Универзитет у Београду
Математички факултет

МАСТЕР РАД

Глобални екстремуми – примене у економији и физици

Студент:
Оливера Ђурђевић

Ментор:
др Бранислав Првуловић

Београд
децембар 2017.

Садржај:

Увод

Извод и диференцијални рачун су се појавили у $XVII$ веку. У општем облику су их формулисали Лајбниц и Њутн. Лајбниц је прву расправу о диференцијалном рачуну објавио 1684., а Њутн 1687. године независно од Лајбницових резултата. Заједно са браћом Бернули су применили овај рачун на многобројне проблеме геометрије, механике и физике. Тачну дефиницију преко граничне вредности дао је Коши.

Даље су диференцијални рачун унапређивали математичари, а међу њима се нарочито истичу француски математичар Лагранж, Болцано, Вајерштрас и други.

Ученици се први пут сусрећу са екстремним вредностима у другом разреду средње школе, а затим се то знање продубљује са увођењем појма извода у четвртом разреду средње школе. Како математика, између осталог, треба да оспособи ученике за примену стечених знања у разним животним подручјима, то тема извода добија на значају. Најчешће се тежи корелацији математике са сродним, углавном природним наукама, али и економија је погодна област за практичне примене математичких знања.

У првој глави су уведене неке основне дефиниције и теореме из диференцијалног рачуна које ће бити коришћене за проналажење екстремних вредности и које ће помоћи бољем разумевању појма. У циљу бољег разумевања наведена је неколицина илустративних примера.

Друга глава је посвећена примени глобалних екстремума у економији. На почетку уводимо основне појмове и везе између тих појмова. То је пропраћено одговарајућим примерима.

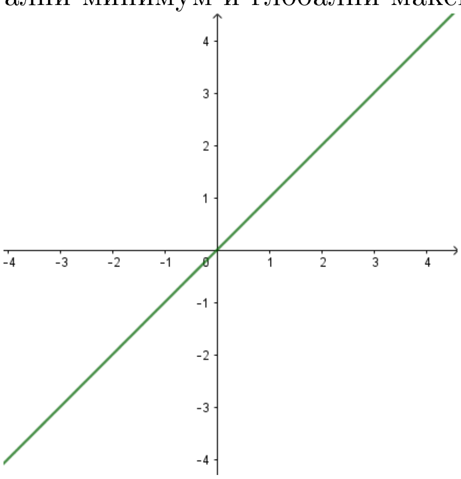
Трећа глава је посвећена примени глобалних екстремума у физици. Наводимо основне појмове. Појам праволинијског кретања, појам брзине, интензитета брзине као и убрзања. Такође је све пропраћено примерима.

1 Глобални екстремуми

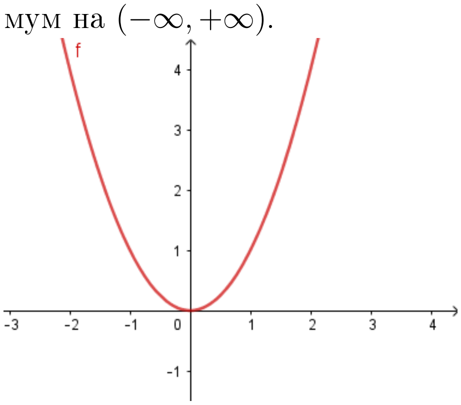
Нека је $f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subseteq \mathbb{R}$.

Дефиниција 1.1 *Функција f има глобални максимум у тачки $x_0 \in D_f$ ако је $f(x) \leq f(x_0)$ за све вредности x из домена функције f. Сама вредност $f(x_0)$ представља глобални максимум.*
Функција f има глобални минимум у тачки $x_0 \in D_f$ ако је $f(x) \geq f(x_0)$ за све вредности x из домена функције f. Сама вредност $f(x_0)$ представља глобални минимум.

На пример, функција $f(x) = x$ нема ни глобални минимум ни глобални максимум на $(-\infty, +\infty)$.
Али ако ову функцију посматрамо на неком сегменту, онда ће она имати и глобални минимум и глобални максимум.



Функција $f(x) = x^2$ има глобални минимум у тачки 0, али нема глобални максимум на $(-\infty, +\infty)$.



Сада ћемо навести Вајерштрасову теорему о екстремној вредности:

Теорема 1.1 *Ако је функција f непрекидна на сегменту, онда она има и глобални максимум и глобални минимум на том сегменту.*

Дефиниција 1.2 *Функција f има локални максимум у тачки x_0, ако постоји интервал који садржи тачку x_0 и вредност $f(x_0)$ је највећа вредност у том интервалу, тј. $f(x_0) \geq f(x)$ за свако x из тог интервала.*
Функција f има локални минимум у тачки x_0, ако постоји интервал који садржи тачку x_0 и вредност $f(x_0)$ је најмања вредност у том интервалу, тј. $f(x_0) \leq f(x)$ за свако x из тог интервала.

Наравно, ако је тачка x_0 тачка глобалног максимума тада је она и тачка локалног максимума, а ако је тачка глобалног минимума тада је и тачка локалног минимума.

Дефиниција 1.3 *Тачка c која припада домену функције f зове се критична тачка те функције ако је $f'(c) = 0$ или $f'(c)$ не постоји.*

Сада ћемо навести Фермаову теорему.

Теорема 1.2 *Претпоставимо да је функција f дефинисана на неком отвореном интервалу који садржи тачку x_0. Ако функција f има локални екстремум у тачки x_0, тада је тачка x_0 критична тачка функције f.*

Последица 1.3 *Ако функција f има глобални екстремум на отвореном интервалу (a, b) онда се тај екстремум мора десити у критичној тачки.*

Доказ: Претпоставимо да функција f има глобални максимум у тачки x_0 која се налази у интервалу (a, b).
Тада је $f(x_0)$ такође и локални максимум за функцију f. Закључујемо на основу теореме 1.2 да је x_0 критична тачка функције f.
Аналогно доказујемо последицу у случају када функција f има глобални минимум.

$\square$

Ако имамо функцију f која је непрекидна на сегменту $[a, b]$ и треба да пронађемо глобалне екстремуме, прво што ћемо урадити јесте да пронађемо критичне тачке те функције у отвореном интервалу (a, b), затим одредимо вредности функције f у критичним тачкама и крајевима сегмента. Највећа од добијених вредности представља глобални максимум функције f на сегменту $[a, b]$, а најмања добијена вредност глобални минимум функције f на сегменту $[a, b]$.

Пример 1 *Одредити глобалне екстремуме функције $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x$ на сегменту $[1, 5]$.*

Решење: Дата функција је полином, па је диференцијабилна свуда.
Сада можемо пронаћи критичне тачке наше функције на отвореном интервалу $(1, 5)$.

$f'(x) = 6x^2 - 30x + 36.$

Добијени полином можемо раставити на чиниоце, па добијамо:

$f'(x) = 6(x-2)(x-3).$

Први извод изједначимо са нулом, и добијамо да су критичне тачке $x = 2$ и $x = 3$. Следеће што ћемо урадити јесте пронаћи вредности функције f у тачкама $x = 2$, $x = 3$, као и у крајњим тачкама сегмента.

$f(1) = 2 \cdot 1^3 - 15 \cdot 1^2 + 36 \cdot 1 = 23,$

$f(2) = 2 \cdot 2^3 - 15 \cdot 2^2 + 36 \cdot 2 = 28,$

$f(3) = 2 \cdot 3^3 - 15 \cdot 3^2 + 36 \cdot 3 = 27,$

$f(5) = 2 \cdot 5^3 - 15 \cdot 5^2 + 36 \cdot 5 = 55.$

Одавде можемо закључити да је $x = 1$ тачка глобалног минимума функције f на сегменту $[1, 5]$, док је $x = 5$ тачка глобалног максимума функције f на датом сегменту. Глобални минимум је 23, а глобални максимум 55.

$\triangle$

1.1 Глобални екстремуми на неограниченим интервалима

Нека је функција f непрекидна на интервалу $(-\infty, +\infty)$. У неким случајевима одређивањем лимеса кад $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ можемо утврдити да ли имамо глобални минимум, глобални максимум, или немамо екстремних вредности. Посматрајмо таблицу:

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	функција има глобални минимум, али нема глобални максимум на $(-\infty, +\infty)$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$	функција има глобални максимум, али нема глобални минимум на $(-\infty, +\infty)$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	функција нема ни глобални минимум, ни глобални максимум на $(-\infty, +\infty)$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$	функција нема ни глобални минимум, ни глобални максимум на $(-\infty, +\infty)$

Пример 2 *Испитати да ли полином $p(x) = 3x^4+4x^3$ има екстремних вредности, и ако има одредити у којим их тачкама достиже.*

Решење: Рачунамо наведене лимесе.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$,

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

На основу таблице можемо закључити да функција има глобални минимум, а нема глобални максимум на $(-\infty, +\infty)$. Проверимо у којој се тачки тај минимум достиже.
Наш полином је диференцијабилна функција на целом интервалу $(-\infty, +\infty)$, па можемо тражити први извод датог полинома.

$p'(x) = 12x^3 + 12x^2$,

$p'(x) = 12x^2(x + 1)$.

Извод је потребно изједначити са нулом.

$12x^2(x + 1) = 0$.

Дакле, кандидати за глобални минимум су $x = 0$ и $x = -1$.
Рачунамо вредност полинома у датим тачкама.

$p(0) = 3 \cdot 0^4 + 4 \cdot 0^3 = 0,$

$p(-1) = 3 \cdot (-1)^4 + 4 \cdot (-1)^3 = -1.$

Функција има глобални минимум у тачки $x = -1$, и тај минимум је -1.

$\triangle$

1.2 Глобални екстремуми на отвореним интервалима

Нека је функција f непрекидна на интервалу (a, b). У неким случајевима одређивањем лимеса кад $x \to a+$ и $x \to b-$ можемо утврдити да ли имамо глобални минимум, глобални максимум, или немамо екстремних вредности. Посматрајмо таблицу:

$\lim\limits_{x\to a+} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to b-} f(x) = +\infty$	функција има глобални минимум, али нема глобални максимум на (a, b)
$\lim\limits_{x\to a+} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to b-} f(x) = -\infty$	функција има глобални максимум, али нема глобални минимум на (a, b)
$\lim\limits_{x\to a+} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to b-} f(x) = +\infty$	функција нема ни глобални минимум, ни глобални максимум на (a, b)
$\lim\limits_{x\to a+} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to b-} f(x) = -\infty$	функција нема ни глобални минимум, ни глобални максимум на (a, b)

Пример 3 *Испитати да ли функција* $f(x) = \frac{1}{x^2-x}$ *има глобалних екстремума на интервалу* $(0, 1)$*, и ако има одредити у којим их тачкама постиже.*

Решење Функција f је непрекидна на интервалу $(0, 1)$.
Рачунамо лимесе из таблице.

$\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{x^2-x} = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{x\cdot(x-1)} = -\infty,$

$\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1-} \frac{1}{x^2-x} = \lim\limits_{x\to 1-} \frac{1}{x\cdot(x-1)} = -\infty.$

На основу таблице закључујемо да функција f има глобални максимум, а нема глобални минимум на интервалу $(0,1)$.
Сада је потребно пронаћи критичне тачке функције f.
На основу правила за извод количника добијамо да је

$f'(x) = -\frac{2x-1}{(x^2-x)^2}$.

Следеће што је потребно јесте изједначити први извод са нулом, то јест:

$-\frac{2x-1}{(x^2-x)^2} = 0$, одакле следи да је једино решење $x = \frac{1}{2}$.

Дакле, функција има глобални максимум у тачки $x = \frac{1}{2}$, и он износи

$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{(\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}} = -4.$

$\triangle$

1.3 Глобални екстремуми функције са једним локалним екстремумом

Претпоставимо да је функција непрекидна на неком ограниченом или неограниченом интервалу. Ако она има тачно један локални екстремум он мора бити и глобални екстремум.

То нам говори и следећа теорема.

Теорема 1.4 *Претпоставимо да је функција f непрекидна и да има тачно један локални екстремум на неком интервалу I у тачки x_0.*
Ако функција f има локални минимум у тачки x_0, онда је $f(x_0)$ глобални минимум функције f на I.
Ако функција f има локални максимум у тачки x_0, онда је $f(x_0)$ глобални максимум функције f на I.

Доказ: Нека функција f има локални максимум у некој тачки $x = x_0$, и нема других екстремних вредности у том интервалу.
Претпоставимо супротно: да $f(x_0)$ није глобални максимум функције f. Тада: $(\exists x_1 \in I)\ f(x_1) > f(x_0)$.
Без губитка општости претпоставимо да је $x_1 > x_0$, и посматрајмо сегмент $[x_0, x_1]$.
Функција f је непрекидна на том сегменту, па према Вајерштрасовој теореми достиже и минимум.

Минимум не може бити ни у тачки x_1 јер је $f(x_1) > f(x_0)$. Пошто је x_0 тачка локалног максимума функције f, за неко $x \in (x_0, x_1)$ важиће $f(x) \leq f(x_0)$.
Дакле, минимум се достиже унутар интервала $[x_0, x_1]$, па то онда мора бити и локални минимум функције f на интервалу I. Контрадикција.

$\square$

Ако је тачка x_0 критична тачка функције f и ако је $f''(x_0) < 0$, тада функција f има максимум, а ако је $f''(x_0) > 0$ функција f има минимум.

Пример 4 *Одредити глобалне екстремуме функције* $f(x) = e^{x^3-3x^2}$ *на интервалу* $(0, +\infty)$ *уколико они постоје.*

Решење: Испитајмо лимесе на крајевима датог интервала.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, па функција f не може имати глобални максимум на интервалу $(0, +\infty)$.

$\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 1$.

Постоји могућност да функција f има глобални минимум на интервалу $(0, +\infty)$.
Пронаћи ћемо критичне тачке наше функције.

$f'(x) = e^{x^3-3x^2} \cdot (3x^2 - 6x) = 3x(x-2)e^{x^3-3x^2}$.

$f'(x) = 0$, када је $x = 0$ и $x = 2$.
Тачка $x = 0$ не припада нашем интервалу, па ћемо проверавати само за тачку $x = 2$.

$f''(x) = e^{x^3-3x^2}(3x^2 - 6x)^2 + e^{x^3-3x^2}(6x - 6) = [(3x^2 - 6x)^2 + 6x - 6]e^{x^3-3x^2}$,

$f''(2) = 6e^{-4} > 0$.

Локални минимум се постиже у тачки $x = 2$.
На основу претходне теореме глобални минимум је у тачки $x = 2$, и износи

$f(2) = e^{-4}$.

$\triangle$

Погледајмо још неке примере.

Пример 5 *Претпоставимо да је функција f непрекидна на сегменту $[-4, 4]$, и њене критичне тачке су: $x = -3$, $x = 0$ и $x = 2$. Користећи таблицу испод одредити глобалне екстремуме функције f на датим сегментима:*
а) $[1, 4]$;
б) $[-2, 2]$.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	2224	-1333	0	1603	2096	2293	2400	2717	6064

Решење: Као што смо рекли, посматрамо вредност функције f у крајњим тачкама сегмента, као и у критичним тачкама.
а) Овде су крајеви сегмента тачке $x = 1$ и $x = 4$. Једина критична тачка која припада овом сегменту је тачка $x = 2$.
Наша таблица се сада сведе на:

x	1	2	4
$f(x)$	2293	2400	6064

Одавде видимо да је глобални минимум у тачки $x = 1$, а глобални максимум у тачки $x = 4$.
б) Крајеви сегмента су тачке $x = -2$ и $x = 2$. Једина критична тачка која припада интервалу $(-2, 2)$ јесте тачка $x = 0$.
Сада таблица изгледа овако:

x	-2	0	2
$f(x)$	0	2096	2400

Глобални минимум је у тачки $x = -2$, а глобални максимум у тачки $x = 2$.

△

Пример 6 *Дата је функција $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 25$. Одредити глобалне екстремуме функције f на датим сегментима:*
а) $[0, 4]$;
б) $[-4, 2]$.

Решење: Одредимо прво критичне тачке функције f.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x + 1)(x - 3).$$

$f'(x) = 0$, за $x = -1$ и $x = 3$.

а) Посматрамо вредности функције f у тачкама $x = 0$, $x = 4$, као и вредност у критичној тачки $x = 3$ која припада овом сегменту.

$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 - 9 \cdot 0 + 25 = 25,$

$f(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 + 25 = -2,$

$f(4) = 4^3 - 3 \cdot 4^2 - 9 \cdot 4 + 25 = 5.$

Одавде закључујемо да је глобални минимум функције f -2, а глобални максимум 25.
б) Сада посматрамо вредност функције f у тачкама $x = -4$, $x = -1$ и $x = 2$.

$f(-4) = (-4)^3 - 3 \cdot (-4)^2 - 9 \cdot (-4) + 25 = -51,$

$f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 9 \cdot (-1) + 25 = 30,$

$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 9 \cdot 2 + 25 = 3.$

Глобални минимум функције је -51, а глобални максимум 30.

$\triangle$

Пример 7 *Испитати да ли полином $p(x) = x^2 - x - 2$ има екстремних вредности на $(-\infty, +\infty)$, и ако има одредити у којим их тачкама достиже.*

Решење: Рачунамо наведене лимесе.

$\lim_{x \to +\infty} p(x) = +\infty,$

$\lim_{x \to -\infty} p(x) = +\infty.$

На основу таблице за глобалне екстремуме на неограниченим интервалима можемо закључити да функција има глобални минимум, а нема глобални максимум на $(-\infty, \infty)$. Проверимо у којој се тачки тај минимум достиже.
Наш полином је диференцијабилна функција на целом интервалу $(-\infty, +\infty)$, па

смемо тражити први извод датог полинома.

$p'(x) = 2x - 1.$

Извод је потребно изједначити са нулом.

$2x - 1 = 0.$

Дакле, глобални минимум се постиже у тачки $x = \frac{1}{2}$, и он износи :

$p(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} - 2 = -\frac{9}{4}.$

$\triangle$

Пример 8 *Правоугаоно поље треба да се огради са три стране. Са четврте стране је поток. Ако на располагању имамо* 1000 *метара ограде, наћи димензије поља тако да његова површина буде максимална.*

Решење: Означимо са a страницу поља која се налази паралелно страни која је ограђена потоком, а са b две преостале стране.
Важиће следећа једнакост.

$2b + a = 1000$, одакле је:

$a = 1000 - 2b$, $b \in [0, 500]$.

У површину правоугаоника ћемо убацити ово a које смо изрзили пре b, па имамо:

$P = (1000 - 2b)b,$

$P = -2b^2 + 1000b.$

Сада треба да пронађемо критичне тачке добијене функције.

$P' = -4b + 1000.$

$P' = 0$, одакле је $b = 250$, а $a = 500$.

На основу Вајерштрасове теореме максимум се мора достићи у некој тачки сегмента.

$P(0) = P(500) = 0,$

$P(250) = 125000.$

Тражене димензије су 500 метара х 250 метара.

$\triangle$

Пример 9 *Правоугаону парцелу треба оградити са две врсте ограде. На две супротне стране користиће се тешка ограда, која се продаје за* 1200 *динара по метру, док ће се на преостале две стране користити стандардна ограда која се продаје за* 800 *динара по метру. Израчунати димензије парцеле, са највећом површином за чије ограђивање ограда кошта* 6000000 *динара.*

Решење: Нека су странице парцеле a метара и b метара.

Важиће једнакост

$2 \cdot a \cdot 1200 + 2 \cdot b \cdot 800 = 6000000$, одакле је $b = \frac{7500-3a}{2}$.

Формула за површину правоугаоника је $P = ab$, одакле имамо:

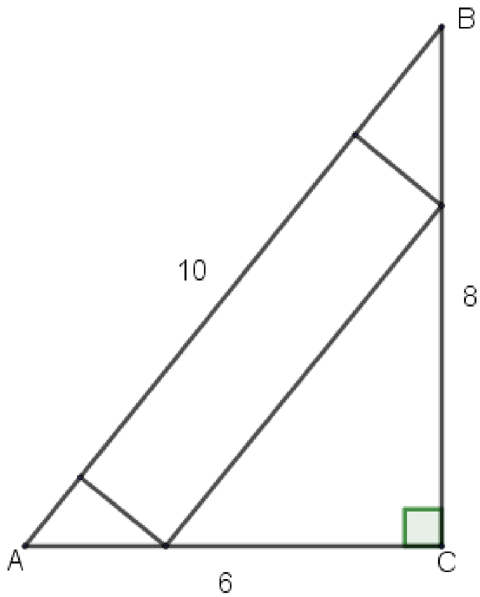
$P = \frac{7500a-3a^2}{2}$.

$P' = \frac{7500-6a}{2}$.

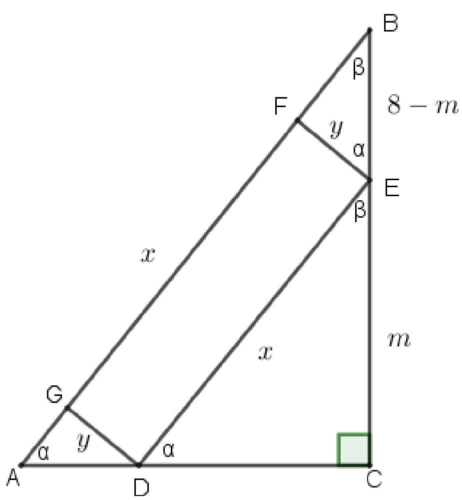
$\frac{7500-6a}{2} = 0$, одакле је $a = 1250$, а $b = 1875$.

$\triangle$

Пример 10 *Правоугаоник треба да се упише у правоугли троугао чије су странице* $6cm$, $8cm$ *и* $10cm$. *Нaћи димензије правоугаоника који ће имати највећу површину, претпостављајући да је правоугаоник постављен као на слици.*



Решење: Посматрајмо слику:



Троугао DCE је сличан са троуглом ACB, одакле је $\frac{x}{10} = \frac{m}{8}$.

Троугао BFE је сличан са троуглом BCA одакле је $\frac{y}{6} = \frac{8-m}{10}$.

Из прве једначине је $x = \frac{5m}{4}$, а из друге $y = \frac{3(8-m)}{5}$.

Сада: $P = xy$.

$P = \frac{3(8m-m^2)}{4}$.

$P' = \frac{3(8-2m)}{4}$.

Максимум се постиже за $m = 4$, тада је $x = 5cm$ и $y = \frac{12}{5}cm$.

△

Пример 11 *Жица дужине 12 метара може се савити у круг, у квадрат или се може пресећи на два дела од којих ће се направити и круг и квадрат. Колико жице треба употребити за круг тако да укупна површина ограничена фигуром буде:*
а) максимална;
б) минимална?

Решење: Нека је x обим круга, тада је $12 - x$ обим квадрата.

Важиће да је $0 \leq x \leq 12$ (за $x = 12$ имамо само круг, а за $x = 0$ само квадрат)

$x = 2r\pi$, одакле је $r = \frac{x}{2\pi}$.

$12 - x = 4a$, одакле је $a = \frac{12-x}{4}$.

Укупна површина се добија када саберемо површине круга и квадрата.

$P = \frac{1}{4\cdot\pi}x^2 + \frac{(12-x)^2}{16}$.

$P' = \frac{(4+\pi)x-12\pi}{8\pi}$.

$P' = 0$, за $x = \frac{12\pi}{4+\pi}$.

Рачунамо вредност површине у крајевима сегмента, то су тачке $x = 0$ и $x = 12$, као и у добијеној критичној тачки $x = \frac{12\pi}{4+\pi}$.

$P(0) = 9$,

$P(\frac{12\pi}{4+\pi}) = \frac{36\pi+144}{(4+\pi)^2}$,

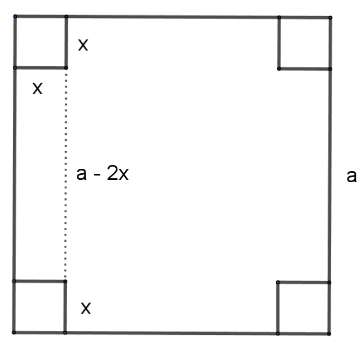
$P(12) = \frac{36}{\pi}$.

б) Укупна површина ограничена кругом и квадратом биће минимална ако за круг употребимо $\frac{12\pi}{4+\pi}$ метара жице.
а) Максимална вредност за P ће се постићи у $x = 12$.
Укупна површина биће максимална за $x = 12$ метара, то јест ако се жица савије само у круг.

$\triangle$

Пример 12 *Од картона облика квадрата странице а начинити отворену кутију максималне запремине. Одредити димензије кутије и максималну запремину.*

Решење:



Са x смо означили висину кутије, док ће основна ивица имати дужину $a - 2x$.
Из формуле за запремину правилне четворостране призме која ће имати само једну базу имаћемо да је

$V(x) = (a - 2x)^2 \cdot x,\ x \in [0, \frac{a}{2}]$.

$V(x) = (a^2 - 4ax + 4x^2)x$,

$V(x) = 4x^3 - 4ax^2 + a^2x$.

Пронађимо критичне тачке функције $V(x)$.

$V'(x) = 12x^2 - 8ax + a^2.$

$V'(x) = 0.$

$12x^2 - 8ax + a^2 = 0,$

$x_{1/2} = \frac{8a \pm \sqrt{64a^2 - 48a^2}}{24},$

$x_{1/2} = \frac{8a \pm 4a}{24},$

$x_1 = \frac{a}{2}$, $x_2 = \frac{a}{6}$.

$V(0) = 0,$

$V(\frac{a}{2}) = 4 \cdot (\frac{a}{2})^3 - 4 \cdot a \cdot (\frac{a}{2})^2 + a^2 \cdot \frac{a}{2} = 0,$

$V(\frac{a}{6}) = 4 \cdot (\frac{a}{6})^3 - 4 \cdot a \cdot (\frac{a}{6})^2 + a^2 \cdot \frac{a}{6} = \frac{2a^3}{27}.$

Максимална вредност функције $V(x)$ се постиже у тачки $x = \frac{a}{6}$.
Основна ивица је тада $a - 2x = a - \frac{a}{3} = \frac{2}{3} \cdot a$, висина је $\frac{a}{6}$, док је максимална запремина $V(\frac{a}{6}) = \frac{2}{27} \cdot a^3$.

$\triangle$

Пример 13 *Одредити димензије правог ваљка максималне запремине чији осни пресек има обим* $28cm$.

Решење: Осни пресек правог кружног ваљка је правоугаоник, чија је једна страница пречник круга основе, а друга страница висина. Па имамо:

$4r + 2H = 28.$

$2r + H = 14$, одакле је $H = 14 - 2r$.

Запремина ваљка се рачуна по формули $V = B \cdot H$, где је B површина базе, а H висина ваљка. База ваљка је круг па је $B = r^2\pi$. Заменимо у формулу за запремину ваљка и висину коју смо добили.

$V = r^2\pi(14-2r) = 14r^2\pi - 2r^3\pi.$

$V' = 28r\pi - 6r^2\pi.$

$V' = 0.$

$2r\pi(14-3r) = 0.$

Имамо, $r = 0$ и $14 - 3r = 0$, односно $r = \frac{14}{3}$.

Максимална запремина се постиже за $r = \frac{14}{3}cm$, висина је тада $H = 14 - 2r = \frac{14}{3}cm$.

$\triangle$

Пример 14 *Одредити основну ивицу и висину правилне четворостране пирамиде дате површине P, тако да има највећу запремину.*

Решење: Површина пирамиде се рачуна по формули $P = B + M$. Основа правилне четворостране пирамиде је квадрат, па је $B = a^2$. У омотачу се налазе четири једнакокрака троугла, па је $M = 4 \cdot \frac{ah}{2} = 2ah$. На основу наведеног $P = a^2 + 2ah$. Запремина пирамиде се рачуна по формули $V = \frac{1}{3}B \cdot H$, што је у нашем случају $V = \frac{1}{3}a^2 \cdot H$.
Из формуле за површину лако можемо изразити апотему:

$h = \frac{P-a^2}{2a}.$

Квадрирањем дате једнакости добијамо да је $h^2 = \frac{(P-a^2)^2}{4a^2}$.

У пирамиди, помоћу Питагорине теореме имамо везу између висине пирамиде, апотеме и основне ивице. Та веза гласи:

$h^2 = H^2 + (\frac{a}{2})^2.$

Убацивањем у ову формулу h^2 које смо израчунали добијамо:

$\frac{(P-a^2)^2}{4a^2} = H^2 + \frac{a^2}{4}.$

Одакле је: $H^2 = \frac{(P-a^2)^2}{4a^2} - \frac{a^2}{4}$,

$H^2 = \frac{(P-a^2)^2-a^4}{4a^2} = \frac{(P-a^2-a^2)(P-a^2+a^2)}{4a^2}$,

$H^2 = \frac{(P-2a^2)P}{4a^2}$,

$H = \frac{\sqrt{P(P-2a^2)}}{2a}$.

Убацимо добијено H у формулу за запремину пирамиде.

$V = \frac{1}{3}a^2\frac{\sqrt{P(P-2a^2)}}{2a} = \frac{1}{6}a\sqrt{P(P-2a^2)}$.

Израчунајмо извод запремине.

$V' = \frac{1}{6} \cdot \frac{P^2-4Pa^2}{\sqrt{P(P-2a^2)}}$.

$V' = 0$.

$P^2 = 4 \cdot P \cdot a^2$,

$a^2 = \frac{P}{4}$,

$a = \frac{\sqrt{P}}{2}$.

Треба проверити да ли се за ову вредност постиже тражени максимум.

$P^2 - 4 \cdot P \cdot a^2 > 0$, на $(-\infty, \frac{\sqrt{P}}{2})$,

$P^2 - 4 \cdot P \cdot a^2 < 0$, на $(\frac{\sqrt{P}}{2}, +\infty)$.

С обзиром на V', функција пре $\frac{\sqrt{P}}{2}$ расте, а после $\frac{\sqrt{P}}{2}$ опада па је ту заиста максимум.
Још треба израчунати висину. То ћемо урадити заменом добијене вредности a у $H = \frac{\sqrt{P(P-2a^2)}}{2a}$.

$H = \frac{\sqrt{2P}}{2}$.

$\triangle$

2 Примена глобалних екстремума у економији

Нека је дат неки временски период.
Наведимо следеће функције:
$C(x)$ - укупни трошкови производње x производа у том временском периоду
$R(x)$ - укупан приход од продаје x производа током тог временског периода
$P(x)$ - укупна добит остварена продавањем x производа током тог временског периода.
Сада се лако може уочити веза између ових функција:
$P(x) = R(x) - C(x)$.
Као што је познато имамо две врсте трошкова у фирми која се бави производњом:
-Режијске трошкове, који укључују трошкове као што су закуп пословног простора и осигурање. Они не зависе од x. Такви трошкови су сигурни, морају се платити чак и онда када се ништа не произведе. Означимо их са a.
- Трошкови ресурса који су употребљени за стварање производа. Ови трошкови зависе од броја произведених производа x.
Трошкови ресурса $M(x)$ најчешће се изражавају на следећи начин:
$M(x) = bx + cx^2$, при чему су b и c константе.
Сада ће важити:
$C(x) = a + bx + cx^2$.
Ако фирма може продати све производе које произведе за p динара по једном производу, онда за укупан приход важи $R(x) = px$.
Сада из $P(x) = R(x) - C(x)$, имамо да је:
$P(x) = px - (a + bx + cx^2)$.
Такође постоји и доста фактора који утичу на број произведених производа. Неки од фактора су, на пример, број запослених, количина расположивих машина, економски услови и конкуренција.
Због свега наведеног, постојаће горња граница броја производа које је произвођач способан да произведе и прода.
Зато се најчешће за домен функција C, R и P узима сегмент $[0, l]$, где је l та горња граница.

Пример 15 *Продаје се антибиотик фармацеутске фирме, по цени од* 200 *динара по комаду. Ако су укупни трошкови за x производа* $C(x) = 500000 + 80x + 0,003x^2$, *и ако је производни капацитет фирме* 30000 *производа у одређеном временском периоду, колико производа се мора произвести и продати да би се остварио максималан профит?*

Решење: Важиће да је $R(x) = 200x$.

Применићемо формулу којом се рачуна укупна добит.

$P(x) = 200x - (500000 + 80x + 0,003x^2)$.

Следеће што ћемо урадити јесте пронаћи критичне тачке ове функције.

$P'(x) = 200 - (80 + 0,006x) = 120 - 0,006x$.

$P'(x) = 0$.

$120 - 0,006x = 0$, одакле је $x = 20000$.

Како имамо сегмент $[0, 30000]$, рачунаћемо вредност функције у тачкама 0, 20000 и 30000.

$P(0) = -500000$,

$P(20000) = 700000$,

$P(30000) = 400000$.

Вредност је највећа у 20000 и то је тачка у којој се максимум постиже и он износи 700000 динара.
Дакле, производњом 20000 антибиотика остварује се максимална добит.

$\triangle$

Пример 16 *Произвођач ђубрива сматра да може продати свој производ по цени $p = 300 - 0,1x$ динара, при чему је x број производа. Укупни трошкови производње x производа износе $C(x) = 15000 + 125x + 0,025x^2$.*
Ако производни капацитет фирме износи 1000 производа за одређено време, колико се мора произвести и продати да би се остварио максималан профит?

Решење: Видели смо да је $P(x) = px - C(x)$, одакле је:

$P(x) = (300 - 0,1x)x - (15000 + 125x + 0,025x^2)$,

$P(x) = 300x - 0,1x^2 - 15000 - 125x - 0,025x^2$.

$P'(x) = 300 - 0,2x - 125 - 0,05x,$

$P'(x) = 175 - 0,25x.$

За критичне тачке тражимо нулу првог извода.

$P'(x) = 0,$

$175 - 0,25x = 0,$

$x = \frac{175}{0,25},$

$x = 700.$

Како посматрамо сегмент $[0, 1000]$, тражићемо вредност функције у тачкама 0, 700 и 1000.
Када се $P(x)$ мало среди добије се $P(x) = -0,125 \cdot x^2 + 175 \cdot x - 15000.$

$P(0) = -15000,$

$P(700) = 46250,$

$P(1000) = 35000.$

Закључујемо да се максималан профит достиже за $x = 700$, и износи 46250 динара.

$\triangle$

Пример 17 *Нека фирма је утврдила да може дневно продати* x *својих производа, по цени* p *динара по производу. Ако важи* $p = 1000 - x$ *и* $C(x) = 3000 + 20x$ *одредити:*
а) укупан приход;
б) укупан профит;
в) максималан профит.

Решење: а) $R(x) = px = (1000 - x)x.$

б) $P(x) = R(x) - C(x) = 1000x - x^2 - (3000 + 20x) = -x^2 + 980x - 3000.$

в) $P'(x) = -2x + 980$.

$P'(x) = 0$.

$x = \frac{1980}{2} = 490$.

$P''(x) = -2 < 0$, што значи да се максимум постиже у тачки $x = 990$.

Максималан профит износи $P(490) = -490^2 + 980 \cdot 490 - 3000 = 237100$ динара.

$\triangle$

3 Примена глобалних екстремума у физици

3.1 Праволинијско кретање

Кретање је основно стање материје. Сва тела у природи се крећу. Услед кретања настају промене и различите физичке појаве. Кретањем тела мењају положај једно у односу на друго па је најбољи начин да се кретање дефинише као промена положаја тела у односу на друго тело. Механика је област физике која проучава кретање.
У случају праволинијског кретања честице кретање се врши дуж једне праве линије и увек се може одабрати да то буде једна од координатних оса.
Почнимо посматрање честице у тренутку $t = 0$. Како се честица креће она пређе неки пут. Пут је функција од времена па ћемо га означити са $s(t)$. Функција $s(t)$ је функција положаја честице, или закон кретања честице.
Ако посматрамо тренутке t_1 и t_2 као и положај честице $s(t_1)$ и $s(t_2)$, тада се $s(t_2) - s(t_1)$ назива померај честице на сегменту $[t_1, t_2]$.

3.2 Брзина и интензитет брзине

Брзина као вектор има правац, смер и интензитет и изражава се на следећи начин:

$v(t) = s'(t)$.

- Ако је $v(t) > 0$, онда се честица креће у позитивном смеру.
- Ако је $v(t) < 0$, онда се честица креће у негативном смеру.
- Ако је $v(t) = 0$, онда се честица зауставила.

За честицу у праволинијском кретању је важно направити разлику између брзине и њеног интензитета који описује само колико брзо се честица креће, независно од правца и смера. Тај интензитет једнак је апсолутној вредности брзине ($|v(t)| = |s'(t)|$).

Јединица за пут је метар (m), за време је секунда (s), за брзину $\frac{m}{s}$, а за убрзање $\frac{m}{s^2}$.

Пример 18 *Тачка се креће праволинијски по закону $s(t) = \frac{1}{2}t^2 - 5t + 8$. У ком тренутку је брзина тачке једнака нули?*

Решење: $v(t) = s'(t)$,

$v(t) = t - 5$.

$v(t) = 0$, када је $t = 5s$.

$\triangle$

Пример 19 *Тачка се креће по закону* $s(t) = 3t^3 - 2t^2 + t$. *У ком тренутку ће врзина тела бити* $v = 6\frac{m}{s}$*?*

Решење: $v(t) = s'(t)$,

$v(t) = 9t^2 - 4t + 1$.

Брзина треба да буде $v = 6$. Изједначићемо претходну једнакост са 6.

$9t^2 - 4t + 1 = 6$,

$9t^2 - 4t - 5 = 0$.

Добили смо квадратну једначину. Њена решења су $t_1 = 1$ и $t_2 = -\frac{5}{9}$. Време не може бити негативно, па је решење $t = 1s$.

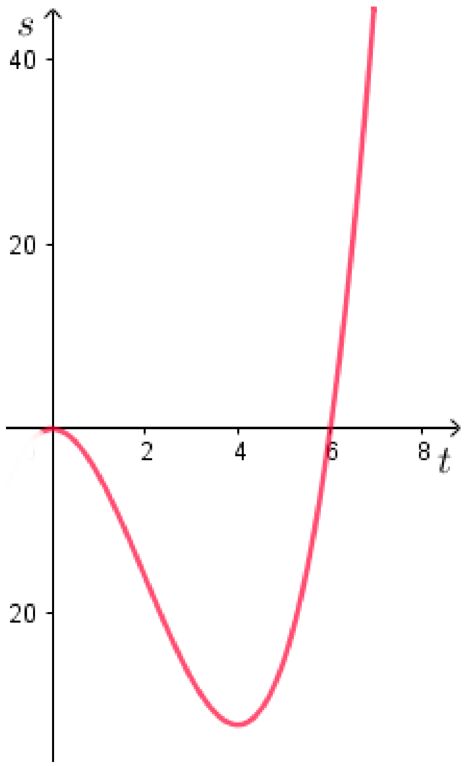
$\triangle$

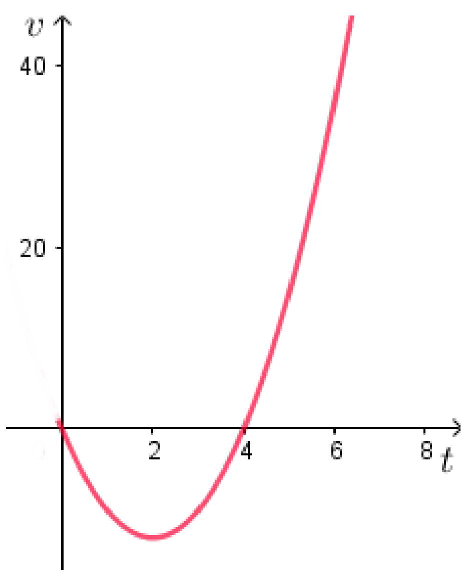
Пример 20 *Тачка се креће по закону* $s(t) = t^3 - 6t^2$. *Пронаћи брзину, њен интензитет, као и графике све три функције.*

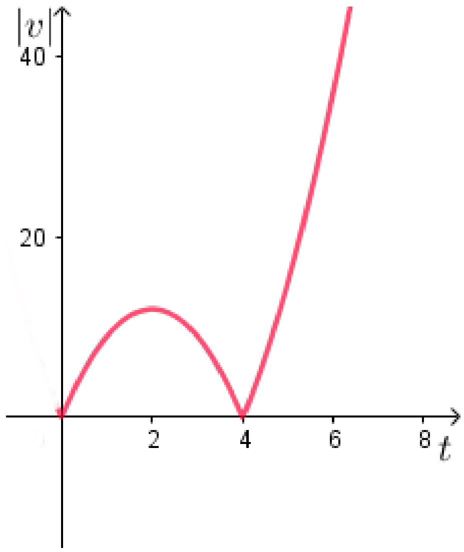
Решење: $v(t) = s'(t)$,

$v(t) = 3t^2 - 12t$,

$|v(t)| = |3t^2 - 12t|$.


s
40
20
20
2
4
6
8
t


v
40
20
2
4
6
8
t



Први график нам говори да је честица на негативном делу на $0 < t < 6$, а на позитивном за $t > 6$.

На другом графику који представља брзину у односу на време видимо да се честица креће у негативном смеру ако је $0 < t < 4$, у позитивном ако је $t > 4$, а зауставила се у тренутку $t = 0$ и $t = 4$.

На трећем графику видимо да се интензитет брзине повећава на $0 < t < 2$, опада на $2 < t < 4$, па се поново повећава за $t > 4$.

$\triangle$

Пример 21 *Нека је* $s = \frac{100}{t^2+12}$ *функција положаја честице. Наћи максималну брзину честице за* $t \geq 0$*, и наћи смер кретања честице у тренутку када она има максималну брзину.*

Решење: $s = \frac{100}{t^2+12} = 100(t^2+12)^{-1}$.

$s' = 100 \cdot (-1) \cdot (t^2+12)^{-2} \cdot 2t$.

$v = s' = \frac{-200t}{(t^2+12)^2}$.

$v < 0$ за $t > 0$ (честица се креће у негативном смеру), $v = 0$ за $t = 0$.

$v' = \frac{600(t^2-4)}{(t^2+12)^3}$.

Посматрањем знака првог извода функције уз услов да је $t \geq 0$, имаћемо да је $v' < 0$ за $t \in [0, 2)$, $v' = 0$ за $t = 2$ и $v' > 0$ за $t \in (2, +\infty)$.

Ово значи да се минимална вредност брзине постиже за $t = 2$, али пошто је брзина негативна имамо максималну вредност за $t = 2$.

$v(2) = \frac{-200 \cdot 2}{(2^2+12)^2} = -\frac{25}{16}$.

Максимална брзина износи $-\frac{25}{16}$, постиже се после 2 секунде и честица се креће у негативном смеру.

$\triangle$

3.3 Убрзање

Убрзање описује како се мења брзина кретања. Убрзање је као и брзина векторска величина.
Ако честица у праволинијском кретању има брзину $v(t)$, онда функцију убрзања дефинишемо на следећи начин:

$a(t) = v'(t)$.

Из претходног одељка смо видели да је $v(t) = s'(t)$, што значи да је:

$a(t) = v'(t) = s''(t)$.

Погледајмо на примеру.

Пример 22 *Нека је $s(t) = t^3 - 6t^2$ функција позиције честице која се креће дуж s осе. Пронаћи функцију $a(t)$.*

Решење: На основу претходног:

$s'(t) = 3t^2 - 12t$.

$a(t) = s''(t) = 6t - 12\frac{m}{s^2}$.

$\triangle$

Пример 23 *Тачка се креће праволинијски по закону $s(t) = 2t^3 + t^2 - 4$. Одредити брзину и убрзање у тренутку $t = 4$.*

Решење: Брзина је $v(t) = s'(t) = 6t^2 + 2t$.
Брзина у тренутку $t = 4$ је $v(4) = 6 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 = 104\frac{m}{s}$.

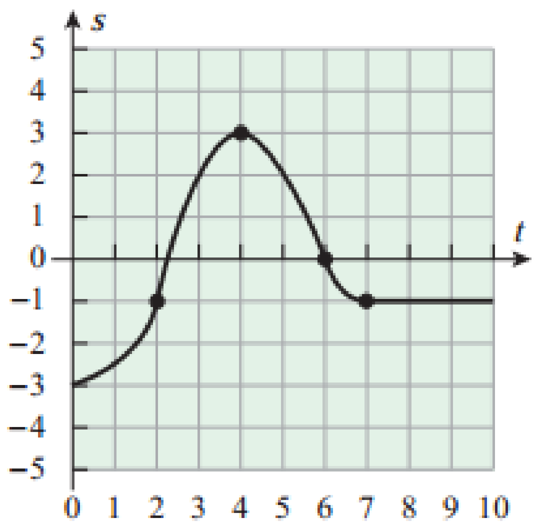
Убрзање је $a(t) = v'(t) = 12t + 2$.
Убрзање у тренутку $t = 4$ је $a(4) = 12 \cdot 4 + 2 = 50\frac{m}{s^2}$.

$\triangle$

Још једна битна ствар. За честицу у праволинијском кретању рећи ћемо да се убрзава када јој се интензитет брзине повећава, а успорава када се њен интензитет брзине смањује.

Очекујемо да ће се честица убрзавати када јој је убрзање позитивно, а успоравати када је убрзање негативно. Ако размислимо видећемо да је то тачно ако се честица креће у позитивном смеру, али није ако се креће у негативном смеру. Честица са негативном брзином убрзава се када јој је убрзање негативно, а успорава када је убрзање позитивно.

Пример 24 *Анализирати следећи график.*



Решење: Када је t између 0 и 2, функција је растућа. Одатле закључујемо да је брзина позитивна па се честица креће у позитивном смеру.
Функција је конвексна па је други извод позитиван (убрзање), што значи да брзина расте. Брзина је позитивна и расте што значи да се честица убрзава.

Када је t између 2 и 4 функција расте па је брзина позитивна. Честица се креће у позитивном смеру.
На овом делу је функција конкавна па је убрзање негативно, то значи да брзина опада. Брзина је позитивна и опада што значи да честица успорава.

У тачки $t = 4$ честица се зауставила.

Када је t између 4 и 6 функција је опадајућа па је брзина негативна.
Функција је конкавна па је и убрзање негативно, па брзина опада. То значи да интензитет брзине расте, односно честица се убрзава.

Када је t између 6 и 7 функција опада, па је брзина негативна.
Функција је конвексна па је убрзање позитивно што значи да брзина расте. Брзина расте, а пошто је негативна значи да интензитет брзине опада. Честица успорава.

За t веће од 7 први извод је нула јер је функција константна, а то значи да честица мирује.

$\triangle$

Литература

[1] Anton, Bivens, Davis, *Calculus*, John Wiley, 2012.

[2] Вене Богославов, *Збирка решених задатака из математике 4*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 2004.