УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Бранка Сандо

Интервалне оцене параметара положаја и размере

— мастер рад —

Београд, 2018.

Предговор

Како бисмо одредили непознат параметар у расподели обележја популације користимо тачкасте и интервалне оцене. Тачкаста оцена је број који се израчунава из узорка и служи као апроксимација непознате вредности параметра расподеле основне популације из које је узет узорак. Међутим, ако би се оцењивање параметра свело само на тачкасту оцену, тада бисмо увек знали да се наша оцена разликује од параметра за одређену вредност, али не бисмо могли да одредимо величину грешке, дакле тачкаста оцена је по правилу недовољно прецизна, односно нетачна ([2]).

Јиржи Нејман[1] је први препознао другачији метод. Године 1937. Нејман је у Краљевском статистичком друштву[2] одржао предавање у ком уводи интервалне оцене, односно интервале поверења ([9]). Кључна предност овакве оцене је што нам даје могућност да формирамо интервал који ће уз унапред изабрани ризик обухватити непознати параметар.

Непознати параметри, тј. параметри расподела могу бити параметри положаја, размере или облика. Параметри положаја и размере, поред тога што природно постоје у неким расподелама (нпр. нормалној), због своје погодности у математичком смислу могу се увести и у друге расподеле како би се популација боље описала одговарајућим моделом. Због своје велике заступљености и погодних својстава, оцењивање ових параметара је веома значајно у статистици. У овом раду бавићемо се интервалним оценама параметара положаја и размере као и квалитетом тих оцена.

[1] Jerzy Neyman (1894-1981) је пољски математичар и статистичар

[2] Royal Statistical Society је друштво основано у Лондону 1834. године као друштво и стручни орган за статистику

Садржај

Поглавље 1

Параметри положаја и размере

Поред оних који природно постоје, параметре положаја и размере уводимо у расподеле које их природно не садрже. У овом поглављу ћемо дефинисати фамилију положаја и размере, упознаћемо се са расподелама које природно садрже параметре положаја и размере и показаћемо како параметре можемо ,,убацити" у расподеле у којима нису природно садржани.

1.1 Фамилије положаја и размере

Фамилије расподела које ћемо конструисати су фамилије положаја, фамилије размере и фамилије положаја и размере. Свака од фамилија се добија трансформацијом неке функције густине расподеле $f(x)$, која се назива стандардна функција густине расподеле за ту фамилију. Почећемо са теоремом која описује једно својство функције густине расподеле. Наредна теорема преузета је из [1].

Теорема 1.1 *Нека је дата функција густине расподеле $f(x)$ и нека су дати $-\infty < \mu < \infty$ и $\sigma > 0$. Тада је функција*

$$g(x|\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma} f(\frac{x-\mu}{\sigma})$$

такође једна функција густине расподеле.

Доказ. Да бисмо показали да је новодобијена функција $g(x|\mu,\sigma)$ заиста функција густине расподеле, морамо показати да је она ненегативна и да је њен интеграл једнак 1. Како је $g(x|\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma} f(\frac{x-\mu}{\sigma})$, а $f(x)$ је густина расподеле, користећи својство ненегативности функције густине расподеле, следи да је $f(x) \geq 0$ за све вредности x, па одатле следи и да је наша функција $g(x|\mu, \sigma)$ такође ненегативна, тј. $g(x|\mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma} f(\frac{x-\mu}{\sigma}) \geq 0$ за све вредности x, μ и $\sigma > 0$. Следеће што треба да покажемо је да $\int_{-\infty}^{\infty} g(x|\mu, \sigma)dx = 1$.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} g(x|\mu, \sigma)dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma} f(\frac{x-\mu}{\sigma})dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy \left(\text{уведена је смена } y = \frac{x-\mu}{\sigma}\right) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Тиме смо показали да је $g(x|\mu, \sigma)$ такође једна функција густине расподеле.■

Дефиниција 1.1.1 *Нека је дата функција густине расподеле $f(x)$. Тада се фамилија функција густина расподеле $f(x-\mu)$, где је $-\infty < \mu < \infty$, назива* ***фамилија положаја са стандардном функцијом расподеле*** *$f(x)$, а μ се назива* ***параметар положаја те фамилије****.*

На основу претходне дефиниције 1.1.1 можемо да закључимо да, уколико је дата функција густине расподеле $f(x)$ и $-\infty < \mu < \infty$, тада је $f(x+\mu)$ такође једна фамилија положаја са стандардном функцијом густине расподеле $f(x)$. Параметар μ и у овом случају чува облик функције густине и помера је дуж x осе.

Како бисмо јасније увидели значај параметра положаја и како његова промена утиче на промену функције густине расподеле, размотримо наредни пример.

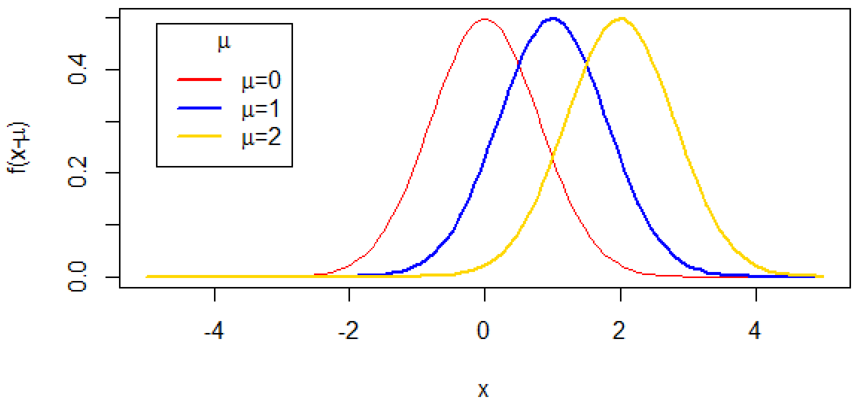
Пример 1.1.1 *(Нормална расподела)*
Нека је дата случајна величина X, чија је функција густине расподеле

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}3} e^{\frac{-x^2}{2\cdot 3^2}}, \ -\infty < x < \infty$$

Користећи дефиницију 1.1.1 направићемо фамилију положаја чија је стандардна функција густине расподеле $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}3} e^{\frac{-x^2}{2\cdot 3^2}}$, а μ је параметар положаја. Фамилија функција густина расподеле

$$f(x-\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}3} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\cdot 3^2}}, \ -\infty < x < \infty$$

је фамилија положаја са стандардном функцијом густине расподеле $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}3} e^{\frac{-x^2}{2\cdot 3^2}}$, *а* μ *параметар положаја. Слика 1.1 илуструје промену графика функције густине расподеле* $f(x-\mu)$ *у зависности од* μ.



Слика 1.1: Функције густине расподеле у зависности од параметра положаја

Приметимо да је фамилија положаја са стандардном функцијом густине расподеле $f(x)$ *у ствари фамилија функција густина нормалне расподеле, где је* $\sigma^2 = 3^2$ *константа, а* μ *се мења узимајући вредности из интервала* $(-\infty, +\infty)$, *те можемо закључити да нормална расподела природно садржи параметар положаја. Са слике 1.1 можемо видети да за* $x = \mu$, $f(x-\mu) = f(0)$, *за* $x = \mu + 1$, $f(x-\mu) = f(1)$ *и иначе за* $x = \mu + a$, $f(x-\mu) = f(a)$. *Стога, улога параметра* μ *јесте да „помера" график функције густине расподеле за „*μ *дужину" дуж* x *осе. Облик графика остаје непромењен, али се мења његов положај, те одатле и назив за параметар* μ *- параметар положаја.*

Наредна дефиниција говори о фамилији густина расподела чији се график „не шета" дуж x, већ се мења облик графика, тј. сужава се или шири.

Дефиниција 1.1.2 *Нека је дата функција густине расподеле* $f(x)$. *Тада се фамилија функција густина расподеле* $\frac{1}{\sigma} f(\frac{x}{\sigma})$, *где је* $\sigma > 0$ *назива* ***фамилија размере са стандардном функцијом густине расподеле*** $f(x)$, *а параметар* σ *се назива* ***параметар размере*** *те фамилије.*

Параметар размере σ шири график функције густине расподеле уколико је $\sigma > 1$, односно сужава график уколико је $\sigma < 1$, те отуда и његов назив. Можемо да закључимо, уколико је дата функција густине расподеле $f(x)$ и $\sigma > 0$, да је фамилија функција густине расподеле $\sigma f(\sigma x)$ такође једна фамилија размере.

Наредним примерима показаћемо неке расподеле које природно садрже параметар размере, као и расподеле које га не садрже, али се трансформацијом може конструисати фамилија размера.

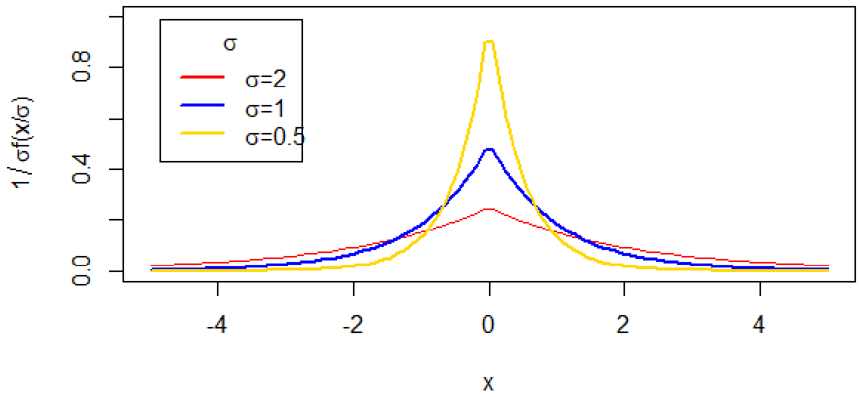
Пример 1.1.2 *(Експоненцијална расподела)*
Најједноставнији пример расподеле која природно садржи параметар размере јесте уједно и једна од најраспрострањенијих и најпознатијих расподела, а то је једнопараметарска експоненцијална расподела. Функција густине расподеле једнопараметарске експоненцијалне расподеле дата је са $g(x|\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0, \lambda > 0$. *Из облика функције густине можемо да видимо да је једнопараметарска експоненцијална фамилија у ствари фамилија размере чија је стандардна функција густине расподеле стандардна експоненцијална расподела* $f(x) = e^{-x}$, *а параметар* λ *је параметар размере. Уколико искористимо дефиницију 1.1.2 и запишемо* $\lambda_1 = \frac{1}{\lambda}$ *и* $g(x|\lambda) = \frac{1}{\lambda_1} f(\frac{1}{\lambda_1})$ *јасније се види да је реч о расподели која природно садржи параметар размере.*

Пример 1.1.3 *(Гама расподела)*
Расподела која такође природно садржи параметар размере јесте двопараметарска гама расподела чија је функција густине расподеле дата са $g(x|b) = \frac{1}{b\Gamma(a)}(\frac{x}{b})^{a-1}e^{-\frac{x}{b}}, x \geq 0$. *Параметар* $a > 0$ *је параметар облика, а параметар* $b > 0$ *је параметар размере. Двопараметарска гама фамилија је фамилија размере чија је стандардна функција густине расподеле једнопараметарска гама функција густине расподеле, тј.* $f(x) = \frac{x^{a-1}e^{-x}}{\Gamma(a)}$. *Односно, када запишемо* $g(x|b) = \frac{1}{b} f(\frac{x}{b})$ *јасније се види да је реч о расподели која природно садржи параметар размере.*

Пример 1.1.4 *(Лапласова расподела)*
Још један пример расподеле која природно садржи параметар размере јесте двострука експоненцијална расподела, тј. Лапласова расподела када је параметар $\mu = 0$. *Функција густине двоструке експоненцијалне расподеле дата је са*

$$f(x|\sigma) = \frac{1}{2\sigma} e^{\frac{-|x|}{\sigma}} \qquad -\infty < x < \infty,\ \sigma > 0$$

Приметимо да ћемо добити стандардну функцију густине расподеле ако је $\sigma = 1$, *тј. густина двоструке експоненцијалне расподеле* *јесте фамилија размере са стандардном функцијом густине расподеле* $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$. *Слика 1.2 илуструје промену графика функције густине расподеле* $f(x|\sigma)$ *у зависности од параметра размере* σ.



Слика 1.2: Функције густине расподеле у зависности од параметра размере

Пример 1.1.5 *(Вејбулова расподела)*
Расподела коју ћемо разматрати у овом примеру добила је име по Валоди Вејбулу[1]. *Он није био први који је користио ову расподелу, али јесте био први који је открио њену широку примену. Вејбулова расподела налази примену у метеорологији, теорији поузданости, бежичној комуникацији, итд. ([4]). Нека је дата случајна величина* X *која има Вејбулову једнопараметарску расподелу, тј* $X \sim W_1(a)$. *Функција густине расподеле дата је са* $f(x) = ax^{a-1}e^{-x^a}, x > 0$, *где је* $a > 0$. *Функција расподеле дата је са* $F(x) = 1 - e^{-x^a}$. *Параметар* a *није параметар размере, већ параметар облика, те Вејбулова расподела природно не садржи параметар размере. Конструишимо фамилију размере чија је стандардна функција густине расподеле Вејбулова функција густине расподеле. Нека је случајна величина* Y *дата са* $Y = bX$, *где је* $b > 0$. *Тада је* Y *случајна величина са Вејбуловом расподелом, где је* a *параметар облика, а* b *је параметар размере. Како бисмо јасније увидели, погледајмо наредне записе. Нека су* $G(y)$ *и* $g(y)$ *функција расподеле и*

[1] Waloddi Weibull (1887-1979), шведски математичар

функција густине расподеле случајне величине Y, респективно.

$$\begin{aligned} G(y) = P\{Y \leq y\} &= P\{bX \leq y\} \\ &= P\{X \leq \frac{y}{b}\} \\ &= F(\frac{y}{b}) \\ &= 1 - exp\Big[- \Big(\frac{y}{b}\Big)^a \Big]. \end{aligned}$$

Одавде следи да је $G'(y) = g(y) = \frac{1}{b}f(\frac{y}{b})$ и да Y има Вејбулову расподелу са параметром облика a и параметром размере b, тј. да је $g(y)$ фамилија размере чија је стандардна функција расподеле Вејбулова функција густине расподеле са параметром облика a.

До сада смо разматрали случајеве када параметри положаја и размере делују одвојено и када свако на свој начин мења стандардну функцију густине расподеле. Међутим, на који начин се мења функција густине расподеле уколико пустимо да оба параметра делују у исто време? Размотримо одговор наредном дефиницијом.

Дефиниција 1.1.3 *Нека је дата функција густине расподеле $f(x)$. Тада се фамилија функција густина расподела $\frac{1}{\sigma}f(\frac{x-\mu}{\sigma})$, где су $-\infty < \mu < \infty$ и $\sigma > 0$, назива* ***фамилија положаја и размере са стандардном функцијом густине расподеле*** *$f(x)$. Параметар μ је* ***параметар положаја****, а параметар σ је* ***параметар размере****.*

Када оба параметра μ и σ „делују" истовремено тада се график функције густине расподеле шири за $\beta > 1$, сужава за $\beta < 1$ и помера дуж x осе за „μ дужину". Можемо закључити да, уколико је дата функција густине расподеле $f(x)$, $-\infty < \mu < \infty$ и $\sigma > 0$, тада ће фамилија функција густина расподеле $\sigma f(\sigma(x + \mu))$ такође бити једна фамилија положаја и размере. У наредним примерима показаћемо неке расподеле које природно садрже параметре положаја и размере, као и оне који их не садрже, али их већ познатом методом можемо изменити како би их садржали.

Пример 1.1.6 *(Нормална расподела)*
Као што смо могли да наслутимо из досадашњих примера, најпознатија расподела која у себи природно садржи параметере положаја и размере јесте нормална расподела. Нека је X случајна величина која има нормалну расподелу, тј. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $-\infty < \mu < \infty$ и $\sigma^2 > 0$, облик функције густине расподеле је $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$, те можемо

написати да је $g(x) = \frac{1}{\sigma} f(\frac{x-\mu}{\sigma})$*, где је* f *функција густине расподеле случајне величине* Y *која има стандардну нормалну расподелу, тј.* $Y \sim N(0,1)$*. Дакле, функција густине нормалне расподеле са параметрима* μ *и* σ *јесте фамилија положаја и размере где је стандардна функција густине расподеле у ствари функција густине стандардне нормалне расподеле* $N(0,1)$*.*

Пример 1.1.7 *(Униформна расподела)*
Једна од расподела за коју можда не бисмо могли тако брзо да наслутимо да у себи крије параметре положаја и размере јесте униформна расподела. Заиста, када кажемо да нека случајна величина има униформну расподелу $U[a,b]$*, није лако уочити поменуте параметре. Пођимо од случајне велчине* X *која има униформну расподелу, тј.* $X \sim U[0,1]$*, чија је функција густине расподеле дата са* $f(x) = 1$*, а функција расподеле је* $F(x) = x$*. Нека је случајна величина* Y *дата са* $Y = a + \sigma X$*, где је* $a \in \mathbb{R}$ *и* $\sigma \in (0,\infty)$*, а* $g(y)$ *и* $G(y)$ *су функција густине расподеле и функција расподеле случајне величине* Y*, респективно. Тада важи:*

$$\begin{aligned} G(y) = P\{Y \leq y\} &= P\{a + \sigma X \leq y\} \\ &= P\{X \leq \frac{y-a}{\sigma}\} \\ &= F(\frac{y-a}{\sigma}) \\ &= \frac{y-a}{\sigma}. \end{aligned}$$

Одатле следи да је $g(y) = \frac{1}{\sigma} f(\frac{y-a}{\sigma})$*. Приметимо да* σ *можемо записати као* $b-a$*, где је* $b > a$ *и* $a, b \in \mathbb{R}$*. Тада функцију густине случајне величине* Y *можемо записати као* $g(y) = \frac{y-a}{b-a}$*, односно случајна величина* Y *има униформну расподелу са параметрима* a *и* b*, тј.* $Y \sim U[a, a+\sigma]$*, односно* $Y \sim U[a,b]$*. Из оваквог записа видимо да је свака униформна расподела у ствари фамилија положаја и размере, где је* a *параметар положаја, а* σ *је параметар размере, а стандардна униформна функција густине је стандарна функција густине те фамилије.*

Пример 1.1.8 *(Кошијева расподела)*
Случајна величина X *са стандардном Кошијевом расподелом има функцију густине расподеле*

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad x \in R.$$

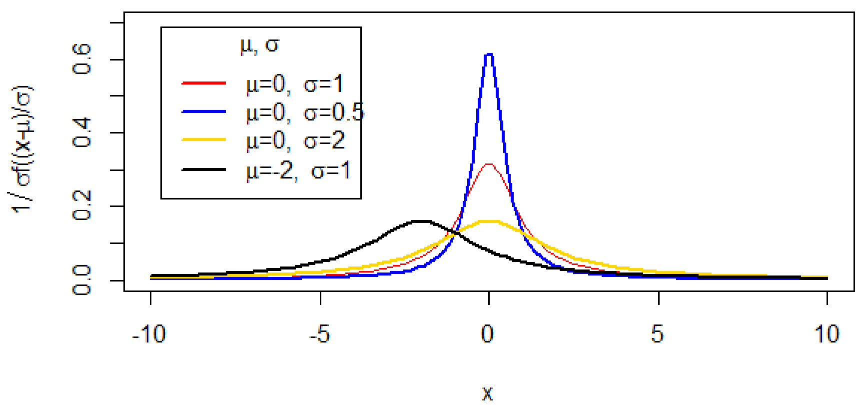
Функција расподеле има следећи облик

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctan x, \quad x \in R.$$

Функција густине стандардне Кошијеве расподеле је у ствари стандарна функција расподеле за Кошијеву фамилију, која је фамилија положаја и размере и чија функција густина расподеле има облик

$$f(x|\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\pi(1+(\frac{x-\mu}{\sigma})^2)}, \quad -\infty < x < \infty.$$

График илуструје промену функције густине расподеле у зависности од параметара положаја и размере.

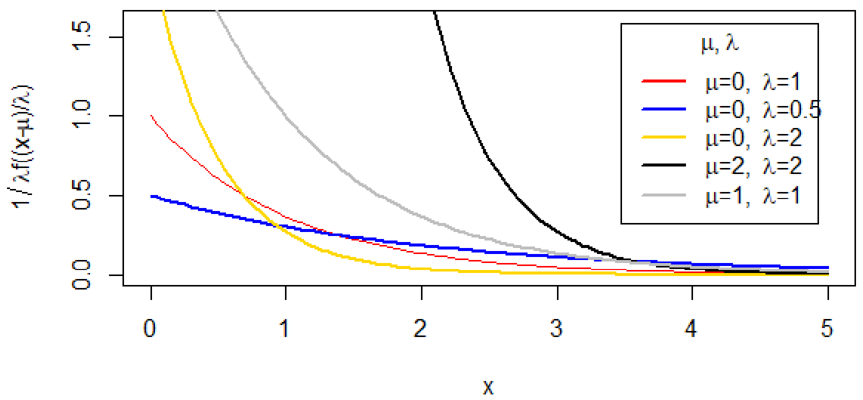


Слика 1.3: Функције густине расподеле у зависности од параметра положаја и размере

Пример 1.1.9 *(Транслирана експоненцијална расподела)*
У примеру 1.1.2 смо видели да је функција густине расподеле облика $f(x) = e^{-x}$ стандардна функција густине за експоненцијалну расподелу. Међутим, уколико запишемо $\lambda_1 = \frac{1}{\lambda}$, $\lambda > 0$ и $g(x) = \frac{1}{\lambda_1} f(\frac{x-\mu}{\lambda_1})$ видимо да функција густине расподеле $g(x)$ припада фамилији положаја и размере. Како бисмо утврдили која је то фамилија, запишимо следеће

$$g(x) = \lambda e^{-\lambda(x-\mu)},$$

што је у ствари функција густине расподеле транслиране експоненцијалне расподеле за $x \geq \mu$. *Параметар* λ *је параметар размере, као и код стандардне експоненцијалне функције расподеле, а параметар* μ *је параметар положаја, тј. параметар који врши траслацију дуж* x *осе. Наредни график показује како се мења функција густине расподеле у зависности од параметра* μ *и параметра* σ.



Слика 1.4: Функције густине расподеле у зависности од параметра положаја и размере

Пример 1.1.10 *(Левијева расподела)*
Левија расподела, названа по француском математичару Полу Левију[2], *која је веома битна у изучавању Брауновог кретања, спада у расподеле које природно не садрже параметере положаја и размере, али их трансформацијом можемо увести. Случајна величина* X *има стандардну Левијеву расподелу уколико је функција густине расподеле дата са* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{x^{3/2}}e^{-\frac{1}{2x}}$, $x \in (0,\infty)$. *Функција расподеле дата је са* $F(x) = 2\left[1 - \Phi(\frac{1}{\sqrt{x}})\right]$, *где је* Φ *функција расподеле стандардне нормалне расподеле. Нека је случајна величина* Y *дата са* $Y = a + bX$, *где* $a \in \mathbb{R}$ *и* $b \in (0,\infty)$, *а* $g(y)$ *и* $G(y)$ *су функција густине и функција расподеле*

[2] Paul Pierre Levy (1886-1971), француски математичар

случајне величине Y, респективно. Тада важи:

$$\begin{aligned} G(y) = P\{Y \leq y\} &= P\{a + bX \leq y\} \\ &= P\{X \leq \frac{y-a}{b}\} \\ &= F(\frac{y-a}{b}) \\ &= 2\Big[1 - \Phi\Big(\sqrt{\frac{b}{y-a}}\Big)\Big]. \end{aligned}$$

Видимо да је функција густине расподеле случајне величине Y дата са $g(y) = \frac{1}{b}f(\frac{y-a}{b})$. Можемо да закључимо да случајна величина Y има Левијеву расподелу са параметром положаја a и параметром размере b, тј. припада фамилији положаја и размере чија је стандардна функција густине расподеле у ствари стандардна Левијева функција густине расподеле.

Наредна теорема преузета је из [1] и показује везу између трансформације стандардне функције густине расподеле $f(x)$ помоћу које се граде фамилије положаја и размере са трансформацијом случајне величине Z чија је густина расподеле $f(z)$. Односно даје формалну потпору претходним примерима где параметри положаја и размере нису природно постојали у одређеним расподелама, као и правило помоћу којег можемо убацити параметре положаја и размере у расподеле које их не садрже. Ова теорема је значајна јер може да помогне при одабиру најбољег модела за популацију, тј. може да помогне при одлуци да ли је фамилија положаја и размере погодна за опис одговарајуће популације. Ако у теореми 1.2 за μ узмемо вредност нула, добијамо фамилију размере, ако је пак σ једнако јединици, тада добијамо фамилију положаја.

Теорема 1.2 *Случајна величина Z има густину расподеле $f(z)$. Нека су дати $-\infty < \mu < \infty$ и $\sigma > 0$. Тада је X случајна величина са функцијом густине расподеле $\frac{1}{\sigma}f(\frac{x-\mu}{\sigma})$ ако и само ако је $X = \sigma Z + \mu$.*

Пре доказа увешћемо две помоћне теореме преузете из [1].

Теорема 1.3 *Нека је дата случајна величина X са функцијом расподеле $F_X(x)$ и нека је дата случајна величина Y, таква да је $Y = g(X)$ и g је монотона функција. Нека су χ и γ дефинисани на следећи начин:*

$$\chi = \{x : f_x(x) > 0\} \text{ и } \gamma = \{y : y = g(x) \text{ за неке } x \in \chi\}. \tag{1.1}$$

Тада важи:

а) *Ако је g растућа функција на χ, тада је $F_Y = F_X(g^{-1}(y))$ за $y \in \gamma$;*

б) *Ако је g опадајућа функција на χ и X је непрекидна случајна величина, тада је $F_Y = 1 - F_X(g^{-1}(y))$ за $y \in \gamma$.*

Доказ. Расподела случајне величине $Y = g(X)$ је дата са

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \le y) \\ &= P(g(X) \le y) \\ &= P(\{x \in \chi : g(x) \le y\}) \\ &= \int_{\{x\in\chi : g(x)\le y\}} f_X(x)dx. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Како је функција g монотона, следи да је она ,,1-1" и ,,на", односно да је бијекција. Стога g^{-1} може узети само једну вредност, тј. $g^{-1}(y) = x$ ако и само ако $y = g(x)$. Ако је g растућа, тада следи:

$$\begin{aligned} \{x \in \chi : g(x) \le y\} &= \{x \in \chi : g^{-1}(g(x)) \le g^{-1}(y)\} \\ &= \{x \in \chi : x \le g^{-1}(y)\} \end{aligned} \tag{1.3}$$

Ако је g опадајућа функција, тада следи:

$$\begin{aligned} \{x \in \chi : g(x) \le y\} &= \{x \in \chi : g^{-1}(g(x)) \ge g^{-1}(y)\} \\ &= \{x \in \chi : x \ge g^{-1}(y)\} \end{aligned} \tag{1.4}$$

Ако је g растућа функција, тада помоћу (1.2) и (1.3) можемо написати:

$$F_Y(y) = \int_{\{x\in\chi : x\le g^{-1}(y)\}} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{g^{-1}(y)} f_X(x)dx = F_X(g^{-1}(y))$$

Ако је g опадајућа, тада важи:

$$F_Y(y) = \int_{\{x\in\chi : x\ge g^{-1}(y)\}} f_X(x)dx = \int_{g^{-1}(y)}^{\infty} f_X(x)dx = 1 - F_X(g^{-1}(y))$$

У другој једнакости смо искористили непрекидност случајне величине X. ■

Теорема 1.4 *Нека је дата случајна величина X чија је функција густине расподеле $f_X(x)$ и нека је $Y = g(X)$, где је g монотона функција. Нека су χ и γ дефинисане као у (1.1) и нека је $f_X(x)$ непрекидна на χ и g^{-1} има непрекидне прве изводе на γ. Тада је функција густине расподеле случајне величине Y дата са:*

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(y))\left|\frac{d}{dy}g^{-1}(y)\right|, \ y \in \gamma \\ \\ 0, \qquad\qquad\qquad\qquad \textit{иначе.} \end{cases} \tag{1.5}$$

Доказ. Користећи теорему 1.3 добијамо да је:

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(y))\frac{d}{dy}g^{-1}(y), \ \text{ако је } g \text{ растућа} \\ \\ -f_X(g^{-1}(y))\frac{d}{dy}g^{-1}(y), \ \text{ако је } g \text{ опадајућа} \end{cases}$$

Ово је заправо само другачији запис за (1.5). ■

Доказ теореме (1.2). Нека је дата случајна величина Z чија је функција густине расподеле $f(z)$ и $X = \sigma Z + \mu$. Тада X можемо да запишемо као $X = g(Z)$, где је g монотона функција и важи $g^{-1}(x) = \frac{x-\mu}{\sigma}$ и $\left|\frac{d}{dx}g^{-1}(x)\right| = \frac{1}{\sigma}$. Када применимо (1.5) из теореме (1.4) добијамо следеће:

$$f_X(x) = f_Z(g^{-1}(x))\left|\frac{d}{dx}g^{-1}(x)\right| = f(\frac{x-\mu}{\sigma})\frac{1}{\sigma}.$$

Сада ћемо доказати други смер. Дефинишимо функцију $g(x)$ са $g(x) = \frac{x-\mu}{\sigma}$ и нека је $Z = g(X)$. Тада је $g^{-1}(Z) = \sigma Z + \mu$ и $\left|\frac{d}{dz}g^{-1}(x)\right| = \sigma$. По теореми 1.4 функција густине расподеле случајне величине Z је дата са

$$f_Z(z) = f_X(g^{-1}(z))\left|\frac{d}{dz}g^{-1}(z)\right| = \frac{1}{\sigma}f(\frac{(\sigma z + \mu) - \mu}{\sigma})\sigma = f(z).$$

Такође је и

$$\sigma Z + \mu = \sigma g(X) + \mu = \sigma(\frac{x-\mu}{\sigma}) + \mu = X.$$

Овим смо доказали и други смер теореме.

■

Поглавље 2

Интервално оцењивање

Често су параметри положаја и размере непознати и потребно је наћи њихову оцену. Како је тачкаста оцена доста непоуздана, користе се интервалне оцене. Упознајмо се сада са начином конструисања интервалних оцена, које заједно са нивоом поверења постају интервали поверења, као и са интервалима поверења за параметре положја и размере неких претходно поменутих расподела.

2.1 Интервалне оцене, интервал и ниво поверења

Нека је $\{F(x,\theta)|\theta \in \Theta\}$ фамилија допустивих расподела обележја X. Код тачкастог оцењивања непознатог параметра θ на основу узорка $(X_1, X_2, ..., X_n)$ оцена је тест статистика облика

$$T_n = T_n(X_1, ..., X_n).$$

За сваку реализацију x$= (x_1, ..., x_n)$ узорка X$= (X_1, ..., X_n)$, та статистика прима вредност $t_n = T_n(x_1, ..., x_n)$ коју прихватамо као приближну вредност непознатог параметра. Јасно је да реализована вредност t_n статистике T_n може одступати, мање или више, од стварне вредности непознатог параметра. Зато је корисно имати критеријум за оцењивање грешке која се чини при коришћењу неке статистике као оцене непознатог параметра. У математичкој статистици се оцењивање грешке врши на тај начин што се одређује интервал који са великом вероватноћом прекрива непознати параметар. Такав интервал се назива *интервал поверења*, а предложени метод се назива *интервално оцењивање* непознатог параметра ([3]).

Дефиниција 2.1.1 *Нека је дат прост случајан узорак* $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ *чија расподела зависи од параметра* $\theta \in \mathbb{R}$. *Нека су* $L_n = L_n(x_1, ..., x_n)$ *и* $U_n = U_n(x_1, ..., x_n)$ *било које функције од узорка за које важи да је* $L_n(x) \leq U_n(x)$. *За свако* X, *случајни интервал* $[L_n(X), U_n(X)]$ *се назива* ***итервална оцена параметра*** θ.

Иако ће у већини случајева L_n и U_n узимати коначне вредности, понекад се може десити супротно, да је на пример $L_n = -\infty$. Тада ћемо имати једнострану интервалну оцену $(-\infty, U_n]$ и претпоставку да је $\theta \leq U_n$, без претпоставке о доњој граници. Аналогно томе, једнострана интервална оцена може бити $[L_n, \infty)$, када је $U_n = \infty$. Иако се у дефиницји користи затворени интервал $[L_n(x), U_n(x)]$, понекад ће бити природније да користимо отворен интервал $(L_n(x), U_n(x))$ или једнострану интервалну оцену, тј. користићемо ону интервалну оцену која буде најпогоднија за дати проблем.

Пример 2.1.1 *Нека је дат прост случајан узорак* $X = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ *чија је расподела* $N(\mu, 1)$. *Нека је* $[\bar{X} - 1, \bar{X} + 1]$ *дата интервална оцена за непознат параметар* μ. *То значи да тврдимо да дата интервална оцена прекрива* μ . *Ако оценимо* μ *само са* $\bar{X}$, *вероватноћа да је та оцена потпуно тачна је нула, односно* $P(\bar{X} = \mu) = 0$. *Међутим, ако користимо дату интервалну оцену, вероватноћа да је наша тврдња тачна, тј. да дати интервал прекрива* μ *је већа од нуле. Одредићемо колика је вероватноћа да је* μ *прекривено датим интервалом, тј. израчунаћемо* $P(\mu \in [\bar{X} - 1, \bar{X} + 1])$. *Како случајна величина* $\bar{X}$ *има* $N(\mu, \frac{1}{4})$ *расподелу, а случајна величина* $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{1}{4}}}$ *има* $N(0,1)$, *тј. стандардну нормалну расподелу, одатле следи:*

$$
\begin{aligned}
P(\mu \in [\bar{X} - 1, \bar{X} + 1]) &= P(\bar{X} - 1 \leq \mu \leq \bar{X} + 1) \\
&= P(-1 \leq \bar{X} - \mu \leq 1) \\
&= P(-2 \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{1}{4}}} \leq 2) \\
&= P(-2 \leq Z \leq 2) \\
&= 0.9544.
\end{aligned}
$$

Показали смо да постоји 95% шансе да дата интервална оцена прекрије непознати параметар.

Тачкаста оцена јесте прецизна, за разлику од интервалне оцене, али нам не даје никакву сигурност, тј. гаранцију да смо у праву. Користећи интервалне оцене добијамо одређени проценат сигурности да је наша претпоставка тачна. Сада када смо се упознали са појмом ,,интервална оцена” и када смо кроз пример 2.1.1 показали да нам такве оцене дају одређен ,,проценат сигурности” да смо у праву када вршимо претпоставку о непознатом параметру, уведимо нове дефиниције 2.1.2 и 2.1.3 које ће нам дати формалнији приказ.

Дефиниција 2.1.2 *За интервалну оцену* $[L_n(X), U_n(X)]$ *непознатог параметра* θ, ***вероватноћа прекривања*** *јесте вероватноћа да ће случајни интервал* $[L_n(X), U_n(X)]$ *прекрити непознати параметар* θ, *односно* $P_\theta(\theta \in [L_n(X), U_n(X)])$ *или* $P(\theta \in [L_n(X), U_n(X)]|\theta)$.

Дефиниција 2.1.3 *За интервалну оцену* $[L_n(X), U_n(X)]$ *параметра* θ, ***коефицијент поверења*** *јесте инфимум вероватноће прекривања, односно*

$$inf_\theta P_\theta(\theta \in [L_n(X), U_n(X)]).$$

Постоји једна веома битна ствар везана за горе поменуте дефиниције коју морамо имати на уму, а то да је интервал тај који је случајна величина, а не параметар. Стога када напишемо $P_\theta(\theta \in [L_n(X), U_n(X)])$, ова вероватноћа се односи на X, не на θ. Другим речима, када напишемо $P_\theta(\theta \in [L_n(X), U_n(X)])$, може изгледати као да је то израз о θ, међутим када напишемо алегебарски еквивалентан израз $P_\theta(L_n(X) \leq \theta, U_n(X) \geq \theta)$, јасније је да се вероватноћа односи на X.

Интервалне оцене, заједно са коефицијентом поверења (најчешће се користи назив ниво поверења), се називају *интервали поверења.* Наредна дефиниција говори о томе и обједињује дефиниције 2.1.2 и 2.1.3.

Дефиниција 2.1.4 *Нека су*

$$L_n = L_n(X_1, ..., X_n) \text{ и } U_n = U_n(X_1, ..., X_n)$$

две статистике такве да за $\forall\theta \in \Theta$ *важе следећи услови:*

а) $P_\theta\{L_n \leq U_n\} = 1$;

б) $P_\theta\{L_n \leq \theta \leq U_n\} \geq \beta$.

Тада се интервал $[L_n, U_n]$ *назива* ***интервал поверења*** *за непознати параметар* θ, *а број* β *назива се* ***ниво поверења***, *тј.* β *је коефицијент поверења из дефиниције 2.1.3.*

За ниво поверења обично се узима број који се мало разликује од јединице, на пример $\beta = 0.9$, $\beta = 0.95$, $\beta = 0.99$, $\beta = 0.999$ итд. Може да се деси да интервал поверења, као случајан интервал, не прекрије непознати параметар. Вероватноћа таквог догађаја је мала и једнака је $1-\beta$. То значи следеће: ако се процедура интервалног оцењивања непознатог параметра помоћу интервала $[L_n, U_n]$ понавља велики број пута, онда ће у приближно $100\beta\%$ случајева реализовани интервал (l_n, u_n) прекривати тачну вредности параметра θ, а у $[1-\beta]100\%$ случајева неће.

2.2 Методе налажења интервалних оцена-класични приступ

У овом поглављу упознаћемо се са класичним методама проналажења интервалних оцена које се заснивају на трансформацији тест статистике и налажењу стожерних величина.

2.2.1 Стожерне величине

Случајна величина чија расподела не зависи од параметра расподеле назива се **стожерна величина** или **стожер**. Коришћење стожерних величина у конструкцији интервала поверења, тј. **стожерно оцењивање** први пут уводи Бернард[1], али се и Фишер[2] 1930. године бавио тиме, само под називом **обрнута вероватноћа**.

Дефиниција 2.2.1 *Случајна величина $Q(X,\theta) = Q(X_1, ..., X_n, \theta)$ је* ***стожерна величина*** *или* ***стожер*** *ако расподела од $Q(X,\theta)$ не зависи од параметра θ. Односно, ако $X \in F(x|\theta)$, тада $Q(X,\theta)$ има исту расподелу без обзира на промене вредности параметра θ.*

За било који скуп A, вероватноћа $P_\theta(Q(X,\theta) \in A)$ не зависи од θ. Техника конструисања интервала поверења помоћу стожера заснива се на томе да нађемо стожер и скуп A тако да је интервал $\{\theta : Q(x,\theta) \in A\}$ оцена за θ.

Пример 2.2.1 *Нека је $(X_1, ..., X_n)$ прост случајан узорак чија је функција густине расподеле дата у табели 2.1.*

---

[1] Barnard (1932-), француски математичар

[2] Sir Ronald Aylmer Fisher (1890-1962), британски статистичар и биолог

Облик функције густине расподеле	Тип фамилије	Могућа стожерна величина
$f(x-\mu)$	Фамилија положаја	$\bar{X}-\mu$
$\frac{1}{\sigma}f(\frac{x}{\sigma})$	Фамилија размере	$\frac{\bar{X}}{\sigma}$
$\frac{1}{\sigma}f(\frac{x-\mu}{\sigma})$	Фамилија положаја и размере	$\frac{\bar{X}-\mu}{S_X}$

Табела 2.1: Стожери положаја и размере

Нека је $\bar{X}$ узорачка средина и $S_X = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\bar{X})^2}$. Како бисмо доказали да су величине дате у табели 2.1 стожери, потребно је да покажемо да њихове расподеле не зависе од параметара. Нека су $Z_1,..,Z_n$ независне, једнако расподељене случајне величине са расподелом $f(z)$.

а) За $X_i \sim f(x-\mu)$, по теореми 1.2 следи да $(X_1,...,X_n) \sim (Z_1+\mu,...,Z_n+\mu)$ и важи да је $\bar{X}-\mu \sim \overline{Z+\mu}-\mu = \bar{Z}$. Како расподела од $\bar{Z}$ не зависи од μ следи да је $\bar{X}-\mu$ стожерна величина.

б) За $X_i \sim \frac{f(\frac{x}{\sigma})}{\sigma}$, по теореми 1.2 следи да $(X_1,...,X_n) \sim (\sigma Z_1,...,\sigma Z_n)$ и важи да је $\frac{\bar{X}}{\sigma} \sim \frac{\overline{\sigma Z}}{\sigma} = \bar{Z}$. Аналогно као у делу под а, расподела $\bar{Z}$ не зависи од σ, стога је и $\frac{\bar{X}}{\sigma}$ стожерна величина.

в) За $X_i \sim \frac{f(\frac{x-\mu}{\sigma})}{\sigma}$, по теореми 2.1 следи да $(X_1,...,X_n) \sim (\sigma Z_1+\mu,...,\sigma Z_n+\mu)$ и важи да $\frac{\bar{X}-\mu}{S_X} \sim \frac{\sigma\bar{Z}+\mu-\mu}{S_{\sigma Z+\mu}} = \frac{\sigma\bar{Z}}{\sigma S_Z} = \frac{\bar{Z}}{S_Z}$. Како расподела од $\frac{\bar{Z}}{S_Z}$ не зависи од μ и σ, случајна величина $\frac{\bar{X}-\mu}{S_X}$ је стожерна величина.

Пример 2.2.2 *(Експоненцијална расподела)*
Нека је дат прост случајан узорак $(X_1,...,X_n)$ чија је расподела $\epsilon(\lambda)$. Тада статистика $T=\sum_{k=1}^{n}X_k$ има $\Gamma(n,\frac{1}{\lambda})$ расподелу, тј. функција густине расподеле је облика $f(t|n,\lambda)=\frac{\lambda^n t^{n-1}e^{-t\lambda}}{\Gamma(n)}$. Гама расподела припада фамилији размере, где је λ параметар размере. Уколико је $Q(T,\lambda)=2T\lambda$, тада

$$Q(T,\lambda) \sim \Gamma(n,\lambda\frac{2}{\lambda}) = \Gamma(n,2),$$

односно расподела $Q(T,\lambda)$ не зависи од λ, те је $Q(T,\lambda)$ стожерна величина са расподелом $\Gamma(n,2)$, односно χ^2_{2n}.

Показаћемо како помоћу стожерних величина можемо креирати интервале поверења. Како је $Q(X,\lambda)$ стожерна величина, тада за одређену вредност α можемо да нађемо a и b које не зависе од λ, тако да важи

$$P_\lambda(a \leq Q(X,\lambda) \leq b) \geq 1-\alpha.$$

Бирамо a и b тако да важи $P_\lambda(a \leq Q(T,\lambda) \leq b) = 1-\alpha$. Тада важи

$$P_\lambda(a \leq Q(T,\lambda) \leq b) = P_\lambda(a \leq 2T\lambda \leq b) = P(a \leq \chi^2_{2n} \leq b) = 1-\alpha.$$

Ако је $n = 10$ и $\alpha = 0.05$, тада из таблице за χ^2 расподелу следи да је $a = \chi^2_{\alpha/2} = 34.17$ и $b = \chi^2_{1-\alpha/2} = 9.59$, односно интервал поверења је $\{\lambda : \frac{34.17}{2T} \leq \lambda \leq \frac{9.59}{2T}\}$.

Пример 2.2.3 *(Транслирана експоненцијална расподела)*
Нека је дат прост случајан узорак $(X_1,...,X_n)$ који има транслирану експоненцијалну расподелу, тј. функција густине расподеле је дата са $f_x(x) = \lambda e^{\lambda(x-\mu)}$, а функција расподеле је $F_x(x) = 1-e^{\lambda(x-\mu)}, x \geq \mu$, где је λ познато, а μ је непознати параметар. Уведимо случајну величину $Y_1 = X_{(1)} - \mu$, са функцијом расподеле $G(y)$, а $X_{(1)}$ је минимум узорка. Како функција расподеле минимума има облик $F_{1,n}(x) = 1-[1-F(x)]^n$, тада ће у нашем случају функција расподеле за $X_{(1)}$ имати обик $F_{1,n} = 1-e^{-\lambda n(x-\mu)}$, а функција расподеле случајне величине Y_1 ће имати облик $G(x) = 1-e^{-\lambda nx} \sim \epsilon(n\lambda)$. Како је λ познато, случајна величина $Y_1 = X_{(1)} - \mu$ је стожер. По већ познатој методи можемо наћи a и b тако да важи $P(a \leq X_{(1)} - \mu \leq b) = 1-\alpha$. Тада ће интервал поверења за непознати параметар μ бити облика $(X_{(1)}+b, X_{(1)}+a)$.

Пример 2.2.4 *(Нормална расподела)*
Нека је дат прост случајан узорак $(X_1,...,X_n) \sim N(\mu,\sigma^2)$. Тада $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$, тј. Z је стожер. Ако је параметар размере σ^2 познат, можемо искористити стожер Z како би конструисали интервал поверења за μ. Тражимо било коју константу a, тако да за дато α важи:

$$P\Bigg(-a \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq a\Bigg) = P(-a \leq Z \leq a) = 1-\alpha.$$

Трансформацијом добијамо интервал поверења:

$$\Bigg\{\mu : \bar{x} - a\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + a\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Bigg\}.$$

Уколико је σ непознато, тада можемо да искористимо стожер $T_{n-1} = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$, где T_{n-1} има Студентову t расподелу.

$$P\left(-a \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \leq a \right) = P(-a \leq T_{n-1} \leq a).$$

Тада за дато α можемо да нађемо а као $a = t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}$, те је интервал поверења за непознати параметар положаја μ са нивоом поверења $1-\alpha$ дат са

$$\left\{ \mu : \bar{x} - t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right\}. \tag{2.1}$$

Уколико желимо да нађемо оцену за параметар размере σ, користићемо статистику $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$, која је стожер јер њена расподела не зависи од параметара μ и σ. Даље, бирамо a и b тако да задовољавају:

$$P\left(a \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq b \right) = P(a \leq \chi^2_{n-1} \leq b) = 1 - \alpha,$$

па трансформацијом можемо добити интервал поверења са нивоом поверења $1-\alpha$

$$\left\{ \sigma^2 : \frac{(n-1)s^2}{b} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{a} \right\}$$

или другачије записано

$$\left\{ \sigma : \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{b}} \leq \sigma \leq \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{a}} \right\}.$$

Из таблице за χ^2 расподелу можемо добити a и b, односно $a = \chi^2_{n-1,1-\alpha/2}$ и $b = \chi^2_{n-1,\alpha/2}$.

Пример 2.2.5 *(Униформна расподела)*
Нека је дат прост случајан узорак $X = (X_1, ..., X_n)$ који има униформну $U(0,\theta)$ расподелу. Расподела случајне величине $Q = \frac{X_{(n)}}{\theta}$ не зависи од непознатог параметра θ, тако да је она стожер. Сада треба да нађемо a и b тако да задовољавају $P(a \leq Q \leq b) = 1 - \alpha$. Знамо да важи

$$P(Q \leq t) = \prod_i P(X_i \leq t\theta) = t^n.$$

Такође знамо да важи $P(Q \leq 1) = 1$, тако да можемо одабрати да је $b = 1$. Сада треба да изаберемо такво a да важи $P(Q \leq a) = \alpha$. Како је $P(Q \leq a) = a^n$, можемо изабрати $a = \alpha^{1/n}$. Тада важи:

$$\begin{aligned} 1 - \alpha = P(a \leq Q \leq 1) &= P(a \leq \frac{X_{(n)}}{\theta} \leq 1) \\ &= P(\frac{1}{a} \geq \frac{\theta}{X_{(n)}} \geq 1) \\ &= P(X_{(n)} \leq \theta \leq \frac{X_{(n)}}{a}). \end{aligned}$$

Односно $1 - \alpha$ интервал поверења јесте $\left[X_{(n)}, \frac{X_{(n)}}{\alpha^{1/n}}\right]$.

2.2.2 Трансформација тест статистике

Постоји јака веза између тестирања хипотеза и интервала поверења. Можемо рећи да сваком интервалу поверења одговара одређена хипотеза и обрнуто. Размотримо наредни пример.

Пример 2.2.6 *(Тест хипотезе о очекивању нормалне расподеле) Нека су дате независне и једнако расподељене случајне величине $X_1, ..., X_n$ чија је расподела $N(\mu, \sigma^2)$, где је μ непознат параметар положаја, а σ познат параметар размере. Размотримо две хипотезе: нулту хипотезу $H_0 : (\mu = \mu_0)$ и алтернативну хипотезу $H_1 : (\mu \neq \mu_0)$. За фиксирани ниво α нађимо критичну област.*

$$P_{H_0}\big(\big|\bar{X}_n - \mu_0\big| \geq \epsilon\big) = P_{H_0}\big(\big|\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\big| \geq \frac{\epsilon}{\sigma}\sqrt{n}\big) = \alpha.$$

Уколико је H_0 тачна тада тест статистика $\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$ има $N(0,1)$ расподелу. За дато α помоћу таблице за нормалну расподелу можемо израчунати $z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{\epsilon}{\sigma}\sqrt{n}$, а помоћу добијеног резултата можемо израчунати ϵ. Нулту хипотезу одбацујемо уколико је

$$\big|\bar{x_n} - \mu_0\big| \geq \epsilon.$$

Област $K = (-\infty, \mu_0 - \epsilon] \cup [\mu_0 + \epsilon, \infty)$, односно $K = (-\infty, \mu_0 - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}] \cup [\mu_0 + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty)$ је критична област за хипотезу $H_0 : (\mu = \mu_0)$, при алтернативи $H_1 : (\mu \neq \mu_0)$. Прихватићемо H_0 ако за вредности из узорка важи $\left|\bar{x_n} - \mu_0\right| \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, или другачије записано:

$$\bar{x_n} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu_0 \leq \bar{x_n} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \tag{2.2}$$

За фиксирано α можемо написати да $P(H_0$ је одбачено$|\mu = \mu_0) = \alpha$, или обрнуто $P(H_0$ је прихваћено$|\mu = \mu_0) = 1 - \alpha$. Користећи запис (2.2) можемо написати

$$P\left(\bar{X}_n - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu_0 \leq \bar{X}_n + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\middle|\mu = \mu_0\right) = 1 - \alpha. \tag{2.3}$$

Како (2.3) важи за свако μ_0, следи да је

$$P\left(\bar{X}_n - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X}_n + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha.$$

Интервал $\left[\bar{x_n} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x_n} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ добијен трансформисањем области прихватања теста са прагом значајности α, јесте интервал поверења са нивоом поверења $1 - \alpha$.

Узорачки простор за који прихватамо $H_0 : (\mu = \mu_0)$ дат је са

$$A(\mu_0) = \{(x_1, ..., x_n) : \mu_0 - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{x_n} \leq \mu_0 + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\}.$$

За одговарајући интервал поверења дефинишимо одговарајући параметарски скуп као

$$C(x_1, ..., x_n) = \{\mu : \bar{x_n} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x_n} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\}.$$

Ова два скупа повезана су на следећи начин

$$(x_1, ..., x_n) \in A(\mu_0) \Leftrightarrow \mu_0 \in C(x_1, ..., x_n).$$

Из овакве везе видимо да је узорачки простор за који прихватамо μ_0 са прагом значајности α, односно узорачки простор који чини област прихватања, онај којим ће интервална оцена прекрити непознати параметар. И код тестирања хипотеза и код интервала поверења полазимо од истог питања, тј. желимо да нађемо вредност непознатог параметра са одређеном прецизношћу, али се начини на које долазимо до одговора разликују.

Наредна теорема показује формалну везу између тестирања хипотеза и интервала поверења и преузета је из [1].

Теорема 2.1 *За свако $\theta_0 \in \Theta$, нека $A(\theta)$ буде област прихватања за тест са прагом значајности α, где је $H_0 : (\theta = \theta_0)$. За сваку реализацију*

$x = (x_1, ..., x_n)$ узорка $X = (X_1, ..., X_n)$, дефинишимо скуп параметара $C(x)$ на следећи начин

$$C(x) = \{\theta_0 : x \in A(\theta_0)\}. \tag{2.4}$$

Тада је случајни интервал $C(X)$ интервал поверења са нивоом поверења $1 - \alpha$. Обрнуто, нека је $C(X)$ интервал поверења са нивоом поверења $1 - \alpha$. За било које $\theta_0 \in \Theta$, дефинишимо

$$A(\theta_0) = \{x : \theta_0 \in C(x)\}.$$

Тада је $A(\theta_0)$ област прихватања за тест са прагом значајности α, где је $H_0 : (\theta = \theta_0)$.

Доказ: Ако је $A(\theta_0)$ област прихватања за тест са прагом значајности α, тада је

$$P_{\theta_0}(X \notin A(\theta_0)) \leq \alpha \text{ и } P_{\theta_0}(X \in A(\theta_0)) \geq 1 - \alpha \tag{2.5}$$

Како је θ_0 произвољно, можемо записати θ уместо θ_0. Тада (2.4) заједно са (2.5) показује да је вероватноћа прекривања скупа $C(X)$ дата са:

$$P_\theta(\theta \in C(X)) = P_\theta(X \in A(\theta)) \geq 1 - \alpha,$$

што показује да је $C(X)$ интервал поверења са нивоом поверења $1 - \alpha$. Грешка прве врсте за тестирање хипотезе $H_0 : (\theta = \theta_0)$ и области прихватања $A(\theta_0)$ дата је са

$$P_{\theta_0}(X \notin A(\theta_0)) = P_{\theta_0}(\theta_0 \notin C(X)) \leq \alpha.$$

А то је у ствари тест са прагом значајности α. ■

Из теореме 2.1 видимо да за сваку вредност $\theta_0 \in \Theta$ из нулте хипотезе добијамо један интервал поверења. Пошто је лакше наћи област прихватања него интервал поверења, први део теореме нам је значајнији. У теореми 2.1 полазимо од нулте хипотезе $H_0 : (\theta = \theta_0)$, а област прихватања је

$$P_{\theta_0}(X \in A(\theta_0)) \geq 1 - \alpha.$$

Када правимо интервал поверења инвертовањем теста, морамо имати на уму и алтернативну хипотезу која може бити нпр. $H_1 : (\theta \neq \theta_0)$ или $H_1 : (\theta > \theta_0)$. Алтернативна хипотеза ће одредити облик од $A(\theta_0)$, а облик $A(\theta_0)$ ће одредити облик $C(x)$. У већини случајева једнострани тестови ће дати једностране интервале поверења, а двострани тестови ће дати двостране интервале поверења. Својства тестова се преносе на интервале поверења. На пример, непристрасни тест ће дати непристрасни интервал поверења, што ћемо касније детаљније приказати.

У наредном примеру ћемо наћи интервал поверења за непознати параметар размере униформне расподеле помоћу трансформације тест статистике.

Пример 2.2.7 *(Интервал поверења униформне расподеле)*
Нека је дат прост случајан узорак $X = (X_1, ..., X_n)$ чија је расподела униформна $U(0, \theta)$. Тестирајмо нулту хипотезу $H_0 : (\theta = \theta_0)$ насупрот алтернативне хипотезе $H_1 : (\theta > \theta_0)$, за дати праг значајности α. Користићемо максимум узорка као тест статистику, тј. $Y = max\{X_1, .., X_n\}$. Уколико је $Y > c$, где је $c > 0$, тада ћемо одбацити нулту хипотезу. Вероватноћа да Y ,,упадне" у критичну област јесте α, односно $P(Y > c) = \alpha$. Нађимо сада интервал поверења за параметар θ, ако важи хипотеза H_0.

$$P_{\theta_0}(Y > c) = 1 - P_{\theta_0}(Y \leq c) \overset{(1)}{=} 1 - \left(\frac{c}{\theta_0}\right)^n = \alpha \Rightarrow \left(\frac{c}{\theta_0}\right)^n = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow c = \theta_0(1-\alpha)^{1/n}.$$

Односно важи:

$$P_\theta(Y \leq \theta(1-\alpha)^{1/n}) = P_\theta\left(\theta \geq \frac{Y}{(1-\alpha)^{1/n}}\right) = 1 - \alpha, \ \forall\theta > 0.$$

Видимо да је доња граница за интервал поверења $\frac{X_{(n)}}{(1-\alpha)^{1/n}}$. Једнакост (1) важи јер су $(X_1, ..., X_n)$ независне и једнако расподељене случајне величине.

У наредном примеру показаћемо како да добијемо интервал поверења помоћу количника веродостојности. Пре тога подсетићемо се дефиниција за функцију веродостојности и количник веродостојности.

Дефиниција 2.2.2 *Размотримо узорак $X = (X_1, ..., X_n)$ из расподеле $\Upsilon(X)$ обележја X, која припада фамилији $P = \{f(x|\theta)|\theta \in \Theta\}$ допустивих расподела. Аналогно се разматра дискретан случај. Функција веродостојности је дата са*

$$L(x_1, ..., x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta).$$

При фиксираном θ функција веродостојности представља густину случајног вектора X.

Дефиниција 2.2.3 *Нека је* $\{F(x|\theta)|\theta \in \Theta\}$ *фамилија допустивих расподела обележја* X, *а* $(X_1, ..., X_n)$ *узорак из расподеле* $\Upsilon(X), H_0 : (\theta \in \Theta_0 \subset \Theta)$ *је нулта хипотеза и* $H_1 : (\theta \in \Theta_1 = \Theta \backslash \Theta_0)$ *је алтернативна хипотеза. Статистика количника веродостојности дата је на следећи начин:*

$$\lambda_n(X) = \lambda_n(X_1, ..., X_n; \Theta_0) = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} L(X_1, ..., X_n; \theta)}{\sup_{\theta \in \Theta} L(X_1, ..., X_n; \theta)}.$$

Критичну област $W \subset \mathbb{R}^n$ *за тестирање хипотезе* H_0 *против алтернативе* H_1 *са прагом значајности* α, *дефинишемо на следећи начин:*

$$W = \{(x_1, ..., x_n) \colon \lambda_n(x_1, ..., x_n; \Theta_0) \leq c\},$$

где је с константа за коју важи

$$P_\theta\{\lambda_n(X_1, ..., X_n; \Theta_0) \leq c\} \leq \alpha, \text{ за свако } \theta \in \Theta_0.$$

Пример 2.2.8 *(Тест количника веродостојности униформне расподеле)*
Нека је дат прост случајан узорак $X = (X_1, ..., X_n)$ *који има униформну расподелу* $U[0, \theta]$. *Желимо да нађемо интервал поверења за непознати параметар размере* θ. *Тестираћемо нулту хипотезу* $H_0 : (\theta = \theta_0)$ *насупрот алтернативне хипотезе* $H_1 : (\theta = \theta_1 < \theta_0)$ *и израчунаћемо количник веродостојности.*

$$\lambda_n(X) = \lambda_n(X_1, .., X_n; \theta_0) = \frac{(\frac{1}{\theta_0})^n}{(\frac{1}{X_{(n)}})^n},$$

где је $X_{(n)} = max\{X_1, ..., X_n\}$. *Закључујемо да је*

$$\lambda_n(X) = \frac{(X_{(n)})^n}{(\theta_0)^n}.$$

Сада треба да пронађемо такву константу с да задовољи $P_{\theta_0}\{\lambda_n(X_1, ..., X_n; \Theta_0) \leq c\} \leq \alpha$ *за свако* $\theta_0 \in \Theta_0$. *Можемо записати:*

$$P_{\theta_0}\{\lambda_n \leq c\} = P_{\theta_0}\left\{(\frac{X_{(n)}}{\theta_0})^n \leq c\right\} = P_{\theta_0}\left\{X_{(n)} \leq c^{\frac{1}{n}}\theta_0\right\} =$$

$$\left(P_{\theta_0}\left\{X_1 \leq c^{\frac{1}{n}}\theta_0\right\}\right)^n = \left(\int_0^{c^{\frac{1}{n}}\theta_0} \frac{1}{\theta_0} dx\right)^n = (c^{\frac{1}{n}})^n = c = \alpha.$$

Тада важи $\{\lambda_n(X) \leq c\} = \left\{(\frac{X_{(n)}}{\theta_0})^n \leq \alpha\right\}$, *односно интервал поверења за* θ *дат је са* $\theta \geq \frac{X_{(n)}}{\alpha^{1/n}}$.

Пример 2.2.9 *(Тест количника веродостојности експоненцијалне расподеле)*
Нека је дат прост случајан узорак $X = (X_1, .., X_n)$ *који има експоненцијалну расподелу* $\epsilon(\frac{1}{\lambda})$, *тј. функција густине расподеле има облик*

$$f(x|\frac{1}{\lambda}) = \frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}, x \geq 0.$$

Желимо да нађемо интервал поверења за непознати параметар размере λ. *Интервал поверења можемо да нађемо помоћу тестирања хипотеза са прагом значајности* α. *Тестирамо нулту хипотезу* $H_0 : (\lambda = \lambda_0)$ *против алтернативне хипотезе* $H_1 : (\lambda \neq \lambda_0)$. *Користићемо тест количника веродостојности. Статистика количника веродостојности дата је са:*

$$\lambda_n(X) = \lambda_n(X_1, ..., X_n; \lambda_0) = \frac{(\frac{1}{\lambda_0})^n e^{-\frac{1}{\lambda_0}\sum_{i=1}^n x_i}}{\sup_\lambda \left[(\frac{1}{\lambda})^n e^{-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^n x_i}\right]} \tag{2.6}$$

Бројилац у (2.6) има такав облик јер је $\Lambda_0 = \{\lambda_0\}$. *Потребно је да нађемо супремум имениоца, тј.* $\sup_{\lambda \in \Lambda} L(X_1, ..., X_n; \lambda)$. *Како је* ln *монотона функција, дозвољено нам је да користимо лакши начин, тј. да тражимо супремум функције* $l(x; \lambda) = lnL(x; \lambda)$. *Можемо израчунати да функција* $l(x; \lambda)$ *достиже максимум у тачки* $\lambda = \bar{x}$. *Сада можемо да запишемо количник веродостојности на следећи начин:*

$$\lambda_n(X; \lambda_0) = \frac{\frac{1}{\lambda_0^n} e^{-\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{\lambda_0}}}{(\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{n})^{-n} e^{-n}} = \left(\frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n\lambda_0}\right)^n e^n e^{-\frac{\sum_{k=1}^n x_k}{\lambda_0}}.$$

Како је $\frac{e^n}{n^n}$ *константа, за фиксирано* λ_0, *област прихватања има следећи облик:*

$$A(\lambda_0) = \left\{x : \left(\frac{\sum_{k=1}^n x_k}{\lambda_0}\right)^n e^{-\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{\lambda_0}} \geq c* \right\}, \tag{2.7}$$

где је $c* = c\frac{n^n}{e^n}$ *таква да задовољава* $P_{\lambda_0}(\ X \in A(\lambda_0)) = 1 - \alpha$. *Трансформисањем области прихватања, добијамо интервал поверења са нивоом поверења* $1 - \alpha$

$$C(x) = \left\{\lambda : \left(\frac{\sum_{k=1}^n x_k}{\lambda}\right)^n e^{-\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{\lambda}} \geq c* \right\}. \tag{2.8}$$

Како тест статистика у (2.8) зависи само од x због $\sum_{k=1}^n x_k$, *интервал поверења можемо написати као:*

$$C(\sum_{k=1}^n x_k) = \left\{\lambda : L(\sum_{k=1}^n x_k) \leq \lambda \leq U(\sum_{k=1}^n x_k)\right\}. \tag{2.9}$$

U и L су функције које су одређене са ограничењима да скуп (2.7) има вероватноћу $1-\alpha$ и да је

$$\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{L(\sum_{k=1}^{n} x_k)}\right)^n e^{\frac{-\sum_{k=1}^{n} x_k}{L(\sum_{k=1}^{n} x_k)}} = \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{U(\sum_{k=1}^{n} x_k)}\right)^n e^{\frac{-\sum_{k=1}^{n} x_k}{U(\sum_{k=1}^{n} x_k)}}. \tag{2.10}$$

Уведимо смене

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{L(\sum_{k=1}^{n} x_k)} = a \text{ и } \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{L(\sum_{k=1}^{n} x_k)} = b, \tag{2.11}$$

где су a и b константе за које важи $a > b$. Тада (2.10) можемо записати као

$$a^n e^{-a} = b^n e^{-b}. \tag{2.12}$$

Подсетимо се да ако $X_i \in \epsilon(\frac{1}{\lambda})$, где су X_i независне случајне величине, важи да $\sum_{k=1}^{n} X_k \in \Gamma(n, \lambda)$, а $\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{\lambda} \in \Gamma(n, 1)$. Уколико је у нашем примеру $n = 2$, важи $\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{\lambda} \in \Gamma(2, 1)$. Тада из (2.8) и (2.11) интервал поверења постаје $\left\{\lambda : \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{n} x_k \leq \lambda \leq \frac{1}{b}\sum_{k=1}^{n} x_k\right\}$, где a и b задовољавају:

$$P_\lambda\left(\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{n} X_k \leq \lambda \leq \frac{1}{b}\sum_{k=1}^{n} X\right) = P\left(b \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{\lambda} \leq a\right) = 1 - \alpha.$$

Рекли смо да $\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{\lambda} \in \Gamma(n, 1)$, па користећи парцијалну интеграцију можемо да израчунамо:

$$\begin{aligned} P\left(b \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{\lambda} \leq a\right) &= \int_a^b t e^{-t} dt \\ &= e^{-b}(b+1) - e^{-a}(a+1). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Да бисмо добили 90% интервал поверења услови (2.12) и (2.13) морају бити испуњени. Када заокружимо на три децимале добијамо да је $a = 5.480$ и $b = 0.441$, са нивоом поверења 0.90006. Стога, вероватноћа прекривања непознатог параметра дата је са

$$P_\lambda\left(\frac{1}{5.480}\sum_{k=1}^{n} X_k \leq \lambda \leq \frac{1}{0.441}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = 0.90006.$$

Приметимо да смо у претходном примеру имали двострани интервал поверења, а разлог томе јесте алтернативна хипотеза $H_1 : (\mu \neq \mu_0)$. У наредном примеру трансформисаћемо једнострани тест како бисмо добили једнострани интервал поверења.

Пример 2.2.10 *(Тест количника веродостојности нормалне расподеле) Нека је $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ прост случајан узорак из $N(\mu, \sigma^2)$ расподеле, са непознатим параметром положаја μ и непознатим параметром размере σ. Конструишимо једнострани интервал поверења који ће дати горњу границу за μ, са нивоом поверења $1 - \alpha$, односно конструишимо интервал поверења облика $C(x) = (-\infty, U(x)]$. Како бисмо добили такав интервал поверења користићемо теорему 2.1 и трансформисаћемо једнострани тест, где је нулта хипотеза $H_0 : (\mu = \mu_0)$, насупрот алтернативне хипотезе $H_1 : (\mu < \mu_0)$. Узорачки простор дат је са:*

$$\Theta = \{(\mu, \sigma^2) : -\infty < \mu < \infty, 0 < \sigma^2 < \infty\},$$

а када важи да је $\mu = \mu_0$:

$$\Theta_0 = \{(\mu, \sigma^2) : \mu = \mu_0, 0 < \sigma^2 < \infty\}.$$

Функција веродостојности дата је са:

$$L(x; \mu, \sigma^2) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_k-\mu)^2}{2\sigma^2}} = (\frac{1}{2\pi\sigma^2})^{n/2} e^{-(\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu)^2)}. \qquad (2.14)$$

Приметимо да је $\sum_{k=1}^{n}(x_k - \mu)^2 = \sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - \mu)^2$. Када такав запис применимо у (2.14), функција веродостојности добија облик који ће нам олакшати даље рачунање, тј.

$$L(x; \mu, \sigma) = e^{-(\frac{n(\bar{x}-\mu)^2}{2\sigma^2})} \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} e^{-(\sum_{k=1}^{n} \frac{(x_k-\bar{x})^2}{2\sigma^2})}. \qquad (2.15)$$

На Θ функција веродостојности достиже свој максимум за $\hat{\mu} = \bar{x}$ и $\hat{\sigma^2} = \frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2}{n}$, стога важи:

$$\sup_{(\mu,\sigma)\in\Theta} L(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{(2\pi\hat{\sigma^2})^{n/2}} e^{-n/2}.$$

Функција веродостојности при $H_0 : ((\mu, \sigma) \in \Theta_0)$ јесте:

$$L(x; \mu_0, \sigma) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} e^{-(\sum_{k=1}^{n} \frac{(x_k-\mu_0)^2}{2\sigma^2})}.$$

Како је $\mu = \mu_0$, функција достиже максимум за $\hat{\sigma_0}^2 = \frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu_0)^2}{n}$, стога важи

$$\sup_{(\mu,\sigma)\in\Theta_0} L(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{(2\pi\hat{\sigma_0^2})^{n/2}} e^{-n/2}.$$

Сада можемо да запишемо количник функције веродостојности као

$$\lambda_n(X) = \frac{\sup_{(\mu,\sigma)\in\Theta_0} L(x,\mu,\sigma)}{\sup_{(\mu,\sigma)\in\Theta} L(x,\mu,\sigma)}$$
$$= (\frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma_0}^2})^{n/2}.$$

Одбацићемо H_0 *уколико је* $\lambda_n(X)$ *,,мало", односно за ,,велике" вредности*

$$\frac{\hat{\sigma_0}^2}{\hat{\sigma}^2} = \frac{\sum_{k=1}^n (x_k-\mu_0)^2}{\sum_{k=1}^n (x_k-\bar{x})^2} = \frac{\sum_{k=1}^n (x_k-\bar{x})^2 + n(\bar{x}-\mu_0)^2}{\sum_{k=1}^n (x_k-\bar{x})^2} = 1 + \frac{n(\bar{x}-\mu_0)^2}{\sum_{k=1}^n (x_k-\bar{x})^2}. \tag{2.16}$$

Разломак у (2.16) једнак је $\frac{T^2}{(n-1)}$, *где је*

$$T = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}.$$

Случајна величина T *је Студентова случајна величина са* $n-1$ *степени слободе, а* $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^n (X_k-\bar{X})^2$. *Одбацићемо* H_0 *уколико је*

$$\frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} < -t_{n-1,\alpha}.$$

Област прихватања је

$$A(\mu_0) = \left\{ x : \bar{x} \geq \mu_0 - t_{n-1,\alpha}\frac{s}{\sqrt{n}} \right\}$$

и $x \in A(\mu_0) \Leftrightarrow \bar{x} + t_{n-1,\alpha}\frac{s}{\sqrt{n}} \geq \mu_0$. *Када применимо теорему 2.1, можемо конструисати интервал поверења:*

$$C(x) = \left\{\mu_0 : x \in A(\mu_0)\right\} = \left\{ \mu_0 : \bar{x} + t_{n-1,\alpha}\frac{s}{\sqrt{n}} \geq \mu_0 \right\}.$$

Интервал $C(X) = (-\infty, \bar{X} + t_{n-1,\alpha}\frac{S}{\sqrt{n}}]$ *је интервал поверења за* μ, *где је ниво поверења* $1-\alpha$. *У овом примеру смо показали да једнострани тест даје једнострани интервал поверења.*

2.3 Бајесови интервали прекривања

Када смо говорили о непознатим параметрима и интервалима поверења у класичном приступу, увек смо користили израз интервал

,,прекрива" параметар, уместо параметар је ,,унутар" интервала и то је урађено са намером. Желели смо да нагласимо да је интервал тај који је случајна величина, а не параметар. У примеру 2.2.9 смо показали да је 90% интервал поверења за λ дат са $(\frac{1}{5.480}\sum_{k=1}^{n}X_k, \frac{1}{0.441}\sum_{k=1}^{n}X_k)$. Заиста, природно и примамљиво је рећи да је вероватноћа да λ ,,уђе" у интервал $(\frac{1}{5.480}\sum_{k=1}^{n}X_k, \frac{1}{0.441}\sum_{k=1}^{n}X_k)$ једнака 90%. Међутим, такав израз није тачан, јер је претпоставка да је параметар фиксиран. Нека је $\sum_{k=1}^{2}X_k = 4$, тада је 90% интервал поверења $(0.7299, 9.0702)$. Стога, интервал $(0.7299, 9.0702)$ је само једна од могућих реализација случајног интервала $(\frac{1}{5.480}\sum_{k=1}^{n}X_k, \frac{1}{0.441}\sum_{k=1}^{n}X_k)$, а како се интервал ,,не помера", λ ,,улази" у интервал $(0.7299, 9.0702)$ са вероватноћом 0 или 1. Када кажемо да реализовани интервал $(0.7299, 9.0702)$ има вероватноћу покривања од 90%, то значи да ће 90% случајних интервала прекрити параметар.

Бајесова метода је другачија од онога што смо до сада описивали. Пре него што опишемо Бајесове интервале, подсетимо се дефиниције априорне[3] и апостериорне[4] расподеле. У овом поглављу коришћено је [1] и [5].

Дефиниција 2.3.1 *Нека је дата случајна величина X чија је функција густине расподеле дата са $f(x|\theta)$, а θ је непознат параметар расподеле и случајна величина. Априорна расподела вероватноће $\pi(\theta)$ параметра θ је расподела вероватноће која је донета пре било каквог доказа и често је заснована на субјективном закључивању и претпоставкама. Од тренутка када имамо реализовани узорак $x = (x_1, ..., x_n)$, он нам даје информацију о параметру θ. На основу тога се добија апостериорна расподела $\pi(\theta|x)$, односно*

$$\pi(\theta|x) = \frac{\pi(\theta)f(x|\theta)}{\int_{\mathbb{R}^n}\pi(\theta)f(x|\theta)d\theta}.$$

Стога, уколико је $\pi(\theta|x)$ апостериорна расподела за θ за дати реализовани узорак $x = (x_1, ..., x_n)$, тада за било који скуп $A \subset \Theta$, важи

$$P(\theta \in A|x) = \int_A \pi(\theta|x)d\theta, \tag{2.17}$$

где је A интервал Бајесових оцена за θ. Како бисмо направили разлику између обичних интервала поверења и интервала Бајесових оцена, интервал Бајесових оцена зваћемо интервал прекривања.

[3] A priori (лат.) Независан од искуства

[4] A posteriori (лат.) Унатраг. По искуству. По последицама закључивати о узроцима.

Пример 2.3.1 *(Нормална расподела)*
Нека је дата случајна величина X која има нормалну расподелу $N(\mu, \sigma^2)$, где је μ непознати параметар, а σ^2 је познато. Априорна расподела за параметар μ је нормална расподела $N(\mu_0, \sigma_0^2)$, где су μ_0 и σ_0^2 познати. Односно, априорна расподела за параметар μ и случајну величину X су:

$$\pi(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} e^{-\frac{(\mu-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}} \text{ и } f(x|\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Уведимо ознаку $I_\mu = \pi(\mu)f(x|\mu)$, стога апостериорна расподела за μ је дата са

$$\begin{aligned}
\pi(\mu|x) &= \frac{I_\mu}{\int_{-\infty}^{+\infty} I_\mu d\mu} \\
&= \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} e^{\frac{-(\mu-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\int_{-\infty}^{+\infty} I_\mu d\mu} \\
&= \frac{\frac{1}{2\pi\sigma_0\sigma} e^{\frac{-\mu^2+2\mu\mu_0-\mu_0^2}{2\sigma_0^2} - \frac{x^2-2\mu x+\mu^2}{2\sigma^2}}}{\int_{-\infty}^{+\infty} I_\mu d\mu} \\
&= \frac{\frac{1}{2\sigma_0\sigma} e^{\frac{-\mu^2\sigma^2+2\mu\mu_0\sigma^2-\mu_0^2\sigma^2-\sigma_0^2x^2+2\mu\sigma_0^2x-\mu^2\sigma_0^2}{2\sigma_0^2\sigma^2}}}{\int_{-\infty}^{+\infty} I_\mu d\mu} \\
&= \frac{\frac{1}{2\sigma_0\sigma} e^{\frac{-\mu^2(\sigma^2+\sigma_0^2)+2\mu(\mu_0\sigma^2+\sigma_0^2x)-(\mu_0^2\sigma^2+\sigma_0^2x^2)}{2\sigma_0^2\sigma^2}}}{\int_{-\infty}^{+\infty} I_\mu d\mu} \\
&\overset{(1)}{=} c\frac{\frac{1}{2\sigma_0\sigma} e^{\left[\frac{-\mu^2+2\mu\frac{\mu_0\sigma^2+\sigma_0^2x}{\sigma^2+\sigma_0^2}-(\frac{\mu_0\sigma^2+\sigma_0^2x}{\sigma^2+\sigma_0^2})^2}{\frac{2\sigma_0^2\sigma^2}{\sigma^2+\sigma_0^2}}\right]}}{\int_{-\infty}^{+\infty} I_\mu d\mu} \\
&= c\frac{e^{\left[-\frac{(\mu-\frac{\mu_0\sigma^2+x\sigma_0^2}{\sigma^2+\sigma_0^2})^2}{2\frac{\sigma^2\sigma_0^2}{\sigma^2+\sigma_0^2}}\right]}}{\int_{-\infty}^{+\infty} I_\mu d\mu}.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Једнакост (1) смо добили када смо извршили допуну до квадрата бинома и када смо као константу c ставили онај део експонента који зависи само од познатних вредности μ_0, σ_0 и σ. Уведимо запис

$$\sigma_1^2 = \frac{\sigma^2\sigma_0^2}{\sigma^2+\sigma_0^2} \text{ и}$$

$$\mu_1 = \frac{\mu_0\sigma^2 + x\sigma_0^2}{\sigma^2 + \sigma_0^2}.$$

Како сваку трансформацију коју смо применили на именилац I_μ можемо применити и на подинтегралну функцију I_μ, добићемо исту константу c и у имениоцу и у бројицу, те се оне могу скратити. Тада, са уведеним новим записом (2.18) постаје

$$f(\mu|x) = \frac{e^{-(\frac{\mu-\mu_1}{\sqrt{2\sigma_1^2}})^2}}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\frac{\mu-\mu_1}{\sqrt{2\sigma_1^2}})^2} d\mu}.$$

Након увођења смене $t = \frac{\mu-\mu_1}{\sqrt{2\sigma_1^2}}$ добијамо познати Гаусов интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt$ чија је вредност једанка $\sqrt{\pi}$. Тада апостериорна расподела $f(\mu|x)$ добија облик

$$f(\mu|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} e^{-\left(\frac{\mu-\mu_1}{\sqrt{2\sigma_1^2}}\right)^2}.$$

Овакав облик функције густине расподеле лако доводи до закључка да $\mu|x$ има $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ расподелу, односно $\frac{\mu-\mu_1}{\sigma_1}$ има $N(0,1)$ расподелу, те Бајесов интервал оцена за μ, односно интервал прекривања за дати ниво поврења $1-\alpha$, има облик

$$\mu_1 - z_{\alpha/2}\sigma_1 \leq \mu \leq \mu_1 + z_{\alpha/2}\sigma_1.$$

Пример 2.3.2 *(Експоненцијална расподела)*
Нека је прост дат случајан узорак $X = (X_1, .., X_n)$ чија је расподела $\epsilon(\lambda)$ и λ има априорну расподелу $\Gamma(\alpha, \frac{1}{\beta})$, тј. функција густине расподеле дата је са

$$\pi(\lambda) = \frac{\beta^\alpha \lambda^{\alpha-1} e^{-\lambda\beta}}{\Gamma(\alpha)}.$$

Параметри α и β су познати и желимо да нађемо апостериорну расподелу за непознати параметар λ.

$$\pi(\lambda|x) = \frac{\lambda e^{-\lambda x} \frac{\beta^\alpha \lambda^{\alpha-1} e^{-\lambda\beta}}{\Gamma(\alpha)}}{\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} \frac{\beta^\alpha \lambda^{\alpha-1} e^{-\lambda\beta}}{\Gamma(\alpha)} d\lambda} = \frac{\lambda^\alpha \beta^\alpha e^{-\lambda(x+\beta)}}{\beta^\alpha \int_0^\infty \lambda^\alpha e^{-\lambda(x+\beta)} d\lambda}.$$

Уведимо ознаку $A = \int_0^\infty \lambda^\alpha e^{-\lambda(x+\beta)} d\lambda$ *за интеграл у имениоцу и израчунајмо* A.

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{(x+\beta)^\alpha} \int_0^\infty \lambda^\alpha (x+\beta)^\alpha e^{-\lambda(x+\beta)} d\lambda \\
&= \frac{1}{(x+\beta)^\alpha} \int_0^\infty [\lambda(x+\beta)]^\alpha e^{[-\lambda(x+\beta)]} d\lambda \quad (\lambda(x+\beta) = t) \\
&= \frac{1}{(x+\beta)^{\alpha+1}} \int_0^\infty t^\alpha e^{-t} dt \\
&= \frac{1}{(x+\beta)^{\alpha+1}} \Gamma(\alpha+1).
\end{aligned}
$$

Сада $\pi(\lambda|x)$ *постаје*

$$
\pi(\lambda|x) = \frac{\lambda^\alpha e^{-\lambda(x+\beta)}(x+\beta)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)}.
$$

Апостериорна расподела за λ *јесте* $\Gamma(\alpha+1, \frac{1}{x+\beta})$. *Тада ће случајна величина* $Q = 2\lambda(x+\beta)$ *имати* $\Gamma(\alpha+1, 2)$, *односно* $\chi^2_{2(\alpha+1)}$. *Интервал поверења за* λ *можемо добити из услова да је* $P(a \leq Q \leq b) = 1 - \alpha_1$, *за дато* α_1. *Тада помоћу таблица за* χ^2 *расподелу можемо наћи* a *и* b *и Бајесов интервал оцена за* λ *имаће облик*

$$
\Big[\frac{a}{2(x+\beta)}, \frac{b}{2(x+\beta)}\Big].
$$

Пример 2.3.3 *(Униформна расподела)*
Нека је дат прост случајан узорак $X = (X_1, .., X_n)$ *чија је расподела униформна* $U[0, \theta]$, *где је* θ *непознати параметар чија је априорна расподела Паретова двопараметарска расподела* $P(a, b)$, *тј. функција густине расподеле је дата са*

$$
\pi(\theta) = \frac{ab^a}{\theta^{a+1}}, \quad \theta \geq b, a > 0, b > 0.
$$

Параметри a *у* b *су познати. Пре него што кренемо са рачунањем апостериорне расподеле за* θ *поменимо једно погодно својство Паретове расподеле које ће нам користити у овом примеру. Уколико случајна величина* $Y \sim P(a, b)$ *тада* $2a \ln \frac{Y}{b} \sim \chi^2_2$. *Нађимо сада апостериорну* *расподелу за θ.*

$$\begin{aligned}\pi(\theta|x) &= \frac{\frac{ab^a}{\theta^{a+1}}\frac{1}{\theta}}{\int_b^\infty \frac{ab^a}{\theta^{a+1}}\frac{1}{\theta}d\theta}\\ &= \frac{\frac{1}{\theta^{a+2}}}{\frac{1}{(a+1)b^{a+1}}}\\ &= \frac{(a+1)b^{a+1}}{\theta^{a+2}}.\end{aligned}$$

Облик функције густине расподеле нам говори да је апостериорна расподела за θ у ствари Паретова расподела $P(a+1,b)$. Уведимо нову случајну величину $T = 2(a+1)\ln(\frac{\theta}{b})$ и уколико искористимо поменуто својство Паретове расподеле видимо да $T \sim \chi^2_2$. Тада тражимо c и d, $c \leq d$, такве да задовољавају $P(c \leq T \leq d) = 1-\alpha$, за дато α.

$$\begin{aligned}P(c \leq T \leq d) &= P(c \leq 2(a+1)\ln\frac{\theta}{b} \leq d)\\ &= P(\frac{c}{2(a+1)} \leq \ln\frac{\theta}{b} \leq \frac{d}{2(a+1)})\\ &= P(e^{\frac{c}{2(a+1)}} \leq \frac{\theta}{b} \leq e^{\frac{d}{2(a+1)}})\\ &= P(be^{\frac{c}{2(a+1)}} \leq \theta \leq be^{\frac{d}{2(a+1)}}).\end{aligned}$$

Када из таблица за χ^2 расподелу нађемо c и d, Бајесов интервал оцена за θ има облик

$$[be^{\frac{c}{2(a+1)}}, be^{\frac{d}{2(a+1)}}].$$

2.4 Асимптотски интервали поверења

До сада смо разматрали интервале поверења за непознати параметар расподеле када је дат коначан прост случајан узорак. Размотримо сада случај када је дат прост случајан узорак $X = (X_1, ..., X_n)$, $n \to \infty$. У овом поглављу користили смо [6], [7] и [8].

Показаћемо да оцене добијене методом максималне веродостојности имају две асимптотске особине, а то су постојаност и асимптотска нормалност и показаћемо везу са информационом функцијом Фишера. Нећемо доказивати ова тврђења јер се детаљна извођења могу наћи у [7]. Пре него што наставимо подсетимо се својства асимптотске нормалности.

Дефиниција 2.4.1 *Нека је дат прост случајан узорак $(X_1, ..., X_n)$ чија расподела садржи непознати параметар θ. Нека је $\hat{\theta}$ оцена параметра*

θ. Оцена $\hat{\theta}$ непознатог параметра θ је асимптотски нормална уколико важи

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}-\theta) \xrightarrow{D} N(0,\sigma_\theta^2), \tag{2.19}$$

где се σ_θ^2 сматра асимптотском дисперзијом оцене $\hat{\theta}$.

Теорема 2.2 *Оцена $\hat{\theta}$ добијена методом максималне веродостојности је постојана, односно $\hat{\theta} \to \theta$, при $n \to \infty$.*

Теорема 2.3 *Оцена добијена методом максималне веродостојности има својство асимптотске нормалности, односно важи*

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}-\theta) \xrightarrow{D} N(0,\sigma_\theta^2) \text{ за неке } \sigma_\theta^2.$$

Асимптотска дисперзија σ_θ^2 јесте мера квалитета асимптотске оцене.

Пре него што наставимо даље, подсетимо се дефиниције информационе функције Фишера.

Дефиниција 2.4.2 *Информациона функција Фишера случајне величине X чија расподела садржи непознати параметар θ дата је са*

$$I(\theta) = E_\theta\Big[(l'(X|\theta))^2\Big] = \int (l'(x|\theta))^2 f(x|\theta)dx, \tag{2.20}$$

где је $l(x|\theta) = lnf(x|\theta)$. Уколико је функција $ln(x|\theta)$ два пута диференцијабилна и важе услови регуларности из [9], тада се информациона функција Фишера може записати као:

$$I(\theta) = -E_\theta\Big[l''(x|\theta)\Big] = -\int \Big[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} lnf(x|\theta)\Big] f(x|\theta)dx. \tag{2.21}$$

Пример 2.4.1 *(Информациона функција Фишера за параметар положаја)*
Нека је дата случајна величина X чија је расподела припада фамилији положаја, тј. функција густине расподеле је дата у облику $g(x|\mu) = f(x-\mu)$, где је $f(x)$ стандардна функција расподеле за фамилију положаја, $-\infty < \mu < +\infty$. Израчунајмо информациону функцију Фишера.

$$\begin{aligned}
I(\mu) &= \int \left[\frac{\partial \ln f(x-\mu)}{\partial\mu}\right]^2 f(x-\mu)dx \\
&= \int \left[\frac{f'(x-\mu)}{f(x-\mu)}\right]^2 f(x-\mu)dx \\
&\int \frac{(f'(x-\mu))^2}{f(x-\mu)}dx \quad (x-\mu = t) \\
&= \int \frac{f'(t)^2}{f(t)}dt.
\end{aligned}$$

Можемо да закључимо да информациона функција Фишера за параметар положаја неће зависити од параметра положаја.

Сада ћемо навести теорему која говори о асимптотској нормалности јер даје везу са информационом функцијом Фишера, односно открива шта је заправо σ_θ^2.

Теорема 2.4 *Претпоставимо да су $X_1, X_2, ..., X_n$ независне и једнако расподељене случајне величине чија функција густине расподеле $f(x|\theta)$ задовољава услове $(A1)-(A6)$ који су дати у [8] у поглављу 5.4. Тада важи:*

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}-\theta) \xrightarrow{D} N(0, \frac{1}{I(\theta)}),$$

где је $\hat{\theta}$ оцена добијена методом максималне веродостојности.

Можемо видети да ће асимптотска дисперзија бити мања како информациона функција Фишера расте.

Можемо да закључимо да уколико је $\hat{\theta}$ оцена добијена методом максималне веродостојности, тада важи $\frac{\hat{\theta}-\theta}{\frac{1}{\sqrt{nI(\theta)}}} \approx N(0,1)$, односно интервал поверења ће имати облик

$$\hat{\theta} - \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{nI(\theta)}} \leq \theta \leq \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{nI(\theta)}} + \hat{\theta}. \tag{2.22}$$

Проблем са интервалом поверења оваквог облика јесте што информациона функција Фишера може зависити од непознатог параметра θ. Стога, мораћемо да оценимо информациону функцију Фишера. За довољно велико n, оцена $\hat{\theta}$ је случајна величина са нормалном расподелом чија је дисперзија $1/(nI(\theta))$. Односно стандардна грешка $se(\hat{\theta})$ за $\hat{\theta}$ је дата са $(nI(\theta))^{-1/2}$. Како $I(\theta)$ обично зависи од θ, постоје два начина да оценимо $I(\theta)$, а тиме и стандардну грешку за $\hat{\theta}$.

1. Можемо да заменимо $\hat{\theta}$ за θ. Тада ће оцена за стандардну грешку бити:
$$\hat{se}(\hat{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{nI(\hat{\theta})}}.$$
$nI(\hat{\theta})$ се зове очекивана информациона функција Фишера за θ.

2. С обзиром да је $I(\theta) = -E_\theta[l''(X_i|\theta)]$, можемо оценити $I(\theta)$ са:
$$\widehat{I(\theta)} = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} l''(X_i|\hat{\theta}),$$

што даје оцену стандардне грешке:

$$\hat{se}(\hat{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{n\widehat{I(\theta)}}}.$$

$n\widehat{I(\theta)}$ се назива узорачка информациона функција Фишера за θ.

Сада ћемо навести неколико примера асимптотских интервала поверења које можемо да добијемо помоћу информационе функције Фишера.

Пример 2.4.2 *(Експоненцијална расподела)*
Нека је дата случајна величина X која има експоненцијалну расподелу $\epsilon(\lambda)$, где је λ непознати параметар, а функција густине расподеле је дата са $f(x|\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$. Нађимо интервал поверења за непознати параметар λ користећи (2.22). Прво ћемо израчунати информациону функцију Фишера користећи 2.21.

$$I(\lambda) = -E_\lambda\big[l''(x|\lambda)\big] = -\int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{1}{\lambda^2}\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Како је $I(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2}$, важи $\frac{\sqrt{n}(\hat{\lambda}-\lambda)}{\lambda} \approx N(0,1)$. Запишимо сада интервал поверења у облику (2.22). Добијамо да важи:

$$\hat{\lambda} - \frac{\lambda z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}} \leq \lambda \leq \hat{\lambda} + \frac{\lambda z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow \hat{\lambda}(1 + \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}})^{-1} \leq \lambda \leq \hat{\lambda}(1 - \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}})^{-1},$$

где је $\hat{\lambda}$ оцена добијена методом максималне веродостојности. Стога, 95% *интервал поверења је дат са $\hat{\lambda}(1 + \frac{1.96}{\sqrt{n}})^{-1} \leq \lambda \leq \hat{\lambda}(1 - \frac{1.96}{\sqrt{n}})^{-1}$.*

Пример 2.4.3 *(Кошијева расподела)*
Нека је дата случајна величина X која има Кошијеву расподелу, где је θ непознати параметар, а функција густине расподеле је дата са $f(x|\theta) = \frac{1}{\pi(1+(x-\theta)^2)}$. Може се израчунати да је информациона функција

Фишера $I(\theta) = \frac{1}{2}$ *користећи 2.21.*

$$\begin{aligned}
I(\theta) &= E_\theta\left[\frac{\partial^2 ln(1+(X-\theta)^2)}{\partial\theta^2}\right] \\
&= 2E_\theta\left[-\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{(X-\theta)}{1+(X-\theta)^2}\right] \\
&= 2E_\theta\left[\frac{1}{1+(X-\theta)^2} - \frac{2(X-\theta)^2}{[1+(X-\theta)^2]^2}\right] \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{[1+(x-\theta)^2]^2} - \frac{2(x-\theta)^2}{[1+(x-\theta)^2]^3}\right]dx \quad (x-\theta=t) \qquad (2.23) \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{[1+t^2]^2} - \frac{2t^2}{[1+t^2]^3}\right]dt \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{[1+t^2]^2} - \frac{2}{[1+t^2]^2} + \frac{2}{[1+t^2]^3}\right]dt \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{-1}{[1+t^2]^2} + \frac{2}{[1+t^2]^3}\right]dt.
\end{aligned}$$

Уведимо ознаку $I_k = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{[1+t^2]^k}dt$. *Запишимо* I_k *на следећи начин:*

$$\begin{aligned}
I_k &\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+t^2}{[1+t^2]^{k+1}}dt \\
&= I_{k+1} + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{2kt^2}{[1+t^2]^{k+1}}\frac{1}{2k}dt \\
&\overset{(1)}{=} I_{k+1} + \frac{1}{2k}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{[1+t^2]^2}dt = I_{k+1} + \frac{1}{2k}I_k.
\end{aligned}$$

Једнакост (1) смо добили користећи парцијалну интеграцију и везу $I_k = \frac{2k-3}{2k-2}I_{k-1}$. *Можемо закључити да важи* $I_1 = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+t^2}dt$ *и* $I_{k+1} = \frac{2k-1}{2k}I_k,\ k > 1$, *односно важи* $I_1 = \pi,\ I_2 = \frac{\pi}{2}$ *и* $I_3 = \frac{3\pi}{8}$. *Приметимо да сада 2.23 можемо записати као*

$$I(\theta) = \frac{2}{\pi}(-I_1 + 2I_3) = \frac{2}{\pi}(-\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4}) = \frac{1}{2}.$$

Када смо израчунали информациону функцију Фишера можемо закључити да важи $\frac{\hat\theta-\theta}{\sqrt{\frac{2}{n}}} \approx N(0,1)$, *где* $\hat\theta$ *оцена добијена методом максималне веродостојности. Интервал поверења за непознати параметар* θ *има облик*

$$\hat\theta - \sqrt{\frac{2}{n}} \le \theta \le \hat\theta + \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

Пример 2.4.4 *(Логистичка расподела)*
Нека је дата случајна величина X која има стандардну логистичку расподелу, чија је расподела дата са

$$f(x|\mu,\theta) = \frac{1}{\theta}\left(1 + e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}\right)^{-2} e^{-\frac{x-\mu}{\theta}},$$

где је $-\infty < x < \infty, \theta > 0$ и $-\infty \le \mu \le \infty$. Нађимо интервал поверења за параметар размере θ. Нека је $\hat{\hat{\theta}}$ оцена добијена методом максималне веродостојности. Може се израчунати да је $I(\theta) = \frac{1}{3\theta^2}(\frac{\pi^2}{3} + 1)$. Тада на основу (2.22) можемо закључити да важи $\frac{\hat{\theta}-\theta}{\frac{3\theta}{\sqrt{n(\pi^2+3)}}} \approx N(0,1)$, а интервал поверења има облик

$$\hat{\theta}(1 + z_{\alpha/2}\frac{3}{\sqrt{n(\pi^2+3)}})^{-1} \le \theta \le \hat{\theta}(1 - z_{\alpha/2}\frac{3}{\sqrt{n(\pi^2+3)}})^{-1}.$$

Поглавље 3

Квалитет интервалних оцена

До сада смо показали да постоје различити начини помоћу којих можемо да нађемо интервалне оцене. Такође смо видели да можемо да конструишемо различите интервале поверења за исти проблем. У таквим ситуацијама, најпожељније је изабрати најбољи интервал поверења. Стога ћемо испитивати методе и критеријуме за добијање најбољих интервалних оцена. Природно, желимо да наш интервал поверења буде мали и да има велику вероватноћу прекривања, али такав интервал је обично тешко конструисати. Свакако да можемо изабрати да интервал буде $(-\infty, \infty)$ и његова вероватноћа прекривања јесте 1, али такав интервал нам не даје значајну информацију о параметру, стога ћемо бирати онај интервал са најповољнијом величином и вероватноћом прекривања. Када говоримо о величини интервала поверења, мислимо на дужину интервала.

3.1 Дужина интервала и вероватноћа прекривања

Сада ћемо разматрати случај када за дату вероватноћу прекривања треба да нађемо интервал поверења са најкраћом дужином. Размотримо следећи пример.

Пример 3.1.1 *Нека је дат прост случајан узорак $X = (X_1, ..., X_n)$, чија је расподела $N(\mu, \sigma^2)$ и σ је познато. У примеру 2.2.1 смо показали да је*

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

стожер који има стандардну нормалну расподелу, где a и b задовољавају

$$P(a \leq Z \leq b) = 1 - \alpha \text{ и } a, b \in \mathbb{R},$$

што даје интервал поверења

$$\left\{\mu : \bar{x} - b\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} - a\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\}.$$

Питамо се који избор за a и b је најбољи, односно за које a и b ће дужина интервала бити најкраћа, а коефицијент поверења остати $1-\alpha$*. Приметимо да је дужина интервала једнака* $(b-a)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$*, где* $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ *можемо да занемаримо и посматрамо само* $b-a$*. Стога, желимо да нађемо онај пар a и b који задовољава* $P(a \leq Z \leq b) = 1-\alpha$*, али такође даје најкраћу дужину интервала. У примеру 2.2.6 смо узели да је* $a = -z_{\frac{\alpha}{2}}$ *и* $b = z_{\frac{\alpha}{2}}$*, али нисмо помињали оптималност. Ако је* $1-\alpha = 0.90$*, тада било који од парова датих у табели 3.1, даје* 90% *интервал поверења.*

a	b	Вероватноћа	$b-a$
-1.34	2.33	$P(Z < a) = 0.09,\ P(Z > b) = 0.01$	3.67
-1.44	1.96	$P(Z < a) = 0.075,\ P(Z > b) = 0.025$	3.40
-1.65	1.65	$P(Z < a) = 0.05,\ P(Z > b) = 0.05$	3.30

Табела 3.1: Три интервала поверења где је $1-\alpha = 0.90$

Нумеричка студија је показала да одабир a и b као у примеру 2.2.6 даје најкраћи интервал поверења, односно такав одабир за a и b јесте најбољи.

Стратегија коришћена у претходном примеру не даје увек оптималан интервал поверења. Наредна теорема, преузета из [1], ће дати одговор на питање како можемо да нађемо оптималан интервал поверења. Да би се теорема применила, неопходан је услов унимодалности, стога подсетимо се њене дефиниције.

Дефиниција 3.1.1 *Функција густине расподеле* $f(x)$ *је унимодална уколико постоји* x^* *такво да је* $f(x)$ *неопадајућа за* $x \leq x^*$ *и нерастућа за* $x \geq x^*$.

Теорема 3.1 *Нека је* $f(x)$ *унимодална функција густине расподеле. Ако интервал* $[a, b]$ *задовољава* *а)* $\int_a^b f(x)dx = 1-\alpha$

б) $f(a) = f(b) > 0$

в) $a \leq x^* \leq b$, *где је* x^* *мода за* $f(x)$,

тада је $[a,b]$ *најкраћи интервал који задовољава део под а).*

Доказ: Нека је $[a,b]$ интервал, такав да важи $b^{'} - a^{'} < b - a$. Како бисмо доказали теорему, показаћемо да је $\int_{a^{'}}^{b^{'}} f(x)dx < 1-\alpha$. Показаћемо да теорема важи за случај када је $a^{'} \leq a$, а случај када је $a < a^{'}$ доказујемо аналогно. Такође, треба да узмемо у обзир и вредности које узима b, односно доказаћемо теорему када је $b^{'} \leq a$ и $b^{'} > a$.

Покажимо прво за случај када је $b^{'} \leq a$.
Тада важи $a^{'} \leq b^{'} \leq a \leq x^*$ и

$$\begin{aligned}
\int_{a^{'}}^{b^{'}} f(x)dx &\leq f(b^{'})(b^{'} - a^{'}) && (x \leq b^{'} \leq x^* \Rightarrow f(x) \leq f(b^{'})) \\
&\leq f(a)(b^{'} - a^{'}) && (b^{'} \leq a \leq x^* \Rightarrow f(b^{'}) \leq f(a)) \\
&< f(a)(b-a) && b^{'} - a^{'} < b - a \text{ и } f(a) > 0 \\
&\leq \int_a^b f(x)dx && ((\text{б}), (\text{в}) \text{ и унимодалност}) \\
&= 1-\alpha.
\end{aligned}$$

Тиме смо доказали теорему за случај када је $a^{'} < b^{'} \leq a$.
Покажимо сада за случај када је $b^{'} > a$. Тада важи $a^{'} \leq a \leq b^{'} \leq x^*$. Случај када је $b^{'} \geq b$ нећемо узимати у обзир, јер би тада $b^{'} - a^{'} \geq b - a$, што је супротно од претпоставке теореме. Даље можемо да запишемо

$$\begin{aligned}
\int_{a^{'}}^{b^{'}} f(x)dx &= \int_a^b f(x)dx + \left[\int_{a^{'}}^{a} f(x)dx - \int_{b^{'}}^{b} f(x)dx\right] \\
&= (1+\alpha) + \left[\int_{a^{'}}^{a} f(x)dx - \int_{b^{'}}^{b} f(x)dx\right].
\end{aligned}$$

Сада је потребно да покажемо да је израз у загради негативан. Користећи унимодалност функције f, поредак $a^{'} \leq a < b^{'} < b$ и (б) из теореме, можемо записати

$$\int_{a^{'}}^{a} f(x)dx \leq f(a)(a - a^{'})$$

и

$$\int_{b'}^{b} f(x)dx \geq f(b)(b-b').$$

Стога важи,

$$\int_{a'}^{a} f(x) - \int_{b'}^{b} f(x)dx \leq f(a)(a-a') - f(b)(b-b') =$$

$$= f(a)[(a-a') - (b-b')]$$
$$= f(a)[(b'-a') - (b-a)]$$

што је негативно, јер је $(b'-a') < (b-a)$ и $f(a) > 0$. Прву једнакост смо добили користећи податак да је $f(a) = f(b)$ ■

Овим смо доказали да интервал поверења који смо изабрали за оптимални у примеру 3.1.1 заиста јесте оптималан.

Пример 3.1.2 *Нека је дата случајна величина X чија је расподела $\Gamma(k, \beta)$. Случајна величина $Y = \frac{X}{\beta}$ је стожер са расподелом $\Gamma(k, 1)$, стога можемо наћи интервал поверења тако што ћемо наћи константе a и b тако да важи*

$$P(a \leq Y \leq b) = 1 - \alpha. \tag{3.1}$$

Уколико бисмо применили теорему 3.1, а да не размислимо пажљиво, у овом слчају не бисмо добили најкраћи интервал поверења. Бирајући a и b тако да задовоље (3.1) и $f_Y(a) = f_Y(b)$ нећемо добити оптималан резултат јер на основу (3.1) интервал поверења за β је облика

$$\left\{\beta : \frac{x}{b} \leq \beta \leq \frac{x}{a}\right\}.$$

Дужина интервала је $(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})x$. Иако теорему 3.1 у овом случају не можемо да применимо директно, можемо да се послужимо одређеном модификацијом. Нека је b нека функција од a, односно $b = b(a)$. Потребно је да нађемо најмању дужину $\frac{1}{a} - \frac{1}{b(a)}$, тако да важи $\int_a^{b(a)} f_Y(y)dy = 1 - \alpha$. Из $\frac{db}{da}(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})x = 0$ добијамо једнакост $\frac{db}{da} = \frac{b^2}{a^2}$. Када то заменимо у $\frac{db}{da}(\int_a^{b(a)} f_Y(y)dy) = 0$ добијамо $f(b)b^2 = f(a)a^2$. У овом случају, a и b који задовољају добијену једнакост дају најкраћи интервал. Приметимо да овако изабран интервал није најкраћи интервал у општем случају, већ само када користимо стожер $Y = \frac{X}{\beta}$, тако је интервал добијен на овакав начин најкраћи стожерни интервал.

3.2 Оптималност повезана са тестом

Како постоји једнозначна веза између интервала поверења и тестирања хипотеза (теорема 2.1), постоји и одређена повезаност између оптималности теста и оптималности интервала поверења. Обично се својства оптималности теста не односне директно на дужину интервала, него на вероватноћу да интервал прекрије погрешне вредности. Вероватноћа прекривања погрешних вредности или вероватноћа погрешног прекривања индиректно утиче на величину интервала поверења. Интуитивно је јасно да мањи интервал прекрива мање вредности, па самим тим је и мања вероватноћа да прекрије погрешне вредности. Мало касније ћемо показати једанкост која повезује дужину интервала са вероватноћом погрешног прекривања. Прво ћемо посматрати општи случај када $X \sim f(x|\theta)$ и конструисаћемо интервал поверења $C(x)$ са нивоом поверења $1-\alpha$ трансформацијом области прихватања $A(\theta)$. Вероватноћа прекривања од $C(x)$, односно вероватноћа да се прекрију праве вредности, је функција од θ дата са $P_\theta(\theta \in C(X))$. Вероватноћа погрешног прекривања је функција од θ и θ' дефинисана на следећи начин.

$$
\begin{aligned}
P_\theta(\theta' \in C(X)), \theta \neq \theta', \text{ако је } C(X) = [L(X), U(X)],\\
P_\theta(\theta' \in C(X)), \theta < \theta', \text{ако је } C(X) = [L(X), \infty],\\
P_\theta(\theta' \in C(X)), \theta > \theta', \text{ако је } C(X) = [-\infty, U(X)].
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Овим смо дефинисали вероватноћу прекривања θ' када је θ вредност параметра. Има смисла да се вероватноћа погрешног прекривања дефинише другачије за двостране и једностране интервале. На пример, ако имамо доњу границу за θ ми претпостављамо да је θ веће од одређене вредности, па се вероватноћа погрешног прекривања односи само на вредности θ који су превише мале. Слично за горњу границу и двострани интервал.

Пре него што покажемо како се својства теста преносе на интервале поверења, подсетимо се дефиниција за грешку прве и друге врсте, као и моћи теста.

Приликом одлучивања да ли да прихватимо нулту хипотезу можемо начинити грешку. Обично се тестови пореде у зависности од вероватноће да се начини грешка. Приликом тестирања хипотеза $H_0 : (\theta \in \Theta_0)$ насупрот $H_1 : (\theta \in \Theta_0^c)$ можемо начинити једну од две врсте грешака, односно грешку прве врсте и грешку друге врсте. Уколико $\theta \in \Theta_0$, али приликом теста одбијемо H_0, тада чинимо грешку прве врсте. Уколико $\theta \in \Theta_0^c$, али приликом тестирања одлучимо да прихватимо H_0, тада чинимо грешку друге врсте. Ова два слчаја приказана су табелом 3.2. Означимо критичну област теста са W. Тада важи:

а) Грешка прве врсте је грешка која се чини ако се одбаци нулта хипотеза H_0 у ситуацији када ја она тачна, односно вероватноћа грешке прве врсте дата је са:

$$P\{(X_1, ..., X_n) \in W|H_0\} = \alpha$$

б) Грешка друге врсте је грешка која се чини ако се прихвати нулта хипотеза H_0 у ситуацији када је тачна алтернативна хипотеза, односно вероватноћа грешке друге врсте дата је са:

$$P\{(X_1, ..., X_n) \notin W|H_1\} = \beta$$

	прихватамо H_0	прихватамо H_1
тачна H_0	исправна одлука	грешка прве врсте
тачна H_1	грешка друге вресте	исправна одлука

Табела 3.2: Грешке прве и друге врсте

Приметимо да можемо записати

$$P_\theta(X \in W) = \begin{cases} \text{вероватноћа грешке прве врсте,} & \text{за } \theta \in \Theta_0 \\ 1 - \text{вероватноћа грешке друге врсте,} & \text{за } \theta \in \Theta_0^c. \end{cases}$$

Овакав запис нас води до наредне дефиниције.

Дефиниција 3.2.1 *Функција моћи теста који има критичну област W је функција од θ дефинисана са $\beta(\theta) = P_\theta(X \in W)$.*

Идеална функција моћи је 0 за све $\theta \in \Theta_0$ и 1 за све $\theta \in \Theta_0^c$. Осим у тривијалним случајевима, идеална функција моћи не постоји. Добар тест има функцију моћи близу 1 за већину $\theta \in \Theta_0^c$ и близу 0 када $\theta \in \Theta_0$.

Дефиниција 3.2.2 *Нека је C класа тестова где је $H_0 : (\theta \in \Theta_0)$, насупрот $H_1 : (\theta \in \Theta_0^c)$. Нека је A неки тест из класе C са функцијом моћи $\beta(\theta)$. Уколико важи да је $\beta(\theta) \geq \beta'(\theta)$ за све $\theta \in \Theta_0^c$ и све $\beta'(\theta)$ које су функције моћи тестова из класе C, тада је тест A* ***униформно најмоћнији*** *(енг: uniformly most powerful - UMP) тест у класи C.*

Дефиниција 3.2.3 *Интервал поверења са нивоом поверења $1-\alpha$ који минимизује вероватноћу погрешног покривања назива се* ***униформно најтачнији*** *(енг: uniformly most accurate - UMA).*

Сада када смо се подсетили дефиниција за грешку прве и друге врсте, функције моћи теста, UMA интервала и UMP тестова, показаћемо како се својства тестова преносе на интервале поверења.

Наш циљ је да изаберемо UMA интервал поверења међу интервалима поверења облика $[L(x), \infty]$. UMA интервали поверења су конструисани трансформацијом UMP области прихватања, што ћемо показати касније. Иако су UMA интервали поверења пожељни, они постоје само у ретким околностима, као и UMP тестови. Како су UMP тестови најчешће једнострани, такви ће бити и UMA интервали поверења. У наредној теореми, преузетој из [1], показаћемо да UMP тест где је $H_0 : (\theta = \theta_0)$ насупрот $H_1 : (\theta > \theta_0)$ даје UMA једнострани интервал поверења са доњом границом.

Теорема 3.2 *Нека је $X \sim f(x|\theta)$, где је $\theta \in R$. Нека је A униформно најмоћнији тест у класи тестова C, где је $H_0 : (\theta = \theta_0)$ насупрот $H_1 : (\theta > \theta_0)$ и нека је $A^*(\theta_0)$ област прихватања теста A, чији је праг значајности α. Нека је $C^*(x)$ интервал поверења са нивоом поверења $1-\alpha$ који се добија трансформацијом области прихватања $A^*(\theta_0)$. Тада за било који други интервал поверења $\hat{C}(x)$ који се добија трансформацијом тестова из класе C и чији је ниво поверења $1-\alpha$ важи:*

$$P_\theta(\theta' \in C^*(X)) \leq P_\theta(\theta' \in \hat{C}(X)), \text{ за све } \theta' < \theta.$$

UMA интервал поверења у претходној теореми је констурисан трансформацијом фамилије тестова за хипотезе:

$$H_0 : (\theta = \theta_0) \text{ насупрот } H_1 : (\theta > \theta_0),$$

где је облик интервала поверења одређен алтернативном хипотезом. У овом случају добићемо доњу границу за интервал, односно облик ће бити $[L(X), \infty]$.

Пример 3.2.1 *(Једнострани нормални интервал поверења)*
Нека је дат прост случајан узорак $(X_1, .., X_n)$ чија је расподела $N(\mu, \sigma^2)$ и σ^2 је непознато. Интервал

$$C(x) = \left\{ \mu : \mu \geq \bar{x} - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\}$$

је UMA интервал поверења са нивоом поверења $1-\alpha$ јер је добијен трансформацијом UMP теста при $H_0 : (\mu = \mu_0)$ насупрот $H_1 : (\mu > \mu_0)$.

Двострани интервал поверења

$$C(x) = \left\{ \mu : \bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\}$$

није UMA интервал поверења, јер је добијен трансформацијом двостране области прихватања из теста хипотеза $H_0 : (\mu = \mu_0)$ насупрот $H_1 : (\mu \neq \mu_0)$ за који не постоји UMP тест. Међутим, тестови могу бити непристрасни и то својство двостраних тестова се може пренети на двостране интервале поверења. Подсетимо се дефиниције непристрасности теста.

Дефиниција 3.2.4 *Тест чија је функција моћи $\beta(\theta)$ је непристрасан ако важи $\beta(\theta') \geq \beta(\theta'')$ за све $\theta' \in \Theta_0^c$ и $\theta'' \in \Theta_0$.*

Дакле непристрасан тест је онај код кога је функција моћи за алтернативну хипотезу увек већа него функција моћи за нулту хипотезу. Наредна дефиниција говори о непристрасности интервала поверења.

Дефиниција 3.2.5 *Интервал поверења $C(x)$ са нивоом поверења $1 - \alpha$ је непристрасан ако важи $P_\theta(\theta' \in C(X)) \leq 1 - \alpha$ за све $\theta \neq \theta'$.*

Стога, за непристрасне интервале поверења важи да вероватноћа погрешног прекривања никад није већа од минимума вероватноће тачног прекривања. Непристрасне интервале поверења можемо добити трансформацијом непристрасних тестова. Односно, ако је $A(\theta)$ област прихватања за непристрасни тест са прагом значајности α, где је $H_0 : (\theta = \theta_0)$ насупрот $H_1 : (\theta \neq \theta_0)$ и $C(x)$ је интервал поверења са нивоом поверења $1 - \alpha$ добијен трансформацијом области прихватања $A(\theta)$, тада је $C(x)$ непристрасни интервал поверења са нивоом поверења $1 - \alpha$.

Пример 3.2.2 *(Двострани нормални интервал поверења)*
Двострани нормални интервал поверења

$$C(\bar{x}) = \left\{ \mu : \bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\}$$

је непристрасан интервал поверења. Може се добити трансформацијом непристрасног теста где је $H_0 : (\mu = \mu_))$ насупрот $H_1 : (\mu \neq \mu_0)$. Слично, интервал (2.1) из примера 2.2.4 је непристрасан интервал јер је добијен трансформацијом непристрасног теста.

3.3 Бајесова оптималност

Иако је Бајесова метода налажења интервала прекривања за непознати параметар другачија од класичног приступа, и код ове методе желимо да нађемо оптималан интервал Бајесових оцена. Односно, уколико смо нашли апостериорну расподелу $\pi(\theta|x)$ за непознати параметар θ, желимо да нађемо скуп $C(x)$ тако да задовољава

$$\int_{C(x)} \pi(\theta|x)dx = 1 - \alpha \tag{3.3}$$

$$\text{дужина}(C(x)) \leq \text{дужина}(C'(x)) \tag{3.4}$$

за било који интервал $C'(x)$ који задовољава $\int_{C'(x)} \pi(\theta|x)dx \leq 1-\alpha$. Када посматрамо на овакав начин, можемо применити последицу теореме 3.1 коју смо користили када смо тражили оптималне интервале поверења добијене класичном методом.

Последица 3.3.1 *Ако је апостериорна функција густине расподеле $\pi(\theta|x)$ унимодална, тада за дату вредност α најкраћи интервал прекривања за θ је дат са*

$$\{\theta : \pi(\theta|x) \geq k\} \text{ где је } \int_{\{\theta:\pi(\theta|x)\geq k)\}} \pi(\theta|x)d\theta = 1 - \alpha.$$

Интервал прекривања добијен помоћу последице 3.3.1 се назива **највећа апостериорна густина** (енг: highest posterior density - HDP), јер се састоји од оних вредности параметра за које апостериорна функција густине има највеће вредности. Интервал прекривања добијен у примеру 2.3.1 је уствари HDP интервал. Како смо добили да је апостериорна расподела за θ нормална, тј. $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, следи да је $\{\theta : \pi(\theta|x) \geq k\} = \{\theta : \theta \in \mu_1 \pm k'\}$ за неке k'. Стога, HDP интервал је симетричан око средње вредности расподеле. Детаљније у [1], поглавље 9.

Пример 3.3.1 *(Интервали поверења за нормалну расподелу - класични и бајесовски приступ)*
У овом примеру упоредићемо интервале поверења за нормалну расподелу $N(\mu, \sigma^2)$ добијене класичном методом, односно трансформацијом тест статистике са интервалима Бајесових оцена. Прво ћемо генерисати хиљаду интервала величине $n = 100$ чија је расподела $N(5, 1)$, користећи R.

```
Xuz = matrix( c(1:100000), nrow=1000,ncol=100)
for(j in 1:1000)
Xuz[j,]<-rnorm(100,5,1)
```

Упоредићемо интервале добијене у примерима 2.2.6 и 2.3.1, односно упоредићемо интервале облика:

$$(\bar{x_n} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x_n} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) \text{ и}$$

$$(\mu_1 - z_{\alpha/2}\sigma_1, \mu_1 + z_{\alpha/2}\sigma_1).$$

Тестирамо нулту хипотезу $H_0 : (\mu = 5)$ *са прагом значајности* $\alpha = 0.95$. *Користићемо да је* $\mu_1 = \frac{\mu_0\sigma^2 + \bar{x_n}\sigma_0^2 n}{\sigma^2 + \sigma_0^2 n}$ *и* $\sigma_1^2 = \frac{\sigma^2\sigma_0^2}{\sigma^2 + \sigma_0^2 n}$. *Нека непознати параметар* μ *има априорну расподелу* $N(5, 1)$. *Израчунајмо средњу вредност за сваки од ових хиљаду реализација и интервале поверења добијене трансформацијом тест статистике.*

```
Xsr=matrix(c(1:1000),nrow=1000, ncol=1)
for (i in 1:1000)
Xsr[i,]<-mean(Xuz[i,])

intervali=matrix(c(1:2000), nrow = 1000,ncol = 2)
for (i in 1:1000)
intervali[i,]<-c(Xsr[i,]-1.96*(1/10),Xsr[i,]+1.96*(1/10))
```

Сада ћемо израчунати колико оваквих интервала прекрива непознати параметар μ.

```
> j<-0
> for(i in 1:1000)
+ if (5>=intervali[i,1] && 5<=intervali[i,2])
+   j=j+1
> j
[1] 961
```

Видимо да ће 961 интервала од 1000 прекрити непознати параметар. Израчунајмо сада интервале Бајесових оцена и израчунајмо колико таквих интервала прекрива непознати параметар.

```
sigma1<-sqrt((1)/(1+100))
mi1=matrix(c(1:1000), nrow = 1000,ncol = 1)
for (i in 1:1000)
mi1[i,]<-(5+Xsr[i,]*100)/(1+100)

Bajesintervali=matrix(c(1:2000), nrow = 1000,ncol = 2)
for (i in 1:1000)
Bajesintervali[i,]<-c(mi1[i,]-1.96*sigma1,mi1[i,]+1.96*sigma1)

> k<-0
> for(i in 1:1000)
+ if (5>=Bajesintervali[i,1] && 5<=Bajesintervali[i,2])
+ k=k+1
> k
[1] 962
```

Видимо да 962 интервала од 1000 прекрива непознати параметар. Када упоредимо интервале добијене трансформацијом тест статистике и интервале Бајесових оцена видимо да је бајесовски приступ ,,бољи за један интервал", тј. 961 од 1000 класичних интервала прекрива непознати параметар, док 962 од 1000 бајесовска интервала прекрива непознати параметар.

Пример 3.3.2 *(Интервали поверења за експоненцијалну расподелу - класични и бајесовски приступ)*
Као и у прошлом и у овом примеру упоредићемо интервале поверења добијене класичном методом, односно трансформацијом тест статистике и интервале Бајесових оцена, тј. интервале прекривања. Користећи резултате добијене у примеру 2.2.9 генерисаћемо хиљаду интервала величине $n = 2$ чија је расподела $\epsilon(1)$, користећи R.

```
Xuz = matrix( c(1:2000), nrow=1000,ncol=2)

for(j in 1:1000)

  Xuz[j,]<-rexp(2,1)
```

Искористићемо интервале добијене у примерима 2.2.9 и 2.3.2 како бисмо упоредили интервале облика:

$$(\frac{1}{a}\sum_{i=1}^{n} X_i, \frac{1}{b}\sum_{i=1}^{n} X_i) \text{ и}$$

$$(\frac{a_1}{2(\frac{\bar{x}}{2}+\beta)}, \frac{b_1}{2(\frac{\bar{x}}{2}+\beta)}).$$

Тестирамо нулту хипотезу $H_0 : (\lambda_0 = 1)$ *са прагом значајности* $\alpha = 0.90$. *Нека непознати параметар* λ *има априорну расподелу* $\Gamma(1, 1)$ *и* a_1 *и* b_1 *су такви да важи* $P(a \leq Q \leq b) = 0.90$, *где* $Q \sim \chi^2_6$. *Један од избора за* a_1 *и* b_1 *може бити* $a_1 = 1.635$ *и* $b_1 = 12.592$. *Израчунајмо суму за сваки од ових хиљаду реализација и интервале поверења добијене трансформацијом тест статистике.*

```
Xsum=matrix(c(1:1000),nrow=1000, ncol=1)
for (i in 1:1000)
Xsum[i,]<-sum(Xuz[i,])

a<-5.480
b<-0.441
intervali=matrix(c(1:2000), nrow = 1000,ncol = 2)
for (i in 1:1000)
intervali[i,]<-c((1/a)*Xsum[i,],(1/b)*Xsum[i,])
```

Сада ћемо израчунати колико оваквих интервала прекрива непознати параметар λ.

```
+ j<-0
> for(i in 1:1000)
+ if (1>=intervali[i,1] && 1<=intervali[i,2])
+ j=j+1
> j
[1] 892
```

Видимо да ће 892 интервала од 1000 прекрити непознати параметар. Израчунајмо сада интервале Бајесових оцена и израчунајмо колико таквих интервала прекрива непознати параметар.

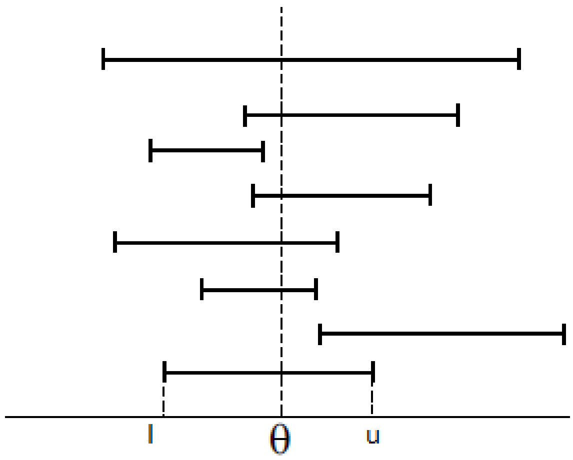
```
> a1<-1.635
> b1<-12.592
> Bajesoviintervali=matrix(c(1:2000), nrow = 1000,ncol = 2)
> for (i in 1:1000)
+ Bajesoviintervali[i,]<-c(a1/(2*(Xsr[i,]/2+1)),b1/(2*(Xsr[i,]/2+1)))
> k<-0
> for(i in 1:1000)
+ if (1>=intervali[i,1] && 1<=intervali[i,2])
+ k=k+1
+
> k
[1] 892
```

Видимо да 892 интервала од 1000 прекрива непознати параметар, као и код класичног приступа.

Поглавље 4

Закључак

У овом раду смо се упознали са параметрима положаја и размере. Навели смо најпознатије расподеле које их природно садрже као што су нормална, експоненцијална, Кошијева и униформна расподела, а због погодних својстава параметара положаја и размере уводили смо их и у неке расподеле које их не садрже природно, као што су Вејбулова и Левијева расподела. Како бисмо најлакше нашли интервале поверења, показали смо да у великој мери можемо да се ослонимо на тестирање хипотеза и област прихватања. Такође, показали смо да можемо тражити и стожере, као и користити бајесовски приступ, тј. сматрати да је сам непознати параметар случајна величина. Како интервалне оцене нису јединствене, навели смо теорему која нам помаже да изаберемо најбољу оцену. Када тражимо интервале поверења, природно је да желимо што ,,уже" интервале са што вишим нивоом поверења. Као што смо видели, жељени ниво поверења је обично $\beta = 0.99$, $\beta = 0.95$ или 0.90. Уколико је $(x_1, ..., x_n)$ реализована вредност узорка $X = (X_1, ..., X_n)$ тада статистике $L_n = L_n(X)$ и $U_n = U_n(X)$ постају одређени бројеви, односно $l = L(x_1, ..., x_n)$ и $u = U(x_1, ..., x_n)$, а случајни интервал $[L_n(X), U_n(x)]$ постаје интервал $[l, u]$. Још једном ћемо нагласити да је погрешно сматрати да са вероватноћом β интервал $[l, u]$ садржи непознати параметар θ. Догађај $\{l \leq \theta \leq u\}$ је известан или немогућ, односно његова вероватноћа је 0 или 1, а никако β. Догађај који има вероватноћу β јесте догађај да случајни интервал $[L(X), U(X)]$ прекрије непознати параметар θ. Како бисмо приближили још више, размишљајмо на следећи начин: нека је дат прост случајан узорак $X = (X_1, ..., X_n)$ и нека је дато m реализација $x^1 = (x_1^1, ..., x_n^1), ..., x^m = (x_1^m, ..., x_n^m)$ на основу којих је израчунато m интервала поверења $[l_1, u_1], ..., [l_m, u_m]$. Како је $P(L_n(X) \leq \theta \leq U_n(X)) = \beta$, можемо рећи да приближно $100\%\beta$ нумеричких интервала $[l_1, u_1], ..., [u_m, l_m]$ покрива непознати параметар θ, а осталих $100(1-\beta)\%$ не прекрива. У примеру 3.3.2 радили смо са $m = 1000$ и $n = 100$. Погледајмо наредну слику.



Слика 4.1: Прекривање непознатог параметра

Показали смо да се својста тестова преносе на интервале поверења, а када смо тражили оптималност за оцене добијене Бајесовом методом видели смо да можемо искористити теорему коју смо применили у класичном приступу. На крају, показали смо да интервале поверења можемо добити и ако узорак није коначан, односно тада градимо асимптотске интервале поверења. Најзанимљивије код асимптотских интервала јесу особине оцена добијених методом максималне веродостојности, јер се са тиме нисмо сусретали код конструкције обичних интервала. Погодна асимптотска својства оцене добијене методом максималне веродостојности нам омогућавају да релативно брзо дођемо до интервала поверења за непознати параметар.

Расподеле које смо наводили у овом раду имају широку примену. На пример, експоненцијална расподела се користи у хидрологији, физици, економији, униформна расподела се користи у програмирању приликом генерисања псеудо-случајних бројева, нормалном расподелом можемо да опишемо многобројна обележја, нпр: висину људи, крвни притисак, грешке приликом мерења, те је њена употреба веома широка. Левијева расподела је погодна за моделирање цена акција, промене у магнетном пољу, док је Вејбулова расподела популарна у анализи података, јер када укључимо параметре положаја и размере Вејбулова расподела постаје веома флексибилна и погодна за моделирање великог броја података. Расподеле које смо наводили имају ширкоку примену баш због параметера положаја и размере, стога је битно да знамо како да нађемо интервалне оцене за те параметре, као и да међу тим оценама знамо како да изаберемо најквалитетнију.

Литература

[1] George Casella, Roger L. Berger, Statistical Inference, Second Edition, 2002.

[2] Миодраг Ловрић, Основи статистике, Економски факултет, Крагујевац, 2008.

[3] Павле Младеновић, Вероватноћа и статистика, Математички факултет, Београд, 2008.

[4] Драган Ђорић, Јован Малишић, Весна Јевремовић, Емилија Николић- Ђорић, Атлас расподела, Београд, 2007.

[5] Robert V. Hogg, Allen T. Craig, Introduction to Mathematical Statistics, The University of Iowa, 1978

[6] https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-443-statistics-for-applications-fall-2006/lecture-notes/lecture3.pdf

[7] Keith Knight, Mathematical Statistics, University of Toronto Ontario, Canada, 2000.

[8] http://www.stat.tamu.edu/ suhasini/teaching613/inference.pdf

[9] https://en.wikipedia.org/wiki/Jerzy_Neyman

Поглавље 5

Биографија

Бранка Сандо је рођена 20. јуна 1991. године у Руми. Завршила је Основну школу ,,Вељко Дугошевић" и Средњу стручну школу ,,Бранко Радичевић" у Руми. На Математичком факултету је студирала на смеру Статистика, финансијска и актуарска математика. Дипломирала је 13. фебруара 2015. године. Тренутно је запослена у софтверској компанији Ифронт у Београду, на позицији консултант за извештавање.