УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Урош Бошковић
Ментор: др Јелена Јоцковић

Уопштење модела GARCH и њихова примјена

— мастер рад —

Београд, 2018.

Предговор

Ауторегресивне моделе условне хетероскедастичности (ARCH) је увео Роберт Енгл у раду који је објављен у Економетрици 1982. године [11]. У том раду је предложена примјена у макроекономији и у том тренутку се није могло ни претпоставити да ће главна примјена ових модела бити у финансијама. Средином 80-тих, развојем генерализованих ауторегресивних модела условне хетероскедастичности расте и њихова популарност, како у науци тако и у индустрији. Због веома ефикасног моделовања волатилности, ови модели имали су велики утицај на финансије. Због свог доприноса Роберт Енгл је заједно са Кливом Грејнџером добио Нобелову награду за економију 2003. године.

У овом мастер раду је дат детаљан преглед ових модела и рад се састоји из четири поглавља. У првом поглављу је дат кратак подсјетник најважнијих карактеристика временских серија и уводе се неки нови појмови који се односе на финансијске временске серије. У другом поглављу се детаљно изучавају ARCH и GARCH модели, док се у трећем поглављу описују њихова најважнија уопштења. У четвртом поглављу представљена је примјена ових модела у финансијама. Сви примјери и симулације рађени су над реалним временским серијама у програмском језику R.

Желим да се захвалим својој менторки др Јелени Јоцковић на предложеној теми овог мастер рада која је веома интересантна и инспиративна. Захваљујем јој се на великој помоћи, као и на многобројним корисним савјетима и примједбама који су ми помогли у писању овог рада.

Такође желим да се захвалим својој породици на неизмјерној подршци и разумијевању које су ми пружали током мог студирања.

Београд, мај 2018. године,
Урош Бошковић

Садржај

Поглавље 1

Увод

У овом поглављу подсјетићемо се најважнијих карактеристика временских серија и увешћемо неке нове појмове који се односе на финансијске временске серије.

1.1 Стационарни процеси

Стационарност има централну улогу у анализи временских серија. Разлог за то је што на природан начин мијења хипотезу о независним и једнако расподијељеним опсервацијама у стандардној статистици. Узмимо у обзир низ реалних случајних величина $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$, дефинисаних на истом простору вјероватноћа. Такав низ назива се временска серија, и представља примјер дискретног случајног процеса. Постоје два облика стационарности.

Дефиниција 1.1.1. *За процес (X_t) се каже да је строго стационаран ако векотри $(X_1, ..., X_k)$ и $(X_{1+h}, ..., X_{k+h})$ имају исту заједничку расподјелу за свако $k \in \mathbb{N}$ и за свако $h \in \mathbb{Z}$.*

Дефиниција 1.1.2. *За процес (X_t) се каже да је слабо стационаран ако задовољава следеће услове:*

1. $E{X_t}^2 < \infty, \quad \forall t \in \mathbb{Z}$
2. $EX_t = m, \quad \forall t \in \mathbb{Z}$
3. $Cov(X_t, X_{t+h}) = \gamma_X(h), \quad \forall t, h \in \mathbb{Z}.$

Функција $\gamma_X(\cdot)$ назива се аутоковаријациона, а функција $\rho_X(\cdot) := \gamma_X(\cdot)/\gamma_X(0)$ аутокорелациона функција процеса (X_t).

Најједноставнији примјер слабо стационарног процеса је бијели шум. Овај процес је посебно значајан јер омогућава конструисање сложенијих стационарних процеса

Дефиниција 1.1.3. *Процес* (ε_t) *се зове бијели шум ако, за неку позитивну константу* σ^2 *важи:*

1) $E\varepsilon_t = 0, \quad \forall t \in \mathbb{Z}$

2) $E{\varepsilon_t}^2 = \sigma^2, \quad \forall t \in \mathbb{Z}$

3) $Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h}) = 0, \quad \forall t, h \in \mathbb{Z}, h \neq 0$

Дефиниција 1.1.4. *Уколико у претходној дефиницији услов 3 замијенимо јачим условом*

3') Промјенљиве ε_t *и* ε_{t+h} *су независне и једнако расподијељене, Тада се за процес* (ε_t) *каже да је јаки бијели шум*

Оцјењивање аутоковаријације

Гаусовски случајни процеси су у потпуности окарактерисани средњом вриједношћу и аутоковаријационом функцијом. За оне процесе који нису Гаусови, средња вриједност и аутоковаријациона функција дају слику о структурној зависности. У пракси, ови моменти нису познати и зато се оцјењују из реализованог узорка, који означавамо са $X_1, ..., X_n$. Овај корак је неизоставан за конструкцију било ког модела. За оцјену аутоковаријационе функције узимамо узорачку аутоваријациону функцију, која је за $0 \leq h < n$ дефинисана са

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-h} (X_j - \bar{X})(X_{j+h} - \bar{X}),$$

гдје је $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j$ и означава узорачку средину. Због симетрије аутоковаријационе функције за оцјену у негативним вриједностима h узимамо $\hat{\gamma}(-h) = \hat{\gamma}(h)$. Слично дефинишемо и функцију $\hat{\rho}(h) := \hat{\gamma}(h)/\hat{\gamma}(0)$ за $|h| < n$.

Претходна оцјена је асимптотски непристрасна. Постоје такође и друге сличне оцјене аутоковаријационе функције са истим асимптотским особинама (на примјер, ако бисмо у претходној оцјени $\frac{1}{n}$ замијенили са $\frac{1}{n-h}$). Међутим, оцјена коју смо написали има предност у односу на остале зато што је у том случају оцјена аутоковаријационе матрице $[\hat{\gamma}(i-j)]_{i,j}$ позитивно семидефинитна. Наравно, није препоручљиво користити узорачку аутоковаријацију када је h близу n, зато што је у том случају мали број доступних парова (X_j, X_{j+h}). Према Боксу, Џенкинсу и Рајнселу (1994) [5], оцјена аутоковаријације је корисна ако је $n > 50$ и $h \leq n/4$.

1.2 ARMA и ARIMA модели

Ови модели се често користе за анализирање каузалне структуре процеса или за предвиђање понашања серија у будућности. Класа ARMA модела се највише користи за предвиђање слабо стационарних случајних процеса. Ови модели се могу посматрати као природна последица тврђења које је дао Волд (1938) [6], и по ком се сваки слабо стационарни процес може представити у форми бесконачних покретних просјека и то у форми:

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varepsilon_{t-i},$$

гдје је (ε_t) линеарни иновативни процес од (X_t), такав да важи

$$\varepsilon_t = X_t - E(X_t | \mathcal{H}_X(t-1)),$$

гдје се $\mathcal{H}_X(t-1)$ односи на Хилбертов простор генерисан случајним величинама $X_{t-1}, X_{t-2}, ...$ и $E(X_t|\mathcal{H}_X(t-1))$ се односи на на ортогоналну пројекцију X_t на $\mathcal{H}_X(t-1)$. Низ коефицијената (c_i) је такав да $\sum_i {c_i}^2 < \infty$. Примијетимо да је процес (ε_t) слаби бијели шум.
Скраћивањем бесконачне суме у претходној једначини, добијамо процес

$$X_t(q) = \varepsilon_t + \sum_{i=1}^{q} c_i \varepsilon_{t-i},$$

који називамо процесом покретних просјека реда q, или $MA(q)$. Имамо

$$\|X_t(q) - X_t\|_2{}^2 = E{\varepsilon_t}^2 \sum_{i>q} {c_i}^2 \to 0, q \to \infty.$$

Одавде закључујемо да је скуп процеса покретних просјека коначног реда густ у скупу слабо стационарних процеса и чисто недетерминистичких процеса.

Дефиниција 1.2.1. *Слабо стационарни процес (X_t) је $ARMA(p,q)$ процес, гдје су p и q из скупа цијелих бројева, ако постоје реални коефицијенти $c, \phi_1, ..., \phi_p, \theta_1, ..., \theta_q$ такви да ,*

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad X_t + \sum_{i=1}^{p} \phi_i X_{t-i} = c + \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{q} \theta_j \varepsilon_{t-j},$$

гдје је (ε_t) *линеарни иновативни процес од* (X_t).

Ова дефиниција подразумијева ограничења за нуле полиномијалних функција $\phi(z) = 1 + \sum_{i=1}^{p} \phi_i z^i$ и $\theta(z) = 1 + \sum_{j=1}^{q} \theta_j z^i$. Главна предност овог модела је што на једноставан начин омогућава оптимално линеарно предвиђање процеса.
Многе финансијске временске серије имају тренд, па је немогуће претпоставити стационарност код таквих серија. Диференцирањем једном или више пута, тренд код оваквих серија углавном нестаје.
Нека $\triangle X_t = X_t - X_{t-1}$ представља прво диференцирање серије, и нека $\triangle^d X_t = \triangle(\triangle^{d-1} X_t)$ представља диференцирање реда d.

Дефиниција 1.2.2. *Нека је d позитиван цијели број. За процес (X_t) кажемо да је $ARIMA(p,d,q)$ ако за $k = 0, 1, ..., d-1$, процеси $(\triangle^k X_t)$ нису слабо стационарни, а $(\triangle^d X_t)$ јесте $ARMA(p,q)$ процес.*

Најједноставнији ARIMA процес јесте ARIMA(0,1,0), који се такође назива и случајно лутање, и описује се једначином

$$X_t = \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + ... + \varepsilon_1 + X_0, \quad t \geq 1,$$

гдје је ε_t слаби бијели шум.
Због статистичких погодности, ARMA и ARIMA модели најчешће претпостављају јаче услове за шум од слабог бијелог шума. *Јаки* ARMA односи се на ARMA модел из дефиниције 1.2.1 када је (ε_t) јаки бијели шум. Ова додатна претпоставка нам омогућава лакши рад, али смањује општост ARMA модела.
Редови (p, q) ARMA процеса су у потпуности одређени аутокорелационом функцијом.

Теорема 1.1. *(**Карактеризација ARMA процеса**) Нека је (X_t) слабо стационарни процес и ρ његова аутокорелациона функција. Једнакост*

$$\rho(h) + \sum_{i=1}^{p} \phi_i \rho(h-i) = 0, \text{ за свако } |h| > q,$$

важи ако и само ако је процес (X_t) ARMA(p,q) процес.

1.3 Финансијске временске серије

Моделовање финансијских временских серија је веома комплексан проблем. Та комплексност не долази само од разноврсности серија које постоје (акције, интересне каматне стопе,...), као ни због фреквенција у односу на које се посматрају (секунде, минути, сати, дани,...). Та комплексност је последица постојања бројних специфичности финансијских временских серија које је веома тешко вјештачки репродуковати коришћењем стохастичких модела. Већину ових специфичности дефинисао је Манделброт (1963) [7]. Њихове особине које ћемо сада представити односе се углавном на дневне серије које се односе на акције. Прије него што кренемо на набрајање специфичности финансијских временских серија, уводимо појам приноса активе.

Принос активе

У већини случајева се умјесто цијене активе посматра овај параметар и за то постоје два главна разлога. Први је тај да за просјечног инвеститора принос активе представља комплетну слику о инвестицији која не захтијева скалирање. Други разлог је тај што је лакше радити са серијама које се односе на принос активе него са серијама које се односе на цијену активе јер прве имају много боље статистичке особине.

Нека је P_t цијена активе у тренутку t и претпоставимо да актива коју посматрамо не исплаћује дивиденде. Дефинишемо *једнопериодични прости принос* као удио промјене цијене активе без дивиденди у току једног периода у односу на цијену активе у претходном тренутку.

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}.$$

Веза између R_t и P_t може се изразити и као

$$1 + R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}}.$$

Посједовање активе у току k временских периода од тренутка $t-k$ до тренутка t даје k-*периодични прости принос*

$$\begin{aligned} 1 + R_t[k] = \frac{P_t}{P_{t-k}} &= \frac{P_t}{P_{t-1}} \frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} ... \frac{P_{t-k+1}}{P_{t-k}} \\ &= \prod_{j=0}^{k-1} (1 + R_{t-j}). \end{aligned}$$

Одавде видимо да је k-периодични прости принос активе само производ k једнопериодичних приноса. У пракси, јако је битно који се временски период узима за рачунање приноса. Уколико период није наведен онда се сматра да је период једна година.

Даље ћемо дати дефиницију приноса у случају непрекидног камаћења. Природни логаритам простог приноса активе назива се *непрекидно камаћени принос* или *лог принос*:

$$r_t = \ln(1 + R_t) = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}} = p_t - p_{t-1},$$

гдје је $p_t = \ln(P_t)$. Непрекидно камаћени принос r_t има исте предности као и прост принос R_t. Посматрамо вишепериодични принос. Имамо:

$$\begin{aligned} r_t[k] &= \ln(1 + R_t[k]) \\ &= \ln[(1 + R_t)(1 + R_{t-1})...(1 + R_{t-k+1})] \\ &= \ln(1 + R_t) + \ln(1 + R_{t-1}) + ... + \ln(1 + R_{t-k+1}) \\ &= r_t + r_{t-1} + ... + r_{t-k+1}. \end{aligned}$$

Дакле, непрекидно камаћени вишепериодични принос представља суму простих приноса за сваки период.

Специфичности финансијских временских серија

Сада ћемо набројати специфичности које се односе на финансијске временске серије:

1) *Нестационарност серије која се односи на цијену:* Узорачке путање цијене су углавном веома сличне случајном лутању, док се за трајекторије приноса може претпоставити стационарност.

2) *Одсуство аутокорелације код приноса:* Серије приноса показују углавном мале аутокорелације, и оне су сличне бијелом шуму.

3) *Аутокорелација квадрираних приноса:* Квадрирани приноси (r_t^2) или апсолутни приноси ($|r_t|$) имају јаку аутокорелацију (в. слику 2.1). Ова особина није некомпатибилна са претпоставком бијелог шума за приносе, већ показује да тај бијели шум није јак.

4) *Груписање волатилности:* Велики апсолутни приноси ($|r_t|$) се појављују у групама (кластерима). Ова особина је видљива на узорачким путањама. Турбулентни периоди (са великом волатилношћу) су праћени периодима са малом волатилношћу. Ови подпериоди се не јављају периодично.

5) *Расподјеле са дебелим реповима:* Цртањем емпиријских расподјела дневних приноса, може се утврдити да они не одговарају Гаусовој расподјели. Класични тестови углавном доводе до одбијања хипотезе да су дневни приноси нормално расподијељени. Штавише, може се показати да расподјеле оваквих приноса имају тешке репове и да имају заоштрен врх у нули. Мјера ове особине је коефицијент спљоштености, и дефинише се као однос момента четвртог реда и квадрата дисперзије. Овај коефицијент је једнак 3 када је у питању нормална расподјела. У случају серија које се односе на принос, овај коефицијент је већи од 3. Када се повећа интервал у односу на који се посматра принос, ова особина нестаје, и емпиријска расподјела се приближава нормалној.

6) *Левериџ ефекат:* Левериџ се односи на асиметрични утицај позитивних и негативних вриједности серије на тренутну волатилност. Негативни принос тежи да повећа волатилност више од позитивног приноса исте јачине.

7) *Сезоналност:* Сезоналност представља један од најчешћих појава код финансијских временских серија. Занимљиво је поменути да се сезонски ефекти присутни чак и код серија које се односе на један дан.

Поглавље 2

Модели ARCH и GARCH

2.1 Мотивација

Волатилност је веома битан фактор у трговању опцијама и овдје означава условну дисперзију приноса активе. Посматрајмо цијену европске кол опције, која представља уговор који власнику опције даје право али не и обавезу да на дан доспијећа купи неки финансијски инструмент по унапријед договореној цијени K. Вријеме до доспијећа означавамо са l. Уколико власник опције може да изврши право које му опција даје у било ком тренутку до датума доспијећа, онда говоримо о америчкој кол опцији. Добро позната формула Блек-Шолса за одређивање цијене европске кол опције има следећи облик:

$$c_t = P_t \Phi(x) - K r^{-l} \Phi(x - \sigma_t \sqrt{l}), \qquad x = \frac{\ln(P_t / K r^{-l})}{\sigma_t \sqrt{l}} + \frac{1}{2} \sigma_t \sqrt{l},$$

гдје је P_t тренутна цијена активе, r је безризична каматна стопа, σ_t условна стандардна девијација лог приноса активе и $\Phi(x)$ вриједност функције стандардне нормалне расподјеле у тачки x. Волатилност је јако битна у менаџменту ризика јер се моделовањем волатилности омогућава једноставан приступ рачунању вриједности финансијске позиције при ризику. Такође, моделовањем волатилности временске серије побољшава се оцјена параметара као и прецизност предвиђања. У овом поглављу разматраћемо моделе ауторегресивне условне хетероскедастичности (ARCH) као и генерализоване ARCH моделе (GARCH) који се користе за моделовање волатилности. У општем случају, ако посматрамо неки случајни низ Y_t и низ вектора случајних величина $\boldsymbol{X}_t$, за Y_t се каже да има својство хетероскедастичности уколико се условна дисперзија $Var(Y_t|\boldsymbol{X}_t)$ мијења са промјеном t. Са друге стране, термин хомоскедастичност се односи на константну условну дисперзију и представља једну од главних претпоставки у моделима линеарне регресије, гдје је Y зависна промјенљива, а вектор $\boldsymbol{X}$ вектор предиктора. Код временских серија приноса могу се уочити периоди веће и мање волатилности који се смјењују. Ако је t такво да су до тог тренутка вриједности доста варирале, онда очекујемо и у тренутку t велике апсолутне вриједности приноса. С друге стране, ако су у блиској прошлости приноси мало варирали, онда очекујемо да ће тако остати и у тренутку t. То управо значи да условна дисперзија $Var(r_t|r_{t-1}, r_{t-2}, ...)$ није константна у времену. Касније ћемо видјети да је код ARCH модела, Y_t серија а вектор $\boldsymbol{X}_t$ прошлост те серије, тако да је ред модела одређен димензијом вектора $\boldsymbol{X}$, односно бројем корака у прошлости.

2.2 Структура модела

Нека је r_t лог принос активе у тренутку t. Главна идеја код изучавања волатилности јесте да је серија $\{r_t\}$ серијски некорелисана или незнатно корелисана, али серијски зависна. Модели волатилности настоје да *ухвате* ту зависност. Како бисмо посматрали моделе волатилности на прави начин, најприје ћемо размотрити условно очекивање и условну дисперзију приноса r_t за дато $\mathcal{F}_{t-1}$:

$$\mu_t = E(r_t|\mathcal{F}_{t-1}), \quad \sigma_t^2 = Var(r_t|\mathcal{F}_{t-1}) = E[(r_t - \mu_t)^2|\mathcal{F}_{t-1}], \tag{2.1}$$

гдје $\mathcal{F}_{t-1}$ представља информацију доступну у тренутку $t-1$. $\mathcal{F}_{t-1}$ је сигма алгебра генерисана претходним приносима. Код серија које се односе на принос постоји слаба или никаква серијска зависност. Због тога би једначина која се односи на условну средњу вриједност серије требало да буде једноставна, па претпостављамо да се r_t може описати једноставнијим моделима као што је стационарни ARMA(p,q) модел. Односно, претпостављамо да важи:

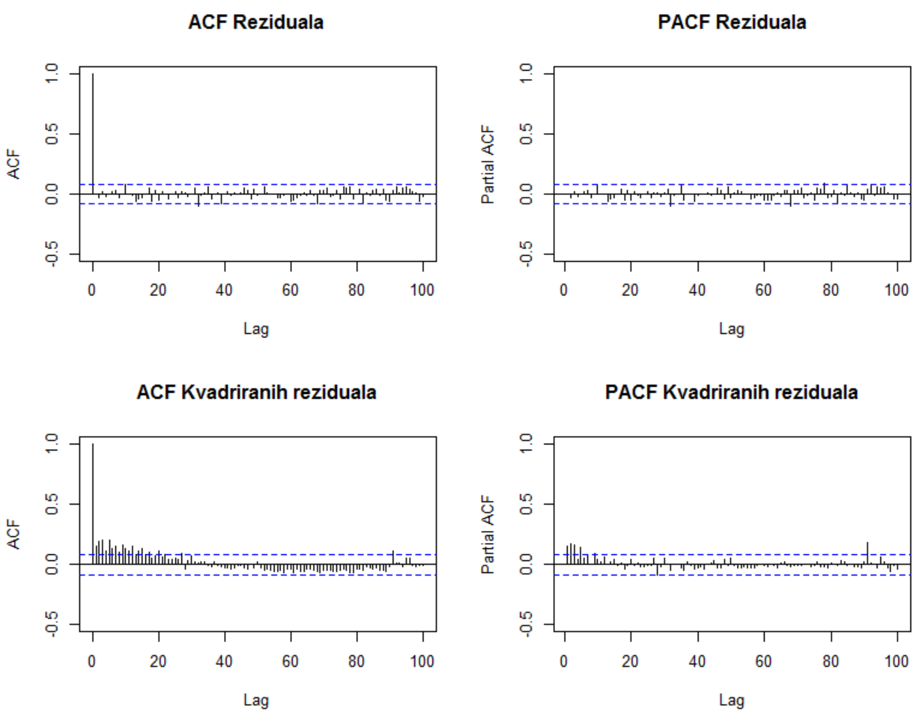
$$r_t = \mu_t + a_t, \quad \mu_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^{p} \phi_i r_{t-i} - \sum_{i=1}^{q} \theta_i a_{t-i}, \tag{2.2}$$

гдје су p, q ненегативни цијели бројеви, а a_t је бијели шум.
Параметри p и q зависе од фреквенције серије. На примјер, дневни приноси показују одређену серијску корелацију, док то није случај код мјесечних приноса. Комбиновањем претходне двије формуле добија се:

$$\sigma_t^2 = Var(r_t|\mathcal{F}_{t-1}) = Var(a_t|\mathcal{F}_{t-1}).$$

Модели условне хетероскедастичности могу се сврстати у двије групе. Прва група је она у којој постоји функција која дефинише σ_t^2, док је у другој групи σ_t^2 дато стохастичком једначином. GARCH модели које проучавамо у овом раду спадају у прву групу.
Ради једноставности, сматраћемо да је дат модел за условно очекивање. a_t назива се шок или центрирани принос у тренутку t, а σ_t представља квадратни коријен σ_t^2. Модел за μ_t назива се једначином средње вриједности, док модел за σ_t^2 називамо једначином волатилности приноса r_t.

2.3 Модел ARCH



Слика 2.1: Графици ACF и PACF (узорачке аутокорелационе и парцијалне аутокорелационе функције) центрираних приноса (резидуала једначине средње вриједности) и њихових квадрата серије NASDAQ.

Са слике 2.1, на графику горе лијево, се уочава слаба аутокорелација центрираних приноса. Ниједна оцијењена аутокорелација није значајна, то јест све упадају у област прихватања хипотеза $H_0 : \rho_k = 0$ (испрекидане линије). Такође, ниједна парцијална аутокорелација није значајна (график горе десно). Са друге стране, на графику доље лијево, видимо да квадрирани центрирани приноси јесу аутокорелисани. Скоро све корелације на првих 20 задршки су значајне - значајно различите од 0. Одатле се може закључити да не постоји серијска корелација али да постоји серијска зависност, јер да се ради о низу независних случајних величина, корелације између квадрираних чланова би такође биле једнаке 0.

Најједноставнији модел волатилности је ARCH. Основна идеја овог модела је да су центрирани приноси a_t некорелисани али зависни и да се та зависност може описати једноставном квадратном функцијом претходних вриједности. Специјално, ARCH(m) модел има следећи облик

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad {\sigma_t}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + ... + \alpha_m a_{t-m}^2, \tag{2.3}$$

гдје је ε_t низ независних и једнако расподијељених случајних величина са средњом вриједношћу 0 и дисперзијом 1, $\alpha_0 > 0$, и $\alpha_i \geq 0$, за $i > 0$. Коефицијенти морају да задовоље неке услове како би се осигурало да дисперзија a_t буде коначна. У пракси се често претпоставља да ε_t има нормалну или стандардизовану Студентову t-расподјелу.

Из структуре модела се може примијетити да велики квадрирани шокови до тренутка t доводе до велике условне дисперзије центрираног приноса у тренутку t. Одатле закључујемо да постоји и већа вјероватноћа да и шок у тренутку t узме већу вриједност (по модулу). Односно, у моделу ARCH постоји већа вјероватноћа да велике шокове прате велики шокови него мали.

Особине ARCH модела

Како бисмо схватили ARCH моделе, проучићемо детаљније ARCH(1) модел:

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad {\sigma_t}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 {a_{t-1}}^2,$$

гдје су $\alpha_0 > 0$, и $\alpha_1 \geq 0$. Очекивање од a_t је 0,

$$E(a_t) = E[E(a_t|\mathcal{F}_{t-1})] = E[\sigma_t E(\varepsilon_t)] = 0.$$

Дисперзија a_t се може представити на следећи начин

$$Var(a_t) = E(a_t^2) = E[E(a_t^2|\mathcal{F}_{t-1})] = E(\alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2) = \alpha_0 + \alpha_1 E(a_{t-1}^2).$$

Како је a_t стационарни процес важи $E(a_t) = 0, \quad Var(a_t) = Var(a_{t-1}) = E(a_{t-1}^2)$. Одатле се добија да је $Var(a_t) = \alpha_0 + \alpha_1 Var(a_{t-1})$, односно

$Var(a_t) = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}$. Како дисперзија a_t мора бити позитивна, мора да важи $0 \leq \alpha_1 < 1$. Осим тога, понекад се јавља потреба за постојањем виших момената a_t, па се јављају додатна ограничења за α_1. На примјер, када проучавамо реп расподјеле, потребно је да четврти моменат a_t буде коначан. Под претпоставком нормалности за ε_t у 2.3 имамо

$$E(a_t^4|\mathcal{F}_{t-1}) = 3(\sigma_t^2)^2 = 3(\alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2)^2.$$

Одатле се добија

$$E(a_t^4) = E[E(a_t^4|\mathcal{F}_{t-1})] = 3E((\alpha_0+\alpha_1 a_{t-1}^2)^2) = 3E[\alpha_0^2+2\alpha_0\alpha_1\alpha_{t-1}^2+\alpha_1^2 a_{t-1}^4].$$

Ако је и функција четвртог момента процеса a_t константна, односно $m_4 = E(a_t^4)$, имамо

$$m_4 = 3E[\alpha_0^2 + 2\alpha_0\alpha_1 Var(a_t) + \alpha_1^2 m_4] = 3\alpha_0^2(1 + \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}) + 3\alpha_1^2 m_4.$$

Одавде добијамо једначину за m_4,

$$m_4 = \frac{3\alpha_0^2(1+\alpha_1)}{(1-\alpha_1)(1-3\alpha_1^2)}.$$

Како је четврти моменат позитиван, из претходне једначине уочавамо да α_1 мора задовољити услов $1 - 3\alpha_1^2 > 0$, односно $0 \leq \alpha_1^2 < 1/3$. Тада за коефицијент спљоштености важи

$$\frac{E(a_t^4)}{[Var(a_t)]^2} = \frac{3\alpha_0^2(1+\alpha_1)}{(1-\alpha_1)(1-3\alpha_1^2)} \cdot \frac{(1-\alpha_1)^2}{\alpha_0^2} = 3\frac{1-\alpha_1^2}{1-3\alpha_1^2} > 3.$$

Одавде видимо да је реп расподјеле a_t тежи него код нормалне расподјеле, па самим тим вјероватније је да се појаве аутлајери код шокова ARCH(1) модела него код Гаусовог бијелог шума. Ове особине наслеђују и остали ARCH модели. Услов $a_i \geq 0$ из једначине 2.3 се може ослабити. Ово је услов који омогућава да условна дисперзија σ_t^2 буде позитивна за свако t. Природан начин да ово постигнемо је да запишемо ARCH(m) модел на следећи начин

$$a_t = \sigma_t\varepsilon_t, \quad {\sigma_t}^2 = \alpha_0 + A'_{m,t-1}\Omega A_{m,t-1}, \tag{2.4}$$

гдје је $A_{m,t-1} = (a_{t-1}...a_{t-m})'$ и Ω је $m \times m$ ненегативно дефинитна матрица. ARCH(m) модел у 2.3 захтијева да ова матрица буде дијагонална.

Слабости ARCH модела

1) Модел претпоставља да позитивни и негативни шокови имају једнак утицај на волатилност, зато што волатилност зависи од квадрата претходних шокова. У пракси је познато да финансијске активе реагују различито на позитивне и негативне шокове.

2) ARCH модел је рестриктиван. На примјер, α_1^2 код ARCH(1) модела мора бити у интервалу $[0, \frac{1}{3}]$ уколико желимо да серија има коначан четврти моменат. Ограничења се још више компликују за ARCH моделе виших редова.

3) ARCH модел не даје увид у извор варијабилности финансијских серија, већ само омогућавају описивање понашања условне дисперзије. Ови модели нам не дају узроке због којих долази до тог понашања.

4) ARCH модели често превиде волатилност јер споро реагују на велике изоловане шокове.

Изградња ARCH модела

Изградња модела састоји се из три корака:

1) изградња модела за серије приноса (нпр. ARMA) како би се одстранила линеарна зависност из података, а затим коришћење резидуала модела за тестирање ARCH ефеката;

2) одређивање реда ARCH модела;

3) Провјера модела. Више детаља ће бити дато у наставку.

Моделовање ефекта средње вриједности и тестирање
ARMA модел се користи како би уклонио серијску корелацију у подацима. За већину серија приноса актива, сврха овог корака је уклањање узорачке средине из података уколико је она значајно већа од 0, као и за уклањање серијске корелације. За неке дневне серије, добар је и AR модел. Резидуали ARMA модела би требало да буду некорелисани, што се може, осим на основу графика ACF, провјерити и Љунг-Боксовим тестом. Овај тест тестира, за неко одабрано k, хипотезу $H_0 : \rho_1 = \rho_2 = ... = \rho_k = 0$ против алтернативе да нека аутокорелација

није једнака нули. Осим некорелисаности резидуала, требало би да постоји корелисаност у квадрираним резидуалима. Љунг-Бокс тест се и овдје може користити тако што се тестира хипотеза за серију a_t^2 - ако је присутна условна хетероскедастичност, нулту хипотезу требало би одбацити. Осим Љунг-Боксовог теста може се користити и тест Лагранжовог множиоца. Овај тест је еквивалентан F-тесту за тестирање $\alpha_i = 0, \quad i = 1, ..., m$ у линеарној регресији

$$a_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + ... + \alpha_m a_{t-m}^2 + e_t, \quad t = m+1, ..., T,$$

гдје је e_t грешка, m је унапријед одређен позитивни цијели број, а T је обим узорка. Нека је $SSR_0 = \sum_{t=m+1}^{T}(a_t^2 - \bar{\omega})^2$, гдје је ω узорачка средина од a_t^2, и $SSR_1 = \sum_{t=m+1}^{T} \hat{e}_t$, гдје су $\hat{e}_t$ резидуали линеарне регресије од малоприје. Тада имамо

$$F = \frac{(SSR_0 - SSR_1)/m}{SSR_1/(T - 2m - 1)},$$

које асимптотски има χ^2 расподјелу са m степени слободе под нултом хипотезом.

Одређивање реда модела

Ако је вриједност F статистике значајна онда је откривена условна хетероскедастичност код серије центрираних приноса, и користимо график узорачке парцијалне аутоковаријационе функције (PACF) да одредимо ред ARCH модела. Коришћење PACF за одређивање реда модела објашњавамо на следећи начин. Како је $\sigma_t^2 = E(a_t^2|\mathcal{F}_{t-1})$ имамо да важи

$$E(a_t^2|\mathcal{F}_{t-1}) = \alpha_0 + ... + \alpha_1 a_{t-1}^2 + ... \alpha_m a_{t-m}^2.$$

На основу овог, има смисла оцијенити ред ARCH модела као ред AR модела серије a_t^2.

Дефинишимо $\eta_t = a_t^2 - \sigma_t^2$. Може се показати да је η_t некорелисана серија са средњом вриједношћу 0. ARCH модел тада записујемо

$$a_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 {a_{t-1}}^2 + ... + \alpha_m {a_m}^2 + \eta_t,$$

што је облик AR(m) модела за a_t^2, осим што η_t није низ једако расподијељених случајних величина. PACF је корисан алат за одређивање реда m.

Оцјењивање параметара

Двије функције максималне вјеродостојности се најчешће користе за оцјењивање параметара ARCH модела. Под претпоставком нормалности, функција максималне вјеродостојности ARCH(m) модела је

$$\begin{aligned} f(a_1, ..., a_T|\alpha) &= f(a_T|\mathcal{F}_{T-1})f(a_{T-1}|\mathcal{F}_{T-2})...f(a_{m+1}|\mathcal{F}_m)f(a_1, ..., a_m|\alpha) \\ &= \prod_{t=m+1}^{T} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left[\frac{-a_t^2}{2\sigma_t^2}\right] \times f(a_1, ..., a_m|\alpha), \end{aligned}$$

гдје је $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_m)'$ и $f(a_1, ..., a_m|\alpha)$ функција густине заједничке расподјеле за $a_1, ..., a_m$. Како је запис функције $f(a_1, ..., a_m|\alpha)$ компликован, углавном се она изоставља из функције максималне вјеродостојности, нарочито ако је узорак велики. Тако се добија условна функција максималне вјеродостојности

$$f(a_{m+1}, ..., a_T|\alpha, a_1, ..., a_m) = \prod_{t=m+1}^{T} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left[\frac{-a_t^2}{2\sigma_t^2}\right],$$

гдје се σ_t^2 рачуна рекурзивно. Максимизирање ове функције је еквиваленто максимизирању њеног логаритма, са којим је лакше радити. Логаритам претходне функције је

$$l(a_{m+1}, ..., a_T|\alpha, a_1, ..., a_m) = \sum_{t=m+1}^{T} -\frac{1}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln(\sigma_t^2) - \frac{1}{2}\frac{a_t^2}{\sigma_t^2}.$$

Како $\ln(2\pi)$ не укључује никакве параметре, проблем се своди на максимизирање функције

$$-\sum_{m+1}^{T} \left[\frac{1}{2}\ln(\sigma_t^2) + \frac{1}{2}\frac{a_t^2}{\sigma_t^2}\right],$$

гдје се σ_t^2 рачуна рекурзивно.
У неким случајевима је погоднија претпоставка да ε_t има стандардизовану Студентову t-расподјелу. Нека x_ν има Студентову t-расподјелу са ν степени слободе. Тада је $Var(x_\nu) = \nu/(\nu - 2)$, за $\nu > 2$, и ми користимо $\varepsilon_t = x_\nu/\sqrt{\nu/(\nu - 2)}$. Функција густине расподјеле за ε_t

$$f(\varepsilon_t|\nu) = \frac{\Gamma((\nu + 1)/2)}{\Gamma(\nu/2)\sqrt{(\nu - 2)\pi}} \left(1 + \frac{\varepsilon_t^2}{\nu - 2}\right)^{-(\nu+1)/2}, \quad \nu > 2,$$

гдје је $\Gamma(x)$ гама функција ($\Gamma(x) = \int_0^\infty y^{x-1}e^{-y}dy$). Коришћењем једнакости $a_t = \sigma_t\varepsilon_t$, условна функција максималне вјеродостојности добија, за $\nu > 2$ следећи облик

$$f(a_{m+1}, ..., a_T|\alpha, a_1, ..., a_m) = \prod_{t=m+1}^{T} \frac{\Gamma((\nu + 1)/2)}{\Gamma(\nu/2)\sqrt{(\nu - 2)\pi}} \frac{1}{\sigma_t} \left(1 + \frac{a_t^2}{(\nu - 2)\sigma_t^2}\right)^{-(\nu+1)/2}.$$

Број степени слободе Студентове t-расподјеле се може унапријед задати или се и тај параметар може оцијенити заједно са осталима. Уколико је број степени слободе унапријед задат, онда логаритам условне функције максималне вриједности има следећи облик

$$l(a_{m+1},...,a_T|\alpha,a_1,...,a_m) = -\sum_{t=m+1}^{T}\left[\frac{\nu+1}{2}\ln\left(1+\frac{a_t^2}{(\nu-2)\sigma_t^2}\right)+\frac{1}{2}\ln(\sigma_t^2)\right].$$

Уколико желимо истовремено да оцијенимо и параметар ν, онда логаритам условне функције максималне вриједности има облик

$$\begin{aligned} l(a_{m+1},...,a_T|\alpha,a_1,...,a_m,\nu) &= (T-m)[\ln(\Gamma((\nu+1)/2)) - \ln(\Gamma(\nu/2)) \\ &\quad - 0.5\ln((\nu-2)\pi)] + l(a_{m+1},...,a_T|\alpha,a_1,...,a_m). \end{aligned}$$

Провјера модела

Код ARCH модела, стандардизовани шокови

$$\tilde{a}_t = \frac{a_t}{\sigma_t}$$

су независне и једнако расподијељене случајне величине које имају нормалну или стандардизовану Студентову t-расподјелу. То значи да се ARCH модел може провјерити испитивањем серије $\{\tilde{a}_t\}$. Љунг-Боксов тест за некорелисаност $\tilde{a}_t$ се може користити за провјеру коректности модела једначине средње вриједнсоти, док се истим тестом провјерава некорелисаност $\tilde{a}_t{}^2$, чиме се показује коректност модела волатилности. За тестирање претпостављење расподјеле често се користи Q-Q график.

Предвиђање

Предвиђања се код ARCH модела рачунају рекурзивно, као што је случај и код ауторегресивних модела. Посматрајмо ARCH(m) модел. Ако се налазимо у тренутку h, онда је предвиђање σ_{h+1}^2 за један корак унапријед дато једначином

$$\sigma_h^2(1) = \alpha_0 + \alpha_1 a_h^2 + ... + \alpha_m a_{h+1-m}^2.$$

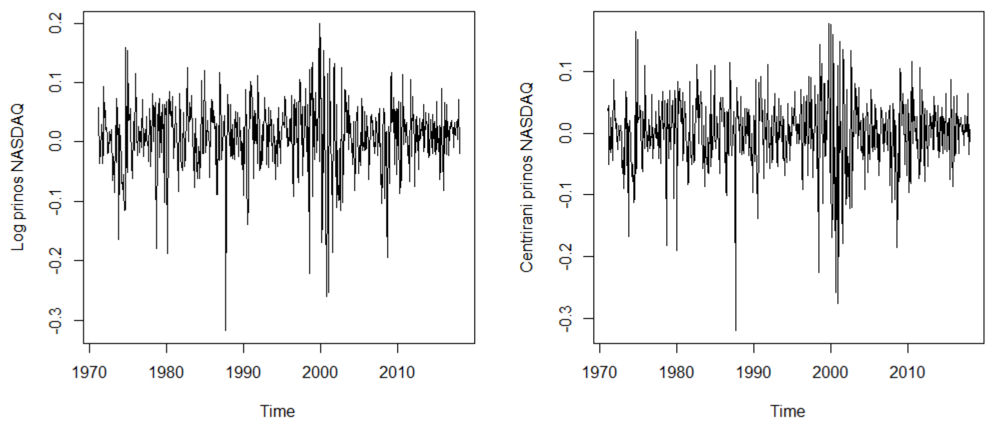
Предвиђање за 2 корака унапријед је

$$\sigma_h^2(2) = \alpha_0 + \alpha_1\sigma_h^2(1) + \alpha_2 a_h^2 + ... + \alpha_m a_{h+2-m}^2,$$

а предвиђање σ_{h+l}^2 за l корака унапријед је

$$\sigma_h^2(l) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{m}\alpha_i\sigma_h^2(l-i), \tag{2.5}$$

гдје је $\sigma_h^2(l-i) = \sigma_{h+l-i}^2$, ако је $l-i \le 0$.



Слика 2.2: Лог приноси и центрирани приноси серије NASDAQ

Примјер 1. *Посматрајмо серију мјесечних лог приноса акција берзе NASDAQ у периоду од фебруара 1971. године до марта 2018. године. Добија се да је једначина средње вриједности за ову серију облика MA(1). На слици 2.2 видимо графике серија лог приноса и центрираних приноса. Већ смо објаснили како постоји ARCH ефекат у серији центрираних приноса јер не постоји корелација између резидуала, а постоји међу њиховим квадратима (в. слику 2.1). Покушаћемо да серију центрираних приноса уклопимо у ARCH модел. Са графика за PACF квадрираних резидуала (доље десно) уочавамо прве три значајне парцијалне аутокорелације. Претпоставићемо да је ред ARCH модела 3. Како бисмо уклопили MA(1)-ARCH(3) модел користимо пакет rugarch програмског језика R. Једна од предности овог пакета је што постоји мноштво статистика које се рачунају и исписују за сваки модел. На слици 2.3 је дат испис свих статистика MA(1)-ARCH(3) модела са иновацијама које су нормално расподијељене, док ће у осталим примјерима бити дате само најважније статистике. Једначина овог модела је*

$$\begin{aligned}
r_t =& 0.009095 + a_t + 0.165397a_{t-1} \\
a_t =& \sigma_t \varepsilon_t \\
\sigma_t^2 =& 0.001662 + 0.183458a_{t-1}^2 + 0.249302a_{t-2}^2 + 0.145655a_{t-2}^2.
\end{aligned}$$

Као мјера квалитета модела, користи се Akaike информациони критеријум AIC. Вриједности AIC се рачунају по формули $AIC = 2k - \ln(\hat{L})$, *гдје се* k *односи на број параметара модела који оцјењујемо, а* $\hat{L}$ *вриједност функције максималне вјеродостојности, па је циљ да AIC* *буде што мањи. Не постоји граница које вриједности AIC су довољно мале, AIC се користи само за поређење више модела у потрази за најбољим. AIC вриједност овог модела је -2.9063. Такође, уочавамо и да су резидуали некорелисани што можемо потврдити и тестом Љунг-Бокса за лаг 10. p-вриједности овог теста које се добијају за резидуале и квадриране резидуале су 0.9619 и 0.9364 респективно, па закључујемо да су резидуали некорелисани и да су модели средње вриједности и волатилности добри. Остало је још да провјеримо расподјелу стандардизованих резидуала* $\tilde{a}_t$*. Цртањем Q-Q графика (слика 2.4) уочавамо да је расподјела стандардизованих резидуала блиска нормалној. Ово потврђујемо и Пирсоновим* χ^2 *тестом, адаптираним за тестирање сложене нулте хипотезе о нормалности, чија је p-вриједност 0.07. У случају модела код ког иновације имају Студентову t-расподјелу са 7 степени слободе добијају се мало боље статистике (AIC=-2.9709) и такође некорелисани резидуали, али због незнатног побољшања и веће комплексности, задржавамо први модел.*

2.4 Модел GARCH

Иако је ARCH модел једноставан, обично захтијева много параметара за описивање волитилности приноса активе. Због тога је Бољерсев (1986) [8] представио корисну надградњу ARCH модела, која је позната као генерализовани ARCH модел или GARCH модел. За лог приносе r_t, претпостављамо да се једначина средње вриједности може на адекватан начин описати ARMA моделом. Нека је $a_t = r_t - \mu_t$ центрирани принос. Тада a_t има облик GARCH(m,s) ако важи

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{s} \beta_j \sigma_{t-j}^2, \tag{2.6}$$

гдје је ε_t низ независних и једнако расподијељених случајних величина са средњом вриједношћу 0 и дисперзијом 1, $\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0, \beta_j \geq 0$ и $\sum_{i=1}^{max(m,s)} (\alpha_i + \beta_i) < 1$. Овдје се сматра да је $\alpha_i = 0$, за $i > m$ и $\beta_j = 0$, за $j > s$. Због ограничења за $\alpha_i + \beta_j$ дисперзија a_t је коначна, док условна дисперзија еволуира током времена. Као и раније, претпостављамо да ε_t има нормалну или стандардизовану Студентову t-расподјелу. Уколико у једначини 2.6 поставимо да је $s = 0$, добија се ARCH(m) модел.

Да бисмо схватили особине GARCH модела, добро је посматрати следећу репрезентацију модела. Нека је $\eta_t = a_t^2 - \sigma_t^2$, одакле важи $\sigma_t^2 = a_t^2 - \eta_t$. Постављањем $\sigma_{t-i}^2 = a_{t-i}^2 - \eta_{t-i} (i = 0, ..., s)$, GARCH модел се може записати као

$$a_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{max(m,s)} (\alpha_i + \beta) a_{t-i}^2 + \eta_t + \sum_{j=1}^{s} \beta_j \eta_{t-j}. \tag{2.7}$$

Лако се провјерава да је η_t процес разлика мартингала. За то су испуњени услови

$$\begin{aligned} E|\eta_t| &< \infty \\ E(\eta_t|\mathcal{F}_{t-1}) &= E(a_t^2 - \sigma_t^2|\mathcal{F}_{t-1}) \\ &= \sigma_t^2 - \sigma_t^2 = 0. \end{aligned}$$

У општем случају η_t није низ независних и једнако расподијељених случајних величина. Једначина 2.7 има облик ARMA модела за a_t^2. Коришћењем средње вриједности ARMA модела имамо

$$E(a_t^2) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^{max(m,s)} (\alpha_i + \beta_i)},$$

гдје је претходним ограничењима обезбијеђено да је именилац позитиван.
Предности и мане GARCH модела могу се уочити посматрањем најједноставнијег модела, GARCH(1,1), чија је једначина

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2, \quad 0 \leq \alpha_1, \beta_1 \leq 1, (\alpha_1 + \beta_1) < 1. \tag{2.8}$$

Одавде уочавамо да је велико a_{t-1}^2 углавном праћено великим a_t^2, што доводи до груписања волатилности, што је познато својство финансијских временских серија. Такође, уколико важи $1 - 2\alpha_1^2 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 > 0$, онда важи

$$\frac{E(a_t^4)}{[E(a_t^2)]^2} = \frac{3[1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2]}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 - 2\alpha_1^2} > 3.$$

Уочавамо да је слично као и код ARCH модела, реп расподјеле GARCH(1,1) модела тежи од репа код нормалне расподјеле. Овај модел представља једноставну параметарску функцију која се користи за описивање волатилности.

Предвиђање GARCH модела врши се на сличан начин као и код ARMA модела. Посматрајмо GARCH(1,1) модел и претпоставимо да се налазимо у тренутку h. Предвиђање за 1 корак унапријед је

$$\sigma_{h+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_h^2 + \beta_1 \sigma_h^2$$

гдје су a_h и σ_h^2 познати у тренутку h. Одатле, предвиђање за 1 корак унапријед је дато једначином

$$\sigma_h^2(1) = \alpha_0 + \alpha_1 a_h^2 + \beta_1 \sigma_h^2.$$

За предвиђање више корака унапријед, користимо $a_t^2 = \sigma_t^2 \varepsilon_t^2$ и записујемо једначину 2.8 на следећи начин

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\sigma_t^2 + \alpha_1 \sigma_t^2 (\varepsilon_t^2 - 1).$$

За $t = h + 1$, једначина постаје

$$\sigma_{h+2}^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\sigma_{h+1}^2 + \alpha_1 \sigma_{h+1}^2 (\varepsilon_{h+1}^2 - 1).$$

Како је $E(\varepsilon_{h+1}^2 - 1 | \mathcal{F}_h) = 0$, предвиђање за 2 корака унапријед у тренутку h записујемо једначином

$$\sigma_h^2(2) = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\sigma_h^2(1).$$

У општем случају важи

$$\sigma_h^2(l) = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\sigma_h^2(h - l), \quad l > 1. \tag{2.9}$$

Коришћењем претходне једначине, добијамо да је предвиђање за l корака унапријед

$$\sigma_h^2(l) = \frac{\alpha_0[1 - (\alpha_1 + \beta_1)^{l-1}]}{1 - \alpha_1 - \beta_1} + (\alpha_1 + \beta_1)^{l-1} \sigma_h^2(1).$$

Одатле слиједи,

$$\sigma_h^2(l) \to \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \beta_1}, \text{ за } l \to \infty,$$

под условом да $\alpha_1 + \beta_1 < 1$. Предвиђање волатилности GARCH(1,1) модела за више корака унапријед конвергира дисперзији a_t под условом да $Var(a_t)$ постоји.

Примјер 2. *Посматрајмо серију мјесечиних лог приноса индекса S&P 500 од јануара 1950. године до марта 2018. године. Ову серију ћемо посматрати за више типова модела GARCH што ће нам служити за њихово поређење. Процес одређивања реда и параметара модела је сличан претходном примјеру. Коришћењем функције auto.arima из пакета forecast добијено је да је одговарајући модел средње вриједности ARMA(3,2). Резидуали овог модела не показују значајне аутокорелације. На слици 2.5 са графика аутокорелација ACF резидуала a_t^2, може се уочити да* *постоји јака линеарна зависност, па постоји потреба за моделовањем волатилности. Након испробавања више модела, одлучили смо се за модел ARMA(3,2)-GARCH(1,1). Оцијењена расподјела резидуала је Студентова* t*-расподјела са 8 степени слободе. Једначина модела је*

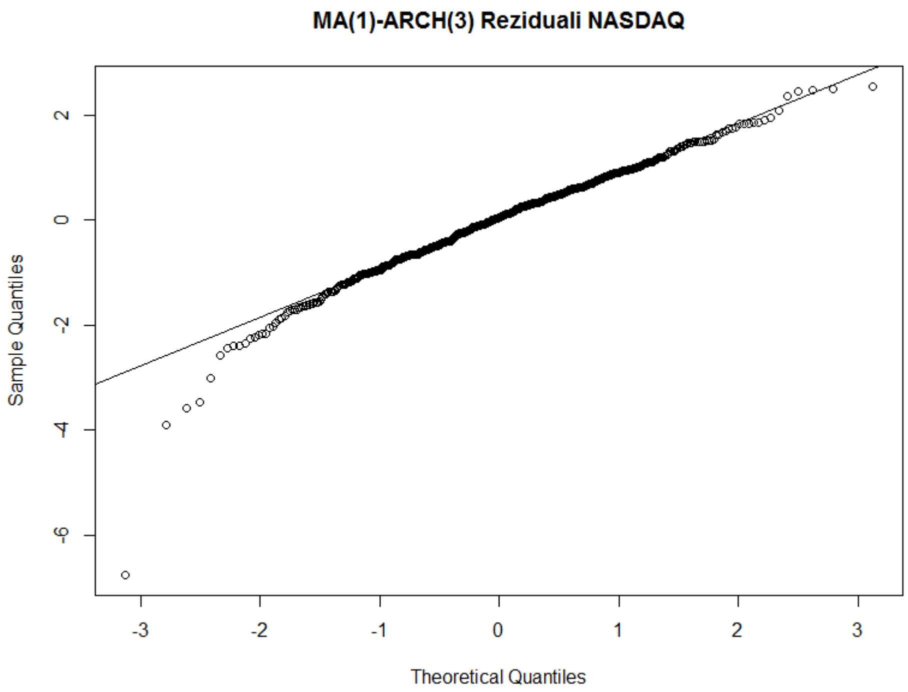
$$\begin{aligned} r_r =& 0.008135 + 1.023806 r_{t-1} - 0.888253 r_{t-2} + 0.035346 r_{t-3} + \\ &+ a_t - 1.038246 a_{t-1} + 0.867294 a_{t-2} \\ a_t =& \sigma_t \varepsilon_t \\ \sigma_t^2 =& 0.000119 + 0.118470 a_{t-1}^2 + 0.814186 \sigma_{t-1}^2 . \end{aligned}$$

AIC овог модела је -3.6374, а функција максималне вјеродостојности 1499.506. Љунг-Боксовим тестом је потврђено да не постоји колинеарност у серији стандардизованих резидуала и квадрираних стандардизованих резидуала GARCH(1,1) модела (p-вриједности су 0.6332 и 0.8344 респективно), док се са Q-Q графика уочава да стандардизовани резидуали имају расподјелу приближну стандардизованој Студентовој t*-расподјели са 8 степени слободе.*

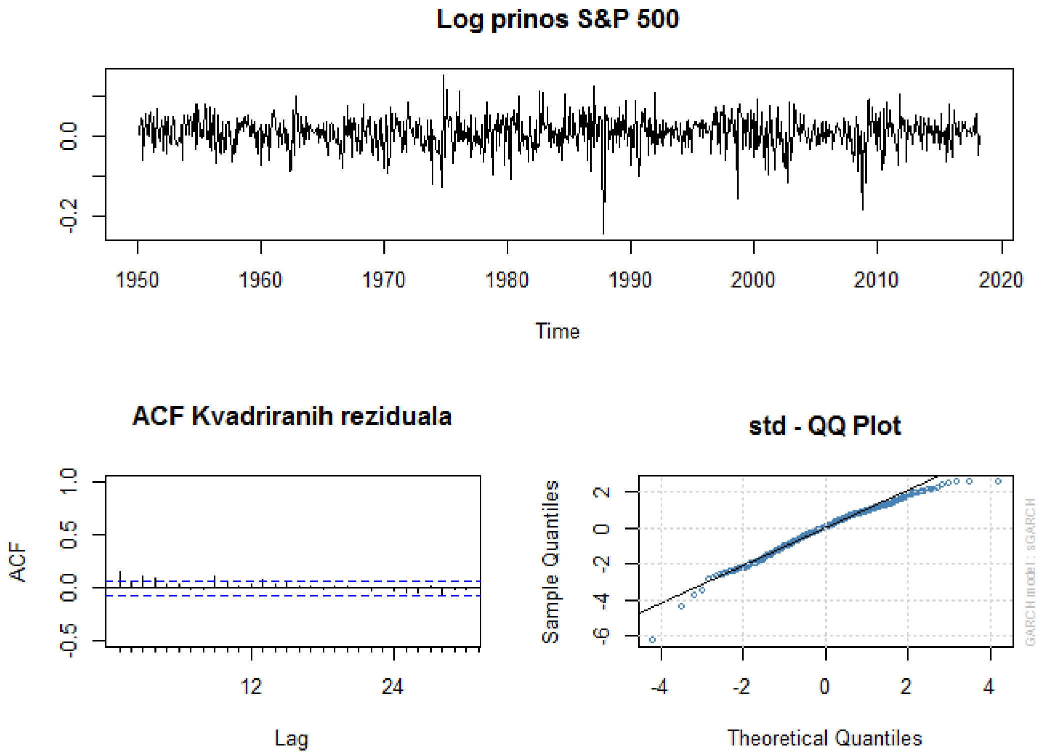
```
*---------------------------------*
*          GARCH Model Fit        *
*---------------------------------*

Conditional Variance Dynamics
-----------------------------------
GARCH Model     : sGARCH(3,0)
Mean Model      : ARFIMA(0,0,1)
Distribution    : norm

Optimal Parameters
------------------------------------
        Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
mu      0.009095    0.002765   3.2898 0.001003
ma1     0.165397    0.047142   3.5085 0.000451
omega   0.001662    0.000222   7.4914 0.000000
alpha1  0.183458    0.075710   2.4232 0.015386
alpha2  0.249302    0.096803   2.5754 0.010013
alpha3  0.145655    0.056436   2.5809 0.009854

Robust Standard Errors:
        Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
mu      0.009095    0.003476   2.6167 0.008879
ma1     0.165397    0.050071   3.3032 0.000956
omega   0.001662    0.000412   4.0362 0.000054
alpha1  0.183458    0.091703   2.0006 0.045439
alpha2  0.249302    0.131734   1.8925 0.058429
alpha3  0.145655    0.069644   2.0914 0.036490

LogLikelihood : 827.0278

Information Criteria
------------------------------------

Akaike       -2.9063
Bayes        -2.8602
Shibata      -2.9065
Hannan-Quinn -2.8883

Weighted Ljung-Box Test on Standardized Residuals
------------------------------------
                        statistic p-value
Lag[1]                    0.08197  0.7746
Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][2]   0.10212  0.9999
Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][5]   0.65498  0.9849
d.o.f=1
H0 : No serial correlation
```

```
Weighted Ljung-Box Test on Standardized Squared Residuals
------------------------------------
                         statistic p-value
Lag[1]                      0.1365  0.7118
Lag[2*(p+q)+(p+q)-1][8]     0.9043  0.9802
Lag[4*(p+q)+(p+q)-1][14]    2.4200  0.9806
d.o.f=3

Weighted ARCH LM Tests
------------------------------------
            Statistic Shape Scale P-Value
ARCH Lag[4]   0.00904 0.500 2.000  0.9243
ARCH Lag[6]   0.16798 1.461 1.711  0.9754
ARCH Lag[8]   0.20848 2.368 1.583  0.9974

Nyblom stability test
------------------------------------
Joint Statistic:  1.4049
Individual Statistics:
mu     0.13825
ma1    0.46660
omega  0.25570
alpha1 0.08631
alpha2 0.08547
alpha3 0.13061

Asymptotic Critical Values (10% 5% 1%)
Joint Statistic:         1.49 1.68 2.12
Individual Statistic:    0.35 0.47 0.75

Sign Bias Test
------------------------------------
                   t-value     prob sig
Sign Bias          2.36407 0.018416  **
Negative Sign Bias 0.16243 0.871029
Positive Sign Bias 0.05444 0.956601
Joint Effect      12.01483 0.007333 ***

Adjusted Pearson Goodness-of-Fit Test:
------------------------------------
  group statistic p-value(g-1)
1    20     29.02     0.065707
2    30     35.27     0.195954
3    40     53.41     0.061965
4    50     82.52     0.001931
```

Слика 2.3: Испис статистика модела MA(1)-ARCH(3) коришћењем пакета rugarch



Слика 2.4: Q-Q график стандардизованих резидуала модела MA(1)-ARCH(3)



Слика 2.5: Лог принос S&P 500, ACF квадрираних резидуала модела једначине средње вриједности и Q-Q график стандардизованих резидуала

Поглавље 3

Уопштења GARCH модела

3.1 Експоненцијални GARCH модел

Како би се превазишле слабости GARCH модела, Нелсон (1991) [9] уводи експоненцијални GARCH (EGARCH) модел. Овај модел омогућава асиметричне утицаје позитивних и негативних приноса актива и то коришћењем пондерисаних иновација

$$g(\varepsilon_t) = \theta\varepsilon_t + \gamma[|\varepsilon_t| - E(|\varepsilon_t|)], \tag{3.1}$$

гдје су θ и γ реалне констансте. И ε_t и $|\varepsilon_t| - E(|\varepsilon_t|)$ су низови независних и једнако расподијељених величина са очекивањем у 0 и непрекидном расподјелом. Одатле имамо да је $E[g(\varepsilon_t)] = 0$. Асиметрија $g(\varepsilon_t)$ се може боље видјети расписивањем претходне једначине

$$g(\varepsilon_t) = \begin{cases} (\theta+\gamma)\varepsilon_t - \gamma E(|\varepsilon_t|), & \varepsilon_t \geq 0, \\ (\theta-\gamma)\varepsilon_t - \gamma E(|\varepsilon_t|), & \varepsilon_t < 0. \end{cases}$$

Ако ε_t има стандардну нормалну расподјелу, онда је $E(|\varepsilon_t|) = \sqrt{2/\pi}$. За стандардну Студентову t-расподјелу имамо

$$E(|\varepsilon_t|) = \frac{2\sqrt{\nu-2}\Gamma((\nu+1)/2)}{(\nu-1)\Gamma(\nu/2)\sqrt{\pi}}.$$

EGARCH(p,q) модел се може записати једначином

$$a_t = \sigma_t\varepsilon_t, \quad \ln(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \frac{1+\beta_1 B + ... + \beta_s B^q}{1-\alpha_1 B - ... - \alpha_m B^p} g(\varepsilon_{t-1}), \tag{3.2}$$

гдје је α_0 константа, а B оператор кашњења такав да важи $B(g(\varepsilon_t)) = g(\varepsilon_{t-1})$. Нуле полинома $1 + \beta_1 B + ... + \beta_s B^q$ и $1 - \alpha_1 B - ... - \alpha_m B^p$ су ван јединичног круга (вриједности нула полинома су по модулу веће од 1). Једначина 3.2 користи уобичајену ARMA параметризацију да опише еволуцију условне дисперзије од a_t. Због овакве параметризације неке особине EGARCH модела се могу добити на сличан начин као и код GARCH модела. На примјер, обично очекивање $\ln(\sigma_t^2)$ је α_0. Ипак, ова два модела се разликују на више начина. Прво, EGARCH користи логаритмовану условну дисперзију како би смањио ограничења за коефицијенте модела. Друго, коришћење $g(\varepsilon_t)$ омогућава да модел различито реагује на позитивне и негативне шокове из прошлости. Како бисмо боље разумјели EGARCH модел, посматраћемо најједноставнији тип овог модела $EGARCH(1,0)$

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad (1-\alpha B)\ln(\sigma_t^2) = (1-\alpha)\alpha_0 + g(\varepsilon_{t-1}), \tag{3.3}$$

гдје су ε_t независне и једнако расподијељене случајне величине које имају нормалну расподјелу и индекс за α_1 је изостављен. У овом случају важи $E(|\varepsilon_t|) = \sqrt{2/\pi}$, па модел за $\ln(\sigma_t^2)$ постаје

$$(1-\alpha B)\ln(\sigma_t^2) = \begin{cases} \alpha_* + (\theta+\gamma)\varepsilon_{t-1}, & \varepsilon_{t-1} \geq 0, \\ \alpha_* + (\theta-\gamma)\varepsilon_{t-1}, & \varepsilon_{t-1} < 0, \end{cases}$$

гдје је $\alpha_* = (1-\alpha)\alpha_0 - \sqrt{2/\pi}\gamma$. Одатле се добија

$$\sigma_t^2 = \sigma_{t-1}^{2\alpha} exp(\alpha_*) \begin{cases} \exp[(\theta+\gamma)\frac{a_{t-1}}{\sqrt{\sigma_{t-1}^2}}], & a_{t-1} \geq 0, \\ \exp[(\theta-\gamma)\frac{a_{t-1}}{\sqrt{\sigma_{t-1}^2}}], & a_{t-1} < 0. \end{cases}$$

Коефицијенти $(\theta+\gamma)$ и $(\theta-\gamma)$ показују асиметричан утицај позитивних и негативних a_{t-1}. Овај модел је нелинеаран за $\gamma \neq 0$. За EGARCH моделе вишег реда, ова нелинеарност постаје још комплекснија.

Теорема 3.1. Стационарност EGARCH(p,q) модела
Претпоставимо да $g(\varepsilon_t)$ није скоро сигурно једнако нули и да полиноми $\alpha(z) = 1 - \sum_{i=1}^{p}\alpha_i z^i$ и $\beta(z) = 1 + \sum_{i=1}^{q}\beta_i z^i$ немају заједничких нула, при чему $\beta(z)$ није идентички једнако нули. Тада је процес EGARCH(p,q) строго стационаран и важи да $E(\ln a_t^2)^2 < \infty$ када год је $E(\ln \varepsilon_t^2)^2 < \infty$ и $E(g(\varepsilon_t))^2 < \infty$. Ако додатно важи

$$\prod_{i=1}^{\infty} E\exp|\lambda_i g(\varepsilon_t)| < \infty,$$

гдје је λ_i *дефинисано са* $\beta(B)/\alpha(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i B^i$, *тада је* a_t *бијели шум са дисперзијом*

$$E(a_t^2) = E(\sigma_t^2) = e^{\alpha_0} \prod_{i=1}^{\infty} g_\varepsilon(\lambda_i),$$

гдје је $g_\varepsilon(\lambda_i) = E \exp |\lambda_i g(\varepsilon_t)|$.

Скица доказа

Имамо да важи $\ln a_t^2 = \ln \sigma_t^2 + \ln \varepsilon_t^2$. Како је $\ln \sigma_t^2$ рјешење ARMA(p,q-1) модела са AR полиномом α, претпоставке које постоје за полиноме α, β су неопходне и довољне да се на јединствен начин изрази $\ln \sigma_t^2$ као покретни просјек бесконачног реда

$$\ln \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i g(\varepsilon_{t-i}), \qquad \text{с.с.}$$

Одавде слиједи да су низови $(\ln \sigma_t^2)$ и $(\ln a_t^2)$ строго стационарни. $(\ln \sigma_t^2)$ је слабо стационаран, и под претпоставком да важи $E(\ln \varepsilon_t^2)^2 < \infty$, слабо стационаран је и низ $(\ln a_t^2)$. Коришћењем претходног добија се

$$a_t^2 = \sigma_t^2 \varepsilon_t^2 = e^{\alpha_0} \prod_{i=1}^{\infty} \lambda_i g(\varepsilon_{t-i}) \varepsilon_t^2, \qquad \text{с.с.} \tag{3.4}$$

Коришћењем чињенице да су $g(\varepsilon_t)$ независне и једнако расподијељење величине добијају се очекивани резултати за $E(a_t^2)$.

Теорема 3.2. (Моменти EGARCH(p,q) модела) *Нека је* m *позитиван цијели број. Ако важе услови претходне теореме и ако важи* $\mu_{2m} = E(\varepsilon_t^{2m}) < \infty$, $\prod_{i=1}^{\infty} E \exp\{m\lambda_i g(\varepsilon_t)\} < \infty$, *постоји* $m-$*ти моменат процеса* $\{a_t^2\}$ *који је дат једначином*

$$E(a_t^{2m}) = \mu_{2m} e^{m\alpha_0} \prod_{i=1}^{\infty} g_\varepsilon(m\lambda_i).$$

Доказ

Доказ директно слиједи из претходне теореме.

Аутокорелације $\{a_t\}$ се лако добијају из 3.4. Под претпоставком да постоје моменти, за $h > 0$, важи

$$\begin{aligned}
E(a_t^2 a_{t-h}^2) &= Ee^{2\alpha_0} \prod_{i=1}^{h-1} \exp\{\lambda_i g(\varepsilon_{t-i})\} \varepsilon_t^2 \varepsilon_{t-h}^2 \exp\{\lambda_h g(\varepsilon_{t-h})\} \\
&\times \prod_{i=h+1}^{\infty} \exp\{\lambda_i + \lambda_{i-h} g(\varepsilon_{t-i})\} \\
&= e^{2\alpha_0} \prod_{i=1}^{h-1} g_\varepsilon(\lambda_i) E(\varepsilon_{t-h}^2 \exp\{\lambda_h g(\varepsilon_{t-h})\} \prod_{i=h+1}^{\infty} g_\varepsilon(\lambda_i + \lambda_{i-h}),
\end{aligned}$$

при чему је први производ 0 ако је $h = 1$. За $h > 0$ добијамо

$$\begin{aligned}
Cov(a_t^2, a_{t-h}^2) = e^{2\alpha_0} \Big[&\prod_{i=1}^{h-1} g_\varepsilon(\lambda_i) E(\varepsilon_{t-h}^2) \exp\{\lambda_h g(\varepsilon_{t-h})\} \\
&- \prod_{i=1}^{\infty} \{g_\varepsilon(\lambda_i)\}^2 \Big].
\end{aligned}$$

Предвиђање

Користимо $EGARCH(1,0)$ модел да покажемо предвиђање EGARCH модела за више корака унапријед, при чему претпостављамо да су параметри модела познати и да иновација има стандардну нормалну расподјелу. За такав модел имамо

$$\begin{aligned}
\ln(\sigma_t^2) &= (1-\alpha_1)\alpha_0 + \alpha_1 \ln(\sigma_{t-1}^2) + g(\varepsilon_{t-1}), \\
g(\varepsilon_{t-1}) &= \theta\varepsilon_{t-1} + \gamma(|\varepsilon_{t-1}| - \sqrt{2/\pi}).
\end{aligned}$$

Односно, ово можемо записати као

$$\begin{aligned}
\sigma_t^2 &= \sigma_{t-1}^{2\alpha_1} \exp|(1-\alpha_1)\alpha_0| \exp|g(\varepsilon_{t-1})|, \\
g(\varepsilon_{t-1}) &= \theta\varepsilon_{t-1} + \gamma(|\varepsilon_{t-1}| - \sqrt{2/\pi}).
\end{aligned}$$

Нека је h тренутак у ком желимо да предвидимо један корак унапријед. Тада имамо

$$\sigma_{h+1}^2 = \sigma_h^{2\alpha_1} \exp[(1-\alpha_1)\alpha_0] \exp[g(\varepsilon_h)],$$

гдје је све на десној страни већ познато. Одатле је предвиђање за један корак унапријед у тренутку h, $\hat{\sigma}_h^2(1) = \sigma_{h+1}^2$. За 2 корака унапријед добијамо

$$\sigma_{h+2}^2 = \sigma_{h+1}^{2\alpha_1} \exp[(1-\alpha_1)\alpha_0] \exp[g(\varepsilon_{h+1})].$$

Ако узмемо условно очекивање у тренутку h, имамо

$$\hat{\sigma}_h^2(2) = \hat{\sigma}_{h+1}^{2\alpha_1}(1)\exp[(1-\alpha_1)\alpha_0]E_h\exp[g(\varepsilon_{h+1})],$$

гдје се E_h односи на условно очекивање у тренутку h. Претходно очекивање рачунамо на следећи начин:

$$\begin{aligned} E\{\exp[g(\varepsilon)]\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp[\theta\varepsilon + \gamma(|\varepsilon| - \sqrt{2/\pi})]f(\varepsilon)d\varepsilon \\ &= \exp(-\gamma\sqrt{2/\pi})\Big[\int_0^{\infty} e^{(\theta+\gamma)\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\varepsilon^2/2}d\varepsilon \\ &\quad + \int_{-\infty}^{0} e^{(\theta-\gamma)\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\varepsilon^2/2}d\varepsilon\Big] \\ &= \exp(-\gamma\sqrt{2/\pi})\Big[e^{(\theta+\gamma)^2/2}\Phi(\theta+\gamma) + e^{(\theta-\gamma)^2/2}\Phi(\gamma-\theta)\Big], \end{aligned}$$

гдје су $f(\varepsilon)$ и $\Phi(\varepsilon)$ функција густине и функција расподјеле стандарадне нормалне расподјеле, респективно. Одавде се добија да је предвиђање за 2 корака унапријед

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_h^2(2) = \hat{\sigma}_{h+1}^{2\alpha_1}(1)\exp\Big[(1-\alpha_1)\alpha_0 - \gamma\sqrt{2/\pi}\Big] \\ \times\Big[e^{(\theta+\gamma)^2/2}\Phi(\theta+\gamma) + e^{(\theta-\gamma)^2/2}\Phi(\gamma-\theta)\Big]. \end{aligned}$$

Понављањем претходне јадначине добијамо рекурзивну формулу за j корака унапријед

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_h^2(j) = \hat{\sigma}_{h+1}^{2\alpha_1}(j-1)\exp\Big[(1-\alpha_1)\alpha_0 - \gamma\sqrt{2/\pi}\Big] \\ \times\Big[e^{(\theta+\gamma)^2/2}\Phi(\theta+\gamma) + e^{(\theta-\gamma)^2/2}\Phi(\gamma-\theta)\Big]. \end{aligned}$$

Примјер 3. *Посматрајући графике из Примјера 2, за очекивати је било да EGARCH модел да добре резултате. Међутим, испоставило се да је најбољи модел за једначину волатилности EGARCH(3,3) са нормално расподијељеним иновацијама, који је много сложенији од GARCH(1,1) модела, али статистике нису имале много боље вриједности. AIC овог модела је -3.6684, функција максималне вјеродостојности 1518.207, а p-вриједности Љунг-Боксовог тест за некорелисаност резидуала и њихових квадрата са лагом 10 су 0.538 и 0.7165 респективно.*

3.2 GARCH модел са праговима

Природан начин за увођење асиметрије је дефинисање условне дисперзије као функције од позитивних и негативних дјелова центрираних приноса из прошлости. Означимо са

$$a_t^+ = max(a_t, 0), \quad a_t^- = min(a_t, 0),$$

и примијетимо да је $a_t = a_t^+ + a_t^-$. GARCH модел са праговима (Treshold GARCH-TGARCH) уводи ефекат прага у волатилност.

Дефиниција 3.2.1. *Нека је (ε_t) низ независних и једнако расподијељених случајних величина такав да је $E(\varepsilon_t) = 0$ и $Var(\varepsilon_t) = 1$. За (a_t) кажемо да је TGARCH процес ако задовољава једначину облика*

$$\begin{aligned} a_t &= \sigma_t \varepsilon_t \\ \sigma_t &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} (\alpha_{i,+} a_{t-i}^+ - \alpha_{i,-} a_{t-i}^-) + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}, \end{aligned}$$

гдје су $\alpha_0, \alpha_{i,-}, \alpha_{i,+}, \beta_j$ реални бројеви.

Уколико важе услови

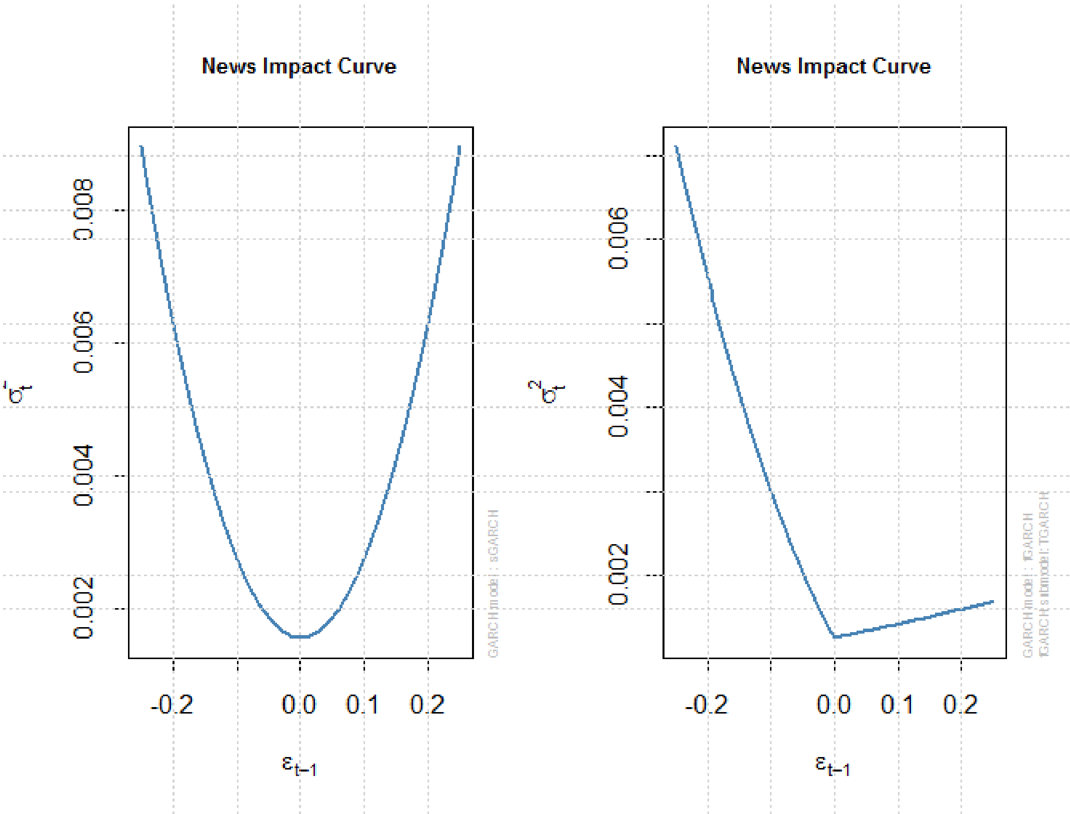
$$\alpha_0 > 0, \quad \alpha_{i,-} \geq 0, \quad \alpha_{i,+} \geq 0, \quad \beta_j \geq 0, \tag{3.5}$$

σ_t је увијек строго позитивно и представља условну стандардну девијацију a_t. Због коефицијената $\alpha_{i,-}$ и $\alpha_{i,+}$ волатилност зависи и од модула и од знака приноса из прошлости. Овај модел је флексибилан и може да прикаже различите асиметрије. Треба примијетити да се за $\alpha_{i,-} = \alpha_{i,+} = \alpha_i, \quad (i = 1, 2, .., q)$ јавља специјални случај модела који је доста сличан GARCH моделу. Овај модел не биљежи никакву асиметричност и има следећи облик

$$\sigma_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i |a_{t-i}| + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j},$$

јер је $|a_t| = a_t^+ - a_t^-$. Овај специјални случај се назива GARCH апсолутних вриједности или AVGARCH.
Још један специјалан случај TGARCH модела је GJR-GARCH који је предложен од стране Глостена, Јаганатана и Рунклеа 1993. године. Ова варијанта је дата једначином

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} (\alpha_i a_{t-i}^2 + \gamma_i a_{t-i}^2 1_{a_{t-i}>0}) + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^2.$$



Слика 3.1: Утицајна крива модела представља утицај приноса на волатилност. На лијевом графику је дата утицајна крива модела ARMA(3,2)-GARCH(1,1) за лог приносе S&P 500 одакле се уочава симетрични утицај приноса на волатилност, за разлику од модела ARMA(3,2)-TGARCH(1,1) (десно), гдје се уочава асиметрични утицај негативних и позитивних приноса на волатилност.

Главна разлика између GARCH и TGARCH модела се може уочити на слици 3.1, на којој се види утицај приноса у тренутку $t-1$ на волатилност у тренутку t. У овом примјеру, негативни приноси a_{t-1} имају већи утицај на волатилност од позитивних приноса исте јачине.

TGARCH модели имају линеарне особине сличне GARCH моделу. Ако важе услови 3.5, онда важи

$$a_t^+ = \sigma_t \varepsilon_+, \quad a_t^- = \sigma_t \varepsilon_-,$$

што нам омогућава да запишемо условну стандардну девијацију у облику

$$\sigma_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{max(p,q)} a_i(\varepsilon_{t-i})\sigma_{t-i}, \tag{3.6}$$

гдје $a_i(z) = \alpha_{i,+}z^+ - \alpha_{i,-}z^- + \beta_i, \quad i = 1, ..., max(p,q)$.

Стационарност TGARCH(1,1) модела
Проучавање стационарности TGARCH(1,1) модела креће од записа 3.6. Услов строге стационарности записујемо као

$$E[\log(\alpha_{1,+}\varepsilon_t^+ - \alpha_{1,-}\varepsilon_t^- + \beta_1)] < 0.$$

Специјално, за $\beta_1 = 0$ добија се TARCH(1) модел

$$\log(\alpha_{1,+}\varepsilon_t^+ - \alpha_{1,-}\varepsilon_t^-) = \log(\alpha_{1,+})1_{\varepsilon_t>0} + \log(\alpha_{1,-})1_{\varepsilon_t<0} + \log|\varepsilon_t|.$$

Стога, ако је расподјела (ε_t) симетрична, очекивање индикаторских промјенљивих из претходне једначине је 1/2, па се услов строге стационарности своди на

$$\alpha_{1,+}\alpha_{1,-} < e^{-2E\log|\varepsilon_t|}.$$

Услов слабе стационарности се може записати и као

$$E[(\alpha_{1,+}\varepsilon_t^+ - \alpha_{1,-}\varepsilon_t^- + \beta_1)^2] < 1.$$

Овај услов се може изразити експлицитно преко првог и другог момента ε_t^+ и ε_t^-. Ако ε_t има нормалну $N(0,1)$ расподјелу, добија се

$$\frac{1}{2}(\alpha_{1,+}^2 + \alpha_{1,-}^2) + \frac{2\beta_1}{\sqrt{2\pi}}(\alpha_{1,+} + \alpha_{1,-}) + \beta_1^2 < 1. \tag{3.7}$$

Наравно, услов слабе стационарности је рестриктвинији од услова строге стационарности. Под условом слабе стационарности, лако се уочава да се особина симетричности нарушава. На примјер, ако је расподјела ε_t симетрична, имамо да за TARCH(1) модел важи:

$$Cov(\sigma_t, a_{t-1}) = \alpha_{1,+}E(a_{t-1}^+)^2 - \alpha_{1,-}E(a_{t-1}^-) = (\alpha_{1,+} - \alpha_{1,-})E(a_{t-1}^2)^2 \neq 0$$

кад год је $\alpha_{1,+} \neq \alpha_{1,-}$.

Коефицијент спљоштености TGARCH(1,1) модела
За TGARCH(1,1) модел са позитивним коефицијентима, услов за постојање $E|a_t|^m$ се може директно изразити. Користећи репрезентацију

$$\sigma_t = \alpha_0 + a(\varepsilon_{t-1})\sigma_{t-1}, \quad a(\varepsilon) = \alpha_{1,+}\varepsilon^+ - \alpha_{1,-}\varepsilon^- + \beta_1,$$

$E\sigma_t^m$ постоји и важи

$$E\sigma_t^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \alpha_0^k E a^{m-k}(\varepsilon_{t-1}) E\sigma_t^{m-k}$$

ако и само ако важи

$$Ea^m(\varepsilon_t) < 1. \tag{3.8}$$

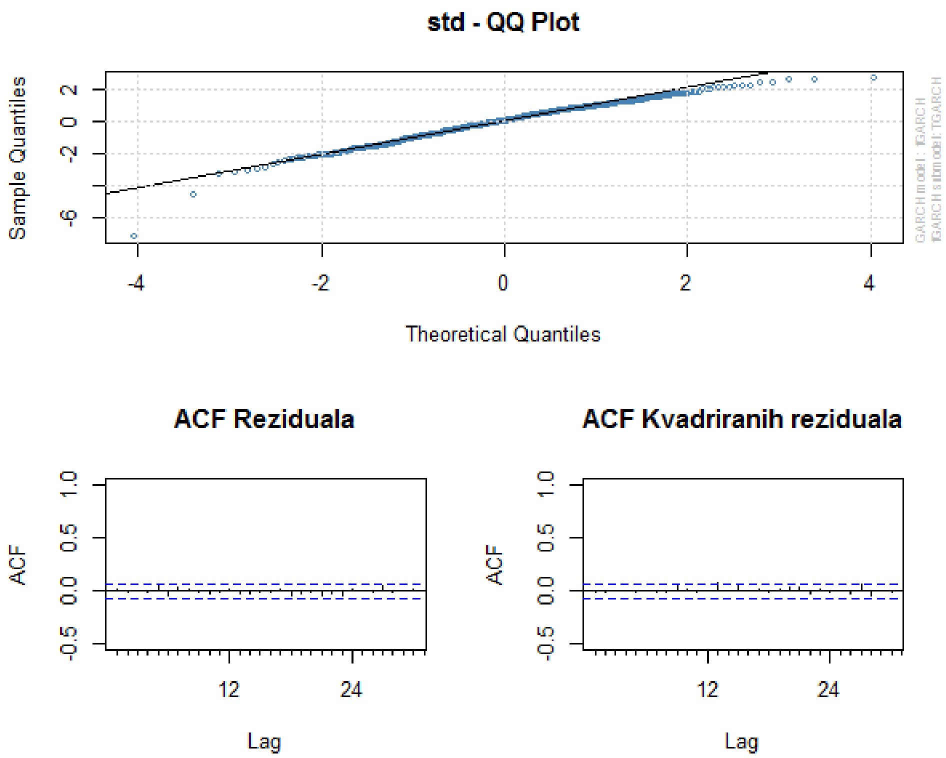
Ако овај услов важи за $m = 4$, онда коефицијент спљоштености постоји. Уколико ε_t $N(0, 1)$, онда имамо

$$k_a = 3\frac{E\sigma_t^4}{(E\sigma_t^2)^2},$$

и користећи нотацију $A_i = Ea^i(\varepsilon_t)$, моменти се лако израчунавају на следећи начин:

$$\begin{aligned}
A_1 =& \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\alpha_{1,+} - \alpha_{1,-}) + \beta_1^2,\\
E\sigma_t =& \frac{\alpha_0}{1 - A_1},\\
A_2 =& \frac{1}{2}(\alpha_{1,+}^2 - \alpha_{1,-}^2) + \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\beta_1(\alpha_{1,+} - \alpha_{1,-}) + \beta_1^2,\\
E\sigma_t^2 =& \frac{\alpha_0^2\{1 + A_1\}}{\{1 - A_1\}\{1 - A_2\}},\\
A_3 =& \sqrt{\frac{3}{\pi}}(\alpha_{1,+}^3 - \alpha_{1,-}^3) + \frac{3}{2}(\alpha_{1,+}^2 - \alpha_{1,-}^2) + \frac{3}{\sqrt{2\pi}}\beta_1^2(\alpha_{1,+} - \alpha_{1,-}) + \beta_1^3,\\
E\sigma_t^3 =& \frac{\alpha_0^3\{1 + 2A_1 + 2A_2 + A_1A_2\}}{\{1 - A_1\}\{1 - A_2\}\{1 - A_3\}},\\
A_4 =& \frac{3}{2}(\alpha_{1,+}^4 - \alpha_{1,-}^4) + 4\sqrt{\frac{2}{\pi}}(\alpha_{1,+}^3 - \alpha_{1,-}^3)\\
&+3(\alpha_{1,+}^2 - \alpha_{1,-}^2) + \frac{4}{\sqrt{2\pi}}\beta_1^3(\alpha_{1,+} - \alpha_{1,-}) + \beta_1^4,\\
E\sigma_t^4 =& \frac{\alpha_0^4\{1 + 3A_1 + 5A_2 + 3A_1A_2 + 3A_3 + 5A_1A_3 + 3A_2A_3 + A_1A_2A_3\}}{\{1 - A_1\}\{1 - A_2\}\{1 - A_3\}}.
\end{aligned}$$

Примјер 4. *Због своје главне карактеристике да асиметрично дјелује на позитивне и негативне приносе, TGARCH(1,1) модел са иновацијама које имају Студентову t-расподјелу са параметром облика 9.5, показао се као најбољи за моделовање серије индекса S&P 500. AIC овог модела је -3.6605, функција максималне вјеродостојности има вриједност*



Слика 3.2: Q-Q график, ACF стандардизованих резидуала и њихових квадрата модела ARMA(3,2)-TGARCH(1,1).

1509.981, док су p-вриједности Љунг-Боксовог теста за некорелисаност стандардизованих резидуала и њихових квадрата 0.7029 и 0.9041 респективно. На слици 3.2 се јасно види да модел ARMA(3,2)-TGARCH(1,1) добро моделује серију S&P 500 и да су стандардизовани резидуали некорелисани и да прате теоријску расподјелу.

3.3 Интегрисани GARCH модел

Уколико AR дио GARCH модела у једначини 2.7 има једнични коријен, онда имамо интегрисани GARCH модел или IGARCH модел. Главна особина ових модела је да је утицај квадрираних шокова из прошлости $\eta_{t-i} = a_{t-i}^2 - \sigma_{t-i}^2$ за $i > 0$ на a_t^2 константан. $IGARCH(1,1)$ модел се може запосати као

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + (1 - \beta_1) a_{t-1}^2,$$

гдје се ε_t дефинише као и раније и $0 < \beta_1 < 1$. У случају серије S&P 500, IGARCH(1,1)модел са иновацијама које имају Нормалну расподјелу(који се најбоље уклапа од свих IGARCH modela) даје лосије резултате. AIC има вриједност -3.6000, док су п-вриједности Љунг-Боксовог теста за некорелисаност резидуала и њихових квадрата 0.6896 и 0.7612 респективно.

3.4 GARCH-M модел

GARCH-M модел користи се за оне приносе који зависе од волатилности. Овај модел називамо GARCH у средњем. Најједноставнији овакав модел је $GARCH(1,1) - M$ који се записује као

$$r_t = \mu + c\sigma_t^2 + a_t, \quad a_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma t - 1^2, \tag{3.9}$$

гдје су μ и c константе. Параметар c се назива параметар премије ризика. Позитиван c указује да постоји позитвна веза између приноса и волатилности из прошлости. Формулација GARCH-M модела указује да постоји озбиљна серијска корелација у серији поврацјаја r_t. Ова серијска корелација проистиче из серијске корелације процеса σ_t. Постојање параметра премиије ризика је такође још један разлог за постојање серијске корелације код неких приноса.

Поглавље 4

Примјена GARCH модела

Примјена GARCH модела у финансијама је широка. Најзначајније су у одређивању цијене опција у Блек-Шолсовом моделу и при одређивању вриједности при ризику (VaR). Како се модел Блек-Шолса проучава у више курсева у току студија на смјеру Статистика, актуарска и финансијска математика Математичког факултета у Београду, у овом поглављу ћемо се детаљније позабавити примјеном GARCH модела за предвиђање вриједности при ризику.

4.1 Вриједност при ризику (VaR)

VaR се односи на могуће губитке портфолија у неком временском интервалу у будућности. Природна мјера ризика је максимални могући губитак. Како је у већини модела расподјела губитка неограничена, добијамо да је максимални губитак бесконачан. Концепт VaR мијења максимални губитак границом максималног губитка која се неће прећи са одређеном вјероватноћом.
Како бисмо били прецизнији, посматрајмо портфолио чија је вриједност у тренутку t случајна величина коју означавамо са V_t. Губитак од тренутка t до тренутка $t+h$ означавамо са

$$L_{t,t+h} = -(V_{t+h} - V_t).$$

Расподјела $L_{t,t+h}$ се назива расподјелом губитка. У општем случају, V_t представља функцију d фактора ризика.

Дефиниција 4.1.1. $(1-\alpha)$*-ти квантил расподјеле условног губитка назива се вриједност при ризику нивоа* α *и дефинише се са:*

$$VaR_{t,h}(\alpha) := \inf\{x \in \mathbb{R} | P_t\{L_{t,t+h} \leq x\} \geq 1-\alpha\},$$

гдје је P_t условна вјероватноћа у односу на прошлост до тренутка t. Ако овај квантил није позитиван дефинишемо $VaR_{t,h}(\alpha) = 0$.

VaR и условни моменти

Нека су прва два момента $L_{t,t+h}$ условна у односу на информацију доступну у тренутку t:

$$m_{t,t+h} = E_t(L_{t,t+h}), \quad \sigma^2_{t,t+h} = Var_t(L_{t,t+h}).$$

Претпоставимо да важи

$$L_{t,t+h} = m_{t,t+h} + \sigma_{t,t+h} L^*_h,$$

гдје је L^*_h случајна величина са функцијом расподјеле F_h. Означимо са $F_h^{\leftarrow}$ квантилну функцију промјенљиве L^*_h дефинисану као уопштени инверз F_h :

$$F_h^{\leftarrow} = \inf\{x \in \mathbb{R} | F_h(x) \geq \alpha\}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Ако је F_h непрекидна и строго растућа функција онда важи $F_h^{\leftarrow} = F_h^{-1}$, гдје је F_h^{-1} обични инверз функције F_h. Имајући у виду претходно, слиједи да важи:

$$1 - \alpha = P_t[VaR_{t,h}(\alpha) \geq m_{t,t+h} + \sigma_{t,t+h} L^*] = F_h\left(\frac{VaR_{t,h}(\alpha) - m_{t,t+h}}{\sigma_{t,t_h}}\right).$$

Одавде важи

$$VaR_{t,h}(\alpha) = m_{t,t+h} + \sigma_{t,t+h} F_h^{\leftarrow}(1 - \alpha). \tag{4.1}$$

Одавде уочавамо да се вриједност при ризику може разложити на очекивани губитак $m_{t,t+h}$, који представља условно очекивање губитка, и неочекивани губитак $\sigma_{t,t+h} F_h^{\leftarrow}(1-\alpha)$, који се такође назива и *економски капитал.*

Иако претходна формула изгледа једноставно, постоје двије потешкоће за њено коришћење. Прва је одређивање првог условног момента модела, а друга одређивање функције F_h.

Посматрајмо цијену портфолија, дефинисану као комбинација цијена d актива, $p_t = a' P_t$, гдје $a, P_t \in \mathbb{R}^d$. Увођењем варијација цијена $\triangle P_t = P_t - P_{t-1}$, добија се

$$L_{t,t+h} = -(p_{t+h} - p_t) = -a'(P_{t+h} - P_t) = -a' \sum_{i=1}^{h} \triangle P_{t+i}.$$

Као што смо већ на почетку рада навели, много је лакше радити са логаритмованим приносима r_t, за које се претпоставља да су стационарни.

Нека је $q_t(h,\alpha)$, α-ти квантил условне расподјеле будућих приноса $r_{t+1} + ... + r_{t+h}$. Тада се добија да важи

$$VaR_{t,h}(\alpha) = \{1 - e^{q_t(h,\alpha)}\}p_t. \tag{4.2}$$

4.2 Методе за оцјењивање

Безусловни VaR

Најједноставнија метода за оцјењивање се заснива на последњих K h-периодичних простих приноса из прошлости. При томе се узимају ознаке $r_{t+h-i} = \ln(p_{t+h-i}/p_{t-i})$, за $i = h, ..., h+K-1$. Непараметарски историјски VaR се добија замјеном $q_t(h,\alpha)$ у 4.2 емпиријским $\alpha-$квантилом последњих K приноса. Типичне вриједности у пракси су $K = 250, \alpha = 1\%$, што значи да се трећи најгори принос користи као емпиријски квантил. Параметарска верзија се добија оцјењивањем расподјеле приноса, на примјер нормалном $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$. У том случају би се $q_t(h,\alpha)$ мијењало са $\hat{\mu} + \hat{\sigma}\Phi^{-1}(\alpha)$, гдје су $\hat{\mu},\hat{\sigma}$ оцјене очекивања и стандардне девијације.

Модел RiskMetrics

Популарна оцјена VaR користи модел RiskMetrics. Овај модел је дефинисан једначинама

$$\begin{aligned} r_t &= \ln(p_t/p_{t-1}) = \sigma_t\varepsilon_t, \quad (\varepsilon_t) \text{ iid } \mathcal{N}(0,1), \\ \sigma_t^2 &= \lambda\sigma_{t-1}^2 + (1-\lambda)\varepsilon_{t-1}^2, \end{aligned} \tag{4.3}$$

гдје $\lambda \in (0,1)$ (за дневне серије је углавном $\lambda = 0.94$). Овај модел се такође може посматрати и као IGARCH(1,1) модел без слободног члана. Важно је напоменути да не постоји недегенерисани случај који задовољава претходне једначине. Иако једначине 4.3 не описују уобичајене финансијске временске серије, овај модел се може користити као једноставан начин за рачунање VaR. Из 4.2 добија се

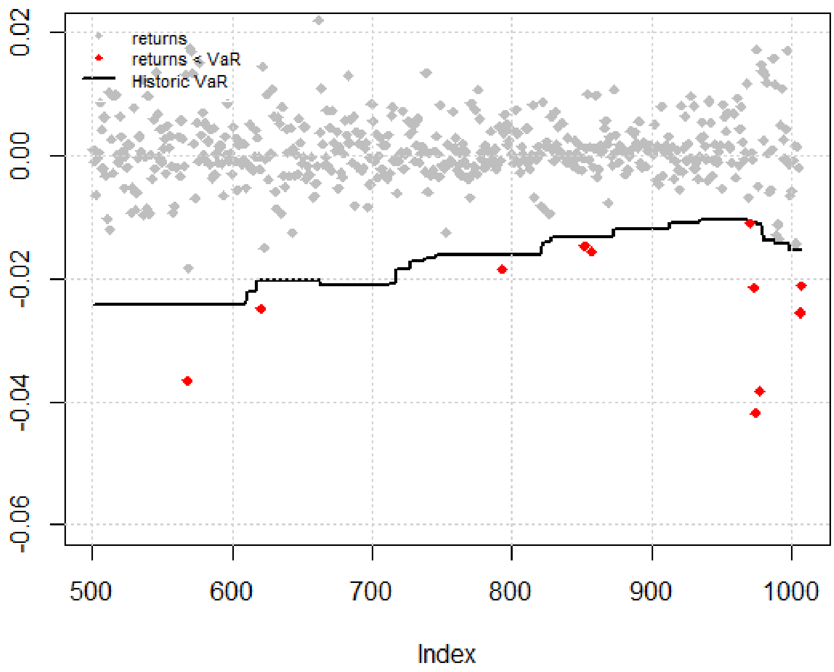
$$VaR_{t,1}(\alpha) = \{1 - e^{\sigma_{t+1}\Phi^{-1}(\alpha)}\}p_t \simeq p_t\sigma_{t+1}\Phi^{-1}(1-\alpha).$$

Нека је $\mathcal{F}_t$ информација генерисана $r_t, r_{t-1}, ..., r_1$. Ако за почетну вриједност узмемо σ_1^2, добијамо да $\sigma_{t+1}^2 \in \mathcal{F}_t$ и да важи

$$E(\sigma_{t+i}^2|\mathcal{F}_t) = E(\lambda\sigma_{t+i-1}^2 + (1-\lambda)\sigma_{t+i-1}^2|\mathcal{F}_t) = E(\sigma_{t+i-1}^2|\mathcal{F}_t) = \sigma_{t+1}^2,$$

за $i \geq 2$. Слиједи да $Var(r_{t+1} + ... + r_{t+h}|\mathcal{F}_t) = h\sigma_{t+1}^2$. Може се доказати да расподјела $r_{t+1} + ... + r_{t+h}$ није баш $\mathcal{N}(0, h\sigma_{t+1}^2)$. Међутим, у пракси се често намјерно прави ова грешка и користи се формула

$$VaR_{t,h}(\alpha) = \sqrt{h}VaR_t(1,\alpha). \tag{4.4}$$



Слика 4.1: Историјски 1% VaR за приносе S&P 500. Уочава се главна мана овог типа оцјене вриједности при ризику, а то је спора реакција на промјене.

GARCH оцјена

Умјесто дегенерисаног RiskMetrics модела, могу се користити и неки сложенији модели GARCH типа. За оцјену $VaR_t(1,\alpha)$, довољно је оцијити $q_t(1,\alpha)$ са $\hat{\sigma}_{t+1}\hat{F}^{-1}(\alpha)$, гдје је $\hat{\sigma}_t^2$ условна дисперзија која је оцијењена неким GARCH моделом, а $\hat{F}$ је оцјена функције расподјеле резидуала. Важно је напоменути да не постоји експлицитна формула за одређивање $q_t(h,\alpha)$ за $h>1$ чак и за најједноставније GARCH моделе. За случај $h=1$, квантили се одређују симулацијама. Наводимо једну од могућности за одређивање $q_t(h,\alpha)$:

1) Фитујемо модел, на примјер GARCH(1,1), за приносе $r_1,...,r_n$ и налазимо оцјене волатилности $\hat{\sigma}_t^2$ за $t=1,...,n+1$..

2) Симулирамо велики број N сценарија за $r_{n+1},...,r_{n+h}$ независно један од другог, и то у следећа три корака:

а) Симулација $\varepsilon^{(i)}_{n+1},...\varepsilon^{(i)}_{n+h}$, које су независне и једнако расподијељене случајне величине са расподјелом $\hat{F}$;

б) Постављмо $\sigma^{(i)}_{n+1} = \hat{\sigma}_{n+1}$ и $r^{(i)}_{n+1} = \sigma^{(i)}_{n+1}\varepsilon^{(i)}_{n+1}$

в) за $k = 2, ..., h$, постављамо $(\sigma^{(i)}_{n+k})^2 = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}(r^{(i)}_{n+k-1})^2 + \hat{\beta}(\sigma^{(i)}_{n+k-1})^2$, и $r^{(i)}_{n+k} = \sigma^{(i)}_{n+k}\varepsilon^{(i)}_{n+k}$

3) Одређивање емпиријског квантила симулираних $r^{(i)}_{t+h}$, $\quad i = 1, ..., N$.

Расподјела $\hat{F}$ се може одредити параметарски или непараметарски. Једноставни непараметарски начин је да се за $\hat{F}$ узме емпиријска расподјела стандардизованих резидуала $r_t/\hat{\sigma}_t$.

Мјера квалитета оцјене VaR

Финансијким институцијама је дозвољено да развијају своје интерне процедуре за евалуацију техника за мјеру ризика. Једна од процедура је "бектестинг" (eng. backtesting). У општем случају, бектестинг се односи на провјеру ефикасности неког модела над подацима из прошлости. У овом случају се односи на пребројавање прекорачења VaR (или неке друге мјере ризика). За свако t из прошлости, оцијенимо VaR на основу вриједности до тог тренутка, и провјеримо да ли је у стварности дошло до прекорачења. Ако је наш алгоритам добар, ових прекорачења би требало да буде што мање. Тиме би била оправдана употреба овог метода на подацима у будућности. Дефинишемо промјенљиве које се односе на прекорачење VaR.

$$I_{t+1}(\alpha) = 1_{\{}L_{t,t+1} > VaR_{t,1}(\alpha)\}.$$

Идеално би требало да важи

$$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} I_{t+1}(\alpha) \simeq \alpha, \quad \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} VaR_{t,1}(\alpha) \text{ минимално},$$

што је очекивана пропорција губитака који су већи од процијењених VaR-ова са минималним просјечним трошком.

Примјер 5. *Сада ћемо упоредити 2 најчешћа типа рачунања вриједности при ризику, Историјски и GARCH начин,и то на дневним приносима индекса S&P 500 од 25. марта 2014. године до 16. марта 2018. године. Како постоје приноси само за радне дане, имамо 1008 опсервација. Историјски 1% і 5% VaR у неком тренутку рачунамо на основу последњих 250 приноса. GARCH VaR рахунамо тако што најприје моделујемо серију од првих 500 приноса и користимо тај модел*

```
alpha:                      1%
Expected Exceed:        5.1
Actual VaR Exceed:      7
Actual %:                   1.4%

Unconditional Coverage (Kupiec)
Null-Hypothesis:        Correct Exceedances
LR.uc Statistic:        0.671
LR.uc Critical:         3.841
LR.uc p-value:          0.413
Reject Null:            NO

Conditional Coverage (Christoffersen)
Null-Hypothesis:        Correct Exceedances and
                                Independence of Failures
LR.cc Statistic:        3.78
LR.cc Critical:         5.991
LR.cc p-value:          0.151
Reject Null:            NO
```

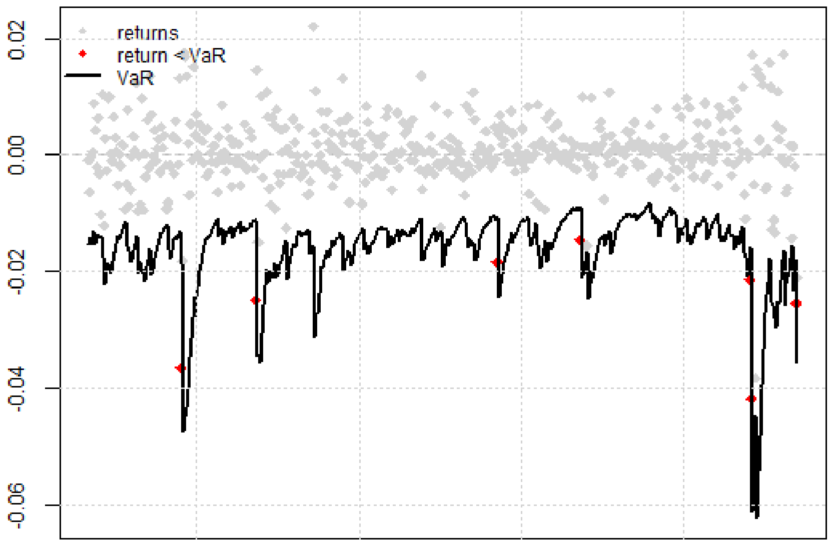
```
alpha:                      5%
Expected Exceed:        25.3
Actual VaR Exceed:      23
Actual %:                   4.5%

Unconditional Coverage (Kupiec)
Null-Hypothesis:        Correct Exceedances
LR.uc Statistic:        0.227
LR.uc Critical:         3.841
LR.uc p-value:          0.634
Reject Null:            NO

Conditional Coverage (Christoffersen)
Null-Hypothesis:        Correct Exceedances and
                                Independence of Failures
LR.cc Statistic:        1.092
LR.cc Critical:         5.991
LR.cc p-value:          0.579
Reject Null:            NO
```

Слика 4.2: Резултати предвиђања VaR за приносе S&P 500 коришћењем модела GARCH. Уочавамо да се и према Купиецовом и према Кристоферсоновом тесту прихвата хипотеза о коректном броју прекорачења VaR и независности тих прекорачења

за предвиђање за један корак унапријед. Тај процес се понавља за све наредне приносе. Како предвиђамо вриједност при ризику у 507 тренутака, очекивани број прекорачења 1% VaR-а је 5, а 5% VaR-а 25. Број прекорачења историјског 1% VaR-а је у овом случају 11, а број прекорачења 5% VaR-а је 19.

Ова серија се уклапа у TGARCH(1,1) модел са иновацијама које имају Студентову t-расподјелу. Број прекорачења вриједности при ризику који је одређен коришћењем овог модела је 7 за $\alpha = 1\%$, односно 23 за $\alpha = 5\%$. Да је овако одређен VaR добар, потврђује се и тестовима Купиеца и Кристоферсена. Купиецов тест се користи за тестирање броја прекорачења VaR, односно да је проценат прекорачења једнак α. Са друге стране Кристоферсенов тест се користи за тестирање да су та прекорачења независна.(Слика 4.2).

Са слика 4.1 и 4.3 се уочавају разлике између ове двије методе. Иако историјски метод у просјеку има очекивани број прекорачења, VaR одређен на овај начин не може брзо реаговати на промјене, па губитак може бити велики. Са друге стране VaR одређен коришћењем модела GARCH има очекивани број прекорачења, али и брзо реагује на промјене, па су и губици знатно мањи.



Слика 4.3: 1% VaR за приносе S&P 500 одређен коришћењем модела GARCH.

Поглавље 5

Закључак

У овом раду представљено је више различитих ауторегресивних модела условне хетероскедастичности и описано је њихово понашање над реалним временским серијама. Иако ови модели представљају добро средство за моделовање волатилности, постоје велике разлике између различитих модела. Успјешност моделовања волатилности зависи од комплексности, али и врсте модела, а најуспјешнији су они модели који имају способност да асиметрично реагују на позитивне и негативне приносе. Осим тога, можемо закључити да се употребом ових модела постижу бољи резултати у пракси од коришћења неких традиционалних метода. То смо најбоље могли да уочимо из поређења историјског и GARCH приступа за одређивање вриједности при ризику. Јасно је да су ови модели јако моћан алат, па је и цијела област коју чине веома широка, и није могла бити обухваћена једним мастер радом. Зато бих као препоруку за додатне информације издвојио књиге [1] и [3], које су и послужиле као основна литература за овај рад.

Литература

[1] Tsay, R.S. (2002) Analysis of Financial Time Series. New York: John Wiley & Sons, Inc.

[2] Hamilton, J.D. (1994) Time Series Analysis. Princeton, NJ: Princeton University Press.

[3] Francq, C., Zakoian, J. (2010). GARCH models: Structure, statistical inference, and financial applications. Hoboken, NJ: Wiley.

[4] Mladenovic, Z., Nojkovic, A. (2012). Primenjena analiza vremenskih serija. Beograd: Centar za izdavacku delatnost Ekonomskog fakulteta.

[5] Box, G.E.P., Jenkins, G.M. and Reinsel, G.C. (1994) Time Series Analysis: Forecasting and Control . Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

[6] Wold, H. (1938) A Study in the Analysis of Stationary Time Series. Uppsala: Almqvist & Wiksell.

[7] Mandelbrot, B. (1963) The variation of certain speculative prices. Journal of Business 36, 394-419.

[8] Bollerslev, T. (1986) Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. Journal of econometrics 31 (3), 307-327.

[9] Nelson, D. B. (1991). Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach.Econometrica 59: 347-370.

[10] Cerovic Smolovic J., Lipovina Bozovic M., Vujosevic S.(2017) GARCH models in value at risk estimation: empirical evidence from the Montenegrin stock exchange, Economic Research-Ekonomska Istrazivanja, 30:1, 477-498

[11] Engle, R. F. (1982). Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. Econometrica, 50(4), 987-1007