Математички факултет
Универзитет у Београду

Електронске лекције о четвороугловима креиране коришћењем програмског пакета ГеоГебра за ученике виших разреда основне школе

- мастер рад -

Ментор:
др Мирослав Марић

Студент:
Дуња Милошев
1149/2015

Београд, 2017.

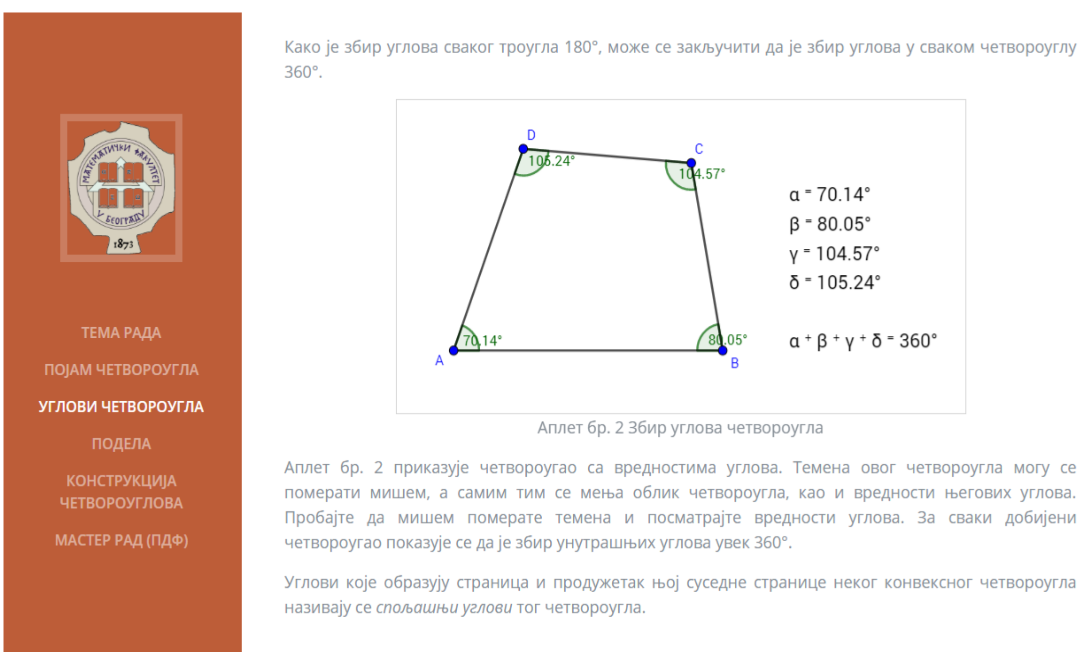
Чланови комисије:
др Мирослав Марић, ментор
др Срђан Вукмировић
др Миљан Кнежевић

САДРЖАЈ

УВОД

Савремене методе у настави и примена електронских наставних материјала пружају велике могућности за унапређење традиционалне наставе. Електронско учење, као вид учења подржан информационо-комуникационим технологијама, требало би да помогне приликом усвајања нових сазнања јер корисницима омогућава интеракцију и могло би да подстакне интересовање ученика према наставном садржају. Овај вид наставе тражи и мотивисаног наставника да се константно усавршава и да иде у корак са технологијом. С обзиром на посебну важност четвороугла, јер је заступљен на многим нивоима образовања, од великог значаја је да се ученицима приближи на што креативнији начин како би га лакше прихватили и схватили његове особине.

Циљ овог мастер рада је да представи четвороугао на занимљив и пријемчив начин који ће додатно мотивисати и ангажовати ученике. За наставне јединице у вези са четвороуглом, које су предвиђене планом и програмом за више разреде основне школе, креиране су електронске лекције уз помоћ програмског пакета ГеоГебра.



Слика 1. Изглед једне електронске лекције креиране за потребе мастер рада

Мултимедијални приступ требало би да омогући лакше усвајање градива, а наставницима да олакша реализацију наставног плана и програма. Визуелни контакт ученика са неком појавом утиче на брже усвајање информација. Програмски пакет ГеоГебра и електронске лекције о четвороугловима, креиране за потребе мастер рада, требало би да помогну да се планирано градиво из те области лакше усвоји и да усвојено знање буде трајно и функционално.

У поменутим електронским лекцијама је уведен појам четвороугла и његова основна својства уз одговарајућу илустрацију аплетима. Обрађена је и подела четвороуглова по различитим критеријумима и илустрована адекватним аплетима. Представљена је подела на конвексне и неконвексне четвороуглове, подела према броју паралелних страница, потом подела према могућности описивања и уписивања кружнице у четвороугао итд. Потом су обрађени конвексни четвороуглови (ромбоид, квадрат, правоугаоник, ромб, трапез, делтоид), њихове особине и конструкције које ће бити пропраћене одговарајућим аплетима.

Електронске лекције о четвороугловима које су креиране за потребе мастер рада намењене су свим ученицима и наставницима који за то покажу интересовање и јавно су доступне на интернет адреси: http://alas.matf.bg.ac.rs/~ml151149/index.html

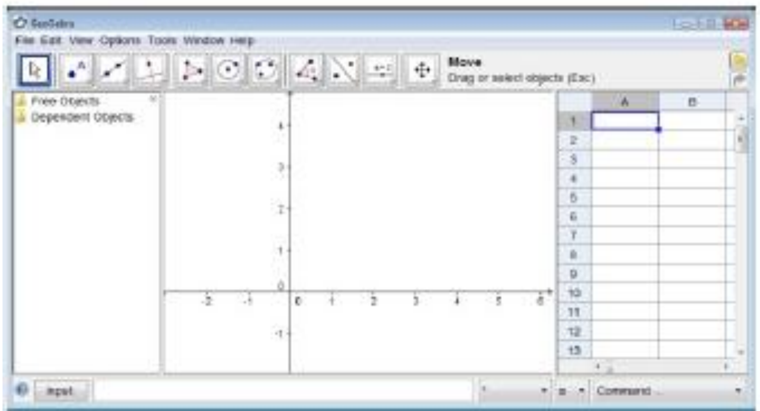
УВОЂЕЊЕ ИНОВАЦИЈА У НАСТАВУ МАТЕМАТИКЕ

Различити образовни софтвери су све чешћи извори знања у свакодневном образовном раду. Поред извора знања, они имају и другу улогу у настави, те је њихова примена од великог значаја. Наставник, користећи могућности и предности савремених наставних средстава, техничких уређаја и помагала као и образовних софтвера на најсврсисходнији начин, би требало да учини наставни процес динамичнијим, атрактивнијим и успешнијим.

Поред ГеоГебре, најпопуларнији програмски пакети који се користе за потребе наставе математике су и *Matlab, Wolfram Mathematica, iGeom, Tabulae, Jeometry, Geonext, Easy Java Simulations, Java View Lite.*

- *Matlab* је програмски пакет који представља интерактивно окружење за развој алгоритама, манипулисање матрицама и приказивање функција.
- *Wolfram Mathematica* је програм за симболичко математичко рачунање, коришћен у пољима науке, инжењерства, математике и рачунања.
- *iGeom-Interactive Geometry* је софтвер који допушта кориснику креирање геометријских конструкција и интеракцију са њима.
- *Tabulae* је комерцијални програм динамичке геометрије који подржава практично учење и може се користити за конструкцију, сечење, лепљење, преклапање, мерење и трансформацију геометријских фигура.
- *Jeometry* је динамички геометријски аплет.
- *Geonext* је записан у Јави и нуди функције за израчунавање приказа (параметарске кривуље, функције).
- *Easy Java Simulations* је програмски пакет отвореног кода, дизајниран за креирање рачунарских симулација које покушавају да у педагошке или научне сврхе репродуцирају природни феномен кроз визуелизацију различитих стања које он може имати.
- *Java View Lite* је тродимензионални геометријски прегледач и математички софтвер за визуелизацију са којим се могу истражити разни 3D модели.

ГеоГебра је програмски пакет који се због могућности динамичког приказа и интерактивности математичких објеката у настави може користити за објашњавање, истраживање и моделирање математичких концепата и њихових међусобних односа. ГеоГебра је програм за динамичку математику који повезује геометрију, алгебру и математичку анализу. Развијен је за наставу и учење математике у школама. ГеоГебра има три различита приказа математичких објеката – графички, алгебарски и табеларни. Помоћу њих је могуће приказати математичке објекте у три различита облика.



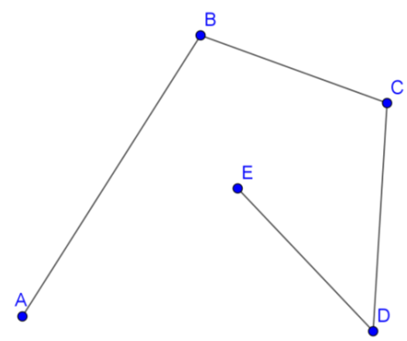
Слика 2. Окружење програма ГеоГебра

Предности програмског пакета ГеоГебра су:

- омогућава анимирање једног или више параметара истовремено, редефинисање објеката је веома моћан алат за измену конструкције. Веома је битно обратити пажњу на то да се може изменити и редослед корака у опису конструкције. Објекти могу да оставе траг у графичком приказу када се померају;
- поред тога што је објекте могуће приказати или сакрити, могуће је подесити их тако да њихова видљивост зависи од одређеног услова. Може се подесити објекат тако да се он појави на екрану уколико се укључи поље за потврду или се клизач подеси на неку одређену вредност;
- ГеоГебра дозвољава креирање сопствених алата заснованих на постојећим конструкцијама. Сви алати се аутоматски снимају у датотеку заједно са конструкцијом. Слојеви у овом програмском пакету служе да се одреди који објекат се бира или помера када корисник кликне на више објеката.

ПОЈАМ ЧЕТВОРОУГЛА

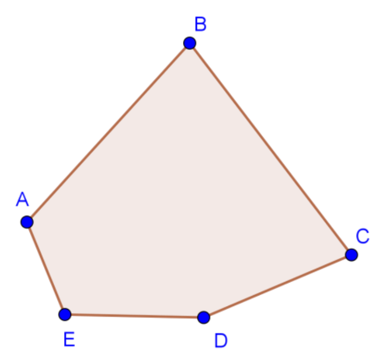
Полигонална линија или изломљена линија је низ одсечака који су надовезани један на други, нпр. линија $ABCDE$ приказана на слици 3.



Слика 3. Полигонална линија $ABCDE$

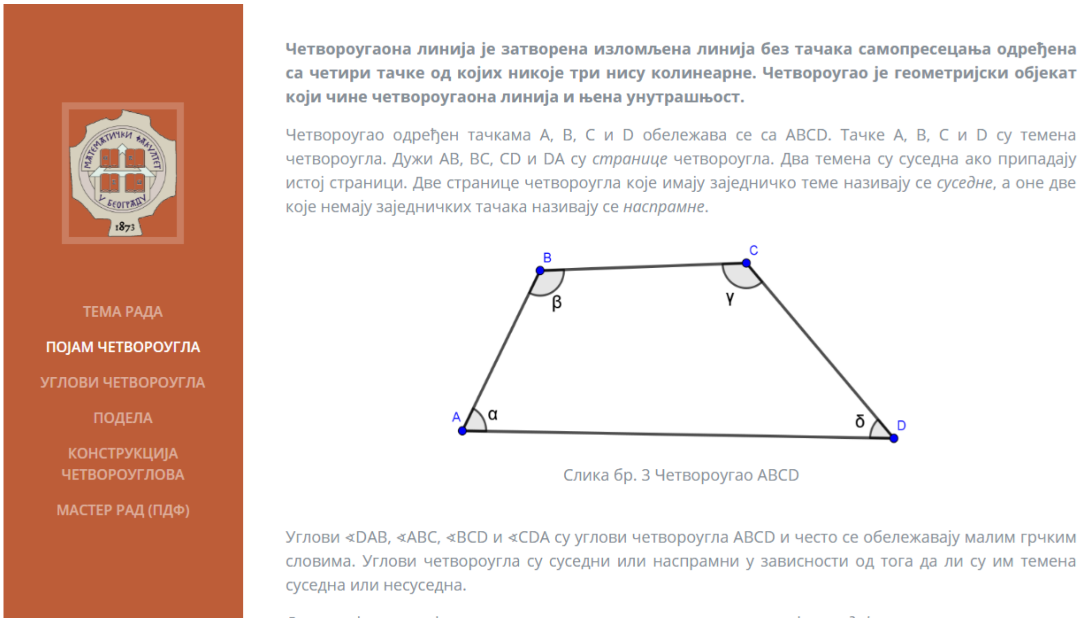
Одсечци се зову странице, а тачка заједничка за две узастопне странице зове се теме. Тачке на слободном крају прве и последње странице зову се крајеви полигоналне линије.

Полигон је затворена полигонална линија. Пример једног полигона $ABCDE$ приказан је на слици 4. Полигон има онолико темена колико има страница. Према броју страница, разликујемо троуглове (три странице), четвороуглове (четири странице), петоуглове (пет страница), шестоуглове (шест страница), итд.



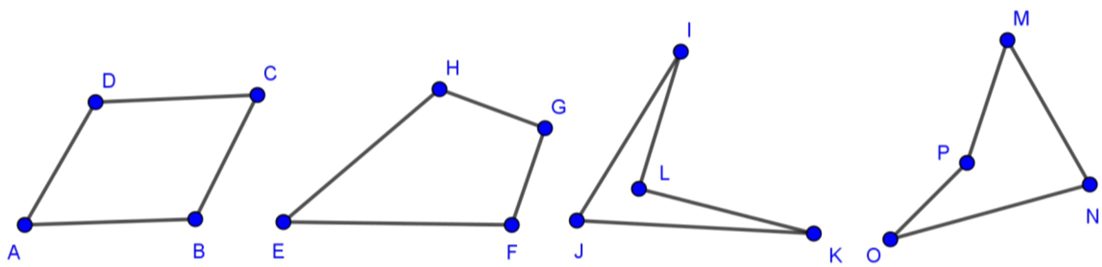
Слика 4. Полигон $ABCDE$

Дефиниција 1. *Четвороугаона линија је затворена изломљена линија без тачака самопресецања одређена са четири тачке од којих никоје три нису колинеарне. Четвороугао је геометријски објекат који чине четвороугаона линија и њена унутрашњост.*



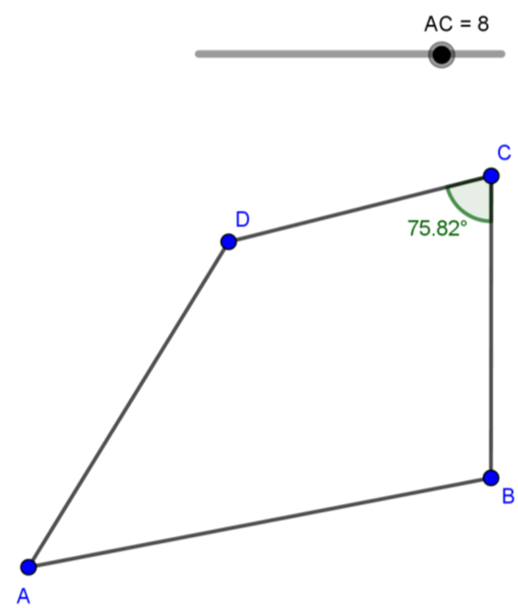
Слика 5. Изглед електронске лекције појам четвороугла

У односу на троуглове који су конвексни геометријски објекти, четвороуглови могу бити и неконвексни. Наиме, четвороугао је конвексан ако се у њему налази свака дуж коју одређују било које две његове тачке, односно ако се цео налази са исте стране праве на којој лежи било која његова страница. У супротном, четвороугао је неконвексан. За разлику од троуглова, четвороуглови нису јединствено одређени својим страницама. Уколико су задате четири ивице, њиховим померањем (ротацијом око темена, транслацијом) се могу направити разни четвороуглови. На слици 6. приказани су примери конвексних и неконвексних четвороуглова. Померањем њихових темена они се могу трансформисати у друге четвороуглове, што олакшава визуализацију појма четвороугла. Такође, може се приметити како конвексан четвороугао померањем само једног темена може постати неконвексан и обрнуто.



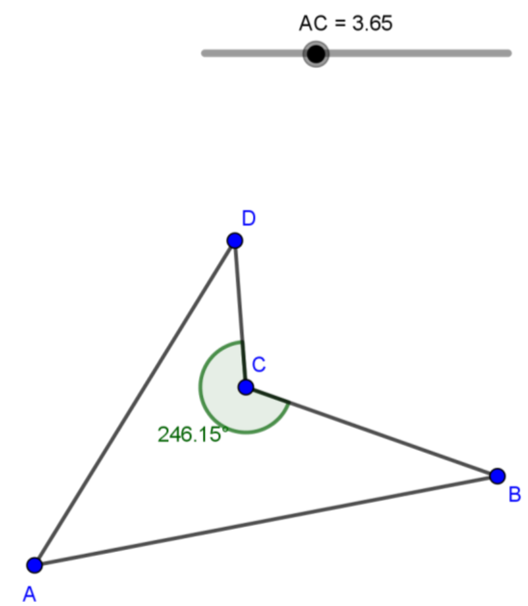
Слика 6. Конвексни и неконвексни четвороуглови

У аплету креираном за електронску лекцију *Појам четвороугла* приказаном на слици 7. померањем вредности клизача AC мења се угао код темена C. Наиме, AC представља дијагоналу четвороугла $ABCD$, и с обзиром да су остала три темена четвороугла A, B и D, у овом аплету фиксна, тј. положај им се не мења, мењањем дужине дијагонале AC помера се и теме C. Може се приметити да скраћивањем дијагонале AC, угао код темена C расте, и једног момента овај конвексан четвороугао постаје неконквексан и обрнуто. Докле год је угао код темена C мањи од 180° четвороугао је конвексан, слика 7.



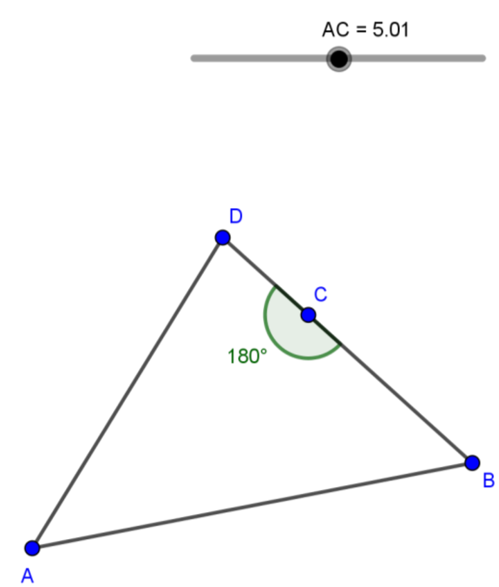
Слика 7. Аплет у којем је приказан конвексан четвороугао $ABCD$

За вредности угла код темена C веће од 180°, четвороугао $ABCD$ је неконвексан, слика 8.



Слика 8. Аплет у којем је приказан неконвексан четвороугао $ABCD$

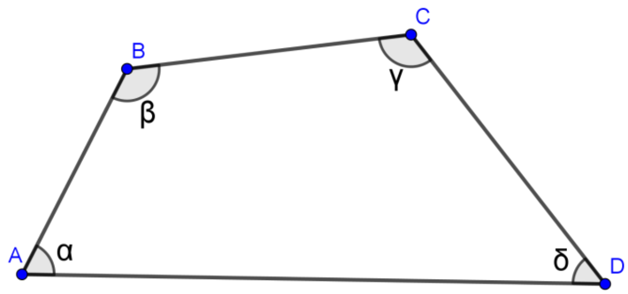
Занимљива ситуација се дешава ако током померања темена C четвороугла $ABCD$, угао код темена C постане тачно 180°. Тада више није реч о четвороуглу већ о троуглу, јер теме C више не представља једно теме четвороугла $ABCD$, него само једну тачку која припада страници BD, троугла ΔABD. Овакав положај темена C је представљен на слици 9.



Слика 9. Аплет у којем је приказан троугао ΔABD настао од четвороугла $ABCD$

У основној школи проучавају се искључиво конвексни четвороуглови.

Четвороугао одређен тачкама A, B, C и D обележава се са $ABCD$. Тачке A, B, C и D су темена четвороугла $ABCD$. Дужи AB, BC, CD и DA су странице четвороугла $ABCD$. Два темена су суседна ако припадају истој страници. На пример, темена A и B су суседна, док темена A и C нису. Две странице четвороугла које имају заједничко теме називају се суседне, а оне две које немају заједничких тачака називају се наспрамне. На пример, странице AB и BC су суседне, док су AB и CD наспрамне странице.

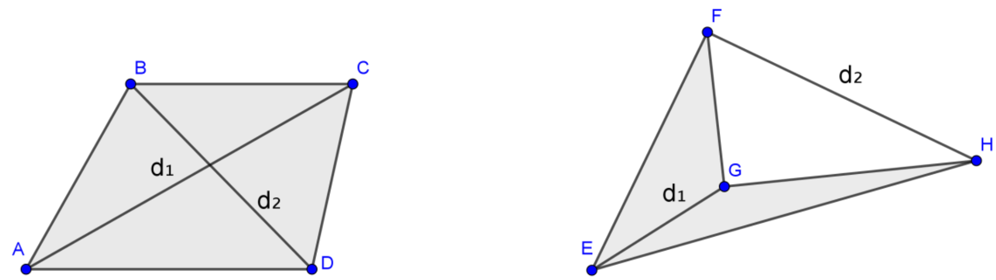


Слика 10. Аплет у којем је приказан четвороугао $ABCD$

Углови $\sphericalangle DAB$, $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCD$ и $\sphericalangle CDA$ су углови четвороугла $ABCD$ и често се обележавају малим грчким словима. Углови четвороугла су суседни или наспрамни у зависности од тога да ли су им темена суседна или несуседна. На пример, углови $\sphericalangle DAB$ и $\sphericalangle ABC$ су суседни углови, док су $\sphericalangle DAB$ и $\sphericalangle BCD$ наспрамни.

Дефиниција 2. *Дужи чији су крајеви несуседна темена четвороугла називају се дијагонале тог четвороугла.*

Дијагонале се означавају малим латиничним словом d, а у индексу је обично ознака броја дијагонале (d_1 или d_2). Ако се посматра четвороугао $ABCD$, дужи AC и BD су његове дијагонале, односно $AC = d_1$ и $BD = d_2$. На слици 11. представљен је аплет са дијагоналама конвексног и неконвексног четвороугла.

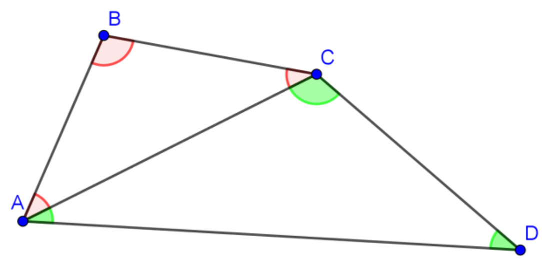


Слика 11. Аплет у којем су приказане дијагонале четвороугла

У аплету који приказује дијагонале четвороугла померањем неког од темена ових четвороуглова мењају се и дужине дијагонала, њихов међусобни положај, угао под којим се секу, као и однос у којем се секу.

УГЛОВИ ЧЕТВОРОУГЛА

Сваки четвороугао се може једном својом дијагоналом поделити на два троугла. Пример једног четвороугла који је дијагоналом подељен на два троугла приказан је на слици 12. На основу ове особине, многа својства четвороуглова могу се уочити познавајући особине троуглова.

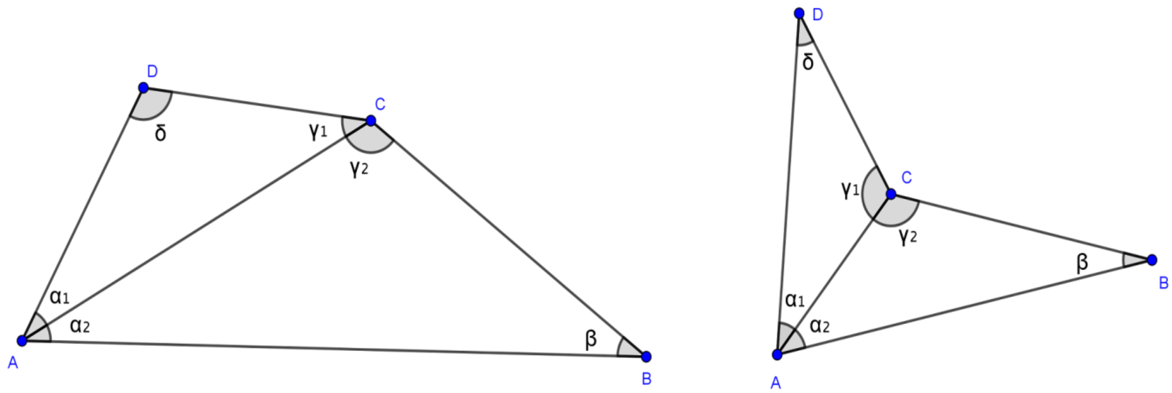


Слика 12. Четвороугао $ABCD$ који је дијагоналом подељен на два троугла

Слика 13. Изглед електронске лекције углови четвороугла

Како је збир углова сваког троугла 180°, може се закључити да је збир углова у сваком четвороуглу 360°.

Наиме, ако се посматра четвороугао $ABCD$ приказан на слици 14. који има углове редом α, β, γ, δ, његова дијагонала AC дели угао α на два угла α_1 и α_2.



Слика 14. Углови у четвороуглу

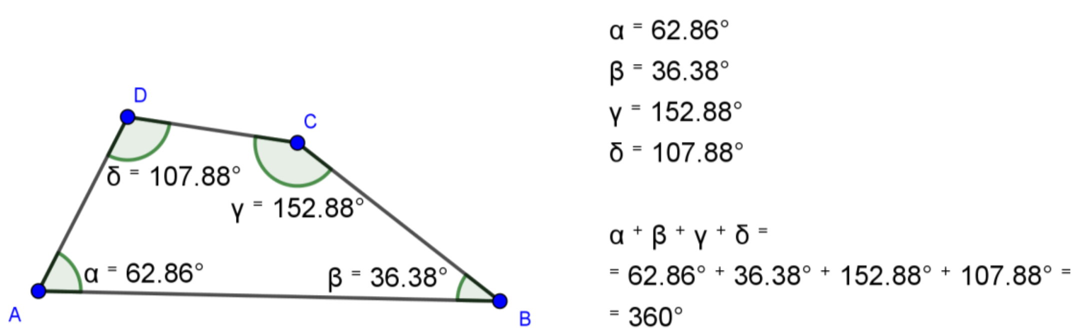
Пошто је угао α подељен на два угла α_1 и α_2, онда је $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. Иста дијагонала дели и угао γ на γ_1 и γ_2, где је $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma$. Како су α_1, β, γ_1 углови троугла ΔABC, а углови α_2, γ_2, δ углови троугла ΔACD, на основу теореме о збиру унутрашњих углова у троуглу следи да је $\alpha_2 + \delta + \gamma_2 = 180°$, као и да је $\alpha_1 + \beta + \gamma_1 = 180°$. На основу овога може се закључити да је

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = (\alpha_1 + \alpha_2) + \beta + (\gamma_1 + \gamma_2) + \delta$$

$$= (\alpha_1 + \beta + \gamma_1) + (\alpha_2 + \delta + \gamma_2) = 180° + 180° = 360°.$$

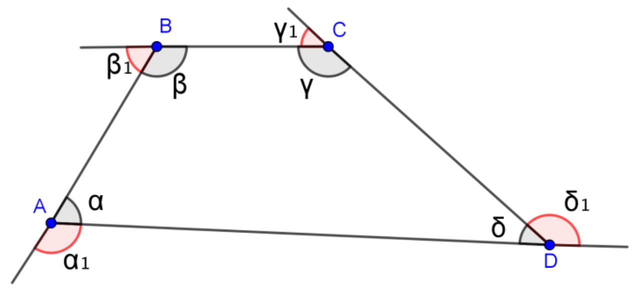
На овај начин је доказана тврдња да је збир углова у четвороуглу 360°.

У аплету креираном за електронску лекцију *Углови четвороугла* коришћењем ГеоГебре приказан је произвољан четвороугао $ABCD$ са истакнутим угловима. Збир углова $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$. У представљеном аплету могуће је померати темена четвороугла при чему се мењају и вредности поменутих углова, али збир остаје константан. На слици 15. приказан је описани аплет.



Слика 15. Аплет у којем је представљен збир углова четвороугла $ABCD$

Углови које образују страница и продужетак њој суседне странице неког конвексног четвороугла називају се спољашњи углови тог четвороугла. На слици 16. је представљен четвороугао $ABCD$ са својим спољашњим угловима $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ и унутрашњим угловима $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.



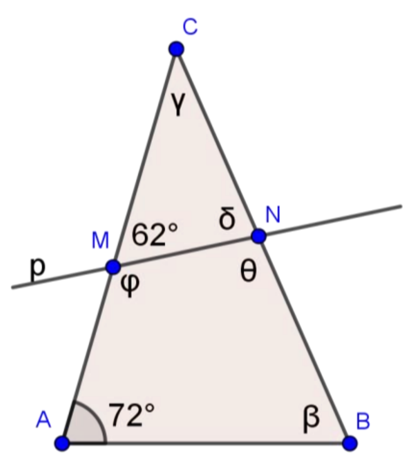
Слика 16. Аплет који показује четвороугао $ABCD$ и његове унутрашње и спољашње углове

Збир спољашњих углова конвексног четвороугла се може израчунати на следећи начин:

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 = (180° - \alpha) + (180° - \beta) + (180° - \gamma) + (180° - \delta)$$

$$= 720° - (\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 720° - 360° = 360°.$$

Задатак 1. *Права p сече краке AC и BC једнакокраког троугла ΔABC. На основу података датих на слици 17. одредити величине свих означених углова.*



Слика 17. Једнакокраки троугао ΔABC и права p

Решење. Пошто је у питању једнакокраки троугао ΔABC, онда је и $\beta = 72°$, а на основу збира унутрашњих углова у троуглу, $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, може се израчунати угао γ на следећи начин:

$72° + 72° + \gamma = 180°$

$144° + \gamma = 180°$

$\gamma = 180° - 144° = 36°.$

На основу слике 17. лако се уочава да угао $\varphi = \measuredangle AMN$, добијен пресеком праве p и дужи AC, износи

$\varphi = 180° - 62° = 118°.$

Даље, угао $\theta = \measuredangle MNB$, добијен пресеком праве p и дужи BC, може да се израчуна уз помоћ збира унутрашњих углова четвороугла $ABNM$ и добије се

$72° + \beta + \theta + \varphi = 360°$

$72° + 72° + \theta + 118° = 360°$

$\theta + 262° = 360° \Rightarrow \theta = 98°$

Када је израчунат и угао θ, δ се лако може израчунати на следећи начин

$\delta = 180° - \theta = 180° - 98° = 82°.$

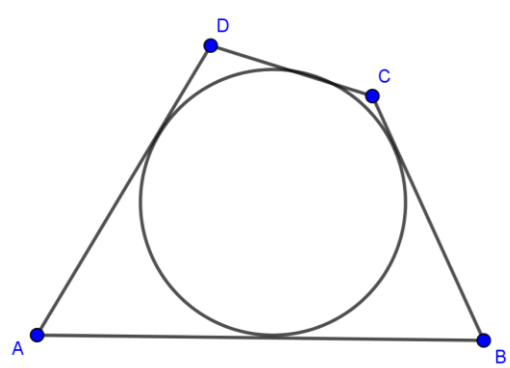
ПОДЕЛА ЧЕТВОРОУГЛОВА

Поред поделе на конвексне и неконвексне, четвороуглове је могуће класификовати и по разним другим критеријумима - према могућности описивања и уписивања кружнице у четвороугао, према броју паралелних страница, према једнакости страница итд.

Слика 18. Изглед електронске лекције подела четвороуглова

Тангентни четвороугао

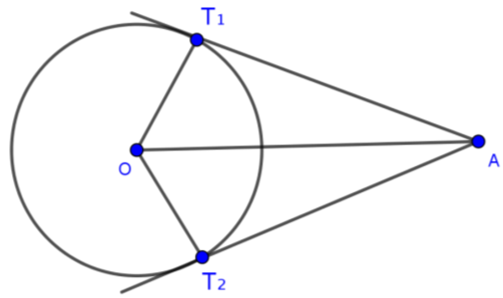
Четвороугао чије су све ивице тангенте једног круга тј. четвороугао у који се може уписати круг, назива се *тангентни четвороугао*.



Слика 19. Тангентни четвороугао $ABCD$

Постоји критеријум за утврђивање да ли је неки четвороугао тангентни. За доказивање тог критеријума користи се теорема о подударности тангентних дужи, тј. одсечака тангенте од тачке из које је она конструисана на дати круг до тачке додира.

Теорема 1. *Тангентне дужи конструисане из тачке ван датог круга су међусобно подударне.*



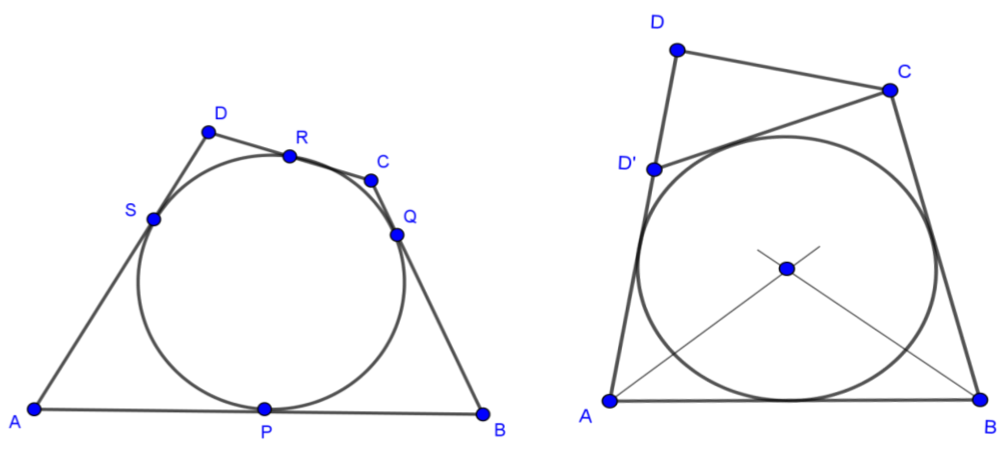
Слика 20. Тангентне дужи

Доказ. Нека су AT_1 и AT_2 тангенте неког круга k, са центром O, у додирним тачкама T_1 и T_2. Тада су правоугли троуглови AT_1O и AT_2O подударни јер им је хипотенуза AO заједничка, а катете OT_1 и OT_1 подударне са полупречником круга. Дакле $AT_1 \cong AT_2$.

Теорема 2. *Конвексан четвороугао $ABCD$ је тангентни ако и само ако је*

$$AB + CD = BC + AD.$$

Доказ. Претпоставка је да је конвексан четвороугао $ABCD$ тангентни. Нека су P, Q, R, S додирне тачке ивица AB, BC, CD, DA са уписаним кругом k.



Слика 21. Четвороугао $ABCD$

Како су, на основу претходне теореме, тангентне дужи подударне, то је: $AP \cong AS, BP \cong BQ, CQ \cong CR$ и $DR \cong DS$. На основу овога, може се написати

$$AP + PB + CR + RD = AS + SD + BQ + QC, \text{ односно}$$

$$AB + CD = AD + BC$$

Сада треба доказати и обратно тврђење. Нека су у четвороуглу $ABCD$ збирови наспрамних ивица једнаки. Постоји круг k који додирује ивице AB, BC и DA тог четвороугла (његов центар је пресек бисектриса унутрашњих углова код темена A и B четвороугла).

Нека је D' пресек друге тангенте из тачке C круга k и праве AD. Претпоставимо да је $D' \neq D$ и $\varepsilon(A,\ D'\ , D)$. Према већ доказаном делу теореме важи $AB + CD = BC + D'A$, па како је по претпоставци $AB + CD = BC + DA$, то је $CD' - CD = D'A - DA$, тј. $CD' = CD + DD'$ а то је немогуће на основу неједнакости троугла. На сличан начин долазимо до контрадикције и у случају када D није између тачака D' и A. Дакле, $D' = D$, тј. круг k додирује и четврту ивицу четвороугла $ABCD$ [3].

Тетивни четвороугао

Четвороугао око кога се може описати круг, тј. чије су све ивице тетиве неког круга назива се *тетивни четвороугао*. Неконвексан четвороугао не може да буде тетиван.

Као што постоји критеријум за утврђивање да ли је четвороугао тангентни, постоји и важна теорема која даје неопходан и довољан услов да четвороугао буде тетивни.

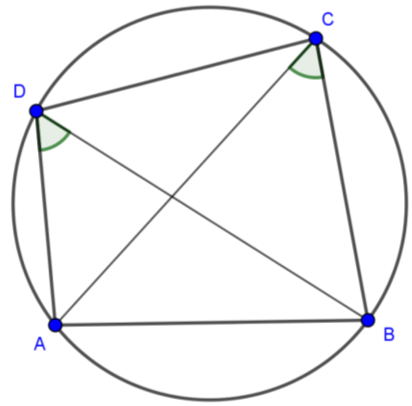
Теорема 3. *Конвексни четвороугао је тетивни ако и само ако су његови наспрамни углови суплементни.*

Доказ. Претпоставимо, да је четвороугао $ABCD$ приказан на слици 22. тетивни. Како је четвороугао конвексан, темена A и C су са разних страна праве одређене дијагоналом BD. Углови $\measuredangle BAD$ и $\measuredangle BCD$ четвороугла су суплементни на основу **последице**.

Последица. *Периферијски углови круга над истом тетивом, чија су темена са различитих страна праве одређене том тетивом, су суплементни.*

Претпоставимо сада да су наспрамни углови четвороугла $ABCD$ суплементни. Нека је k круг описан око троугла ΔABD. Тада се из четвртог темена C тетива BD види под углом који је суплемент углу код темена A, па и тачка C припада кругу.

Често се при доказивању појединих тврђења користи и следећа теорема.



Слика 22. Тетивни четвороугао $ABCD$

Теорема 4. *Ако је $ABCD$ конвексан четвороугао и $\measuredangle ACB \cong \measuredangle ADB$ тада је он тетивни четвороугао.*

Доказ. Ако је ABCD конвексан четвороугао, претпоставимо да A и B леже на кружници, односно да је AB тетива те кружнице, слика 22. Пошто су ∡ACB ≅ ∡ADB, следи да тачке C и D припадају кружници као и A и B. На основу тога се закључује да све четири тачке припадају истој кружници, па је овај четвороугао тетивни.

Више о тетивним четвороугловима може се наћи у књизи [3] пописа литературе.

Према паралелности страница издвајају се посебне врсте четвороуглова – паралелограми и трапези, према једнакости страница делтоиди.

Паралелограм

Дефиниција 3. *Четвороугао чије су сваке две наспрамне странице паралелне назива се паралелограм.*

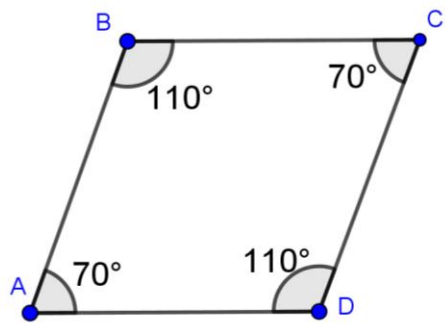
Сваки паралелограм је конвексан.

Директна последица паралелних страница јесте да су наспрамни углови паралелограма једнаки, а суседни суплементни.

Односно, важи:

$$\alpha = \gamma, \beta = \delta, \alpha + \beta = 180°, \beta + \gamma = 180°, \gamma + \delta = 180°, \delta + \alpha = 180°.$$

На слици 23. приказан је паралелограм $ABCD$ са вредностима углова.



Слика 23. Паралелограм $ABCD$

Да претходно својство имају само паралелограми, говори следеће тврђење.

Тврђење 1. *Ако су наспрамни углови неког четвороугла једнаки, онда је тај четвороугао паралелограм.*

Доказ. Нека је $ABCD$ четвороугао у којем је $\sphericalangle DAB = \sphericalangle BCD$ и $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CDA$. Четвороугао $ABCD$ мора бити конвексан да би могао да буде паралелограм. Збир сва четири угла је $360°$, односно $\sphericalangle DAB + \sphericalangle BCD + \sphericalangle ABC + \sphericalangle CDA = 360°$.

Како је $\sphericalangle DAB = \sphericalangle BCD$ и $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CDA$, може да се закључи да је

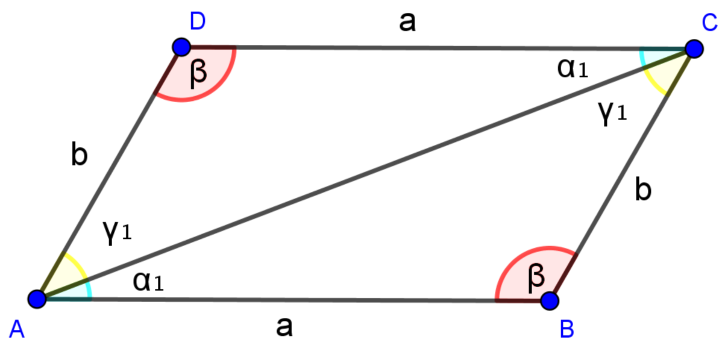
$$\sphericalangle DAB + \sphericalangle ABC = 180°.$$

Лако је уочити да су ово унутрашњи углови које, са исте стране, са правама које су одређене дужима AD и BC гради трансверзала AB. Како су ти углови суплементни, произилази да су и дужи AD и BC паралелне. Исто тако је $\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCD = 180°$, па се одатле на исти начин закључује да су и дужи BA и CD паралелне.

Тврђење 2. *Наспрамне странице паралелограма су једнаке.*

Доказ. Ово тврђење се може доказати на следећи начин. Паралелограм се може дијагоналом поделити на два подударна троугла, као што је приказано на слици 24.

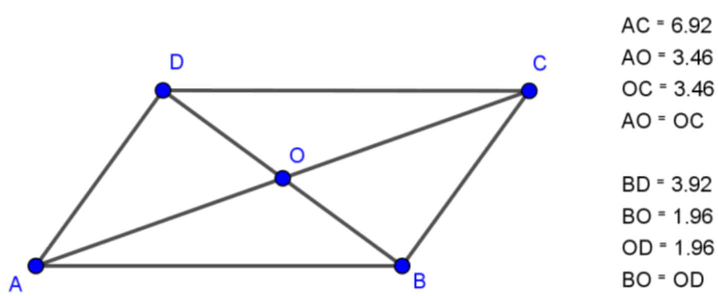
Како је $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (УСУ) тада је $AB = CD$ и $BC = DA$ односно наспрамне странице паралелограма су једнаке.



Слика 24. Наспрамне странице паралелограма су једнаке

Тврђење 3. *Дијагонале паралелограма се полове.*

На слици 25. приказан је аплет у коме су представљене дијагонале паралелограма $ABCD$.



Слика 25. Аплет који показује да се дијагонале паралелограма полове.

Доказ. Нека је тачка O пресек дијагонала паралелограма $ABCD$. На основу става подударности троуглова УСУ, следи да је

$$\Delta AOD \cong \Delta COB$$

$BC = DA$ (наспрамне странице)

$\sphericalangle DAO = \sphericalangle BCO$ (паралелни краци)

$$\sphericalangle ADO = \sphericalangle CBO \text{ (паралелни краци)}$$

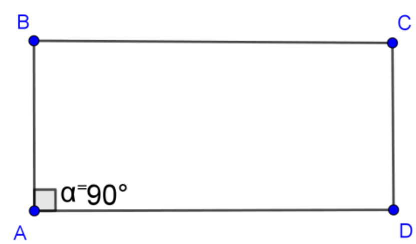
Из претходно наведеног следи да је $AO = OC$ и $DO = OB$, односно тачка пресека дијагонала паралелограма O дели сваку његову дијагоналу на два једнака дела.

У оквиру аплета приказаног на слици 25. исписане су дужине дијагонала, односно њихове половине добијене пресеком дијагонала. Поређењем тих вредности, види се да се дијагонале четвороугла $ABCD$ полове. Померањем неког темена, мењају се и облик и димензије четвороугла, мења се и угао између његових дијагонала, али ће за сваки од њих да важи да се дијагонале полове.

Издвајају се посебне врсте паралелограма, правоугаоници, квадрати и ромбови.

Дефиниција 4. *Паралелограм чији су сви углови прави назива се правоугаоник*.

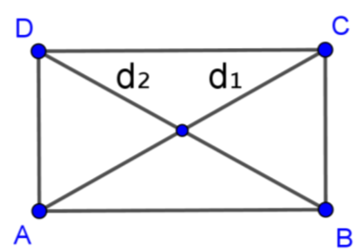
На слици 26. приказан је правоугаоник $ABCD$.



Слика 26. Правоугаоник $ABCD$

Све особине које имају паралелограми имају и правоугаоници. Међутим, правоугаоници имају и неке особине које немају сви паралелограми.

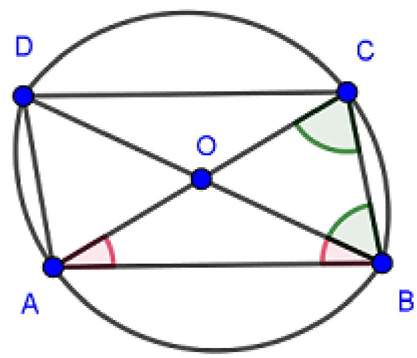
Тврђење 4. *Дијагонале правоугаоника су једнаке.*



Слика 27. Правоугаоник $ABCD$ у којем су приказане дијагонале

Доказ. Ако се на слици 27. на којој је представљен правоугаоник $ABCD$ уоче троуглови ΔABC и ΔBAD, лако се показује да су они међусобно подударни. Углови код темена A и B су прави, страница AB им је заједничка, а странице правоугаоника AD и BC су наспрамне, па самим тим и једнаке. На основу става подударности СУС, ова два троугла ΔABC и ΔBAD су подударна. Како су на основу подударности ових троуглова и њихове странице AC и BD, које су истовремено и дијагонале правоугаоника, подударне, јасно је да су онда дијагонале правоугаоника једнаке.

Тврђење 5. *Око паралелограма се може описати кружница ако и само ако је он правоугаоник.*



Слика 28. Скица паралелограма $ABCD$ око којег је описана кружница

Доказ. Нека је паралелограм $ABCD$ произвољног облика и нека је око њега описана кружница као што је приказано на слици 28. Ако је тачка O центар описане кружнице, темена A, B, C и D су једнако удаљена од тачке O. Посматрајући троугао ΔABO, лако се уочава да је ΔABO једнакокрак јер су му странице OA и OB једнаке, па је $\measuredangle OAB$ = $\measuredangle ABO$. Такође, једнакокраки троуглови су и ΔBCO, ΔCDO и ΔDAO, па се може написати да је $\measuredangle OBC = \measuredangle BCO$, $\measuredangle OCD = \measuredangle CDO$ и $\measuredangle ODA = \measuredangle DAO$.

Даље,

$$\measuredangle ABC = \measuredangle ABO + \measuredangle OBC = \measuredangle OAB + \measuredangle BCO = \measuredangle DAB - \measuredangle DAO + \measuredangle BCD - \measuredangle OCD.$$

Како су наспрамни углови код паралелограма једнаки, може се написати следеће:

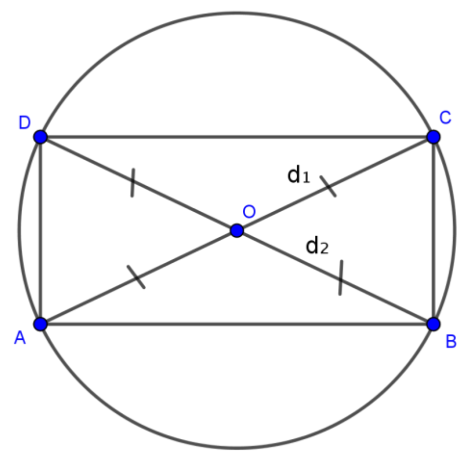
$$\measuredangle ABC = 2\measuredangle DAB - (\measuredangle DAO + \measuredangle OCD) = 2\measuredangle DAB - (\measuredangle ODA + \measuredangle CDO) =$$

$$= 2\measuredangle DAB - \measuredangle CDA.$$

Како је $\measuredangle ABC = \measuredangle CDA$ јер су то наспрамни углови код паралелограма, следи да је и $\measuredangle ABC = \measuredangle DAB = \measuredangle BCD$, односно сва четири угла у овом паралелограму су једнака. Пошто је збир углова у четвороуглу $360°$ следи да су ови углови прави и да паралелограм око кога је описана кружница јесте правоугаоник.

Сада треба доказати и обратно тврђење. Имајући у виду чињеницу да се дијагонале сваког паралелограма, па и правоугаоника полове, као и да су дијагонале правоугаоника једнаке, може се уочити да је тачка у којој се секу дијагонале правоугаоника на једнакој удаљености од његових темена.

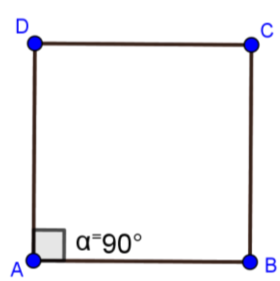
Тачка у којој се секу дијагонале правоугаоника представља центар описане кружнице. Полупречник описане кружнице једнак је половини дијагонале правоугаоника.



Слика 29. Описана кружница око правоугаоника $ABCD$

Дефиниција 5. *Правоугаоник чије су све странице једнаких дужина назива се квадрат.*

На слици 30. приказан је квадрат $ABCD$.

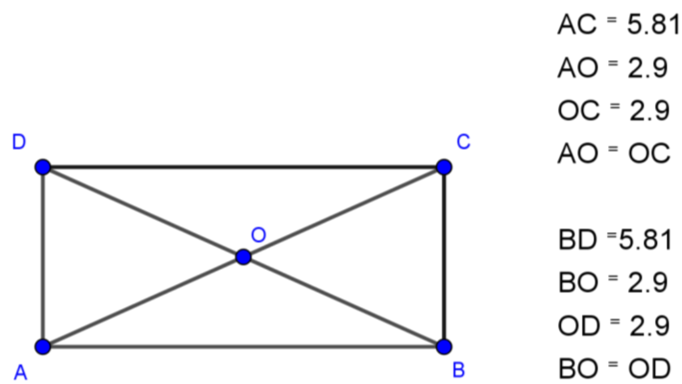


Слика 30. Квадрат

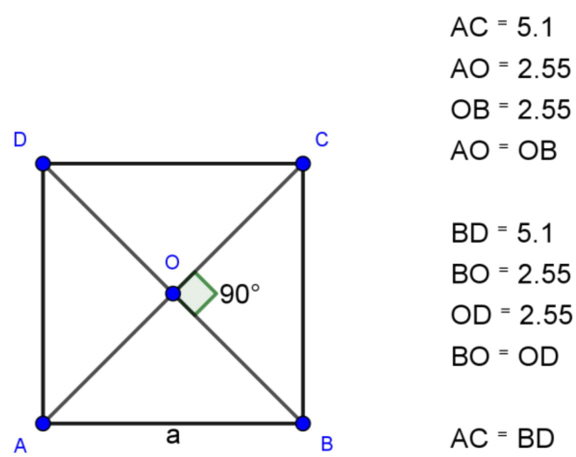
Из претходних дефиниција може се уочити да важи:

паралелограм чије су све странице једнаких дужина и сви углови прави назива се квадрат.

Дијагонале правоугаоника су једнаке, док су дијагонале квадрата и једнаке и секу се под правим углом. У електронској лекцији *врсте четвороуглова* креирани су аплети који илуструју наведена својства. Приказани су на сликама 31. и 32.



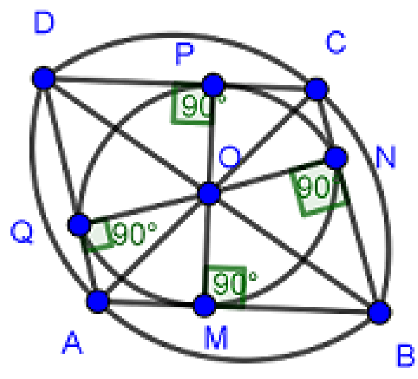
Слика 31. Аплет у којем у приказане дијагонале правоугаоника које се полове



Слика 32. Аплет у којем су приказане нормалне дијагонале квадрата које се полове

На основу дефиниције да су код сва четири темена квадрата прави углови и да су његове странице једнаких дужина, лако се показује да му се дијагонале секу под правим углом. На основу слике 32. види се да дијагонале квадрата деле квадрат на четири подударна једнакокрака троугла. Наиме на основу става подударности ССС троуглови ΔABO, ΔBCO, ΔCDO и ΔDAO су међусобно подударни, где су им основице, односно странице квадрата a, једнаке. Пошто су углови код темена квадрата прави, а ови једнакокраки троуглови међусобно подударни, може се закључити да углови на основици ових једнакокраких троуглова износе 45°, а самим тим угао при врху, односно угао под којим се секу дијагонале квадрата, износи 90°.

Тврђење 6. *Око паралелограма се може описати и у њега уписати кружница ако и само ако је он квадрат.*



Слика 33. Скица паралелограма $ABCD$ око којег је описана и уписана кружница

Доказ. У тврђењу 5. да се око паралелограма може описати кружница ако и само ако је он правоугаоник је доказано да су углови у том паралелограму прави, па је сад још потребно доказати да ако се у тај правоугаоник може и уписати кружница, онда је то квадрат. Посматрајући троуглове ΔNOC и ΔPOC, који су подударни по ставу ССУ ($NO = PO$, $OC = OC$, $\measuredangle ONC = \measuredangle CPO = 90°$), следи да је $NC = PC$. На исти начин се показује да је $PD = QD$, $QA = MA$ и $MB = NB$. Даље,

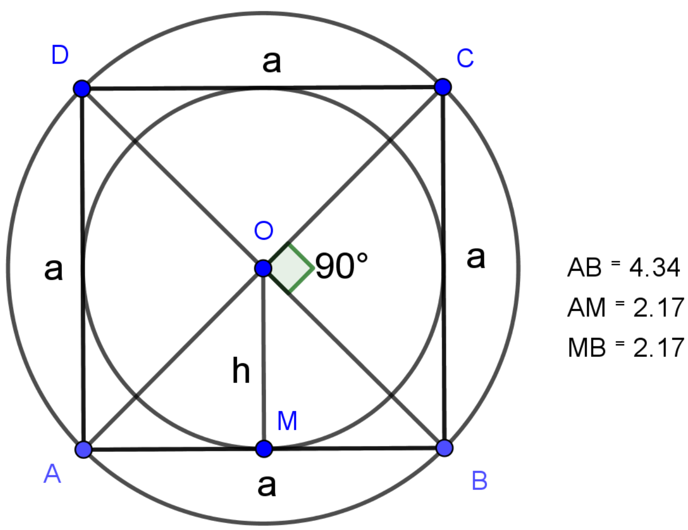
$$BC = BN + NC = MB + CP = AB - AM + CD - PD = 2AB - (AM + PD) =$$

$$= 2AB - (QA + DQ) = 2AB - DA.$$

На основу дефиниције паралелограма да су наспрамне странице једнаке, следи $BC = DA$, па је $2BC = 2AB$, односно $BC = AB$. Паралелограм код којег су све странице једнаке и има праве углове јесте квадрат.

Сада треба доказати и обратно тврђење. На сличан начин као што се доказало код правоугаоника да се око њега може описати кружница, тако се и овде показује да се око квадрата може описати кружница. За дијагонале квадрата важи као и за дијагонале правоугаоника, једнаких су дужина и полове се. Из овога произилази да су темена квадрата на једнакој удаљености од пресечне тачке његових дијагонала, односно од центра описане кружнице.

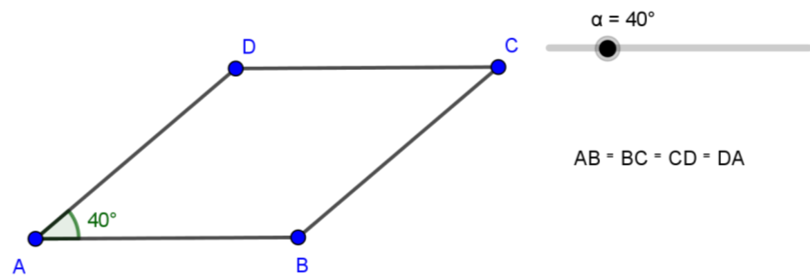
На основу подударности троуглова ΔABO, ΔBCO, ΔCDO и ΔDAO произилази да су им висине из темена O једнаке, односно да су све четири странице квадрата a на једнакој удаљености од пресечне тачке дијагонала. Растојање сваке странице квадрата од пресечне тачке дијагонала O је једнако висини подударних једнакокраких троуглова h, односно $\frac{1}{2}a$. На овај начин се доказало да се у квадрат може и уписати кружница, са центром у тачки O, и полупречником r који износи $r = OM = \frac{1}{2}a$.



Слика 34. Квадрат са описаном и уписаном кружницом

Још једна врста паралелограма је ромб, а дефинише се на следећи начин.

Дефиниција 6. *Паралелограм чије су странице једнаких дужина назива се ромб.*

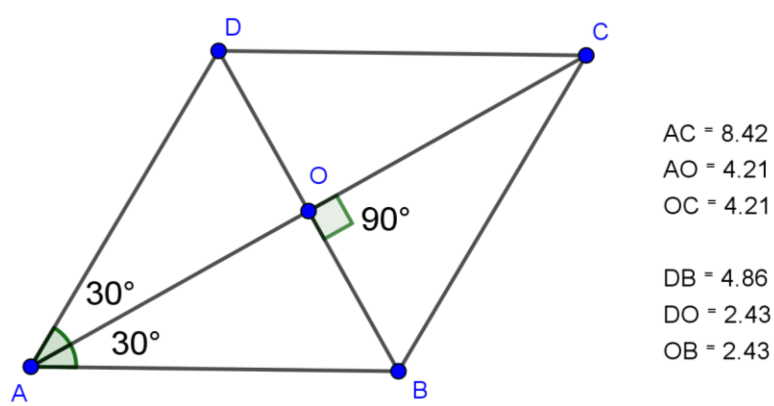


Слика 35. Аплет у којем је представљен ромб $ABCD$

На слици 35. приказан је аплет у којем је представљен ромб $ABCD$. У примеру са слике ромб код темена А има угао од 40°. Уколико се клизач угла, постави на другу вредност добиће се ромб са страницама истих дужина, али различитих углова.

Ромб поред свих особина паралелограма карактерише се и неким особинама које немају сви паралелограми.

Тврђење 7. *Дијагонале ромба полове његове углове и секу се под правим углом.*



Слика 36. Дијагонале ромба се полове и секу под правим углом

Доказ. Нека је O пресек дијагонала ромба $ABCD$. Троуглови ΔABO и ΔCBO су подударни, на основу става подударности ССС. Наиме, страница BO им је заједничка, а на основу дефиниције паралелограма да су све странице ромба једнаке важи и да је $AB = BC$. Такође, на основу својства да се дијагонале сваког паралелограма полове, закључује се да су и странице $AO = OC$.

Из доказане подударности следи да су углови $\measuredangle ABD$ и $\measuredangle CBD$ једнаки. Слично се доказује да дијагонале ромба деле и остале његове углове.

Сада, да би се доказало да су дијагонале ромба међусобно нормалне, посматраће се углови α и β, односно углови код суседних темена A и B ромба $ABCD$. Пошто су то суседна темена, на основу претходног тврђења да су код паралелограма два суседна угла суплементна, произилази да је $\alpha + \beta = 180°$. Имајући у виду претходно доказану особину ромба да дијагонале ромба полове његове углове, може се написати да је

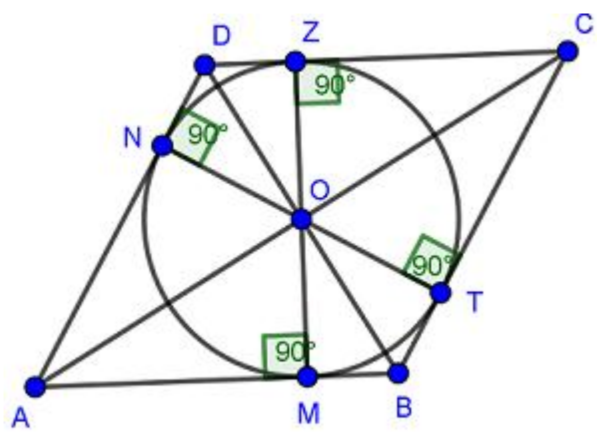
$$\measuredangle AOB = 180° - \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \ 180° - 90° = 90°$$

Дакле, дијагонале ромба секу се под правим углом.

На основу претходног својства ромба може да се наведе још једно тврђење.

Тврђење 8. *У паралелограм се може уписати кружница ако и само ако је он ромб.*

Доказ. Ако је тачка O центар уписане кружнице у паралелограм $ABCD$, тачке M, T, Z и N су једнако удаљене од тачке O.



Слика 37. Скица паралелограма $ABCD$ и уписана кружница

Посматрајући троуглове ΔAMO и ΔANO, на основу става подударности ССУ ($MO = NO,\ \ AO = AO,\ \ \measuredangle AMO = \measuredangle ANO = 90°$) показује се да су они подударни, па следи да су странице AN и AM једнаке дужине. Лако се показује да је и $BM = BT$, $CT = CZ$ и $DZ = DN$. Даље,

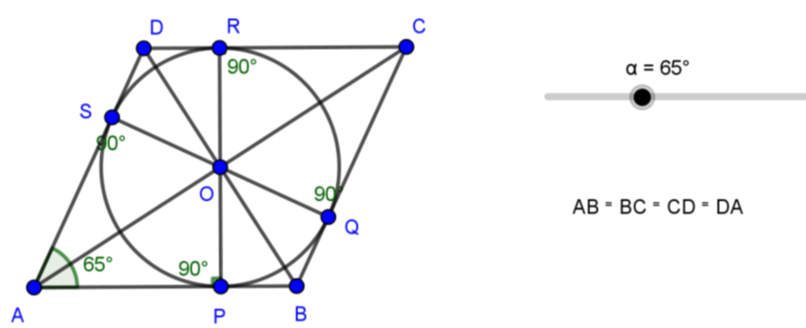
$AB = AM + MB = AN + BT = AD - DN + BC - CT = AD + BC - ZD - ZC.$

На основу дефиниције паралелограма да су наспрамне странице једнаке, следи

$AB = 2AD - (ZD + ZC) = 2AD - AB.$

Како је $2AB = 2AD$, односно $AB = AD$, може се закључити да су све странице овог паралелограма исте дужине. Паралелограм код којег су све странице једнаких дужина јесте ромб.

Сада треба доказати и обратно тврђење. На сличан начин како се доказала подударност троуглова ΔABO и ΔCBO (тврђење 7.), показује се да су сва четири троугла ΔABO, ΔCDO, ΔCBO и ΔADO међусобно подударна и да су им висине из темена O једнаке, односно све четири странице ромба су једнако удаљене од тачке O, која зато представља и центар уписане кружнице у ромб.



Слика 38. Аплет који показује ромб $ABCD$ са уписаном кружницом

У аплету на слици 38. приказан је ромб $ABCD$ са уписаном кружницом. У примеру са слике ромб код темена A има угао од $65°$. Уколико се клизач угла, постави на другу вредност добиће се ромб са страницама истих дужина и одговарајућом уписаном кружницом, али различитих углова. Када се клизач подеси да угао буде $90°$, добија се специјалан случај ромба, а то је квадрат.

Тврђење 9. *Ако су наспрамне странице неког четвороугла једнаке, онда је тај четвороугао паралелограм.*

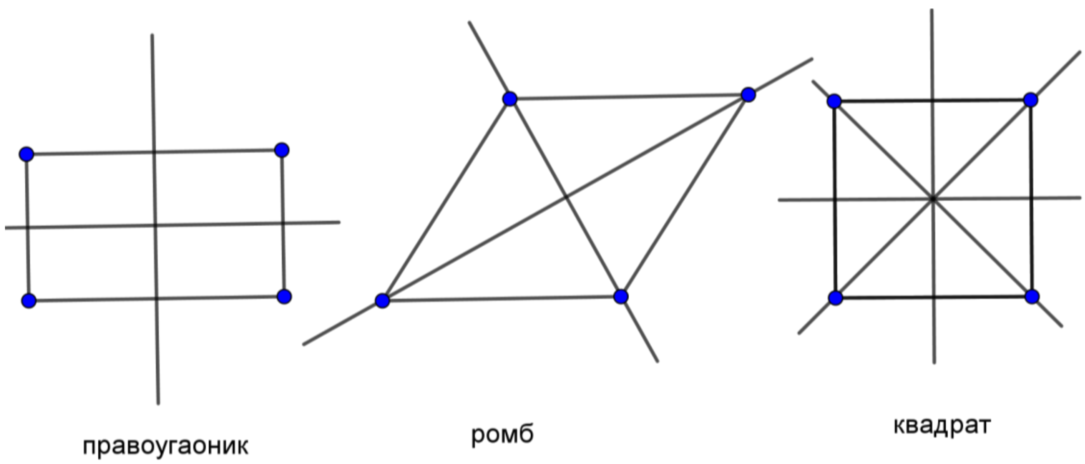
Доказ. Нека је $ABCD$ четвороугао такав да је $AB = CD$ и $BC = DA$. Довољно је да се докаже да су наспрамни углови четвороугла $ABCD$ једнаки. Из датих једнакости и чињенице да је AC заједничка страница троуглова ΔABC и ΔACD, према ставу ССС следи да су та два троугла међусобно подударна. Из подударности ових троуглова произилазе следеће једнакости међу угловима:

$\sphericalangle ABC = \sphericalangle CDA$ (ови углови су наспрамни углови четвороугла), као и једнакости $\sphericalangle ACB = \sphericalangle CAD$ и $\sphericalangle CAB = \sphericalangle DCA$ из којих следи да су углови датог четвороугла у теменима A и C једнаки. Дакле, дати четвороугао је паралелограм.

Поред наведених особина паралелограма, веома је важно продискутовати и симетричност паралелограма.

Паралелограм у општем случају није осносиметрична фигура. Међутим, специјални случајеви паралелограма који су претходно представљени имају чак више од једне осе симетрије.

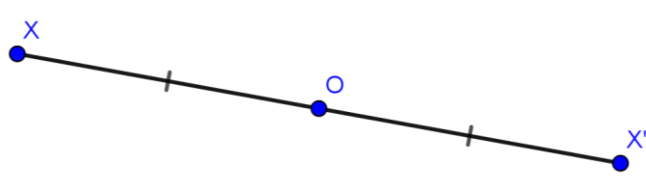
Правоугаоник који није квадрат има две осе симетрије. Ромб који није квадрат такође има две осе, а квадрат има четири осе симетрије.



Слика 39. Осносиметрични паралелограми

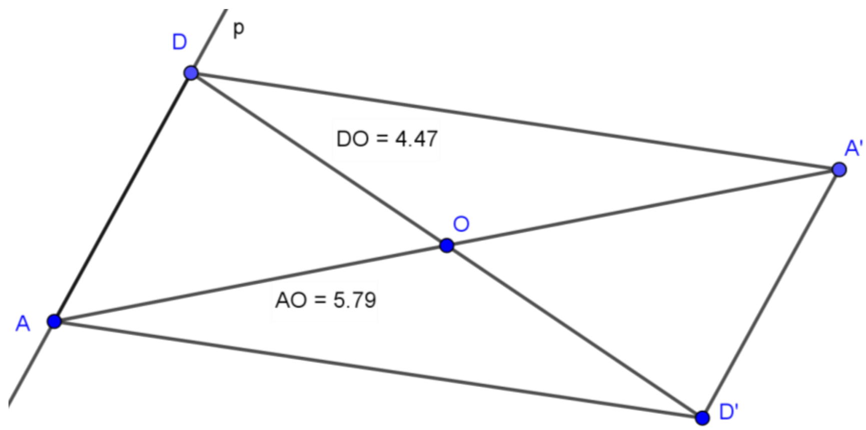
Међутим, сви паралелограми поседују једну другу врсту симетрије. Наиме, сви паралелограми су симетрични у односу на једну тачку. Симетричност у односу на једну тачку назива се централна симетричност.

Дефиниција 7. *Тачка X' је централносиметрична тачки X у односу на тачку O уколико је O средиште дужи XX'.*



Слика 40. Централна симетрија тачке X у односу на тачку O.

На основу дефиниције може се рећи да централна симетрија у односу на тачку O свакој тачки X посматране равни придружује тачку X', тако да је тачка O средиште дужи XX'. Централна симетрија је ротација за $180°$ око центра симетрије. Да је фигура централно симетрична, значи и да ако је заротирамо за $180°$ око центра симетрије, она ће се пресликати у себе. Више о централној симетрији може се прочитати у књигама [1] и [3] пописа литературе.



Слика 41. Аплет у којем је централном симетријом конструисан паралелограм

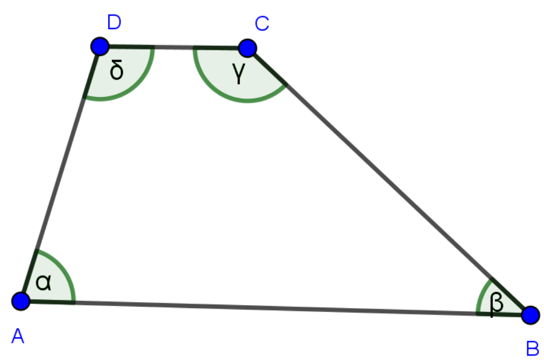
У аплету на слици 41. који описује централну симетрију паралелограма, нацртана је на почетку само једна страница неког произвољног конвексног четвороугла $ABCD$ са своја два темена A и D. Затим се изабере нека тачка O изван праве p коју одређује дуж AD. Нека тачка O буде тачка у односу на коју ће се централном симетријом дуж AD пресликати у $A'D'$. Ако се потом дуж AD' преслика у односу на исту тачку O централном симетријом, добиће се страница $A'D$. Добијени четвороугао одређен тачкама $AD'A'D$ је паралелограм, где тачка O представља пресек дијагонала овог четвороугла. У овом аплету померањем темена дужи AD или померањем комплетне дужи AD у различите положаје у односу на тачку O, мења се и облик и димензија паралелограма. Могуће је, наравно, и померањем само тачке O добијати различите облике четвороуглова, али оно што важи за сваки од њих је да јесте паралелограм. У специјалном случају, уколико се тачка O постави на једнаку удаљеност од тачака A и D, добијени паралелограм је правоугаоник. Могуће је одговарајућим позицијама тачке O у односу на почетну страницу AD добити и квадрат и ромб различитих димензија.

Претходно је било речи о четвороугловима са два пара паралелних страница. Постоје четвороуглови који имају тачно један пар паралелних страница.

Трапез

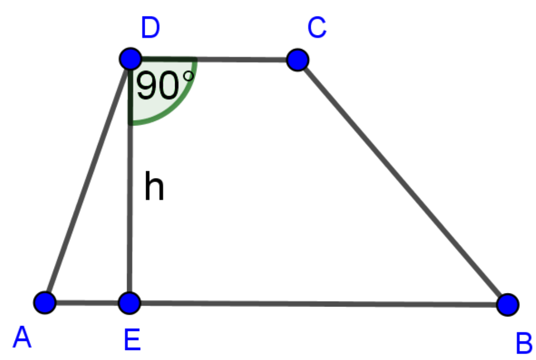
Дефиниција 8. *Четвороугао који има тачно један пар паралелних страница назива се трапез.*

Паралелне странице трапеза називају се основицама, а странице које нису паралелне зову се краци трапеза. Углови налегли на крак трапеза су суплементни. Ово следи из следећег разматрања. Углови α и δ, као и β и γ трапеза $ABCD$ приказаног на слици 42. су углови са паралелним крацима, од којих је један оштар, а други туп (могу бити оба права), те је $\alpha + \delta = 180°$ и $\beta + \gamma = 180°$.



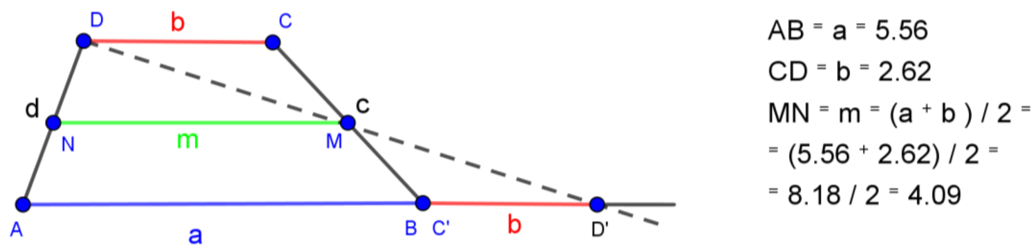
Слика 42. Трапез

Висина трапеза је дуж чији крајеви припадају правама које садрже основице трапеза и која је нормална у односу на ове праве. На слици 43. приказан је произвољан трапез $ABCD$ и његова висина h.



Слика 43. Трапез $ABCD$ и његова висина h

Средња линија трапеза је дуж чији су крајеви средишта његових кракова.



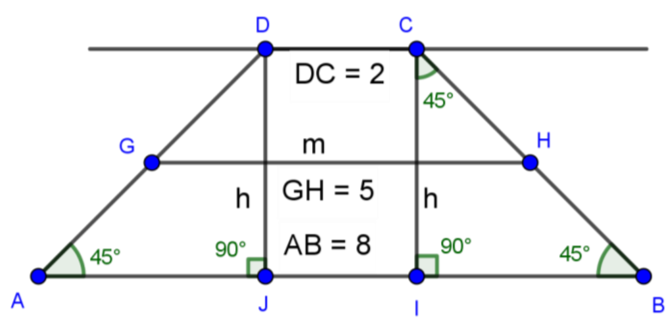
Слика 44. Средња линија трапеза m

Теорема 5. *Средња линија трапеза ($MN = m$) једнака је половини збира основица a и b, и паралелна је основицама.*

Доказ. Ово се једноставно доказује уз помоћ слике 44. Нека је тачка M центар симетрије. Централном симетријом основице $DC = b$, тачка D се пресликава у D' и тачка C се пресликава у $B(C')$, па је $DC = C'D' = b$. Дуж $MN = m$ је средња линија троугла $AD'D$, па је $m = \frac{a+b}{2}$ и $m \parallel AD'$, тј. $m \parallel a$. Такође, $m \parallel b$.

Задатак 2. Дужина основице AB једнакокраког трапеза $ABCD$ је $8cm$, а дужина његове висине је $3cm$. Ако су углови на већој основици једнаки $45°$, одреди дужину мање основице и средње линије овог трапеза.

Решење.



Слика 45. Једнакокраки трапез $ABCD$

Из текста задатка се зна да је $AB = 8cm$, $h = 3cm$ и да су углови на већој основици једнаки $45°$. Такође се зна да висина са основицама заклапа прав угао.

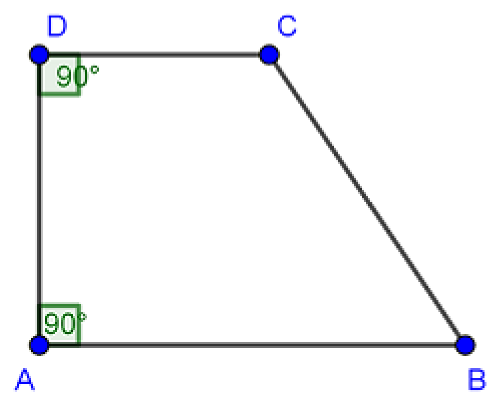
Када се то све преточи у слику види се да је ΔIBC једнакокрак па из тога следи да је $IC = IB = 3cm$. Исти поступак за ΔAJD, из чега следи да је $AJ = JD = 3cm$. Пошто се из задатка зна да је основица $AB = 8cm$ и са слике се може приметити да је $AB = AJ + JI + IB = 8cm$, лако се израчуна да је $JI = AB - (AJ + IB) = 8cm - 6cm = 2cm$, а $JI = CD$, па је и $CD = 2cm$. Средња линија трапеза се рачуна као полузбир двеју основица, па ће у овом задатку износити

$$GH = \frac{(AB+CD)}{2} = \frac{(8+2)}{2} = \frac{10}{2} = 5cm.$$

Постоје две посебне врсте трапеза. То су правоугли и једнакокраки трапез, дефинишу се на следећи начин.

Дефиниција 9. *Трапез чији су унутрашњи углови код темена једног крака прави назива се правоугли трапез.*

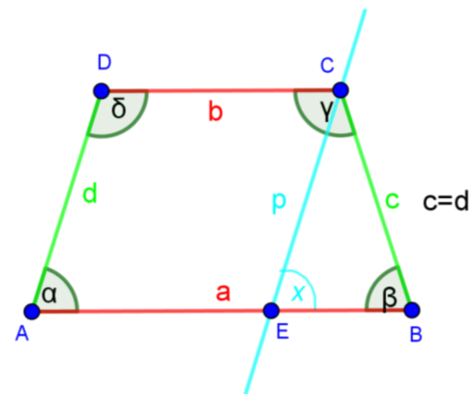
На слици 46. приказан је правоугли трапез $ABCD$ код којег су прави углови налегли на крак AD.



Слика 46. Правоугли трапез $ABCD$

Дефиниција 10. *Трапез чији су краци једнаких дужина назива се једнакокраки трапез.*

На слици 47. приказан је једнакокраки трапез, краци AD и BC су једнаки.



Слика 47. Једнакокраки трапез $ABCD$

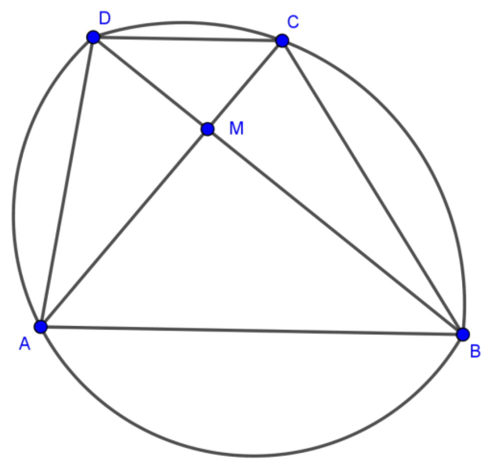
Једнакокраки трапез има следеће особине:

1) углови на основици су једнаки $\alpha = \beta$ и $\gamma = \delta$;
2) дијагонале једнакокраког трапеза су једнаке;

Ако је $AC = d_1$ и $BD = d_2$, лако се показује да је $d_1 = d_2$. Права p садржи теме C и паралелна је са краком d. Права p дели трапез на паралелограм и троугао. Троугао ΔEBC је једнакокраки јер је $p = d = c$, односно странице p и c троугла ΔEBC су једнаке и представљају краке тог једнакокраког троугла, који има једнаке углове на основици EB ($x = \beta$). Како је $\alpha = x$, јер су то углови са паралелним крацима, следи и да је $\alpha = \beta$, односно углови на основици a једнакокраког трапеза јесу једнаки. Како важи да је $\alpha + \delta = 180°$, $\beta + \gamma = 180°$ и $\alpha = \beta$, следи да је $\gamma = \delta$. Још један доказ ове особине може се погледати у књизи [4] пописа литературе.

Из подударности троуглова ΔABC и ΔABD (по ставу СУС), следи да су странице $AC = d_1$ и $BD = d_2$ једнаке, односно дијагонале једнакокраког трапеза d_1 и d_2 су једнаке.

3) Око трапеза се може описати кружница ако и само ако је он једнакокраки.

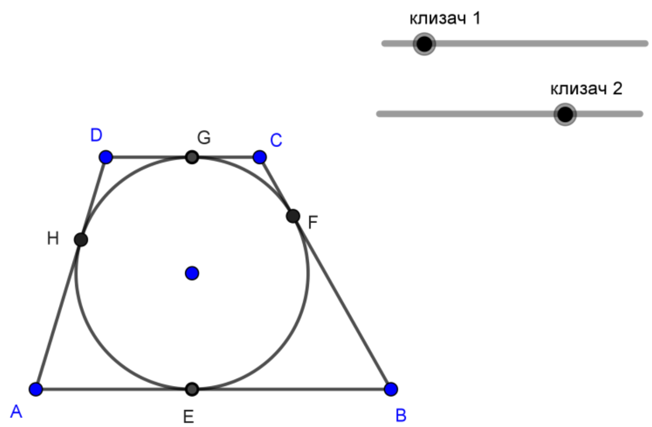


Слика 48. Скица трапеза $ABCD$ око којег је описана кружница

Нека је трапез $ABCD$ произвољног облика и нека је око њега описана кружница као што је приказано на слици 48. Основице AB и CD трапеза $ABCD$ су паралелне и дуж AD представља трансверзалу, па се може закључити да је $\measuredangle DAB + \measuredangle CDA = 180°$. Пошто је круг описан око трапеза $ABCD$, на основу теореме конвексни четвороугао је тетивни ако и само ако су његови наспрамни углови суплементни, следи и да су $\measuredangle DAB + \measuredangle BCD = 180°$. Лако се долази до закључка да је $\measuredangle CDA = \measuredangle BCD$, из чега следи да је трапез једнакокраки, па су и дужи AD и BC једнаке.

Сада треба доказати и обратно тврђење да око једнакокраког трапеза може да се опише кружница. Код једнакокраког трапеза углови на основици AB су међусобно једнаки, као и углови на основици CD. На основу овога може да се напише да је збир наспрамних углова $\measuredangle ABC + \measuredangle CDA = \measuredangle BCD + \measuredangle DAB = 180°$. На основу теореме конвексни четвороугао је тетивни ако и само ако су његови наспрамни углови суплементни, долази се до закључка да око једнакокраког трапеза може да се опише кружница.

Уколико трапез задовољава следећу једнакост $AB + CD = BC + AD$, у њега је могуће уписати кружницу. На слици 49. приказан је аплет у којем се може видети трапез и кружница уписана у њега. Померањем клизача 1 и 2 могу се видети различити облици тангентног трапеза.

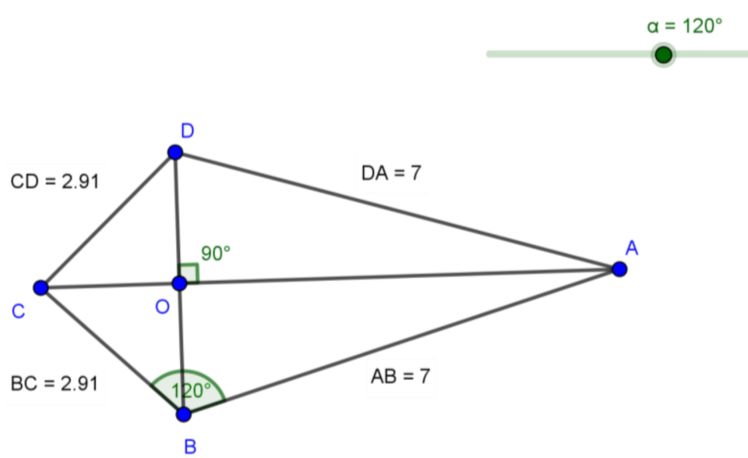


Слика 49. Аплет у којем је приказан тангентни трапез

Поред четвороуглова са једним или два пара паралелних страница, издваја се још један четвороугао који уопште нема паралелне странице али има специфичне особине.

Делтоид

Делтоид је конвексан четвороугао који има два пара једнаких суседних страница.

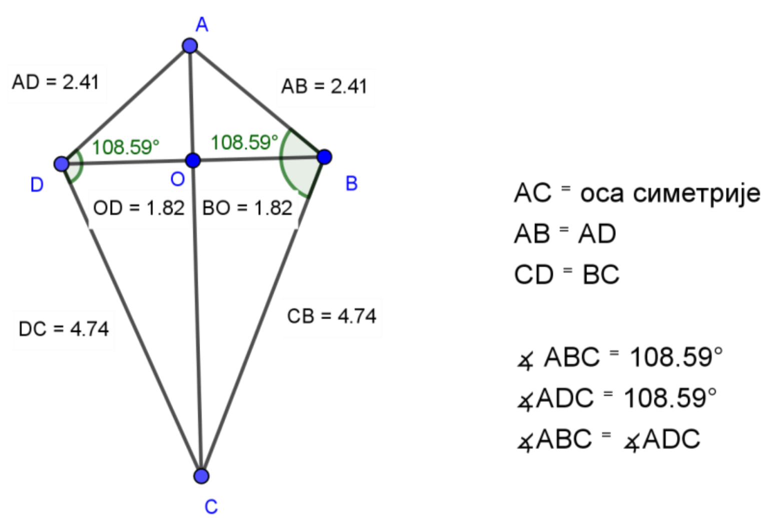


Слика 50. Аплет у којем је приказан делтоид $ABCD$

Ако се посматра делтоид $ABCD$ представљен на слици 50., може да се закључи, на основу дефиниције делтоида, да је теме A једнако удаљено од темена B и D. Исто тако, и за теме C може да се каже, такође због дефиниције делтоида, да је и оно једнако удаљено како од темена B, тако и од темена D овог делтоида. Из овога произилази да тачке A и C припадају симетрали дужи BD, која је једна од две дијагонала делтоида. Друга дијагонала делтоида јесте дуж AC. Ова чињеница има бројне последице.

Тврђење 10. *Делтоид је осносиметричан четвороугао и једна дијагонала је његова оса симетрије.*

Доказ. Потребно је уочити на слици 51. да су троуглови ΔABC и ΔADC међусобно подударни, на основу става подударности ССС. Страница AC им је заједничка, а по дефиницији делтоида $AB = AD$ и $BC = DC$. Као последица те подударности лако се доказује да су и троуглови ΔCOD и ΔCOB подударни на основу става СУС ($BC = DC$, $\measuredangle BCO \cong \measuredangle DCO$ на основу подударности троуглова ΔABC и ΔADC и CO заједничка страница).

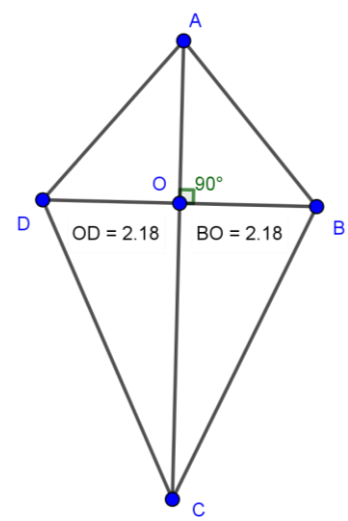


Слика 51. Аплет у којем су представљене дијагонале делтоида

Из ове подударности даље следи да је $OD = OB$ и $\measuredangle COB \cong \measuredangle DOC$. Посматрајући троуглове ΔADO и ΔABO, види се са слике 46. да су и они подударни на основу става ССС (страница AO им је заједничка, а по дефиницији делтоида $AB = AD$ и из подударности троуглова ΔCOD и ΔCOB се зна да су и $OD = OB$). Из чега даље следи да су $\measuredangle AOB \cong \measuredangle AOD$. Пошто се дужи AC и BD секу у тачки O, $\measuredangle DOC$ и $\measuredangle AOB$ су једнаки, као и $\measuredangle COB$ и $\measuredangle AOD$, јер су то унакрсни углови а они су једнаки. На основу подударности датих углова и користећи дефиницију унакрсних углова, закључује се да су сва четири угла $\measuredangle DOC$, $\measuredangle COB$, $\measuredangle AOB$ и $\measuredangle AOD$ једнака, и да важи $\measuredangle COB + \measuredangle DOC + \measuredangle AOB + \measuredangle AOD = 360°$, односно сваки од та четири угла је прав. Из овога може да се закључи да се дијагонале делтоида секу под правим углом и да је дијагонала AC симетрала дијагонале BD, чиме је доказ завршен.

Тврђење 11. *Дијагонале делтоида су међусобно нормалне и једна од њих полови другу.*

Доказ. На слици 52. је приказан делтоид $ABCD$ и његове дијагонале где се види да су нормалне и да једна дијагонала полови другу.



Слика 52. Делтоид $ABCD$

Пошто је показано да је за делтоид $ABCD$ дијагонала AC садржана у симетрали дужи BD, произилази да су дијагонале AC и BD узајамно нормалне и при томе дијагонала AC полови дијагоналу BD.

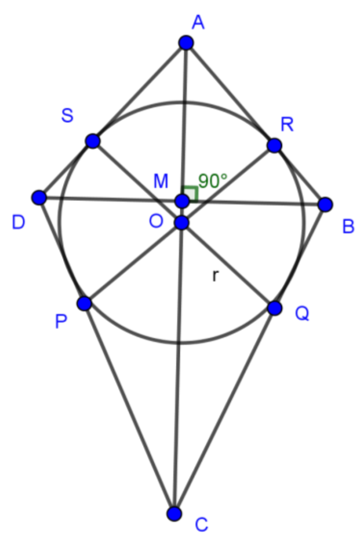
Тврђење 12. *Дијагонала која је оса симетрије, уједно је и симетрала углова у теменима која је одређују.*

Доказ. Из подударности троуглова ΔAOB и ΔAOD (доказаној у претходном тврђењу) следи да је $\measuredangle DAO = \measuredangle BAO$, а из подударности троуглова ΔBOC и ΔDOC следи да су углови $\measuredangle OCD$ и $\measuredangle OCB$ једнаки из чега се јасно закључује да је дијагонала AC уједно и симетрала углова у теменима A и C.

Тврђење 13. *Наспрамни углови делтоида које граде парови различитих суседних страница су једнаки.*

Доказ. Из подударности троуглова ΔDOC и ΔBOC, следи да су $\measuredangle ODC$ и $\measuredangle OBC$ подударни, па из подударности троуглова ΔAOB и ΔAOD, следи да су и углови $\measuredangle ADO = \measuredangle ABO$, па је онда и збир тих углова једнак ($\measuredangle ODC + \measuredangle ADO = \measuredangle OBC + \measuredangle ABO$), што је и требало показати.

Тврђење 14. *У делтоид се може уписати кружница.*

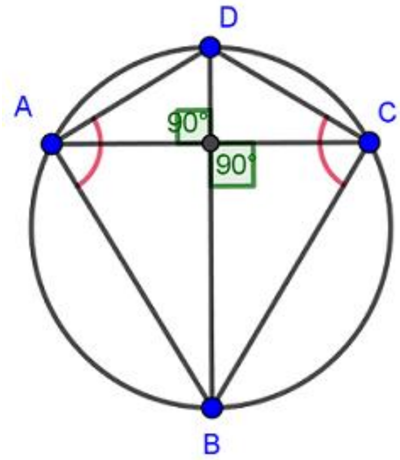


Слика 53. Делтоид $ABCD$ и уписана кружница

Доказ. Користећи теорему раније доказану да тангентне дужи конструисане из тачке ван датог круга су међусобно подударне следи да је $AS = AR$ и $AD = AB$ следи $SD = RB$, $CP = QC$ и $CD = BC$ следи $PD = BQ$. На основу теореме да је четвороугао $ABCD$ тангентни ако и само ако је $AB + CD = BC + AD$ следи да је $AR + RB + CP + PD = BQ + QC + AS + SD$. У овај четвороугао се може уписати кружница јер је доказано да је делтоид тангентни четвороугао.

Тврђење 15. *Око делтоида се може описати кружница ако и само ако су му наспрамни углови које граде парови различитих суседних страница прави.*

Доказ. На слици 54. приказана је скица делтоида $ABCD$ и кружнице описане око њега. На основу теореме да су наспрамни углови делтоида које граде парови различитих суседних страница једнаки, следи да је $\measuredangle DAB = \measuredangle DCB$.

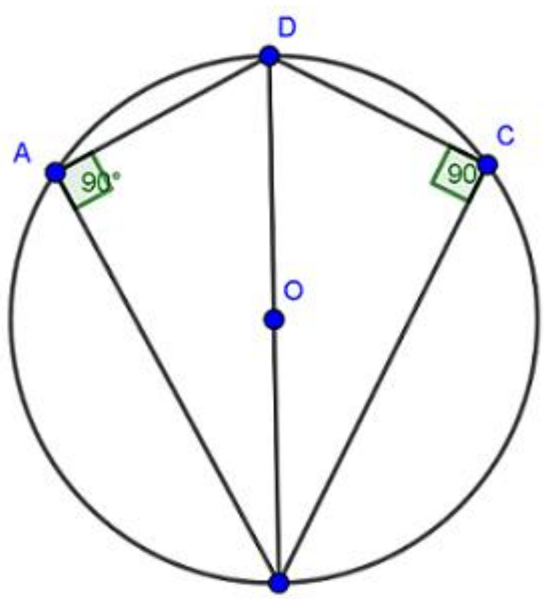


Слика 54. Скица делтоида $ABCD$ око којег је описана кружница

Пошто се углови $\measuredangle DAB$ и $\measuredangle DCB$ налазе са различитих страна дијагонале BD за њих важи и да су суплементни јер су то периферијски углови круга над истом тетивом BD, али са различитих страна праве одређене том тетивом.

$$\measuredangle DAB + \measuredangle DCB = 180° \Rightarrow \measuredangle DAB = 90° \land \measuredangle DCB = 90°$$

У овом случају тетива BD је уједно и пречник описане кружнице, а тачка која се налази на средини дијагонале BD је центар описане кружнице.



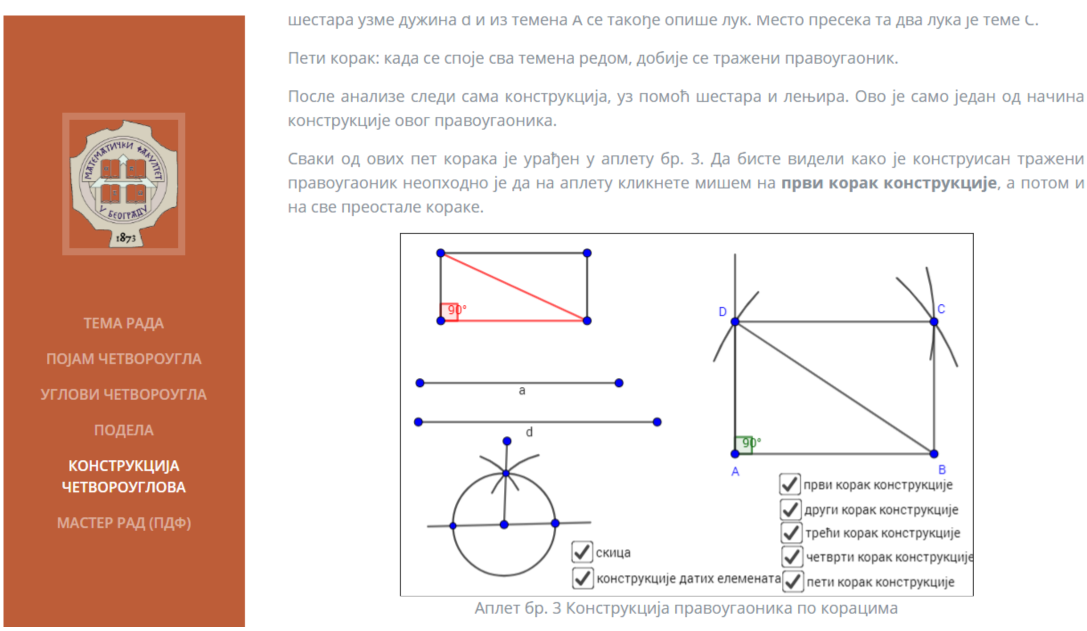
Слика 55. Делтоид $ABCD$ и описана кружница

Сада треба доказати и обратно тврђење. Ако се посматра делтоид $ABCD$ са слике 55., код којег важи да је $\measuredangle DAB = \measuredangle DCB = 90°$, лако се дође до закључка да је $\measuredangle ADC + \measuredangle ABC = 180°$ јер је збир његових унутрашњих углова $360°$. На основу теореме да је конвексан четвороугао тетиван ако и само ако су му наспрамни углови суплементни, следи да се око оваквог делтоида може описати кружница.

КОНСТРУКЦИЈА ЧЕТВОРОУГЛОВА

Конструкцијски задаци се решавају у неколико фаза:

1) скица - представља скицирање готовог четвороугла и обележавање познатих елемената на њему, а све у циљу лакшег проналаска идеје за конструкцију;
2) конструкција датих елемената;
3) анализа - разматрање могућности да се дође до решења. У овој етапи се претпоставља да је задатак решен. Затим се разматрају односи између датих и тражених елемената и долази се до услова које фигура задовољава, а помоћу којих се може лакше конструисати тражена фигура;
4) конструкција - полазећи од задатих елемената применом коначног броја основних и елементарних конструкција, долази се до тражене фигуре, тако да задовољава услове. При томе је обавезно да се сваки од корака опише речима.



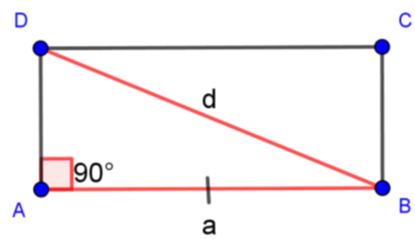
Слика 56. Изглед електронске лекције конструкција четвороуглова

Неколико наредних задатака требало би да помогну да се лакше схвате наведене фазе. Више задатака из ове области може се пронаћи у књизи [2] пописа литературе.

Задатак 3. Конструисати правоугаоник ако је $a = 5cm$ и $d = 6cm$.

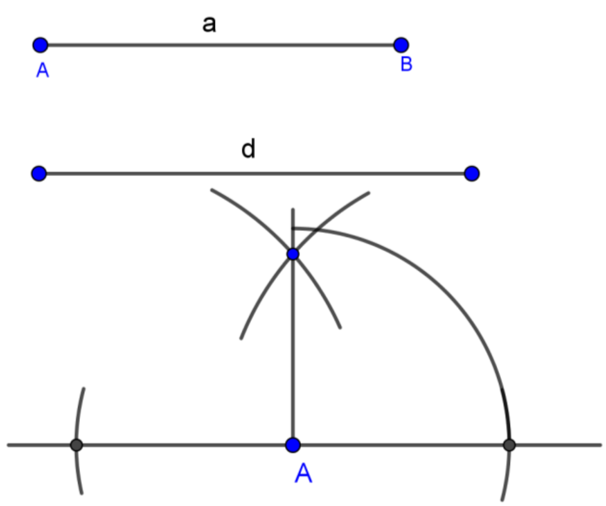
Решење.

Најпре се скицира задатак како би се лакше могло видети шта је дато и на који начин да се конструише.



Слика 57. Скица правоугаоника

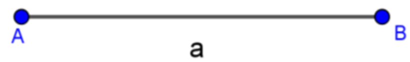
Затим се конструишу дати елементи, у овом случају две дужи $a = 5cm$, $d = 6cm$ и прав угао. Прав угао се конструише тако што се на произвољној прави означи тачка(у овом случају је то теме A). Опише се кружница са произвољним полупречником. У тачке пресека кружнице и праве се постави шестар и опишу се лукови, једнаких полупречника. Пресечна тачка лукова када се споји са теменом A, добија се тражени угао.



Слика 58. Конструкција датих елемената

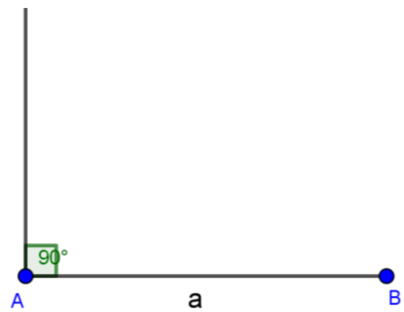
Потом следи анализа конструкције која подразумева да се по корацима образложи конструкција која следи.

Први корак: конструисати дуж $AB = a = 5cm$.



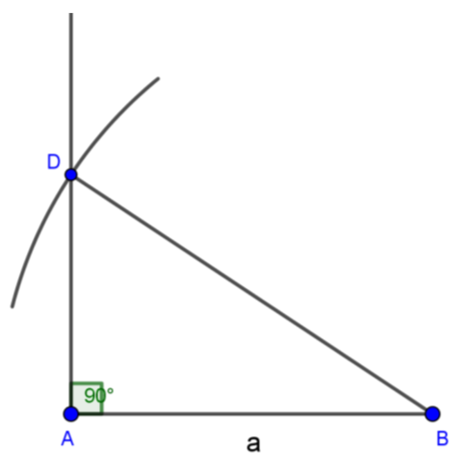
Слика 59. Први корак конструкције

Други корак: пренети прав угао код темена A.



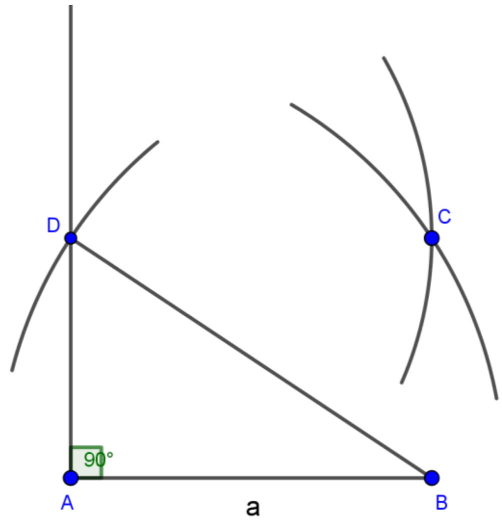
Слика 60. Други корак конструкције

Трећи корак: у отвор шестара узети дужину d и из темена B описати лук, који се сече са полуправом из темена A и на тај начин је одређено теме D.



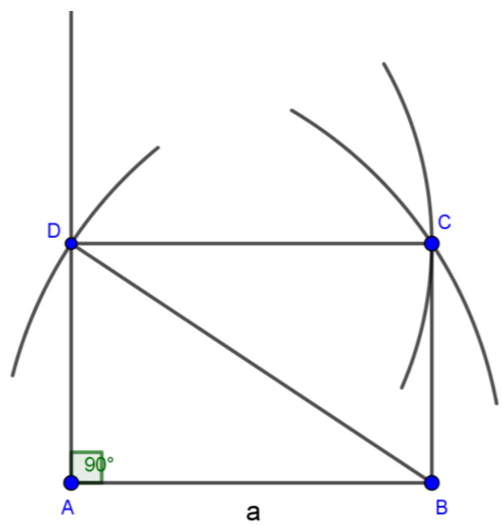
Слика 61. Трећи корак конструкције

Четврти корак: у отвор шестара се узме дужина a и из темена D се опише лук. Затим се у отвор шестара узме дужина d и из темена A се такође опише лук. Место пресека та два лука је теме C.



Слика 62. Четврти корак конструкције

Пети корак: када се споје сва темена редом, добије се тражени правоугаоник.



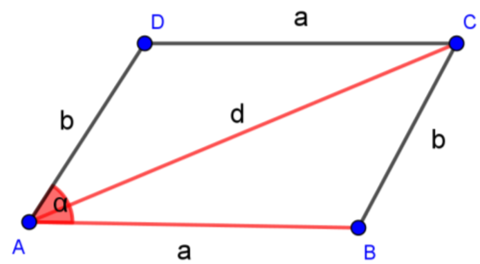
Слика 63. Пети корак конструкције

После анализе следи сама конструкција, уз помоћ шестара и лењира. Ово је само један од начина конструкције овог задатка.

За конструисање углова, нормала, симетрала постоје већ готови алати у ГеоГебри које ћемо надаље користити и који умногоме олакшавају и убрзавају сам процес конструкције.

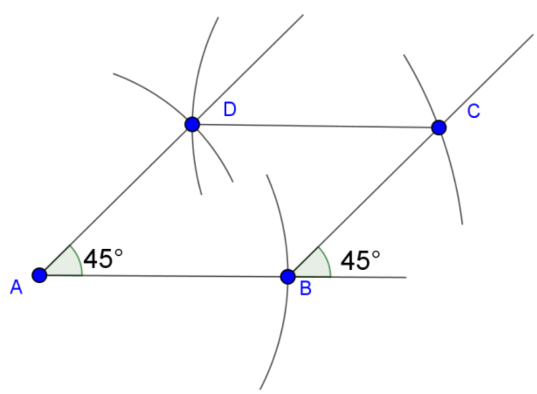
Задатак 4. Конструисати паралелограм $ABCD$ ако је дато $AB = a = 3{,}5cm$, $AC = d = 6cm$ и $\measuredangle DAB = 45° = \alpha$.

Решење. Најпре се скицира произвољан паралелограм $ABCD$.



Слика 64. Скица паралелограма

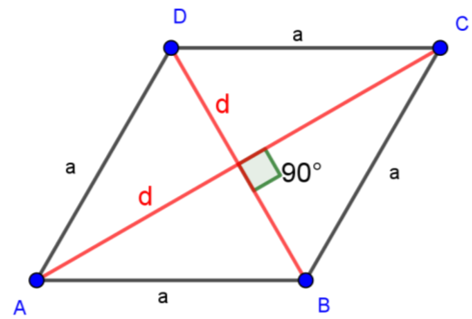
Зна се да у паралелограму суседни углови дају збир $180°$, па се лако види да је спољашњи угао код темена B, такође, $45°$. Први корак у анализи ће бити да се нацрта теме A и полуправа из њега, на коју ће се пренети дуж $AB = a = 3{,}5cm$ и на тај начин добити теме B. Затим се угао $\alpha = 45°$ пренесе и код темена A и код темена B и добију се две полуправе са почецима у теменима A и B. Следећи корак, у овом начину конструисања, је да се у отвор шестара узме дуж $AC = d = 6cm$ и из темена A направи лук који сече полуправу са почетком у темену B, где у пресеку настаје теме C. Затим се у отвор шестара узме дуж $AB = a = 3{,}5cm$ и из темена C опише лук,па се у отвор шестара узме дуж BC и из темена A опише лук, где у пресеку та два лука настане теме D. Последњи корак јесте да се повежу сва та темена и настане тражени паралелограм.



Слика 65. Конструисани паралелограм

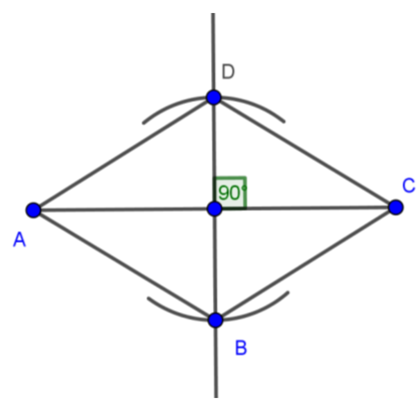
Задатак 5. Конструисати ромб $ABCD$ ако су дате обе дијагонале.

Решење. Прво се црта скица и на њој обележавају дати подаци.



Слика 66. Скица ромба

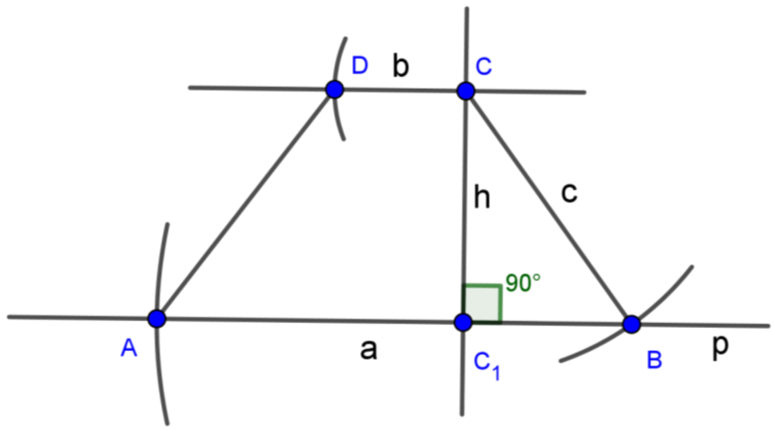
Зна се да се дијагонале полове и секу под правим углом код ромба и то је кључ ове конструкције. Најпре се нацрта једна дијагонала, одреди њена симетрала и у њиховом пресеку се добија тачка из које се половина оне друге дијагонале наноси на симетралу при чему настају преостала два темена. За прављење симетрале постоји алат у ГеоГебри који олакшава и поједностављује саму конструкцију.



Слика 67. Конструисани ромб

Задатак 6. Конструисати трапез ако су дате основице a и b, страница c и висина h.

Решење. Прво се конструише права p и на њу нормала. У пресеку настаје тачка C_1. Из ње се шестаром нанесе висина h и добија се теме C. Потом из темена C се пренесе страница c и у пресеку са правом p настане теме B. Из темена B на праву p се пренесе основица a и добија се теме A. Затим се направи паралела са правом p кроз теме C, па се из тог темена нанесе основица b и у пресеку добије теме D. На крају се споје темена A и D и добија се тражени трапез.



Слика 68. Конструисани трапез

ЗАКЉУЧАК

Природно је да савремена настава математике прати развој технологије и да се настоји да се у образовни процес уведу нова наставна средства. У овом раду приказан је један начин извођења наставе уз помоћ рачунара, тј. програмског пакета ГеоГебра. Представљен је интерактивни материјал у којем је обрађен појам четвороугла и све области које су повезане са њим, а обрађују се у вишим разредима основне школе.

ГеоГебра је пре свега математички софтвер који је једноставан за употребу. Употреба овог софтвера требало би да буде од користи јер прави везу између геометрије и алгебре на потпуно нов, визуалан начин што математику чини опипљивом, приступачном, динамичном и интерактивном. Требало би да омогући наставницима да боље планирају и изводе наставу, што на крају резултује ученицима који су мотивисани и имају боље резултате.

Презентовање садржаја о четвороуглу путем електронских лекција даје могућност сталног приступа теорији и задацима, путем интернета, као и могућност њиховог мењања, усавршавања и додавања нових материјала.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Небојша Икодиновић, Слађана Димитријевић, „Математика 6“ уџбеник за шести разред основне школе, Klett d.o.o., Београд, 2014.

[2] Сања Милојевић, Ненад Вуловић, „Математика 6“ збирка задатака са решењима, Klett d.o.o., Београд, 2015.

[3] Милан Митровић, Срђан Огњановић, Михаило Вељковић, Љубинка Петковић, Ненад Лазаревић, професори Математичке гимназије у Београду, “Геометрија за I разред Математичке гимназије“ уџбеник са збирком задатака, КРУГ, Београд, 1998.

[4] Синиша Јешић, Драгица Мишић, Марко Игњатовић, „Математика за шести разред основне школе“, Герундијум, Београд, 2012.