x)^2$.

8). *Развити, по растећим степенима* x-а, *изразе:*

(1) $e^{-x}\cos(\sqrt{2x - x^2})$,

(2) $e^{x}\cos(x\sqrt{3})$,

(3) $\mathrm{tang}(a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - \cdots)$.

9). *Развити у ред, по теореми Mac-Laurin-овој, функције*

(1) $e^{x\cos b}\cos(a + x\sin b)$,

(2) $e^{x\cos b}\sin(a + x\sin b)$,

(3) $\sqrt{1 - x + x^2}$,

(4) $\arccos(a + x)$,

(5) $a^{x^2 + ay}$,

(6) $\operatorname{arc\,tang}(x + y)$.

10). *Развити у ред, по методи неодређених сачинилаца, функције*

(1) $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$,

(2) $\operatorname{Log}\dfrac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$,

(3) $(x + 2)e^y = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$.

11). *Сабрати ред*

$$y = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^4}{4} + \cdots;$$

диференцијалећи га сабрати добивени ред, за тим интегралити на ново.

12). *Исто тако сабрати редове:*

(1) $\frac{2}{1}x + \frac{4}{3}x^3 + \frac{6}{5}x^5 + \cdots$,

(2) $\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{x}{2\cdot 3} + \frac{x^2}{3\cdot 4} - \frac{x^3}{4\cdot 5} + \cdots$,

$$(3) \quad \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{x^5}{3\cdot 4\cdot 5} + \cdots,$$

$$(4) \quad \frac{x^n}{n} + \frac{x^{n+1}}{1\cdot(n+1)} + \cdots + \frac{x^{n+p}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots p\,(n+p)} + \cdots$$

13). *Наћи суму редова*

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\varphi(n)\, x^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}, \quad \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\varphi(n)\, x^n}{n(n+1)\cdots(n+p-1)},$$

где је $\varphi(n)$ *један алгебарски полином ма ког одређеног степена.*

14). *Развити у редове, по степенима од* k, *функције:*

$$\sin(x+k), \quad \mathrm{Ch}(x+k), \quad \mathrm{Sh}(x+ik) \quad и \quad \arccos(x+k).$$

15). *Знајући из тригонометрије да су:* $\cos nx$ *и* $\dfrac{\sin nx}{\sin x}$ *целе функције по* $\cos x$ *кад је* n *цео број; тражи се да се примени Mac-Laurin-ов образац на одредбу сачинитеља ових полинома.*

16). φ *и* X *означавајући две непрекидне функције као и њихови изводи, а* μ *један број узет између* m *и* m + 1, *до ког члана можемо продужити ред од*

$$f(x) = \varphi(x) + (x - x_0)^{\mu}\, X(x),$$

по степенима од $x - x_0$?

VIII

Смена промењивих количина

1 Проблем

Шта бива са једначином

$$(1) \quad \frac{d^2y}{dx^2} - x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + e^y\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = o,$$

кад се узме у *за независно промењиву количину?*

Знамо да је

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}},$$

откуда

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right)\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right)\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

$$= -\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}.$$

Заменив, у задатој једначини под (1), $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ нађеним вредностима, по скраћењу са $\left(\frac{dx}{dy}\right)^3$, добићемо

$$(2) \quad \frac{d^2x}{dy^2} + x - e^y = o.$$

2 Проблем

У једначини

$$(1) \quad x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y = o,$$

x *је независно промењљива количина. Како се задата једначина пише, кад се узме* y *за независно промењљиву количину?*

Према претходном проблему знамо да је

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}.$$

Заменом ових вредности у једначину под (1), множећи са $\left(\frac{dx}{dy}\right)^3$, добићемо

$$-x\frac{d^2x}{dy^2} + 2\frac{dx}{dy} - y\left(\frac{dx}{dy}\right)^3 = o,$$

или

$$(2) \quad x\frac{d^2x}{dy^2} - 2\frac{dx}{dy} + y\left(\frac{dx}{dy}\right)^3 = o.$$

3 Проблем

Шта бива са диференцијалном једначином

$$(1)\quad x^2\frac{d^2y}{dx^2}+ax\frac{dy}{dx}+by=o,$$

кад се t *узме за независно променљиву количину, знајући да је*

$$(2)\quad x=e^t?$$

Имамо

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\,\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}e^{-t};$$

из ове пак, диференцијалећи је по x, добијамо

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}e^{-t}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}e^{-t}\right)\frac{dt}{dx}=e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right).$$

Заменимо сада, у задатој једначини под (1), $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{d^2x}$ њиховим вредностима па ћемо добити

$$e^{2t}e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)+ae^te^{-t}\frac{dy}{dt}+by=o,$$

или, по свођењу,

$$(3)\quad \frac{d^2y}{dt^2}+(a-1)\frac{dy}{dt}+by=o.$$

4 Проблем

Шта бива са диференцијалном једначином

$$(1)\quad (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+n^2y=o,$$

кад се узме t *за независно променљиву количину, знајући да је*

$$(2)\quad x = \cos t?$$

Радећи као у претходном проблему наћи ћемо

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin t}\,\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\sin^2 t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \operatorname{cotg} t \cdot \frac{dy}{dt}\right).$$

Замењујући $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ тим вредностима у задатој диференц. једначини под (1), по скраћењу, добићемо

$$(3)\quad \frac{d^2y}{dt^2} + n^2y = o.$$

5 Проблем

Нека у једначини

$$(1)\quad \frac{d^2y}{dx^2} + xy\frac{dy}{dx} + \sec^2 x = o,$$

постане x *зависна функција независно променљиве количне* t. *Та зависност исказана је једначином*

$$(2)\quad x = \operatorname{arctang} t;$$

како се мења једначина под (1)?

Из једначине под (2) добијамо

$$\frac{dt}{dx} = 1 + t^2,$$

према томе је

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}(1+t^2).$$

Даље je

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx\,dt}\frac{dt}{dx}$$

$$= \left\{\frac{d^2y}{dt^2}(1+t^2) + \frac{dy}{dt}2t\right\}\frac{dt}{dx}$$

$$= \left\{\frac{d^2y}{dt^2}(1+t^2) + 2t\frac{dy}{dt}\right\}(1+t^2),$$

или

$$(4) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}(1+t^2)^2 + 2t(1+t^2)\frac{dy}{dt}.$$

Унесемо ли у једначину под (1) на место x, $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ њихове вредности под (2), (3) и (4) то ћемо добити

$$\frac{d^2y}{dt^2}(1+t^2)^2 + 2t(1+t^2)\frac{dy}{dt}$$

$$+ (\operatorname{arctang} t)\,y\,(1+t^2)\frac{dy}{dt} + \sec^2(\operatorname{arctang} t) = 0,$$

или

$$\frac{d^2y}{dt^2}(1+t^2)^2 + 2t(1+t^2)\frac{dy}{dt}$$

$$+ (\operatorname{arctang} t)\,y\,(1+t^2)\frac{dy}{dt} + (1+t^2) = 0.$$

Делећи последњу једначину са $(1+t^2)$, она постаје

$$\frac{d^2y}{dt^2}(1+t^2) + 2t\frac{dy}{dt} + y \operatorname{arctang} t \cdot \frac{dy}{dt} + 1 = 0,$$

или, на послетку,

$$(5) \quad \frac{d^2y}{dt^2}(1+t^2) + (2t + y \operatorname{arctang} t)\frac{dy}{dt} + 1 = 0.$$

6 Проблем

Шта бива са диференцијалном једначином

$$(1)\quad (a+x)^3\frac{d^3y}{dx^3}+3(a+x)^2\frac{d^2y}{dx^2}+(a+x)\frac{dy}{dx}+by=o,$$

узев t *за независно променљиву количину, знајући да је*

$$(2)\quad t=\mathrm{Log}(a+x).$$

Једначину под (2) написаћемо овако

$$(3)\quad a+x=e^t;$$

према томе

$$(4)\quad \frac{dy}{dx}=e^{-t}\frac{dy}{dt},$$

$$(5)\quad \frac{d^2y}{dx^2}=e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right).$$

Тако исто, диференцијалећи последњу једначину, наћи ћемо

$$(6)\quad \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dt}\left(e^{-2t}\frac{d^2y}{dt^2}-e^{-2t}\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx}$$

$$=e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}\right).$$

Заменимо у једначину под (1) $a+x$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ и $\frac{d^3y}{dx^3}$ њиховим вредностима из једначина под (3), (4), (5) и (6), по скраћењу, добићемо

$$(7)\quad \frac{d^3y}{dt^3}+by=o.$$

7 Проблем

Шта бива са $\frac{d^2y}{dx^2}$, *кад се узме* t *за независно променљиву количину, знајући да је*

$$(1) \quad t = x + x^2 ?$$

Ми ћемо $\frac{d^2y}{dx^2}$ написати у овом облику

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx} d \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Из једначине под (1) имамо

$$dt = (1 + 2x)\, dx;$$

према томе је

$$\frac{dy}{dx} = (1 + 2x)\frac{dy}{dt},$$

$$d \cdot \frac{dy}{dx} = 2\, dx \frac{dy}{dt} + (1 + 2x)\, d \cdot \frac{dy}{dt},$$

делећи последњу једначину са dx добићемо

$$\frac{1}{dx} d \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{dy}{dt} + (1 + 2x)^2 \frac{d^2y}{dt^2},$$

или

$$(2) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{dy}{dt} + (1 + 4t)\frac{d^2y}{dt^2}.$$

8 Проблем

Сменити променљиву x *са* y *у диференцијалу*

$$(1) \quad du = \frac{dx}{(1 - k^2 \sin^2 x)^{\frac{1}{2}}},$$

знајући да између x *и* y *постоји однос*

$$(2) \quad \sin(2y - x) = k \sin x.$$

Претпоставља се да је $x < \frac{\pi}{2}$.

Једначина под (2) даје могућности да се изрази x као функција y-а и даје

$$(3) \quad \operatorname{tang}(x - y) = \frac{1 - k}{1 + k} \operatorname{tang} y = \mu \operatorname{tang} y,$$

ставив $\frac{1 - k}{1 + k} = \mu$.

Отуда имамо

$$(4) \quad x = y + \operatorname{arctang}(\mu \operatorname{tang} y);$$

из ове једначине диференцијалењем добијамо

$$dx = (1 + \mu) \frac{\cos^2 y + \mu \sin^2 y}{\cos^2 y + \mu^2 \sin^2 y} dy.$$

Тако исто, из једначине под (4), добијамо

$$\sin x = \frac{\sin y}{\sqrt{1 + \mu^2 \operatorname{tang}^2 y}} + \frac{\mu \cos y \operatorname{tang} y}{\sqrt{1 + \mu^2 \operatorname{tang}^2 y}},$$

а за тим

$$\frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} = (1 + \mu) \frac{dy}{\sqrt{1 - (1 - \mu^2) \sin^2 y}}.$$

По замени диференцијал du постаје

$$(5) \quad du = (1 + \mu) \frac{dy}{\sqrt{1 - (1 - \mu^2) \sin^2 y}}.$$

Смена под (2), овде употребљена, названа је *Landen-ова трансформација*, по имену енглеског математичара који ју је први употребио (Philosophical Transactions, 1771 et 1775). Она игра важну улогу у теорији елиптичких функција.

9 Проблем

Трансформисати израз

$$(1) \quad x\frac{\partial u}{\partial y} - y\frac{\partial u}{\partial x}$$

у други, узев ϱ и θ за независно променљиве количине, знајући да је

$$(2) \quad x = \varrho\cos\theta, \quad y = \varrho\sin\theta.$$

Из једначина под (2) имамо

$$1 = \frac{\partial\varrho}{\partial x}\cos\theta - \varrho\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial x}, \quad o = \frac{\partial\varrho}{\partial y}\cos\theta - \varrho\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial y},$$

$$o = \frac{\partial\varrho}{\partial x}\sin\theta + \varrho\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial x}, \quad 1 = \frac{\partial\varrho}{\partial y}\sin\theta + \varrho\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial y}.$$

Но, пошто је u функција x-а и y-а, а ове су опет функције ϱ-а и θ, то је

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial\varrho}\frac{\partial\varrho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial\varrho}\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\sin\theta}{\varrho},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial\varrho}\frac{\partial\varrho}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial\varrho}\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\cos\theta}{\varrho};$$

откуда

$$(3) \quad x\frac{\partial u}{\partial y} - y\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial\theta}.$$

Ова се трансформација употребљава у теорији о планетама.

10 Проблем

Дата је једначина

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0;$$

елиминисати независно променљиве количине, знајући да имамо

$$(2) \quad u = \varphi(r), \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Из једначина под (2) имамо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dr}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{du}{dr}\frac{x}{r} = \varphi'(r)\frac{x}{r},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{d^2u}{dr^2}\frac{x^2}{r^2} + \frac{du}{dr}\left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\right)$$

$$= \varphi''(r)\frac{x^2}{r^2} + \varphi'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\right).$$

Тако исто наћи ћемо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \varphi''(r)\frac{y^2}{r^2} + \varphi'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \varphi''(r)\frac{z^2}{r^2} + \varphi'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3}\right).$$

Заменив, у једначину под (1), $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ овим вредностима, по свођењу, добићемо

$$\varphi''(r) + \frac{2}{r}\varphi'(r) = 0,$$

или, што је исто,

$$(3) \quad \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{du}{dr} = 0.$$

11 Проблем

Дата је једначина

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

узети ϱ и θ за независно промењиве количине, знајући да је

$$(2) \qquad x = \varrho\cos\theta, \qquad y = \varrho\sin\theta.$$

У деветом проблему, овога одељка, нашли смо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \varrho}\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{\varrho},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \varrho}\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{\varrho}.$$

Из ових, диференцијалењем, добијамо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2}\cos^2\theta + \frac{\partial u}{\partial \varrho}\frac{\sin^2\theta}{\varrho} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\frac{\sin^2\theta}{\varrho^2}$$

$$- \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\varrho^2}\left(\varrho\frac{\partial^2 u}{\partial \varrho\,\partial \theta} - \frac{\partial u}{\partial \theta}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2}\sin^2\theta + \frac{\partial u}{\partial \varrho}\frac{\cos^2\theta}{\varrho} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\frac{\cos^2\theta}{\varrho^2}$$

$$+ \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\varrho^2}\left(\varrho\frac{\partial^2 u}{\partial \varrho\,\partial \theta} - \frac{\partial u}{\partial \theta}\right).$$

Ми смо могли добити $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ и на други начин; требало је само у изразу за $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на место x ставити y, а $\theta - \frac{\pi}{2}$ на место θ.

Заменив у једначину (1) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ њиховим вредностима, по свођењу, добићемо

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

12 Проблем

Тражи се израз количине

$$(1) \qquad R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2 y}{dx^2}},$$

у функцији ρ-а, θ, $\frac{\partial \rho}{\partial \theta}$ и $\frac{\partial^2 \rho}{\partial \theta^2}$, знајући да је

$$(2) \qquad x = \rho \cos\theta, \qquad y = \rho \sin\theta.$$

Ми ћемо наићи на израз под (1), у теорији о кривим линијама, под именом *полупречника кривине.*

Из једначина под (2) имамо

$$(3) \qquad \begin{cases} x' = \frac{d\rho}{d\theta}\cos\theta - \rho\sin\theta, \\ y' = \frac{d\rho}{d\theta}\sin\theta + \rho\cos\theta; \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} x'' = \dfrac{d^2\varrho}{d\theta^2}\cos\theta - 2\dfrac{d\varrho}{d\theta}\sin\theta - \varrho\cos\theta, \\ y'' = \dfrac{d^2\varrho}{d\theta^2}\sin\theta + 2\dfrac{d\varrho}{d\theta}\cos\theta - \varrho\sin\theta; \end{cases}$$

где су x', y' и x'', y'', први и други изводи x-а и y-а по θ.

Знајући да је

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^3},$$

то је

$$\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2} = \left[1 + \frac{y'^2}{x'^2}\right]^{3/2} = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{x'^3}.$$

Количина R може се написати и у овој форми

$$(5)\qquad R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{x'y'' - y'x''}.$$

Из једначина под (3) и (4) добијамо

$$x'^2 + y'^2 = \left(\frac{d\varrho}{d\theta}\right)^2 + \varrho^2;$$

$$x'y'' - y'x''$$

$$= \left(\frac{d\varrho}{d\theta}\cos\theta - \varrho\sin\theta\right)\left(\frac{d^2\varrho}{d\theta^2}\sin\theta + 2\frac{d\varrho}{d\theta}\cos\theta - \varrho\sin\theta\right)$$

$$- \left(\frac{d\varrho}{d\theta}\sin\theta + \varrho\cos\theta\right)\left(\frac{d^2\varrho}{d\theta^2}\cos\theta - 2\frac{d\varrho}{d\theta}\sin\theta - \varrho\cos\theta\right)$$

$$= 2\left(\frac{d\varrho}{d\theta}\right)^2 - \varrho\frac{d^2\varrho}{d\theta^2} + \varrho^2.$$

Заменом у једначину под (5) добијамо да је

$$(6)\quad R = \frac{\left[\left(\frac{d\varrho}{d\theta}\right)^2 + \varrho^2\right]^{3/2}}{2\left(\frac{d\varrho}{d\theta}\right)^2 - \varrho\frac{d^2\varrho}{d\theta^2} + \varrho^2},$$

израз који се и овако може написати

$$R = \frac{[d\varrho^2 + \varrho^2 d\theta^2]^{3/2}}{2\,d\varrho^2\,d\theta - \varrho d^2\varrho\,d\theta + \varrho^2 d\theta^3}.$$

13 Проблем

Наћи израз количине

$$(1)\quad R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''},$$

знајући да је

$$(2)\quad x = \frac{a\cos\varphi}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}},\quad y = \frac{(1 - e^2)\,a\sin\varphi}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}}.$$

Из једначина под (2) добијамо ову

$$y^2 + x^2(1 - e^2) = a^2(1 - e^2),$$

која, диференцијалена по x, даје

$$yy' + x(1 - e^2) = o,$$

или

$$(yy')^2 = x^2(1 - e^2)^2,$$

која се пише и овако

$$(yy')^2 = a^2(1 - e^2)^2 - y^2(1 - e^2);$$

из ове пак добијамо

$$y^2(1 + y'^2) = a^2(1 - e^2)^2 + e^2 y^2,$$

или

$$y^3(1 + y'^2)^{3/2} = [a^2(1 - e^2)^2 + e^2 y^2]^{3/2},$$

или још

$$(3) \qquad y^3(1 + y'^2)^{3/2} = \frac{a^3(1 - e^2)^3}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}.$$

Но из једначине

$$y'^2 = -(1 - e^2) + \frac{a^2(1 - e^2)^2}{y^2}$$

добијамо

$$(4) \qquad y^3 y'' = - a^2(1 - e^2)^2.$$

Делећи једначину под (3) са овом под (4) добићемо

$$(5) \qquad R = - \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}.$$

(Ossian Bonnet, Cours d'Astronomie, 1886).

14 Проблем

Дате су једначине

$$(1) \qquad \begin{cases} y = r(1 - \cos t) \\ x = r(t - \sin t), \end{cases}$$

изразити $\frac{dy}{dx}$ *и* $\frac{d^2y}{dx^2}$ *у функцији* t-a.

Диференцијалећи једначине под (1) добићемо

$$(2) \qquad \begin{cases} dy = r \sin t \, dt, \\ dx - r(1 - \cos t)\, dt. \end{cases}$$

Отуда следује

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r \sin t \, dt}{r(1 - \cos t)\, dt} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}.$$

Сада је

$$\sin t = 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2},$$

$$1 - \cos t = 2 \sin^2 \frac{t}{2};$$

дакле је

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \frac{\cos \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}},$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \cot g \frac{t}{2}.$$

Диференцијалећи последњу једначину добићемо

$$(3) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx\,dt} \frac{dt}{dx} = \frac{d \cdot \cot g \frac{t}{2}}{dt} \frac{dt}{dx}.$$

Сада је пак

$$\frac{d \cot g \frac{t}{2}}{dt} = -\frac{1}{2 \sin^2 \frac{t}{2}}.$$

Друга једначина од оних под (2) даје

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{r(1 - \cos t)} = \frac{1}{2r \sin^2 \frac{t}{2}}.$$

Унесимо нађене вредности за $\frac{d \cdot \cot g \frac{t}{2}}{dt}$ и $\frac{dt}{dx}$ у једначину под (3), па ћемо имати

$$(4) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}}\frac{1}{2r\sin^2\frac{t}{2}} = -\frac{1}{4r\sin^4\frac{t}{2}}.$$

15 Проблем

Наћи вредност израза

$$(1) \quad y'' = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3},$$

узев s *за независно променљиву количину, чији је диференцијал дат једначином*

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Знајући да је

$$d^2s = o, \quad \text{или} \quad dx\,d^2x + dy\,d^2y = o,$$

и елиминишући dx и d^2x између последње једначине и оне под (1), добићемо

$$y'' = \frac{dx^2\,d^2y + dy^2\,d^2y}{dx^4} = \frac{ds^2\,d^2y}{(ds^2 - dy^2)^2}.$$

или

$$(2) \quad y'' = \frac{\frac{d^2y}{ds^2}}{\left(1 - \frac{dy^2}{ds^2}\right)^2}.$$

Према овоме израз

$$R = \frac{ds^3}{y''\,dx^3},$$

постаје

$$R = \frac{ds\sqrt{ds^2 - dy^2}}{d^2y} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2}}{\frac{d^2y}{ds^2}}.$$

Ако претпоставимо да су x и y координате циклоидине, то је

$$x = r(t - \sin t),$$

$$y = r(1 - \cos t) = 2r \sin^2 \frac{t}{2};$$

откуда је

$$dx = r(1 - \cos t)\,dt, \qquad dy = r \sin t\,dt;$$

према томе

$$ds = r\sqrt{2(1 - \cos t)}\,dt = 2r \sin \frac{t}{2}\,dt,$$

$$\frac{dy}{ds} = \cos \frac{t}{2}.$$

Из последње једначине имамо

$$d \cdot \frac{dy}{ds} = -\frac{1}{2} \sin \frac{t}{2}\,dt, \quad \frac{d^2y}{ds^2} = -\frac{1}{4r};$$

заменом добијамо

$$R = -4r \sin \frac{t}{2} = -\sqrt{8ry}.$$

16 Проблем

Шта бива са диференцијалном једначином

$$(1) \qquad dV = x^m (a + bx^n)^p\,dx,$$

која се може написати и у овом облику

$$(2) \qquad dV = x^{m + \frac{np}{2}} \left(ax^{-\frac{n}{2}} + bx^{\frac{n}{2}}\right)^p dx,$$

када се изврши смена

$$(3) \qquad ax^{-\frac{n}{2}} + bx^{\frac{n}{2}} = t?$$

Из једначине под (3) добијамо

$$ax^{-\frac{n}{2}} - bx^{\frac{n}{2}} = \sqrt{t^2 - 4ab}.$$

Ако диференцијалимо једначину под (3) добићемо

$$-\frac{n}{2}\left(ax^{-\frac{n}{2}} - bx^{\frac{n}{2}}\right)\frac{dx}{x} = dt,$$

а за тим из ове имамо

$$\frac{dx}{x} = -\frac{2}{n}\frac{dt}{\sqrt{t^2 - 4ab}}.$$

Заменимо у једначину под (2) па ћемо имати

$$dV = -\frac{2}{n}x^{m+1+\frac{np}{2}}\frac{t^p\,dt}{\sqrt{t^2 - 4ab}},$$

где треба унети вредност за x добивену из једне или друге релације:

$$2bx^{\frac{n}{2}} = t - \sqrt{t^2 - 4ab},$$

$$2ax^{-\frac{n}{2}} = t + \sqrt{t^2 - 4ab}.$$

Узев прву, нпр., имаћемо

$$(4) \quad dV = -\frac{2}{n}\frac{1}{\left(2b\right)^{\frac{2(m+1)}{n}+p}}\left(t - \sqrt{t^2 - 4ab}\right)^{\frac{2(m+1)}{n}+p}$$

$$\times \frac{t^p\,dt}{\sqrt{t^2 - 4ab}}.$$

Специјални случајеви. 1°. За $m = o,\ n = 6,\ p = -\frac{1}{3}$, добијамо

$$(1')\quad dV = \frac{dx}{\left(a + bx^6\right)^{\frac{1}{3}}} \quad \text{и} \quad (4')\ dV = -\frac{1}{3}\frac{t^{-\frac{1}{3}}\,dt}{\sqrt{t^2 - 4ab}};$$

или, ставив $t = z^{\frac{3}{2}}$ и занемарив један бројни чинитељ,

$$dV = \frac{dz}{\sqrt{z^3 - 4ab}}.$$

2°. За $m = o,\ n = 3,\ p = -\frac{2}{3}$, имамо

$$(1'')\quad dV = \frac{dx}{\left(a + bx^3\right)^{\frac{2}{3}}} \quad \text{и} \quad (4'')\ dV = -\frac{2}{3}\frac{t^{-\frac{2}{3}}\,dt}{\sqrt{t^2 - 4ab}},$$

или, ставив $t = z^{-\frac{3}{2}}$, добићемо

$$dV = \frac{dz}{\sqrt{1 - 4abz^3}}.$$

(Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques, p. 245, 1887).

17 Проблем

Шта бива са једначином

$$(1)\qquad x^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + z^2\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + yz\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z} + zx\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial x}$$
$$+ xy\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} = o,$$

кад се независно промењиве количине x, y *и* z *смене новим* X, Y *и* Z, *чија је зависност према пређашњим изражена једначинама*

$$(2) \qquad x = YZ, \quad y = ZX, \quad z = XY?$$

Знајући да је V функција од x, y и z, то је

$$\frac{\partial V}{\partial X} = Z\frac{\partial V}{\partial y} + Y\frac{\partial V}{\partial z},$$

$$\frac{\partial V}{\partial Y} = X\frac{\partial V}{\partial z} + Z\frac{\partial V}{\partial x},$$

$$\frac{\partial V}{\partial Z} = Y\frac{\partial V}{\partial x} + X\frac{\partial V}{\partial y};$$

из ових, даљим диференцијалењем, добијамо

$$\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} = Z^2\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + 2\,YZ\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z} + Y^2\frac{\partial^2 V}{\partial z^2},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} = X^2\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + 2\,ZX\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial x} + Z^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} = Y^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + 2\,XY\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} + X^2\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}.$$

Множећи три последње једначине са X^2, Y^2, Z^2, и имајући у виду једначине под (2), добићемо

$$(3) \qquad 2\left(x^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + z^2\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + yz\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z} + zx\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial x} + xy\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\right)$$

$$= X^2\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + Y^2\frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + Z^2\frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} = 0.$$

18 Проблем

Шта бива са изразима

$$(1)\quad U_1 = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2,$$

$$(2)\quad U_2 = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2},$$

ако се x, y, z *смене са* ξ, η, ζ, *знајући да је*

$$(3)\quad \begin{cases} x = a\xi + b\eta + c\zeta, & \xi = ax + a'y + a''z, \\ y = a'\xi + b'\eta + c'\zeta, & \eta = bx + b'y + b''z, \\ z = a''\xi + b''\eta + c''\zeta, & \zeta = cx + c'y + c''z\,? \end{cases}$$

Овде су a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'' сталне количине, тако изабрате да смена буде *ортогонална* тј. да је

$$x^2 + y^2 + z^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2.$$

Тај услов даје овај систем једначина

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = 1,$$

$$b^2 + b'^2 + b''^2 = 1,$$

$$c^2 + c'^2 + c''^2 = 1,$$

$$ab + a'b' + a''b'' = 0,$$

$$bc + b'c' + b''c'' = 0,$$

$$ca + c'a' + c''a'' = 0,$$

или, овај који му је еквивалентан, као што знамо,

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$

$$a^{2} + b'^2 + c'^2 = 1,$$

$$a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1,$$

$$aa' + bb' + cc' = 0,$$

$$a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0,$$

$$a''a + b''b + c''c = 0.$$

Cauchy назива *изотропном функцијом* један израз који не мења ни облик ни вредност, кад се изврши трансформација координата прелазећи са правоуглих оса на друге такође правоугле, без да се почетак промени. Нека је V ма каква функција од x, y, z. Израз

$$(1) \quad U_1 = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2,$$

M. Lamé назива *диференцијални параметар првог реда* функције V. Лако је увидети да је та функција изотропна. И заиста, извршимо смену означену под (3) па ћемо добити

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x}.$$

Али, из друге групе једначина под (3), добићемо

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = a, \ \frac{\partial \eta}{\partial x} = b, \ \frac{\partial \zeta}{\partial x} = c.$$

Дакле је

$$(a) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= a\frac{\partial V}{\partial \xi} + b\frac{\partial V}{\partial \eta} + c\frac{\partial V}{\partial \zeta}, \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= a'\frac{\partial V}{\partial \xi} + b'\frac{\partial V}{\partial \eta} + c'\frac{\partial V}{\partial \zeta}, \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= a''\frac{\partial V}{\partial \xi} + b''\frac{\partial V}{\partial \eta} + c''\frac{\partial V}{\partial \zeta}. \end{aligned} \right.$$

Подигнимо на квадрат три последње једначине, па их саберимо, наћи ћемо

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \varsigma}\right)^2,$$

дакле је заиста функција U_1 изотропна.

Посматрајмо израз

$$(2) \quad U_2 = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2},$$

на који је M. Lamé често наилазио при својим истраживањима у математичкој физици, и кога је назвао *диференцијални параметар другог реда* функције V.

Извршимо исту смену као мало час. Једначине под (a) дају нам $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$ и $\frac{\partial V}{\partial z}$; диференцијалимо прву од њих по x, другу по y, а трећу по z, па ћемо добити

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = a\left[\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial \xi\, \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial \xi\, \partial \varsigma}\frac{\partial \varsigma}{\partial x}\right]$$

$$+ b\left[\frac{\partial^2 V}{\partial \eta\, \partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial \eta\, \partial \varsigma}\frac{\partial \varsigma}{\partial x}\right]$$

$$+ c\left[\frac{\partial^2 V}{\partial \varsigma\, \partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial \varsigma\, \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial \varsigma^2}\frac{\partial \varsigma}{\partial x}\right],$$

или, заменив $\frac{\partial \xi}{\partial x}$, $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ и $\frac{\partial \varsigma}{\partial x}$ њиховим вредностима a, b, c,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = a^2\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + b^2\frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} + c^2\frac{\partial^2 V}{\partial \varsigma^2} + 2bc\frac{\partial^2 V}{\partial \eta\, \partial \varsigma}$$

$$+ 2ca\frac{\partial^2 V}{\partial \varsigma\, \partial \xi} + 2ab\frac{\partial^2 V}{\partial \xi\, \partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = a'^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + b'^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} + c'^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \zeta^2} + 2b'c' \frac{\partial^2 V}{\partial \eta \, \partial \zeta}$$

$$+ 2c'a' \frac{\partial^2 V}{\partial \zeta \, \partial \xi} + 2a'b' \frac{\partial^2 V}{\partial \xi \, \partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = a''^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + b''^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} + c''^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \zeta^2} + 2b''c'' \frac{\partial^2 V}{\partial \eta \, \partial \zeta}$$

$$+ 2c''a'' \frac{\partial^2 V}{\partial \zeta \, \partial \xi} + 2a''b'' \frac{\partial^2 V}{\partial \xi \, \partial \eta}.$$

Ако саберемо три последње једначине наћи ћемо

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \zeta^2},$$

дакле је и функција U_2 изотропна као U_1.

Облик диференцијалних параметара није промењен услед ортогоналне смене учињене на променљивим количинама, та околност и чини те ови изрази играју важну улогу у анализи.

Cauchy је показао начин да се образују све изотропне функције; ми ћемо се овде ограничити на неколико од тих функција.

Нека су x, y, z и x', y', z' координате двеју тачака у простору, изотропне функције јесу ове:

$$x^2 + y^2 + z^2, \quad xx' + yy' + zz';$$

$$x' \frac{\partial V}{\partial x} + y' \frac{\partial V}{\partial y} + z' \frac{\partial V}{\partial z}, \quad x \frac{\partial V}{\partial x} + y \frac{\partial V}{\partial y} + z \frac{\partial V}{\partial z};$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x'} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y'} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z'}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \, \partial x'} + \frac{\partial^2 V}{\partial y \, \partial y'} + \frac{\partial^2 V}{\partial z \, \partial z'};$$

у осталом, посматрајући са пажњом ове формуле, читалац ће моћи написати бесконачно много других изотропних функција.

19 Проблем

Дате су једначине

$$
(1)\quad \begin{cases} \Delta_1 V = \left(\dfrac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial V}{\partial z}\right)^2, \\[2ex] \Delta_2 V = \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2}, \end{cases}
$$

где је V *функција од* x, y *и* z. *Изразити диференцијалне параметре у функцији нових променљивих* ϱ, ϑ *и* ψ, *знајући да је*

$$
(2)\quad x = \varrho \sin\vartheta \cos\psi, \quad y = \varrho \sin\vartheta \sin\psi, \quad z = \varrho \cos\vartheta .
$$

Смена променљивих количина коју имамо да извршимо, еквивалентна је, очевидно, овим двема, извршене једна за другом:

$$
(3)\quad x = r\cos\psi, \quad y = r\sin\psi, \quad z = z,
$$

и

$$
(4)\quad r = \varrho\sin\vartheta, \quad \psi = \psi, \quad z = \varrho\cos\vartheta .
$$

Извршив прву смену под (3) добићемо

$$
\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial r} = \dfrac{\partial V}{\partial x}\cos\psi + \dfrac{\partial V}{\partial y}\sin\psi, \\[2ex] \dfrac{\partial V}{\partial \psi} = -\dfrac{\partial V}{\partial x} r\sin\psi + \dfrac{\partial V}{\partial y} r\cos\psi; \end{cases}
$$

$$
\begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial r^2} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}\cos^2\psi + 2\dfrac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\cos\psi\sin\psi + \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}\sin^2\psi, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} r^2\sin^2\psi - 2\dfrac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} r^2\sin\psi\cos\psi + \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} r^2\cos^2\psi \\[2ex] \qquad\qquad - \dfrac{\partial V}{\partial x} r\cos\psi - \dfrac{\partial V}{\partial y} r\sin\psi . \end{cases}
$$

Отуда одмах изводимо

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \psi}\right)^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}.$$

У осталом, лако је увидети да се $\frac{\partial V}{\partial z}$ и $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ нису променили. Диференцијални параметри постаће

$$\Delta_1 V = \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2,$$

и

$$\Delta_2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

Извршимо другу трансформацију, која нам остаје, под (4) $z = \varrho \cos\theta$, $r = \varrho \sin\theta$, $\psi = \psi$ и која, очевидно, неће ни у колико изменити $\frac{\partial V}{\partial \psi}$ ни $\frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2}$ а трансформисаће израз

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 \quad \text{у} \quad \left(\frac{\partial V}{\partial \varrho}\right)^2 + \frac{1}{\varrho^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)^2,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad \text{у} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial V}{\partial \varrho}.$$

На послетку, имамо релације

$$\frac{\partial V}{\partial \varrho} = \frac{\partial V}{\partial z}\cos\theta + \frac{\partial V}{\partial r}\sin\theta,$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = -\frac{\partial V}{\partial z}\varrho\sin\theta + \frac{\partial V}{\partial r}\varrho\cos\theta;$$

откуда, елиминишући $\frac{\partial V}{\partial z}$ из ових последњих једначина, изводимо

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \sin\theta \frac{\partial V}{\partial \varrho} + \frac{\cos\theta}{\varrho}\frac{\partial V}{\partial \theta}.$$

Заменимо ове вредности у пређашњим изразима, добићемо за први диференцијални параметар

$$\Delta_1 V = \left(\frac{\partial V}{\partial \varrho}\right)^2 + \frac{1}{\varrho^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{\varrho^2 \sin^2\theta}\left(\frac{\partial V}{\partial \psi}\right)^2;$$

а за други

$$\Delta_2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\varrho^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} + \frac{2}{\varrho}\frac{\partial V}{\partial \varrho} + \frac{\operatorname{cotg}\theta}{\varrho^2}\frac{\partial V}{\partial \theta},$$

или

$$\Delta_2 V = \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho^2 \frac{\partial V}{\partial \varrho}\right) + \frac{1}{\varrho^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} + \frac{1}{\varrho^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial V}{\partial \theta}\right).$$

Последња једначина, коју је Laplace први употребио, од велике је важности у теорији привлачења и у многим питањима у физици.

Стављајући $\mu = \cos\theta$ имаћемо

$$\Delta_2 V = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial^2(\varrho V)}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2(1-\mu^2)}\frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial}{\partial \mu}\left[\frac{\partial V}{\partial \mu}(1-\mu^2)\right],$$

или, за $\operatorname{tang}\frac{\theta}{2} = e^p$, добијамо

$$\Delta_2 V = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial^2(\varrho V)}{\partial \varrho^2} + \left(\frac{e^p + e^{-p}}{2\varrho}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right). \quad \text{(Cauchy).}$$

20 Проблем

Дата је V *функција од* x, y, z, *и нека је*

$$x = \varrho \sin\theta \cos\psi, \quad y = \varrho \sin\theta \sin\psi, \quad z = \varrho \cos\theta;$$

наћи вредности за $\dfrac{\partial V}{\partial x}, \dfrac{\partial V}{\partial y}, \dfrac{\partial V}{\partial z}; \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \ldots .$

Имаћемо

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{\partial V}{\partial \varrho}\sin\theta\cos\psi + \frac{\partial V}{\partial \theta}\frac{\cos\theta\cos\psi}{\varrho} - \frac{\partial V}{\partial \psi}\frac{\sin\psi}{\varrho\sin\theta},\\
\frac{\partial V}{\partial y} &= \frac{\partial V}{\partial \varrho}\sin\theta\sin\psi + \frac{\partial V}{\partial \theta}\frac{\cos\theta\sin\psi}{\varrho} + \frac{\partial V}{\partial \psi}\frac{\cos\psi}{\varrho\sin\theta},\\
\frac{\partial V}{\partial z} &= \frac{\partial V}{\partial \varrho}\cos\theta - \frac{\partial V}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{\varrho};
\end{aligned}\right.$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = {} & \frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2}\sin^2\theta\cos^2\psi + \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}\frac{\cos^2\theta\cos^2\psi}{\varrho^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2}\frac{\sin^2\psi}{\varrho^2\sin^2\theta}\\
& + 2\frac{\sin\theta\cos\theta\cos^2\psi}{\varrho}\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho\,\partial\theta} - 2\frac{\partial^2 V}{\partial\psi\,\partial\varrho}\frac{\sin\psi\cos\psi}{\varrho}\\
& - 2\frac{\partial^2 V}{\partial\theta\,\partial\psi}\frac{\sin\psi\cos\psi}{\varrho^2\operatorname{tang}\theta} + \frac{\partial V}{\partial\varrho}\frac{\cos^2\theta\cos^2\psi + \sin^2\psi}{\varrho}\\
& + \frac{\partial V}{\partial\theta}\cos\theta\left(\frac{\sin^2\psi - 2\sin^2\theta\cos^2\psi}{\varrho^2\sin\theta}\right) + 2\frac{\partial V}{\partial\psi}\frac{\sin\psi\cos\psi}{\varrho^2\sin^2\theta},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = {} & \frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2}\sin^2\theta\sin^2\psi + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}\cos^2\theta\sin^2\psi + \frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2}\frac{\cos^2\psi}{\varrho^2\sin^2\theta}\\
& + 2\frac{\partial^2 V}{\partial\theta\,\partial\varrho}\frac{\sin\theta\cos\theta\sin^2\psi}{\varrho} + 2\frac{\partial^2 V}{\partial\psi\,\partial\varrho}\frac{\sin\psi\cos\psi}{\varrho}
\end{aligned}$$

$$+ 2\frac{\partial^2 V}{\partial\vartheta\,\partial\psi}\,\frac{\mathrm{siu}\,\psi\cos\psi}{\rho^2 \mathrm{tang}\,\vartheta} + \frac{\partial V}{\partial\rho}\,\frac{\cos^2\vartheta\sin^2\psi + \cos^2\psi}{\rho}$$

$$+ \frac{\partial V}{\partial\vartheta}\cos\vartheta\left(\frac{\cos^2\psi - 2\sin^2\vartheta\sin^2\psi}{\rho^2\sin\vartheta}\right) - 2\frac{\partial V}{\partial\psi}\,\frac{\sin\psi\cos\psi}{\rho^2\sin^2\vartheta},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial\rho^2}\cos^2\vartheta + \frac{\partial^2 V}{\partial\vartheta^2}\,\frac{\sin^2\vartheta}{\rho^2} - 2\frac{\partial^2 V}{\partial\vartheta\,\partial\rho}\,\frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{\rho} + \frac{\partial V}{\partial\rho}\,\frac{\sin^2\vartheta}{\rho}$$

$$+ 2\frac{\partial V}{\partial\vartheta}\,\frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{\rho^2}.$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial\rho^2}\sin^2\vartheta\sin\psi\cos\psi + \frac{\partial^2 V}{\partial\vartheta^2}\,\frac{\cos^2\vartheta\sin\psi\cos\psi}{\rho^3} - \frac{\partial^2 V}{\partial\psi^2}\,\frac{\sin\psi\cos\psi}{\rho^2\sin^2\vartheta}$$

$$+ 2\frac{\partial^2 V}{\partial\rho\,\partial\vartheta}\,\frac{\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\psi\cos\psi}{\rho} + \frac{\partial^2 V}{\partial\psi\,\partial\rho}\,\frac{\cos^2\psi - \sin^2\psi}{\rho}$$

$$+ \frac{\partial^2 V}{\partial\psi\,\partial\vartheta}\,\frac{(\cos^2\psi - \sin^2\psi)\cos\vartheta}{\rho^2\sin\vartheta} - \frac{\partial V}{\partial\rho}\,\frac{\sin^2\vartheta\sin\psi\cos\psi}{\rho}$$

$$- \frac{\partial V}{\partial\vartheta}\,\frac{\cos\vartheta\sin\psi\cos\psi}{\rho^2}\left(2\sin\vartheta + \frac{1}{\sin\vartheta}\right) + \frac{\partial V}{\partial\psi}\,\frac{\sin^2\psi - \cos^2\psi}{\rho^2\sin^2\vartheta},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z} = \frac{\partial^2 V}{\partial\rho^2}\sin\vartheta\cos\vartheta\cos\psi - \frac{\partial^2 V}{\partial\vartheta^2}\,\frac{\sin\vartheta\cos\vartheta\,\mathrm{ccs}\,\psi}{\rho^2}$$

$$+ \frac{\partial^2 V}{\partial\vartheta\partial\rho}\,\frac{(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)\cos\psi}{\rho} - \frac{\partial^2 V}{\partial\psi\partial\rho}\,\frac{\sin\psi\cos\vartheta}{\rho\sin\vartheta} + \frac{\partial^2 V}{\partial\vartheta\partial\psi}\,\frac{\sin\psi}{\rho^2}$$

$$+ \frac{\partial V}{\partial\vartheta}\,\frac{(\sin^2\vartheta - \cos^2\vartheta)\cos\psi}{\rho^2} - \frac{\partial V}{\partial\rho}\,\frac{\sin\vartheta\cos\vartheta\cos\psi}{\rho},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z} = \frac{\partial^2 V}{\partial\rho^2}\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\psi - \frac{\partial^2 V}{\partial\vartheta^2}\,\frac{\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\psi}{\rho^2}$$

$$+ \frac{\partial^2 V}{\partial\vartheta\partial\rho}\,\frac{(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)\sin\psi}{\rho} + \frac{\partial^2 V}{\partial\psi\partial\rho}\,\frac{\cos\psi\cos\vartheta}{\rho\sin\vartheta} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial\vartheta\partial\psi}\,\frac{\cos\psi}{\rho^2}$$

$$+\frac{\partial V}{\partial \theta}\frac{(\sin^2\theta - \cos^2\theta)\sin\psi}{\varrho^2} - \frac{\partial V}{\partial \varrho}\frac{\sin\theta\cos\theta\sin\psi}{\varrho}.$$

Тако смо добили формуле које служе за трансформацију правоуглих координата у полне.

Ако у овим формулама ставимо $\theta = \frac{\pi}{2}$, добићемо формуле које служе за смену правоуглих координата у полне у једној равни; ϱ је тада потег а ψ полни угао. За тим, помоћу њих, можемо прећи са обичних координата на семи — поларне координате. *(Laurent, Cours d'Analyse, t. I, p. 224, 1885).*

21 Проблем

Нека је z *функција двеју променљивих* x *и* y. *Ставимо* $x = f(\xi, \eta)$, $y = \varphi(\xi, \eta)$, *где су* ξ *и* η *две нове променљиве количине. Изразити делимичке изводе* $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; . . . , *у функцији од* ξ, η; $\frac{\partial z}{\partial \xi}$, $\frac{\partial z}{\partial \eta}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}$, ...

Пошто је z функција од x и y, а ове су опет функције од ξ и η, то ће z бити сложена функција ових двеју нових променљивих. Узмимо њене постепене делимичке изводе; наћи ћемо

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial \xi} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \xi} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \xi}, \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial \eta} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \eta} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \eta}; \end{cases}$$

за тим, приметив да су $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функције од x и y, према томе и функције од ξ и η, то је

$$
(2) \left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} &= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} \\
&\quad + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \\
&= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 \\
&\quad + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2}.
\end{aligned}
\right.
$$

Тако исто

$$
(3) \left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right) \\
&\quad + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta},
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(4) \left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 \\
&\quad + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2}.
\end{aligned}
\right.
$$

На исти начин нашли бисмо треће изводе итд.

Једначине под (1), линерне по $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, служе нам да изразимо те количине као функције од $\frac{\partial z}{\partial \xi}$ и $\frac{\partial z}{\partial \eta}$ и делимичких извода по x и y, који су познате функције од ξ и η. Уносећи нађене вредности за $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ у једначине под (2), (3) и (4), моћи ћемо да их разрешимо по $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$. Тако исто учинићемо и за изводе вишег реда.

Ова се метода, очевидно, може применити на функције од ма коликог броја променљивих количина.

Примедба. Не треба губити из вида да је делимички извод $\frac{\partial z}{\partial x}$ једне функције двеју променљивих количина x, y, према дефиницији, извод z-а посматране као функција **x-а**, y *остајући стално.* Ако заменимо y са функцијом $\varphi(x, \eta)$, тако да нове независно променљиве количине буду x и η, нови делимички извод по x биће извод z-а по x, η *остајући стално.* **Услед** ове мене дефиниције следује природно и мена вредности овог делимичког извода.

Нека је, нпр., $z = F(x, y)$. Имаћемо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x}.$$

Али, пошто смо сменили променљиву, имаћемо

$$z = F[x, \varphi(x, \eta)], \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

22 Проблем

Ставимо

$$u = px + qy - z,$$

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2};$$

израчунати p, q, r, s, t, *узев за функцију* u, *а за променљиве* p, q.

Имамо

$$du = pdx + qdy - dz + xdp + ydq,$$

или, због тога што је $dz = pdx + qdy$,

$$du = xdp + ydq;$$

откуда изводимо

$$x = \frac{\partial u}{\partial p}, \ y = \frac{\partial u}{\partial q}.$$

Из образаца

$$dp = r\,dx + s\,dy,$$

$$dq = s\,dx + t\,dy,$$

имамо

$$dx = \frac{t\,dp - s\,dq}{rt - s^2}, \ dy = \frac{r\,dq - s\,dp}{rt - s^2};$$

дакле

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial p} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial p^2} = \dfrac{t}{rt - s^2}, \\ \dfrac{\partial x}{\partial q} = \dfrac{\partial y}{\partial p} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial q} = \dfrac{-s}{rt - s^2}, \\ \dfrac{\partial y}{\partial q} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial q^2} = \dfrac{r}{rt - s^2}; \end{cases}$$

откуда, обратно, можемо добити r, s и t.

Стављајући

$$\frac{\partial^2 u}{\partial p^2} = r', \ \frac{\partial^2 u}{\partial q^2} = t', \ \frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial q} = s';$$

имамо

$$\frac{1}{rt - s^2} = r't' - s'^2,$$

дакле је

$$r = \frac{t'}{s'^2 - r't'}, \ s = \frac{-s'}{s'^2 - r't'}, \ t = \frac{t'}{s'^2 - r't'}.$$

23 Проблем

Стављајући

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \ q = \frac{\partial z}{\partial y}, \ r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \ s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} \ \textit{и} \ t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

наћи изводе функције y *по* x *и* z.

Имамо

$$(1) \quad dz = p\,dx + q\,dy,$$

отуда

$$dy = \frac{\partial z}{q} - \frac{p}{q}dx;$$

дакле

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{q}, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{p}{q}.$$

Једначина (1), диференцијалена, постаје

$$d^2z = p\,d^2x + q\,d^2y + r\,dx^2 + 2s\,dxdy + t\,dy^2,$$

или, ако се стави $d^2z = o$, $d^2x = o$, $dy = \frac{dz}{q} - \frac{p}{q}dx$, добијамо

$$o = q\,d^2y + r\,dx^2 + 2s\,dx\left(\frac{dz}{q} - \frac{p}{q}dx\right) + t\left(\frac{dz}{q} - \frac{p}{q}dx\right)^2.$$

Решив последњу једначину по d^2y, закључићемо отуда

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{1}{q}\left(r - 2s\frac{p}{q} + t\frac{p^2}{q^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial z} = -\frac{1}{q}\left(\frac{2s}{q} - 2\frac{p}{q^2}t\right),$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = -\frac{1}{q^3}t.$$

Трансформација, извршена у два последња проблема, позната је у науци под именом *Legendre-ова трансформација*. *(H. Laurent, Cours d'Analyse, t. I, p. 211, 1885).*

24 Проблем

Наћи n-ти извод функције

$$y = f(\mathrm{Log}\,x).$$

Ја ћу извршити смену променљиве количине ставив

$$\mathrm{Log}\, x = u,$$

откуда

$$x = e^u, \quad dx = e^u du.$$

Имаћемо постепено

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = e^{-u}\frac{dy}{du},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{-u}\frac{d}{du}\left(e^{-u}\frac{dy}{du}\right) = e^{-2u}\frac{d^2y}{du^2} - e^{-2u}\frac{dy}{du},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = e^{-u}\frac{d}{du}\left(e^{-2u}\frac{d^2y}{du^2} - e^{-2u}\frac{dy}{du}\right)$$

$$= e^{-3u}\frac{d^3y}{du^3} - 3e^{-3u}\frac{d^2y}{du^2} + 2e^{-3u}\frac{dy}{du},$$

. . . .

Можемо символички написати

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2u}\frac{dy}{du}\left(\frac{dy}{du} - 1\right),$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = e^{-3u}\frac{dy}{du}\left(\frac{dy}{du} - 1\right)\left(\frac{dy}{du} - 2\right),$$

условив, једном множења извршена, да се замени $\left(\frac{dy}{du}\right)^2$, $\left(\frac{dy}{du}\right)^3$,..., са $\frac{d^2y}{du^2}$, $\frac{d^3y}{du^3}$,...

Према томе, ми можемо ставити

$$(1) \quad \frac{d^ny}{dx^n} = e^{-nu}\frac{dy}{du}\left(\frac{dy}{du} - 1\right)\left(\frac{dy}{du} - 2\right)\cdots\left[\frac{dy}{du} - (n-1)\right].$$

Ја кажем да је та формула општа; то ћу доказати, ако докажем, ако она вреди за n-ти извод, да ће вредити и за (n + 1)-ви. И заиста, ставимо

$$\frac{d^n y}{dx^n} = e^{-nu} U,$$

па ћемо имати

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = e^{-u}\frac{d\cdot[e^{-nu}U]}{du} = e^{-(n+1)u}\left(\frac{dU}{du} - nU\right).$$

Образовати $\frac{dU}{du}$, у нашем симболичком означењу, то је помножити U са $\frac{dy}{du}$; дакле ћемо имати симболички

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = e^{-(n+1)u}U\left(\frac{dy}{du} - n\right)$$

$$= e^{-(n+1)u}\frac{dy}{du}\left(\frac{dy}{du} - 1\right)\cdots\left(\frac{dy}{du} - n\right),$$

што доказује општност формуле под (1). Одредимо сачиниоце $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}$ по формули

$$(2)\quad \begin{cases} (z-1)(z-2)(z-3)\cdots[z-(n-1)] \\ \qquad = z^{n-1} - A_1 z^{n-2} + A_2 z^{n-3} - \cdots + (-1)^{n-1}A_{n-1}; \end{cases}$$

заменив e^{-nu} са x^{-n} у изразу (1), па ћемо добити

$$(3)\quad \frac{d^n f(\mathrm{Log}x)}{dx^n} = x^{-n}[f^{(n)}(u) - A_1 f^{(n-1)}(u) + A_2 f^{(n-2)}(u) - \cdots].$$

Из обрасца под (2), види се да је A_1 сума (n — 1) првих бројева; A_2 је сума производа ових бројева два и два, итд.

Оверити резултате:

1). *У једначини*

$$x\frac{dy}{dx} - ay = o,$$

сменимо $x = e^t$, *па ћемо добити*

$$\frac{dy}{dt} - ay = o.$$

2). *Дата је једначина*

$$(1) \quad (x-p)\sqrt{(x-p)(x-q)}\frac{dy}{dx} + ay = b;$$

узев t *за независно променљиву, знајући да је*

$$(2) \quad \sqrt{(x-p)(x-q)} = (x-p)t,$$

једначина под (1) постаје

$$(3) \quad (q-p)\frac{dy}{dt} + 2ay = 2b.$$

Примедба. Смена под (2) често се употребљује да ишчезну ирационални изрази облика $\sqrt{x^2 + ax + b}$.

3). *Шта бива са једначином*

$$(1) \quad (1-x^2)^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x(1-x^2)\frac{dy}{dx} + \frac{2ay}{1-x} = o,$$

узев t *за независно променљиву, знајући да је*

$$(2) \quad x = \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}?$$

Она постаје

$$(3)\quad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{2ay}{1 - i\,\mathrm{tang}\,\frac{t}{i}} = \frac{d^2y}{dt^2} + ay\,(e^{2t} + 1) = 0.$$

4). *Шта бива са једначином*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + y = 0,$$

узев t *за променљиву и знајући да је* $x = 4t$? *(Fourier, Traité de la Chaleur).*

Она постаје

$$t\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = 0.$$

5). *Трансформисати израз*

$$R = \frac{x\frac{dy}{dx} - y}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}},$$

у други у коме су независно променљиве ϱ *и* θ, *знајући да је* $x = \varrho\cos\theta$, $y = \varrho\sin\theta$; *добићемо*

$$R = \frac{\varrho^2}{\left(\varrho^2 + \frac{d\varrho^2}{d\theta^2}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

6). *Дата је једначина*

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0;$$

елиминисати независно промењљиве x *и* y, *знајући да је*

$$V = \varphi(r), \quad x^2 + y^2 = r^2;$$

добићемо

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} = 0.$$

7). *Доказати кад, у диференцијалној једначини*

$$\frac{dx}{x(x^2 + y^2 - 2x - 3) - y} = \frac{dy}{y(x^2 + y^2 - 2x - 3) - x},$$

ставимо $x = \varrho \cos \omega$, $y = \varrho \sin \omega$ *да ћемо добити*

$$d\varrho = \varrho(\varrho^2 - 2\varrho \cos \omega - 3)\,d\omega$$

8). *Ако исту смену под 7), извршимо у једначини*

$$\frac{dx}{-y + 2x(x^2 + y^2 - 4x + 3)} = \frac{dy}{x + 2y(x^2 + y^2 - 4x + 3)},$$

добићемо

$$\frac{d\varrho}{d\omega} = 2\varrho(\varrho^2 - 4\varrho \cos \omega + 3).$$

9). *За* $x = r \cos p$, $y = r \sin p$, $f = f(x, y)$; *доказати да ћемо имати*

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)^2.$$

10). *Ако се стави*

$$f = f(r, p), \quad r = a\varrho + \varphi(u - v), \quad p = u + \chi(u - v);$$

доказата да имамо

$$\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} = a\frac{\partial f}{\partial \varrho} + \frac{\partial f}{\partial p}.$$

11). *За* $x = r\cos p$, $y = r\sin p$, *доказати*, *ма каква била независно променљива количина* t, *да имамо*

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = r^2\frac{d^2p}{dt^2} + 2r\frac{dr\,dp}{dt^2}.$$

12). *Доказати кад се у једначини*

$$(x + a)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{x}{b}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{dx}{dy} = 0,$$

у којој је x *независно променљива количина*, *узме* y *за независно променљиву да ћемо добити*

$$-(x + a)\frac{d^2x}{dy^2} + \frac{x}{b}\frac{dx}{dy} - \left(\frac{dx}{dy}\right)^4 = 0.$$

13). *Кад се у једначини*

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1,$$

учини замена $x = a\cos^3\omega$, *добићемо*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\operatorname{tang}\omega,\quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{b}{3a^2}\sec^4\omega\operatorname{cosec}\omega.$$

14). *Нека је*

$$y = c\arccos\frac{c - x}{c} + \sqrt{2cx - x^2},$$

и заменили се

$$\arccos\frac{c - x}{c} = \chi;$$

то ћемо добити

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\chi,\quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{4c\sin^3\frac{1}{2}\chi\cos\frac{1}{2}\chi}.$$

15). *За* $x = \frac{1}{t}$ *добијамо*

$$\frac{dy}{dx} = -t^2 \frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = t^4 \frac{d^2y}{dt^2} + 2t^3 \frac{dy}{dt};$$

отуда

$$x \frac{d^2y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} = t^3 \frac{d^2y}{dt^2}.$$

16). *Нека је* y *извесна функција* x-a.

За $x = \frac{1}{2} t^2$, *добијамо*

$$2x \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = \frac{d^2y}{dt^2}.$$

17). *Стави ли се* $x = \frac{1}{2} a (e^t - e^{-t})$, *то се добија*

$$(a^2 + x^2) \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} = \frac{d^2y}{dt^2}.$$

18). *Смена* $x = a \sin \tau$ *даје*

$$(a^2 - x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} = \frac{d^2y}{d\tau^2}.$$

19). *Стави ли се* $x = a\sqrt{e^t - 1}$, *то се добија*

$$\frac{x^2 + a^2}{x^2} \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{x^2 - a^2}{x^3} \frac{dy}{dx} = \frac{4}{a^2} e^{-t} \frac{d^2y}{dt^2}.$$

20). *Кад се у једначини*

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$

стави $x = \frac{a(t^2 + 1)}{2t}$, *добићемо*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}\frac{t^2+1}{t^2-1};\ \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b}{a^2}\left(\frac{2t}{t^2-1}\right)^3;\ \text{итд.}$$

21). *Из једначине*

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$

кад се стави $x = a\cos\omega$, *следује*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\operatorname{cotg}\omega,\ \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b}{a^2\sin^3\omega},\ \text{итд.}$$

22). *Из једначине*

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$

добија се, за $x = a\sec\omega$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}\operatorname{cosec}\omega,\ \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b}{a^2}\operatorname{cotg}^2\omega,\ \text{итд.}$$

23). *Дато је*

$$x = 7 + t^2,\ y = 3 + t^2 - 3t^4;$$

доказати да је

$$\frac{dy}{dx} = 1 - 6t^2;\ \frac{d^2y}{dx^2} = -6.$$

24). *Дато је*

$$x = \frac{2at}{1+t^2},\ y = \frac{b(1-t^2)}{1+t^2};$$

доказати да ћемо имати

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2bt}{a(1-t)^2},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b}{a^2}\left(\frac{1+t^2}{1-t^2}\right)^3,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{6b}{a^3}\frac{t(1+t^4)^4}{(1-t^2)^5}.$$

25). *Смена*

$$x = c\frac{\sin(\theta+\eta)}{\sin(\theta-\eta)}, \quad y = 2c\frac{\sin\theta\sin\eta}{\sin(\theta-\eta)},$$

даје, кад се η *сматра као функција од* θ,

$$\frac{dy}{dx} = 2\frac{\frac{d\eta}{d\theta}\sin^2\theta - \sin^2\eta}{\frac{d\eta}{d\theta}\sin 2\theta - \sin 2\eta},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4\left[-\frac{d^2\eta}{d\theta^2}\sin\theta\sin\eta + 2\left(\frac{d\eta}{d\theta}\right)^2\sin\theta\cos\eta - 2\frac{d\eta}{d\theta}\cos\theta\sin\eta\right]\sin^3(\theta-\eta)}{c\left[\frac{d\eta}{d\theta}\sin 2\theta - \sin 2\eta\right]^3}$$

26). *Доказати кад у једначини*

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3x^2 - 18x + 19}{4(1-x)^4}y,$$

ставимо $x = \frac{1}{t}$, $y = \frac{z}{t}$, *да ћемо добити*

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{z}{t^2(t-1)^4}\,\frac{19t^2 - 18t + 3}{4}.$$

Задаци:

1). *Представити* $\frac{dy}{dx}$ *и* $\frac{d^2y}{dx^2}$ *у функцији* t*-а, кад су дате:*

$$(1)\quad \begin{cases} y = t + \sin^2 t, \\ x = t + e^t; \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} y = \sin^3 t, \\ x = \operatorname{cotg} t. \end{cases}$$

2). *Шта бива са једначином*

$$(1)\quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{y}{(e^t + e^{-t})^2},$$

кад се учини смена

$$(2)\quad t = \operatorname{Log} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\,?$$

Шта бива са једначином (1), кад се t *замени са* at *или са* iat?

3). *Шта бива са једначином*

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{\sqrt{1 + x^2}} = 0,$$

кад се узме t *за независно променљиву количину, знајући да је*

$$t = \operatorname{Log}(x + \sqrt{1 + x^2}).$$

4). *Две променљиве* x *и* y *везане су једном једначином. Означимо са* x', x'', x''', . . . , *изводе* x-а *по* y; *а са* y', y'', y''', . . . , *изводе* y-а *по* x. *Изразити изводе* x', x'', x''', . . . , *у функцији извода* y', y'', y''', ...

5). *Трансформисати израз*

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

у један други у коме ће y *и* z *бити независно промењливе количине.*

6). *Трансформисати израз*

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x},$$

у други ставив $x = e^t$, *претпостављајући* dt *стална количина.*

7). *Нека је* z *функција од* x *и* y. *Ставимо*

(1) $x = f(\xi, \eta, \zeta)$. $y = \varphi(\xi, \eta, \zeta)$ *и* $z = \psi(\xi, \eta, \zeta)$;

тражи се да се изразе делимички изводи

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}; \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \ldots,$$

у функцији од ξ, η *и* ζ *и делимичких извода*

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}, \frac{\partial \zeta}{\partial \eta}; \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2}, \ldots.$$

8). *Дате су једначине*

$$(1) \quad \begin{cases} x = a\xi + b\eta + c\zeta, \\ y = a'\xi + b'\eta + c'\zeta, \\ z = a''\xi + b''\eta + c''\zeta; \end{cases}$$

израчунати изводе

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \; q = \frac{\partial z}{\partial y}, \; r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \; s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \; t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

у функцији извода

$$p' = \frac{\partial \zeta}{\partial \xi}, \quad q' = \frac{\partial \zeta}{\partial \eta}, \quad r' = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2}, \quad s' = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi \, \partial \eta}, \quad t' = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \eta^2};$$

претпоставља се да између количина a, b, c; a', . . . , *постоје они односи који и између девет косинуса углова у трансформацији координата.*

9). *Дати су односи*

$$(1) \quad \begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \psi, \\ y = \rho \sin \theta \sin \psi, \\ z = \rho \cos \theta, \end{cases}$$

помоћу којих се може учинити трансформација обичних координата x, y, z, *једне тачке у полне координате* ρ, θ *и* ψ. *Израчунати изводе*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} = s, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t, \; . \; . \; . \; ,$$

у функцији

$$\rho, \; \theta, \; \psi \text{ и } \frac{\partial \rho}{\partial \theta}, \; \frac{\partial \rho}{\partial \psi}, \; . \; . \; . \; .$$

10). *Нека су* x, y, z, *функције* t-a, *претпоставља се да се изврши смена координата, ставив*

$$(1) \quad \begin{cases} x = a\xi + b\eta + c\zeta, \\ y = a'\xi + b'\eta + c'\zeta, \\ z = a''\xi + b''\eta + c''\zeta; \end{cases}$$

a, b, c; a', . . . , *означавајући девет косинуса углова везаних међу собом познатим односима:* $a^2 + b^2 + c^2 = 1, \; . \; . \; .$;

$aa' + bb' + cc' = 0, \cdot \cdot \cdot$; *пита се шта бива, у новом систему координата, са изразима*

$$d^2y\,dx - d^2x\,dy, \quad d^2z\,dy - d^2y\,dz, \quad d^2x\,dz - d^2z\,dx,$$

и са детерминантом

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix}.$$

11). *Шта бива са изразима*

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdot \cdot \cdot,$$

кад се узму, за нове променљиве количине, u *и* v *везане једначинама*

$$x + y = u, \quad xy = v?$$

12). *Шта бива са делимичким изводима*

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}, \frac{\partial\theta}{\partial y}; \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}, \frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y}, \cdot \cdot \cdot,$$

кад се стави

$$x + y = u, \quad xy = v;$$

или

$$u + v = x, \quad uv = y?$$

IX

Елиминација сталних количина и произвољних функција

1 Проблем

Из једначине

$$(1) \quad ax + by + cz + d = 0$$

елиминисати a, b, c, d. *Претпоставља се да су* x, y *и* z *функције* t-a.

Диференцијалимо дату једначину, па ћемо добити

$$a\,dx + b\,dy + c\,dz = 0,$$

$$a\,d^2x + b\,d^2y + c\,d^2z = 0,$$

$$a\,d^3x + b\,d^3y + c\,d^3z = 0.$$

Из првих двеју добијамо

$$\frac{a}{dy\,d^2z - dz\,d^2y} = \frac{b}{dz\,d^2x - dx\,d^2z} = \frac{c}{dx\,d^2y - dy\,d^2x} = \lambda,$$

откуда добијамо вредности за a, b и c. Уносећи те вредности у трећу једначину, имамо

$$(dy\,d^2z - dz\,d^2y)\,d^3x + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)\,d^3y$$
$$+ (dx\,d^2y - dy\,d^2x)\,d^3z = o,$$

или

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix} = o.$$

У примени инфинитезималног рачуна на аналитичку геометрију наићи ћемо на ову једначину, која представља нужан услов па да једна крива линија буде у равни или да је торзиони угао раван нули у свакој од њених тачака.

2 Проблем

Елиминисати a, b, c, *из једначине*

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = o.$$

Задата једначина, са геометријског гледишта, представља општу једначину кругова. Пошто она садржи три сталне количине a, b и c, диференцијална једначина, из ње изведена, биће трећег реда. Да бисмо је добили, ми ћемо наћи постепене изводе y-a по x. Диференцијалећи задату једначину добићемо

$$x + yy' + a + by' = o$$

(где смо, скраћења ради, поделили са 2); за тим

$$1 + y'^2 + yy'' + by'' = o,$$

и, на послетку,

$$3y'y'' + yy''' + by''' = o.$$

Елиминишући b између ових двеју последњих једначина, добићемо *диференцијалну једначину кругова*

$$(1 + y'^2 + yy'')y''' - y''(3y'y'' + yy''') = 0;$$

или, по свођењу,

$$(1 + y'^2)y''' - 3y'y''^2 = 0.$$

3 Проблем

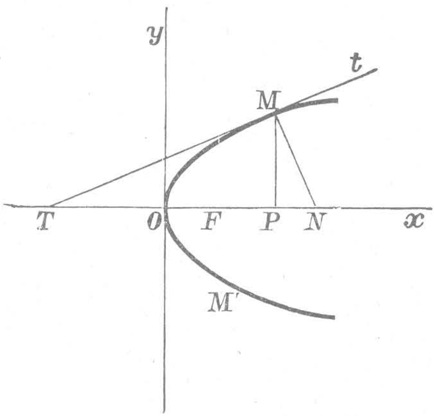
Дата је једначина

$$y^2 = 2cx,$$

елиминисати константну количину c.

Дата једначина представља фамилију кривих линија, познатих под именом *парабола*. Дајући количини c разне вредности, за сваку од тих вредности, добићемо по једну одређену параболу. Све те параболе имају своје теме у почетку, а њихове жиже леже на x оси.

Нека је MOM' једна од тих парабола (сл. 2), која увек пролази кроз једну тачку M(x, y) у равни.



Сл. 2.

Ако диференцијалимо дату једначину и поделимо са 2, добићемо

$$yy' = c,$$

тј. $PN = c$, познато својство поднормале.

Ако, у задатој једначини, заменимо c том вредношћу, добићемо диференцијалну једначину

$$\frac{y}{y'} = 2x$$

тј. $TP = 2OP$, у којој је исказато опште својство свију парабола дате фамилије које се састоји у томе да у оса, која је тангента у њиховом темену, полови њихове подтангенте TP, а услед тога она полови и њихове тангенте TM.

4 Проблем

Дата је једначина

$$(x - c)^2 + y^2 - R^2 = o,$$

елиминисати константну количину c.

Дата једначина представља фамилију кругова истог полупречника R, чији су центри на x оси, узев c за параметар апсцисе центра.

Ако диференцијалимо дату једначину и поделимо са 2, добићемо

$$x - c + yy' = o,$$

и елиминишући c или још боље $x - c$ између последње једначине и дате, имаћемо

$$y^2 y'^2 + y^2 - R^2 = o,$$

или

$$y^2 (1 + y'^2) - R^2 = o.$$

Ово је тражена диференцијална једначина у којој су исказана општа својства свију кругова задате фамилије.

Према формули $yy' = PN$, и слици у претходном проблему која се може применити на ма какву кӳрву, yy' представља поднормалу PN која се односи на тачку M чија је ордината $MP = y$. Услед тога $y^2 y'^2 + y^2$ није ништа друго но $\overline{PN}^2 + \overline{PM}^2$, која је сума квадрата равна $\overline{MN}^2$ (квадрату нормале) у правоуглом троуглу MPN.

Диференцијална једначина наводи нас да ставимо $\overline{MN}^2 = R^2$ или $MN = R$, што значи да посматрани кругови имају као опште својство то, да су њихове нормале исте дужине и равне полупречнику (сталном) тих кругова.

Из ова два последња проблема видимо, како се помоћу инфинитезималног рачуна могу на врло лак начин, дознати извесна својства кривих линија, која се елементарним, често доста дугим, путем тешко сазнају. (Проблеми 3 и 4 позајмљени су од *J. Boussinesq-a, Cours d'Analyse infinitésimale, t. I, p. 127, 1887).*

5 Проблем

Наћи диференцијалну једначину коничних влакова представљених једначином

$$(1) \quad y = ax + b \pm (px^2 + 2qx + r)^{\frac{1}{2}}.$$

Једначина под (1) представља фамилију коничких влакова, чија је ордината y одређена истом једначином.

Ако постепено диференцијалимо дату једначину добићемо

$$y' = a \pm (px + q)(px^2 + 2qx + r)^{-\frac{1}{2}},$$

$$y'' = \pm p(px^2 + 2qx + r)^{-\frac{1}{2}} \mp (px + q)^2 (px^2 + 2qx + r)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \pm \frac{p(px^2 + 2qx + r) - (px + q)^2}{(px^2 + 2qx + r)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \pm \frac{pr - q^2}{\left(px^2 + 2qx + r\right)^{\frac{3}{2}}},$$

откуда

$$(2) \quad y''^{-\frac{2}{3}} = \frac{px^2 + 2qx + r}{\left(pr - q^2\right)^{\frac{2}{3}}}.$$

Диференцијалимо три пута ову последњу једначину, па ћемо добити

$$(3) \quad \left(y''^{-\frac{2}{3}}\right)''' = o.$$

Ако задата једначина представља параболу, p ће бити равно нули. Десна страна једначине под (2) неће имати члана са x^2, и зато ће бити довољно да је диференцијалимо два пута па да ишчезну остале сталне количине. Диференцијална једначина парабола биће

$$(4) \quad \left(y''^{-\frac{2}{3}}\right)'' = o.$$

Једначине под (3) и (4) лако је добити у развијеној форми. И заиста, имамо

$$\left(y''^{-\frac{2}{3}}\right)' = -\frac{2}{3} y''^{-\frac{5}{3}} y''',$$

$$\left(y''^{-\frac{2}{3}}\right)'' = \frac{10}{9} y''^{-\frac{8}{3}} y'''^2 - \frac{2}{3} y''^{-\frac{5}{3}} y^{\text{IV}},$$

$$\left(y''^{-\frac{2}{3}}\right)''' = -\frac{80}{27} y''^{-\frac{11}{3}} y'''^3 + \frac{20}{9} y''^{-\frac{8}{3}} y''' y^{\text{IV}}$$

$$+ \frac{10}{9} y''^{-\frac{8}{3}} y''' y^{\text{IV}} - \frac{2}{3} y''^{-\frac{5}{3}} y^{\text{V}}.$$

Уносећи те вредности у једначине под (3) и (4), множећи са имениteљима, скративши општим чинитељем 2, добићемо општу диференцијалну једначину коничних влакова

$$-40y'''^3 + 45y''y'''y^{IV} - 9y''^2y^{V} = o;$$

а за параболе биће

$$5y'''^3 - 3y''y^{IV} = o.$$

6 Проблем

Елиминисати a *из једначине*

$$\cos x \cos y - \sin x \sin y \sqrt{1 - e^2\sin^2 a} = \cos a.$$

Претпоставља се $e < 1$; *корен је узет са положним знаком.*

Ставимо, краткоће ради,

$$\sqrt{1 - e^2\sin^2 a} = \cos b;$$

откуда је

$$(1) \quad \sin^2 b = e^2\sin^2 a.$$

Диференцијалимо задату једначину па ћемо добити

$$(2) \quad \cos b = -\frac{\cos x \sin y\, dy + \sin x \cos y\, dx}{\sin x \cos y\, dy + \cos x \sin y\, dx},$$

а за тим

$$\cos a = \frac{\sin x \cos x\, dy + \sin y \cos y\, dx}{\sin x \cos y\, dy + \cos x \sin y\, dx}.$$

Тако исто налазимо

$$\sin^2 b = \frac{(dy^2 - dx^2)(\sin^2 x \cos^2 y - \cos^2 x \sin^2 y)}{(\sin x \cos y\, dy + \cos x \sin y\, dx)^2}$$

$$= \frac{(dy^2 - dx^2)(\cos^2 y - \cos^2 x)}{(\sin x \cos y\, dy + \cos x \sin y\, dx)^2},$$

$$\sin^2 a = \frac{(\sin^2 x\, dy^2 - \sin^2 y\, dx^2)(\cos^2 y - \cos^2 x)}{(\sin x \cos y\, dy + \cos x \sin y\, dx)^2}.$$

Заменимо, у једначину под (1), $\sin^2 b$ и $\sin^2 a$ њиховим вредностима, по свођењу, добијамо диференцијалну једначину

$$(3) \qquad \frac{dy}{\sqrt{1-e^2\sin^2 y}} \pm \frac{dx}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}} = 0.$$

Лако је увидети да у овој једначини треба узети знак $+$, кад се претпостави $\cos b > 0$. Ако у једначини под (2) десно поделимо и бројитеља и именитеља са dx добијамо

$$(2) \qquad \cos b = -\frac{\cos x \sin y \dfrac{dy}{dx} + \sin x \cos y}{\sin x \cos y \dfrac{dy}{dx} + \cos x \sin y},$$

и сада заменимо $\dfrac{dy}{dx}$ његовом вредношћу $-\dfrac{\sqrt{1-e^2\sin^2 y}}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}$ добивеном из једначине под (3), по свођењу, добићемо

$$\cos b = \frac{\sqrt{1-e^2\sin^2 y}\sqrt{1-e^2\sin^2 x} - e^2\sin x \sin y \cos x \cos y}{1-e^2\sin^2 x \sin^2 y}.$$

Но, бројитељ ће бити положан ако је

$$(1-e^2\sin^2 y)(1-e^2\sin^2 x) > e^4\sin^2 x \sin^2 y \cos^2 x \cos^2 y,$$

или

$$e^4\sin^2 x \sin^2 y (1-\cos^2 x \cos^2 y) - e^2(\sin^2 x + \sin^2 y) + 1 > 0;$$

а ова неједначина и постоји у ствари, јер први њен део може се написати

$$(1-e^2\sin^2 x \sin^2 y)[1-e^2(1-\cos^2 x \cos^2 y)],$$

резултат нужно положан, пошто смо претпоставили $e < 1$.

На исти начин увидели бисмо да би у једначини под (3) знак мање (—) одговарао случају кад се претпостави $\cos b < o$.

Задата једначина са оном под (3) играју важну улогу у теорији елиптичких функција.

7 Проблем

Наћи нужан услов па да функције $y_1, y_2, \cdots, y_n$, *једне исте променљиве* x *буду везане једном линерном једначином са сталним сачиниоцима*

$$(1) \qquad C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n = o.$$

Тај се проблем своди на елиминацију сталних количина $C_1, C_2, \cdots, C_n$.

Диференцијалећи (n — 1) пута једначину под (1) добићемо

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_1 y_1' + C_2 y_2' + \cdots + C_n y_n' = o, \\ C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + \cdots + C_n y_n'' = o, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ C_1 y_1^{(n-1)} + C_2 y_2^{(n-1)} + \cdots + C_n y_n^{(n-1)} = o. \end{array} \right.$$

Елиминишући $C_1, C_2, \cdots, C_n$, из једначине под (1) и ових под (2), добијамо тражени услов

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = o.$$

У теорији диференцијалних једначина увидећемо да је тај услов и довољан.

8 Проблем

Доказати да ћемо, елиминишући φ између једначина

$$(1) \quad z = \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2,$$

$$(2) \quad 0 = \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2},$$

наћи једначину

$$\frac{d^2 \operatorname{Log} z}{dx^2} + \frac{d^2 \operatorname{Log} z}{dy^2} = 0.$$

(W. H. L. Russel).

Из једначине под (1) добијамо

$$(3) \quad \frac{1}{2}\frac{dz}{dx} = \frac{d\varphi}{dx}\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{d^2\varphi}{dy\,dx},$$

$$(4) \quad \frac{1}{2}\frac{dz}{dy} = \frac{d\varphi}{dx}\frac{d^2\varphi}{dx\,dy} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{d^2\varphi}{dy^2},$$

$$(5) \quad \frac{1}{2}\frac{d^2z}{dx^2} = \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)^2 + \frac{d\varphi}{dx}\frac{d^3\varphi}{dx^3} + \left(\frac{d^2\varphi}{dy\,dx}\right)^2 + \frac{d\varphi}{dy}\frac{d^3\varphi}{dy\,dx^2},$$

$$(6) \quad \frac{1}{2}\frac{d^2z}{dy^2} = \left(\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}\right)^2 + \frac{d\varphi}{dx}\frac{d^3\varphi}{dx\,dy^2} + \left(\frac{d^2\varphi}{dy^2}\right)^2 + \frac{d\varphi}{dy}\frac{d^3\varphi}{dy^3}.$$

Сабрав једначине под (5) и (6), наћи ћемо

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2z}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)^2 + 2\left(\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}\right)^2 + \left(\frac{d^2\varphi}{dy^2}\right)^2$$

$$+ \frac{d\varphi}{dx}\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2}\right) + \frac{d\varphi}{dy}\frac{d}{dy}\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2}\right).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^{n-1}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + ny^{n-1}\psi\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^n}{x}\psi'\left(\frac{y}{x}\right).$$

Множећи прву са x а другу са y, сабрав их, добијамо

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = nz,$$

који смо резултат могли лако предвидети, пошто је z хомогена функција n-тог степена.

У осталом, могли бисмо приметити да се ове две функције своде на једну, јер имамо

$$z = x^n\left[\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{x}\right)^n\psi\left(\frac{y}{x}\right)\right] = x^n f\left(\frac{y}{x}\right).$$

10 Проблем

Дата је једначина

$$z = x\varphi(z) + y\psi(z);$$

елиминисати функције φ и ψ.

Диференцијалећи постепено по x и y, добијамо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi(z) + x\varphi'(z)\frac{\partial z}{\partial x} + y\psi'(z)\frac{\partial z}{\partial x},$$

откуда

$$\frac{\partial z}{\partial x}[1 - x\varphi'(z) - y\psi'(z)] = \varphi(z);$$

тако исто наћи ћемо

$$\frac{\partial z}{\partial y}[1 - x\varphi'(z) - y\psi'(z)] = \psi(z);$$

а за тим деобом

$$(1) \qquad \frac{\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)}{\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)} = f(z)$$

где f(z) представља једну произвољну функцију.

Ставимо, краткоће ради,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \ \frac{\partial z}{\partial y} = q, \ \frac{\partial p}{\partial x} = r, \ \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} = s, \ \frac{\partial q}{\partial y} = t,$$

па ћемо, елиминишући f(z) из једначине под (1), добити

$$q^2 r - 2pqs + p^2 t = o.$$

Лако се можемо уверити да једначина коноидних површина задовољава ову диференцијалну једначину.

11 Проблем

Дата је једначина

$$u = F(x, r);$$

елиминисати F *и* r, *знајући да је*

$$r = \varphi(ax + cz) = \psi(ax - by),$$

где φ *и* ψ *представљају две произвољне функције.*

Диференцијалећи горње једначине добићемо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y},$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \left(a + c\frac{\partial z}{\partial x}\right)\varphi'(ax + cz) = a\psi'(ax - by),$$

Као што смо већ више пута приметили, у оваким случајевима, кад имамо да диференцијалимо производ од више чинитеља, врло је корисно прво узети логаритам задатог производа па онда диференцијалити. Тако је

$$\mathrm{Log}\, u = \mathrm{Log}\, \varphi'(x) + \mathrm{Log}\, \psi'(y) - 2\, \mathrm{Log}\, [\varphi(x) + \psi(y)],$$

откуда, диференцијалећи по x,

$$\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi'(x)} - \frac{2\varphi'(x)}{\varphi(x) + \psi(y)}.$$

Ова пак једначина, диференцијалена по y, даје

$$\frac{1}{u}\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} - \frac{1}{u^2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2\varphi'(x)\, \psi'(y)}{[\varphi(x) + \psi(y)]^2},$$

или

$$u\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = 2u^3.$$

Лева страна ове једначине може се написати

$$u^2 \frac{\partial\left[\dfrac{\frac{\partial u}{\partial x}}{u}\right]}{\partial y} = u^2 \frac{\partial^2 \mathrm{Log}\, u}{\partial x\, \partial y};$$

откуда следује

$$\frac{\partial^2 \mathrm{Log}\, u}{\partial x\, \partial y} = 2u.$$

Ова једначина игра важну улогу у теорији о површинама.

(Géometrie analytique de Monge, édition Liouville).

Оверити ове резултате:

1). *Елиминацијом количине* m *из једначине*

$$(1) \quad (a + mb)(x^2 - my^2) = mc^2,$$

добијамо

$$(2) \quad axy\frac{dy^2}{dx^2} + (bx^2 - ay^2 - c^2)\frac{dy}{dx} - bxy = 0.$$

2). *Из једначине*

$$(1) \quad \frac{x^2}{A + \lambda} + \frac{y^2}{B + \lambda} = 1,$$

где су A *и* B *одређене константне а* λ *променљив параметар, елиминишући* λ *добићемо*

$$(2) \quad xyy'^2 + (x^2 - y^2 + A + B)y' - xy = 0.$$

3). *Доказати да, елиминишући сталну количину* **a** *из једначине*

$$(1) \quad y^2 = 2ax + a^2,$$

добијамо

$$(2) \quad y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x\frac{dy}{dx} - y = 0.$$

4). *Доказати, елиминацијом сталних количина* **a**, b, c, *из једначине*

$$(1) \quad z = ax + by + c,$$

узев y *као функцију* x-a, *да добијамо*

$$(2) \quad \frac{d^3z}{dx^3}\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^2z}{dx^2}\frac{d^3y}{dx^3} = 0.$$

5). *Доказати да, елиминишући* a *из једначине*

$$(1) \quad y = ax + \frac{m}{a},$$

добијамо

$$(2) \quad x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\frac{dy}{dx} + m = o.$$

6). *Доказати да, елиминацијом сталних количина* a *и* b *из једначине*

$$(1) \quad y - ax^2 - bx = o,$$

добијамо

$$(2) \quad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x^2} = o.$$

7). *Једначина*

$$x - az = \varphi(y - bz),$$

представља један цилиндар паралелан правој $(x = az, y = bz)$. *Елиминишући функцију* φ *добићемо*

$$1 - a\frac{\partial z}{\partial x} - b\frac{\partial z}{\partial y} = o.$$

8). *Једначина*

$$\frac{x - a}{z - c} = \varphi\left(\frac{y - b}{z - c}\right),$$

у којој је φ *произвољна функција, представља систем конуса који имају за теме тачку* (a, b, c), *а за производницу праве*

$$\frac{x - a}{z - c} = \varphi(\alpha), \quad \frac{y - b}{z - c} = \alpha.$$

Елиминишући функцију φ добићемо

$$(x - a)\frac{\partial z}{\partial x} + (y - b)\frac{\partial z}{\partial y} = z - c.$$

9). *Из једначине*

$$x^2 + y^2 + z^2 = \varphi(ax + by + cz),$$

која представља систем окретних површина, елиминишући φ добићемо

$$bx - ay = (cy - bz)\frac{\partial z}{\partial x} + (az - cx)\frac{\partial z}{\partial y}.$$

10). *Ако, краткоће ради, означимо детерминанту* $pq' - qp'$ *са* (pq') *лако је доказати:*

1°. *Резултанта једначина*

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0, \\ a'x^2 + b'x + c' = 0, \end{cases}$$

јесте

$$\begin{vmatrix} (ab') & (ac') \\ (ac') & (bc') \end{vmatrix} = 0.$$

2°. *Резултанта једначина*

$$\begin{cases} ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \\ a'x^3 + b'x^2 + c'x + d' = 0, \end{cases}$$

јесте

$$\begin{vmatrix} (ab') & (ac') & (ad') \\ (ac') & (dd') + (bc') & (bd') \\ (ad') & (bd') & (cd') \end{vmatrix} = 0$$

3°. *Резултанта једначина*

$$\begin{cases} ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0, \\ a'x^4 + b'x^3 + c'x^2 + d'x + e' = 0, \end{cases}$$

јесте

$$\begin{vmatrix} (ab') & (ac') & (ad') & (ae') \\ (ac') & (ad') + (bc') & (ae') + (bd') & (be') \\ (ad') & (ae') + (bd') & (be') + (cd') & (ce') \\ (ae') & (be') & (ce') & (de') \end{vmatrix} = 0.$$

Задаци:

1). *Елиминисати* ϱ *из једначине*

$$\frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{\varrho^2 - b^2} = 1,$$

у којој је b *стална количина, а* ϱ *променљив параметар.*

2). *Дата је једначина*

$$u = z^n \varphi\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right);$$

елиминисати функцију φ.

3). *Дата је једначина*

$$u = x^n \varphi\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}, \frac{z}{y}\right);$$

елиминисати функцију φ.

4). *Дата је једначина*

$$z = \varphi(ay + bx)\,\psi(ay - bx);$$

елиминисати функције φ *и* ψ.

5). *Нека су*

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} u &= f(x, y, z, \cdots),\\ v &= f_1(x, y, z, \cdots),\\ w &= f_2(x, y, z, \cdots),\end{aligned}\right.$$

функције независно променљивих x, y, z, $\cdots$, *чији је број најмање раван броју ових функција. Наћи нужне и довољне услове па да постоји један однос између ових функција. Посматрати случајеве:* 1^0. *Број независно променљивих* x, y, z, $\cdots$, *раван броју функција* u, v, w. 2^0. *Број променљивих* x, y, z $\cdots$, *већи од броја функција* u, v, w.

X

Изналажење праве вредности израза који се јављају у неодређеним облицима: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0$ итд.

1 Проблем

Наћи праву вредност израза

$$\frac{x^m - a^m}{x^n - a^n},$$

за $x = a$.

Ако m и n представљају два цела и положна броја, бројитељ и именитељ разломка

$$\frac{x^m - a^m}{x^n - a^n},$$

дељиви су са $x - a$. Извршив деобу добијамо разломак

$$\frac{x^{m-1} + ax^{m-2} + \cdot \cdot \cdot + a^{m-1}}{x^{n-1} + ax^{n-2} + \cdot \cdot \cdot + a^{n-1}},$$

чија се вредност, за $x = a$, своди на $\frac{m}{n} a^{m-n}$; и то је права вредност задатог израза, за $x = a$.

Исту вредност наћи ћемо и на овај начин: ставимо $x = a + h$, где је h бесконачно мала количина; за тим ћемо развити $(a+h)^m$ и $(a+h)^n$, по биномном обрасцу, скратити и најзад ставити $h=o$. Према томе је задати израз

$$\frac{x^m - a^m}{x^n - a^n} = \frac{(a+h)^m - a^m}{(a+h)^n - a^n} = a^{m-n}\frac{\left(1+\frac{h}{a}\right)^m - 1}{\left(1+\frac{h}{a}\right)^n - 1}$$

$$= a^{m-n}\frac{m\frac{h}{a} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\frac{h^2}{a^2} + \cdots + \frac{h^m}{a^m}}{n\frac{h}{a} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{h^2}{a^2} + \cdots + \frac{h^n}{a^n}},$$

или, скратив десно и бројитеља и именитеља са $\frac{h}{a}$,

$$\frac{x^m - a^m}{x^n - a^n} = a^{m-n}\frac{m + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\frac{h}{a} + \cdots + \frac{h^{m-1}}{a^{m-1}}}{n + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{h}{a} + \cdots + \frac{h^{n-1}}{a^{n-1}}}.$$

Ставив сада $h = o$ добићемо $\frac{m}{n}a^{m-n}$ као праву вредност задатога израза, за $x = a$.

Ми ћемо показати и општу методу, *de L'Hospital-ово правило* назвата. Она се састоји у овоме: нека је, нпр., $f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$. Нека су функције $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ равне нули за $x = a$, али се могу развити у ред по Taylor-овом обрасцу; тако ћемо добити

$$(1) \qquad f(a+h) = \frac{\varphi(a+h)}{\psi(a+h)}$$

$$= \frac{\varphi(a) + \frac{h}{1}\varphi'(a) + \frac{h^2}{1\cdot 2}\varphi''(a) + \cdots + \frac{h^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\varphi^{(n)}(a) + R}{\psi(a) + \frac{h}{1}\psi'(a) + \frac{h^2}{1\cdot 2}\psi''(a) + \cdots + \frac{h^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\psi^{(n)}(a) + \varrho},$$

Пошто је

$$\varphi(a) = o \quad \text{и} \quad \psi(a) = o,$$

то, из једначине под (1), следује

$$(2) \quad \frac{\varphi(a+h)}{\psi(a+h)} = \frac{h\varphi'(a) + \frac{h^2}{1 \cdot 2}\varphi''(a) + \cdots}{h\psi'(a) + \frac{h^2}{1 \cdot 2}\psi''(a) + \cdots};$$

поделимо дѐсно и бројитеља и именитеља, последње једначине, са h па ћемо добити

$$(3) \quad \frac{\varphi(a+h)}{\psi(a+h)} = \frac{\varphi'(a) + \frac{h}{1 \cdot 2}\varphi''(a) + \cdots}{\psi'(a) + \frac{h}{1 \cdot 2}\psi''(a) + \cdots}.$$

Ако $\varphi'(a)$ и $\psi'(a)$ нису у исто време равни нули, то се, за $h = o$, добија

$$(4) \quad \frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}.$$

Напротив, ако су $\varphi'(a)$ и $\psi'(a)$ равни нули, то се из једначине под (1) добија једначина

$$(5) \quad \frac{\varphi(a+h)}{\psi(a+h)} = \frac{\frac{h^2}{1 \cdot 2}\varphi''(a) + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}\varphi'''(a) + \cdots}{\frac{h^2}{1 \cdot 2}\psi''(a) + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}\psi'''(a) + \cdots},$$

која се, по скраћењу са $\frac{h^2}{1 \cdot 2}$, своди на

$$(6) \quad \frac{\varphi(a+h)}{\psi(a+h)} = \frac{\varphi''(a) + \frac{h}{3}\varphi'''(a) + \cdots}{\psi''(a) + \frac{h}{3}\psi'''(a) + \cdots}.$$

Ако, на десној страни последње једначине, $\varphi''(a)$ и $\psi''(a)$ нису у исто време равни нули, то, ставив $h = o$, добијамо одређени израз

$$(7) \quad \frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = \frac{\varphi''(a)}{\psi''(a)}.$$

На сличан начин можемо даље продужити, ако су $\varphi''(a)$ и $\psi''(a)$ нули равни. Нека су $\varphi^{(p)}(a)$ и $\psi^{(q)}(a)$ први чланови који не постају равни нули у два реда:

$$\varphi(a),\ \varphi'(a), \cdot \cdot \cdot, \varphi^{(p)}(a), \cdot \cdot \cdot, \varphi^{(n)}(a)$$

$$\psi(a),\ \psi'(a), \cdot \cdot \cdot, \psi^{(q)} a), \cdot \cdot \cdot, \psi^{(n)}(a).$$

Права вредност, за $h = o$, биће граница израза

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot q}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot p} h^{p-q} \frac{\varphi^{(p)}(a)}{\psi^{(q)}(a)}.$$

Она ће бити равна нули ако је $p > q$; бесконачно велика ако је $p < q$; или ће бити равна $\dfrac{\varphi^{(p)}(a)}{\psi^{(p)}(a)}$ ако је $p = q$.

Према овој методи, диференцијалећи и бројитеља и именитеља у задатом изразу, добићемо

$$\frac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}} = \frac{m}{n} x^{m-n}$$

израз, који се, за $x = a$, своди на $\dfrac{m}{n} a^{m-n}$.

Дакле, на три разна начина, долазимо до исте праве вредности задатога израза.

Примедба. Као што се види, примена de L'Hospital-овог правила претпоставља да се функције $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ могу развити у ред по Taylor-овом обрасцу. У случају кад су изводи $\varphi'(x), \varphi''(x), \cdot \cdot \cdot ; \psi'(x), \psi''(x), \cdot \cdot \cdot$, сви равни нули, немогуће је применити речено правило.

2 Проблем

Наћи праву вредност израза

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}},$$

за $x = a$.

Помножимо и бројитеља и именитеља задатога израза са $\sqrt{x}+\sqrt{a}$, па ћемо добити

$$\frac{x-a+(\sqrt{x}+\sqrt{a})\sqrt{x-a}}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})\sqrt{(x+a)(x-a)}};$$

сада, делећи и бројитеља и именитеља са $\sqrt{x-a}$, добијамо

$$\frac{\sqrt{x-a}+\sqrt{x}+\sqrt{a}}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})\sqrt{x+a}}$$

разломак, који се, за $x = a$, своди на $\frac{1}{\sqrt{2a}}$; то је права вредност задатога израза.

Ставимо $x = a + h$ па ћемо имати

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}+\sqrt{h}}{\sqrt{h}\sqrt{2a+h}}$$

$$= \frac{\sqrt{a}\left(1+\frac{h}{2a}+\cdot\cdot\cdot\right)-\sqrt{a}+\sqrt{h}}{\sqrt{h}\sqrt{2a+h}},$$

или, сводећи и делећи за тим са $\sqrt{h}$, добијамо

$$= \frac{\frac{\sqrt{h}}{2\sqrt{a}}+\cdot\cdot\cdot+1}{\sqrt{2a+h}},$$

количину која се, за $h = o$, своди на $\frac{1}{\sqrt{2a}}$, јер ненаписани чланови у бројитељу и први постају, за $h = o$, равни нули.

Употребимо општу методу. — Ако диференцијалимо $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x - a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ и узмемо границу добијамо

$$\lim \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x - a}}}{\frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}} = \lim \left(\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{2x\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{2x\sqrt{x - a}} \right)$$

$$= \lim \frac{1}{2x} \sqrt{\frac{x^2 - a^2}{x - a}}.$$

Вредност последњег израза своди се на $\frac{1}{\sqrt{2a}}$, за $x = a$. Дакле, на сва три начина добили смо $\frac{1}{\sqrt{2a}}$ као праву вредност задатога израза.

Кад бисмо употребили методу диференцијалења без да се помажемо алгебарским трансформацијама, онда бисмо од неодређености $\frac{0}{0}$ дошли на $\frac{\infty}{\infty}$ и продужив методу диференцијалења, последња форма неодређености понављала би се бесконачно, као што се то даје лако доказати.

3 Проблем

Наћи праву вредност израза

$$\frac{\operatorname{tang} nx - n \operatorname{tang} x}{n \sin x - \sin nx},$$

за $x = o$.

Задати израз развијен постаје

$$\frac{\left(nx + \frac{1}{3}n^3x^3 + \cdot \cdot \cdot\right) - n\left(x + \frac{x^3}{3} + \cdot \cdot \cdot\right)}{n\left(x - \frac{x^3}{1\cdot2\cdot3} + \cdot \cdot \cdot\right) - \left(nx - \frac{n^3x^3}{1\cdot2\cdot3} + \cdot \cdot \cdot\right)},$$

израз који се своди на

$$\frac{\frac{1}{3}(n^3 - n)x^3 + \cdot \cdot \cdot}{\frac{1}{6}(n^3 - n)x^3 + \cdot \cdot \cdot} = \frac{\frac{1}{3}(n^3 - n) + \cdot \cdot \cdot}{\frac{1}{6}(n^3 - n) + \cdot \cdot \cdot};$$

ненаписани чланови у бројитељу и у именитељу своде се на нулу, за $x = 0$.

Дакле, граница ка којој тежи задати израз, за $x = 0$, равна је $\frac{1}{3} : \frac{1}{6} = 2$, ма какав био број n.

4 Проблем

Наћи праву вредност израза

$$\frac{a^n - x^n}{\mathrm{Log}\,(a^n) - \mathrm{Log}\,(x^n)},$$

за $x = a$.

Диференцијалећи и бројитеља и именитеља имаћемо

$$\frac{-nx^{n-1}}{\frac{-nx^{n-1}}{x^n}} = x^n,$$

која се вредност, за $x = a$, своди на a^n.

5 Проблем

Наћи праву вредност израза

$$\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x},$$

за $x = 0$.

Према првом проблему имаћемо

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x},$$

који се израз, за $x = 0$, своди на $\frac{0}{0}$. Диференцијалећи даље имамо

$$\frac{\varphi''(x)}{\psi''(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x},$$

и овај се израз, за $x = 0$, своди на $\frac{0}{0}$. Диференцијалимо још један пут, наћи ћемо

$$\frac{\varphi'''(x)}{\psi'''(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x}$$

израз, који се, за $x = 0$, своди на 2, што представља праву вредност задатога израза.

Ту исту вредност наћи ћемо и на други начин. Развијањем функција e^x, e^{-x} и $\sin x$ у редове, налазимо

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \cdots,$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} - \cdots,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots;$$

откуда добијамо

$$\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \frac{2\left(\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3} + \frac{x^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} + \cdot\cdot\cdot\right)}{\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3} - \frac{x^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} + \cdot\cdot\cdot}$$

$$= \frac{2\left(\frac{1}{1\cdot2\cdot3} + \frac{x^2}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} + \cdot\cdot\cdot\right)}{\frac{1}{1\cdot2\cdot3} - \frac{x^2}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} + \cdot\cdot\cdot}$$

израз, који се, за $x = o$, своди на 2. То нам је у исто време послужило као верификација добивеног резултата.

6 Проблем

Наћи праву вредност израза

$$\frac{\tang \pi x - \pi x}{2x^2 \tang \pi x},$$

за $x = o$.

По општој методи, изложеној у првом проблему, добијамо

$$\frac{\frac{\pi}{\cos^2 \pi x} - \pi}{\frac{2\pi x^2}{\cos^2 \pi x} + 4x \tang \pi x} = \frac{\pi - \pi \cos^2 \pi x}{2\pi x^2 + 4x \sin \pi x \cos \pi x},$$

израз који постаје $\frac{0}{0}$, за $x = o$

Диференцијалећи на ново добијамо

$$\frac{2\pi^2 \sin \pi x \cos \pi x}{4\pi x + 4 \sin \pi x \cos \pi x + 4\pi x \cos^2 \pi x - 4\pi x \sin^2 \pi x}$$

$$= \frac{\pi^2 \sin 2\pi x}{4\pi x + 2\sin 2\pi x + 4\pi x \cos 2\pi x}$$

израз, који се такође своди на $\frac{0}{0}$, за $x = 0$.

Диференцијалећи још један пут добијамо

$$\frac{2\pi^3 \cos 2\pi x}{4\pi + 4\pi \cos 2\pi x + 4\pi \cos 2\pi x - 8\pi^2 x \sin 2\pi x}$$

израз, који се, за $x = 0$, своди на

$$\frac{2\pi^3}{4\pi + 4\pi + 4\pi} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Примедба. Задати израз можемо написати и овако

$$\frac{\pi x}{\operatorname{tang} \pi x} \cdot \frac{\operatorname{tang} \pi x - \pi x}{2\pi x^3};$$

пошто је права вредност другог чинитеља равна $\frac{\pi^2}{6}$, то је у исто време права вредност и задатога израза.

До истог резултата дошли бисмо развијањем у ред функције $\operatorname{tang} \pi x$.

7 Проблем

Наћи праву вредност израза

$$\frac{xe^{2x} + xe^x - 2e^{2x} + 2e^x}{(e^x - 1)^3},$$

за $x = 0$.

Ако диференцијалимо добићемо

$$\frac{e^{2x} + 2xe^{2x} + e^x + xe^x - 4e^{2x} + 2e^x}{3(e^x - 1)^2 e^x} = \frac{e^x(2x - 3) + 3 + x}{3(e^x - 1)^2}$$

израз, који се своди на $\frac{0}{0}$, за $x = 0$.

Диференцијалимо по други пут па ћемо добити

$$\frac{e^x(2x-3)+2e^x+1}{6(e^x-1)e^x} = \frac{e^x(2x-1)+1}{6(e^x-1)e^x}$$

израз, који се такође своди на $\frac{0}{0}$, за $x = 0$.

Диференцијалећи по трећи пут налазимо

$$\frac{e^x(2x-1)+2e^x}{6(e^x-1)+6e^{2x}} = \frac{e^x(2x+1)}{6(e^{2x}+e^x-1)}$$

израз, који се, за $x = 0$, своди на $\frac{1}{6}$ и то је права вредност задатога израза.

8 Проблем

Наћи праву вредност израза

$$\frac{a^x \sin ax - b^x \sin bx}{g^x \sin gx - k^x \sin kx},$$

за $x = 0$.

Ако диференцијалимо, по општој методи, добићемо

$$\frac{\sin ax\, D_x a^x + a^{x+1}\cos ax - \sin bx\, D_x b^x - b^{x+1}\cos bx}{\sin gx\, D_x g^x + g^{x+1}\cos gx - \sin kx\, D_x k^x - k^{x+1}\cos kx}$$

израз, који се, за $x = 0$, своди на

$$\frac{a-b}{g-k},$$

и то је права вредност задатога израза.

9 Проблем

Наћи праву вредност израза

$$\frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1},$$

за $x = \frac{\pi}{6}$.

Знајући из тригонометрије да је

$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},\ \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

лако је увидети да се задати израз своди на $\frac{0}{0}$, за $x = \frac{\pi}{6}$.

Диференцијалимо задати израз, по општој методи, па ћемо добити

$$\frac{4\sin x\cos x + \cos x}{4\sin x\cos x - 3\cos x}$$

израз, чија се вредност, за $x = \frac{\pi}{6}$, своди на

$$\frac{\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{-\sqrt{3}} = -3,$$

што представља праву вредност задатога израза.

10 Проблем

Наћи праву вредност израза

$$\frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x},$$

за $x = 0$.

Диференцијалећи добијамо

$$\frac{e^x - \cos x\, e^{\sin x}}{1 - \cos x}$$

израз, који се, за $x = 0$, своди на $\frac{0}{0}$.

Диференцијалимо по други пут па добијамо

$$\frac{e^x + \sin x\, e^{\sin x} - \cos^2 x\, e^{\sin x}}{\sin x}$$

израз, који се такође своди на $\frac{0}{0}$, за $x = 0$.

Диференцијалећи још један пут добићемо

$$\frac{e^x + \cos x\, e^{\sin x} + 3\sin x \cos x\, e^{\sin x} - \cos^3 x\, e^{\sin x}}{\cos x}$$

израз, чија се вредност своди на јединицу, за $x = 0$. Дакле, један представља праву вредност задатога израза.

Рачун се упрошћава стављајући задати израз у облику

$$e^{\sin x} \cdot \frac{e^{x - \sin x} - 1}{x - \sin x}.$$

Сада имали бисмо да тражимо праву вредност израза

$$\frac{e^u - 1}{u},$$

за $u = 0$. Та је вредност равна јединици.

11 Проблем

Наћи праву вредност израза

$$(1) \quad y = m(\sqrt[m]{x} - 1),$$

за $m = \infty$.

Кад m тежи ка ∞, $\sqrt[m]{x}$ тежи ка јединици. Ми ћемо моћи ставити

$$\sqrt[m]{x} = 1 + h,$$

где h тежи ка нули.

Отуда изводимо

$$\frac{\operatorname{Log} x}{m} = \operatorname{Log}(1 + h), \quad m = \frac{\operatorname{Log} x}{\operatorname{Log}(1 + h)}.$$

Заменив m овом вредношћу у једначину под (1) добићемо да је

$$(2) \qquad y = \lim \frac{h \operatorname{Log} x}{\operatorname{Log}(1 + h)},$$

за $h = o$.

Али знамо да је

$$\operatorname{Log}(1 + h) = h - \frac{h^2}{2} + \cdots.$$

Заменимо, у једначину под (2), $\operatorname{Log}(1 + h)$ том вредношћу и скратимо са h, па ћемо добити

$$y = \lim \frac{\operatorname{Log} x}{1 - \frac{h}{2} + \cdots}$$

израз, који се, за $h = o$, своди на $\operatorname{Log} x$. То је $\operatorname{Log} x$ права вредност задатога израза, за $m = \infty$.

12 Проблем

Наћи праву вредност израза

$$x^m (\operatorname{Log} x)^n,$$

за $x = o$; *узев да* m *и* n *представљају положне бројеве.*

Имамо

$$\lim x^m (\mathrm{Log}\, x)^n = \lim \frac{(\mathrm{Log}\, x)^n}{x^{-m}}$$

$$= -\lim \frac{n\,(\mathrm{Log}\, x)^{n-1}}{m x^{-m}} = -\frac{n}{m} \lim x^m (\mathrm{Log}\, x)^{n-1}.$$

Ми смо дошли до тога да нађемо праву вредност сличнога израза, у коме је изложилац n смањен са јединицом. Продужујући, на исти начин, ми ћемо довести да је изложитељ n од Log x раван нули или одречан и тада, очевидно, тражена граница биће равна нули. У случају кад је $n = 1$, лако је доказати да је граница од $\frac{\mathrm{Log}\, x}{x^{-m}}$, претпоставив да m положан број представља, равна нули, за $x = 0$.

На други начин, доћи ћемо до истог закључка ставив $x = e^{-y}$ и тражити сада границу за $y = \infty$. Имамо

$$\lim_{x=0} x^m (\mathrm{Log}\, x)^n = (-1)^n \lim_{y=\infty} \frac{y^n}{e^{my}} = (-1)^n \lim_{y=\infty} \left(\frac{y^{\frac{n}{m}}}{e^y} \right)^m.$$

Но, ма какав да је изложитељ p, за y бесконачно имаћемо

$$\lim \frac{y^p}{e^y} = \lim \frac{p y^{p-1}}{e^y} = \lim \frac{p\,(p-1)\, y^{p-2}}{e^y} = \ldots;$$

продужавајући тако изложитељ бројитеља постаће нула или одречан. Дакле, граница разломка равна је нули, па према томе и права вредност задатог израза равна је нули.

13 Проблем

Наћи праву вредност израза

$$\mathrm{Log}\left(2 - \frac{x}{a}\right) \cdot \mathrm{tang}\, \frac{\pi x}{2a},$$

за $x = a$.

Имамо

$$\lim\left[\mathrm{Log}\left(2-\frac{x}{a}\right)\cdot\mathrm{tang}\frac{\pi x}{2a}\right]=\lim\frac{\mathrm{Log}\left(2-\frac{x}{a}\right)}{\mathrm{cotg}\,\frac{\pi x}{2a}}$$

$$=\lim\frac{-\frac{1}{a}\frac{1}{2-\frac{x}{a}}}{-\frac{\pi}{2a}\mathrm{cosec}^2\frac{\pi x}{2a}}=\frac{2}{\pi},$$

и то је права вредност задатога израза.

14 Проблем

Наћи праву вредност израза

$$(1)\qquad x-x^2\,\mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{x}\right),$$

за $x=\infty$.

Задати израз јавља се, за $x=\infty$, у облику $\infty-\infty\cdot 0$.

Ако ставимо $x=\frac{1}{z}$ добићемо

$$(2)\qquad \frac{z-\mathrm{Log}(1+z)}{z^2}.$$

Сада ћемо тражити праву вредност израза под (2), за $z=0$. Имамо

$$\lim\frac{z-\mathrm{Log}(1+z)}{z^2}=\lim\frac{1-\frac{1}{1+z}}{2z}=\lim\frac{z}{2z(1+z)}$$

$$=\lim\frac{1}{2(1+z)}=\frac{1}{2}.$$

Дакле, права вредност задатога израза под (1), за $x = \infty$, биће равна $\frac{1}{2}$.

Примедба. Ова метода, која се састоји у томе да се најпре изврши извесна смена промењљивих количина па онда тражи права вредност добивених израза и о којој смо при крају претпрошлог проблема говорили, врло се често и корисно употребљује.

15 Проблем

Наћи праву вредност израза

$$x - \sqrt{x^2 - ax},$$

за $x = \infty$.

Неодређености израза облика $\infty - \infty$ могу се уклонити, понекад, помоћу алгебарских трансформација. Тако је, за $x = \infty$,

$$\lim(x - \sqrt{x^2 - ax}) = \lim \frac{ax}{x + \sqrt{x^2 - ax}}$$

$$= \lim \frac{a}{1 + \sqrt{1 - \frac{a}{x}}} = \frac{a}{2},$$

што представља праву вредност задатога израза.

16 Проблем

Наћи праву вредност израза

$$y = x^x,$$

за $x = 0$.

Имамо

$$\text{Log}\, y = x \,\text{Log}\, x,$$

а из ове, за $x = 0$, добијамо

$$\lim \text{Log}\, y = \lim x \,\text{Log}\, x = 0.$$

Отуда је

$$\lim y = 1.$$

17 Проблем

Наћи праву вредност израза

$$y = x^{\frac{1}{x}},$$

за $x = \infty$.

Имамо

$$\text{Log}\, y = \frac{\text{Log}\, x}{x},$$

дакле

$$\lim \text{Log}\, y = \lim \frac{\text{Log}\, x}{x} = \lim \frac{1}{x} = 0;$$

то је онда, према претходном проблему,

$$\lim y = \lim x^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

18 Проблем

Наћи праву вредност израза

$$(1 + x)^{\frac{1}{x}},$$

1°. *за* $x = 0$, 2°. *за* $x = \infty$.

1°. Задати израз јавља се у облику 1^∞, за $x = 0$. Узев логаритам имамо

$$(1) \quad \frac{\operatorname{Log}(1+x)}{x},$$

чија је граница, за $x = 0$,

$$\lim_{x=0} \frac{1}{1+x} = 1;$$

према томе је

$$\lim_{x=0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 1^\infty = e.$$

2°. За $x = \infty$, вредност израза под (1) биће

$$\lim_{x=\infty} \frac{1}{1+x} = 0;$$

отуда

$$\lim_{x=\infty} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \infty^0 = 1.$$

19 Проблем

Наћи праву вредност израза

$$x^{\sin x},$$

кад је $x = 0$.

Кад је $x = 0$, то је $x^{\sin x} = 0^0$.

Ставимо сада

$$u = x^{\sin x},$$

из које, узев логаритам, добијамо

$$\operatorname{Log} u = \sin x \operatorname{Log} x = \frac{\operatorname{Log} x}{(\sin x)^{-1}};$$

а из ове последње једначине изводимо ову

$$(1) \quad u = e^{\frac{\operatorname{Log} x}{(\sin x)^{-1}}}.$$

Али је сада, за $x = 0$,

$$\frac{\operatorname{Log} x}{(\sin x)^{-1}} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{\frac{1}{x}}{-(\sin x)^{-2}\cos x} = -\frac{\sin^2 x}{x\cos x} = \frac{0}{0},$$

$$\frac{\operatorname{Log} x}{(\sin x)^{-1}} = -\frac{2\sin x \cos x}{\cos x - x\sin x} = 0.$$

Унесимо вредност од $\frac{\operatorname{Log} x}{(\sin x)^{-1}}$ у једначину под (1), па ћемо, за $x = 0$, добити

$$x^{\sin x} = e^0 = 1.$$

20 Проблем

Наћи праву вредност израза

$$(\operatorname{cotg} x)^{\sin x},$$

за $x = 0$.

За $x = 0$ имамо

$$(\operatorname{cotg} x)^{\sin x} = \infty^0.$$

Ставимо као у претходном проблему

$$u = (\operatorname{cotg} x)^{\sin x},$$

из које, узев логаритам, добијамо једначину

$$\operatorname{Log} u = \sin x \operatorname{Log}(\operatorname{cotg} x) = \frac{\operatorname{Log}(\operatorname{cotg} x)}{(\sin x)^{-1}},$$

а из ове изводимо ову

$$(1) \quad u = e^{\frac{\text{Log}(\cot g\, x)}{(\sin x)^{-1}}}.$$

Сада је

$$\frac{\text{Log}(\cot g\, x)}{(\sin x)^{-1}} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{-\frac{1}{\cot g\, x}\frac{1}{\sin^2 x}}{-(\sin x)^{-2}\cos x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = 0.$$

Заменимо у једначину под (1), $\frac{\text{Log}(\cot g\, x)}{(\sin x)^{-1}}$ његовом вредношћу, па ћемо добити

$$(2) \quad u = (\cot g\, x)^{\sin x} = e^0 = 1.$$

21 Проблем

Дата је једначина

$$(1) \quad x^3 - 3axy + y^3 = 0;$$

наћи вредност од y' *за* $x = 0$, $y = 0$.

Диференцијалимо један пут задату једначину па ћемо добити

$$(2) \quad x^2 - ay + (y^2 - ax)y' = 0,$$

идентичну једначину за $x = 0$, $y = 0$.

Диференцијалимо још један пут једначину под (2), добићемо

$$2yy'^2 - 2ay' + [2x + (y^2 - ax)y''] = 0$$

једначину другог степена чији су крајни сачиниоци бесконачно мали са x и y, и која, услед тога, за $x = y = 0$, даје један корен раван нули и један корен бесконачно велики.

Примедба. Права вредност једне функције више променљивих количина у опште је неодређена.

Посматрајмо, нпр., функцију $\frac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)}$. Претпоставимо да су функције $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ равне нули, за $x = a$, $y = b$; али да су њихови делимички изводи различни од нуле. Права вредност била би граница односа

$$\frac{\varphi(a + h, b + k)}{\psi(a + h, b + k)} = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial a}h + \frac{\partial\varphi}{\partial b}k + R}{\frac{\partial\psi}{\partial a}h + \frac{\partial\psi}{\partial b}k + \varrho},$$

или

$$\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial a}h + \frac{\partial\varphi}{\partial b}k}{\frac{\partial\psi}{\partial a}h + \frac{\partial\psi}{\partial b}k}.$$

Види се да права вредност зависи од промењљивог односа $\frac{h}{k}$, осим ако је

$$\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial a}}{\frac{\partial\psi}{\partial a}} = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial b}}{\frac{\partial\psi}{\partial b}}.$$

Према овоме једначина под (2) даје

$$(3) \qquad y' = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax},$$

израз који се, за $x = o$, $y = o$, своди на $\frac{0}{0}$. Диференцијалимо десно у једначини под (3) посебице и бројитеља и именитеља, па ћемо добити

$$y' = \frac{ay' - 2x}{2yy' - a}, \ (x = o, \ y = o),$$

откуда, решив ову квадратну једначину, добијамо

$$y' = \frac{a \mp \sqrt{a^2 - 4xy}}{2y},$$

или, како се лако може увидети, добијамо

$$y' = \frac{2x}{a + \sqrt{a^2 - 4xy}}, \quad y' = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4xy}}{2y},$$

праве вредности које се, за $x = 0$, $y = 0$, своде на

$$y' = 0, \quad y' = \infty.$$

22 Проблем

Дата је једначина

$$y^4 - 96a^2y^2 + 100a^2x^2 - x^4 = 0;$$

наћи праву вредност од y' *за* $x = 0$, $y = 0$.

Диференцијалимо један пут задату једначину па ћемо добити

$$(y^3 - 48a^2y)\,y' + 50a^2x - x^3 = 0,$$

идентичну једначину за $x = 0$, $y = 0$.

Диференцијалимо још један пут па добијамо

$$(y^3 - 48a^2y)\,y'' + (3y^2 - 48a^2)\,y'^2 + 50a^2 - 3x^2 = 0;$$

откуда, за $x = 0$, $y = 0$, добијамо

$$y'^2 = \frac{50}{48} = \frac{25}{24},$$

или

$$y' = \pm \frac{5}{\sqrt{24}},$$

праву тражену вредност.

Крива линија представљена задатом једначином позната је под именом *„courbe du diable“*.

Оверити ове резултате:

A). *Изрази облика:* $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ *и* $\infty - \infty$.

a). *За* $x = 0$.

1). $y = \frac{x - \sin x}{x^3}$,

$$y_0 = \frac{0}{0} = \frac{1}{6}.$$

2). $y = \frac{a^x - b^x}{x}$,

$$y_0 = \frac{0}{0} = \operatorname{Log} \frac{a}{b}.$$

3). $y = \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$;

$$y_0 = \frac{0}{0} = 2.$$

4). $y = \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{\cos ax - \cos bx}$,

$$y_0 = \frac{0}{0} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{a^2 - b^2}.$$

5). $y = \frac{\operatorname{tang} x - \sin x}{x - \sin x}$,

$$y_0 = \frac{0}{0} = 3.$$

6). $$y = \frac{\operatorname{Log}\frac{1 + x}{1 - x} - 2x}{x - \sin x},$$

$$y_0 = \frac{0}{0} = 4.$$

7). $$y = \frac{\operatorname{tang}(a + x) - \operatorname{tang}(a - x)}{\operatorname{arctang}(a + x) - \operatorname{arctang}(a - x)},$$

$$y_0 = \frac{0}{0} = \frac{1 + a^2}{\cos^2 a}.$$

8). $$y = \frac{\sin x}{1 - \cos x},$$

$$y_0 = \frac{0}{0} = \infty.$$

9). $$y = \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x},$$

$$y_0 = \frac{0}{0} = \frac{1}{2}.$$

10). $$y = \frac{\sqrt{a + bx + cx^2} - \sqrt{a - bx + cx^2}}{\sqrt{\alpha + \beta x} - \sqrt{\alpha - \beta x}},$$

$$y_0 = \frac{0}{0} = \frac{b}{\beta}\sqrt{\frac{\alpha}{a}}.$$

11). $$y = \frac{(\sqrt{1 + x^2} + x)^m - (\sqrt{1 + x^2} - x)^m}{x},$$

$$y_0 = \frac{0}{0} = 2m.$$

12). $$y = \frac{(\sqrt{1+x^2}+x)^n + (\sqrt{1+x^2}-x)^n - 2}{x^2},$$

$$y_0 = \frac{0}{0} = n^2.$$

13). $$y = \frac{e^{x^2} - 1}{1 - \cos x},$$

$$y_0 = \frac{0}{0} = 2.$$

14). $$y = \frac{\operatorname{tang} x}{kx + \operatorname{Log}(1 + \sqrt{1-x^2}) - \operatorname{Log} 2},$$

$$y_0 = \frac{0}{0} = \frac{1}{k}.$$

15). $$y = \frac{\sin 3x + 4\sin^3 x - 3\operatorname{Log}(1 + x)}{(e^x - 1)\sin x},$$

$$y_0 = \frac{0}{0} = \frac{2}{3}.$$

16). $$y = \frac{1 - \cos x - \operatorname{Log}\cos x}{x^2},$$

$$y_0 = \frac{0}{0} = 1.$$

17). $$y = \frac{1 - \cos(\mu \arcsin x)}{\operatorname{Log}(1 + x^2)},$$

$$y_0 = \frac{0}{0} = \frac{1}{2}\mu^2.$$

18). $$y = \frac{1 - \cos x\sqrt{\cos 2x}}{\sin^2 x},$$

$$y_0 = \frac{0}{0} = \frac{3}{2}.$$

19). $$y = \frac{1 + 2\cos^3 x - 3\sqrt{\cos 2x}}{\sin^4 x},$$

$$y_0 = \frac{0}{0} = \frac{9}{4}.$$

20). $$y = \frac{1 - 5\sin^2 x + 4\cos^5 x - 5\sqrt{\cos^3 2x}}{\sin^6 x},$$

$$y_0 = \frac{0}{0} = -\frac{15}{4}.$$

21). $$y = \frac{\mathrm{Log}\sin x}{\mathrm{Log}\sin 2x},$$

$$y_0 = \frac{\infty}{\infty} = \frac{\sin 2x \cos x}{2\sin x \cos 2x} = \frac{2\sin x \cos^2 x}{2\sin x \cos 2x}$$

$$= \frac{\cos^2 x}{\cos 2x} = 1.$$

22). $$y = \frac{\mathrm{Log\,tang}\,px}{\mathrm{Log\,tang}\,x},$$

$$y_0 = \frac{\infty}{\infty} = 1.$$

23). $$y = \frac{c - \mathrm{Log}\,x}{a + \frac{b}{x}},$$

$$y_0 = \frac{\infty}{\infty} = 0.$$

24). $y = \dfrac{\operatorname{Log} x}{a + b \operatorname{Log} \sin x}$,

$$y_0 = \frac{\infty}{\infty} = \frac{1}{b}.$$

25). $y = \dfrac{\operatorname{Log} x}{a + b \operatorname{Log} \operatorname{tang} \mu x}$,

$$y_0 = \frac{\infty}{\infty} = \frac{1}{b}.$$

26). $y = \dfrac{\pi}{4x} - \dfrac{\pi}{2x(e^{\pi x} + 1)}$,

$$y_0 = \infty - \infty = \frac{\pi^2}{6}.$$

27). $y = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}$,

$$y_0 = \infty - \infty = \frac{1}{2}.$$

28). $y = \dfrac{1}{x^2} - \operatorname{cotg}^2 x$,

$$y_0 = \infty - \infty = \frac{2}{3}.$$

29). $y = \dfrac{2 + \cos x}{x^3 \sin x} - \dfrac{3}{x^4}$,

$$y_0 = \infty - \infty = \frac{1}{60}.$$

30). $y = \operatorname{cotg} x - \dfrac{15 - 6x^2}{x(15 - x^2)}$,

$$y_0 = \infty - \infty = 0.$$

$$4).\ y = \frac{x+x^2-(n+1)^2x^{n+1}+(2n^2+2n-1)x^{n+2}-n^2x^{n+3}}{(1-x)^3},$$

$$y_1 = \frac{0}{0} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$5).\ y = \frac{x^x - x}{1-x+\operatorname{Log} x},$$

$$y_1 = \frac{0}{0} = -2.$$

$$6).\ y = \frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+cx}-\sqrt{a+c}},$$

$$y_1 = \frac{0}{0} = \frac{b}{c}\sqrt{\frac{a+c}{a+b}}.$$

$$7).\ y = \frac{\sqrt{2x-x^4}-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[4]{x^3}},$$

$$y_1 = \frac{0}{0} = \frac{16}{9}.$$

$$8).\ y = \frac{\operatorname{Log}(x^{2m}+x^m-1)-m\operatorname{Log} x}{x^2-1},$$

$$y_1 = \frac{0}{0} = m.$$

$$9).\ y = \frac{x^x-1}{x^m+x^n\operatorname{Log} x-1},$$

$$y_1 = \frac{0}{0} = \frac{1}{m+1}.$$

10). $y = \frac{x}{x - 1} - \frac{1}{\operatorname{Log} x}$,

$$y_1 = \infty - \infty = \frac{1}{2}.$$

11). $y = \frac{\alpha}{1 - x^{\alpha}} - \frac{\beta}{1 - x^{\beta}}$,

$$y_1 = \infty - \infty = \frac{1}{2}(\alpha - \beta).$$

12). $y = \frac{1}{\operatorname{Log} x} - \frac{\alpha}{x^{\alpha} - 1}$,

$$y_1 = \infty - \infty = \frac{1}{2}\alpha.$$

c). *За* x = a.

1). $y = \frac{(x - b)^m - (a - b)^m}{x - a}$,

$$y_a = \frac{0}{0} = m(a - b)^{m-1}.$$

2). $y = \frac{e^x - e^a}{x - a}$,

$$y_a = \frac{0}{0} = e^a.$$

3). $y = \frac{x^2 - a^2}{x - a}$,

$$y_a = \frac{0}{0} = 2a.$$

4). $y = \dfrac{x - a - a(\operatorname{Log} x - \operatorname{Log} a)}{a - \sqrt{2ax - x^2}}$,

$y_a = \dfrac{0}{0} = 1.$

5). $y = \dfrac{x - (32a^2x - 24ax^3)^{\frac{1}{3}} + (40a^3x^3 + 24a^2x^4)^{\frac{1}{6}} - (2x^3 - a^3)^{\frac{1}{3}}}{3a(9x - 10a) + (36a^3x + 45x^4)^{\frac{1}{4}}(2x^3 - a^3)^{\frac{1}{3}}}$,

$y_a = \dfrac{0}{0} = \dfrac{1}{24a}.$

6). $y = \dfrac{\operatorname{Log}(x - a)}{\operatorname{Log}(e^x - e^a)}$,

$y_a = \dfrac{\infty}{\infty} = 1.$

d). *3a* x $= \infty$.

1). $y = \dfrac{\operatorname{Log} x}{x^n}$, $n > 0$;

$y_\infty = \dfrac{\infty}{\infty} = 0.$

2). $y = \dfrac{x + \cos x}{x - \sin x}$,

$y_\infty = \dfrac{\infty}{\infty} = 1.$

3). $y = \dfrac{x}{e^{ax}}$, $a > 0$;

$y_\infty = \dfrac{\infty}{\infty} = 0.$

4). $y = \frac{x^{\beta}}{e^{ax}}, \quad a > 0, \quad \beta > 0;$

$$y_{\infty} = \frac{\infty}{\infty} = 0.$$

5). $y = \frac{\operatorname{Log}(a + be^x)}{\alpha + \beta x},$

$$y_{\infty} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{1}{\beta}.$$

6). $y = \frac{\operatorname{Log}(a + be^x)}{\sqrt{\alpha + \beta x^2}},$

$$y_{\infty} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{1}{\sqrt{\beta}}.$$

e). *За* x *различно.*

1). $y = \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 7x + 12}, \quad$ *за* $x = -3;$

$$y_{-3} = \frac{0}{0} = -1.$$

2). $y = \frac{\operatorname{tang}(2m - 1)x}{\operatorname{tang} x}, \quad$ *за* $x = \frac{\pi}{2};$

$$y_{\frac{\pi}{2}} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{1}{2m-1}.$$

3). $y = \frac{\operatorname{tang} 5x}{\operatorname{tang} x}, \quad$ *за* $x = \frac{\pi}{2};$

$$y_{\frac{\pi}{2}} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{5\cos^2 x}{\cos^2 5x} = \frac{0}{0}$$

$$= \frac{\sin 2x}{\sin 10x} = \frac{0}{0}$$

$$= \frac{2\cos 2x}{10\cos 10x} = \frac{-2}{-10} = \frac{1}{5}.$$

4). $y = \dfrac{\operatorname{tang} x}{a + \dfrac{b}{\pi - 2x}}$, *за* $x = \dfrac{\pi}{2}$;

$$y_{\frac{\pi}{2}} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{2}{b}.$$

5). $y = x \operatorname{tang} x - \dfrac{\pi}{2}\sec x$, *за* $x = \dfrac{\pi}{2}$;

$$y_{\frac{\pi}{2}} = \infty - \infty = -1.$$

6). $y = \dfrac{\pi}{2}\sec x - x\operatorname{tang} x$, *за* $x = \dfrac{\pi}{2}$;

$$y_{\frac{\pi}{2}} = \infty - \infty = 1.$$

B). *Изрази облика:* $0 \cdot \infty$, 0^0 *и* ∞^0.

a). *За* $x = 0$.

1). $y = x \operatorname{cotg} x$,

$$y_0 = 0 \cdot \infty = \frac{x}{\operatorname{tang} x} = \frac{0}{0} = 1.$$

2). $y = x^p \operatorname{Log}\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $p > 1$;

$$y_0 = 0 \cdot \infty = 0.$$

3). $y = \operatorname{Log}\cos x \cdot \operatorname{cotg} x,$

$y_0 = 0 \cdot \infty = 0.$

4). $y = \operatorname{Log}\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \cdot \operatorname{cotg} x,$

$y_0 = 0 \cdot \infty = 1.$

5). $y = \operatorname{arc}\sin x \cdot \operatorname{cotg} x,$

$y_0 = 0 \cdot \infty = 1.$

6). $y = x^{\frac{1}{a + b\operatorname{Log} x}},$

$y_0 = 0^0 = e^{\frac{1}{b}}.$

7). $y = x^{\frac{1}{\operatorname{Log}(e^x - 1)}},$

$y_0 = 0^0 = e.$

8). $y = \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tang} x},$

$y_0 = \infty^0 = 1.$

b). *За* $x = \infty$.

1). $y = x(1 - e^{\frac{1}{x}}),$

$y_\infty = \infty \cdot 0 = 0.$

2). $y = \frac{x}{\alpha + \beta x^2} \cdot \operatorname{Log}(a + b x^x),$

$y_\infty = 0 \cdot \infty = \frac{1}{\beta}.$

3). $y = \sin\frac{c}{x} \cdot \operatorname{Log}(a + be^x)$,

$$y_\infty = 0 \cdot \infty = c.$$

4). $y = \left(\frac{1}{a + be^x}\right)^{\frac{c}{x}}$,

$$y_\infty = 0^0 = e^{-c}.$$

5). $y = (Ax^m + Bx^{m-1} + \cdot \cdot \cdot + U)^{\frac{1}{x}}$,

$$y_\infty = \infty^0 = 1.$$

6). $y = (a + bx^m)^{\frac{1}{\alpha + \beta \operatorname{Log} x}}$, $m > 0$;

$$y_\infty = \infty^0 = e^{\frac{m}{\beta}}.$$

c). *За* x *различно.*

1). $y = (e^a - e^x) \operatorname{tang}\frac{\pi x}{2a}$, *за* $x = a$;

$$y_a = 0 \cdot \infty = \frac{2a}{\pi} e^a.$$

2). $y = \arccos\frac{x}{a} \cdot \operatorname{tang}\frac{\pi x}{2a}$, *за* $x = a$;

$$y_a = 0 \cdot \infty = \infty.$$

3). $y = (\pi - 2x) \operatorname{tang} x$, *за* $x = \frac{\pi}{2}$;

$$y_{\frac{\pi}{2}} = 0 \cdot \infty = 2.$$

4). $y = (a + b e^{\operatorname{tang} x})^{\pi - 2x}$, *за* $x = \frac{\pi}{2}$;

$y_{\frac{\pi}{2}} = \infty^0 = e^2$.

C). *Изрази разних неодређених облика.*

1). $y = \frac{1}{x} + \operatorname{Log} x$, *за* $x = 0$;

$y_0 = \infty + \infty = \infty$.

2). $y = (1 + mx)^{\frac{1}{x}}$, *за* $x = 0$;

$y_0 = e^m$.

3). $y = \frac{2}{x} - \frac{x}{e^x - x - 1}$, *за* $x = 0$;

$y_0 = \frac{2}{3}$.

4). $y = \frac{\operatorname{Log} \cos x}{\operatorname{Log} \sin x - \operatorname{Log} x}$, *за* $x = 0$;

$y_0 = 3$.

5). $y = \frac{\operatorname{Log} \operatorname{tang} x - \operatorname{Log} x - \operatorname{Log} \cos x}{\operatorname{Log} \sin x - \operatorname{Log} \cos x}$, *за* $x = 0$;

$y_0 = 7$.

6). $y = \frac{\operatorname{Log} \sin x - \operatorname{Log} x + \frac{x^2}{6}}{\operatorname{Log} x + \frac{x^2}{3} - \operatorname{Log} \operatorname{tang} x}$, *за* $x = 0$;

$y_0 = \frac{1}{42}$.

20). *Дата је једначина*

$$(y^2 - x^2)^2 = ax^3 - bxy^2;$$

за $x = 0$ *и* $y = 0$, *добија* y' *вредности:* $\pm \sqrt{\frac{a}{b}}$ *и* $\pm \infty$.

21). *Дата је једначина*

$$y^4 + axy^2 = bx^3 - x^4;$$

за $x = 0$ *и* $y = 0$, *добија* y' *вредности:* $\pm \sqrt{\frac{b}{a}}$ *и* $\pm \infty$.

22). *Дата је једначина*

$$y^4 + (a^2 + x^2)y^2 = b^2x^2;$$

за $x = 0$ *и* $y = 0$, *добија* y' *вредности:* $\pm \frac{b}{a}$.

Задаци:

а). *Наћи праву вредност израза облика* $\frac{0}{0}$.

1). $\dfrac{-x^2 + a\sqrt{ax}}{a - \sqrt{ax}}$, *за* $x = a$.

2). $\dfrac{\sqrt{x^2 - a^2}}{\sqrt{x - a}}$, *за* $x = a$.

3). $\dfrac{\sqrt{a + x} - \sqrt{2a}}{\sqrt{a + 2x} - \sqrt{3a}}$, *за* $x = a$.

4). $\dfrac{(x^2 + ax)\sqrt{a} - (x^2 + a^2)\sqrt{x}}{2a\sqrt{x} - (a + x)\sqrt{a}}$, *за* $x = a$.

5). $\dfrac{(2a^3 - x^3)^{\frac{1}{3}} - (5a^2 - 4x^2)^{\frac{1}{2}}}{x(8a^2x^2 + 8ax^3)^{\frac{1}{4}} - (20a^6x^4 + 12a^4x^6)^{\frac{1}{5}}}$, за $x = a$.

6). $\dfrac{\operatorname{Log} x}{\sqrt{1 - x}}$, за $x = 1$.

7). $\dfrac{x^m - x^{m+n}}{1 - x^{2p}}$, за $x = 1$.

8). $\dfrac{\operatorname{Log}\sin\frac{\pi x}{2}}{(x - 1)^2}$, за $x = 1$.

9). $\dfrac{\operatorname{Log}\cos(x - 1)}{1 - \sin\frac{\pi x}{2}}$, за $x = 1$.

10). $\dfrac{\sqrt{2x^2 - x - 1}}{\sqrt{x^3 - 1}}$, за $x = 1$.

11). $\dfrac{\sin(x^2)}{1 - \cos x}$, за $x = 0$.

12). $\dfrac{\sin x - xe^x}{\cos x - e^{2x} + 2x}$, за $x = 0$.

13). $\dfrac{x \operatorname{Log}(1 + \sin x)}{e^{\operatorname{tang} x} - x - 1}$, за $x = 0$.

14). $\dfrac{(a + x)^x - a^x}{x^2}$, за $x = 0$

15) $\dfrac{\operatorname{Log}(1 + x + x^2)}{\sin^2 x}$, за $x = 0$.

e). *Наћи праву вредност израза облика* 1^{∞}.

1). $(\cos a\, x)^{(\operatorname{cosec} bx)^2}$, *за* $x = 0$.

2). $(\cos a\, x)^{\frac{b}{x^n}}$, $(n = 1, 2, 3)$; *за* $x = 0$.

3). $\left(\frac{a_1^{\frac{1}{x}} + a_2^{\frac{1}{x}} + \cdot \cdot \cdot + a_n^{\frac{1}{x}}}{n}\right)^{nx}$, *за* $x = \infty$.

4). $(\operatorname{Th} x)^{\operatorname{Sh} x}$, *за* $x = \infty$.*)

5). $(\sin x)^{\operatorname{tang} x}$, *за* $x = \frac{\pi}{2}$.

f). *Наћи праву вредност израза:*

1). $\frac{1 - x \operatorname{cotg} x}{1 - \cos x}$, *за* $x = 0$.

2). $\left(\frac{\operatorname{tang} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^n}}$, $(n = 1, 2, 3)$; *за* $x = 0$.

3). $\frac{x^6\left(\sqrt[6]{\frac{1}{3} + x^6} - \sqrt[3]{3 + x^3}\right) + x^4}{\sqrt{1 + x^2}}$, *за* $x = \infty$.

4). $3x^2\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - \operatorname{Se} x^3 \operatorname{Log}(1 + x)$, *за* $x = \infty$.

5). $\sqrt{\frac{2 + \cos 2x - \sin x}{x \sin 2x + x \cos x}} - \left(\frac{\pi - 2x}{2 \sin 2x}\right)^2$, *за* $x = \frac{\pi}{2}$.

---

*) Види: прву свеску Проблема, страна 71.

g). *Наћи праву вредност првог извода* $\frac{dy}{dx}$, *функције* у *дате једначинама :*

I. *За* $x = y = 0$,

1). $3ay^2 - 2axy + 2bx^2 = 0$;

2). $y^4 - x^5 + x^4 + 3x^2y^2 = 0$;

3). $x^4 - ax^2y + by^3 = 0$;

4). $(x^2 - y^2)(x - a) - (x^2 + y^2)(y - b) = 0$;

5). $x^3 + y^3 = 3a(y^2 - 4xy + 3x^2)$;

6). $(x - y)(x^2 + y^2) = a(x + y)^2$;

7). $x^3 + ax^2y + axy^2 + y^3 = 0$;

8). $y^4 + (a^2 + x^2)y^2 = a^2x^2$;

9). $(y^2 - x^2)(x - 1)\left(x - \frac{3}{2}\right) = 2(x^2 + y^2 - 2x)^2$.

II. *За* $x = y = 1$,

10). $(y^2 - x^2)(x - 1)\left(x - \frac{3}{2}\right) = 2(x^2 + y^2 - 2x)^2$;

11). $x^3 + xy^2 - 2x^2 - 2y + 2 = 0$.

III. *За* $x = y = \pm\sqrt{\frac{a}{2}}$,

12). $x^4 + y^4 = a(x^2 + y^2)$

IV *За* $x = a$, $y = b$,

13). $3(y - b)^3 - (x - a) = 0$;

14). $(y - b)^2 - (x - a)^2 (x - c) = o.$

V. *3a* $x = a, \ y^2 = b^2,$

15). $(a - x)^2 + y^2 = b^2.$

VI. *3a* $xy = \frac{3}{10} a^2, \ x^2 + y^2 = a^2,$

16). $\frac{3}{10} a^3 - axy = \left(\frac{3}{10} a^2 - xy\right) \sqrt{x^2 + y^2}.$

XI

Maxima и minima функција

A). Maxima и minima откривених (explicit) функција једне промењљиве количине

1 Проблем

За које вредности x-а *функција*

$$f(x) = x(2a - x)$$

постаје maximum или minimum?

Вредности x-а, за које f(x) постаје max. или min., добивају се решењем једначине

$$f'(x) = 0,$$

тј. решењем једначине

$$2a - 2x = 0;$$

дакле, за $x = a$ функција f(x) може постати max. или minimum.

Нађимо други извод; он је

$$f''(x) = -2$$

одречан; према томе, за $x = a$, задата функција постаје $f(a) = a^2$, maximum.

Примедба. Ако је $f(a)$ maximum функције $f(x)$, онда њене оближње вредности $f(a+h)$ и $f(a-h)$, где је h произвољно мало, морају бити обе мање од $f(a)$; другим речима разлике:

$$(1) \quad f(a+h) - f(a) \quad \text{и} \quad f(a-h) - f(a)$$

морају бити обе одречне. И заиста, наћи ћемо да је

$$f(a+h) - f(a) = -h^2,$$

$$f(a-h) - f(a) = -h^2.$$

Лако је увидети, да обе горње разлике под (1) морају бити положне, ако је $f(a)$ minimum функције $f(x)$.

2 Проблем

Наћи maximum или minimum функције

$$f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}.$$

Наћи ћемо (види 102 страну прве свеске Проблема) да је

$$f'(x) = \arcsin x.$$

Једначина

$$f'(x) = \arcsin x = 0$$

даје вредност $x = 0$, за коју задата функција $f(x)$ може постати max. или minimum.

Други је извод њен

$$f''(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

положан, за $x = o$. Према томе задата функција $f(x)$, за $x = o$, постаје

$$f(o) = 1, \quad \text{minimum}.$$

3 Проблем

Наћи maximum или minimum функције

$$f(x) = \mathrm{Ch}x + \cos x.$$

Знајући да постоје обрасци под (a), доказани на 75 страни прве свеске Проблема, наћи ћемо

$$f'(x) = \mathrm{Sh}x - \sin x.$$

Једначина $f'(x) = \mathrm{Sh}x - \sin x = o$ даје само $x = o$ за стварни корен, о чему бисмо се лако уверили заменив $\mathrm{Sh}x$ и $\sin x$ њиховим вредностима израженим у редовима.

За $x = o$, имамо

$$f''(x) = \mathrm{Ch}x - \cos x = o,$$

$$f'''(x) = \mathrm{Sh}x + \sin x = o,$$

$$f^{\mathrm{IV}}(x) = \mathrm{Ch}x + \cos x = 2;$$

пошто је $f^{\mathrm{IV}}(x)$ положно, то отуда закључујемо да $x = o$ одговара minimum-у функције $f(x)$. Дакле је

$$f(o) = 2, \quad \text{minimum}.$$

4 Проблем

Наћи maximum или minimum функције

$$f(x) = x^2 - 2ax\cos\varphi + a^2.$$

Први извод задате функције јесте

$$f'(x) = 2x - 2a\cos\varphi;$$

једначина

$$2x - 2a\cos\varphi = o.$$

даје вредност $x = a\cos\varphi$, за коју задата функција $f(x)$ може постати max. или minimum.

Други је извод њен

$$f''(x) = 2$$

положан; према томе $x = a\cos\varphi$ одговара minimum-у функције $f(x)$. Вредност тога minimum-а дата је једначином

$$f(a\cos\varphi) = a^2\sin^2\varphi.$$

5 Проблем

Наћи maximum или minimum функције

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x + 10.$$

Диференцијалећи задату функцију по x, наћи ћемо

$$(1) \quad f'(x) = x^2 - 6x + 5,$$

$$(2) \quad f''(x) = 2x - 6.$$

Ставимо сада први извод раван нули, то ћемо, према једначини под (1), имати

$$x^2 - 6x + 5 = o;$$

или, што је исто,

$$(x - 5)(x - 1) = o.$$

Последња једначина има за корене

$$x = 5,$$

$$x = 1.$$

Пошто први извод $f'(x)$ постаје раван нули, кад је x равно 5 или 1, то може, за ове вредности x-а, задата функција $f(x)$ постати maximum или minimum.

Једначина под (2) постаје

$$f''(x) = +4, \text{ кад је } x = 5;$$

$$f''(x) = -4, \text{ кад је } x = 1.$$

Наша функција $f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x + 10$ даје дакле:

За $x = 5$, један minimum;

За $x = 1$, један maximum.

Примедба I. Ми можемо и на други начин дознати, за које од горњих вредности x-а задата функција постаје max. или minimum; $f(a)$ биће maximum задате функције $f(x)$ ако $f'(x)$ од положног пређе у одречно тј. ако је у исто време, за бесконачно мало h,

$$f'(a-h) > o \quad \text{и} \quad f'(a+h) < o;$$

напротив, $f(a)$ биће minimum задате функције $f(x)$, ако $f'(x)$ из одречног пређе у положно тј. ако је у исто време, за бесконачно мало h,

$$f'(a-h) < o \quad \text{и} \quad f'(a+h) > o.$$

Применимо ову примедбу на задату функцију $f(x)$, па ћемо наћи

Последња једначина има за корене

$$x = 5,$$

$$x = 1.$$

Пошто први извод $f'(x)$ постаје раван нули, кад је x равно 5 или 1, то може, за ове вредности x-а, задата функција $f(x)$ постати maximum или minimum.

Једначина под (2) постаје

$$f''(x) = +4, \text{ кад је } x = 5;$$

$$f''(x) = -4, \text{ кад је } x = 1.$$

Наша функција $f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x + 10$ даје дакле:

За $x = 5$, један minimum;

За $x = 1$, један maximum.

Примедба I. Ми можемо и на други начин дознати, за које од горњих вредности x-а задата функција постаје max. или minimum; $f(a)$ биће maximum задате функције $f(x)$ ако $f'(x)$ од положног пређе у одречно тј. ако је у исто време, за бесконачно мало h,

$$f'(a-h) > o \quad \text{и} \quad f'(a+h) < o;$$

напротив, $f(a)$ биће minimum задате функције $f(x)$, ако $f'(x)$ из одречног пређе у положно тј. ако је у исто време, за бесконачно мало h,

$$f'(a-h) < o \quad \text{и} \quad f'(a+h) > o.$$

Применимо ову примедбу на задату функцију $f(x)$, па ћемо наћи

За $x = + 4$; $y = + 3{,}33 \ldots$

„ $x = + 5$; $y = + 1{,}66 \ldots$

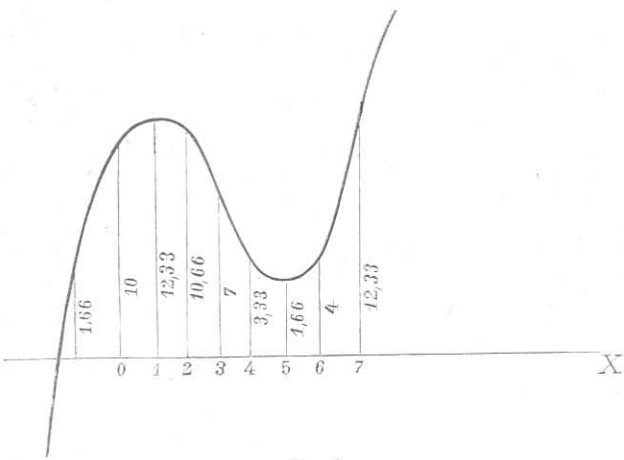
„ $x = + 6$; $y = + 4$

„ $x = + 7$; $y = + 12{,}33 \ldots$

Према овоме крива линија, која одговара једначини

$$y = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x + 10,$$

представљена је сликом 3.



Сл. 3.

Ми налазимо у ствари да она, за $x = 1$, има један maximum а за $x = 5$ један minimum и да *само за ове вредности од* x може постојати један maximum или minimnm.

Из слике је лако увидети да ове вредности, које одговарају maximum-у и minimum-у функције, нису нужно највеће и најмање функцијне вредности, него су само веће или мање од њихових оближњих вредности лево и десно.

6 Проблем

Наћи maximum или minimum функције

$$y = x^3 - 3x^2 + 3x + 6.$$

Наћи ћемо да је

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x + 3,$$

$$(2) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 6.$$

Ставимо сада $\frac{dy}{dx} = 0$ и решимо отуда добивену једначину

$$(3) \quad 3x^2 - 6x + 3 = 0$$

по x. Наћи ћемо $x = 1$.

Задата функција може, за $x = 1$, и *само* за $x = 1$, постати maximum или minimum. Ставимо сада у једначину под (2) место x његову вредност јединицу, добићемо

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Ако даље диференцијалимо једначину под (2), наћи ћемо

$$(4) \quad \frac{d^3y}{dx^3} = 6.$$

Ми видимо дакле, да су $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ обоје равни нули, за $x = 1$; међу тим је $\frac{d^3y}{dx^3} = 6$. Према томе, задата функција $f(x)$ нема ни maximum ни minimum, за $x = 1$.

Лако је увидети да, за никакву коначну вредност од x, први извод $\frac{dy}{dx}$ не постаје бесконачно велики. Отуда наша функција $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 6$, у опште, не даје ни maximum ни minimum.

Користећи се првом примедбом претходнога проблема, наћи ћемо да је

$$f'(1 - h) = 3(1 - h)^2 - 6(1 - h) + 3 = 3h^2,$$

положно за сваку вредност од h.

Тако је исто

$$f'(1 + h) = 3(1 + h)^2 - 6(1 + h) + 3 = 3h^2,$$

опет положно за сваку вредност од h. И из овога је увиђавно да задата функција не даје ни maximum ни minimum.

На послетку, као у претходном проблему, и овде можемо графичким путем представити горњи резултат.

Једначина $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 6$ даје:

За $x = -1$; $y = -1$

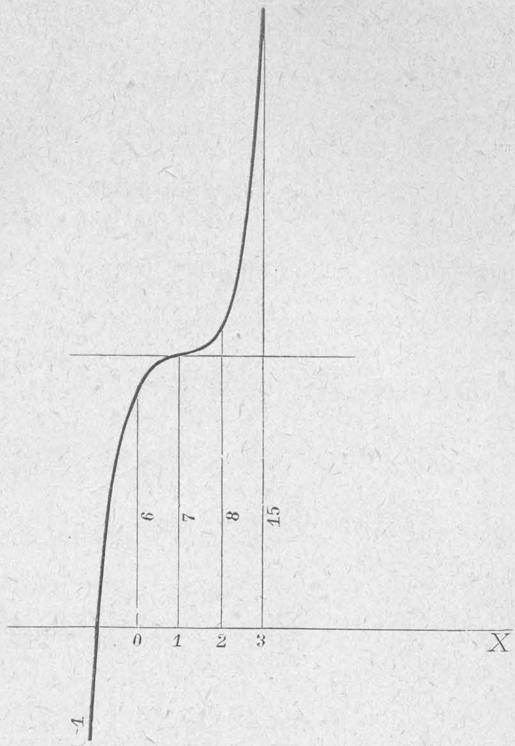
„ $x = 0$; $y = 6$

„ $x = 1$; $y = 7$

„ $x = 2$; $y = 8$

„ $x = 3$; $y = 15$

Крива линија, која једначини $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 6$ одговара, представљена је сликом 4. И из слике увиђамо да, за никакву вредност x-а, не можемо имати ни maximum ни minimum.



Сл. 4.

7 Проблем

Наћи max. или min. функције

$$y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12.$$

Наћи ћемо да је први извод

$$(1)\quad \frac{dy}{dx} = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24.$$

Вредности x-а, за које је функција y max. или min., добијамо из једначине

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24 = 0,$$

или, што је исто, из једначине

$$(2) \quad x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0.$$

Последња једначина има за корене: $x = 1$, $x = 2$ и $x = 3$. То су вредности x-а за које функција y може бити max. или minimum.

Диференцијалимо још један пут једначину под (1) па ћемо наћи

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 - 48x + 44.$$

Дакле имамо:

$$\text{За} \quad x = 1; \quad \frac{d^2y}{dx^2} > 0, \quad y \text{ minimum};$$

$$\text{,,} \quad x = 2; \quad \frac{d^2y}{dx^2} < 0, \quad y \text{ maximum};$$

$$\text{,,} \quad x = 3; \quad \frac{d^2y}{dx^2} > 0, \quad y \text{ minimum}.$$

8 Проблем

Наћи max. или min. функције

$$f(x) = x^5 - 75x^3 + 1620x - 1000.$$

Наћи ћемо да је први извод

$$(1) \quad f'(x) = 5x^4 - 225x^2 + 1620.$$

Једначина

$$5x^4 - 225x^2 + 1620 = 0,$$

или, што је исто, једначина

$$x^4 - 45x^2 + 324 = o,$$

има за корене: $x = 3$, $x = -3$, $x = 6$ и $x = -6$.

Диференцијалећи једначину под (1) још један пут наћи ћемо

$$(2) \quad f''(x) = 20x^3 - 450x.$$

Према овоме увиђамо да је:

За $x = 3$; $f''(3) < o$, то је $f(3) = 2078$ maximum;

„ $x = -3$; $f''(-3) > o$, „ „ $f(-3) = -4078$ minimum;

„ $x = 6$; $f''(6) > o$, „ „ $f(6) = 296$ minimum;

„ $x = -6$; $f''(-6) < o$, „ „ $f(-6) = -2296$ maximum.

Читаоцу остављамо да резултате, у овоме и претходном проблему, графичким путем овери.

9 Проблем

Наћи max. или min. функције

$$f(x) = m - b\sqrt[5]{(x - c)^2}.$$

Задату функцију написаћемо овако

$$f(x) = m - b(x - c)^{\frac{2}{5}},$$

која диференцијалена даје

$$f'(x) = -\frac{2}{5}b(x - c)^{-\frac{3}{5}},$$

или

$$(1) \quad f'(x) = -\frac{2}{5}\frac{b}{\sqrt[5]{(x - c)^3}}.$$

Јасно је, да први извод $f'(x)$, за ниједну коначну вредност од x, не може постати раван нули; напротив, за $x = c$, он постаје

$$(2) \quad f'(x) = \infty.$$

Према овоме, *једина* вредност од x, за коју функција $f(x)$ може постати maximum или minimum, јесте $x = c$.

Да бисмо дознали да ли $x = c$ одговара max. или min. функције $f(x)$ испитајмо, према првој примедби петога проблема, знаке за $f'(c + h)$ и $f'(c - h)$. Наћи ћемо, према једначини под (1), да је

$$f'(c \pm h) = -\frac{2}{5}\frac{b}{\sqrt[5]{[(c \pm h) - c]^3}} = -\frac{2}{5}\frac{b}{\sqrt[5]{(\pm h)^3}}.$$

Дакле је

$$f'(c + h) \text{ одречно},$$

$$f'(c - h) \text{ положно}.$$

Пр ма овоме наша функција

$$f(x) = m - b\sqrt[5]{(x - c)^2},$$

за $x = c$, даје један maximum и његова је вредност

$$(3) \quad f(x)_{max.} = m.$$

10 Проблем

Наћи max. или min. функције

$$f(x) = \frac{x}{1 + x^2}.$$

Први извод задате функције биће

$$f'(x) = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2},$$

и њега треба ставити раван нули. Тако имамо

$$f'(x) = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2} = 0,$$

или

$$1 - x^2 = 0;$$

откуда налазимо $x = 1$ и $x = -1$ вредности за које задата функција $f(x)$ може постати max. или minimum. Други извод њен биће

$$f''(x) = \frac{2x^3 - 6x}{(1 + x^2)^3}.$$

Према томе је:

за $x = +1$; $f''(x) < 0$, $f(1) = \frac{1}{2}$ maximum;

„ $x = -1$; $f''(x) > 0$, $f(-1) = -\frac{1}{2}$ minimum.

Примедба. Ако једну функцију од x, нпр. $f(x)$, диференцијалимо један пут и ако добијемо њен први извод у облику

$$(1) \quad f'(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)};$$

то ће $f'(x)$ бити равно нули, кад $\varphi(x)$ постане равно нули. Хоћемо ли сада да разликујемо, да ли једна вредност од x, за коју је $\varphi(x)$ равно нули, одговара maximum-у или minimum-у задате функције $f(x)$, то ћемо дознати помоћу $f''(x)$. У овом случају ми налазимо

$$(2) \quad f''(x) = \frac{\psi(x) \cdot \varphi'(x) - \varphi(x) \cdot \psi'(x)}{\psi^2(x)};$$

или, због $\varphi(x) = 0$, налазимо

$$(3) \quad f''(x) = \frac{\varphi'(x)}{\psi(x)}.$$

Према овоме очевидно је, да бисмо одредили $f''(x)$, треба само $\varphi(x)$ диференцијалити.

Користећи се овом примедбом често упрошћавамо рачун при тражењу maxima и minima.

Применимо ову примедбу на задату функцију

$$f(x) = \frac{x}{1 + x^2}.$$

Наћи ћемо да је њен први извод

$$f'(x) = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}.$$

Тај први извод $f'(x)$ постаје нула за $1 - x^2 = 0$, тј. за $x = +1$ и $x = -1$.

Други извод њен биће

$$f''(x) = \frac{-2x}{(1 + x^2)^2}.$$

Ставимо ли сада $x = +1$ то $f''(x)$ постаје одречно; напротив, за $x = -1$, постаје $f''(x)$ положно. Према томе имамо:

$$\text{За} \quad x = +1; \quad f(1) = \frac{1}{2} \text{ maximum};$$

$$\text{„} \quad x = -1; \quad f(-1) = -\frac{1}{2} \text{ minimum};$$

дакле исти резултат.

11 Проблем

Наћи max. или min. функције

$$f(x) = \frac{x^2}{x - a}.$$

Наћи ћемо да је њен први извод

$$(1) \quad f'(x) = \frac{x^2 - 2ax}{(x - a)^2}.$$

Применимо корисну примедбу из претходнога проблема и на задату функцију. Први извод f'(x) биће раван нули за

$$(2) \quad x^2 - 2ax = o,$$

која је једначина задовољена са $x = o$ и $x = 2a$.

Диференцијалимо једначину под (1), имајући у виду једначину под (2), добићемо други извод задате функције

$$(3) \quad f''(x) = \frac{2x - 2a}{(x - a)^2}.$$

За $x = o$; $f''(o) < o$, то је $f(o) = o$ maximum;

„ $x = 2a$; $f''(2a) > o$, то је $f(2a) = 4a$ minimum.

12 Проблем

Наћи max. или min. функције

$$f(x) = \frac{\mathrm{Log}\, x}{x}.$$

Наћи ћемо да је први извод

$$f'(x) = \frac{1 - \mathrm{Log}\, x}{x^2}.$$

Први извод биће раван нули ако је $1 - \mathrm{Log}\, x = o$, тј. ако је $x = e$, и за ту вредност x-a задата функција може постати max. или minimum.

Нађимо други извод; он је

$$f''(x) = -\frac{1 + 2(1 - \operatorname{Log} x)}{x^3},$$

или, према познатој примедби,

$$f''(x) = -\frac{1}{x^3}.$$

У сваком случају имамо, за $x = e$, $f''(e) < o$. Према томе, за $x = e$, $f(e) = \frac{1}{e}$ представља maximum задате функције.

13 Проблем

Наћи max. или min. функције

$$f(x) = \frac{\operatorname{Log} x}{x^n}.$$

Наћи ћемо да је први извод

$$(1) \quad f'(x) = \frac{1 - n \operatorname{Log} x}{x^{n+1}}.$$

Једначина

$$(2) \quad \frac{1 - n \operatorname{Log} x}{x^{n+1}} = o \text{ или } 1 - n \operatorname{Log} x = o$$

даће нам вредности x-а, за које је задата функција maximum или minimum. Једначина под (2) има за корен $x = e^{\frac{1}{n}}$. Нађимо други извод задате функције; он је, имајући у виду једначину под (2),

$$f''(x) = -\frac{n}{x^{n+2}}.$$

За $x = e^{\frac{1}{n}}$ имамо $f''(e^{\frac{1}{n}}) < o$; према томе, за ту вредност x-а, $f(e^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{ne}$ представља maximum задате функције.

Приметимо само да за $n = 1$ имамо случај претходног проблема.

14 Проблем

Наћи max. или min. функције

$$y = \frac{x}{\operatorname{Log} x}.$$

Наћи ћемо да је први извод

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{Log} x - 1}{(\operatorname{Log} x)^2};$$

он ће бити раван нули ако је

$$(1) \quad \operatorname{Log} x - 1 = o,$$

тј. за $x = e$, и за ту вредност задата функција може постати maximum или minimum. Нађимо други извод њен; он је, имајући у виду једначину под (1),

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x(\operatorname{Log} x)^2}.$$

За $x = e$ имамо $\frac{d^2y}{dx^2} > o$, према томе за ту вредност x-а постаје $y = e$ minimum.

15 Проблем

Наћи max. или min. функције

$$y = x^x.$$

Ми смо, у првој свесци Проблема страна 57, нашли да је први извод

$$y' = x^x(1 + \text{Log}\, x).$$

Једначина

$$x^x(1 + \text{Log}\, x) = o,$$

или једначина

$$(1) \quad 1 + \text{Log}\, x = o$$

даће нам вредности за x, за које задата функција може постати maximum или minimum. Једначина под (1) даје $x = \frac{1}{e}$.

Други извод задате функције јесте

$$y'' = x^x(1 + \text{Log}\, x)^2 + x^{x-1};$$

ми видимо да је, за $x = \frac{1}{e}$, други извод $y'' > o$; према томе, за $x = \frac{1}{e}$, постаје $y = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$ minimum.

16 Проблем

Наћи max. или min. функције

$$f(x) = (x - a)^{2m}(x - b)^{2n+1}\varphi(x),$$

где су m *и* n *цели и положни бројеви, а* $\varphi(x)$ *једна функција која не постаје ни нула ни бесконачно велика, ни за* $x = a$, *ни за* $x = b$.

Први извод функције f(x) може се написати у облику

$$f'(x) = (x - a)^{2m-1}(x - b)^{2n}\chi(x),$$

где функција $\chi(x)$, у опште, не постаје равна нули ни бесконачно велика, ни за $x = a$, ни за $x = b$. Овај први извод постаје нула за $x = a$ и за $x = b$; али, у близини од $x = a$, он мења знак са разликом $x - a$, док међу тим, у близини од $x = b$, он не мења знак са разликом $x - b$ Дакле функција $f(x)$ има један maximum или један minimum за $x = a$, а нема никако за $x = b$. За $x - a$ бесконачно мало, знак од $f'(x)$ противан је или исти са оним од $(a - b)^{2n} \chi(a) = 2m(a - b)^{2n+1} \varphi(a)$, према томе да ли је $x - a$ одречно или положно. Имамо дакле један maximum или један minimum, за $x = a$, како је кад $(a - b)\varphi(a)$ одречно или положно.

Може се још, у случају непрекидности извода функције $\varphi(x)$, доћи до истог резултата израчунав $f^{(2m)}(a)$, који се своди на

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot 2m(a - b)^{2n+1} \varphi(a)$$

B). Maxima и minima скривених (implicit) функција једне променљиве количине

17 Проблем

Наћи max: или min. функције у *дате једначином*

$$y^2 - xy + x^2 - 1 = 0.$$

Кад је у дато као скривена функција x-а једначином

$$(1) \quad f(x, y) = 0,$$

па се траже maxima и minima функције у, као и вредности x-а које им одговарају, ми ћемо из прве диференцијалне једначине

$$(2) \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0$$

израчунати први извод у-а и ставити

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} = o.$$

Из једначина под (1) и (3), избацив у, добиһемо једначину која ће нам дати оне вредности за х, за које функција у може бити maximum или minimum. Ако сваку тако нађену вредност х-а заменимо у једначину (1) или (3), наћи ћемо и одговарајућу вредност у-а. Да ли је сад та вредност у-а његов maximum или minimum, дознаје се из знака другог извода у-вог.

Пошто је

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}},$$

то се једначина под (3) своди на ову:

$$(4) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = o.$$

Нека су $x = a$, $y = b$ један спрег вредности добивен решењем једначина под (1) и (4). Да бисмо дознали да ли је b доиста maximum или minimum у-ов, израчунаћемо други извод $\frac{d^2y}{dx^2}$, из друге диференцијалне једначине:

$$(5) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2} = o,$$

који се, за $x = a$, $y = b$, своди на

$$(6) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

Ако је сада $\frac{d^2y}{dx^2} < o$, за $x = a$, $y = b$, онда је b maximum y-ов; ако ли је пак $\frac{d^2y}{dx^2} > o$, за исте вредности $x = a$, $y = b$, онда је b minimum функције y.

Лако је увидети, када би за $x = a$, $y = b$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ било равно нули па дакле и $\frac{d^2y}{dx^2}$, да би требало прећи на посматрање следећих извода: $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$, итд.

Скривена функција y може, у извесним приликама, бити maximum или minimum и за такве вредности за које је $\frac{dy}{dx} = \infty$. То ћемо ставити

$$(7) \quad \frac{\partial f}{\partial y} = o,$$

и ову једначину, као и дату под (1), решити. Ако је сада $x = \alpha$, $y = \beta$ једно разрешење тих једначина, онда, да бисмо видели да ли је β maximum или minimum y-ов, не можемо очевидно радити по мало час показаној методи, јер су тада, за $x = \alpha$, $y = \beta$, сви изводи y-на бесконачно велики. Тада не остаје ништа друго, него да се β упореди са оближњим вредностима, које y добија за $x = \alpha - h$ и $x = \alpha + h$, или да се види да ли први извод $\frac{dy}{dx}$ мења свој знак кад x пређе од вредности $\alpha - h$ ка $\alpha + h$.

Применимо ово на постављени проблем. Имамо

$$(I) \quad y^2 - xy + x^2 - 1 = o;$$

отуда је

$$(II) \quad -y + 2x + (2y - x)\frac{dy}{dx} = o,$$

из које, стављајући (III) $\frac{dy}{dx} = o$, добијамо

$$\text{(IV)} \quad y - 2x = o.$$

Решењем ове последње једначине и оне под (I) наћи ћемо

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad y = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Други извод y-ов биће дат једначином

$$\text{(V)} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{2y - x},$$

или, према горњем спрегу вредности,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{\pm\frac{4}{\sqrt{3}} \mp \frac{1}{\sqrt{3}}},$$

или

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \mp \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Дакле је $y = +\frac{2}{\sqrt{3}}$ maximum, а $y = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ minimum.

Вредностима, за које је $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - x = o$, дакле за које је $\frac{dy}{dx} = \infty$, не одговарају ни maxima ни minima y-ови. (*Димитрије Нешић*, литографисана предавања).

18 Проблем

Наћи max. или min. функције y дате једначином

$$(1) \quad x^3 - 3axy + y^3 = o.$$

Диференцијалећи задату једначину, наћи ћемо

$$(2) \quad x^2 - ay + (y^2 - ax)\frac{dy}{dx} = o;$$

откуда, ставив (3) $\frac{dy}{dx} = o$, добијамо

$$(4) \quad x^2 - ay = o.$$

Последња једначина са задатом под (1) дају два система разрешења:

$$x = a\sqrt[3]{2},\ y = a\sqrt[3]{4} \text{ и } x = o,\ y = o.$$

Диференцијалећи још један пут једначину под (2), имајући у виду једначину под (3), наћи ћемо други извод

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2x}{y^2 - ax}.$$

За $x = a\sqrt[3]{2}$, $y = a\sqrt[3]{4}$, налазимо да је други извод

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{a}$$

одречан, ако је a положно. Према томе овај систем вредности одговара maximum-у функције y.

Други систем вредности: $x = o$, $y = o$, чини другу диференцијалну једначину

$$2x - 2a\frac{dy}{dx} + 2y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y^2 - ax)\frac{d^2y}{dx^2} = o$$

идентичном, и зато је треба диференцијалити још један пут, па ћемо добити

$$2 - 3a\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 6y\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} + (y^2 - ax)\frac{d^3y}{dx^3} = 0;$$

откуда, за $x = 0$, $y = 0$, добијамо

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{3a}.$$

Дакле овај систем вредности: $x = y = 0$, одговара minimum-у функције y, ако се претпостави $a > 0$.

19 Проблем

Наћи max. или min. функције y *одређене једначином*

$$(1) \quad \varphi(y)x^2 + \chi(y)x + \psi(y) = 0.$$

Задату једначину можемо и овако написати

$$(2) \quad x^2 + Px + Q = 0,$$

где су: $P = \frac{\chi(y)}{\varphi(y)}$, $Q = \frac{\psi(y)}{\varphi(y)}$ дате функције по y.

Диференцијалећи једначину под (2) наћи ћемо

$$(3) \quad 2x + P + \left(x\frac{dP}{dy} + \frac{dQ}{dy}\right)\frac{dy}{dx} = 0;$$

откуда, стављајући $\frac{dy}{dx} = 0$, имамо

$$2x + P = 0 \text{ или } x = -\frac{P}{2}.$$

Једначина под (2) постаје

$$-\frac{P^2}{4} + Q = 0,$$

једначина која одређује вредности за у, које могу бити maxima или minima. Диференцијалећи још један пут једначину под (3), и ставив за тим $\frac{dy}{dx} = o$, добићемо другу диференцијалну једначину

$$2 + \left(x\frac{dP}{dy} + \frac{dQ}{dy}\right)\frac{d^2y}{dx^2} = o,$$

из које, заменив x са $-\frac{P}{2}$, добијамо

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2}{-\frac{P}{2}\frac{dP}{dy} + \frac{dQ}{dy}},$$

и знак овога израза показаће нам да ли је нађена вредност за у, maximum или minimum. Приметимо да именитељ десно није ништа друго него први извод количине $-\frac{P^2}{4} + Q$, која постаје равна нули за вредност maximum или minimum од у, и који мора бити $< o$ за сваку релну вредност x-a.

На исти начин поступили бисмо, у случају, кад би x и у били везани једначином трећег степена

$$x^3 + Px + Q = o.$$

C). Maxima и minima функција двеју и више промењљивих количина

20 Проблем

Наћи maximum или minimum функције

$$f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F.$$

Из теорије, maxima и minima функције f(x, y) двеју промењљивих количина x и y, знамо да сваки систем (a, b) вредности промењивих (x, y), који чини f(x, y) maximum или minimum, поништава делимичке изводе $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ или их чини дисконтинуарним.

Претпоставимо да су функција f(x, y) и њени постепени изводи непрекидни. Оне вредности за x и y, за које функција f(x, y) може бити maximum или minimum, добивају се решењем једначина:

$$(1)\qquad \frac{\partial f}{\partial x} = o \quad \text{и} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = o.$$

Нека су x = a и y = b те вредности; и представимо, у опште, са $\frac{\partial^n f}{\partial a^r\, \partial b^{n-r}}$ резултат замене x = a и y = b, у делимичком изводу $\frac{\partial^n f}{\partial x^r\, \partial y^{n-r}}$. Онда, ако је:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}\frac{\partial^2 f}{\partial b^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial a\, \partial b}\right)^2 < o, \text{ ни maximum ни minimum;}$$

*) $$\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}\frac{\partial^2 f}{\partial b^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial a\, \partial b}\right)^2 > o, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial a^2} < o, \text{ maximum;}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}\frac{\partial^2 f}{\partial b^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial a\, \partial b}\right)^2 > o, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial a^2} > o, \text{ minimum;}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}\frac{\partial^2 f}{\partial b^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial a\, \partial b}\right)^2 = o, \text{ неизвесност.}$$

Ако би за вредности: x = a и y = b, добивене решењем једначина под (1), били равни нули сва три друга делимичка извода функције f(x, y), онда треба прећи на посматрање њених

---

*) Кад горња неједначина постоји, очевидно је, да су $\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 b}$ једнако означени тј. или су обе количине положне или обе одречне.

виших извода; или је још простије, помоћу оближњих вредности, испитати да ли је задата функција maximum или minimum.

Према овоме, ставив прва два делимичка извода равни нули, добијамо једначине:

$$(I) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = Ax + By + D = o, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = Bx + Cy + E = o,$$

које смо скратили са 2. Из горњих једначина добијамо

$$x = \frac{BE - CD}{AC - B^2}, \quad y = \frac{BD - AE}{AC - B^2},$$

вредности промењљивих x, y, за које задата функција може бити maximum или minimum.

За те вредности промењљивих x, y, постаје функција

$$f(x, y) = \frac{2\,BDE - (AE^2 - CD^2)}{AC - B^2} + F.$$

За $AC - B^2 > o$ имаћемо maximum или minimum. За A и C одречно имамо maximum; за A и C положно имамо minimum функције f(x, y). Напротив, ако је $AC - B^2 < o$, немамо ни maximum ни minimum.

Кад је $AC - B^2 = o$, онда су, у оптте, једначине под (I) противречне. Оне ће једнако остати противречне, осим ако је $\frac{B}{A} = \frac{C}{B} = \frac{E}{D}$. Елиминишући тада C и E, добијамо

$$f(x, y) = A\left(x + \frac{B}{A}y + \frac{D}{A}\right)^2 + \frac{AF - D^2}{A},$$

количину која је, очевидно, maximum или minimum за

$$Ax + By + D = o.$$

Имамо дакле, у овом случају, једну *линију* maximum или minimum, у место једне *тачке*.

Ако је, поред тога, још $B = o$, онда је $AE = CD = AC = o$, што може дати места трима случајевима:

$$1^\circ \quad A = o,\ C = o,\quad f(x, y) = 2Dx + 2Ey + F;$$

$$2^\circ \quad A = o,\ D = o,\quad f(x, y) = Cy^2 + 2Ey + F;$$

$$3^\circ \quad C = o,\ E = o,\quad f(x, y) = Ax^2 + 2Dx + F.$$

У првом случају немамо ни maximum ни minimum. У друга два случаја, ми смо свели проблем на тражење maxima или minima једне функције само једне променљиве количине.

21 Проблем

Одредити за x *и* y *оне вредности, за које функција*

$$u = x^2 + xy + y^2 - 5x - 4y + 10$$

може бити maximum или minimum.

Диференцијалећи u по x и y добићемо

$$(1)\quad \frac{\partial u}{\partial x} = 2x + y - 5,\quad \frac{\partial u}{\partial y} = x + 2y - 4;$$

$$(2)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 \text{ и } \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 1.$$

Ми имамо сада да нађемо оне вредности за x и y, за које делимички изводи $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ постају равни нули или бесконачно велики. Једначине под (1) показују да нема никакве коначне вредности за x и y, за које би $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ постали бесконачни. Према томе ми треба да одредимо за x и y оне вредности, за које $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ постају равни нули. Ставимо дакле, према једначинама под (1), да је

$$(3) \quad 2x + y - 5 = 0,$$

$$(4) \quad x + 2y - 4 = 0,$$

Из двеју последњих једначина следује

$$(5) \quad x = 2, \quad y = 1.$$

Пошто једначине под (3) и (4) никакве друге корене не дају него само корене $x = 2$, $y = 1$, то може, ако задата функција, у опште, може имати maximum или minimum, бити случај само за поменуте вредности од x и y.

Из једначина под (2) следује:

$$(6) \quad \text{да су } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ и } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \text{ обоје положни;}$$

$$(7) \quad \text{да је } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0;$$

према томе, за $x = 2$ и $y = 1$, вредност функције u постаје minimum. Увучемо ли ове вредности од x и y, у задату функцију $u = x^2 + xy + y^2 - 5x - 4y + 10$, то се добија

$$u_{min.} = 3.$$

22 Проблем

Разделити апсолутни број a *на три дела, тако да производ ова три дела буде maximum.*

Ми ћемо означити та три дела са: x, y и $a - x - y$. Производ истих јесте

$$(1)\quad u = xy(a - x - y) = axy - x^2y - xy^2.$$

Треба наћи maximum функције u.

Наћи ћемо

$$(2)\quad \frac{\partial u}{\partial x} = ay - 2xy - y^2,$$

$$(3)\quad \frac{\partial u}{\partial y} = ax - x^2 - 2xy.$$

Одмах је лако увидети, да нема никаквих коначних вредности за x и y, за које би $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ постали бесконачни. Али, да бисмо добили оне вредности за x и y за које $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ постају равни нули, треба, према једначинама под (2) и (3), ставити

$$(4)\quad ay - 2xy - y^2 = o,$$

$$(5)\quad ax - x^2 - 2xy = o.$$

Разрешимо ли ове једначине по x и y, то ћемо добити четири пара корена, на име:

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{llll} x = o; & x = o; & x = a; & x = \frac{a}{3} \\ y = o; & y = a; & y = o; & y = \frac{a}{3}. \end{array}\right.$$

Из природе самога проблема лако је увидети:

1°. Да прва три пара корена не могу дати maximum.

2°. Да најмање бар један maximum мора постојати.

То мора дакле, за $x = \frac{a}{3}$, $y = \frac{a}{3}$, производ $u = xy(a - x - y)$ дати један maximum и ово је у ствари и једини могући maximum.

Његова је вредност

$$u_{max.} = \left(\frac{a}{3}\right)^3 = \frac{a^3}{27}.$$

23 Проблем

Наћи maximum или minimum функције

$$u = x^3y^2(a - x - y).$$

Диференцијалећи задату функцију по x и y, наћи ћемо

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = x^2y^2(3a - 4x - 3y), \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = x^3y(2a - 2x - 3y). \end{cases}$$

Први делимички изводи $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ биће равни нули за $x = o$ и $y = o$. Они ће бити равни нули и када је

$$(2)\quad \begin{cases} 3a - 4x - 3y = o, \\ 2a - 2x - 3y = o. \end{cases}$$

Из двеју последњих једначина добијамо вредности $x = \frac{a}{2}$ и $y = \frac{a}{3}$, за које задата функција u може постати max. или minimum.

Диференцијалећи једначине под (1) по x и y, наћи ћемо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6xy^2(a - 2x - y) = -\frac{a^4}{9};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = x^2y(6a - 8x - 9y) = -\frac{a^4}{12};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2x^3(a - x - 3y) = -\frac{a^4}{8}.$$

Ми видимо да су вредности од $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ одречне. Даље је

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = \frac{a^8}{72} - \frac{a^8}{144} = \frac{a^8}{144}.$$

Дакле, за $x = \frac{a}{2}$ и $y = \frac{a}{3}$, постаје $y = \frac{a^6}{432}$, maximum. Приметимо само да, за $x = o$ и $y = o$, функција u не постаје ни maximum ни minimum.

24 Проблем

Наћи maximum или minimum функције

$$f(x, y, z) = xyz(1 - ax^2 - by^2 - cz^2),$$

где су a, b *и* c *положни бројеви.*

Да једна функција $f(x, y, z, \cdots)$ буде maximum или minimum, треба да њен први диференцијал df буде раван нули; треба, осим тога, да први виши диференцијал, који није раван нули, за ма какво dx, dy, $\cdots$, буде парног реда, и да задржава увек знак minus (—) па да имамо maximum а знак plus (+) па да имамо minimum.

Диференцијалећи задату функцију по x, y и z, добићемо

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -yz(3ax^2 + by^2 + cz^2 - 1),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -xz(ax^2 + 3by^2 + cz^2 - 1),$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -xy(ax^2 + by^2 + 3cz^2 - 1).$$

Оне вредности за x, y и z, за које f(x, y, z) може бити maximum или minimum, добивају се решењем једначина:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Стављајући прве делимичке изводе равне нули и не водећи рачуна о разрешењима, за које је f(x, y, z) = o, имамо:

$$x = \frac{1}{\sqrt{5a}}, \quad y = \frac{1}{\sqrt{5b}}, \quad z = \frac{1}{\sqrt{5c}}.$$

Сада треба испитати да ли, за ове вредности од x, y и z, други диференцијал d^2f остаје истог знака; или, што је исто, да ли је истог знака израз

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} k^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} l^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} hk + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial z} hl$$

$$+ 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \, \partial z} kl,$$

или из овога, деобом са l^2, добивени израз

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{h}{l}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{k}{l}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} \frac{h}{l} \frac{k}{l}$$

$$+ 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial z} \frac{h}{l} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \, \partial z} \frac{k}{l},$$

који ће, када се стави $\frac{h}{l} = p$, $\frac{k}{l} = q$, изгледати овако:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} p^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} q^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} pq + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial z} p + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \, \partial z} q,$$

или још мало другчије:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} p^2 + 2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} q + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}\right] p + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} q^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} q + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right].$$

Када се изнађу вредности других делимичких извода за: $x = \frac{1}{\sqrt{5a}}$, $y = \frac{1}{\sqrt{5b}}$, $z = \frac{1}{\sqrt{5c}}$, па се замену у последњи израз, имаћемо:

$$(1)\quad -\frac{2}{5\sqrt{5abc}}\{3ap^2 + 2(\sqrt{ab}\cdot q + \sqrt{ac})p$$

$$+ (3bq^2 + 2\sqrt{bc}\cdot q + 3c)\},$$

и овај израз треба да буде вазда истог знака, па имале количине $p = \frac{h}{l}$, $q = \frac{k}{l}$ ма какве вредности. Да то буде треба да је

$$(\sqrt{ab}\cdot q + \sqrt{ac})^2 - 3a(3bq^2 + 2\sqrt{bc}\cdot q + 3c) < o,$$

или, када се сведе, треба да је

$$2bq^2 + \sqrt{bc}\cdot q + 2c > o,$$

тј. треба да тај израз буде положан за ма какво q. А то да буде треба да је

$$(\sqrt{bc})^2 - 2b\cdot 2c < o \quad \text{тј.} \quad bc - 4bc < o,$$

а то и јесте случај.

Према томе, горњи израз под (1) вазда је једног и истог знака и то са првим сачиниоцем:

$$-\frac{6a}{5\sqrt{5abc}},$$

дакле је одречан. Задата функција f(x, y, z) јесте maximum за горње вредности од x, y и z. Она ће бити minimum за исте вредности од x, y и z, али узете са противним знаком. *(Дим. Нешић).*

D). Maxima и minima функција, када између променљивих постоје дати односи

25 Проблем

Наћи maximum или minimum функције

$$(1) \quad u = x^l y^m \cdots,$$

где променљиве x, y, · · ·, *задовољавају једначину*

$$(2) \quad x + y + \cdots = a.$$

Диференцијалећи две горње једначине добићемо

$$(3) \quad \begin{cases} o = \dfrac{du}{u} = \dfrac{l}{x}dx + \dfrac{m}{y}dy + \cdots, \\ o = dx + dy + \cdots; \end{cases}$$

из којих закључујемо:

$$(4) \quad \frac{l}{x} = \frac{m}{y} = \cdots = \frac{l + m + \cdots}{a}.$$

Из једначина под (4) добићемо вредности за x, y, · · ·, за које задата функција u може бити maximum или minimum.

Диференцијалећи још један пут једначине под (3), и ставив за тим $du = o$, имаћемо:

$$\frac{d^2u}{u} = -\left(\frac{l}{x^2}dx^2 + \frac{m}{y^2}dy^2 + \cdots\right)$$

$$+ \left(\frac{l}{x}d^2x + \frac{m}{y}d^2y + \cdots\right),$$

$$o = d^2x + d^2y + \cdots;$$

но, услед $\frac{l}{x} = \frac{m}{y} = \cdots = \frac{l+m+\cdots}{a}$, имамо

$$\frac{l}{x}d^2x + \frac{m}{y}d^2y + \cdots = \frac{l}{x}(d^2x + d^2y + \cdots) = o;$$

и вредност количине $\frac{d^2u}{u}$ своди се на

$$-\left(\frac{l}{x^2}dx^2 + \frac{m}{y^2}dy^2 + \cdots\right),$$

количину сталног знака, када су изложиоци l, m, $\cdots$, сви истог знака.

У овом случају, претпоставив да је количина a положна, имаћемо maximum или minimum функције $u = x^l y^m \cdots$, према томе да ли су изложиоци l, m, $\cdot\ \cdot\ \cdot$, сви положни или сви одречни.

Оверити ове резултате:

a). Maxima и minima откривених (explicit) функција једне промењливе количине

1). $$y = x(a^2 - x^2);$$

за $x = +\frac{a}{\sqrt{3}}$ *постаје* $y = +\frac{2a^3}{3\sqrt{3}}$ *maximum*,

за $x = -\frac{a}{\sqrt{3}}$ *постаје* $y = -\frac{2a^3}{3\sqrt{3}}$ *minimum*.

2). $$y = x(a - x)^2;$$

за $x = \frac{a}{3}$ *постаје* $y = \frac{4}{27}a^3$ *maximum*, *за* $x = a$ *постаје* $y = 0$ *minimum.*

3). $y = A + (x - c)^4$;

за $x = c$ *постаје* $y = A$ *minimum.*

4). $y = A + (x - a)^5$; *не постаје ни max. ни minimum.*

5). $y = a + (x - a)^n$; *постаје minimum ако је* n *паран број, напротив не постаје ни max. ни min. ако је* n *непаран број.*

6). $y = x^2(a - x)^3$;

за $x = 0$ *постаје* $y = 0$ *minimum;*

за $x = \frac{2a}{5}$ *постаје* $y = \frac{108}{3125}a^5$ *maximum;*

за $x = a$ *функција* y *не постаје ни max. ни minimum.*

7). $y = (x - 1)^4(x + 2)^3$;

за $x = -\frac{5}{7}$ *постаје* $y = \left(-\frac{12}{7}\right)^4\left(\frac{9}{7}\right)^3$ *maximum,*

за $x = 1$ *постаје* $y = 0$ *minimum,*

за $x = -2$ *не постаје* y *ни max. ни minimum.*

8). $y = x + \frac{a^2}{x}$;

за $x = a$ *постаје* $y = 2a$ *minimum.*

9). $y = x^2 + \frac{2a^3}{x}$;

за $x = a$ *постаје* $y = 3a^2$ *minimum.*

10). $y = x + \sqrt{a(a - x)}$;

за $x = \frac{3}{4}a$ *постаје* $y = \frac{5}{4}a$ *maximum*.

11). $y = x - \sqrt{a(x - a)}$;

за $x = \frac{5}{4}a$ *постаје* $y = \frac{3}{4}a$ *minimum*.

12). $y = 2x + 3\sqrt[3]{b(x - a)^2}$, $b > o$;

за $x = a - b$ *постаје* $y = 2a + b$ *maximum*,

за $x = a$ *постаје* $y = 2a$ *minimum*.

13). $y = 2x - 3\sqrt[3]{b(x - a)^2}$, $b > o$;

за $x = a$ *постаје* $y = 2a$ *maximum*,

за $x = a + b$ *постаје* $y = 2a - b$ *minimum*.

14). $y = b + \sqrt[3]{\frac{(2ax - x^2)^2}{a}}$, $a > o$;

за $x = o$ *постаје* $y = b$ *minimum*,

за $x = a$ *постаје* $y = b + a$ *maximum*,

за $x = 2a$ *постаје* $y = b$ *minimum*.

15). $y = \gamma x + \sqrt{\alpha + \beta x}$;

за $x = \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma^2}{4\beta\gamma^2}$ *постаје* $y = -\frac{\beta^2 + 4\alpha\gamma^2}{4\beta\gamma}$ *maximum или* *minimum*, према томе да ли је $\beta\gamma$ одречно или положно.

16). $$y = \gamma x + \sqrt{\alpha + \beta x^2};$$

за $x = \mp \gamma \sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta(\beta - \gamma^2)}}$ *постаје* $y = \mp \sqrt{\dfrac{\alpha(\beta - \gamma^2)}{\beta}} : \begin{cases} \textit{min.}, \\ \textit{max.}, \end{cases}$

при чему $\alpha\beta(\beta - \gamma^2)$ *мора бити положно.*

17). $$y = \sqrt[3]{bx^2} + \sqrt[3]{c(x-a)^2}, \quad b > o, \; c > o;$$

за $x = o$ *постаје* $y = \sqrt[3]{a^2c}$ *minimum*,

за $x = \dfrac{ab}{b+c}$ *постаје* $y = \sqrt[3]{a^2(b+c)}$ *maximum*,

за $x = a$ *постаје* $y = \sqrt[3]{a^2b}$ *minimum*.

18). $$y = \sqrt[3]{bx^2} - \sqrt[3]{c(x-a)^2}, \quad b > c > o;$$

за $x = o$ *постаје* $y = -\sqrt[3]{a^2c}$ *minimum*,

за $x = a$ *постаје* $y = +\sqrt[3]{a^2b}$ *maximum*,

за $x = \dfrac{ab}{b-c}$ *постаје* $y = \sqrt[3]{a^2(b-c)}$ *minimum*.

19). $$y = x^2 - 2ax + b^2;$$

за $x = a$ *постаје* $y = b^2 - a^2$ *minimum*.

20). $$y = x^2 + ax + b^2;$$

за $x = -\frac{a}{2}$ постаје $y = b^2 - \frac{a^2}{4}$ *minimum*.

21). $$y = x^3 - 18x^2 + 96x - 20;$$

за $x = 4$ постаје $y = 140$ *maximum*,

за $x = 8$ постаје $y = 108$ *minimum*.

22). $$y = x^3 + 3\alpha x^2 + 3\beta x;$$

за $x = -\alpha \mp \sqrt{\alpha^2 - \beta}$ постаје $y = \alpha(2\alpha^2 - 3\beta) \pm 2\sqrt{(\alpha^2 - \beta)^3}$ $\begin{cases} \textit{maximum}, \\ \textit{minimum}, \end{cases}$ при чему $\alpha^2 - \beta > 0$ мора бити. У случају када је $\alpha^2 - \beta = 0$ не постаје y ни *maximum* ни *minimum*.

23). $$f(x) = \frac{2 - 3x + x^2}{2 + 3x + x^2};$$

за $x = +\sqrt{2}$ постаје $f(x)$ *minimum*,

за $x = -\sqrt{2}$ постаје $f(x)$ *maximum*.

24). $$f(x) = \frac{x^3 + x}{x^4 - x^2 + 1};$$

за $x = 1$ постаје $f(1) = 2$ *maximum*,

за $x = -1$ постаје $f(-1) = -2$ *minimum*.

25). $$f(x) = \frac{x^3 - x}{x^4 - x^2 + 1};$$

за $\left.\begin{array}{l} x = +\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\[2ex] x = -\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right\}$ постаје $f(x)$ *maximum*;

$$\textit{за}\ \left.\begin{array}{l} x = -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\[2ex] x = +\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right\}\ \textit{постаје}\ f(x)\ \textit{minimum}.$$

26). $$f(x) = \frac{(x+3)^3}{(x+2)^2};$$

за $x = 0$ *постаје* $f(0) = \frac{27}{4}$ *minimum*,

за $x = -2$ *постаје* $f(-2) = \infty$.

27). $$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x - 1};$$

за $x = 0$ *постаје* $f(0) = -1$ *maximum*,

за $x = 2$ *постаје* $f(2) = \frac{3}{5}$ *minimum*.

28). $$y = \frac{x}{x^2 + \alpha x + \beta};$$

за $x = \mp\sqrt{\beta}$ *постаје* $y = \dfrac{1}{\alpha \mp 2\sqrt{\beta}} : \begin{cases} \textit{minimum}, \\ \textit{maximum}, \end{cases}$ *при чему* $\beta > 0$ *мора бити. За* $\beta = 0$ *не постаје* y *ни maximum ни minimum.*

29). $$y = \frac{x - \gamma}{x^2 + \alpha x + \beta};$$

за $x = \gamma \mp \sqrt{\alpha\gamma + \beta + \gamma^2}$ *постаје* $y = \dfrac{1}{\alpha + 2\gamma \mp 2\sqrt{\alpha\gamma+\beta+\gamma^2}} : \begin{cases} \textit{min.}, \\ \textit{max.}; \end{cases}$ *при чему* $\alpha\gamma + \beta + \gamma^2 > 0$ *мора бити. У случају када је* $\alpha\gamma + \beta + \gamma^2 = 0$ *нема* y *ни maximum ни minimum.*

30). $$y = \frac{a + bx}{\sqrt{\alpha + \beta x^2}};$$

за $x = \dfrac{\alpha b}{a\beta}$ *постаје* $y = \sqrt{\dfrac{a^2}{\alpha} + \dfrac{b^2}{\beta}}$ *maximum или minimum, према томе да ли је* $a\beta$ *положно или одречно.*

31). $$y = \frac{(a + bx)\sqrt{\alpha + \beta x^2}}{x};$$

за $x = \sqrt[3]{\dfrac{a\alpha}{b\beta}}$ *постаје* $y = \sqrt{\dfrac{(ab_1 + ba_1)^3}{ab}}$ *maximum или minimum, према томе да ли је* $b\beta$ *положно или одречно. Количине* a_1 *и* b_1 *јесу:*

$$a_1 = \sqrt[3]{a\alpha}, \quad b_1 = \sqrt[3]{b\beta}.$$

32) $$y = x^m e^{-x}, \quad m > o;$$

за $x = m$ *постаје* $y = \left(\dfrac{m}{e}\right)^m$ *maximum.*

33). $$y = be^{\frac{x}{a}} - x;$$

за $x = a \operatorname{Log}\left(\dfrac{a}{b}\right)$ *постаје* $y = a\left\{1 - \operatorname{Log}\left(\dfrac{a}{b}\right)\right\}$ *minimum, при чему* ab *положно мора бити.*

34). $$y = x^m \operatorname{Log}\left(\frac{a}{x}\right);$$

за $x = \dfrac{a}{e^{\frac{1}{m}}}$ *постаје* $y = \dfrac{a^m}{me}$ *maximum или minimum, према томе да ли је* m *положно или одречно.*

35). $$y = \sqrt[x]{x} = x^{\frac{1}{x}},$$

за $x = e$ *постаје* $y = e^{\frac{1}{e}}$ *maximum.*

36). $$y = \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{x}}$$

за $x = ae$ *постаје* $y = e^{\frac{1}{ae}}$ *maximum.*

37). $$y = \left(\frac{a}{x}\right)^{x};$$

за $x = \frac{a}{e}$ *постаје* $y = e^{\frac{a}{e}}$ *maximum.*

38). $$y = \sin x \cdot \sin(\alpha + x);$$

за $x = n\pi - \frac{\alpha}{2}$ *постаје* $y = -\sin^2\frac{\alpha}{2}$ *minimum,*

за $x = n\pi + \frac{1}{2}(\pi - \alpha)$ *постаје* $y = +\cos^2\frac{\alpha}{2}$ *maximum, при чему* n *један произвољни положан или одречан број означава.*

39). $$y = \sin x \cdot \cos(\alpha + x);$$

за $x = n\pi - \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$ *постаје* $y = -\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)$ *minimum,*

за $x = n\pi + \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$ *постаје* $y = +\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$ *maximum.*

40). $$y = \operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{tang}(x - \alpha),\ o < \alpha < \pi;$$

$$\text{за } x = \left(n + \frac{1}{4}\right)\pi + \frac{\alpha}{2} \text{ постаје } y = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \textit{ maximum},$$

$$\text{за } x = \left(n - \frac{1}{4}\right)\pi + \frac{\alpha}{2} \text{ постаје } y = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) \textit{ minimum}.$$

41). $$y = \sin x \cos^2 x;$$

$$\text{за } x = \left(2n - \frac{1}{2}\right)\pi \text{ постаје } y = 0 \textit{ maximum},$$

$$\text{за } x = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi \text{ постаје } y = 0 \textit{ minimum};$$

ако даље, краткоће ради, ставимо $\operatorname{arc\,tang} \frac{1}{\sqrt{2}} = \theta$, *то*

$$\left.\begin{array}{l} \text{за } x = 2n\pi + \theta, \text{ и} \\ \text{за } x = (2n+1)\pi - \theta \end{array}\right\} \text{постаје } y = + \frac{2}{3\sqrt{3}} \textit{ maximum},$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{за } x = 2n\pi - \theta, \text{ и} \\ \text{за } x = (2n+1)\pi + \theta \end{array}\right\} \text{постаје } y = - \frac{2}{3\sqrt{3}} \textit{ minimum}.$$

42). $$y = \frac{1}{2}\left(a \sin x + \frac{b}{\sin x}\right), \; a > b > 0;$$

$$\text{за } x = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi \text{ постаје } y = + \frac{1}{2}(a + b) \textit{ maximum},$$

$$\text{за } x = \left(2n - \frac{1}{2}\right)\pi \text{ постаје } y = - \frac{1}{2}(a + b) \textit{ minimum};$$

кад је $\arcsin \sqrt{\frac{b}{a}} = \theta$ *стављено, то*

$$\left.\begin{array}{l} \text{за } x = 2n\pi + \theta, \text{ и} \\ \text{за } x = (2n+1)\pi - \theta \end{array}\right\} \text{постаје } y = + \sqrt{ab} \textit{ minimum};$$

$$\left.\begin{array}{l} за\ x = 2n\pi - \theta,\ и \\ за\ x = (2n+1)\pi + \theta \end{array}\right\}\ постаје\ y = -\sqrt{ab}\ maximum.$$

43). $$y = \frac{1}{2}(a \operatorname{tang} x + b \operatorname{cotg} x),\ a > o,\ b > o;$$

означимо ли $\operatorname{arc\,tang}\sqrt{\frac{b}{a}}$ са θ, то

за $x = n\pi + \theta$ постаје $y = +\sqrt{ab}$ *minimum*,

за $x = n\pi - \theta$ постаје $y = -\sqrt{ab}$ *maximum*.

44). $$y = e^x \sin(x - \alpha);$$

за $x = \left(2n - \frac{1}{4}\right)\pi + \alpha$ постаје $y = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{\left(2n-\frac{1}{4}\right)\pi+\alpha}$ *minimum*,

за $x = \left(2n + \frac{3}{4}\right)\pi + \alpha$ постаје $y = +\frac{1}{\sqrt{2}} e^{\left(2n+\frac{3}{4}\right)\pi+\alpha}$ *maximum*.

45). $$y = e^x[x \sin(x+\alpha) + (1-x)\cos(x+\alpha)],\ \alpha > o;$$

за $x = o$ постаје $y = \cos\alpha$ *minimum*,

за $x = (2n+1)\pi - \alpha$ постаје $y = [(2n+1)\pi - \alpha - 1]e^{(2n+1)\pi-\alpha}$ *max.*,

за $x = 2n\pi - \alpha$ постаје $y = -(2n\pi - \alpha - 1)e^{2n\pi-\alpha}$ *min.*

46). $$y = x \operatorname{arc\,tang} x - \frac{1}{2}\operatorname{Log}(1 + x^2);$$

за $x = o$ постаје $y = o$ *minimum*.

47). $$y = x \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\operatorname{Log}(1 + x^2);$$

за $x = o$ постаје $y = o$ *minimum*.

48). $$y = \frac{1}{1 + x^2}\left(\frac{1}{2} - \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{x}\right);$$

за $x = 0$ *постаје* $y = \frac{1}{2}$ *maximum*,

за $x = \pm 1$ *постаје* $y = -\frac{1}{8}(\pi - 2)$ *minimum*.

49). $$y = \frac{9x + 7x^3}{(1 + x^2)(9 + x^2)} - \operatorname{arc\,tang} x;$$

за $x = -\sqrt{3}$ *постаје* $y = -\left(\frac{5}{8}\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$ *minimum*,

за $x = +\sqrt{3}$ *постаје* $y = \frac{5}{8}\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$ *maximum*.

50). $$y = \frac{1 + x \operatorname{arc\,tang} x}{1 + x^2};$$

за $x = -1$ *постаје* $y = \frac{1}{4}(\pi + 2)$ *maximum*,

за $x = 0$ *постаје* $y = 1$ *minimum*,

за $x = +1$ *постаје* $y = \frac{1}{4}(\pi + 2)$ *maximum*.

b). Maxima и minima скривених функција у једне промењљиве количине

1). $$y^2 + 2yx^2 + 4x - 3 = 0;$$

за $x = -\frac{1}{2}$; $y = 2$ *maximum*;

за $x = 1$; $y = -1$ *ни max. ни minimum*.

2). $$y^4 + x^4 - 4xy + 2 = 0;$$

ни maximum ни minimum.

3). $$y^2 - 2mxy + x^2 - a^2 = 0;$$

за $x = \dfrac{ma}{\sqrt{1 - m^2}}$; $y = \dfrac{a}{\sqrt{1 - m^2}}$ *maximum.*

c). Maxima и minima функција двеју и више промењљивих количина

1). *Дата је функција*

$$f(x, y) = xy(ax + by - c);$$

доказати да за три пара вредности:

$$\left.\begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix}\right\}; \quad \left.\begin{matrix} x = 0 \\ y = \dfrac{c}{b} \end{matrix}\right\}; \quad \left.\begin{matrix} x = \dfrac{c}{a} \\ y = 0 \end{matrix}\right\};$$

функција $f(x, y)$ *не постаје ни maximum ни minimum.*

Напротив, за $x = \dfrac{c}{3a}$, $y = \dfrac{c}{3b}$, *она постаје*

$$f(x, y) = -\frac{c^3}{27ab} \text{ maximum.}$$

2). $$f(x, y) = xy\sqrt{a^2 - x^2 - y^2};$$

За $x = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$ *и* $y = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$, *задата функција* $f(x, y)$ *постаје maximum; напротив, за* $x = -\dfrac{a}{\sqrt{3}}$, $y = -\dfrac{a}{\sqrt{3}}$, *она постаје minimum. (Дим. Нешић).*

3). $$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2;$$

За $x = o$, $y = o$, *функција* $f(x, y) = o$ *не постаје ни maximum ни minimum; напротив, за два спрега вредности:*

$$\left.\begin{aligned} x &= \sqrt{2} \\ y &= -\sqrt{2} \end{aligned}\right\} ; \quad \left.\begin{aligned} x &= -\sqrt{2} \\ y &= \sqrt{2} \end{aligned}\right\} ;$$

она постаје $f(x, y) = -8$, *minimum.*

4). $$u = [m - b\sqrt[5]{(x-c)^2}]\,(n^2 - y^2);$$

За $x = c$, $y = o$, *задата функција постаје maximum,*

$$u_{max.} = m \cdot n^2.$$

5). $$u = \frac{xyz}{(a+x)(x+y)(y+z)(z+b)};$$

Лако је добити однос

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{b} = \pm\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Узев знак $+$ *и ссавив*

$$\left(\frac{a}{a}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{n},$$

наћи ћемо:

$$x = na, \quad y = n^2a, \quad z = n^3a.$$

Услови за maximum или minimum функције трију независно променљивих количина своде се на:

$$-\frac{3}{a^4n^8(1+n)^4} < o, \qquad \frac{8}{a^8n^{10}(1+n)^4} > o,$$

и функција u *има за maximum*

$$\frac{1}{(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}})^4}.$$

Знак — дао би minimum задате функције.

d). **Maxima и minima функција, када између променљивих постоје дати односи**

1).
$$u = a\cos^2 x + b\cos^2 y;$$

количине x *и* y *везане су једначином*

$$y - x = \frac{\pi}{4}.$$

Приметив да је $\sin 2y = \cos 2x$, *наћи ћемо*

$$u = \frac{1}{2}[a \pm (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}]$$

Знак + *одговара maximum-у, а знак — minimum-у функције* u.

2). *Дата је функција*

$$f(x, y, z, \cdots, u) = a_1^2 x + a_2^2 y + a_3^2 z + \cdots + a_m^2 u;$$

променљиве x, y, z, · · ·, u, *везане су једначином*

$$x^3 + y^3 + z^3 + \cdots + u^3 - 1 = 0.$$

Доказати да за вредности:

$$x = \frac{a_1}{\sqrt[3]{a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_m^3}}, \quad y = \frac{a_2}{\sqrt[3]{a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_m^3}},$$

$$z = \frac{a_3}{\sqrt[3]{a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_m^3}}, \cdots, u = \frac{a_m}{\sqrt[3]{a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_m^3}},$$

функција $f(x, y, z, \cdot \cdot \cdot, u)$ *постаје*

$$(a_1^3 + a_2^3 + \cdot \cdot \cdot + a_m^3)^{\frac{2}{3}}, \textit{maximum}.$$

(Дим. Нешић).

Задаци:

α). Наћи max. или min. откривених функција једне променљиве количине

1). $f(x) = b + (x - a)^{\frac{2}{3}}$;

2). $f(x) = b + (x - a)^{\frac{1}{3}}$;

3). $f(x) = (1 + x^{\frac{2}{3}})(7 - x)^2$;

4). $y = \frac{1}{20000}[x^4 - 251x^3 + 20170x^2 - 566400x + 3888000]$;

5). $y = 3x^4 - 28ax^3 + 84a^2x^2 - 96a^3x + 48a^4$;

6). $y = 10x^6 - 12x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 20$;

7). $y = \frac{x}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$;

8). $y = \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{a - x}$;

9). $y = \frac{1 + x}{x}(1 + x - \sqrt{1 - 2\varepsilon x + x^2})$;

где ε *представља прави разломак;*

10). $y = (a - x)^2 - \frac{3}{4}(2ax - x^2)^{\frac{4}{3}}$;

11). $y = x^n e^{-x^2}$;

12). $y = \frac{x}{1 + x \operatorname{tang} x}$;

13). $y = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$;

14). $y = \cos x \operatorname{Ch} x$;

15). $y = (\operatorname{tang} x)^{\cos x}$;

16). $y = e^x + \cos x + e^{-x}$.

β). **Наћи max. или min. скривених функција y, једне променљиве количине, датих једначинама**

1). $\cos(y - x) = 2 \sin y + \cos x$;

2). $x^3 - ay^2 + \frac{by^3}{a + y} - x^2 \sqrt{ay - x^2} = o$;

3). $y^3 + x^3 = 12y^2x - 960$.

γ). **Наћи max. или min. функција двеју и више променљивих количина**

1). $f(x, y) = 2x^2y^2 - 3xy^2 - 4x^2y + 5$;

2). $f(x, y) = x + y - x^2 - 2y^3 - 4xy$;

3). $f(x, y)=a^2x^2y-2ax^3y+x^4y-2a^2x^2y-2x^3y^2+x^2y^3$;

4). $f(x, y) = y^4 - 8y^3 + 18y^2 - 8y + x^3 - 3x^2 - 3x$;

5). $f(x, y) = \sin x + \sin y + \cos(x + y)$;

6). $f(x, y) = xe^{y + x\sin y}$;

7). $f(x,y) = \dfrac{2x - x^2}{\sin(a + y)\sin(b + y)}$;

8). $f(x, y) = 2x^2 - 4y + 9(3a - x^2)^{\frac{2}{3}} + 6(y - 1)^{\frac{2}{3}}$;

9). $f(x, y) = x^n + y^n + (1 - x^m - y^m)^{\frac{n}{m}}$;

10). *Разделити количину* a *на три дела:* x, y *и* a — x — y, *тако да производ*

$$u = x^m \cdot y^n \cdot (a - x - y)^p,$$

буде maximum.

11). $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + x - xz - xy$;

12). $f(x, y, z) = (a^3 - x^3)(x^2z - z^3)(xy - y^2)$;

13). $f(x, y, z, \ldots) = x^2y^2z^2 \ldots + \left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} + \cdots\right)^{-n}$;

14). $f(x, y, z, \ldots, u) = x^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma}\ldots u^{\lambda}(a-x-y-z-\cdots-u)^{\mu}$;

где су: α, β, γ, . . . , λ *и* μ *изложитељи положни и цели бројеви, количина* a *стална је.*

δ). **Наћи maximum или minimum функција, када између промењивих постоје дати односи**

1). $u = xy; \quad x^3 + y^3 - 3axy = o.$

2). $u = 5x + 3y; \quad 4 \sin x = 3 \cos y; \left(x \text{ и } y < \frac{\pi}{2}\right).$

3). $u = rx^2 + 2sxy + ty^2;$

$1 = (1 + p^2)x^2 + 2pqxy + (1 + q^2)y^2.$

4). $u = x + y + z; \quad \frac{x}{a} = \frac{y}{b}; \quad yz + zx + xy = c.$

5). $u = xz + y^2; \quad x + y + z = a.$

6). $u = (x + 1)(y + 1)(z + 1); \quad a^x b^y c^z = k.$

7). $u = x^2 y^3 z^4; \quad 2x + 3y + 4z = a.$

8). $u = x^m y^n z^p; \quad mx + ny + pz = a.$

9). $u = x^2 + y^2 - z^2; \quad x : y = 2 : 3; \quad x + y - z = 12.$

10). $\begin{cases} u = x_1 x_2 x_3 x_4 \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}\right); \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 315; \quad x_1 : x_2 : x_3 = 2 : 3 : 4. \end{cases}$

11). $\begin{cases} u = x_1 + x_2 + x_3 + x_4; \\ x_1 x_2 x_3 x_4 \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}\right) = 39930; \\ x_1 : x_2 : x_3 = 1 : 2 : 3. \end{cases}$

12). $\begin{cases} u = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4; \\ x_1 : x_2 = 2 : 3; \quad x_3 : x_4 = 3 : 4; \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1262. \end{cases}$

$$
13).\quad \begin{cases} u = x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_5^3; \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_5 = 388; \\ x_1 : x_2 = 3 : 8; \quad x_3 : x_4 = 7 : 15. \end{cases}
$$

$$
14).\quad u = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_5^2) - (x_1 + x_2 + \cdots + x_5);
$$

претпоставља се да су пет бројева $x_1, x_2, \cdots, x_5$ *у хармоничкој сразмери.*

XII

Различни проблеми

1 Проблем

Узмимо хармоничан ред

$$(1)\quad \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}+\cdots,$$

који је незбирљив; доказати да разлика између суме m *првих чланова и* Log m *тј. да разлика*

$$(2)\quad \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}-\mathrm{Log}\,m$$

тежи ка сталној граници, кад m *бесконачно расте.*

И заиста, разлика под (2) може се написати овако:

$$(3)\quad \left(\frac{1}{1}-\mathrm{Log}\frac{2}{1}\right)+\left(\frac{1}{2}-\mathrm{Log}\frac{3}{2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{p}-\mathrm{Log}\frac{p+1}{p}\right)+\cdots$$

$$\cdots+\left(\frac{1}{m}-\mathrm{Log}\frac{m+1}{m}\right)+\mathrm{Log}\frac{m+1}{m}.$$

Ми ћемо приметити да је, по Mac-Laurin-овом обрасцу

$$\operatorname{Log}\frac{p+1}{p}=\operatorname{Log}\left(1+\frac{1}{p}\right)=\frac{1}{p}-\frac{1}{2p^2}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{\theta}{p}\right)^2};$$

дакле је

$$\frac{1}{p}-\operatorname{Log}\frac{p+1}{p}=\frac{1}{2p^2}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{\theta}{p}\right)^2}=\frac{\lambda_p}{p^2};$$

где је λ_p променљива количина, пошто садржи θ, али је она очевидно мања од $\frac{1}{2}$. Дакле, разлика под (2) састоји се из m првих чланова реда чији је општи члан $\frac{\lambda_p}{p^2}$, реда збирљивог пошто је сваки његов члан мањи од одговарајућег члана збирљивог реда:

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{p^2}+\cdots+\frac{1}{m^2}.$$

Кад m бесконачно расте $\operatorname{Log}\frac{m+1}{m}$ тежи ка нули, јер $\frac{m+1}{m}$ тежи ка јединици. Дакле, посматрани израз под (2) тежи ка сталној граници, *Euler-ова константна* названа; њена је вредност $0,577\cdots$.

Према овоме, *нађимо границу суме*

$$S=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p},$$

када n *и* p *бесконачно расту.*

Ми ћемо написати

$$S=\left[\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+p}\right]-\left[\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right].$$

Но, према оном што претходи, имамо

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+p}=\operatorname{Log}(n+p)+\varphi_{n+p},$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=\operatorname{Log} n+\varphi_{n};$$

где φ_{n+p} и φ_n наизменце имају за границу Euler-ову константну, када n и p бесконачно расту; и како је

$$S=\operatorname{Log}\frac{n+p}{n}+\varphi_{n+p}-\varphi_n,$$

кад n и p бесконачно расту, десна страна последње једначине тежи ка $\operatorname{Log}\frac{n+p}{n}$. Дакле, сума S тежиће ка сталној граници само онда када количник $\frac{n+p}{n}$, тј. када количник $\frac{p}{n}$, тежи ка сталној граници.

Нека је $\lim\frac{p}{n}=\alpha$ та граница, онда задата сума S тежиће ка $\operatorname{Log}(1+\alpha)$. *(E. Picard; Cours d' Analyse, lith., p. 7, 1887).*

2 Проблем

Наћи први извод функције

$$(1)\quad y=\frac{1+x+x^2+\cdots+x^{p-1}}{1+x+x^2+\cdots+x^{q-1}}.$$

Ако помножимо десно и бројитеља и именитеља са $1-x$, добићемо да је задата функција

$$y=\frac{1-x^p}{1-x^q}.$$

Дакле први извод њен биће

$$y' = \frac{qx^{q-1}(1 - x^p) - px^{p-1}(1 - x^q)}{(1 - x^q)^2},$$

или

$$y' = \frac{qx^{q-1}(1+x+x^2+\cdots+x^{p-1}) - px^{p-1}(1+x+x^2+\cdots+x^{q-1})}{(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^{q-1})^2}.$$

Но ми знамо да је идентички:

$$1+x+x^2+\cdots+x^{p-1} = (1-x)(1+2x+3x^2+\cdots+px^{p-1}) + px^p,$$

$$1+x+x^2+\cdots+x^{q-1} = (1-x)(1+2x+3x^2+\cdots+qx^{q-1}) + qx^q.$$

Према томе вредност првог извода своди се на

$$y' = \frac{qx^{q-1}(1+2x+3x^2+\cdots+px^{p-1}) - px^{p-1}(1+2x+3x^2+\cdots+qx^{q-1})}{(1+x+x^2+\cdots+x^{q-1})^2}.$$

Ова је вредност простија од оне коју бисмо нашли узев, непосредно, први извод функције у под (1).

Примедба. Кад бисмо сравнили оба резултата, добили бисмо ову идентичну једначину:

$$qx^{q-1}(1+2x+3x^2+\cdots+px^{p-1}) - px^{p-1}(1+2x+3x^2+\cdots+qx^{q-1})$$

$$= (1+x+x^2+\cdots+x^{q-1})[1+2x+3x^2+\cdots+(p-1)x^{p-2}]$$

$$- (1+x+x^2+\cdots+x^{p-1})[1+2x+3x^2+\cdots+(q-1)x^{q-2}].$$

(E. Catalan; Cours d'Analyse, p. 123, 1879).

3 Проблем

Нека је f(x) *један цео полином; ако једначина* f(x) = o *има све своје корене стварне и неједнаке, једначина добивена стављајући други извод од* $\frac{1}{f(x)}$ *раван нули, имаће све своје корене уображене.*

Нека је

$$y = \frac{1}{f},$$

и, према томе,

$$y' = -\frac{f'}{f^2}, \quad y'' = \frac{2f'^2 - ff''}{f^3}.$$

Једначина $y'' = o$ јесте дакле

$$(1) \quad 2f'^2 - ff'' = o.$$

Дакле, ако претпоставимо да је

$$(2) \quad f(x) = (x - a)(x - b) \cdots (x - k),$$

имаћемо

$$\frac{f'}{f} = \Sigma \frac{1}{x - a}, \quad \frac{ff'' - f'^2}{f^2} = -\Sigma \frac{1}{(x - a)^2};$$

или

$$(3) \quad f'^2 - ff'' = f^2 \Sigma \frac{1}{(x - a)^2},$$

за тим

$$(4) \quad 2f'^2 - ff'' = f^2 \left\{ \left[\Sigma \frac{1}{x - a} \right]^2 + \Sigma \frac{1}{(x - a)^2} \right\}.$$

Пошто је лева страна једначине под (1) *сума квадрата*, то та једначина нема ниједног стварног корена.

Лако је увидети:

1°. *Ако једначина* $f(x) = o$ *има све своје корене стварне, једначина*

$$(5) \quad ff'' - f'^2 = o,$$

има све своје корене уображене. [Очевидно према једначини под (3)].

2°. *Ако једначина*

$$ff'' - f'^2 = 0$$

има корена стварних, једначина $f(x) = 0$ *имаће корена уображених. (E. Catalan; Mélanges mathématiques, t. III, p. 224, 1888).*

4 Проблем

Један полином $f(x)$, n-тог *степена, задовољава једначину*

$$(1) \quad nf(x) = (x - a)f'(x) + bf''(x).$$

1°. *Наћи сачиниоце од* $f(x)$, *уређен по степенима од* $x - a$. 2°. *Наћи услове стварности корена.* 3°. *Показати да се, ако је* b_0 *апсолутна вредност од* b, *корени од* $f(x)$ *находе између*

$$a - \sqrt{\frac{n(n-1)}{2} b_0} \quad \text{и} \quad a + \sqrt{\frac{n(n-1)}{2} b_0}.$$

1°. Развијањем полинома $f(x)$ добијамо ред уређен по растећим степенима од $x - a$:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} f^{(n)}(a).$$

Тражени сачиниоци јесу дакле: $f(a)$, $f'(a)$, $\cdots$, $f^{(n)}(a)$.

Ако дату једначину под (1) постепено диференцијалимо, добићемо:

$$(n-1)f'(x) = (x-a)f''(x) + bf'''(x),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$(n-p+1)f^{(p-1)}(x) = (x-a)f^{(p)}(x) + bf^{(p+1)}(x),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$2\,f^{(n-2)}(x) = (x - a)\,f^{(n-1)}(x) + bf^{(n)}(x),$$

$$f^{(n-1)}(x) = (x - a)\,f^{(n)}(x).$$

Откуда, заменив x са a, добијамо једначине:

$$nf(a) = bf''(a),$$

$$(n - 1)\,f'(a) = bf'''(a),$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$(n - p + 1)\,f^{(p-1)}(a) = bf^{(p+1)}(a),$$

$$\dots\dots\dots\dots,$$

$$2\,f^{(n-2)}(a) = bf^{(n)}(a),$$

$$f^{(n-1)}(a) = o.$$

Добијамо дакле:

$$f^{(n-1)}(a) = f^{(n-3)}(a) = f^{(n-5)}(a) = \dots = o,$$

$$f^{(n-2)}(a) = \frac{b}{2}\,f^{(n)}(a),$$

$$f^{(n-4)}(a) = \frac{b^2}{2 \cdot 4}\,f^{(n)}(a),$$

$$f^{(n-6)}(a) = \frac{b^3}{2 \cdot 4 \cdot 6}\,f^{(n)}(a),$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

Дакле добијамо ред

$$(2) \quad f(x) = f^{(n)}(a)\left[\frac{(x - a)^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} + \frac{b}{2}\,\frac{(x - a)^{n-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n - 2)} + \frac{b^2}{2 \cdot 4}\,\frac{(x - a)^{n-4}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n - 4)} + \cdots\right].$$

2^0. Ако је b положно и n паран број, сви су чланови добивеног реда за $f(x)$ истог знака, ма каква била стварна вредност коју бисмо количини x дали и једначина $f(x)=o$ има све своје корене уображене.

Ако ли је b положно и n непаран број, довољно је поделити општим чиниоцем x-а, који је заједнички за све чланове у реду за $f(x)$, па ћемо доћи на пређашњи случај. Једначина $f(x)=o$ има дакле само један стварни корен a.

Ако је b равно нули, једначина $f(x)=o$ има све своје корене стварне и равне a.

Ако је b одречно, једначине (1) и (2) показују да је је ред Sturm-ових функција, односно $f(x)$, потпун и састоји се из полинома

$$f(x),\quad f'(x),\quad f''(x),\cdot\;\cdot\;\cdot,\quad f^{(n)}(x),$$

чији су први сачиниоци сви истог знака. Једначина $f(x)=o$ има све своје корене стварне и различне.

3^0. Кад једначина $f(x)=o$ има само један стварни корен a, он се, очевидно, находи између показаних бројева; ти се бројеви, у осталом, своде на a, ако једначина има све своје корене равне a. Довољно је дакле испитати случај, када су сви корени стварни и различни.

Групишући чланове два по два, почев од првог и заменив b са $-b_0$, једначина се може написати

$$\frac{(x-a)^{n-2}}{(n-2)!}\left[\frac{(x-a)^2}{(n-1)n}-\frac{b_0}{2}\right]+\frac{b^2_0}{2\cdot 4}\frac{(x-a)^{n-6}}{(n-6)!}\left[\frac{(x-a)^2}{(n-5)(n-4)}-\frac{b_0}{6}\right]$$

$$+\frac{b^4_0}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\frac{(x-a)^{n-10}}{(n-10)!}\left[\frac{(x-a)^2}{(n-9)(n-8)}-\frac{b_0}{10}\right]+\cdot\cdot\cdot=o.$$

Прва заграда биће положна ако је $\frac{(x-a)^2}{(n-1)n}$ веће од $\frac{b^0}{2}$; али су тада све остале заграде такође положне, јер је први члан у свакој загради већи од $\frac{(x-a)^2}{(n-1)n}$ имајући мањег именитеља, а други члан у свакој загради мањи је од $\frac{b_0}{2}$ имајући већег именитеља. Степени од $(x-a)$, који су пред сваком заградом, и члан који остаје сâм, ако су чланови у реду за $f(x)$ у непарном броју, јесу истог паритета. Свака вредност од x која задовољава неједначину

$$\frac{(x-a)^2}{(n-1)n} - \frac{b^0}{2} > 0,$$

учиниће да и сви чланови од $f(x)$ буду истог знака и због тога она не може бити корен. Отуда следује да се корени од $f(x)$ находе између корена једначине

$$\frac{(x-a)^2}{(n-1)n} - \frac{b_0}{2} = 0,$$

тј. између

$$a - \sqrt{\frac{(n-1)n}{2}b^0} \quad \text{и} \quad a + \sqrt{\frac{(n-1)n}{2}b_0}.$$

(Ch. Brisse; Nouvelles annales mathématiques, la livraison de juillet p. 314, 1888).

Исти проблем *M. V. Jamet* решио је овако:

1^0. Нека је $x - a = z$ и $f(x) = \varphi(z)$. Нека је такође

$$(1) \quad \varphi(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \cdots + a_0.$$

Ако се, у једначину

$$(2) \quad n\varphi(z) = z\varphi'(z) + b\varphi''(z),$$

замени $\varphi(z)$ његовом вредношћу из једначине под (1), обе стране једначине под (2) постају цели полиноми, n-тог степена, и да буду идентички, треба, за сваку вредност од μ мању од $n-1$, да имамо:

$$(3)\quad n a_\mu = \mu a_\mu + (\mu+2)(\mu+1) b a_{\mu+2},$$

или

$$(4)\quad a_\mu = \frac{(\mu+1)(\mu+2)}{n-\mu} b a_{\mu+2},$$

и за $\mu = n-1$, $n a_{n-1} = (n-1) a_{n-1}$, а отуда: $a_{n-1} = o$.

Из ове примедбе и једначине под (3), изводимо да је $a_{n-3} = a_{n-5} = a_{n-7} = \cdots = o$.

Из једначине под (4) изводимо такође да је

$$a_{n-2} = \frac{n(n-1)}{2} b a_n,$$

$$a_{n-4} = \frac{(n-2)(n-3)}{4} b a_{n-2} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4} b^2 a_n,$$

$$a_{n-6} = \frac{(n-4)(n-5)}{6} b a_{n-4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2\cdot 4\cdot 6} b^3 a_n,$$

. . . .

Дакле

$$(5)\quad \varphi(z) = a_n\left[z^n + \frac{n(n-1)}{2} b z^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4} b^2 z^{n-4}\right.$$

$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2\cdot 4\cdot 6} b^3 z^{n-6} + \cdots\right].$$

2°. Према овој последњој једначини, *нужно* је да b буде одречно, или равно нули, па да сви корени једначине $\varphi(z) = o$ буду стварни; јер, ако је b положно и z стварно, $\varphi(z)$ је сума све само положних количина. Овај је услов *довољан*. Ако је $b = o$, сви су корени равни нули. Ако је b одречно, онда из једначине

$$n\varphi(z) = z\varphi'(z) + b\varphi''(z)$$

извешћемо постепено:

$$(n-1)\varphi'(z) = z\varphi''(z) + b\varphi'''(z),$$

$$(n-2)\varphi''(z) = z\varphi'''(z) + b\varphi^{\mathrm{IV}}(z),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$(6) \qquad (n-p)\varphi^{(p)}(z) = z\varphi^{(p+1)}(z) + b\varphi^{(p+2)}(z),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$2\varphi^{(n-2)}(z) = z\varphi^{(n-1)}(z) + b\varphi^{(n)}(z).$$

Дакле, на основу доказане формуле на крају претходне нумере, добијамо

$$(7) \qquad \varphi^{(n-2)}(z) = a_2(z^2 + b),$$

резултат који се такође добија диференцијалећи $n-2$ пута обе стране формуле, и имамо, још, услов

$$a_2 = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cdot \cdot n a_n.$$

Једначина под (7) показује да је услов $b < o$ довољан па да сви корени једначине $\varphi^{(n-2)}(z) = o$ буду стварни. Ја кажем, ако је $b < o$, и ако су сви корени једначине $\varphi^{(p+1)}(z) = o$ стварни, да су сви корени једначине $\varphi^{(p)}(z) = o$ такође стварни. И заиста, нека су $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_{n-p-1}$, корени једначине $\varphi^{(p+1)}(z) = o$, написати редом по величини, која расте. Иза α_1 нема ниједан корен једначине $\varphi^{(p+2)}(z) = o$; јер, на основу Rolle-ове теореме, један корен ове последње једначине лежи између α_1 и α_2; један други између α_2 и α_3; итд. Дакле, ако је $n-p$ паран број, и ако се, у једначини под (6), замењује z, постепено, са:

$$-\infty, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_{n-p-1}, +\infty,$$

$\varphi^{(p)}(z)$ узеће ове знаке:

$$+ - + - \cdot \cdot \cdot - +.$$

Ако је, напротив, $n - p$ непаран број, $\varphi^{(p)}(z)$ узеће знаке:

$$- + - + \cdot \cdot \cdot - +.$$

У оба случаја посматрана једначина имаће све своје корене стварне.

Отуда следује да ће једначине

$$\varphi^{(n-3)}(z) = o, \quad \varphi^{(n-4)}(z) = o, \quad \varphi^{(n-5)}(z) = o, \cdot \cdot \cdot, \quad \varphi'(z) = o,$$

имати све своје корене стварне, и пошто се исто резоновање може поновити на једначину која одређује $\varphi(z)$, то отуда следује да једначина $\varphi(z) = o$ има све своје корене стварне.

3°. Ако је $b = - b_0$, и ако се стави $a_n = 1$, што је увек могуће, имаћемо

$$\varphi(z) = z^{n-2}\left(z^2 - \frac{n(n-1)}{2} b_0\right)$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4} b_0^2 z^{n-6}\left(z^2 - \frac{(n-4)(n-5)}{6} b_0\right) + \cdot \cdot \cdot$$

Али имаћемо такође

$$\frac{n(n-1)}{2} b_0 > \frac{(n-4)(n-5)}{6} b_0 > \frac{(n-6)(n-7)}{8} b_0 > \cdot \cdot \cdot$$

Ако се замени z једним изразом чија је бројна вредност већа од $\sqrt{\frac{n(n-1)}{2} b^0}$, сви ће биноми, написани између заграда, бити положни; и полином $\varphi(z)$ имаће увек знак од z^{n-2}. Отуда закључујемо да је сваки положни корен једначне $\varphi(z) = o$

мањи од $+\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}b_0}$, а да је сваки одречни корен

већи од $-\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}b_0}$, што је требало доказати. *(Mathesis, t. VIII, p. 228, 1888).*

5 Проблем

Нека је

(1) $u = \sin x + \cos y, \quad x = \cos t, \quad y = \sin t;$

наћи $\frac{d^2u}{dt^2}$ *и* $\frac{d^3u}{dt^3}$.

Диференцијалећи по t прву од једначина под (1) наћи ћемо:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\sin x\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \cos y\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

$$+\cos x\frac{d^2x}{dt^2} - \sin y\frac{d^2y}{dt^2},$$

$$\frac{d^3u}{dt^3} = -\cos x\left(\frac{dx}{dt}\right)^3 + \sin y\left(\frac{dy}{dt}\right)^3$$

$$-3\sin x\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} - 3\cos y\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$+\cos x\frac{d^3x}{dt^3} - \sin y\frac{d^3y}{dt^3}.$$

Али, према последњим двема од једначина под (1), имамо:

$$\frac{dx}{dt} = -\sin t, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\cos t, \quad \frac{d^3x}{dt^3} = +\sin t,$$

$$\frac{dy}{dt} = + \cos t, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = - \sin t, \quad \frac{d^3y}{dt^3} = - \cos t;$$

дакле, по замени, имаћемо:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = - \sin x \sin^2 t - \cos y \cos^2 t - \cos x \cos t + \sin y \sin t,$$

$$\frac{d^3u}{dt^3} = \cos x \sin^3 t + \sin y \cos^3 t - 3 \sin x \sin t \cos t$$

$$+ 3 \cos y \cos t \sin t + \cos x \sin t + \sin y \cos t.$$

Да бисмо оверили ове резултате, напишимо вредност од u овако:

$$u = \sin(\cos t) + \cos(\sin t);$$

па ћемо имати:

$$u' = \frac{du}{dt} = - \sin t \cos(\cos t) - \cos t \sin(\sin t),$$

$$u'' = \frac{d^2u}{dt^2} = - \cos t \cos(\cos t) - \sin^2 t \sin(\cos t)$$

$$+ \sin t \sin(\sin t) - \cos^2 t \cos(\sin t),$$

$$u''' = \frac{d^3u}{dt^3} = \sin t \cos(\cos t) - \cos t \sin t \sin(\cos t)$$

$$- 2 \sin t \cos t \sin(\cos t) + \sin^3 t \cos(\cos t)$$

$$+ \cos t \sin(\sin t) + \sin t \cos t \cos(\sin t)$$

$$+ 2 \sin t \cos t \cos(\sin t) + \cos^3 t \sin(\sin t);$$

или још:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = - \cos t \cos x + \sin t \sin y - \sin^2 t \sin x - \cos^2 t \cos y,$$

$$\frac{d^3u}{dt^3} = \sin t \cos x + \cos t \sin y - 3 \cos t \sin t \sin x$$

$$+ 3 \sin t \cos t \cos y + \sin^3 t \cos x + \cos^3 t \sin y;$$

исти резултати. *(E. Catalan; Cours d'Analyse, p. 374, 1879).*

6 Проблем

Наћи услове нужне и довољне па да две функције:

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad и \quad \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

од n *променљивих буду функција једна од друге.*

Претпоставимо да је f једна извесна функција од φ, нпр.,

$$(1) \quad f = F(\varphi).$$

Узмимо делимичке изводе, обеју страна једначине под (1), у односу на сваку променљиву: $x_1, x_2, \cdots, x_n$; добићемо једначине:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{dF}{d\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{dF}{d\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_n} = \frac{dF}{d\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x_n};$$

откуда изводимо да је

$$(2) \quad \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1}} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_2}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2}} = \cdots = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_n}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_n}} = \frac{dF}{d\varphi}.$$

Дакле, ако је f извесна функција од φ нужно је да делимички изводи, обеју функција, узети наизменце у односу на сваку промењљиву: $x_1, x_2, \cdots, x_n$, буду сразмерни, тј. нужно је да постоји једначина под (2).

Докажимо сада да је тај услов и довољан. И заиста, претпоставимо да је

$$(3) \qquad \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1}} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_2}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2}} = \cdots = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_n}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_n}};$$

сада треба доказати да функције f и φ нису независне једна од друге.

Узмимо потпуне диференцијале:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n,$$

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} dx_n;$$

помножимо прву једначину са $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1}$ а другу са $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$, па одузмимо, добићемо

$$df \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - d\varphi \frac{\partial f}{\partial x_1} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) dx_2 + \cdots$$

$$\cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) dx_n,$$

али су сви чланови на десној страни равни нули, јер су сачиниоци од $dx_2, \cdots, dx_n$, на основу једначине под (3), равни нули; дакле је

$$df \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - d\varphi \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0,$$

тј. функције f и φ нису независне једна од друге.

7 Проблем

Претпоставимо да смо у функцији $f(x, y, z)$ *извршили једну линерну замену:*

$$x = \alpha X + \beta Y + \gamma Z,$$

$$y = \alpha' X + \beta' Y + \gamma' Z,$$

$$z = \alpha'' X + \beta'' Y + \gamma'' Z,$$

са условом да детерминанта замене

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

буде различна од нуле; онда ће се $f(x, y, z)$ *трансформисати у* $F(X, Y, Z)$ *и имаћемо идентички*

$$f(x, y, z) = F(X, Y, Z).$$

Ако је h *хесијен функције* $f(x, y, z)$, *а* H *хесијен функције* $F(X, Y, Z)$, *доказати да ћемо имати:*

$$H = h\Delta^2.$$

Напоменимо само, да се функционалном детерминантом

$$
n = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\[2ex] \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} \\[2ex] \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{vmatrix}
$$

нарочито бавио Otto Hesse, ученик Jacobi-јев, и по његовом имену та се детерминанта назива *хесијен функције* $f(x, y, z)$.

Хесијен H јесте функционална детерминанта

$$
\frac{D\left(\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}, \frac{\partial F}{\partial Z}\right)}{D(X, Y, Z)}.
$$

Али ако $\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}, \frac{\partial F}{\partial Z}$ посматрамо не као функције од X, Y, Z, него као функције од x, y, z, онда ћемо, применив Jacobi-јеву теорему, моћи написати

$$
(1) \quad H = \frac{D\left(\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}, \frac{\partial F}{\partial Z}\right)}{D(x, y, z)} \cdot \frac{D(x, y, z)}{D(X, Y, Z)}.
$$

Но детерминанта $\frac{D(x, y, z)}{D(X, Y, Z)}$ није ништа друго до детерминанта $\varDelta$.

Изнађимо прву детерминанту; зато нам треба изразити $\frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}, \frac{\partial F}{\partial Z}$ у функцији од x, y, z. Ми имамо идентичну једначину

$$
F(X, Y, Z) = f(x, y, z),
$$

из које добијамо

$$\frac{\partial F}{\partial X} = \frac{\partial f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\alpha' + \frac{\partial f}{\partial z}\alpha'',$$

$$\frac{\partial F}{\partial Y} = \frac{\partial f}{\partial x}\beta + \frac{\partial f}{\partial y}\beta' + \frac{\partial f}{\partial z}\beta'',$$

$$\frac{\partial F}{\partial Z} = \frac{\partial f}{\partial x}\gamma + \frac{\partial f}{\partial y}\gamma' + \frac{\partial f}{\partial z}\gamma''.$$

Заменом у једначину под (1) имаћемо

$$H = \frac{D\left(\alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \alpha'\frac{\partial f}{\partial y} + \alpha''\frac{\partial f}{\partial z}, \beta\frac{\partial f}{\partial x} + \cdots, \gamma\frac{\partial f}{\partial x} + \cdots\right)}{D(x, y, z)}\,\Delta.$$

Да бисмо израчунали првог чинитеља од H, ми ћемо применити исту теорему. Ако за часак посматрамо $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ као писмена U, V, W, онда ће се тражена детерминанта

$$\frac{D\left(\alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \cdots, \beta\frac{\partial f}{\partial x} + \cdots, \gamma\frac{\partial f}{\partial x} + \cdots\right)}{D(x, y, z)}$$

моћи написати овако:

$$\frac{D(\alpha U + \alpha' V + \alpha'' W, \beta U + \cdots, \gamma U + \cdots)}{D(U, V, W)} \cdot \frac{D(U, V, W)}{D(x, y, z)}$$

но прва детерминанта јесте, очевидно, равна детерминанти Δ. Друга пак $\frac{D(U, V, W)}{D(x, y, z)}$ јесте $\frac{D\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)}{D(x, y, z)}$, или, што је исто, хесијен h.

Дакле је заиста

$$H = h\,\Delta^2.$$

(E. Picard; Cours d'Analyse, lith., p. 39, 1887).

8 Проблем

Нека је

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots.$$

Нека је двојни ред, претпостављено збирљив,

$$S = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

$$+ \frac{m+1}{1} y (a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)$$

$$+ \frac{(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2} y^2 (a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots)$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

где је m *цео број. Ако се стави*

$$\varphi(x, y) = \frac{y^m}{1-y} [f(x) - y f(xy)],$$

онда имамо

$$S = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m} \frac{d^m \varphi(x, y)}{dy^m}.$$

Узев да чланови могу бити груписани на са свим произвољан начин, имаћемо

$$S = a_0 + \left[1 + \frac{m+1}{1} y\right] a_1 x$$

$$+ \left[1 + \frac{m+1}{1} y + \frac{(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2} y^2\right] a_2 x^2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\left[1+\frac{m+1}{1}y+\cdots+\frac{(m+1)\cdots(m+p)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots p}y^p\right]a_px^p$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

или, ако се стави

$$Y_p = 1+\frac{m+1}{1}y+\cdots+\frac{(m+1)\cdots(m+p)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots p}y^p,$$

имаћемо

$$S = \sum_{p=o}^{p=\infty} Y_p a_p x^p.$$

Полином Y_p јесте m-ни извод од

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdots m}\left[y^m+y^{m+1}+\cdots+y^{m+p}\right]=\frac{y^m(1-y^{p+1})}{1\cdot2\cdot3\cdots m(1-y)}.$$

Дакле S је m-ни извод од

$$\frac{y^m}{1\cdot2\cdot3\cdots m(1-y)}\sum_{p=o}^{p=\infty}(1-y^{p+1})a_px^p;$$

тј., m-ни извод од

$$\frac{y^m}{1\cdot2\cdot3\cdots m(1-y)}[f(x)-y\,f(xy)],$$

што је требало и доказати.

Примедба. Ако је $m = o$,

$$S = \frac{f(x)-yf(xy)}{1-y},$$

Пример :

$$m = 1,$$

$$f(x) = \frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4} - \frac{x}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} + \frac{x^2}{1\cdot2\cdots7} - \cdots.$$

Очевидно је, да је

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\left[\cos(\sqrt{x}) - 1 + \frac{1}{2}x\right].$$

Дакле

$$f(xy) = \frac{1}{x^2 y^2}\left[\cos(\sqrt{xy}) - 1 + \frac{1}{2}xy\right],$$

$$\varphi(x,y) = \frac{1-\cos(\sqrt{x})}{x^2} + \frac{\cos(\sqrt{x}) - \cos(\sqrt{xy})}{(1-y)x^2},$$

$$\frac{d\varphi}{dy} = \frac{1}{(1-y)^2x^2}\left[\frac{(1-y)\sqrt{x}\sin(\sqrt{xy})}{2\sqrt{y}}\right.$$

$$\left. + \cos(\sqrt{x}) - \cos(\sqrt{xy})\right];$$

и, на послетку,

$$S = \frac{1}{(1-y)^2x^2}\left[\frac{(1-y)\sqrt{x}\sin(\sqrt{xy})}{2\sqrt{y}}\right.$$

$$\left. + \cos(\sqrt{x}) - \cos(\sqrt{xy})\right].$$

(E. Catalan; Mélanges mathématiques, t. I, p. 327, 1885).

9 Проблем

Дата је једна цела функција n-тог *степена*

$$f(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \cdots + A_n,$$

и $n+1$ *произвољних количина:* $a_0, a_1, \cdots, a_n$; *одредити сачиниоце* $B_0, B_1, \cdots, B_n$ *у реду*

$$(1)\quad f(x)=B_0 f(x-a_0)+B_1 f'(x-a_0-a_1)+B_2 f''(x-a_0-a_1-a_2)+\cdots$$
$$\cdots+B_n f^{(n)}(x-a_0-a_1-\cdots-a_n).$$

(J. C. Glashan).

Први начин. Диференцијалимо n пута задату једначину под (1) па ћемо добити:

$$f'(x)=B_0 f'(x-a_0)+B_1 f''(x-a_0-a_1)+\cdots+B_{n-1} f^{(n)}(x-a_0-a_1-\cdots-a_{n-1}),$$

$$f''(x)=B_0 f''(x-a_0)+B_1 f'''(x-a_0-a_1)+\cdots+B_{n-2} f^{(n)}(x-a_0-a_1-\cdots-a_{n-2}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$f^{(n-1)}(x)=B_0 f^{(n-1)}(x-a_0)+B_1 f^{(n)}(x-a_0-a_1),$$

$$f^{(n)}(x)=B_0 f^{(n)}(x-a_0).$$

Узев у обзир систем ових једначина, ми ћемо моћи постепено одредити вредности сачинилаца: B_0, B_1, B_2, $\cdots$. Оне су, нужно, независне од x. Може се дати, ако се хоће, количини x ма каква вредност.

Други начин. Краткоће ради, ставимо

$$x-a_0=x_1,\quad x-a_0-a_1=x_2,\ \cdots.$$

Taylor-ов образац даје

$$f(x)=f(x_1+a_0)=f(x_1)+a_0 f'(x_1)+\frac{a_0^2}{1\cdot 2}f''(x_1)+\cdots,$$

$$f'(x_1)=f'(x_2+a_1)=f'(x_2)+a_1 f''(x_2)+\frac{a_1^2}{1\cdot 2}f'''(x_2)+\cdots,$$

$$f''(x_1)=f''(x_2+a_1)=f''(x_2)+a_1 f'''(x_2)+\frac{a_1^2}{1\cdot 2}f^{\mathrm{IV}}(x_2)+\cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Према томе

$$f(x) = f(x_1) + a_0 f'(x_2) + \left[a_0 a_1 + \frac{a_0^2}{1 \cdot 2}\right] f''(x_2) + \cdot \cdot \cdot$$

Развимо сада функције

$$f''(x_2) = f''(x_3 + a_2), \quad f'''(x_2) = f'''(x_3 + a_2), \cdot \cdot \cdot$$

по степенима од a_2; имаћемо, за прва три члана реда за $f(x)$,

$$f(x_1) + a_0 f'(x_2) + \left[a_0 a_1 + \frac{a_0^2}{1 \cdot 2}\right] f''(x_3).$$

Откуда видимо да је

$$B_0 = 1, \quad B_1 = a_0, \quad B_2 = a_0 a_1 + \frac{a_0^2}{1 \cdot 2}.$$

Продужујући тако, ми ћемо постепено наћи B_3, B_4, ... Вредности од B_0, B_1, B_2, . . ., не зависе од A_0, A_1, A_2, . . .; ми их можемо дакле одредити узев специјални случај за функцију $f(x)$. Узмимо, нпр., $f(x) = x^n$; тада ћемо имати једначину

$$x^n = B_0(x + b_0)^n + n B_1 (x + b_1)^{n-1}$$
$$+ n(n-1) B_2 (x + b_2)^{n-2} + \cdot \cdot \cdot,$$

где смо са: $-b_0$, $-b_1$, $-b_2$, . . ., означили количине: a_0, $a_0 + a_1$, $a_0 + a_1 + a_2$, ... Тако ћемо наћи једначине

$$1 = B_0,$$

$$o = B_0 b_0 + B_1,$$

$$o = B_0 \frac{b_0^2}{1 \cdot 2} + B_1 b_1 + B_2,$$

$$o = B_0 \frac{b_0^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + B_1 \frac{b_1^2}{1 \cdot 2} + B_2 b_2 + B_3,$$

итд.

(Mathesis, t. IX, p. 80, 1889).

10 Проблем

Развити у ред, по растећим степенима од α, функцију

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}}.$$

Задату функцију написаћемо овако:

$$[1-\alpha(2x-\alpha)]^{-\frac{1}{2}},$$

и, ако је $|\alpha(2x-\alpha)|<1$, можемо применити биномни образац

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2+\cdots$$

$$\cdots+\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}x^n+\cdots,$$

па ћемо, под постављеним условом, добити

$$(1)\quad \frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}}=1+\frac{1}{2}\alpha(2x-\alpha)$$

$$+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\alpha^2(2x-\alpha)^2+\cdots.$$

Ставимо

$$y=|x|,\qquad \beta=|\alpha|,$$

и претпоставимо

$$\beta(2y+\beta)<1;$$

тада је ред

$$(2)\quad 1+\frac{1}{2}\beta(2y+\beta)+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\beta^2(2y+\beta)^2+\cdots$$

такође збирљив; сви су чланови положни и ми их можемо уредити по растећим степенима од β и сваки сачинилац биће један збирљив ред по y. Под истим условом, ред (1) биће апсолутно збирљив и моћи ћемо га, према томе, уредити по степенима од α:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}}=1+x\alpha+X_2\alpha^2+\cdots+X_n\alpha^n+\cdots.$$

Стављајући $X_0 = 1$, $X_1 = x$, добићемо ред

$$(3)\qquad \frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}}=X_0+X_1\alpha+X_2\alpha^2+\cdots+X_n\alpha^n+\cdots.$$

Изрази: X_0, X_1, X_2, $\cdots$, X_n, $\cdots$, познати су под именом *Legendre-ових полинома.* Ми бисмо могли наћи израз за X_n, израчунавајући постепено ове полиноме. Тако је

$$X_0 = 1,$$

$$X_1 = x,$$

$$X_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

$$X_3 = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$

$$\cdots\cdots\cdots;$$

у опште, видели бисмо да сказаљка полинома показује кога је он степена по x; тако X_n је полином n-тог степена по x. Ови полиноми играју врло важну улогу у анализи. Упутив читаоца на седам, мени до сада познатих, мемоара: *Sur les fonctions* X_n, *de Legendre, 1879—1888; par E. Catalan* и на тезу: *Notice sur la théorie de la fonction* X_n *de Legendre, 1887; par Eugène Brand,* ја ћу извести само нека својства ових полинома.

Узмимо први извод по α, једначине под (3), па ћемо имати једначину

$$\frac{x - \alpha}{(1-2\alpha x + \alpha^2)^{\frac{3}{2}}} = X_1 + 2X_2\alpha + \cdots + nX_n\alpha^{n-1} + \cdots,$$

коју ћемо моћи овако написати:

$$\frac{x - \alpha}{\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}} = (1 - 2\alpha x + \alpha^2)(X_1 + 2X_2\alpha + \cdots$$

$$\cdots + nX_n\alpha^{n-1} + \cdots),$$

или, према једначини под (3), овако:

$$(x - \alpha)(X_0 + X_1\alpha + X_2\alpha^2 + \cdots + X_n\alpha^n + \cdots)$$

$$= (1 - 2\alpha x + \alpha^2)(X_1 + 2X_2\alpha + \cdots + nX_n\alpha^{n-1} + \cdots),$$

откуда, изједначив сачиниоце од α^n, добијамо

$$xX_n - X_{n-1} = (n+1)X_{n+1} - 2nxX_n + (n-1)X_{n-1},$$

или, на послетку,

$$(4)\quad (n+1)X_{n+1} - (2n+1)xX_n + nX_{n-1} = o.$$

Пошав од почетних вредности: $X_0 = 1$, $X_1 = x$, једначина под (4), за $n = 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$, даће нам вредности за остале полиноме.

Полиноми: $X_0, X_1, \cdots, X_n, \cdots$, образују један ред Sturm-ових функција. Лако је доказати:

1°. Два узастопна полинома не могу бити равни нули, за исту вредност од x, јер бисмо, према једначини под (4), закључили да је, за ту вредност, $X_0 = 0$ што не постоји, јер је $X_0 = 1$.

2°. Ако је X_n равно нули, X_{n+1} и X_{n-1} биће супротних знакова.

3°. Једначина $X_n = 0$ има све своје корене стварне, који се находе између -1 и $+1$. И заиста, израчунајмо број значних мена изгубљених или добивених, кад се x мења од -1 до $+1$.

За $x = +1$, сви су полиноми положни и равни јединици, јер се ред под (3) своди на:

$$\frac{1}{1-\alpha} = 1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n + \cdots.$$

За $x = -1$, сви су полиноми опет равни јединици а њихови су знакови наизменце plus и minus, јер се ред под (3) своди на:

$$\frac{1}{1+\alpha} = 1 - \alpha + \alpha^2 - \alpha^3 + \cdots + (-1)^n\alpha^n + \cdots.$$

Према овоме, за $x = -1$, ред полинома $X_0, X_1, \cdots, X_n$, представља очигледно n значних мена; док, за $x = +1$, нема ниједну. Док је x порасло од -1 до $+1$, ред полинома изгубио је n значних мена, дакле X_n је прошло кроз n корена и како је тај полином n-тог степена то се његових n корена находе између -1 и $+1$.

11 Проблем

Доказати да Legendre-ови полиноми оверавају ове једначине

$$(1)\quad x\frac{dX_n}{dx} - \frac{dX_{n-1}}{dx} = nX_n,$$

$$(2)\quad \frac{dX_{n+1}}{dx} - \frac{dX_{n-1}}{dx} = (2n+1)X_n,$$

$$(3)\quad \frac{dX_{n+1}}{dx} + \frac{dX_n}{dx} = X_0 + 3X_1 + 5X_2 + \cdots + (2n+1)X_n.$$

Имамо

$$(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = X_0 + X_1\alpha + X_2\alpha^2 + \cdots + X_n\alpha^n + \cdots$$

Узмимо први извод по x ове последње једначине; наћи ћемо

$$\alpha(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\frac{3}{2}} = \alpha\frac{dX_1}{dx} + \alpha^2\frac{dX_2}{dx} + \cdots$$

$$\cdots + \alpha^n\frac{dX_n}{dx} + \cdots,$$

или

$$\alpha(X_0 + X_1\alpha + X_2\alpha^2 + \cdots + X_n\alpha^n + \cdots)$$

$$= (1-2\alpha x+\alpha^2)\left(\alpha\frac{dX_1}{dx} + \alpha^2\frac{dX_2}{dx} + \cdots + \alpha^n\frac{dX_n}{dx} + \cdots\right);$$

откуда, изједначив сачиниоце од α^{n+1}, добијамо

$$(\mathrm{I})\quad X_n = \frac{dX_{n+1}}{dx} - 2x\frac{dX_n}{dx} + \frac{dX_{n-1}}{dx}.$$

Ако једначину под (4), коју смо у претходном проблему доказали да постоји између Legendre-ових полинома, диференцијалимо по x добићемо

$$(\mathrm{II})\quad (n+1)\frac{dX_{n+1}}{dx} - (2n+1)X_n - (2n+1)x\frac{dX_n}{dx}$$

$$+ n\frac{dX_{n-1}}{dx} = 0.$$

Елиминишући, из двеју последњих једначина (I) и (II), количину $\frac{dX_{n+1}}{dx}$ добићемо једначину

$$(1)\quad x\frac{dX_n}{dx} - \frac{dX_{n-1}}{dx} = nX_n.$$

Елиминишући, из истих једначина (I) и (II), количину $\frac{dX_n}{dx}$ имаћемо

$$(2)\quad \frac{dX_{n+1}}{dx} - \frac{dX_{n-1}}{dx} = (2n+1)X_n.$$

Ако пак у овој једначини под (2) стављамо $n = 1, 2, 3, \cdots, n$ и све тако добивене једначине саберемо, добићемо

$$(3)\quad \frac{dX_{n+1}}{dx} + \frac{dX_n}{dx} = X_0 + 3X_1 + 5X_2 + \cdots + (2n+1)X_n,$$

једначину коју је, поред многих других, на особити начин извео *M. Alb. Van Biervliet; Notes sur quelques propriétés générales des fonctions* X_n; *(Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, t. 7, p. 402—408, 1882—1883).*

12 Проблем

Сказаљке α, β, γ *задовољавајући, на све могуће начине, једначину*

$$\alpha + \beta + \gamma = n,$$

имамо

$$(1)\quad \frac{dX_{n+1}}{dx} = \Sigma(X_\alpha X_\beta X_\gamma).$$

Из једначине

$$(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = X_0 + X_1\alpha + \cdots + X_n\alpha^n + \cdots,$$

диференцијалењем по x, налазимо

$$(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{dX_1}{dx} + \frac{dX_2}{dx}\alpha + \cdots$$

$$\cdots + \frac{dX_{n+1}}{dx}\alpha^n + \cdots,$$

или

$$(X_0 + X_1\alpha + X_2\alpha^2 + \cdots + X_n\alpha^n + \cdots)^3$$

$$= \frac{dX_1}{dx} + \frac{dX_2}{dx}\alpha + \cdots + \frac{dX_{n+1}}{dx}\alpha^n + \cdots.$$

Изједначив, у последњој једначини с обе стране, сачинитеље од α^n добићемо једначину под (1).

(E. Catalan).

13 Проблем

Ако 2p + 1 *непознатих:* $\alpha, \beta, \gamma, \cdots, \lambda$ *задовољавају, на све могуће начине, једначину*

$$\alpha + \beta + \gamma + \cdots + \lambda = n,$$

имаћемо

$$(1) \quad 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2p-1)\, \Sigma X_\alpha X_\beta \cdots X_\lambda = \frac{d^p X_{n+p}}{dx^p}.$$

Претходни проблем јесте један специјални случај овога. Овај ћемо проблем решити овако: узмимо једначину

$$(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_0^\infty X_n \alpha^n.$$

Ако узмемо p-ни извод по x, наћи ћемо

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdot \cdot (2p-1)\alpha^p(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\frac{2p+1}{2}}$$

$$= \sum_{o}^{\infty} \frac{d^p X_n}{dx^p}\alpha^n;$$

или, претпоставив $n \overline{\gtrless} p$,

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdot \cdot (2p-1)(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\frac{2p+1}{2}}$$

$$= \sum_{n=p}^{n=\infty} \frac{d^p X_n}{dx^p}\alpha^{n-p};$$

или још, заменив n са $n+p$,

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdot \cdot (2p-1)(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\frac{2p+1}{2}}$$

$$= \sum_{n=o}^{n=\infty} \frac{d^p X_{n+p}}{dx^p}\alpha^n.$$

Лева страна, последње једначине, равна је

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdot \cdot (2p-1)(X_0+X_1\alpha+X_2\alpha^2+\cdot \cdot \cdot$$
$$\cdot \cdot \cdot + X_\lambda \alpha^\lambda + \cdot \cdot \cdot)^{2p+1}.$$

Ако развијемо последњу степену количину, сачинитељ од α^n биће управо раван

$$\Sigma X_\alpha X_\beta \cdot \cdot \cdot X_\lambda;$$

и онда очевидно постоји једначина под (1).

(E. Catalan).

Примедба. Имали бисмо још много речи о овим полиномима, јер као што, у своме предговору ка трећем мемоару, E. Catalan вели: „... *la théorie créée par Legendre est, pour ainsi dire, inépuisable* ...... *ce qu'il reste à trouver* *l'emporte sur ce qui est connu"*. На послетку да поменем важан мемоар: *Sur une classe d'équations algébriques dont toutes les racines sont reélles, par M. Ch. Biehler; (Nouvelles annales math., t. 6, p. 9, 1887).*

14 Проблем

Наћи диференцијалну једначину коничних влакова положених у једној равни.

Једначина ове врсте коничних влакова јесте

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = o.$$

Она садржи пет параметара; диференцијалећи је пет пута, по x као независно променљиве количине, добићемо ових пет једначина:

$$cyy' + b(xy' + y) + ey' + ax + d = o,$$

$$c(yy'' + y'^2) + b(xy'' + 2y') + ey'' + a = o,$$

$$c(yy''' + 3y'y'') + b(xy''' + 3y'') + ey''' = o,$$

$$c(yy^{\mathrm{IV}} + 4y'y''' + 3y''^2) + b(xy^{\mathrm{IV}} + 4y''') + ey^{\mathrm{IV}} = o,$$

$$c(yy^{\mathrm{V}} + 5y'y^{\mathrm{IV}} + 10y''y''') + b(xy^{\mathrm{V}} + 5y^{\mathrm{IV}}) + ey^{\mathrm{V}} = o.$$

Елиминација количина: b, c, e, између трију последњих једначина, даје нам тражену диференцијалну једначину:

$$\begin{vmatrix} yy''' + 3y'y'' & xy''' + 3y'' & y''' \\ yy^{\mathrm{IV}} + 4y'y''' + 3y''^2 & xy^{\mathrm{IV}} + 4y''' & y^{\mathrm{IV}} \\ yy^{\mathrm{V}} + 5y'y^{\mathrm{IV}} + 10y''y''' & xy^{\mathrm{V}} + 5y^{\mathrm{IV}} & y^{\mathrm{V}} \end{vmatrix} = o,$$

или, упростив је,

$$y'' \begin{vmatrix} 0 & 3y'' & y''' \\ 3y'' & 4y''' & y^{IV} \\ 10y''' & 5y^{IV} & y^{V} \end{vmatrix} = 0;$$

или, на послетку развијајући детерминанту и узев уобичајена означења,

$$9\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 \frac{d^5y}{dx^5} - 45\,\frac{d^2y}{dx^2}\,\frac{d^3y}{dx^3}\,\frac{d^4y}{dx^4} + 40\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^3 = 0;$$

једначина коју смо добили на 208 страни. *(P. Puiseux; Leçons de Cinématique, p. 58, 1890).*

15 Проблем

Наћи ког је реда функција

$$f(x) = \operatorname{tang} x - \sin x,$$

за x *бесконачно мало.*

Правила, помоћу којих се изналазе праве вредности израза привидне неодређености, могу послужити за одредбу инфинитезималног реда једне дате функције f(x), бесконачно мале или бесконачно велике. За то, требаће поделити функцију са α^n, где је α основица система бесконачно малих или бесконачно великих, и тражити праву вредност од $\frac{f(x)}{\alpha^n}$, одредивши n тако да та права вредност буде коначна, или бар да буде равна нули или бесконачна за сваку другу вредност изложиоца као и за n.

Према овоме имамо

$$\lim \frac{\operatorname{tang} x - \sin x}{x^n} = \lim\left(\frac{\operatorname{tang} x}{x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^{n-1}}\right)$$

$$= \lim \frac{\operatorname{tang} x}{x} \cdot \lim \frac{1 - \cos x}{x^{n-1}} = \lim \frac{1 - \cos x}{x^{n-1}}$$

$$= \lim \frac{\sin x}{(n-1)\, x^{n-2}} = \lim \frac{\cos x}{(n-1)(n-2)\, x^{n-3}},$$

количину која постаје коначна за $n = 3$. Дакле је задата функција $f(x) = \operatorname{tang} x - \sin x$ бесконачно мала количина трећег реда. *(Cours de calcul infinitésimal, par J. Hoüel, t. I, p. 342, 1878).*

16 Проблем

Наћи ког је реда функција

$$f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{\sin x},$$

за x *бесконачно мало.*

Нека је δ, у исто време као и x, бесконачно мало; имамо

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{\sin x}}{x^n} = \frac{x - \sin x}{x^n(\sqrt{x} + \sqrt{\sin x})} = \frac{\frac{1}{6} x^3 (1 + \delta)}{\left(1 + \sqrt{\frac{\sin x}{x}}\right) x^{n + \frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{1}{6} \, \frac{1 + \delta}{\left(1 + \sqrt{\frac{\sin x}{x}}\right) x^{n - \frac{5}{2}}},$$

количину која, за $x = 0$, има једну коначну границу, кад се узме $n = \frac{5}{2}$. Дакле је задати израз $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{\sin x}$ бесконачно мали $\frac{5}{2}$-ога реда.

17 Проблем

Разделити айсолутни број a *на два дела, тако да йроизвод из четвртог стейена једног дела и седмог стейена другог дела буде maximum.*

Број a разделиһемо на делове: x и a — x. Према томе имаһемо да нађемо maximum функције

$$(1)\quad y = x^4(a - x)^7.$$

Наћи һемо

$$(2)\quad \frac{dy}{dx} = 4x^3(a - x)^7 - 7x^4(a - x)^6.$$

Видимо да $\frac{dy}{dx}$ постаје нула за $x = a$ и $x = o$; али, за ниједну од ових вредности x-a, немамо ни maximnm ни minimum функције y.

Из једначине под (2) следује даље, да је $\frac{dy}{dx} = o$, када је

$$4(a - x) - 7x = o,$$

или

$$4a - 11x = o,$$

откуда

$$(3)\quad x = \frac{4}{11}a.$$

За ову вредност x-a мора наступити maximum функције y. Према томе maximum функције $y = x^4(a - x)^7$ дат је једначином

$$(4)\quad y_{max.} = \left(\frac{4}{11}a\right)^4\left(\frac{7}{11}a\right)^7.$$

18 Проблем

Дат је ма какав круг O, наћи maximum површине која се находи између полупречника OA, двеју паралелних повучених кроз O и A, и обухваћеног лука овим паралелним.

Нека су M и N тачке у којима паралелне повучене кроз O и A секу круг, α угао NAO, $f(\alpha)$ површина NAOM. Троугао AON и исечак NOM имају, наизменце, за мере $\frac{1}{2}R^2\sin 2\alpha$, $\frac{1}{2}R^2\alpha$; дакле

$$2f(\alpha) = R^2(\sin 2\alpha + \alpha).$$

Услов maximum-a даје $f'(\alpha) = 0$, или

$$\cos 2\alpha = -\frac{1}{2}, \quad \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

Лако је доказати да је $f''\left(\frac{\pi}{3}\right)$ одречно. Тетиве AN и NM једнаке су са полупречником.

19 Проблем

Дата су два круга O и O', од којих други за пречник има полупречник OA првога. Повући кроз O и A, на исту страну од OA, две паралелне такве да површина, која се налази између ових правих и обухваћених лукова на овим двама круговима, буде maximum.

Нека су MN, ON' два обухваћена лука, α угао MAO, R полупречник OA, $f(\alpha)$ површина MNN'O, O' средина од AO. Лако ћемо наћи:

$$\text{троугао AON} = \frac{1}{2}R^2\sin 2\alpha, \quad \text{исечак MON} = \frac{1}{2}R^2\alpha,$$

$$\text{троугао } AO'N' = \frac{1}{8} R^2 \sin 2\alpha, \quad \text{исечак } OO'N' = \frac{1}{4} R^2 \alpha;$$

откуда

$$8 f(\alpha) = 3 R^2 \sin 2\alpha + 2 R^2 \alpha.$$

Услов maximum-а $f'(\alpha) = o$, даје

$$\cos 2\alpha = -\frac{1}{3}, \quad \alpha - 54^\circ 58',$$

ова вредност од α чини $f''(\alpha)$ одречним.

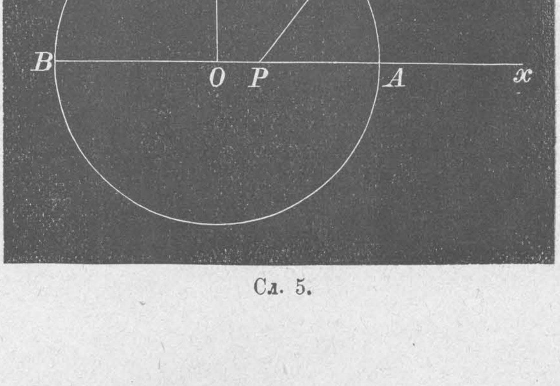
Пројекција од N на OA дели OA у односу 1 : 2.

(Mathesis, t. II, p. 21—23, 1882).

20 Проблем

Наћи, на периферији AB, *једну тачку чије је одстојање од дате тачке* P *maximum или minimum.*

Очевидно је да су B и A тражене тачке. При свем том, обично правило води другом резултату.



Сл. 5.

Нека су: $OA = a$, $OP = c$, $PM = u$; (сл. 5).

Имамо

$$u^2 = (x - c)^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 = a^2;$$

откуда

$$u^2 = a^2 + c^2 - 2cx.$$

Ако ставимо $\frac{du}{dx}$ равно нули, наћи ћемо да је $c = o$; што нема смисла, и отуда бисмо, *са разлогом*, закључили да функција $a^2 + c^2 - 2cx$ нема ни maximum ни minimum. Међу тим она их има. Ову тешкоћу опазио је *M. Liouville (Liouville journal de Mathématiques, t. 7, p. 163, 1842).* Да бисмо отклонили овај парадокс, треба увидети да ова функција није *идентична* са оном чији maximum или minimum тражимо. И заиста, према самој природи проблема, ми видимо да променљива количина x није са свим произвољно-променљива; она се мора находити између $-a$ и $+a$. Кад се x мења од $-a$ до $+a$, функција u^2 равна је $a^2 + c^2 - 2cx$; али, кад се x мења ван ових граница, *она не постоји више.* Ако ставимо $\varphi(x) = a^2 + c^2 - 2cx$, не можемо рећи да је разлика $\varphi(a + h) - \varphi(a)$ *независна од знака од* h, пошто h може бити *само одречно.* Отуда следује да, ако посматрамо, нпр., крајну тачку A, нећемо добити суседне тачке стављајући $x = a \pm h$; што се, у теорији о maximum-у и minimum-у, претпостављало.

Да бисмо се послужили обичном теоријом, *E. Catalan (Cours d'Analyse, p. 448, 1879)* замењује x једном произвољно-променљивом количином.

Нека је, нпр., $x = c + u\cos\omega$. Тада је

$$u^2 + 2cu\cos\omega + c^2 - a^2 = o.$$

Отуда добијамо:

$$(u + c\cos\omega)u' - cu\sin\omega = o,$$

$$(u + c\cos\omega)u'' + u'^2 - 2cu'\sin\omega - cu\cos\omega = o.$$

Једначина $u' = o$ даје $\sin\omega = o$, тј. $\omega = o$, $\omega = \pi$. У исто време је

$$u'' = \frac{cu\cos\omega}{u + c\cos\omega}.$$

$$1^o. \quad \text{За } \omega = o, \quad u'' = \frac{cu}{u + c} > o: \text{ minimum};$$

$$2^o. \quad \text{За } \omega = \pi, \quad u'' = \frac{-cu}{u - c} < o: \text{ maximum};$$

што је тачно.

На послетку, да напоменемо да је Liouville, у реченом мемоару, третирао и онај случај овога проблема, кад бисмо за x осу узели ма какву другу праву а не OP.

21 Проблем

Проучити мену волумена једног правог кружног цилиндра чија је тотална површина константна.

Означимо са x полупречник базиса, са y висину, и представимо са $2\pi a^2$ дату тоталну површину, па ћемо имати однос

$$2\pi x^2 + 2\pi xy = 2\pi a^2,$$

или још простије

$$(1) \quad x^2 + xy = a^2.$$

Волумен V цилиндра дат је једначином

$$V = \pi x^2 y,$$

и ако заменимо количину y његовом вредношћу $y = \dfrac{a^2 - x^2}{x}$, из једначине под (1), имаћемо

$$V = \pi x(a^2 - x^2) = \pi(a^2x - x^3);$$

и V је функција независно-променљиве x.

Пошто вредности од x и y морају остати положне, полупречник x базиса мењаће се само од o до a. Кад се x мења од o до a, видимо да се волумен мења од нуле до нуле, прелазећи кроз један низ коначних и положних вредности; почиње да расте па опада за тим, и према томе извесно пролази кроз један maximum. Да бисмо потпуније проучили мену функције V, узмимо њен први извод

$$V' = \pi(a^2 - 3x^2) = 3\pi\left(\frac{a^2}{3} - x^2\right).$$

Први је извод положан за положне вредности x-са и мање од $\frac{a}{\sqrt{3}}$, одречан за вредности x-са веће од $\frac{a}{\sqrt{3}}$. Ако дакле x расте од o до $\frac{a}{\sqrt{3}}$, волумен ће расти од нуле до једне извесне вредности maximum; ахо x за тим расте од $\frac{a}{\sqrt{3}}$ до a, волумен ће опадати од овог maximum-а до нуле.

За $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$, имамо $y = \frac{2a}{\sqrt{3}}$. Дакле, између свију цилиндара, који имају исту тоталну површину, највећи је онај чија је висина равна пречнику базиса.

22 Проблем

Проучити мену тоталне површине једног правог кружног цилиндра уписатог у датој сфери.

Означимо са x полупречник базиса, са 2y висину цилиндра, имамо

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

$$S = 2\pi x^2 + 4\pi xy;$$

откуда

$$S = 2\pi(x^2 + 2x\sqrt{r^2 - x^2}).$$

Полупречник x може се мењати од o до r. Функција S, коју хоћемо да проучимо, има за први извод

$$S' = \frac{4\pi[x\sqrt{r^2 - x^2} + (r^2 - 2x^2)]}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Кад x расте од о до $\frac{r}{\sqrt{2}}$, први је извод положан и функција S расте од о до $3\pi r^2$. Нека сада x расте од $\frac{r}{\sqrt{2}}$ до r; имамо

$$S' = \frac{4\pi[x\sqrt{r^2 - x^2} - (2x^2 - r^2)]}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

У загради је разлика двеју положних количина; ако помножимо и поделимо десно са сумом, добиһемо

$$S' = \frac{4\pi[x^2(r^2 - x^2) - (2x^2 - r^2)^2]}{[x\sqrt{r^2 - x^2} + (2x^2 - r^2)]\sqrt{r^2 - x^2}},$$

$$S' = \frac{4\pi(-5x^4 + 5r^2x^2 - r^4)}{[x\sqrt{r^2 - x^2} + (2x^2 - r^2)]\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Именитељ је положан, довољно је испитати знак бројитеља, који је један цео полином другог степена по x^2. Када, у овоме полиному узет у првој својој форми, заменимо x^2 са $\frac{r^2}{2}$, добиһемо положан резултат; кад се замени x^2 са r^2, добија се одречан резултат; отуда закључујемо да су оба корена тринома релни, да је мањи корен x'^2 мањи од $\frac{r^2}{2}$ а већи корен x''^2 находи се између $\frac{r^2}{2}$ и r^2. Имамо дакле

$$S' = \frac{-20\pi(x^2 - x'^2)(x^2 - x''^2)}{[x\sqrt{r^2 - x^2} + (2x^2 - r^2)]\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Кад се x мења од $\frac{r}{\sqrt{2}}$ до x'', први је извод положан, и функција продужава расти од $3\pi r^2$ до једне вредности maximum; за тим, x мењајући се од x'' до r, први извод одречан је, и функција опада од вредности maximum до $2\pi r^2$. Maximum површине дат је вредношћу

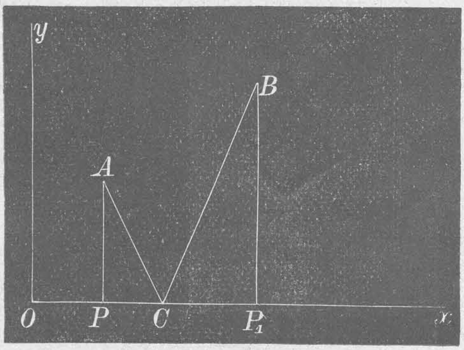
$$x = x'' = r\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}.$$

Примедба. Читалац ће наћи у: *Leçons d'Algèbre, par Ch. Briot, p. 172—182, t. II, 1885,* већи број сличних проблема, откуда су овај и претходни проблем и позајмљени.

23 Проблем

Наћи у равни најкраћи пут од једне тачке A *до тачке* B *пролазећи преко дате праве; обе тачке* A *и* B *находе се на једној истој страни од дате праве.*

Узмимо дату праву за x осу, а једну управну за y осу. Нека су a и p координате тачке A, координате тачке B моћи ћемо представити са $a + l$ и q, означавајући са l одстојање тачака A и B рачунато паралелно са x осом. Тражени пут



Сл. 6.

састоји се из једне линије преломљене на x оси; нека је $a + x$ апсциса тачке C (сл. 6) у којој тражени најкраћи пут сече x осу; количина, коју имамо да учинимо minimum, јесте

$$(1) \quad \sqrt{p^2 + x^2} + \sqrt{q^2 + (l - x)^2}.$$

Да бисмо нашли minimum овог израза, ставимо његов извод по x раван нули; имаћемо

$$(2) \quad \frac{x}{\sqrt{p^2 + x^2}} - \frac{l - x}{\sqrt{q^2 + (l - x)^2}} = o.$$

Није нужно да решавамо ову једначину по x; ми видимо да две праве AC и BC, из којих се састоји тражени пут, граде се датом правом (x осом) угле чији су косинуси једнаки, и према томе: *најкраћи тражени пут преломљен је тако да његова два дела граде једнаке угле са датом правом.*

Други извод израза под (1) јесте

$$\frac{p^2}{(p^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{q^2}{[q^2 + (l - x)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

тј. положан; она вредност за x, добивена из једначине под (2), даће заиста, као што смо и могли очекивати, један minimum [у ствари, једначина под (2) даће две вредности за x, учинив да ишчезну корене количине, али тиче се само вредности за коју су корени положни, и за коју је $a < x < a + l$, ако се претпостави, нпр., a и $l > o$].

24 Проблем

Наћи најкраће одстојање једне тачке P *од праве* D.

Нека су x_0, y_0, z_0 координате тачке P; нека су x_1, y_1, z_1 координате једне фиксне тачке произвољно узете на правој; нека су α, β, γ косинуси углова које она гради са осама. Координате x, y, z једне тачке положене на правој на одстојању t од тачке x_1, y_1, z_1, очевидно, биће

$$x = x_1 + \alpha t, \quad y = y_1 + \beta t, \quad z = z_1 + \gamma t,$$

а њено одстојање δ од тачке **P** биће дато формулом

$$\delta^2 = (x_1 + \alpha t - x_0)^2 + (y_1 + \beta t - y_0)^2 + (z_1 + \gamma t - z_0)^2$$
$$= \Sigma (x_1 + \alpha t - x_0)^2.$$

Треба одредити променљиво одстојање t, тако да тај израз буде minimum.

Први је извод $\Sigma 2\alpha (x_1 + \alpha t - x_0)$, количина увек непрекидна. Треба дакле ставити тај извод раван нули, што ће дати

$$\Sigma\alpha (x_1 - x_0) + \Sigma\alpha^2 t = 0,$$

откуда

$$t = -\frac{\Sigma\alpha (x_1 - x_0)}{\Sigma\alpha^2}.$$

Заменимо ову вредност од t у изразу

$$\delta^2 = \Sigma (x_1 + \alpha t - x_0)^2$$
$$= \Sigma (x_1 - x_0)^2 + 2t\,\Sigma\alpha (x_1 - x_0) + t^2\,\Sigma\alpha^2,$$

па ћемо добити

$$\delta^2 = \Sigma (x_1 - x_0)^2 - 2\frac{[\Sigma\alpha (x_1 - x_0)]^2}{\Sigma\alpha^2}$$
$$+ \frac{[\Sigma\alpha (x_1 - x_0)]^2}{\Sigma\alpha^2}$$
$$= \frac{\Sigma (x_1 - x_0)^2\,\Sigma\alpha^2 - [\Sigma\alpha (x_1 - x_0)]^2}{\Sigma\alpha^2}$$

$$= \frac{[(x_1-x_0)\beta-(y_1-y_0)\alpha]^2+[(y_1-y_0)\gamma-(z_1-z_0)\beta]^2+[(z_1-z_0)\alpha-(x_1-x_0)\gamma]^2}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}.$$

Овај израз представља одиста један minimum, јер је други извод

$$\frac{d^2\delta^2}{dt^2} = 2\,\Sigma\alpha^2$$

положан.

25 Проблем

Наћи maximum и minimum функције

$$u^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

претпоставив

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > b > c.$$

Елиминисањем z^2 имамо

$$u^2 = \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)x^2 + \left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right)y^2 + c^2;$$

за тим

$$x = o, \quad y = o, \quad u = + c.$$

Ова вредност потега јесте minimum. И заиста, ако узмемо друге изводе, налазимо

$$u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 1 - \frac{c^2}{a^2}, \quad u\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = o, \quad u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1 - \frac{c^2}{b^2};$$

дакле

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} > o, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} > o, \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} < o.$$

Ако бисмо елиминисали x^2, на исти начин, нашли бисмо

$$y = o, \quad z = o, \quad u = + a;$$

и ова вредност функције u јесте maximum. Најзад елиминацијом y^2 долазимо до

$$x = o, \quad z = o, \quad u = + b;$$

ова вредност функције u није ни maximum ни minimum. Она даје

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{b}\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{b}\left(1 - \frac{b^2}{c^2}\right).$$

Дакле

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} > 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} < 0.$$

Примедба. У овом врло простом проблему, требало је, да не бисмо из вида изгубили ниједно разрешење, стављати вредност од u^2 у виду трију различних форми.

(E. Catalan; Cours d'Analyse, p. 454, 1879).

26 Проблем

Проучити мене односа између суме површина тангенцијалних кругова на стране једног троугла и површине круга описатог око истог троугла.

Нека су r, r_a, r_b, r_c полупречници тангенцијалних кругова, R полупречник описатог круга; имамо

$$r_a = p \operatorname{tang}\frac{A}{2}, \quad r_b = p \operatorname{tang}\frac{B}{2}, \quad r_c = p \operatorname{tang}\frac{C}{2}, \quad r = (p-c) \operatorname{tang}\frac{C}{2}.$$

Из образаца

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

закључујемо да је

$$2R = \frac{a + b + c}{\sin A + \sin B + \sin C} = \frac{a + b - c}{\sin A + \sin B - \sin C},$$

или

$$4R = \frac{p}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = \frac{p-c}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}};$$

а отуда следује

$$r_a = 4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2},$$

$$r_b = 4R\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2},$$

$$r_c = 4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},$$

$$r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Ако дакле означимо са V однос $\dfrac{\pi r_a^2 + \pi r_b^2 + \pi r_c^2 + \pi r^2}{\pi R^2}$, имаћемо

$$\frac{1}{16}V = \sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2} + \cos^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}$$

$$+ \cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2} + \sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}.$$

Заменив синусе и косинусе полу-углова њиховим вредностима у функцији косинуса углова, и сводећи, налазимо

$$\frac{1}{8}V = 1 - \cos A\cos B\cos C,$$

или

$$(1) \quad \frac{1}{8}V = 1 + \cos A\cos B\cos(A + B).$$

Таква је функција, двеју независно-променљивих количина, коју треба проучити; њени први и други изводи биће:

$$
(2)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{1}{8}\frac{\partial V}{\partial A} &= -\quad \cos B \sin(2A + B),\\
\frac{1}{8}\frac{\partial V}{\partial B} &= -\quad \cos A \sin(2B + A);\\
\frac{1}{8}\frac{\partial^2 V}{\partial A^2} &= -2\cos B \cos(2A + B),\\
\frac{1}{8}\frac{\partial^2 V}{\partial A \partial B} &= -\quad \cos(2A + 2B),\\
\frac{1}{8}\frac{\partial^2 V}{\partial B^2} &= -2\cos A \cos(2B + A).
\end{aligned}\right.
$$

Ставимо сада $\frac{\partial V}{\partial A} = 0$, $\frac{\partial V}{\partial B} = 0$, или, што је исто,

$$\cos B \sin(2A + B) = 0,$$

$$\cos A \sin(A + 2B) = 0.$$

Претпоставке:

$\cos B = 0$ и $\cos A = 0$. или $A = B = \frac{\pi}{2}$,

$\cos B = 0$ и $\sin(A + 2B) = 0$, или $A = 0$, $B = \frac{\pi}{2}$,

$\cos A = 0$ и $\sin(2A + B) = 0$, или $A = \frac{\pi}{2}$, $B = 0$,

не могу се дозволити; остају само

$$\sin(2A + B) = 0 \quad \text{и} \quad \sin(A + 2B) = 0.$$

Морамо дакле имати:

$$2A + B = \pi \quad \text{и} \quad A + 2B = \pi,$$

или

$$2A + B = 0 \quad \text{и} \quad A + 2B = 0,$$

или још

$$2A + B = \pi \quad \text{и} \quad A + 2B = 2\pi.$$

Први од ових услова дају

$$A = B = C = \frac{\pi}{3},$$

троугао је дакле равностран; последњи воде ка:

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = \pi,$$

$$A = 0, \quad B = \pi, \quad C = 0,$$

тј. да троугао има своје три стране у правој линији. Ми можемо да се ограничимо на ова два резултата:

$$(3) \quad A = B = C = \frac{\pi}{3},$$

$$(4) \quad A = 0, \quad B = 0, \quad C = \pi.$$

Тражимо да ли сваки од њих одговара maximum-у или minimum-у функције V. За вредности под (3), од A, B и C, имамо

$$\frac{1}{8}\frac{\partial^2 V}{\partial A^2} = 1, \quad \frac{1}{8}\frac{\partial^2 V}{\partial A \partial B} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{8}\frac{\partial^2 V}{\partial B^2} = 1;$$

имамо дакле

$$\frac{\partial^2 V}{\partial A^2} > 0, \quad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial A \partial B}\right)^2 - \frac{\partial^2 V}{\partial A^2}\frac{\partial^2 V}{\partial B^2} < 0.$$

Имамо дакле minimum; дакле однос V јесте minimum када је троугао равностран, и тада је његова вредност 7.

За вредности под (4), од A и B, имамо

$$\frac{1}{8}\frac{\partial^2 V}{\partial A^2} = -2, \quad \frac{1}{8}\frac{\partial^2 V}{\partial A \partial B} = -1, \quad \frac{1}{8}\frac{\partial^2 V}{\partial B^2} = -2.$$

Услови $\frac{\partial^2 V}{\partial A^2} < 0$, $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial A \partial B}\right)^2 - \frac{\partial^2 V}{\partial A^2}\frac{\partial^2 V}{\partial B^2} < 0$ испуњени су; и ми имамо maximum. Дакле, maximum односа V имаћемо кад су три стране троуглове положене на исту праву, и он је раван 16.

Можемо приметити да је, за ма какав правоугли троугао, $V = 8$.

Из свега овога изводимо: сума површина тангенцијалних кругова на стране једног троугла увек је већа од седам пута површине описатог круга, а мања од шеснаест пута ове површине.

27 Проблем

Проучити мене односа између суме периферија тангенцијалних кругова на стране једнога троугла и периферије описатог круга око истог троугла.

Нека је U однос $\frac{2\pi r_a + 2\pi r_b + 2\pi r_c + 2\pi r}{2\pi R}$; имаћемо

$$\frac{1}{4} U = \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$+ \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Лаким трансформацијама налазимо

$$\frac{1}{4} U = 1 + 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},$$

или

$$\frac{1}{4} U = 1 + 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A+B}{2}.$$

То је функција двеју промењивих A и B, чије ћемо мене проучити. Њени делимички изводи јесу:

$$\frac{1}{4}\frac{\partial U}{\partial A} = \sin\frac{B}{2}\cos\frac{2A+B}{2},$$

$$\frac{1}{4}\frac{\partial U}{\partial B} = \sin\frac{A}{2}\cos\frac{A+2B}{2};$$

$$\frac{1}{4}\frac{\partial^2 U}{\partial A^2} = -\sin\frac{B}{2}\sin\frac{2A+B}{2},$$

$$\frac{1}{4}\frac{\partial^2 U}{\partial A\partial B} = \frac{1}{2}\cos(A+B),$$

$$\frac{1}{4}\frac{\partial^2 U}{\partial B^2} = -\sin\frac{A}{2}\sin\frac{A+2B}{2}.$$

Ставимо $\dfrac{\partial U}{\partial A} = 0$, $\dfrac{\partial U}{\partial B} = 0$, тј. ставимо

$$\sin\frac{B}{2}\cos\frac{2A+B}{2} = 0,$$

$$\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A+2B}{2} = 0,$$

или још

$$\sin(A+B) = \sin A,$$

$$\sin(A+B) = \sin B,$$

тј.

$$\sin A = \sin B = \sin C.$$

Ове једначине траже да три угла A, B, C буду једнаки међу собом или да два од њих буду равни нули, а трећи раван π; ми ћемо имати дакле да посматрамо само ова два случаја:

$$(1)\quad A = B = \frac{\pi}{3},$$

$$(2)\quad A = B = 0.$$

У првом случају, вредности других извода $\frac{1}{4}\frac{\partial^2 U}{\partial A^2} = -\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}\frac{\partial^2 U}{\partial A\,\partial B} = -\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}\frac{\partial^2 U}{\partial B^2} = -\frac{1}{2}$ оверавају услове: $\frac{\partial^2 U}{\partial A^2} < o$ и $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial A\,\partial B}\right)^2 - \frac{\partial^2 U}{\partial A^2}\frac{\partial^2 U}{\partial B^2} < o$. Имамо дакле један maximum. Дакле, однос U је највећи када је троугао равностран, и тада је његова вредност 5.

Испитајмо претпоставку под (2); налазимо

$$\frac{1}{4}\frac{\partial^2 U}{\partial A^2} = o, \quad \frac{1}{4}\frac{\partial^2 U}{\partial A\,\partial B} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}\frac{\partial^2 U}{\partial B^2} = o;$$

тако да, ако h и k означују прираштаје од A и B, мена од U биће истог знака као $hk\frac{\partial^2 U}{\partial A\,\partial B} = 2hk$. Она може дакле бити, по вољи, положна или одречна; према томе немамо ни maximum ни minimum.

При свем том важно је приметити да углови A и B троугла не могу бити одречни; дакле h и k су увек положни, и члан $hk\frac{\partial^2 U}{\partial A\,\partial B}$ јесте увек положан; дакле, узев $A = o$ и $B = o$, имамо један релативни minimum.

Из овога изводимо: сума периферија тангенцијалних кругова на стране једног троугла увек је већа од четири пута периферије описатог круга, а мања од пет пута ове периферије.

28 Проблем

Наћи maximum и minimum функције

$$U = (a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma)^2$$
$$+ (a\sin\alpha + b\sin\beta + c\sin\gamma)^2,$$

у којој a, b, c *означавају дате положне бројеве, и* α, β, γ *промењљиве углове.*

Ми ћемо написати

$$U = a^2 + b^2 + c^2 + 2bc\cos(\beta - \gamma) + 2ca\cos(\gamma - \alpha) + 2ab\cos(\alpha - \beta),$$

и, ставив $\beta - \gamma = x$, $\gamma - \alpha = y$, отуда следоваће

$$\beta - \alpha = x + y,$$

$$(1) \quad U = a^2 + b^2 + c^2 + 2\,Vabc;$$

стављајући још

$$(2) \quad V = \frac{\cos x}{a} + \frac{\cos y}{b} + \frac{\cos(x + y)}{c}.$$

Ми имамо сада да тражимо maximum или minimum функције V, функције двеју независно промењљивих количина. Први и други делимички изводи њени јесу:

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= -\frac{\sin x}{a} - \frac{\sin(x + y)}{c}, \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= -\frac{\sin y}{b} - \frac{\sin(x + y)}{c}; \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= -\frac{\cos x}{a} - \frac{\cos(x + y)}{c}, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} &= \qquad\quad - \frac{\cos(x + y)}{c}, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= -\frac{\cos y}{b} - \frac{\cos(x + y)}{c}. \end{aligned} \right.$$

Једначине $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$ и $\frac{\partial V}{\partial y} = 0$, биће

$$
(4)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\sin x}{a} + \frac{\sin(x+y)}{c} = 0,\\
&\frac{\sin y}{b} + \frac{\sin(x+y)}{c} = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Тражимо разрешења једначина под (4); одмах се увиђају ова:

$$
\begin{aligned}
x &= 0, & y &= 0,\\
x &= 0, & y &= \pi,\\
x &= \pi, & y &= 0,\\
x &= \pi, & y &= \pi.
\end{aligned}
$$

Ми се нећемо бавити са оним разрешењима у којима је x или y веће од 2π, пошто се функција V не мења кад се x и y замену са $2\pi + x$ и $2\pi + y$.

Нађимо остала разрешења једначина под (4); прва од тих једначина може се написати

$$
(c + a\cos y)\sin x + a\sin y\cos x = 0,
$$

или

$$
\frac{\sin x}{-a\sin y} = \frac{\cos x}{c + a\cos y},
$$

и, лаким комбинацијама, имајући у виду другу од једначина под (4), образоваћемо ове односе:

$$
(5)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\sin x}{-a\sin y} = \frac{\cos x}{c + a\cos y}\\
&= \frac{\pm 1}{\sqrt{a^2 + c^2 + 2ac\cos y}} = \frac{\sin(x+y)}{c\sin y} = -\frac{1}{b}.
\end{aligned}
\right.
$$

Отуда изводимо

$$b^2 = a^2 + c^2 + 2ac\cos y,$$

$$-\cos y = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$$

Да се ова вредност од $\cos y$ може дозволити, треба да, са трима дужинама a, b, c као стране, можемо образовати један троугао. Нека су A, B, C углови тога троугла; имаћемо

$$y = \pi - B \quad \text{или} \quad y = \pi + B.$$

Узмимо најпре $y = \pi - B$; имаћемо, по формулама под (5),

$$\frac{\sin x}{-a\sin B} = \frac{\cos x}{c - a\cos B} = -\frac{1}{b},$$

$$\sin x = \frac{a}{b}\sin B = \sin A;$$

дакле

$$x = A \quad \text{или} \quad x = \pi - A.$$

Не можемо имати $x = A$, јер би однос $\dfrac{\cos x}{c - a\cos B}$ постао $\dfrac{\cos A}{c - a\cos B}$ или $\dfrac{1}{b}$, услед $c = a\cos B + b\cos A$, а овај однос мора бити раван $-\dfrac{1}{b}$; ми имамо дакле $x = \pi - A$ и $y = \pi - B$. Са $y = \pi + B$, наћи ћемо да треба узети $x = \pi + A$; имамо дакле ових шест разрешења:

$$1^\circ \quad x = 0 \quad \text{и} \quad y = 0,$$

$$2^\circ \quad x = 0 \quad \text{и} \quad y = \pi,$$

$$3^\circ \quad x = \pi \quad \text{и} \quad y = 0,$$

$$4^\circ \quad x = \pi \quad \text{и} \quad y = \pi,$$

$$5^\circ \quad x = \pi - A \quad \text{и} \quad y = \pi - B,$$

$$6^\circ \quad x = \pi + A \quad \text{и} \quad y = \pi + B.$$

Да видимо да ли овим разрешењима одговарају maxima или minima функције V.

1°. Прво разрешење даје

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{1}{a} - \frac{1}{c}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial y} = -\frac{1}{c}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{1}{b} - \frac{1}{c};$$

оно даје места неједначинама

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} < 0, \quad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\left(\frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{ab}\right) < 0.$$

Имамо дакле за V један maximnm; овај је maximum $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, а одговарајућа вредност од U јесте

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2bc + 2ca + 2ab = (a + b + c)^2.$$

2°. Друго разрешење даје нам ове вредности за друге изводе:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{1}{a} + \frac{1}{c}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial y} = \frac{1}{c}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = +\frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Налазимо

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{1}{abc}(c + b - a).$$

Ова ће количина бити одречна ако је a веће од $b + c$, и, како је $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{a - c}{ac}$, овај ће израз бити положан; ми ћемо дакле имати један minimum. Нећемо имати ни maximum ни minimum ако је a мање од $b + c$; minimum функције V јесте $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$, а онај од U јесте

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2bc - 2ca - 2ab = (a - b - c)^2.$$

3°. Сличним рачуном нашли бисмо, претпоставив $b > a + c$, да ћемо имати један minimum; minimum вредност од U биће $(b - a - c)^2$.

4°. Ако је $c > a + b$, имаћемо један minimum; U ће бити равно $(c - a - b)^2$.

5°. Ако је $x = \pi - A$, $y = \pi - B$; наћи ћемо

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\cos A}{a} + \frac{\cos C}{c} = \frac{b}{ac},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial y} = \frac{\cos C}{c},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{a}{bc};$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = + \frac{\cos^2 C}{c^2} - \frac{1}{c^2} = - \frac{\sin^2 C}{c^2}.$$

Ова је количина одречна, а други извод $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, пошто је раван $\frac{b}{ac}$, положан; дакле имамо један minimum. Одговарајућа вредност од V јесте $-\left(\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c}\right)$, а она од U јесте

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2bc \cos A - 2ca \cos B - 2ab \cos C = 0.$$

6°. Ако је $x = \pi + A$, $y = \pi + B$; вредности других извода исте су као у претходном случају; имаћемо опет један minimum; вредност од U опет је нула; али треба приметити да два последња разрешења постоје само онда ако ниједна од страна није већа од суме осталих двеју.

Ми ћемо резимирати дискусију на:

a, b, c ма какво, $x = o$, $y = o$, maximum, $U = (a + b + c)^2$;

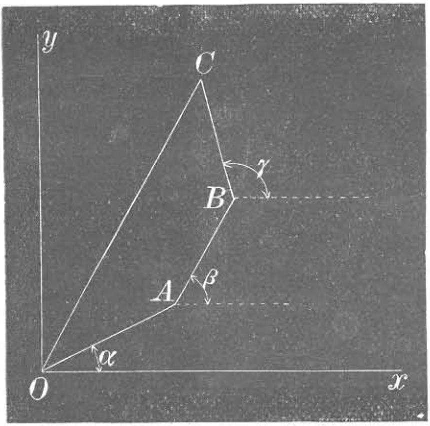
$a > b + c$ „ „ $x = o$, $y = \pi$, minimum, $U = (a - b - c)^2$;

$b > c + a$ „ „ $x = \pi$, $y = o$, „ $U = (b - a - c)^2$;

$c > a + b$ „ „ $x = \pi$, $y = \pi$, „ $U = (c - a - b)^2$;

$$\left.\begin{matrix} a < b + c \\ b < c + a \\ c < a + b \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \text{„ „} & x = \pi - A, & y = \pi - B, & \text{„} & U = o; \\ \text{„ „} & x = \pi + A, & y = \pi + B, & \text{„} & U = o. \end{matrix}$$

Овај проблем има врло прост геометријски значај. Нека је фигура OABC (сл. 7), у којој стране OA = a, AB = b,



сл. 7.

BC = c граде са x осом угле α, β, γ; координате тачке C јесу

$$a \cos \alpha + b \cos \beta + C \cos \gamma,$$

$$a \sin \alpha + b \sin \beta + C \sin \gamma;$$

и према томе имамо

$$U = \overline{OC}^2.$$

Што се тражило, то је да се нађе maximum или minimum праве OC која затвара полигон, док се стране OA, AB, BC окрећу, на све могуће начине, око тачака O, A, B, C. Видимо да ћемо одмах имати maximum од OC када су све три стране

Сл. 8.

у правој линији (сл. 8), и у том случају имамо $OC = a + b + c$. Тако исто, образујући, када је то могуће, један троугао са правима OA, AB, BC, имамо

$$OC = o,$$

и то је, очевидно, minimum од OC или од U.

Minima, која добијамо само онда када је једна страна већа од суме двеју других, одговарају случају када су тачке OABC у правој линији, у реду O, C', B', A; тада је $OC' = OA - AB' - B'C' = a - b - c$.

29 Проблем

Дате су три тачке у једној равни, наћи у тој равни једну такву тачку да сума њених одстојања од трију датих тачака буде minimum.

Овај проблем, *à priori*, има једно или више разрешења. Нека су x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 координате датих тачака, а x, y координате тражене тачке; количина, коју имамо да учинимо *minimum*, биће

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} + \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}$$
$$+ \sqrt{(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2},$$

или

$$\Sigma \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}.$$

Стављајући делимичке изводе равне нули, добићемо

$$(1) \quad \begin{cases} \Sigma \dfrac{x - x_1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}} = 0, \\[2ex] \Sigma \dfrac{y - y_1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}} = 0. \end{cases}$$

Ако означимо са α_1, α_2 и α_3 угле које одстојања тражене тачке од датих тачака граде са x осом, имаћемо, на место претходних једначина, ове:

$$\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \cos\alpha_3 = 0,$$

$$\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \sin\alpha_3 = 0.$$

Елиминишући угао α_3, добићемо

$$2 + 2(\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \sin\alpha_1 \sin\alpha_2) = 1,$$

или

$$2[1 + \cos(\alpha_1 - \alpha_2)] = 1,$$

или

$$4\cos^2 \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2) = 1,$$

или, на послетку,

$$\cos\frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{1}{2}.$$

Ова једначина каже да полу-угао O, кога граде одстојања тражене тачке од тачака x_1, y_1 и x_2, y_2, има за косинус $\frac{1}{2}$. Тај је угао, према томе, раван $\frac{\pi}{3}$; имамо дакле $O = \frac{2\pi}{3}$.

Лако је, отуда, закључити да је тражена тачка у пресеку трију сегмената од угла $\frac{2\pi}{3}$ описаних на странама троугла затвореног трима датим тачкама. Ови ће се сегменти *у опште* сећи, јер једначине под (1) *у опште* дају једно разрешење (у осталом, сума углова, таквих као O, износећи скупа $3\frac{2\pi}{3}$ или 2π, то, у опште, постоји једна тачка O, таква да, ако је саставимо са теменима једног троугла, праве тако повучене граде међу собом једнаке угле, од 120 степени).

При свем том, да се два сегмента секу, треба, као што је то лако увидети, да сваки угао троугла буде мањи од $\frac{2\pi}{3}$, јер правилне методе дају разрешење само у том случају. Али, ако посматрамо делимичке изводе количине, која има да буде minimum, одмах увиђамо да они постају неодређени за $x = x_1$ и $y = y_1$, или за $x = x_2$ и $y = y_2$, или најзад за $x = x_3$ и $y = y_3$, тј. када се за тражену тачку узме једна од датих тачака. Ја кажем да су тада делимички изводи заиста неодређени; имамо

$$\frac{x - x_1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}} = \left[1 + \left(\frac{y - y_1}{x - x_1}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}},$$

и, за $x' = x_1$ и $y = y_1$, овај је израз неодређен, јер је однос $\frac{y - y_1}{x - x_1}$ произвољан, пошто су x и y потпуно независни једно од другога.

Има места, да се запитамо сада да ли не би дате тачке одговарале траженом minimum-у, и, како проблем, очевидно, има једно разрешење, то теме, које одговара тупом углу троугла трију тачака, јесте тачка која одговара питању.

M. J. Bertrand (Liouville journal de Math., t. 8, p. 156—160, 1843) третирао је исти проблем и елементарним путем.

30 Проблем

Наћи најкраће одстојање двеју правих.

Нека су α, β, γ косинуси углова прве праве; $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ косинуси углова друге праве; нека су x_1, y_1, z_1 координате једне фиксне тачке на првој, x, y, z координате једне променљиве тачке узете на истој правој и нека је t одстојање ових двеју тачака; нека су x_2, y_2, z_2 координате једне фиксне тачке на другој, ξ, η, ζ координате једне променљиве тачке узете на истој правој и нека је τ њихово одстојање.

Имаћемо

$$(1) \quad x = x_1 + \alpha t, \quad y = y_1 + \beta t, \quad z = z_1 + \gamma t$$

координате једне тачке прве праве; тако исто

$$(2) \quad \xi = x_2 + \alpha_1 \tau, \quad \eta = y_2 + \beta_1 \tau, \quad \zeta = z_2 + \gamma_1 \tau$$

координате једне тачке друге праве.

Одстојање δ ових двеју тачака биће дато формулом

$$\delta^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2$$

$$= (x_1 - x_2 + \alpha t - \alpha_1 \tau)^2 + (y_1 - y_2 + \beta t - \beta_1 \tau)^2$$

$$+ (z_1 - z_2 + \gamma t - \gamma_1 \tau)^2.$$

Треба одредити променљиве t и τ тако да тај израз буде minimum.

Делимички изводи овог израза у односу по t и τ јесу увек непрекидни. Стављајући их равне нули, имаћемо две условне једначине

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \delta^2}{\partial t} = \alpha(x_1 - x_2 + \alpha t - \alpha_1 \tau) + \beta(y_1 - y_2 + \beta t - \beta_1 \tau)$$

$$+ \gamma(z_1 - z_2 + \gamma t - \gamma_1 \tau) = 0,$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial\delta^2}{\partial\tau} = \alpha_1(x_1 - x_2 + \alpha t - \alpha_1\tau) + \beta_1(y_1 - y_2 + \beta t - \beta_1\tau)$$
$$+ \gamma_1(z_1 - z_2 + \gamma t - \gamma_1\tau) = 0.$$

Елиминишући наизменце између ових једначина сваку од количина међу заградама, и стављајући, краткоће ради,

$$\beta\gamma_1 - \gamma\beta_1 = A, \quad \gamma\alpha_1 - \alpha\gamma_1 = A_1, \quad \alpha\beta_1 - \beta\alpha_1 = A_2,$$

добићемо

$$\frac{x_1 - x_2 + \alpha t - \alpha_1\tau}{A} = \frac{y_1 - y_2 + \beta t - \beta_1\tau}{A_1} = \frac{z_1 - z_2 + \gamma t - \gamma_1\tau}{A_2}.$$

Нека је λ заједничка вредност ових односа; имаћемо, за одредбу t, τ и λ, три линерне једначине:

$$A\lambda + \alpha_1\tau - \alpha t = x_1 - x_2,$$

$$A_1\lambda + \beta_1\tau - \beta t = y_1 - y_2,$$

$$A_2\lambda + \gamma_1\tau - \gamma t = z_1 - z_2;$$

откуда изводимо

$$\lambda = \frac{L}{D}, \qquad \tau = \frac{M}{D}, \qquad t = \frac{N}{D},$$

L, M, N, D означавајући ове детерминанте:

$$L = \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & \alpha_1 & -\alpha \\ y_1 - y_2 & \beta_1 & -\beta \\ z_1 - z_2 & \gamma_1 & -\gamma \end{vmatrix} = A(x_1 - x_2) + A_1(y_1 - y_2) + A_2(z_1 - z_2),$$

$$M = \begin{vmatrix} A & x_1 - x_2 & -\alpha \\ A_1 & y_1 - y_2 & -\beta \\ A_1 & z_1 - z_2 & -\gamma \end{vmatrix},$$

$$N = \begin{vmatrix} A & \alpha_1 & x_1 - x_2 \\ A_1 & \beta_1 & y_1 - y_2 \\ A_2 & \gamma_1 & z_1 - z_2 \end{vmatrix},$$

$$D = \begin{vmatrix} A & \alpha_1 & -\alpha \\ A_1 & \beta_1 & -\beta \\ A_2 & \gamma_1 & -\gamma \end{vmatrix} = A^2 + A_1^2 + A_2^2.$$

На послетку имамо

$$\delta = \sqrt{A^2\lambda^2 + A_1^2\lambda^2 + A_2^2\lambda^2} = \frac{\pm L}{\sqrt{A^2 + A_1^2 + A_2^2}}.$$

Очевидно је, према самој природи проблема, да је ова вредност од δ^2 један minimum. Да бисмо то доказали, образујмо друге изводе

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2\delta^2}{\partial t^2} = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2\delta^2}{\partial t\,\partial\tau} = -\alpha\alpha_1 - \beta\beta_1 - \gamma\gamma_1,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2\delta^2}{\partial\tau^2} = \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2.$$

Количина $\frac{\partial^2\delta^2}{\partial t^2}\frac{\partial^2\delta^2}{\partial\tau^2} - \left(\frac{\partial^2\delta^2}{\partial t\,\partial\tau}\right)^2$ равна је

$$4(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2) - 4(\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1)^2$$
$$= 4(A^2 + A_1^2 + A_2^2).$$

Она је положна. Дакле, одиста имамо maximum или minimum. Но пошто је

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \delta^2}{\partial t^2} = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 > 0;$$

то ћемо имати један minimum.

Примедба I. Пошто су количине α, β, γ и $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ косинуси углова двеју датих правих, то ће оне задовољавати једначине

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1.$$

Али ми нисмо чинили употребу ових једначина. Нађене формуле постојале би, дакле, дајући количинама α, β, γ и $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ ма какве вредности. У осталом, једначине под (1) и (2), пошто их можемо ставити у облику

$$\frac{x - x_1}{\alpha} = \frac{y - y_1}{\beta} = \frac{z - z_1}{\gamma} = t,$$

$$\frac{\xi - x_2}{\alpha_1} = \frac{\eta - y_2}{\beta_1} = \frac{\xi - z_2}{\gamma_1} = \tau,$$

представљаће опет праве линије

Примедба II. Ако ставимо

$$x_2 = x_1 + \Delta x_1, \quad y_2 = y_1 + \Delta y_1, \quad z_2 = z_1 + \Delta z_1,$$

$$\alpha_1 = \alpha + \Delta\alpha, \quad \beta_1 = \beta + \Delta\beta, \quad \gamma_1 = \gamma + \Delta\gamma,$$

пређашње формуле постаће

$$A = \beta\Delta\gamma - \gamma\Delta\beta, \quad A_1 = \gamma\Delta\alpha - \alpha\Delta\gamma, \quad A_2 = \alpha\Delta\beta - \beta\Delta\alpha,$$

$$L = -(A\Delta x_1 + A_1\Delta y_1 + A_2\Delta z_1) = \begin{vmatrix} \Delta x_1 & \Delta\alpha & \alpha \\ \Delta y_1 & \Delta\beta & \beta \\ \Delta z_1 & \Delta\gamma & \gamma \end{vmatrix},$$

$$
(1)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{s_1}(r_1^{\,2} - a_1^{\,2} - a_2^{\,2}) + \dfrac{1}{s_2}(r_1^{\,2} - a_3^{2} - r_2^{\,2}) = o, \\ \dfrac{1}{s_2}(r_2^{\,2} - a_3^{2} - r_1^{\,2}) + \dfrac{1}{s_3}(r_2^{\,2} - a_4^{2} - r_3^{\,2}) = o, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \end{cases}
$$

но, у једном троуглу чије су стране a, b, c, углови A, B, C, а површина S, имамо

$$
\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \qquad S = \frac{1}{2} bc \sin A.
$$

Применив ове обрасце, трансформисаћемо једначине под (1) у ове:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tang} A_1 A_2 A_3 + \operatorname{tang} A_1 A_4 A_3 &= o, \\
\operatorname{tang} A_1 A_3 A_4 + \operatorname{tang} A_1 A_5 A_4 &= o, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &,
\end{aligned}
$$

које изражавају да су углови $A_1 A_2 A_3$ и $A_1 A_4 A_3$ суплементарни, тако исто као $A_1 A_3 A_4$ и $A_1 A_5 A_4, \cdots$; дакле круг који пролази кроз $A_1 A_2 A_3$ пролази кроз A_4, кроз $A_5, \cdots$; према овоме полигон maximum има своја темена на једном истом кругу, он је дакле *уписани* полигон.

32 Проблем

Наћи најкраћи пут од једне тачке A *до тачке* B *прелазећи преко једне праве положене у истој равни као и ове тачке.*

Нека су p и q наизменична одстојања тачака A и B од праве, нека је l одстојање двеју тачака рачунато паралелно правој; на послетку, нека су x и y одстојања тачке, у којој се најкраћи пут прелама, од подножја перпендикуларних спуштених из A и B на праву. Имамо

$$
(1)\quad x + y = l,
$$

а количина, коју хоћемо да учинимо minimum, jесте

$$(2)\quad \sqrt{x^2+p^2}+\sqrt{y^2+q^2}.$$

Диференцијалимо jедначину под (1) и ставимо диференцијал израза под (2) раван нули; имаћемо

$$dx+dy=o,\ \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+p^2}}+\frac{y\,dy}{\sqrt{y^2+q^2}}=o;$$

помножимо прву jедначину са λ, саберимо je са другом и ставимо равне нули сачиниоце од dx и dy; имаћемо

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+p^2}}=\frac{y}{\sqrt{y^2+q^2}}=-\lambda,$$

откуда се λ находи елиминисано.

Ова метода, елегантниjа од оне употребљене у 23 проблему стр. 367, води нас истим закључцима.

33 Проблем

Наћи најкраће растојање jедне тачке од jедне равни.

Нека су x_0, y_0, z_0 координате дате тачке, а

$$(1)\quad mx+ny+pz+q=o$$

jедначина равни.

Ми ћемо имати да учинимо minimum израз

$$\delta^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0),$$

знаjући да су количине x, y, z везане jедначином под (1). Према општем познатом правилу, о тражењу *релативних* minima, ми ћемо ставити равне нули делимичке изводе израза

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2+\lambda(mx+ny+pz+q),$$

па ћемо добити једначине:

$$2(x - x_0) + \lambda m = o,$$

$$2(y - y_0) + \lambda n = o,$$

$$2(z - z_0) + \lambda p = o,$$

ка којима ћемо додати ову:

$$o = mx + ny + pz + q = m(x - x_0) + n(y - y_0) + p(z - z_0)$$
$$+ mx_0 + ny_0 + pz_0 + q.$$

Из ових једначина изводимо

$$x - x_0 = -\frac{1}{2}\lambda m,\ y - y_0 = -\frac{1}{2}\lambda n,\ z - z_0 = -\frac{1}{2}\lambda p,$$

$$\frac{1}{2}\lambda = \frac{mx_0 + ny_0 + pz_0 + q}{m^2 + n^2 + p^2},$$

$$\delta^2 = \left(\frac{1}{2}\lambda\right)^2 (m^2 + n^2 + p^2) = \frac{(mx_0 + ny_0 + pz_0 + q)^2}{m^2 + n^2 + p^2}.$$

Да бисмо доказали да овај израз заиста представља један minimum, тражимо друге изводе од количине δ^2 посматране као функција независно променљивих количина x, y и једне функције z ових променљивих количина, одређена једначином (1). Имаћемо постепено

$$\frac{\partial \delta^2}{\partial x} = 2(x - x_0) + 2(z - z_0)\frac{\partial z}{\partial x} = 2(x - x_0) - \frac{2m}{p}(z - z_0),$$

$$\frac{\partial^2 \delta^2}{\partial x^2} = \mathbf{2} - \frac{2m}{p}\frac{\partial z}{\partial x} = 2 + \frac{2m^2}{p^2},$$

$$\frac{\partial^2 \delta^2}{\partial x\, \partial y} = -\frac{2m}{p}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2mn}{p^2}.$$

Тако исто наћи ћемо

$$\frac{\partial^2 \delta^2}{\partial y^2} = 2 + \frac{2n^2}{p^2}.$$

Изрази $\frac{\partial^2 \delta^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta^2}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \delta^2}{\partial x \, \partial y}\right)^2$ и $\frac{\partial^2 \delta^2}{\partial x^2}$ биће овде

$$\left(2 + \frac{2m^2}{p^2}\right)\left(2 + \frac{2n^2}{p^2}\right) - \frac{4\, m^2 n^2}{p^4} = 4 + \frac{4\, m^2}{p^2} + \frac{4\, n^2}{p^2}$$

и

$$2 + \frac{2m^2}{p^2}.$$

Оба су положни; дакле, имаћемо један minimum.

34 Проблем

Наћи правоугаони паралелопипед тахітит уписан у једном елипсоиду.

Нека је

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

једначина елипсоида; волумен, кога имамо да учинимо maximum, јесте производ из једне константне количине са xyz; ставићемо дакле

$$(2) \quad yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz = 0;$$

а диференцијалећи једначину под (1) добићемо

$$(3) \quad \frac{x\,dx}{a^2} + \frac{y\,dy}{b^2} + \frac{z\,dz}{c^2} = 0.$$

Помножимо једначину под (3) са λ, саберимо са (2) и ставимо сачиниоце од dx, dy, dz равне нули, па ћемо имати:

$$yz + \frac{\lambda x}{a^2} = 0, \quad zx + \frac{\lambda y}{b^2} = 0, \quad xy + \frac{\lambda z}{c^2} = 0;$$

елиминишући λ имаћемо

$$\frac{a^2 yz}{x} = \frac{b^2 xz}{y} = \frac{c^2 xy}{z},$$

или

$$\frac{a^2}{x^2} = \frac{b^2}{y^2} = \frac{c^2}{z^2},$$

тј.

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z},$$

што доказује да су стране сразмерне осама елипсоида и да су темена положена на дијагоналама паралелопипеда описатог око елипсоида имајући осе за стране.

35 Проблем

Између свију изопериметарских полигона, од истог броја страна, који је највећи?

Да бисмо разрешили овај проблем, означимо са A_1, A_2, $\cdots$, A_n темена полигона.

Нека су $a_1 = A_1A_2$, $a_2 = A_2A_3$, $\cdots$, $a_i = A_iA_{i+1}$ његове стране.

Нека су $r_3 = A_1A_3$, $r_4 = A_1A_4$, $\cdots$ његове дијагонале, које излазе из темена A_1.

Нека је s_2 површина троугла $A_1A_2A_3$, s_3 површина троугла $A_1A_3A_4$, $\cdots$.

Површина, која има да буде maximum, јесте

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{-(a_1^4 + a_2^4 + r_3^4 - 2a_1^2a_2^2 - 2a_1^2r_3^2 - 2a_2^2r_3^2)} \\ + \sqrt{-(r_3^4 + r_4^4 + a_3^4 - 2r_3^2r_4^2 - 2a_3^2r_3^2 - 2a_3^2r_4^2)} \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ; \end{array} \right.$$

у осталом имамо услов

$$(2) \quad a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \text{const.}$$

Требаће сада ставити диференцијале једначина (1) и (2) равне нули, па ћемо имати

$$(3) \quad \Sigma r_i dr_i \left(\frac{r_i^2 - a_i^2 - r^2_{i+1}}{s_i} + \frac{r_i^2 - a^2_{i-1} - r^2_{i-1}}{s_{i-1}} \right)$$

$$+ \Sigma a_i da_i \frac{a_i^2 - r_i^2 - r^2_{i+1}}{s_i} = 0$$

и

$$(4) \quad \Sigma da_i = 0.$$

Саберимо ове једначине, пошто смо другу помножили са λ, и ставимо сачиниоце од dr_i и da_i равне нули; имаћемо

$$(5) \quad \begin{cases} \dfrac{r_i^2 - a_i^2 - r^2_{i+1}}{s_i} + \dfrac{r_i^2 - a^2_{i-1} - r^2_{i-1}}{s_{i-1}} = 0, \\ a_i \dfrac{a_i^2 - r_i^2 - r^2_{i+1}}{s_i} + \lambda = 0; \end{cases}$$

но

$$r_i^2 - a_i^2 - r^2_{i+1} = -2 a_i r_{i+1} \cos A_1 A_{i+1} A_i,$$

$$s_i = \frac{1}{2} a_i r_{i+1} \sin A_1 A_{i+1} A_i,$$

и, према томе,

$$\frac{r_i^2 - a_i^2 - r^2_{i+1}}{s_i} = -4 \operatorname{cotg} A_1 A_{i+1} A_i, \cdots;$$

формуле под (5) могу се дакле написати

$$\operatorname{cotg} A_1 A_{i+1} A_i + \operatorname{cotg} A_1 A_{i-1} A_i = 0,$$

$$\lambda - 4 a_i \operatorname{cotg} A_i A_1 A_{i+1} = 0.$$

Прва од ових формула показује да се четвороугао $A_1 A_{i-1} A_i A_{i+1}$ може уписати, дакле полигон такође; друга формула показује да је

$$a_i \operatorname{cotg} A_i A_1 A_{i+1} = a_{i-1} \operatorname{cotg} A_{i-1} A_1 A_i = \cdot \cdot \cdot ;$$

ако саставимо центар описатог круга са теменима полигона, означив са $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_i$ полуугле тако образоване у центру, пређашња формула даће

$$\frac{a_1}{\operatorname{tang} \omega_1} = \frac{a_2}{\operatorname{tang} \omega_2} = \frac{a_3}{\operatorname{tang} \omega_3} = \cdot \cdot \cdot ,$$

тј. одстојања центра полигона од разних страна биће једнака. Зато треба да стране траженог полигона буду једнаке; овај је полигон дакле правилан.

36 Проблем

Наћи maxima и minima разломка $\frac{f}{\varphi}$, *где су*

$$f = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}zx$$

и

$$\varphi = \alpha_{11}x^2 + \alpha_{22}y^2 + \alpha_{33}z^2 + 2\alpha_{12}xy + 2\alpha_{23}yz + 2\alpha_{13}zx$$

две хомогене функције другог степена по x, y, z.

Вредност овог разломка зависећи само од односа променљивих x, y, z, дозвољено је претпоставити њихове апсолутне вредности тако изабрате да имамо $\varphi = 1$.

Имаћемо дакле да нађемо maxima и minima од f, када је дата условна једначина

$$\varphi - 1 = 0.$$

Требаће, као што знамо, одредити x, y, z и λ помоћу једначина

$$\varphi = 1,$$

$$(1)\quad \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0,\quad \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,$$

или, извршив рачуне, помоћу једначина

$$(2)\quad \begin{cases} (a_{11} + \lambda\alpha_{11})x + (a_{12} + \lambda\alpha_{12})y + (a_{13} + \lambda\alpha_{13})z = 0, \\ (a_{12} + \lambda\alpha_{12})x + (a_{22} + \lambda\alpha_{22})y + (a_{23} + \lambda\alpha_{23})z = 0, \\ (a_{13} + \lambda\alpha_{13})x + (a_{23} + \lambda\alpha_{23})y + (a_{33} + \lambda\alpha_{33})z = 0. \end{cases}$$

Али једначина $\varphi = 1$ показује да x, y, z не могу бити равни нули, у исто доба. Дакле, детерминанта једначи́на̂ под (2) мора бити равна нули, што ће дати једну једначину трећег степена по λ.

Нека је λ један од корена ове једначине; замењујући га у једначине под (2), оне ће се свести на две различне једначине, које ће дати односе између x, y, z. Једначина $\varphi = 1$ довршиће одредбу ових количина.

Одговарајућа вредност од $\frac{f}{\varphi}$ биће $-\lambda$. И заиста, пошто су f и φ хомогене функције другог степена, имаћемо

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial x} + z\frac{\partial f}{\partial z} = 2f$$

$$x\frac{\partial \varphi}{\partial x} + y\frac{\partial \varphi}{\partial y} + z\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 2\varphi.$$

Једначине под (1), помножене наизменце са x, y, z и сабрате заједно, даће дакле

$$2f + 2\lambda\varphi = 0, \text{ откуда } \frac{f}{\varphi} = -\lambda.$$

Пре но што даље пођемо, ми ћемо приметити да се функција φ може написати у облику

$$\alpha_{11}\left(x+\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}}y+\frac{\alpha_{13}}{\alpha_{11}}z\right)^2+\varphi_1,$$

где φ_1 представља једну функцију z-а, такву као $\beta_{11}y^2+2\beta_{12}yz + \beta_{22}z^2$. Тако исто моћи ћемо функцију φ_1 ставити у облику

$$\beta_{11}\left(y+\frac{\beta_{12}}{\beta_{11}}z\right)^2+\gamma z^2.$$

Функција φ биће, на тај начин, разложена на суму трију квадрата, наизменце помножени са α_{11}, β_{11}, γ.

Ми ћемо претпоставити, у даљем раду, да су ова три сачиниоца положни. Јасно је, да је тај услов нужан и довољан па да функција φ узме једну положну вредност и различну од нуле за сваки систем вредности од x, y, z изузев o, o, o. Кад је овај услов испуњен, вредности од x, y, z, за које имамо $\varphi = 1$, имаће нужно модуо ограничен; јер ће требати да сваки од три положна члана из којих се φ састоји, понаособ узети, буде $\overline{\overline{<}}$ 1. Дакле, вредности од f, које одговарају овим разним системима вредности од x, y, z, биће коначне, и, према томе, f ће нужно имати најмање један maximum и један minimum релни, одговарајући релним вредностима променљивих. Нека су, нпр., x_1, y_1, z_1 вредности које одговарају maximum-у; нека је λ_1 одговарајућа вредност од λ. Ставимо

$$x = x_1\xi + m\eta + n\zeta,$$

$$y = y_1\xi + m_1\eta + n_1\zeta,$$

$$z = z_1\xi + m_2\eta + n_2\zeta,$$

где су ξ, η и ζ нове променљиве, а m, n, m_1, n_1, m_2, n_2, ма какве количине такве да детерминанта замене не буде равна нули. Вредностима $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$, које дају maximum, одговараће вредности $\xi = 1$, $\eta = o$, $\zeta = o$. У осталом, извршив трансформацију, f и φ постаће функције нових координата, хомогене и другог степена, као и пређе.

Трансформација једном учињена, назовимо x, y, z наше нове промењљиве примитивно означене са ξ, η, ζ. Тако исто назовимо $a_{11}, \cdots, \alpha_{11}, \cdots$, сачиниоце функција f и φ ових нових промењљивих; разломак $\frac{f}{\varphi}$ биће maximum и φ равно јединици за $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$, $\lambda = \lambda_1$. Имаћемо, према томе, $\alpha_{11} = 1$, и пошто су једначине под (2) задовољене за maximum, имаћемо, с друге стране,

$$(3) \quad a_{11} + \lambda_1 \alpha_{11} = 0, \quad a_{12} + \lambda \alpha_{12} = 0, \quad a_{13} + \lambda \alpha_{13} = 0.$$

Стављајући сада, краткоће ради,

$$X = x + \alpha_{12} y + \alpha_{13} z,$$

имаћемо

$$\varphi = X^2 + \varphi_1,$$

$$f = -\lambda_1 X^2 + f_1,$$

где су φ_1 и f_1 функције од y, z и од којих ће прва бити положна за сваки систем вредности од y, z осим за $y = 0$, $z = 0$.

Учинив, на исти начин, са функцијама φ_1 и f_1 што смо учинили са φ и f, ми ћемо моћи ставити

$$\varphi_1 = Y^2 + \varphi_2, \quad f_1 = -\lambda_2 Y^2 + f_2,$$

где функције φ_2 и f_2 садрже само z, и према томе оне су, наизменце, облика βz^2, γz^2.

Стављајући

$$Z = z\sqrt{\beta}, \qquad -\lambda_3 = \frac{\gamma}{\beta},$$

имаћемо

$$\varphi_2 = Z^2, \qquad f_2 = -\lambda_3 Z^2,$$

и, према томе,

$$(4) \quad \begin{cases} \varphi = X^2 + Y^2 + Z^2, \\ f = -\lambda_1 X^2 - \lambda_2 Y^2 - \lambda_3 Z^2, \end{cases}$$

откуда ова теорема:

Дат је систем двеју квадратичних функција φ *и* f *од којих је једна увек положна, моћи ће се, релном сменом променљивих, учинити да ишчезну правоугаоници променљивих количина.*

Тако уређене две функције f и φ, једначина по λ постаће

$$o = \begin{vmatrix} -\lambda_1 + \lambda & o & o \\ o & -\lambda_2 + \lambda & o \\ o & o & -\lambda_3 + \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3).$$

Ова једначина има за корене три релне количине λ_1, λ_2, λ_3. Дакле, *једначина по* λ *има увек своје корене стварне.*

Одмах видимо по једначинама под (4) да ће највећи од ових корена учинити $\frac{f}{\varphi}$ minimum; најмањи пак учиниће исти разломак maximum, а трећи неће дати ни maximum ни minimum.

Оверити ове резултате:

1). *Имамо, за ма какво* n, *обрасце*

$$(1) \quad \cos^2 x + \cos^2\left(x + \frac{2\pi}{n}\right) + \cos^2\left(x + \frac{4\pi}{n}\right) + \cdots$$

$$\cdots + \cos^2\left[x + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right] = \frac{n}{2},$$

$$(2)\quad \cos^2 x + \cos^2\left(x + \frac{\pi}{n}\right) + \cos^2\left(x + \frac{2\pi}{n}\right) + \cdots$$

$$\cdots + \cos^2\left[x + \frac{(n-1)\pi}{n}\right] = \frac{n}{2}.$$

Ако се замени x *са* $\frac{\pi}{2} + x$, *наћи ћемо*

$$(3)\quad \sin^2 x + \sin^2\left(x + \frac{2\pi}{n}\right) + \sin^2\left(x + \frac{4\pi}{n}\right) + \cdots$$

$$\cdots + \sin^2\left[x + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right] = \frac{n}{2},$$

$$(4)\quad \sin^2 x + \sin^2\left(x + \frac{\pi}{n}\right) + \sin^2\left(x + \frac{2\pi}{n}\right) + \cdots$$

$$\cdots + \sin^2\left[x + \frac{(n-1)\pi}{n}\right] = \frac{n}{2}.$$

(Mathesis, t. II, p. 185 et 242, 1882).

2). *Доказати да је ред*

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{\cos^2 x} + \frac{1}{3}\frac{\sin 3x}{\cos^3 x} + \cdots$$

незбирљив. *(E. Catalan).*

3). *Доказати да, кад је* x *равно или веће од јединице, редови:*

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} + \cdots,$$

$$\frac{2}{2x+1} + \frac{2}{3(2x+1)^3} + \frac{2}{5(2x+1)^5} + \cdots,$$

имају исту границу. (E. Catalan; Mélanges mathématiques, t. III, p. 23, 1888).

4). *Означив са* S *суму реда*

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdot \cdot \cdot ,$$

доказати да је

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$$

$$- \frac{1}{5}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \cdot \cdot \cdot = \frac{S^2}{2}.$$

(E. Catalan).

5). *Доказати да је ред*

$$\frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{2 \cdot 3}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} + \cdot \cdot \cdot ,$$

збирљив и да је његова сума $\frac{1}{9}$.

(J. Neuberg; Mathesis, t. I, p. 48, 1881).

6). *Посматрајмо један ред облика*

$$\frac{1}{\varphi(1)} + \frac{1}{\varphi(2)} + \cdot \cdot \cdot + \frac{1}{\varphi(n)} + \cdot \cdot \cdot ;$$

ако имамо, за $m = \infty$,

$$\lim m \frac{\varphi'(m)}{\varphi(m)} > 1,$$

ред је збирљив; ако је, напротив, та граница мања од један, ред је незбирљив. Ако је та граница равна јединици, треба посматрати израз

$$\left[m \frac{\varphi'(m)}{\varphi(m)} - 1\right] \operatorname{Log} m ,$$

и, према томе да ли ће граница тога израза бити > 1 *или* < 1, *ред ће бити збирљив или незбирљив; ако је граница један, онда треба посматрати израз*

$$\left\{\left[m\frac{\varphi'(m)}{\varphi(m)} - 1\right]\operatorname{Log} m - 1\right\}\operatorname{Log}\operatorname{Log} m, \cdots.$$

(Augustus de Morgan).

7). *Ред, чији је општи члан* $\frac{1}{\varphi(n)}$, *збирљив је ако, за* $n = \infty$, $\frac{d^2\varphi}{dn^2}$ *тежи граници различној од нуле и ако* $\varphi(n) = 0$ *нема целих корена.* *(Grolous).*

8). *Ред, чији је општи члан* $\frac{1}{\varphi(n)}$, *збирљив је ако је* $\Delta^2\varphi(n)$ *константно или расти* $(\Delta n = 1)$.

(Émile Lemoine).

9). *Доказати, кад* n *бесконачно расте, да је*

$$\lim \frac{\left(a+\frac{1}{n}\right)^p + \left(a+\frac{2}{n}\right)^p + \cdots + \left(a+\frac{n-1}{n}\right)^p}{n}$$

$$= \frac{(a+1)^{p+1} - a^{p+1}}{p+1}.$$

(E. Catalan; Mathesis, t. IV, p. 142, 1884).

10). *Доказати да, ако* z *није ни нула ни равно једном целом одречном броју, израз*

$$\frac{e^{z \operatorname{Log} n}}{z\left(1+\frac{z}{1}\right)\left(1+\frac{z}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{z}{n}\right)}$$

тежи ка једној граници, кад n *бесконачно расте.*

11). *Дата је функција*

$$y = (x^3 - 3x - 5)^2 (x^2 + 2x - 1)^3;$$

њен први извод јесте

$$y' = 6(x^3 - 3x - 5)(x^2 + 2x - 1)^2 (x + 1)(2x^3 + x^2 - 6x - 4).$$

12). *Дата је функција*

$$y = \frac{1}{6} \operatorname{Log}\left[\frac{(x-1)^2}{x^2 + x + 1}\right] - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tang} \frac{2x+1}{\sqrt{3}},$$

њен први извод биће

$$y' = \frac{1}{x^3 - 1}.$$

13). *Дата је функција*

$$y = (1 + x^2)^{e^{\operatorname{arc\,tang} x}},$$

наћи ћемо да је

$$y' = \frac{2x + \operatorname{Log}(1 + x^2)}{1 + x^2} e^{\operatorname{arc\,tang} x} (1 + x^2)^{e^{\operatorname{arc\,tang} x}}.$$

14). *Дата је функција*

$$y = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3,$$

наћи ћемо

$$y' = 6\frac{(x^2 - 1)^2}{(x-1)^6 + (x+1)^6}.$$

15). *Дата је функција*

$$y = \operatorname{Log} \frac{1 - \cos mx}{1 + \cos mx},$$

наћи ћемо

$$y' = \frac{2m}{\sin mx}.$$

16). *Дата је функција*

$$y = \arcsin \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin x}{1 - e \cos x},$$

наћи ћемо

$$y' = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{1 - e \cos x}.$$

17). *Дата је функција*

$$y = \operatorname{Log} (x + \sqrt{x^2 - a^2} + \arccos \frac{a}{x}$$

наћи ћемо

$$y' = \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x + a}{x - a}}.$$ *(Види I. св. стр. 59).*

18). *Дата је функција*

$$y = \operatorname{Log} \frac{\sqrt{1 + x^4} + x\sqrt{2}}{1 - x^2} + \arcsin \frac{x\sqrt{2}}{1 + x^2},$$

наћи ћемо

$$y' = 2\sqrt{2} \frac{\sqrt{1 + x^4}}{1 - x^4}.$$

19). *Дата је функција*

$$y = \operatorname{arc tang} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

наћи ћемо

$$y' = \frac{2}{e^{2x} + e^{-2x}}.$$

20). *Дате су функције*

$$(1) \quad y = \arccos (1 - x) - \sqrt{2x - x^2},$$

$$(2) \quad y = \frac{3}{2} \arccos (1 - x) - \left(\frac{3}{2} + \frac{x}{2}\right) \sqrt{2x - x^2},$$

$$(3) \quad y = \frac{5 \cdot 3}{3 \cdot 2} \arccos(1-x) - \left(\frac{5 \cdot 3}{3 \cdot 2} + \frac{5x}{3 \cdot 2} + \frac{x^2}{3}\right)\sqrt{2x - x^2},$$

$$(4) \quad y = \frac{7 \cdot 5 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2} \arccos(1-x) - \left(\frac{7 \cdot 5 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{7 \cdot 5x}{4 \cdot 3 \cdot 2}\right.$$

$$\left. + \frac{7x^2}{4 \cdot 3} + \frac{x^3}{4}\right)\sqrt{2x - x^2},$$

. . . . ;

наћи ћемо прве изводе

$$(1') \quad y' = \frac{x}{\sqrt{2x - x^2}},$$

$$(2') \quad y' = \frac{x^2}{\sqrt{2x - x^2}},$$

$$(3') \quad y' = \frac{x^3}{\sqrt{2x - x^2}},$$

. . . .

21). *Дата је једначина*

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0;$$

наћи $y'' = \varphi(x)$, *и доказати да је* $\varphi(a) + \varphi(b) = 0$; *где су* a *и* b *корени једначине*

$$Cx^2 + 2Ex + F = 0.$$

(E. Catalan).

22). *Једначина* $f(x) = 0$ *има све своје корене стварне. Нека су* α *и* β *два узастопна корена ове једначине. Први извод* $f'(x)$ *постаје нула за једну вредност* ω *узету између* α *и* β. *Доказати да се* ω *находи између*

$$\frac{\alpha + (n-1)\beta}{n} \quad \text{и} \quad \frac{(n-1)\alpha + \beta}{n},$$

где n *означава степен једначине* $f(x) = 0$. *(Laguerre; Nouvelles annales mathématiques, t. 4, 3e série, p. 328, 1885).*

23). *Нека је дата функција*

$$f(x, y, z) = \frac{x}{(y+z)^2} + \frac{y}{(z+x)^2} + \frac{z}{(x+y)^2};$$

доказати да је

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = - f(x, y, z).$$

24). *Дата је једначина*

$$ayz + bzx + cxy - m^3 = 0;$$

наћи ћемо

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{bz + cy}{ay + bx}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{cx + az}{ay + bx};$$

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2b\frac{bz + cy}{(ay + bx)^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2\frac{abz}{(ay + bx)^2},$$

$$t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2a\frac{az + cx}{(ay + bx)^2}.$$

25). *Ако је*

$$z = \alpha x + y\varphi(\alpha) + \psi(\alpha), \quad x + y\varphi'(\alpha) + \psi'(\alpha) = 0;$$

онда имамо

$$rt = s^2.$$

26). *Дате су једначине*

$$\cos x + \cos y + \cos z = 0, \quad \sin x + \sin y + \sin z = 0;$$

доказати да је

$$\frac{dy}{dx} = 1, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad \frac{dz}{dx} = 1, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = 0.$$

27). *Нека је* f(z) *једна функција комплексне количине* $z = x + iy$; *ако се стави*

$$(1) \quad f(z) = P + iQ,$$

где су P *и* Q *релне функције по* x *и* y, *онда имамо*

$$(2) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^n P}{\partial x^k \partial y^{n-k}} = \dfrac{\partial^n Q}{\partial x^{k-1} \partial y^{n-k+1}}, \\[2ex] \dfrac{\partial^n Q}{\partial x^k \partial y^{n-k}} = -\dfrac{\partial^n P}{\partial x^{k-1} \partial y^{n-k+1}}; \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^n P}{\partial x^k \partial y^{n-k}} = -\dfrac{\partial^n P}{\partial x^{k-2} \partial y^{n-k+2}}, \\[2ex] \dfrac{\partial^n Q}{\partial x^k \partial y^{n-k}} = -\dfrac{\partial^n Q}{\partial x^{k-2} \partial y^{n-k+2}}. \end{cases}$$

Очевидно, постоје и ове једначине:

$$(A) \quad \frac{\partial^n P}{\partial x^n} = \frac{\partial^n Q}{\partial x^{n-1} \partial y} = -\frac{\partial^n P}{\partial x^{n-2} \partial y^2} = -\frac{\partial^n Q}{\partial x^{n-3} \partial y^3}$$

$$= \frac{\partial^n P}{\partial x^{n-4} \partial y^4} = \cdots,$$

$$(B) \quad \frac{\partial^n Q}{\partial x^n} = -\frac{\partial^n P}{\partial x^{n-1} \partial y} = -\frac{\partial^n Q}{\partial x^{n-2} \partial y^2} = \frac{\partial^n P}{\partial x^{n-3} \partial y^3}$$

$$= \frac{\partial^n Q}{\partial x^{n-4} \partial y^4} = \cdots.$$

28). *Диференцијалећи једначине:*

$$(1)\quad \sin y = y \sin x,$$

$$(2)\quad \tang y = 1 + x \sin y,$$

$$(3)\quad x\sqrt{1+y} = y\sqrt{1+x},$$

$$(4)\quad x^y + y^x - 1 = 0,$$

по x, *наћи ћемо*

$$(1')\quad y' = \frac{y\cos x}{\cos y - \sin x},$$

$$(2')\quad y' = \frac{\sin y \cos^2 y}{1 - x\cos^3 y},$$

$$(3')\quad y' = \frac{y^2(2+x)}{x^2(2+y)},$$

$$(4')\quad y' = -\frac{yx^{y-1} + y^x \operatorname{Log} y}{xy^{x-1} + x^y \operatorname{Log} x}.$$

29). *Дато је*

$$z = \arcsin x + \arcsin y,$$

$$x = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}, \qquad y = \frac{2}{e^t + e^{-t}};$$

доказати да је

$$\frac{dz}{dt} = 0.$$

30). *Ако се стави*

$$x_1 = \cos\varphi_1,$$

$$x_2 = \sin\varphi_1 \cos\varphi_2,$$

$$x_3 = \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos\varphi_3 ,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot ,$$

$$x_n = \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cdots \sin\varphi_{n-1} \cos\varphi_n ,$$

имаћемо

$$\frac{\partial (x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial (\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)} = \sin^n\varphi_1 \sin^{n-1}\varphi_2 \cdots \sin^2\varphi_{n-1} \sin\varphi_n .$$

(Jacobi).

31). *Ако је*

$$\frac{x_1}{a_1 + \lambda_1} + \frac{x_2}{a_2 + \lambda_1} + \cdots + \frac{x_n}{a_n + \lambda_1} = 1 ,$$

$$\frac{x_1}{a_1 + \lambda_2} + \frac{x_2}{a_2 + \lambda_2} + \cdots + \frac{x_n}{a_n + \lambda_2} = 1 ,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot ,$$

$$\frac{x_1}{a_1 + \lambda_n} + \frac{x_2}{a_2 + \lambda_n} + \cdots + \frac{x_n}{a_n + \lambda_n} = 1 ,$$

имаћемо

$$\frac{\partial (x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)} = \frac{A\varDelta}{P},$$

означавајући са A *производ разлика које можемо образовати са количинама* $a_1, a_2, \cdots, a_n$, *са* $\varDelta$ *производ разлика које можемо образовати са количинама* $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ *и са* P *производ количина таквих као што је* $a_i + \lambda_j$.

32). *Ако ставимо*

$$x = a\varepsilon \cos\psi \sin\theta, \quad y = b\varepsilon \sin\psi \sin\theta, \quad z = c\varepsilon \cos\theta,$$

имаћемо

$$\frac{\partial (x, y, z)}{\partial (\varepsilon, \theta, \psi)} = abc\, \varepsilon^2 \sin\theta .$$

33). *Ако је један израз* $\varphi(x_1, x_2, dx_1, dx_2)$, *цео и хомоген* n-тог *степена у односу на диференцијале* dx_1 *и* dx_2, n-ти *диференцијал једне функције од* x_1 *и* x_2; *функција* $\varphi(x_1, x_2, p_1, p_2)$, *ма какве биле количине* x_1, x_2, p_1 *и* p_2, *идентички задовољава услов*

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial p_2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\,\partial p_1}.$$

34). *Ако је један израз* $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_\mu, dx_1, dx_2, \cdots, dx_\mu)$, *цео и хомоген* n-тог *степена у односу на* $dx_1, dx_2, \cdots, dx_\mu$, n-ти *диференцијал од* $U(x_1, x_2, \cdots, x_\mu)$; *функција* $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_\mu, p_1, p_2, \cdots, p_\mu)$, *ма какве биле количине* $x_1, x_2, \cdots, x_\mu, p_1, p_2, \cdots, p_\mu$, *идентички задовољава услов*

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\,\partial p_j} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\,\partial p_i}.$$

35). *Узмимо* $(n+1)$ *функцију, хомогене и целе истог степена,* $f_1, f_2, \cdots, f_{n+1}$ *од* n *променљивих* $x_1, x_2, \cdots, x_n$. *Нека су* $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{n+1}$ *функционалне детерминанте, које се могу образовати са* n *од ових функција. Доказати да су* $f_1, f_2, \cdots, f_{n+1}$ *сразмерни са* $(n+1)$ *функционалних детерминаната које се могу образовати са* n *од функција* $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{n+1}$ *и показати да имамо*

$$\sum_{p=1}^{p=n+1}\left(\frac{\partial\varphi_p}{\partial x_\mu}\frac{\partial f_p}{\partial x_\nu} - \frac{\partial\varphi_p}{\partial x_\nu}\frac{\partial f_p}{\partial x_\mu}\right) = 0.$$

При томе користићемо се једначинама

$$\varphi_1 f_1 + \varphi_2 f_2 + \cdots + \varphi_{n+1} f_{n+1} = 0,$$

$$\varphi_1\frac{\partial f_1}{\partial x_\mu} + \varphi_2\frac{\partial f_2}{\partial x_\mu} + \cdots + \varphi_{n+1}\frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_\mu} = 0.$$

(A. Clebsch; Ueber eine Eigenschaft von Fnnctionaldeterminanten; Crelle journal, t. 69, p. 335, 1868; t. 70, p. 175, 1869).

36). *Означив са* $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ *корене једначине* $\varphi(x) = 0$, *имамо*

$$\Sigma \frac{1}{(t_1 - \alpha_i)(t_2 - \alpha_j)\cdots(t_n - \alpha_k)}$$

$$= (-1)^n \frac{\varphi(t_1)\varphi(t_2)\cdots\varphi(t_n)}{\psi(t_1, t_2, \cdots, t_n)} \frac{\partial^n}{\partial t_1 \partial t_2 \cdots \partial t_n} \frac{\psi(t_1, t_2, \cdots, t_n)}{\varphi(t_1)\varphi(t_2)\cdots\varphi(t_n)}.$$

У овој формули, $\psi(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ *јесте производ свију разлика количина* $t_1, t_2, \cdots, t_n$, *а на левој страни треба претпоставити биноме* $t_i - \alpha_j$ *такве да је* $i \gtrless j$.

(Borchardt, Mémoires de l'Académie de Berlin, 1855).

37). *Доказати да је сума* p-них *степена корена једначине*

$$f(\alpha)x^n + \frac{f'(\alpha)}{1}x^{n-1} + \frac{f''(\alpha)}{1\cdot 2}x^{n-2} + \cdots = 0,$$

равна

$$-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots p}\frac{d^p}{d\alpha^p}[\operatorname{Log} f(\alpha)];$$

само ако p *не превазилази* n.

38). *Доказати обрасце*

$$\operatorname{Ch}x = 1 + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots,$$

$$\operatorname{Sh}x = x + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \cdots.$$

39). *Доказати да је, за ма какво* x,

$$\sin^3 x = x^3 - \frac{3^2+1}{4\cdot 5}x^5 + \frac{3^4+1}{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}x^7 - \frac{3^6+1}{4\cdot 5\cdots 9}x^9 + \cdots.$$

40). *Дата је једначина, (види стр. 88),*

$$\operatorname{tang} y = m \operatorname{tang} x;$$

1°. *За* $m = \cos\varphi$, *дакле за* $m < 1$, *имамо*

$$y = x - \operatorname{tang}^2 \frac{\varphi}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \operatorname{tang}^4 \frac{\varphi}{2} \sin 4x$$

$$- \frac{1}{3} \operatorname{tang}^6 \frac{\varphi}{2} \sin 6x + \cdots;$$

2°. *За* $m = \frac{1}{\cos\varphi}$, *дакле за* $m > 1$, *имаћемо*

$$y = x + \operatorname{tang}^2 \frac{\varphi}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \operatorname{tang}^4 \frac{\varphi}{2} \sin 4x$$

$$+ \frac{1}{3} \operatorname{tang}^6 \frac{\varphi}{2} \sin 6x + \cdots.$$

(M. H. Resal; Mécanique céleste, p. 41, 1884).

41). *Развити у цео ред по* z *вредност од* θ *одређену једначином*

$$(1) \quad \cos\varphi = \cos\varphi + z,$$

која се своди на φ *за* $z = 0$. *Наћи ћемо*

$$(2) \quad \theta = \varphi - \frac{z}{\sin\varphi} - \cos\varphi \frac{z^2}{2\sin^3\varphi} - \left(\cos^2\varphi + \frac{1}{2}\right) \frac{z^3}{3\sin^5\varphi} - \cdots$$

$$\cdots - \left[\cos^{n-1}\varphi + \frac{(n-1)(n-2)}{2^2} \cos^{n-3}\varphi\right.$$

$$\left. + \frac{(n-1)\cdots(n-4)}{2^2 \cdot 4^2} \cos^{n-5}\varphi + \cdots\right] \frac{z^n}{n \sin^{2n-1}\varphi} - \cdots.$$

(A. de Saint-Germain; Nouvelles annales math., t. 4, 3e série, p. 166, 1885).

42). *Доказати да развијајући, по растећим степенима од* λ, *количину*

$$(1)\quad \frac{x+\frac{\lambda}{1}+\frac{\lambda^2}{1\cdot 2}x+\cdots}{1+\frac{\lambda}{1}x+\frac{\lambda^2}{1\cdot 2}+\cdots} = \frac{e^{\lambda}(1+x)-e^{-\lambda}(1-x)}{e^{\lambda}(1+x)-e^{-\lambda}(1-x)},$$

сачинилац од λ^n *јесте један полином* L_n, n-тог *степена по* x, *имајући за сачинитеља* x^2-1 *и да једначина*

$$(2)\quad \frac{L_n}{x^2-1} = 0$$

има све своје корене стварне, неједнаке, који се находе између -1 *и* $+1$. *(Ch. Hermite; Nouvelles annales math., 2ᵉ série, t. 11, p. 460, 1872).*

43). *Доказати да функција*

$$u = (1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}},$$

задовољава једначине

$$(1)\quad (1-x^2)\frac{du}{dx} + (1-\alpha x)\frac{du}{d\alpha} = ux,$$

$$(2)\quad (1-x^2)\frac{du}{dx} + (x-\alpha)\alpha\frac{du}{d\alpha} = u\alpha.$$

44). *Доказати да Legendre-ов полином* X_n *задовољава једначину*

$$(x^2-1)X_n'' + 2xX_n' - n(n+1)X_n = 0.$$

45). $$a_0a_{2m} - \frac{2m}{1}a_1a_{2m-1} + \frac{2m(2m-1)}{1\cdot 2}a_2a_{2m-2} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{1}{2}\frac{2m(2m-1)\cdots(m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m}a_m a_m$$

јесте инваријанта од

$$a_0x^{2m} + \frac{2m}{1}a_1x^{2m-1}y + \cdot\ \cdot\ \cdot + a_{2m}y^{2m}.$$

46). $$a_0b_n - b_0a_n - \frac{n}{1}(a_1b_{n-1} - b_1a_{n-1})$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(a_2b_{n-2} - b_2a_{n-2}) - \cdot\ \cdot\ \cdot$$

јесте инваријанта облика:

$$a_0x^n + \frac{n}{1}a_1x^{n-1}y + \cdot\ \cdot\ \cdot,\quad b_0x^n + \frac{n}{1}b_1x^{n-1}y + \cdot\ \cdot\ \cdot,$$

кад је n *непарно.*

47). $(a_1a_0 - a_1^2)x^2 + (a_0a_3 - a_2a_1)xy + (a_1a_3 - a_2^2)y^2$

јесте коваријанта од

$$a_0x^3 + 3a_1x^2y + 3a_2xy^2 + a_3y^3.$$

48). *Дискриминанта једначине*

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = o,$$

стављена је M. Cayley-ем у облику

$$16(I^3 - 27J^2);$$

$I = ae - 4bd + 3c^2,\quad J = ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3.$

49). *Дискриминанта производа* m *функција од* n *променљивих идентички је равна нули кад је* $m < n$.

50). *Доказати да су инваријанте једне ма какве форме хомогене функције сачинилаца те форме.*

51). *Доказати да бинерна форма*

$$a(x - x_1y)(x - x_2y) \cdot \cdot \cdot (x - x_ny),$$

дозвољава за инваријанту дискриминанту

$$a^{2m-2}\,\Pi(x_i - x_j)^2;\ \textit{где}\ i, j = 1, 2, \cdot\cdot\cdot, m.$$

52). *Права вредност израза*

$$y = \frac{\cos ax - \cos a}{(1 - x^2)^m},$$

за $x = 1$, *јесте*

$$y_1 = (-1)^m \frac{a^m \cos\left(a + \frac{m\pi}{2}\right)}{2^m \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot m}.$$

53). *Проучити мене функције*

$$u = x^{\frac{1}{x^2}}$$

и показати, посебице, да она пролази кроз један maximum за $x = \sqrt{e}$.

54). *Maximum тангенте елипсине, узете између оса, раван је половини суме* $(a + b)$ *оса. (Nouvelles annales math., t. 12, p. 44, 1873).*

55). *Maximum одстојања додирне тачке једне тангенте елипсине од пројекције центра на ту тангенту раван је полу-разлици* $(a - b)$ *оса.*

56). *Троугао чији је периметар minimum, имајући своја темена на странама датог троугла* ABC, *добија се састављајући међу собом подножја перпендикуларних спуштених из темена датог троугла на супротне стране.*

57). *Од свију описатих èлйпсâ око једног истог троугла, најмања има за центар тежиште троугла. (Euler).*

58). *Више функција симетричних по* x, y, z, $\cdots$ *остајући константне, једна друга функција симетрична по* x, y, z, $\cdots$ *јесте maxima или minima кад су променљиве* x, y, z, $\cdots$ *једнаке међу собом.* *(Cauchy).*

Задаци:

1). *Доказати образац*

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{3} + \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{7} + \cdots$$

$$\cdots + \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{n^2+n+1} + \cdots.$$

2). *Узев да је*

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{\pi^2}{6},$$

наћи

$$S = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \cdots.$$

3). *Уверити се да је*

$$\frac{1}{1-x} + \frac{2x}{1-x^2} + \frac{3x^2}{1-x^3} + \frac{4x^3}{1-x^4} + \cdots$$

$$= \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{x}{(1-x^2)^2} + \frac{x^2}{(1-x^3)^2} + \frac{x^3}{(1-x^4)^2} + \cdots.$$

Која је заједничка граница? *(E. Catalan).*

4). *Дата је идентична једначина*

$$\frac{\pi x}{4} = \frac{\sin x}{1^2} - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - \cdots,$$

извести суму квадрата свију реципрочних вредности целих бројева.

5). *Како се може имати за лукове између* 90° *и* 180°

$$\mathrm{D}\,\mathrm{arc}\sin x = \mathrm{D}\,\mathrm{arc}\cos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

ма да се нема

$$\mathrm{arc}\sin x = \mathrm{arc}\cos x + C^{te}.$$

(Mathesis, t. III, p. 96, 1883).

6). *Претпоставив да је*

$$u = \sqrt{x^2 + y^2},$$

образовати

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

7). *Наћи потпуни диференцијал функције*

$$u = \frac{yz + zx + xy}{x + y + z}.$$

8). *Дате су једначине:*

$$x + y + z = \mathrm{Log}(u + v),$$

$$y + z + u = \mathrm{Log}(v + x),$$

$$z + u + v = \mathrm{Log}(x + y);$$

наћи вредности за dx, dy *и* dz.

9). *Дате су једначине:*

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y + z) = o,$$

$$y^3 + z^3 + t^3 + 3(y + z + t) = o,$$

$$z^3 + t^3 + x^3 + 3(z + t + x) = 0;$$

наћи

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} \quad и \quad \frac{dz}{dt}.$$

10). *Дато је*

$$z = \frac{\operatorname{arc\,cos} x + \operatorname{arc\,cos} y}{\operatorname{arc\,sin} x + \operatorname{arc\,sin} y},$$

$$x = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}, \quad y = \frac{2}{e^t + e^{-t}};$$

наћи вредност за $\frac{dz}{dt}$.

11). *Дате су једначине:*

$$z = \frac{[y - \varphi(\alpha)]^2}{\varphi'(\alpha)}, \quad x + \alpha = \frac{y - \varphi(\alpha)}{\varphi'(\alpha)};$$

наћи вредности за p, q, r, s, t; *доказати да је* $pq = z$.

12). *Развити у редове, по растећим степенима од* x, *функције*

$$\cos(2\mu \operatorname{arc\,tang} x) \quad и \quad \sin(2\mu \operatorname{arc\,tang} x).$$

13). *Развити у ред, по растећим степенима од* x, *функцију*

$$-\operatorname{Log}(1 - x) - \operatorname{Log}(1 - x^2) - \operatorname{Log}(1 - x^3) - \ldots,$$

и доказати да је добивени ред збирљив, $(0 < x < 1)$.

14). *Развити у редове функције*

$$\operatorname{Log}\frac{1 + x}{1 - x + x^2} \quad и \quad \operatorname{Log}\frac{(1 + x)^2}{1 - x + x^2},$$

и из првог добивеног реда закључити да је

$$\mathrm{Log}\,2 = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{7\cdot 8} - \frac{1}{10\cdot 11} + \frac{1}{13\cdot 14} - \cdot\;\cdot\;\cdot\right).$$

(E. Catalan).

15). *Развити у ред, по растећим степенима од* α, *функцију*

$$\frac{1}{2\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}}\,\mathrm{Log}\,\frac{-x + \alpha + \sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}}{x - \alpha + \sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}}.$$

(E. Catalan).

16). *Развити у ред, по растећим степенима од* z, *функцију*

$$(1 - 2xz + z^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

17). *Развити у ред функцију* y, *која задовољава једначину*

$$y = a + (e^x - 1)\,e^y.$$

18). *Развити у ред функцију* y, *која задовољава једначину*

$$y = a + xe^{x+y}.$$

19). *Дата је једначина*

$$\sin(x - y) = m\sin(x + y),$$

где m *представља један дати број, чија је апсолутна вредност мања од јединице; развити у ред функцију* y *по растећим степенима од* m *и показати облик остатка, у случају кад се ограничени број чланова узме. (E. Rouché).*

20). *Дата је једначина*

$$z = x + \alpha e^{hz},$$

развити у ред $\sin z$, *по Lagrange-овом обрасцу.*

21). *Из једначине*

$$z^p = 2x + \alpha z^q$$

извести за z *један ред уређен по целим и растећим степенима од* α.

Посматрати случај $p = -q$.

22). *Развити у ред, по растећим степенима од* x, *функцију* z, *претпоставив да је*

$$z = f(y), \quad y = a + x\varphi_1(y) + x^2\varphi_2(y) + x^3\varphi_3(y) + \cdots.$$

23). *Развити у ред функцију* y, *која задовољава једначину*

$$y = a + \psi(x)\varphi(y);$$

где је

$$\psi(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots.$$

24). *Да ли израз* $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \cdots}}}$ *тежи једној граници, кад број корена бесконачно расте? Ако та граница постоји, израчунати је.*

25). *Наћи границу израза* $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$, *кад она постоји.*

26). *Наћи, за* $x = 2$, *вредност првог извода* y' *функције* y *дате једначином*

$$3y^3 - 6y^2 + 3y - x^2 + 4x - 7 = 0.$$

27). *Израчунати* $\dfrac{dy}{dx}$ *и* $\dfrac{2(x-a)(x-c) - (x-a)^2}{2(y-b)}$, *претпоставив да је*

$$y^2 - b^2 - (x-a)(x-c) = 0, \quad x = a, \quad y = b.$$

28). *Израчунати* $\frac{(x-b)^2(y-c)-(y-c)^3}{(x+a)(y-b)^2}$, *претпоставив да је*

$$x^2+xy+ax-cy+c(a+c)=0,\quad x=-a,\quad y=c.$$

29). *Наћи maximum функције*

$$f(x) = x^m(1-x^p)^q.$$

30). *Наћи minimum функције*

$$y = x^p + \frac{1}{x^q}.$$

31). *Наћи maximum функције* $\frac{x-1}{x^4}$; *још општије наћи maximum функције* $\frac{x^p-1}{x^{p+q}}$.

32). *Наћи maxima или minima функције*

$$y = \frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'};$$

посматрати случај када је $a' = 0$.

33). *Наћи maxima или minima функције*

$$y = \frac{x^3-x^2+3x^4-3x^5}{3x-3+x^2-x^3}.$$

34). *Одредити најмањи између свију квадрата, који се у једном датом квадрату може уписати.*

35). *Одредити највећи између свију цилиндара, који се у једном правом конусу даје уписати.*

36). *Треба у једној кугли конструисати прави конус, чија је огртачка површина maximum.*

37). *На дату елипсу, повући једну тангенту такву, да одсечак ове праве, који се находи између оса, буде minimum.*

38). *Испитати да ли функција*

$$z = \frac{1}{a}[m + \sqrt{x^2 + y^2}]^2,$$

има maxima или minima.

39). *Знајући да је*

$$x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 = o,$$

наћи maximum првог извода $\frac{dy}{dx}$.

40). *Дато је*

$$x^y = y^x,$$

па се тражи maximum или minimum за y.

41). *Наћи minimum функције*

$$u = 4x^2 + 4xy + 2y^2 - 2y + 2.$$

42). *Наћи minimum израза*

$$u = (a_1x + b_1y + c_1)^2 + (a_2x + b_2y + c_2)^2 + \cdots$$
$$\cdots + (a_nx + b_ny + c_n)^2.$$

43). *Наћи једну такву тачку да сума квадрâта њених одстојања од датих фиксних тачака буде minimum.*

44). *Наћи maximum функције*

$$y = \frac{x_1x_2\cdots x_n}{(a + x_1)(x_1 + x_2)\cdots(x_{n-1} + x_n)(x_n + b)}.$$

45). *Наћи maximum функције*

$$u = x^m y^n,$$

кад се претпостави

$$\alpha x + \beta y = k.$$

46). *Наћи maximum функције*

$$u = x^m y^n z^p,$$

претпоставив

$$x + y + z = a.$$

47). *Наћи полупречнике maxima или minima кӱрве*

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = k.$$

48). *Наћи maximum или minimum полупречника једне површине другог степена*

$$f(x, y, z) = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy = k.$$

49). *Разложити један број* a *на* n *положних делова:* x, y, z, · · ·, *тако да*

$$\Sigma x^2 + \Sigma xy$$

буде minimum.

50). *Наћи maximum или minimum функције*

$$u^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0.$$

51). *Помоћу једначина*

$$u = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$x + y + z = a, \quad yz + zx + xy = b^2,$$

одредити maximum или minimum функције u.

52). *Наћи maximum или minimum функције*

$$u^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos\alpha + 2zx\cos\beta + 2xy\cos\gamma,$$

претпоставив

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

53). *Дато је* m *линерних функција*

$$X_1, X_2, X_3, \cdot \cdot \cdot, X_m,$$

од n *промењљивих количина:* x, y, z, · · ·, w. *Означавајући, у опште, са* X_i *једну од тих функција, ставимо*

$$X_i = a_i x + b_i y + c_i z + \cdot \cdot \cdot + k_i w + l_i.$$

Посматрајмо суму S *квадрата тих* m *функција и нађимо minimum те суме, чија је егзистенција очевидна.*

54). *Са четири дате стране образовати један четвороугао, чија је површина maximum.*

55). *Дато је* n *тачака* $A_1, A_2, \cdot \cdot \cdot, A_n$ *у простору, кроз једну другу дату тачку повући једну раван од које ће сума квадрата одстојања од* n *тачака бити minimum.*

56). *Разделити један дати лук на* n *делова чија ће сума синуса бити maximum или minimum.*

57). *Уписати у једном датом кругу један троугао датога периметра а површине maximum.*

58). *Од свију полигона, исте површине и истог броја страна, наћи онај чији је периметар најмањи.*

59). *Између свију ѐлѝпсâ уписатих у датом правоугаонику која је највећа по површини? Која је најмања?*

60). *Описати троугао minimum око елипсе.*

61). *Описати око датог троугла један равнокраки троугао, чија је површина maximum.*

62). *Уписати у датом троуглу елипсу чија је површина maximum.*

ПОГРЕШКЕ

СТРАНА	ВРСТА	МЕСТО	ТРЕБА
2	7 оздо	$\frac{x^3}{3}$	$\frac{x^2}{3}$
2	7 оздо	$\frac{x^5}{5}$	$\frac{x^3}{5}$
11	4 оздо	$\perp \ldots,$	$+ \ldots,$
13	1 озго	$-\frac{\sin^3\theta}{1\,2\,3}r^3$	$-\frac{\sin^3\theta}{1\cdot 2\cdot 3}r^3$
13	6 оздо	$-\frac{\sin^2\theta}{1\cdot 2}r^2$	$-\frac{\sin^2\theta}{1\cdot 2}r^2$
16	8 озго	(A) н (B)	(A) и (B)
21	На крају шесте врсте оздо не треба запета.		
21	4 оздо	n — a	n-a
35	3 озго	Вредносг	Вредност
35	У другој врсти оздо после — 1 долази и		
37	4 оздо	$\frac{1}{2}y^3$	$\frac{1}{3}y^3$
38	7 оздо	$\frac{1}{1}\sin\theta$	$\frac{1}{1}r\sin\theta$
41	2 оздо	$3D - - 1$	$3D = - 1$
46	3 оздо	тангент	тангенту
51	4 озго	јеенaчине	једначине
66	7 озго	^{c}os mu =	cos mu =
79	14 озго	$C_{n+2}, C_n, C_{n+2},$	$C_{n+2}, C_n, C_{n-2},$
99	3 озго	функци е	функције

СТРАНА	ВРСТА	МЕСТО	ТРЕБА
106	4 озго	$\frac{2 \cdot 1}{1 \quad 1}$	$\frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 1}$
106	10 озго	$\frac{n(n-1)}{1 \quad 1}$	$\frac{n(n-1)}{1 \cdot 1}$
110	3 озго	*дифиниција*	*дефиниција*
115	3 оздо	длкле	дакле
124	3 оздо	изједначи	изједначив
136	7 оздо	Лагражовом	Лагранжовом
140	5 оздо	$-\frac{h^2}{2}\sin^2\varphi\sin^2\varphi$	$-\frac{h^2}{2}\sin^2\varphi\sin 2\varphi$
144	2 оздо	$\cos\mu(\arcsin x =$	$\cos\mu(\arcsin x) =$
147	9 озго	$\cdots - (2^2 - 1)$	$\cdots - (2^{2n} - 1)$
149	6 озго	$C_a^{k-1} C_b^2$	$C_a^{k-1} C_b^1$
151	8 озго	$\alpha_p A_n - 0,$	$\alpha_p A_n = 0,$
168	2 оздо	$dx - r(1-\cos t)\,dt.$	$dx = r(1-\cos t)\,dt.$
176	2 озго	a^2	a'^2
181	1 оздо	(Gauchy).	(Cauchy).
183	Прва врста оздо, пред $\frac{\partial^2 V}{\partial\theta\,\partial\psi}\,\frac{\cos\psi}{\varrho^2}$ долази знак minus.		
193	8 оздо	$f(x\ y)$	$f(x,\ y)$
194	1 озго после $x = r\cos p$ долази запета		
206	У другој врсти оздо први члан десно јесте $\pm\, p(px^2 + 2qx + r)^{-\frac{1}{2}}.$		
228	4 озго	уз ме мо	узмемо
229	У петој врсти озго после речи именитељу треба да дође реч десно		
235	6 оздо	$\frac{e^n - 1}{u}.$	$\frac{e^u - 1}{u}.$
243	2 оздо после речи више долази про-		
261	9 оздо после $6axy^2$ долази знак $=$		
289	На крају пете и шеснаесте врсте озго долази тачка		
298	Последња једначина, у шестој врсти оздо, јесте $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 1.$		

СТРАНА	ВРСТА	МЕСТО	ТРЕБА
316	5 озго	*п стаје*	*постаје*
325	1 оздо	обрасц,у	обрасцу,
329	У четвртој врсти озго треба да је $y'' = \frac{2f'^2 - ff''}{f^3}$.		
331	У петој врсти оздо треба да је $f^{(n-6)}(a) = \frac{b^3}{2 \cdot 4 \cdot 6} f^{(n)}(a)$		
335	5 оздо	корен	корен
342	1 озго	$n =$	$h =$
362	5 озго	$\alpha - 54^\circ 58'$	$\alpha = 54^\circ 58'$
368	6 озго	се	са
399	7 оздо	$y \frac{\partial f}{\partial x}$	$y \frac{\partial f}{\partial y}$
407	6 озго	$\mathrm{Log}(x + \sqrt{x^2 - a^2}$	$\mathrm{Log}(x + \sqrt{x^2 - a^2})$,
411	Пета врста озго треба да је (4) $x^y + y^x - 1 = 0$		
413	2 оздо	*Fnn*	*Fun*
415	Седма врста оздо треба да је (1) $\cos \theta = \cos \varphi + z$,		
416	У трећој врсти озго, десно, други члан у именитељу треба да има пред собом знак plus место minus.		