Универзитет у Београду

Математички факултет

Мастер рад

Електронске лекције о површини и запремини геометријских тела у настави математике за основну школу

Ментор: др Мирослав Марић

Кандидат: Бојана Чолић

Број индекса: 1089/2011

Београд, 2017.

Садржај

Увод

Основно образовање је обавезно образовање, стога би било добро да се квалитетном наставом ученици заинтересују за сваки појединачни предмет. Како рачунарска технологија вртоглаво напредује преостаје нам само бити у кораку са временом. Наставу треба осавременити рачунарима, а предаваче оспособити за такав вид рада. Данас свако домаћинство, у коме има младих нараштаја, има бар један рачунар. Деца се одлично сналазе при раду на рачунарима јер то представља њихову свакодневицу. Потребно је да их наставници усмеравају и надограђују њихов потенцијал. Математика и геометрија су идеално средство за „јачање можданог мишића“.

Програмски пакет Геогебра је програм који најбоље дочарава геометријске облике и тела. Ученици су навикли да очима „опипају“ пресеке јер им је тешко замислити ситуацију, а наставник би време утрошено на цртање на табли могао искористити за објашњавање још једног нејасног задатка. Наравно, не треба избацити употребу лењира и шестара јер деци треба рутина за скице и конструкције. Стога, се мора балансирати у приказивању слика и цртању истих. Сама припрема оваквих часова захтева пуно времена, учења, умећа и воље.

Циљ рада је да се популаризује употреба рачунара у настави математике, пре свега за коришћење образовних рачунарских софтвера као што је програмски пакет Геогебра. Тиме би дошло до подизања квалитета наставе, повећања мотивације код деце и ефикаснијег усвајања знања. Посебно се истиче геометрија као важна област математике и погодна за увођење електонских лекција.

1. Геометрија у школској настави математике

1.1 О предмету геометрије

Геометрија је математичка дисциплина која строго проучава простор и облике (фигуре и тела) који се могу замислити. У етимолошком смислу, реч геометрија значи „мерење Земље“, али је веома рано примила много шире значење, па је код старих грчких класичара представљала скоро целину теоријске математике. Много касније Паскал (Blaise Pascal, 1623-1662, француски математичар, физичар и филозоф) рекао је да је „*предмет чисте геометрије простор*“, подразумевајући под тим интуитиван и физички простор, где се могу сместити све видљиве појаве. Данас се више не говори о простору већ о просторима, те би приближна дефиниција геометрије била: „*Геометрија се бави проучавањем скупа названог простор чији су елементи названи тачке.*“

У геометрији се проучавају особине тела, површи, линија, било каквих геометријских ликова, а које се односе на положај, облик и величину. При томе се у геометрији не посматра кретање у току времена, па ни остале особине као што су топлина, еластичност итд. Истина, понекад се у геометрији говори о кретању, али то је само ради погоднијег описивања чисто геометријских односа, као што је подударност.

Питагорина теорема гласи: „*У правоуглом троуглу квадратна површ над хипотенузом једнака је збиру квадратних површи над обема катетама*“, при том се не води рачуна од околности да су троуглови, који се налазе, цртају или граде у свету, од разног материјала и у разним бојама, да су, на пример, нацртани кредом на школској табли и та је тачност којом су остварени увек ограничена. Чињенице искуства улазе у геометрију мисаоно прерађене. Свака нацртана тачка има своју величину и није „геометријска тачка“, о којој се претпоставља да уопште нема величине. Раван неког стола је ограничена рубом стола и равна је само док се овлашно посматра, а „геометријска раван“ се замишља неограниченом и савршено равном.

1.2 Индуктивни и дедуктивни пут изградње геометрије

Како чињенице искуства улазе у геометрију мисаоно прерађене и разрађене, био је у прошлости дуг пут до геометрије као логичке, математичке науке. Ако се потражи како се током историје човечанства развијала геометрија, наћи ће се да је она дуго црпела своја сазнања непосредно из искуства. Таква је била геометрија старих култура Месопотамије и Египта, пре Грка, дакле од почетка историје до седмог столећа пре наше ере. Тада је геометрија била првенствено искуствена, *емпиријска наука*. Она је уводила у своја сазнања полазећи од појединих чињеница посматрања. Дакле, била је уједно *индуктивна наука*.

У тачност става према коме се три симетрале једног троугла секу у једној тачки може се уверити самом конструкцијом. Нацрта се било какав троугао. Затим се одреде средишта његових страница. Ако је цртеж довољно тачан, видеће се непосредно то што став тврди. Ово је пут непосредног опажања, искуства. Могло би се рећи да се цртањем извршио један геометријски оглед. Пут је индуктиван, јер се из једног конкретног случаја (из слике) закључује да став важи у свим случајевима. Индуктивна метода би захтевала да се иста конструкција понови више пута, бирајући троуглове разних облика и величина и да се тек на основу свих тих „огледа“ закључи да је општи став тачан.

Строго узевши, индуктивна метода не даје довољан доказ онога што се тврди. Само искуство не казује зашто је онако као што се тврди, ни зашто не може бити друкчије. Тачност сваког цртежа је уосталом ограничена и дешава се да се у слици три праве не секу у једној тачки, мада се у истину секу. Логички доказ једини је поуздан и довољан. У поузаданости и потпуном разјашњењу, коју пружају логички докази, може се видети један од мотива који су још у давна времена гонили људе да геометрију израде у логичку науку.

Још и данас, посебно у школској настави, геометрији се приступа као збирци мање – више очигледих чињеница, учећи прво како да се из појединих опажања образују индуктивним путем општи геометријски закључци. То је у настави оправдано. Па и касније, свака геометријска слика која се нацрта да би се лакше снашли у решавању неког геометријског задатка, може се сматрати остатком индуктивне, епиријске методе. Свака геометријска слика је *геометријски оглед*. Као што се у експерименталној физици утврђује Архимедов закон – да тело у течности губи од своје тежине онолико колико је тешка истиснута течност – тиме што се изведе поменути оглед, а не низом логичких закључака, тако се у геометрији може нацртати слика или (у стереометрији) саградити модел, да би се лакше увидела нека геометријска истина.

Вероватно се врло давно почело наслућивати да геометријске истине стоје у нарочитој узајамној зависности која се открива пажљивим расуђивањем. Други став о подударности троуглова гласи: *„Два троугла су подударна ако су страница и налегли углови на њу једног троугла једнаки страници и одговарајућим угловима другог троугла“*. Може се уверити у тачност тог става и непосредно ако се конструише, на пример од картона, два троугла на којима су остварени услови става, па се пренесу један на други тако да се поклопе елементи који су по претпоставци подударни. Тада се непосредно види да се оба троугла потпуно подударају. Извршен је оглед и став је њиме потпуно потврђен. Поступак је емпиријски индуктиван. Други став се може логички закључити на основу првог. Дакле, други став о пудударности троуглова следи логички из првог става о подударности троуглова. Исто тако могао би се самим расуђивањем доказати и први став о подударности троуглова када би се пошло од другог става. Између оба става постоји узајамна логичка зависност. Такве логичке везе постоје међу свим ставовима геометрије, простије или сложеније.

У изналажењу логичке повезаности састоји се такозвана метода *логичке редукције* у геометрији, тј. свођења једног става на друге, доказивањем на темељу тих других ставова. Но, логичка редукција карактерише геометрију тек ако се изводи систематски, тако да се ставови геометрије поставе у известан низ и у том низу сваки став докаже на темељу ранијих ставова тог низа. Када се тако геометријски ставови изводе логичким расуђивањем једни из других, каснији из ранијих, идући извесним редом, геометрија постаје *дедуктивна наука*.

Иако се у школи не може говорити о строгом дедуктивном излагању геометрије, јасно је да, без обзира на степен строгости, цела геометријска материја мора бити изграђена на одређеном систему аксиома, па се или тај систем наводи у целини на самом почетку излагања (што је, за школску наставу, лошија варијанта) или се током излагања местимично инфилтрирају поједине аксиоме као и групе аксиома.

Када се говори о избору система аксиома за школски курс, мора се одмах рећи да за то, практично, нема ширих могућности, али се увек могу вршити извесне модификације познатих аксиоматских система и комбинације које се образлажу специфичношћу излагања ученицима одређеног узраста.

1.3 Циљеви наставе геометрије

„Геометрија је најмоћније средство за изоштравање наших умних способности и даје нам могућност да правилно мислимо и расуђујемо“

Галилео Галилеј (1564-1642)

Садржај и карактер математичког образовања не остаје непроменљив и у знатној мери је одређен стањем математичке науке, али у првом реду оним циљевима које образовању поставља друштво. Настава треба да садржи оно што ће касније бити потребно у животу, што ће развити ширину и самосталност мишљења ученика, али и оно што ће створити навику да се стечено знање искористи у разним ситуацијама у пракси. Веома је важно одгајати у свести ученика ону основну идеју да је циљ научног развитка сазнавање света који нас окружује. Када је реч о настави геометрије, тада је од извесног значаја, не само да се покаже логичка завршеност њене структуре, него и њене многобројне везе са праксом и неизбежност њеног коришћења као најдрагоценијег средства сазнања.

Опште је позната чињеница да већина ученика нема интерес за геометрију, а знање ове математичке дисциплине на недопустивом ниском нивоу. О томе говоре и наставници, и професори факултета, и родитељи, и сами ученици. Извештај са завршног испита 2011. године показује да је успешност решености задатака из геометрије 62,73%, 2012. године проценат успешности се смањио на чак 37,5%, док је 2013. године проценат успешности достигао 45%.

Наравно, може се навести много узрока који доводе до оваквих резултата. Најважнији од њих је деформација водећих циљева наставе геометрије у школи. Какви год да се циљеви декларишу у програму и многобројним методичким упутствима, школски уџбеник и традиција у настави коју је углавном формирала методологија и методика сталног уџбеника доводе је до представе да је основни циљ наставе геометрије развијање логичког мишљења код ученика. Штавише, тај циљ хипертрофише и претвара се у задатак недостижан на раном степену обучавања, задатак да се код ученика формира аксиоматски начин размишљања. Због тога, развој логичког мишљења постаје не само основни, него и једини циљ наставе, одузимајући тиме и ученицима и учитељима снагу и време.

Несумњиво је да постоје суштинске разлике између захтева које о знању и умећу ученика предвиђају образовни стандарди, и оног нивоа геометријског развоја који друштво очекује од савременог културног човека, који жели да постане инжењер, техничар или квалификациони радник. На овај друштвено потребни ниво знања, додатне захтеве налаже концепција непрекидног образовања. Није тајна да се геометријски развој може сматрати најважнијим фактором који омогућује спремност човека за трајно образовање и самообразовање у најразличитијим областима људске делатности.

Геометрија је заступљена у свим наставним програмима за математику од првог разреда основне школе, па до, у неким школама, четвртог разреда средње школе. То већ довољно говори о месту и значају геометрије како у настави математике у основној и средњој школи, тако и у целокупном програму образовања и васпитања. Учешће геометрије у наставним плановима и програмима потврђује познату чињеницу о повезаности геометрије са многим основним сазнањима о свету.

Друштвено потребни резултати наставе геометрије могу бити достигнути само ако не затворимо курс у оквире научних, чисто геометријских циљева, већ се изведе на такав начин да код ученика развија особине интелекта као што су: геометријска интуиција, просторно мишљење, логичко мишљење, способност за конструктивно-геометријске активности, владање макар у минималном обиму симболичким језиком геометрије. Увођењем електронских лекција могу се постићи жељени резултати. Ученици, на пример, неће напамет учити формуле за израчунавање површине и запремине геометријских тела, већ ће, служећи се анимацијама са разумевањем изводити сами потребне формуле. Такође, ученици често греше у израчунавању површине правоуглог троугла множећи дужине катете без дељења на пола јер се не воде сазнањем да је правоугли троугао у ствари пола правоугаоника чије су странице катете тог троугла. При израчунавању површине било ког троугла дешава се да множе дужине све три странице, што је условљено мањком осећаја при коришћењу мерних јединица.

2. О задацима у почетној настави геометрије

Увођење у геометрију је процес системског упознавања са геометријским фигурама и њиховим својствима и односима, процес системског развијања смисла за геометријску апстракцију и поступног развијања способности дедуктивног закључивања и функционалног расуђивања везаног за геометриску материју. Тај процес није краткотрајан јер свој развој започиње у дечијој свести још пре поласка детета у школу, а понекад не успева да достигне потребан ниво ни у последњем разреду основне школе, што зависи од програма, ученика и од наставника.

Прва основна поставка од које се у основној школи мора поћи при увођењу геометријских појмова јесте реално порекло појмова, њихов извор у реалности. Шта значи та реална подлога у почетној настави геометрије на којој се изграђују геометриске апстракције? Ако би се доносио суд на основу програма и на основу уџбеника, ту подлогу чине разноврсни модели (најчешће предмети из наше околине), а ако би се доносили на основу школске праксе, то је познавање на искуство о простору које се стиче у свакодневном животу, прва полазна тачка и јесте то искуство, на које се рачуна и онда када се то не помиње изричито.

У вези са наведеном поставком, први задатак у почетној настави геометрије треба да буде систематизовање и обогаћивање тог искуства о простору и истовремено уочавање извесних геометријских елемената. Тај задатак се реализује поступно, чак и са повременим враћањем на извесна питања ради њихове потпуније обраде, што је све у зависности како од програма тако и од узраста ученика.

Како школска пракса показује, кад се имају у виду прве четири године геометријске наставе, она је показала одређене резултате када су у питању просторне фигуре, а скоро потпуно су запостављени просторни односи – који представљају и најзначније богатство геометријске наставе. Овакво стање ствари мора нас у највећој мери забрињавати јер представља најозбиљнију сметњу за успешан почетак наставе геометрије у петом разреду основне школе, тај почетак мора се заснивати на извесном претходно стеченом геометријском искуству ученика.

Реална основа с које се полази приликом увођења геометријских појмова не мора бити увек искључиво приказана ученицима помоћу модела, напротив, конкретна ситуација из које се изводе геометријски закључци или која нам служи за геометријска разматрања може се представити и цртежом као посебном врстом модела код којег већ постоји геометријска стилизација. Природно је да се упоредо с већим узрастом ученика позивање на геометријску имагинацију свесно и све више користи, чиме није искључено коришћење модела. Развијена геометријска имагинација представља значајан квалитет у општој геометријској култури ученика, па је зато треба систематски неговати и усмеравати.

Други задатак – поступно ослобађање и обогаћивање геометријске имагинације ученика као први услов за развијање просторне интуиције и даљих геометријских апстракција у свести ученика, захтева много мање од стране наставника, не само приликом увођења нових појмова при њиховој обради, него и при избору задатака које задаје за домаћи рад. Такви задаци са чисто геометријским садржајем треба у највећој мери да испуне програм рада у школи и код куће, без тога се геометријска интуиција тешко развија.

Трећи задатак у почетној настави геометрије – треба настојати да се, у границама које диктира узраст ученика, увођење, дефинисање и обрада геометријских појмова изведу што је могуће конкретније и уз употребу прецизне терминологије. Овај задатак треба извести тако да се касније не морају кориговати или чак одбацити као нетачни и заменити прецизним појмовима. То је једно веома осетљиво питање јер, ма какав био тај садржај, неки геометријски појмови морају се уводити, дефинисати и обрадити. Мора се нагласити да се, на почетном ступњу, увођење неких појмова разликује од увођења тих истих појмова у довољно строгом излагању. На почетном ступњу се за нека појмове уводи одговарајућа представа, али ни тада се не сме доћи до било каквог искривљивања одређеног појма. Што се тиче дефинисања појмова не треба никада избегавати строгу дефиницију и треба настојати да је ученици схвате и да је знају и упамте без икаквог додатка и „украса“. Прецизна и јасна дефиниција коју, кад је то могућно, после извршене потребне припреме наставник исказује у најсажетијем облику, само помаже и наставнику и ученику као сигуран ослонац и представља снажан елемент позитивног геометријског васпитања.

У дефинисању геометријких појмова не може бити произвољности. Ако се погледа на то питање са научног становишта биће јасно да дефиниције сачињавају један од битних елемената аксиоматске структуре и да подлежу строгим законима који за такву структуру важе. Стога, пре свега треба истаћи онај основни принцип поштовања научне конкретности – да се не стварају за школу подешени термини и да се не измишљају за школу појмови којих у науци нема, нити су у науци потребни. Кратко речено, треба да се односи према научним појмовима онако како то само зналац може учинити, а сви креативни напори да се усмере на изналажење путева којима се сваком појединим појму у настави намењеној деци одређеног узраста најприродније и најлакше прилази, и на изналажење метода којима се сваки појединим појам најпотпуније обрађује.

Четврти задатак у почетној настави геметрије је поступно развијање способности за функционално расуђивање и логичко закључивање. Процес као што је развијање наведених форми мишљења неопходно захтева обазривост и поступност, а истовремено систематско укалапање у геоемтријску материју. Када се говори о логичном закључивању, мисли се при томе на дедукцију, на кратке низове дедуктивних закључивања, за које већ у основној школи постоје извесне могућности.

Пети задатак – развијање способности уочавања геометријских својстава и геметријских односа на конкретним објектима и развијање способности примењивања стеченог геометријског знања, се првенствено и систематски реализује решавањем одабраних геоемтријских задатака у школи и код куће, целисходно изабраних занимљивих задатака који ће привући интересовање ученика и већ самим тим подстицај њиховој геометријској машти.

За реализовање наведених задатака први услов је подједнака стручна и методичка оспособљеност наставника. Тешкоће потичу (поред традиционалних методичких слабости) углавном отуда што наставник, најчешће, нема један шири, односно суштински поглед на геометрију као науку, па следствено ни на њу као наставни предмет. Он зна чињенице, али не и њихову повезаност. Он зна конструкције, али не и њихову суштину, зна формуле и њихово извођење, али не и њихово порекло. Он зна садржај, али не и методе. Отуда, наставе геометрије представља, врло често, не зидање једне солидне зграде, него подизање појединачних колибица, које и најслабији ветрови руше лако и брзо. И од силног труда, и наставниковог и учениковог, остану, најчешће, само трагови.

2.1 О проблему геометрије у нашим школама

У нашим основним и средњим школама у настави математике поставља се тежиште на алгебру, аритметику и математичку анализу, док се геометрија у доброј мери запоставља. Иако има професора и наставника математике, који схватају штетност такве праксе и боре се против ње, ипак је запостављање геометрије код нас општа појава, која забрињава, јер су последице далекосежне и не дају се лако отклонити.

Два су главна узрока овој појави у нашој школској настави математике. Генерално посматрајући, у школама је лако предавати све друге математичке дисциплине него геометрију. У алгебри, математичкој анализи итд. за део наставника једина су наставна средства креда и сунђер. У настави геометрије и најгори наставник је присиљен да посегне за другим наставним средствима: прибором за цртање, моделима, видео – бимом, итд. У геоеметрији далеко више до изражаја долази и практични рад ученика: разна мерења, израда наставних средстава, цртежа и слично. У другим математичким дисциплинама, лакше је него у геометрији, могу се постићи често привидно и блистави резултати: вешто рачунање, решавање компликованих једначина и томе слично. Све то делује тако да део наставника тежиште рада ставља на све друго сем на геометрију коју обрађује тек толико, да у минималној мери и формално задовољи наставне програме. То се види и по томе, што је у оним деловима геометрије, који се претежно служе аналитичком методом (тригонометрија и аналитичка геометрија), ситуација много боља, те проблем запостављања постоји само у планиметрији и, нарочито, у стереометрији.

Велики је број наставника који запостављају геометрију из неразумевања. Они, као и ученици и већина школованих људи уопште, мисле да су друге математичке дисциплине важније и вредније, јер се, више примењују у практичном животу. Примене геометрије нису тако непосредне и видљиве великом броју људи као примене рачуна, математичке анализе, графикона итд. због тога се мисли да је општаобразовна вредност геометрије мања.

Не треба занемарити и чињеницу која се веоме лако да проверити, међу наставницима математике запрепашћујуће је велики број оних који „не воле“ геометрију. Једни се правадају да не воле да предају ученицима геометријске садржаје јер не постижу никакве резултате, док други своју незаинтересованост за геометрију правдају властитим образовањем. Међутим, овде се крије једно те исто, овакви наставници математике уопште не разумеју геометрију, као ни њену улогу у образовању.

Осим ових, субјективних, постоје и објективни узроци запостављања геометрије. Извођење геометријских цртежа и конструкција на школској табли (посебно ако је прибор стар и покварен, а табла лоша) односи много времена. Задаци из геометрије своди се обично на извођење лакших и специјалних теорема, обрата и последица тих геометријских конструкција. Такви задаци су ученицима по својој природи тешки и траже много времена. Овоме треба додати једну ученичку калкулацију, будући да су садржаји из геометрије у мањини у односу на остале, такав је и број оцена, те ће евентуалне негативне оцене из геометрије бити анулиране позитивним оценама из осталих садржаја. То је последица тога што се, већ поодавно, у нашим школама геометрија не предаје као посебан наставни предмет.

Геометријске творевине и односе сусрећемо на сваком кораку: у природи, у науци и уметности, у техници и занатству, у саобраћају. Због тога познавање особина и односа геометријских објеката има велику практичну вредност. Без солидног познавања геоеметрије нема озбиљног студирања математичке анализе, механике, физике, геоеграфије, минералогије, астрономије, рентгенске анализе структуре материје, електротехнике, архитектуре, грађевинарсва и других наука и њихових техничких и осталих практичких примена.

Геометрија је изразито дедуктивна наука. Она сва своја тврђења изводи и доказује строго логичким поступцима. У геометрији захтевамо од ученика јасне представе, тачне дефиниције, фину анализу особина и односа геометријских објекта, истраживања разних веза међу њима и прецизну формулацију мисли. Тиме изоштравамо и развијамо код ученика логички, функционалан начин мишљења и закључивања и адекватан начин језичког изражавања мисли.

Геометријски цртежи и конструкције траже вешто руковање прибором за цртање и оштро око. За геометрију се генарално може рећи да учи тачности. Она ствара и развија навику прецизних мисли, ока и руке. У томе је њена велика и незамењлива васпитна вредност.

Запостављање геометрије доводи нужно до једностраности у образовању младих људи и до формализма у настави математике. Оно представља недостатак у формирању целовите личности, недостатак у општем образовању, знатно смањује променљивост знања стеченог у средњој школи и сужава основу за озбиљне студије на факултетима и другим високим школама [8].

3. Иновативност у настави геометрије

Иновативност у настави јавља се као захтев времена да би школа уопште могла припремити ученика за живот у коме се непрестано у свим областима живота дешавају иновације. Школа, по својој институционализованој природи, подразумева известан застој и дистанцу од апсолутних иновација, експеримената и огледа и зато што ради са младима, што је осетљив терен и зато што према новинама има сумњичав став све док се оне не покажу проверено добрим и ефикасним. Заправо, највећу дистанцу од иновација намеће сама наставна етика, која не дозвољава да без механизама провере и преиспитивања примењујемо новине. Шта је задатак савременог наставника, који ради у институцији несклоној иновацијама, а живи у времену у коме су иновације стварност и захтев? Задатак школе не може бити да прати све иновације и оптерећује новим и новим информацијама и сазнањима ионако информацијама преоптерећено човечанство. Зато у наставу треба увести промене, не мора излагање градива увек бити исписано на табли. Ученицима је такав вид наставе монотон и често остају без пажње.

Часовима математике који су искључиво везани за геометрију потребно је увести новину. Ученици у четвртом разреду основне школе први пут имају додир са површином и запремином коцке и квадра. Ту је потребно увести одговарајуће методе за обраду нове лекције јер се први пут сусрећу са површином и запремином тела. Наставник може сваког часа резати коцку по ивицама и на тај начин их изнова и изнова подсећати на мрежу коцке. Много лакше и ефикасније је то исто урадити помоћу анимације. Тада се не губи време на сецкање, довољно је само кликнути на одговарајуће дугме. Наравно, наставник мора бити оспособљен за овакав вид рада. Пре свега, мора научити како унети новине у наставу, колико често, како изабрати одговарајуће.

Умеће наставника, поред нужних стручних знања, састоји се у избору метода и средстава којима ће се та знања што боље преносити младима, начина на које ће се проценити ефикасност његовог посла и спремност прилагођавања новим условима. Прилагођавање би требало схватати као усклађивање својих знања потребама времена, способностима својих ученика, могућностима своје школе, потребама окружења. То умеће се назива креативност. Креативности нема саме по себи (каква је, можда, даровитост), нема је самоникле (каква је генијалност), она је, заправо, моћ комбинаторике. Креативност се олако меша са оригиналношћу, иновативношћу, даровитошћу. Она то не искључује, али јој услов нису ове појаве. Једини услов је, заправо, посвећеност свом послу. Посвећивање и изналажење креативних решења, утиче се онда и на своје ученике да на исти начин приступају темама и идејама. На тај начин се долази до побољшања квалитета наставе.

3.1 Употреба рачунара у настави математике

Побољшање квалитета наставе, а самим тим и образовања, тежња је која је све више присутна у нашем школству. Један од начина побољшања наставе је свакако и употреба рачунара. Употреба рачунара у настави, сем у информатици, није толико распрострањена у нашим школама, као у свету. Овај тренд се полако мења, тако да је у неким школама настава уз помоћ рачунара омогућена. Наравно, да би та настава била адекватна, потребно је још доста улагања, усавршавања професора, али исто тако и мотивација како ученика тако и професора. Једна од главних препрека оваквом извођењу наставе су свакако предрасуде. Постоје подељена мишљења о употреби рачунара у настави. Једна страна је мишљења да рачунаре треба увести што раније у наставу, ако је то могуће, чак и у предшколском узрасту, јер деца уче кроз игру, а путем рачунара и разних програма им је то омогућено, јер рачунари пружају велике могућности, па на тај начин могу проширити своје знање и видике. С друге стране имамо саговорнике мишљења да рачунаре не треба уводити у наставу, а неки од разлога су ти да на тај начин ученици губе вештину и рутину решавања задатака, да се мање труде, да се решавање задатака путем рачунара, конкретно у математици, своди на преписивање резултата добијених путем рачунара, и да на тај начин и професори вреднују само крајњи резултат, а не и поступак решавања. Оба ова начина размишљања имају своје врлине и мане, али није циљ такмичити се који је од ових начина бољи, већ је циљ побољшање квалитета ученичког знања, а средства која се буду користила у току извођења наставе зависиће искључиво од тема које се обрађују, тј. у зависности од градива користиће се средства за које сматрамо да ће на најбољи начин помоћи ученицима да савладају градиво [6].

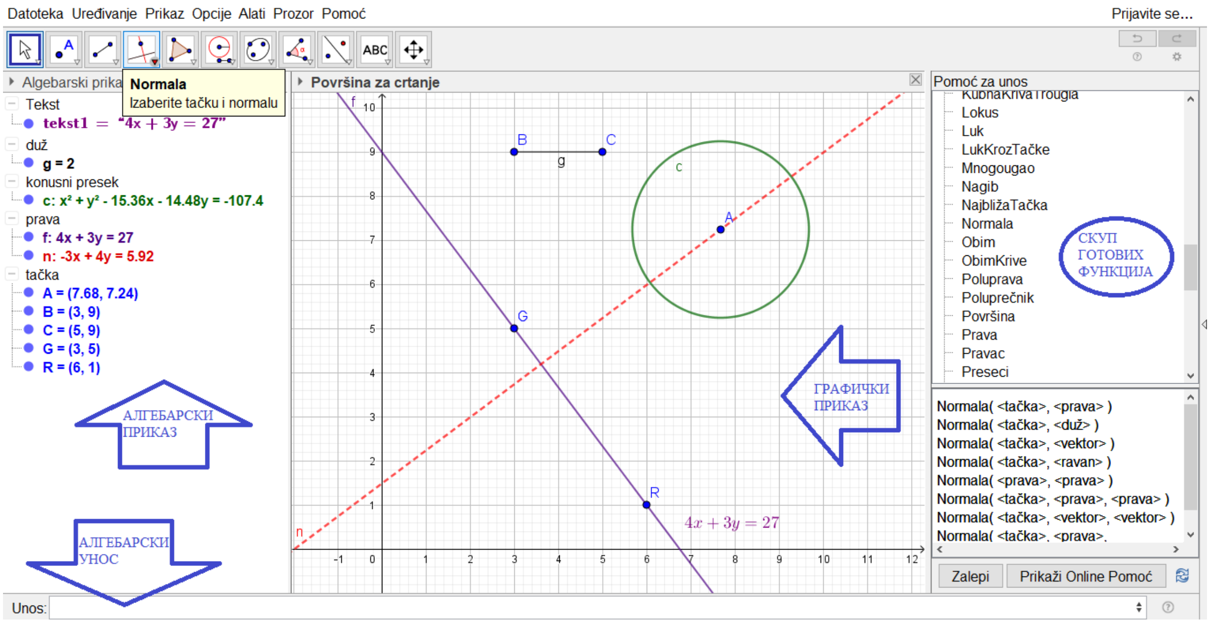
Међу образовним програмским пакетима који могу да се користе за учење математике разликујемо оне које прате наставни план и програм предмета математика и оне које служе као математички алати, тј. као помоћ при израчунавању, цртању графика, цртању геометријских објеката... Један од најчешће коришћених програма који се користе за наставу и учење математике јесте Геогебра. То је бесплатан софтвер који у себи обухвата геометрију и алгебру. Како је у основи програма Геогебра координатни систем, овај програм може наћи примену у упознавању поменутог система и његовог коришћења. Може се и организовати час да се у исто време ученици упознају са координатним системом, али и са алатима за цртање које пружа програм Геогебра.

3.2 Кратак опис програма *Геогебра*

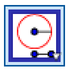
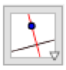
Програм Геогебра је математички софтвер који сједињује интерактивно геометрију, алгебру, табеле, графике, израчунавања и статистику (отуда и назив ГЕОметрија алГЕБРА). Развио га је Markus Hohenwarter са Универзитета у Салцбургу за поучавање математике у школама.

Динамичко јединство геометрије и алгебре у Геогебри пружа ученицима бољу визеализацију наставе, омогућава им експерименталан прилаз математици и веће учешће у раду на часу. Поред тога што се у ученицима буди већа мотивација и што им градиво на овај начин постаје занимљивије, јер су изашли из стандардних оквира предавања, на овај начин ученици савладавају градиво експериментишући и сами могу откривањем лако доћи до решења [4].

Геогебра, као спој геометрије и алгебре омогућава унос података на оба начина, тј.објекти се могу нацртати уз помоћ већ постојећих функција, али исто тако их и алгебарски задати (слика 3.1). То је такође предност овог програма јер за сваки нацртан објекат веома се лако могу прочитати његове координате и једначине. У Геогебри постоји и читав низ готових функција. У њему се налазе различите команде и математичке функције, које знатно олакшавају рад у овом програму, отварајући много различитих могућности и повећавајући брзину у раду.



Слика 3.1. Алгебарски и графички приказ у Геогебри

На слици 3.1 тачке G и R су унете алгебарски (G=(3,5) и B=(6,1)). Користећи алат  у графичком приказу је нацртана права кроз те две тачке. Произвољно, на површини за цртање је изабрана тачка A и нацртана дуж BC. Коришћењем алата  нацртан је круг чија је једначина приказана у алгебарском приказу. Из скупа готових функција изабрана је *Normala* из тачке A на праву f и тиме добијена права n. Ово може да се уради и коришћењем алата  тако што се изабере тачка A и права f.

Овај програм поред тога што је веома једноставан и лак за савладавање, веома је користан и ученицима и наставницима. Наставници могу да га користе као динамички пројектор и да на тај начин целом одељењу презентије градиво, могу га користити да генеришу различите задатке, тј. мењајући параметре у задатку може се добити мноштво задатака који се разликују, а исте су тежине и на тај начин се могу добити прецизнији подаци о усвојеном знању, али и развити самосталан рад код ученика, што је и циљ [7].

Геогебра је веома погодан програм за креирање анимација које илуструју ученицима разне положаје и односе датих објеката. Погодна је и у стварању електронских лекција које могу много помоћи ученицима у савладавању градива из геометрије, јер се у овој области ученици тешко сналазе.

3.3 Оствареност образовних стандарда у настави геометрије

Образовни стандарди за крај обавезног образовања настали су као резултат рада у оквиру пројекта Министарства просвете и спорта Републике Србије „Развој школства у Републици Србији" и његове пројектне компоненте „Развој стандарда и вредновање," коју је реализовао Завод за вредновање квалитета образовања и васпитања.

Образовни стандарди су искази о темељним знањима, вештинама и умењима које ученици треба да стекну до одређеног нивоа у образовању. Стандарди артикулишу најважније захтеве школског учења и наставе и исказују их као исходе видљиве у понашању и расуђивању ученика. Преко стандарда се образовни циљеви и задаци преводе на много конкретнији језик који описује постигнућа ученика, стечена знања, вештине и умења.

У образовном систему, до сада, постојали су формулисани циљеви и задаци за све нивое образовања који се експлицитно наводе у наставним програмима за поједине предмете. Између стандарда и циљева наведених у наставним програмима постоје разлике, како у функцији коју имају тако и у степену операционализације и прецизности исказа. Формулације стандарда су конкретне, оперативне и дате у исказима шта ученик зна, може и уме и могуће их је проверити тестирањем или посматрањем. Стандарди су резултат процеса у току којег долази до усаглашавања између ефеката које је образовни систем остварио и оних које треба да постигне у „наредном кораку". Они одговарају на нека тешка, а стратешки важна питања с којима се образовни системи увек изнова суочавају, какви ефекти се постижу у образовању и где се могу постићи бољи ефекти са капацитетима којима се располаже. Овај баланс између онога „шта су" и „шта желе да буду" наставници да постигну веома је важан аспект образовних стандарда и битно их разликује од онога што је исказано кроз циљеве образовања.

Стандарди су формулисани на три нивоа постигнућа. Нивои образовних стандарда описују захтеве различите тежине, когнитивне комплексности и обима знања, од једноставнијих ка сложеним. Сваки наредни ниво подразумева да је ученик савладао знања и вештине са претходног нивоа.

1. Основни ниво

На првом нивоу описани су захтеви који представљају базични или основни ниво знања, вештина и умења. Очекује се да ће скоро сви, а најмање 80% ученика/ученица постићи тај ниво. На базичном нивоу налазе се темељна предметна знања и умења, то су функционална и трансферна знања и умења неопходна, како за сналажење у животу, тако и за наставак учења. Знања и умења са основног нивоа најчешће су мање сложена од оних са средњег и напредног нивоа, али то није увек случај. Овде су смештена и она знања и умења која нису једноставна, али су тако темељна да заслужују посебан напор, који је потребан да би њима овладали готово сви ученици.

2. Средњи ниво

На другом нивоу описани су захтеви који представљају средњи ниво знања, вештина и умења. Он описује оно што просечан ученик може да достигне. Очекује се да ће око 50% ученика постићи или превазићи тај ниво.

3. Напредни ниво

На трећем нивоу описани су захтеви који представљају напредни ниво знања, вештина и умења. Очекује се да ће око 25% ученика/ученица постићи тај ниво. Знања и умења са овог нивоа су трансферна, пре свега за наставак школовања. Компетенције са напредног нивоа су по правилу и когнитивно сложеније од оних са базичног и средњег нивоа. То значи да се од ученика очекује да анализира, упоређује, разликује, критички суди, износи лични став, повезује различита знања, примењује их и сналази се и у новим и нестандардним ситуацијама. Детаљније образложење садржаја стандарда по нивоима, исказима и областима уз приказ одабраних задатака, којима се ти искази могу мерити, дати су у посебним приручницима за поједине наставне предмете, намењеним наставницима.

Геометрија се у основној школи обрађује у знатно мањој мери него алгебра и анализа. На пример, у петом разреду основне школе, школска година почиње са обрадом скупова, наставља се са основним геометриским објектима који се остварују кроз 12 часова (5 обрада + 7 увежбавање), затим, после дељивости бројева се прелази на угао, 20 часова (8 + 12) и на крају године, после разломака, долази осна симетрија која се одржава 14 часова (5 + 9). Кроз обраду и увежбавање потребно је остварити одређене образовне стандарде.

У области – основни геометријски објекти ученик треба да:

- зна да две различите тачке одређују једну праву;
- зна да три тачке које не припадају правој, одређују једну раван;
- зна шта је многоугаона линија и многоугао;
- уме да црта паралелне и нормалне праве;
- уме да објасни међусобни положај две праве, кружнице и праве;
- уме да користи геометријски прибор.

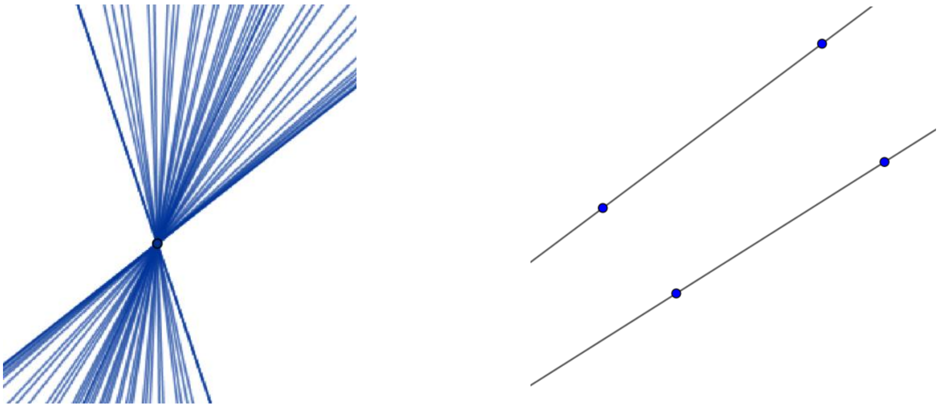
У области – угао ученик:

- уме да обележава угао;
- зна шта је опружен, оштар, прав, туп и пун угао;
- зна да краци правог угла одређују две нормалне праве;
- зна шта је централни угао и њему одговарајући лук;
- зна да су два централна угла, једнаких полупречника, једнака, ако су им једнаки одговарајући лукови;
- уме да упоређује углове;
- зна да сабира и одузима углове конструкцијски;
- зна јединице за мерење углова;
- зна да сабира и одузима углове коришћењем мере угла;
- уме да користи одговарајуће јединице за мерење углова (образовни стандард MA.1.4.1.);
- уме да одреди суплементне и комплементне углове, упоредне и унакрсне углове, рачуна са њима ако су изражени у целим степенима (MA.2.3.1.);
- уме да рачуна са угловима укључујући и претварање угаоних мера, закључује користећи особине паралелних и нормалних правих, укључујући углове на трансверзали (MA.3.3.1.);
- уме да по потреби претвара јединице мере, рачунајући са њима (MA.3.4.1.).

У области – осна симетрија ученик треба да:

- зна шта је оса симетрије;
- зна шта су осно симетричне тачке;
- уме да нацрта симетричну тачку датој тачки;
- зна шта је симетрала дужи;
- зна да је свака тачка симетрале дужи подједнако удаљена од крајева те дужи;
- уме да констуише симетралу дужи;
- зна шта је симетрала угла;
- зна да је свака тачка симетрале угла подједнако удаљена од кракова тог угла;
- уме да конструише симетралу угла;
- уме да конструише праву, која садржи дату тачку, и нормална је на дату праву.

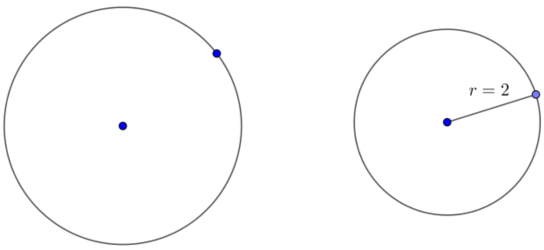
Ако наставник током обраде употреби Геогебру, не само да ће ученици боље и ефикасније усвојити знање него ће се и тиме повећати часови увежбавања јер ће се преклапати са обрадом. Геогебру наставници могу користити при увођењу геометријских појмова. Када се уводи појам праве, ученици цртају праву линију користећи оловку и лењир. Користећи ове алате ученици не размишљају о предусловима за одређеност праве. Ако ученик користи програм Геогебра за цртање праве, прво мора поставити тачку. Кроз ту тачку поставља праву, али се њен правац помера курсором (слика 3.1а). Правац се одређује бирањем друге тачке (слика 3.1б). На овај начин ученик усваја аксиому – две различите тачке одређују тачно једну праву. Из овога ученик може да закључи да се кроз једну тачку може „провући“ безброј правих.



а) б)

Слика 3.1. Праве

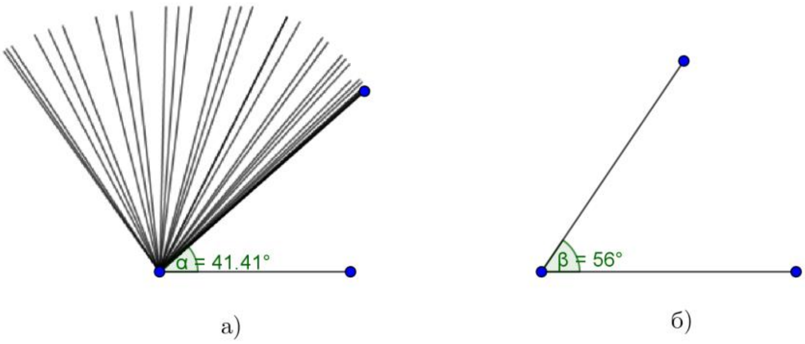
Слично важи и када се црта круг. Када се црта круг у Геогебри алат за цртање захтева да се изабере тачка која представља центар круга и удаљеност централне тачке од тачке на кругу (слика 3.2а). Други Геогебра алат за цртање захтева да се изабере центар круга и одабере (упише) дужина полупречника (слика 3.2б). Овим приступом конструкције ученик развија свест о томе да је круг одређен центром и полупречником (константним растојањем од центра круга до кружнице).



а) б)

Слика 3.2. Круг

Када се уводи угао, ученици умеју често да погреше када их upoређују. У њиховој свести величина угла се огледа у дужини кракова, а не, као што би требало, у „распону“ кракова, зато Геогебра може да помогне. Ученик користи алат за цртање угла у Геогебри тако што бира прво две тачке које одређују крак, али тим редоследом да друга изабрана тачка буде центар угла. Остаје само да одреди још једну тачку која ће одређивати величину угла (слика 3.3а). Други алат за цртање угла је једноставнији. Почетак је исти, а жељена величина угла се уноси у задато поље (слика 3.3б). Још једна предност је што се у сваком тренутку може променити величина угла „шетајући“ последњу одабрану тачку и свака промена се приказује на екрану.



Слика 3.3. Угао

У шестом разреду ученици имају математику 4 часа недељно, што је на годишњем нивоу 144 часа, као у петом и седмом разреду. Области геометрије које се обрађују током школске године су троугао, четвороугао и површине троугла и четвороугла.

Образовни стандарди који се захтевају да буду остварену у области – троугао су да ученик:

- уме да конструише углове од 60°,120°,30°,45°,135°,150°;
- зна основне конструкције троугла;
- уме да конструише описану и уписану кружницу троугла;
- зна шта су висина, тежишна дуж и средња линија троугла;
- зна шта су четири значајне тачке троугла и уме да их конструише.

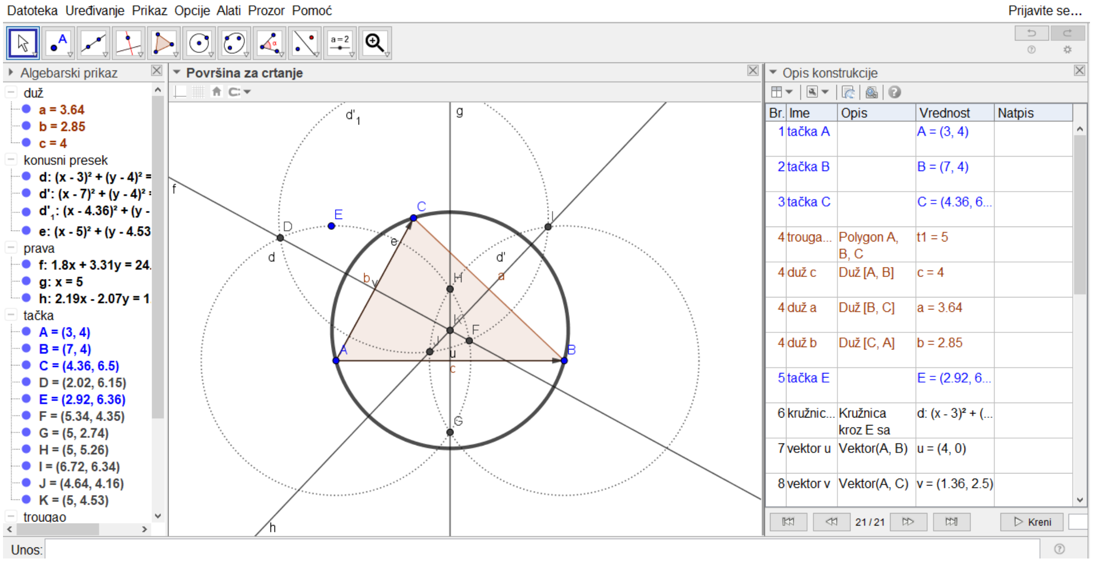
У области – четвороугао ученик мора да:

- уме да конструише паралелограме;
- уме да конструише трапез.

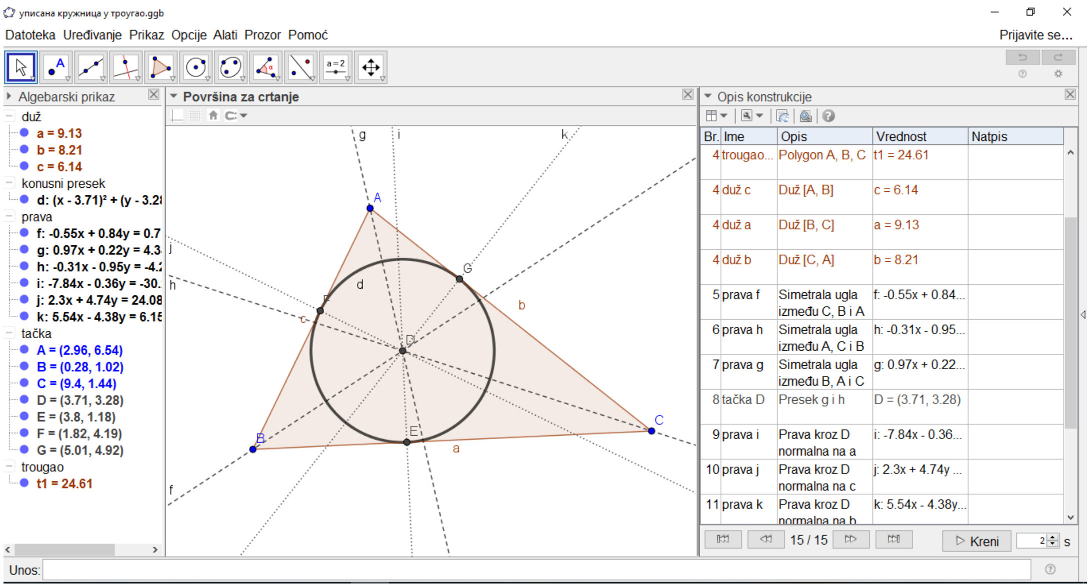
Површина троугла и четвороугла захтева да ученик:

- зна да неподударне фигуре могу имати једнаке површине;
- уме да рачуна површину четвороугла са нормалним дијагоналама;
- уме да користи одговарајуће јединице за мерење површине (МА.1.4.1.);
- уме да претвори веће јединице дужине у мање (МА.1.4.2.);
- уме да користи основна својства троугла, четвороугла, паралелограма и трапеза, рачуна њихове обиме и површине на основу елемената који нису обавезно непосредно дати у формулацији задатка (МА.3.3.2.).

Како би се у што већем проценту остварили стандарди, наставник мора да изабере Геогебру као помоћно средство. У разликовању поступака за конструкцију уписане и описане кружнице наставник се може послужити „тракама за кораке конструкције“ која омогућава кретање кроз конструкцију у готовој датотеци са цртежом у Геогебри. На овај начин наставник само кликом на дугме презентује кораке конструкције (слика 3.4 и слика 3.5) што представља ефикасан начин утврђивања јер постоји могућност понављања корака више пута, што није случај када се конструкција изводи на табли. Геогебра има могућност прескакања у приказивању корака конструкције, што представља још једно олакшање.



Слика 3.4. Конструкција описане кружнице око троугла



Слика 3.5. Конструкција уписане кружнице око троугла

Математика у седмом разреду основне школе почиње реалним бројевима, убрзо следе занимљиви часови из Питагорине теореме (свега 16, 5 обраде и 11 увежбавања), наставља се са целим и рационалним алгебарским изразима, па на ред долази многоугао (13 часова, 5+8). Области које се још обрађују су зависне величине и њихово графичко представљање, круг (15) и сличност (10).

У области – Питагорина теорема ученик треба да:

- уме да одреди тачке на бројевној правој које одговарају ирационалним бројевима;
- уме да решава задатке користећи Питагорину теорему;

Област – многоугао захтева да ученик:

- зна шта је многоугао;
- уме да одреди број дијагонала конвексног многоугла;
- код правилног многоугла уме да израчуна: унутрашњи угао, обим и површину ако су неопходни елементи непосредно дати у задатку.

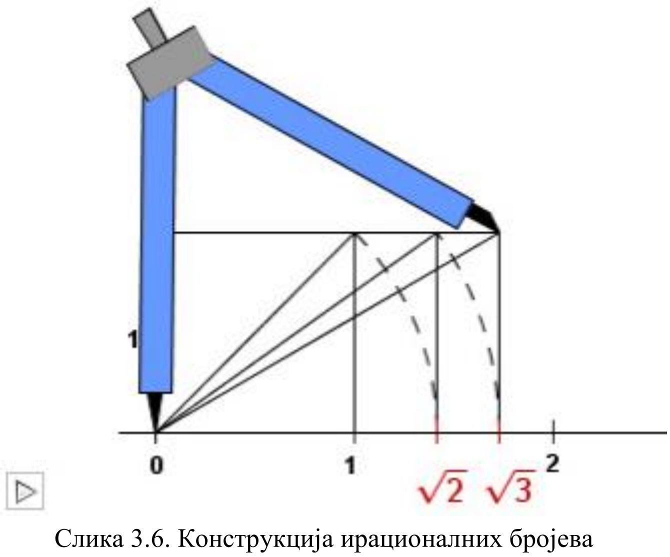
У области – круг ученик је потребно да:

- влада појмовима: круг, кружна линија (издваја њихове основне елементе, уочава њихове моделе у реалним ситуацијама и уме да их нацрта користећи прибор;
- уме да израчуна обим и површину круга датог полупречника) (МА.1.3.3.);
- користи формуле за обим и површину круга и кружног прстена (МА.2.3.3.);
- одреди централни и периферијски угао, рачуна површину исечка, као и дужину лука (МА.3.3.3.).

Образовни стадарди који треба да буду остварени у области – сличност су да ученик:

- зна Талесову теорему;
- уме да подели дуж у одређеној размери примењујући Талесову теорему;
- зна да су два троугла слична ако имају једнаке углове;
- примени подударност и сличност троуглова, повезујући тако разна својства геометријских објеката (МА.3.3.6.).

Питагорина теорема има широку примену. Једна од примена је конструкција ирационалних бројева на бројевној правој (слика 3.6). Коришћењем шестара на школској табли наставнику може одузети време, а ученике обесхрабрити да конструкцију изведу у својим свескама. Употребом виртуелног шестара наставник успева да мотивише ученике и кораке у конструкцији понови више пута.



Слика 3.6. Конструкција ирационалних бројева

Геометрија у осмом разреду у настави математике је заступљена 51%, то даје простора да се током обраде уведу електронске лекције које садрже анимације за боље и једноставније упознавање геометријских тела. Области геометрије које се обрађују су: сличност (8 часова), тачка, права, раван (12), призма (14), пирамида (16), ваљак (10), купа (12), лопта (6).

У области – сличност ученик осмог разреда треба да:

- уме да примени дат коефицијент сличности и да одреди коефицијент сличности;
- уме да примени сличност на правоугли троугао;
- примени подударност и сличност троуглова, повезујући тако разна својства геометријских објеката (MA.3.3.6.).

У области – тачка, права, раван ученик треба да:

- схвати у ком односу могу бити тачка и права, тачка и раван (растојање тачке од равни), две праве (мимоилазне праве), праве и равни (нормала на раван), две равни (диедар);
- разуме пројекцију тачке, дужи и праве на раван;
- зна да обележи нагибни угао праве према равни, зна шта је полиедар.

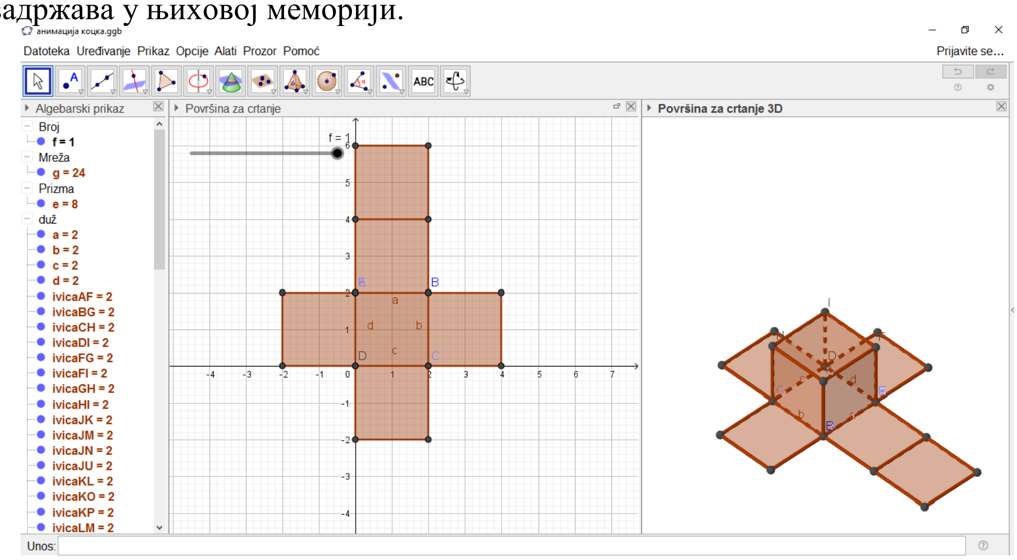
У областима – призма и пирамида ученик треба да:

- влада појмовима коцка и квадар (уочава њихове моделе у реалним ситуацијама, зна њихове основне елементе и рачуна њихову површину и запремину) (MA.1.3.4.);
- влада појмовима призма и пирамида, рачуна њихову површину и запремину када су неопходни елементи непосредно дати у задатку (MA.2.3.4.);
- израчунава површину и запремину призме и пирамиде, укључујући случајеве када неопходни елементи нису непосредно дати (MA.3.3.4.);
- при мерењу одабере одговарајућу мерну јединицу (MA.1.4.4.);
- по потреби претвара јединице мере, рачунајући са њима (MA.3.4.1.);

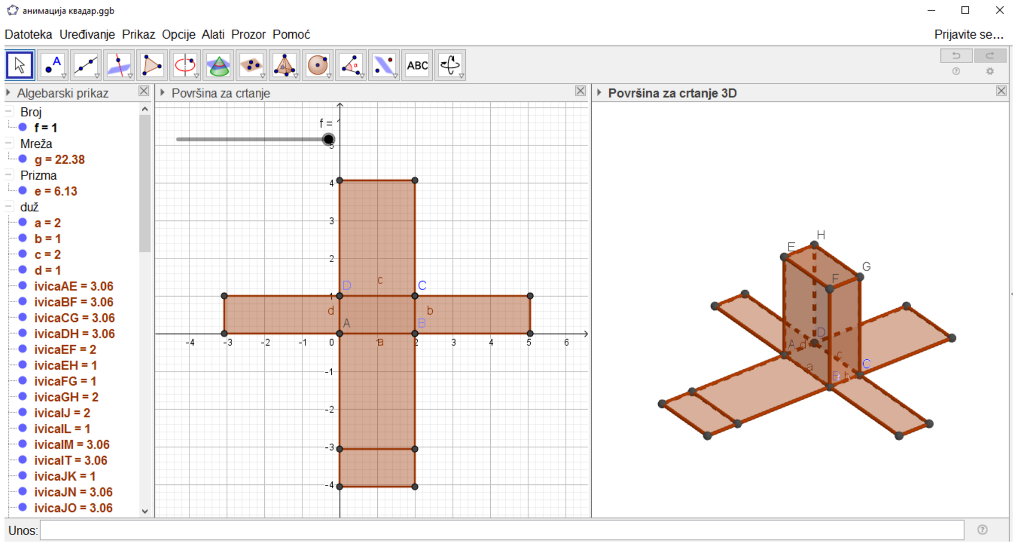
У областима – ваљак, купа и лопта ученик треба да:

- влада појмовима купа, ваљак и лопта (уочава њихове моделе у реалним ситуацијама, зна њихове основне елементе) (MA.1.3.5.);
- израчуна површину и запремину ваљка, купе и лопте када су неопходни елементи непосредно дати у задатку (MA.2.3.5.);
- израчунава површину и запремину ваљка, купе и лопте, укључујући случајеве када неопходни елементи нису непосредно дати (MA.3.3.5.)
- при мерењу одабере одговарајућу мерну јединицу, заокругљује величине исказане датом мером (MA.1.4.4.);
- по потреби претвара јединице мере, рачунајући са њима (MA.3.4.1.);
- пореди величине које су изражене различитим мерним јединицама за дужину и масу (MA.2.4.1.).

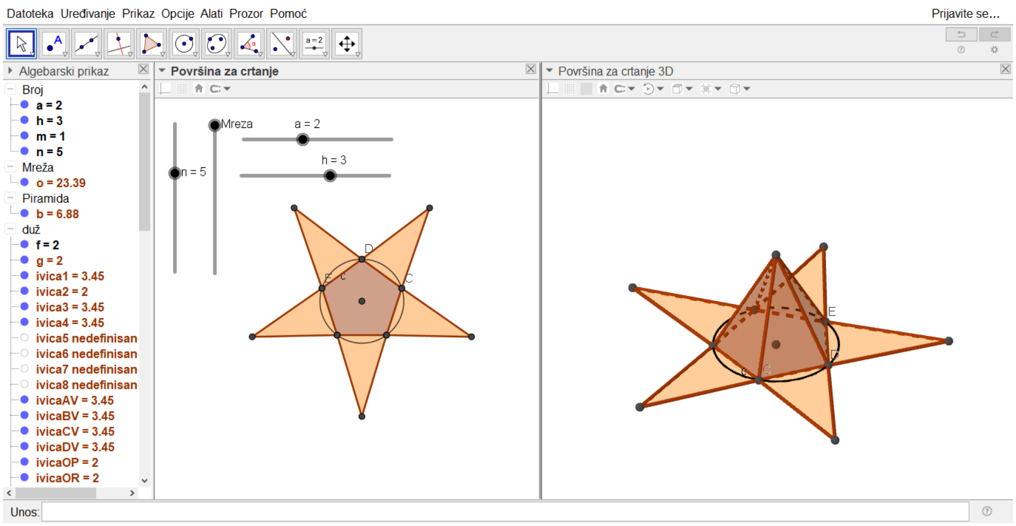
Геогебра има могућност приказивања тродимензионалних слика. Лако и брзо може се направити анимација која представља мрежу коцке (слика 3.7), квадра (слика 3.8), пирамиде (слика 3.9), ваљка, купе. Употребом оваквих анимација развија се свест код ученика да је мрежа коцке састављена од 6 једнаких квадрата, тј. да коцка има 6 страна и да је њена површина заправо збир површина тих шест квадрата. Када наставник приказује пресек нпр. коцке са равни (слика 3.10), у Геогебри постоји могућност ротације, тако да се ситуација види из свих углова и ученици имају осећај да пресек равни и коцке посматрају у својој руци. То је нешто што могу да „опипају“ па се дуже задржава у њиховој меморији.



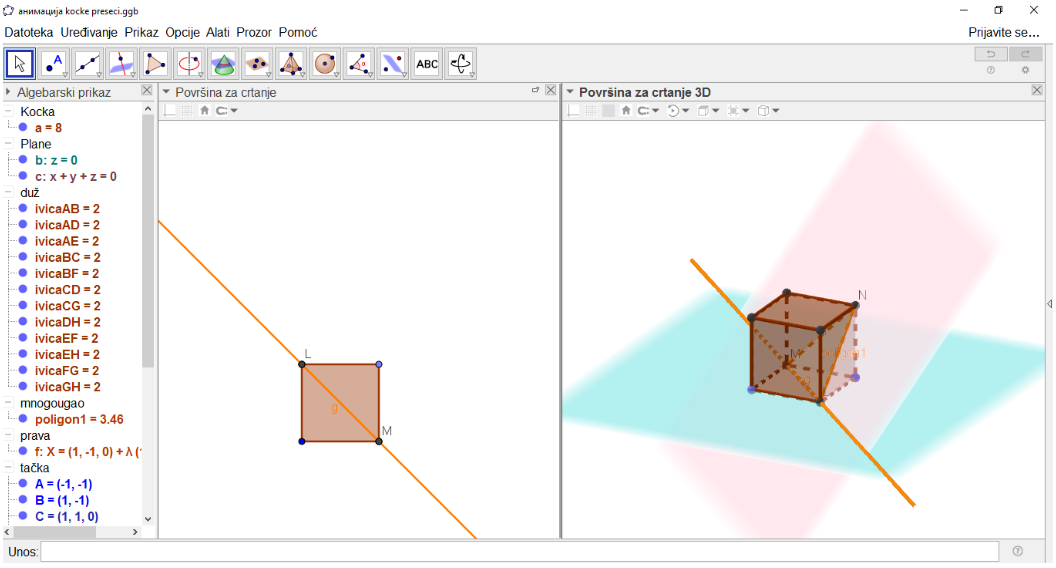
Слика 3.7. Мрежа коцке



Слика 3.8. Мрежа квадра



Слика 3.9. Мрежа пирамиде

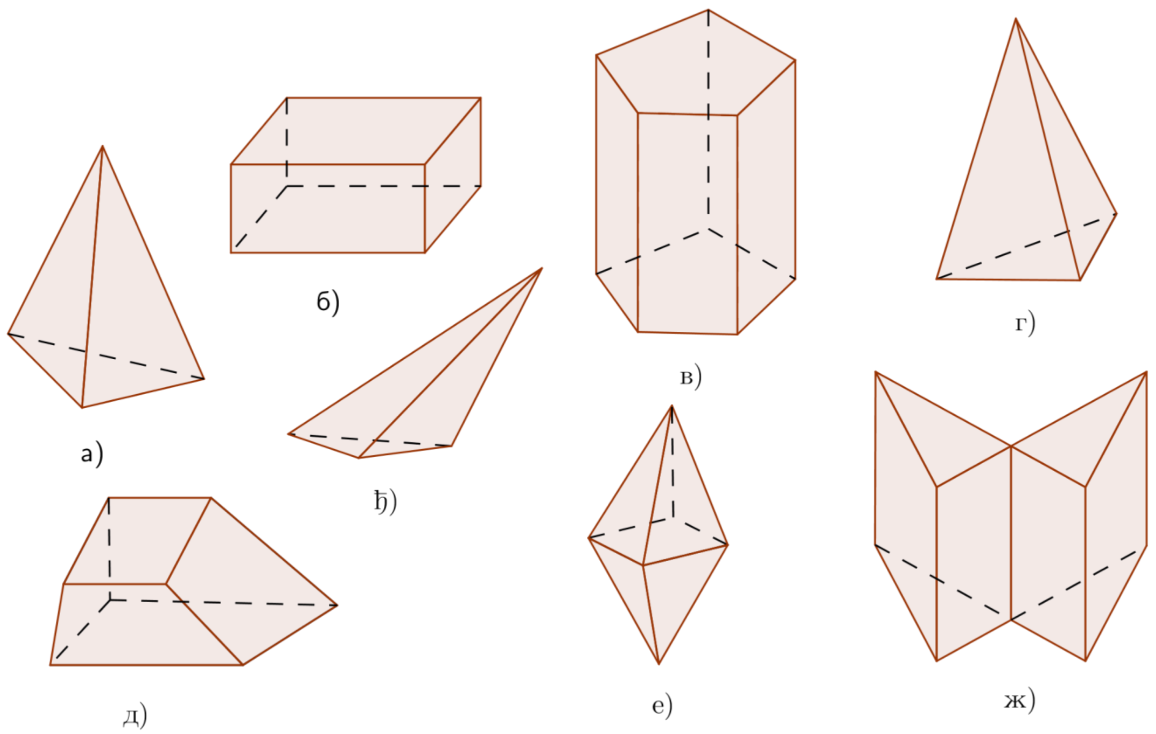


Слика 3.10. Пресек коцке са равни

4. Површине и запремине геометријских тела у осмом разреду основне школе

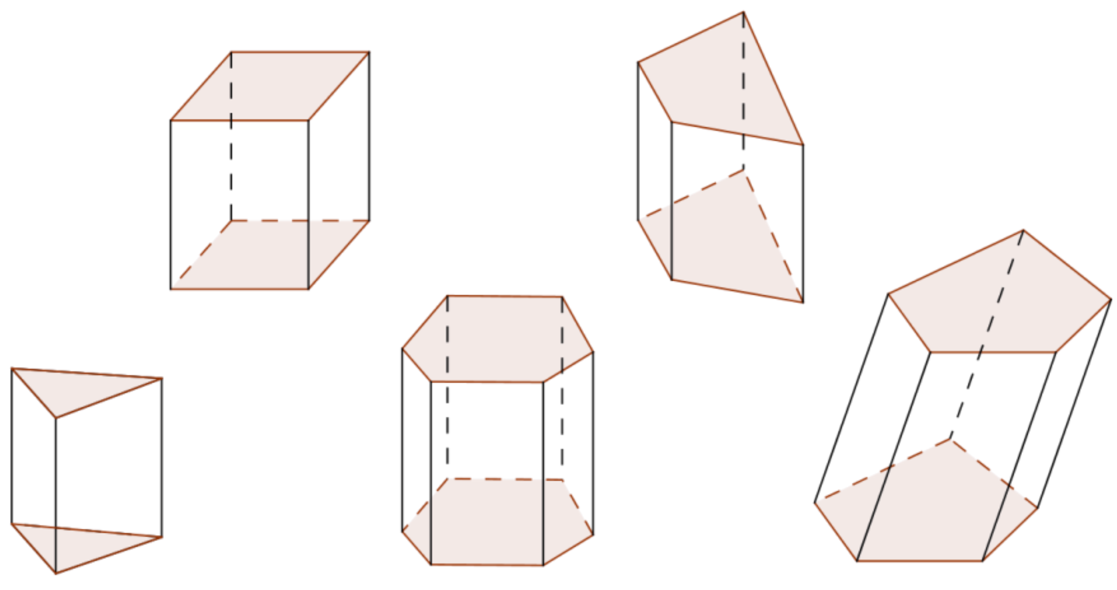
4.1 Призма

Геометројско тело је део простора који је ограничен са свих страна. Граница која одваја део простора, који захвата геометријско тело од осталог простора ван њега, назива се површ тела. Површ геометриског тела дели простор на унутршњу и спољашњу област. Дакле, унутрашња област и површ тела чине заједно геометријско тело. Површ геометријског тела може бити равна или крива. Зависно од тога да ли је геометријско тело ограничено само равним или равним и кривим површима, разликују се рогљаста или обла геометријка тела. Геометријско тело ограничено са коначно много многоуглова назива се полиедар (слика 4.1). Полиедри чији пресек са било којом равни даје конвексан многоугао су прости полиедри. У основној школи разматрају се само прости полиедри.



Слика 4.1. Полиедри

Међу свим полиедрима уочавају се полиедри код којих је заједничко то што стране сваког од њих чине по два паралелна подударна многоугла (троугла, четвороугла, петоугла,...) и по онолико паралелограма колико страница има сваки од тих многоуглова. Овакви полиедри називају се призме. На слици 4.2 је приказано више примера призми.



Слика 4.2. Призме

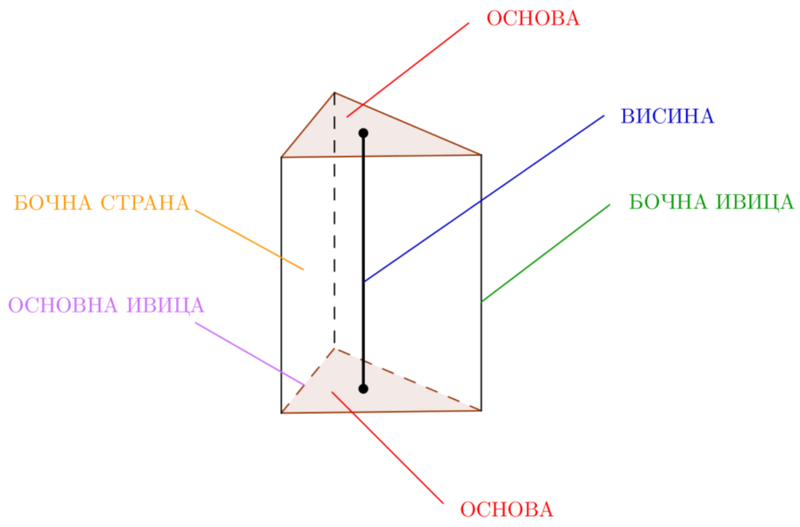
Призма је геометријско тело ограничено са два паралелна и подудрна многоугла и онолико паралелограма колико страница има један од тих многоуглова.

Многоуглови су основе (базе) призме, а паралелограми су бочне стране призме.

Бочне стране призме образују омотач призме.

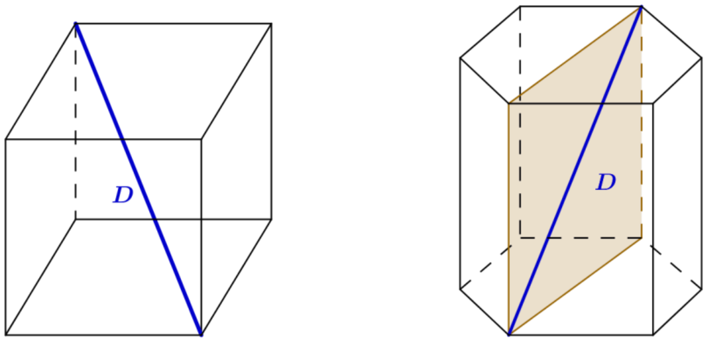
Дуж која је нормална на основе призме и чије крајње тачке припадају равнима основа призми, назива се *висина призме*. И дужину ове дужи називамо висином. Висина се најчешће означава са H.

Странице многоуглова су ивице призме. Оне које припадају основама су основне ивице, а остале су бочне ивице призме (слика 4.3).



Слика 4.3. Елементи призме

Дуж, чије су крајње тачке два темена која не припадају истој страни призме, назива се *дијагонала* призме. Дијагонала се најчешће означава са D. Пресек призме и равни, којој припадају једна ивица и дијагонала призме, назива се *дијагонални пресек* призме (слика 4.4).



Слика 4.4. Дијагонала и дијагонални пресек призме

Ако су бочне ивице призме нормалне на основе призме, тада је призма права. Уколико призма није права, каже се да је коса.

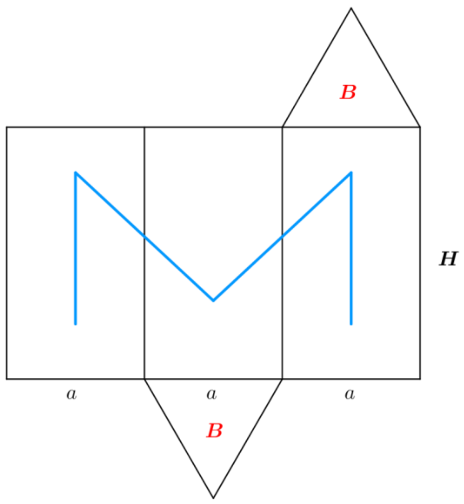
Призме се разликују и према броју страница основе: тростране, четворостране, петостране, шестостране,..., *n*-тостране призме.

Ако су основе призме правилни многоуглови, призма се назива правилна, бочне стране правилне призме су тада подударни правоугаоници.

Призма, чија је основа паралелограм, назива се паралелопипед. Прав паралелопипед, чија је основа правоугаоник, је кавадар. Квадар чије су основне и бочне ивице једнаке је коцка.

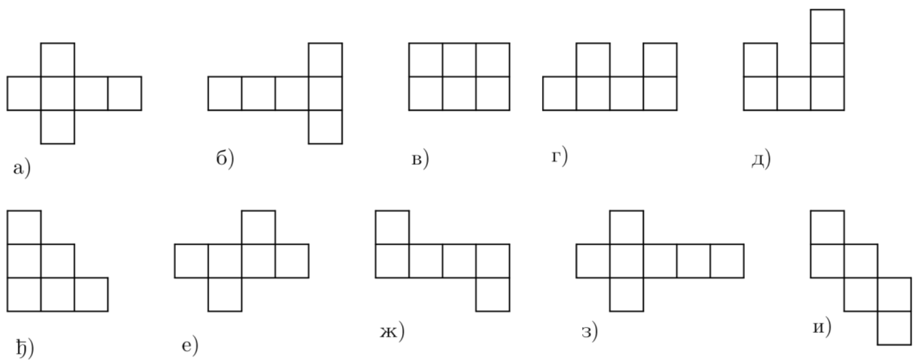
Мрежу праве призме (основе и омотач) чине два подударна многоугла и онолико правоугаоника колико страница има један од тих многоуглова. Површина основе се најчешће означава са B.

Површина бочних страна је омотач и означава се са M (слика 4.5).



Слика 4.5. Мрежа призме

Пример 1. Која од слика на слици 4.6 представља мрежу коцке?



Слика 4.6.

Коцка има укупно шест страна, па отуда отпада слика 4.6 з, а слика 4.6 в,г,д,ђ не могу да представљају мрежу. За мрежу призме није значајан само број многоуглова и величине њихових страница, већ и распоред тих многоуглова на мрежи.

Задаци

1. Наброј предмете, или делове предмета, облика призме. Постоје ли такви предмети – објекти великих димензија? А предмети или неки њихови делови веома малих димензија?
2. На моделу праве тростране призме покажи основе, бочне стране, основне и бочне ивице, темена. Да ли се може говорити о дијагоналама те призме? Опиши правилну тространу призму и нацртај њену мрежу.
3. Скицирај слику тростране и четворостране призме.
4. Колико најмање ивица може да има призма? Колико најмање страна може да има призма? А највише?
5. Дата је тространа призма. Да ли је можеш пресећи једном равни тако да као пресек добијеш:
   a) Троугао,
   b) Паралелограм.

   Нацратај то.
6. Каква је разлика између праве и правилне призме?

4.1.1 Површина призме

На слици 4.5 је представљена мрежа призме. Површину призме чине површине две основе и површине бочних страна – омотача.

Површина призме је збир површина основа и омотача.

Са B је означена површина једне основе, а са M површина омотача, тада је површина P призме:

$$\mathrm{P} = 2\mathrm{B} + \mathrm{M}$$

Добијена формула је општа формула за израчунавање површине сваке призме.

Применом опште формуле на поједине призме формула добија своје одговарајуће облике који служе за израчунавање површина датих призми [2].

4.1.1.1 Површина квадра и коцке

Ако је основа призме правоугаоник, то је $B = ab$. Омотач чине два пара подударних правоугаоника (слика 4.7) па је $\mathrm{M} = 2ac + 2bc$. Отуда је површина квадра:

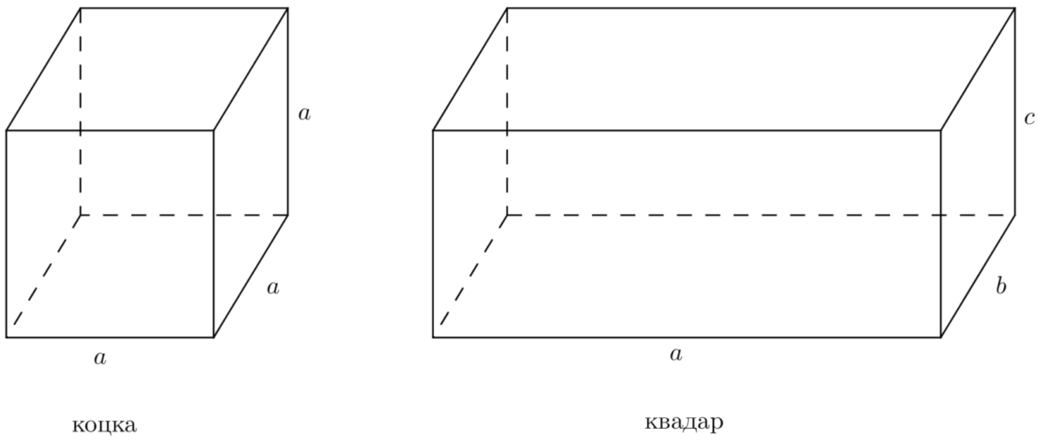
$$P = 2ab + 2ac + 2bc,$$

тј.

$$\boldsymbol{P = 2 \cdot (ab + ac + bc).}$$

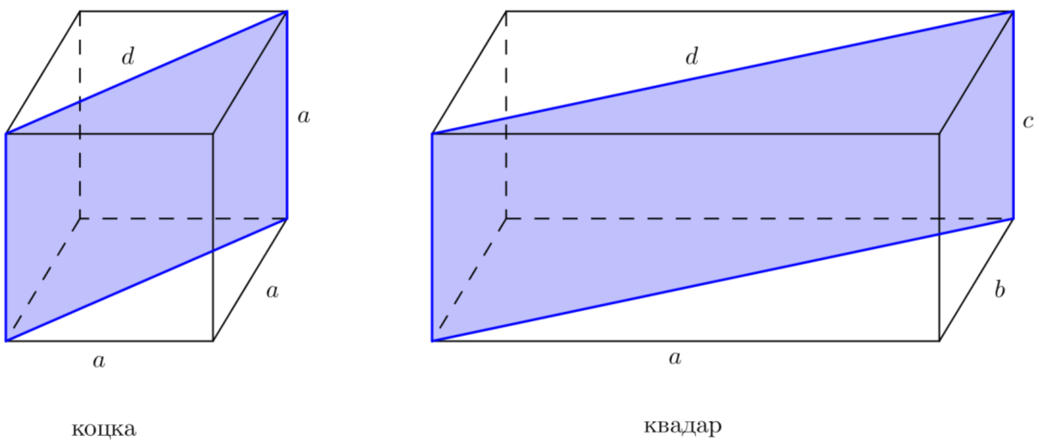
У случају када је $a = b = c$, квадар је коцка (слика 4.7), па њена површина износи

$$\boldsymbol{P = 6a^2.}$$



Слика 4.7. Коцка и квадар

Како је коцка призма, види се да је дијагонала коцке дуж која спаја два темена коцке која не припадају истој страни коцке. Такође, дијагонални пресек коцке је пресек коцке и равни којој припада једна ивица и дијагонала коцке.



Слика 4.8. Дијагонални пресек коцке и квадра

Како је дијагонални пресек коцке (слика 4.8) правоугаоник страница a и d, лако се види следеће:

$$P_{DP} = a \cdot d, \text{ односно } P_{DP} = a \cdot a\sqrt{2}$$

то јест $$\boldsymbol{P_{DP} = a^2\sqrt{2}}\ .$$

Сада је лако извести образац за површину дијагоналног пресека квадра.

Посматрајући слику види се да је дијагонални пресек квадра правоугаоник страница c и d, па је $P_{DP} = c \cdot d$,

односно $$\boldsymbol{P_{DP} = c \cdot \sqrt{a^2 + b^2}}\ .$$

Задаци:

Основни ниво

1. Израчунај површину коцке ако је њена ивица $3cm$.
2. Израчунај површину квадра чије су ивице $1cm, 2cm$ и $3cm$.

Средњи ниво

3. Израчунај дужину ивице коцке чија је површина
   a) $6cm^2$;
   b) $18cm^2$.
4. Две ивице кадра су $3cm$ и $4cm$. Израчунај трећу ивицу квадра ако је површина квадра $136cm^2$.

Напредни ниво

5. Израчунај површину коцке ако је површина њеног дијагоналног пресека:
   a) $\sqrt{2}cm^2$;
   b) $16\sqrt{2}cm^2$;
   c) $5{,}64cm^2$.
6. Димензије основе квадра су $5cm$ и $8cm$. Ако је површина мање бочне стране $20cm^2$, израчунај површину квадра.

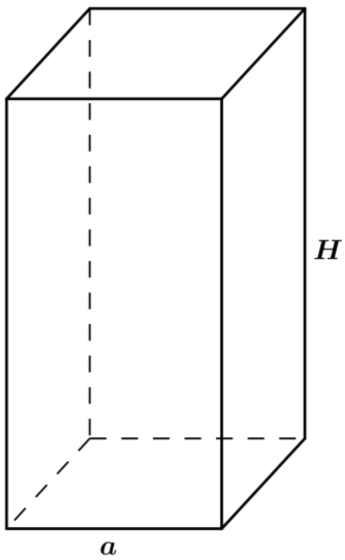
4.1.1.2 Површина правилне четворостране призме

Основа правилне четворостране призме је квадрат, па је $B = a^2$.

Омотач призме чине четири подударна правоугаоника, па је $M = 4aH$.

Површина правилне четворостране призме (слика 4.9) је према томе

$$P = 2a^2 + 4aH.$$



Слика 4.9. Правилна четворострана призма

Задаци:

Основни ниво

1. Основа праве призме је квадрат странице $5cm$, а висина призме је $13cm$. Израчунај површину призме.

Средњи ниво

2. Израчунај површину правилне четворостране призме ако је њена висина $10cm$, а површина омотача $200cm^2$.

Напредни ниво

3. Површина дијагоналног пресека правилне четворостране призме је $36\sqrt{2}cm^2$. Израчунај површину призме ако је висина призме $9cm$.

4.1.1.3 Површина правилне тростране призме

Основа правилне тростране призме је једнакостранични троугао, па се основа рачуна по формули

$$B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Омотач призме чине три подударна правоугаоника, па је

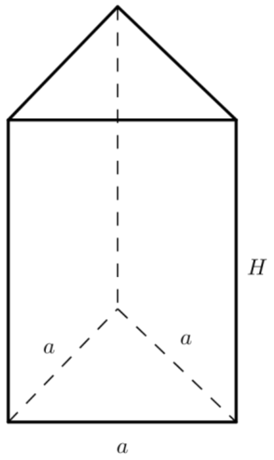
$$M = 3aH.$$

Површина правилне тростране призме (слика 4.10) се рачуна на следећи начин

$$P = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3aH.$$

Када се скрати, формула постаје

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3aH.$$



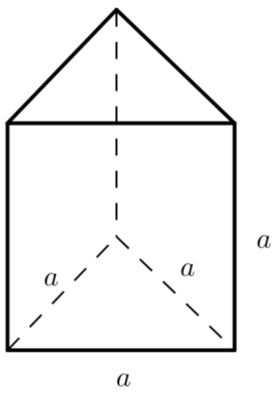
Слика 4.10. Правилна тространа призма

Површина једнакоивичне тростране призме чија је основа једнакостранични троугао а бочне стране квадрати (слика 4.11) је

$$P = 2\mathrm{B} + \mathrm{M} = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot a^2,$$

тј.

$$P = a^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 3\right).$$



Слика 4.11. Једнакоивична тространа призма

Задаци:

Основни ниво

1. Основна ивица правилне тростране призме је $2cm$, а висина призме је $\sqrt{3}cm$. Израчунај површину призме.

Средњи ниво

2. Површина основне правилне тростране призме је $4\sqrt{3}cm^2$, а висина призме је $8cm$. Израчунај површину призме.

Напредни ниво

3. Од греде облика правилне тростране призме дужине 6 метара и основне ивице $22cm$ сечењем кроз средине основних ивица добијене су четири греде. Израчунај укупну површину тако добијених греда.

4.1.1.4 Површина правилне шестостране призме

У основи правилне шестостране призме је правилан шестоугао, а омотач се састоји од шест подударних правоугаоника (слика 4.12), па је

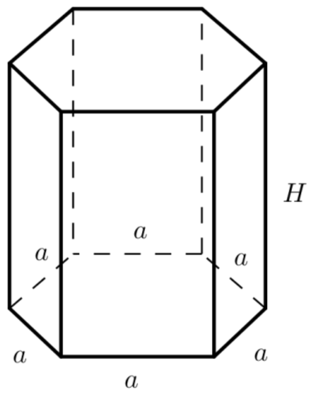
$$B = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \text{ и } M = 6aH.$$

Отуда је

$$P = 3a^2\sqrt{3} + 6aH,$$

или

$$P = 3a\left(a\sqrt{3} + 2H\right).$$



Слика 4.12. Правилна шестострана призма

Задаци:

Основни ниво

1. Израчунај површину правилне шестостране призме ако је површина основе $24\sqrt{3}cm^2$ и висина призме $\sqrt{3}cm$.

Средњи ниво

2. Површина омотача правилне шестостране призме је $48cm^2$, а висина призме је једнака двострукој основној ивици. Израчунај површину призме.

Напредни ниво

3. Површина највећег дијагоналног пресека правилне шестостране призме износи $32cm^2$. Израчунај површину те призме ако знаш да је њена висина $7cm$.

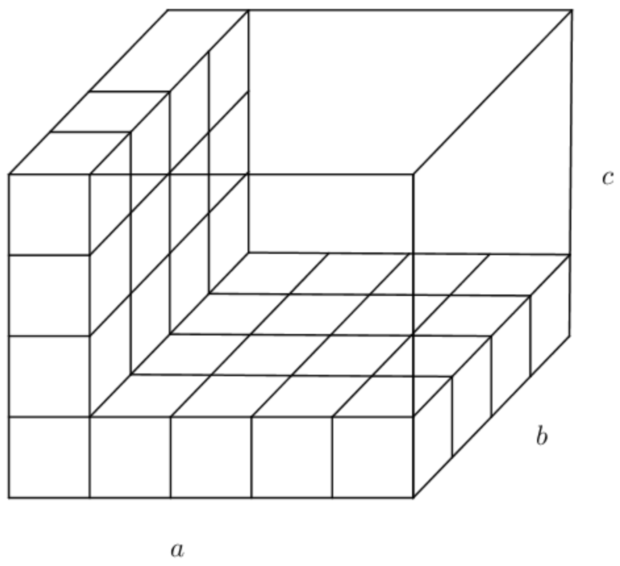
4.1.2 Запремина призме

Свако геометријско тело заузима известан део простора. Тај простор се може мерити а измерена величина назива се *запремина* посматраног тела.

Запремина једног тела се одређује упоређивањем тог тела са коцком чија запремина се узима за јединицу мере. При томе, ивица коцке има јединицу дужине. Поступак одређивања запремине тела назива се *мерење* запремине. Дакле, мерити запремину тела значи одредити колико се пута запремина узета за јединицу садржи у датој запремини. Број који изражава однос мерене запремине према изабраној јединици запремине, назива се *мерни број запремине тела.*

Запремина се не мери непостредним преношењем јединица мере, већ се изводе правила по којима, на основу потребних података о телу, рачунањем се одређује и његова запремина. Ова правила се записују формулама.

Три ивице квадра (као и њихове дужине) које полазе из истог темена се означавају са a, b и c. Претпостави се најпре да су a, b и c природни бројеви и да су дужине ивица квадра мерене истом јединицом дужине (слика 4.13).



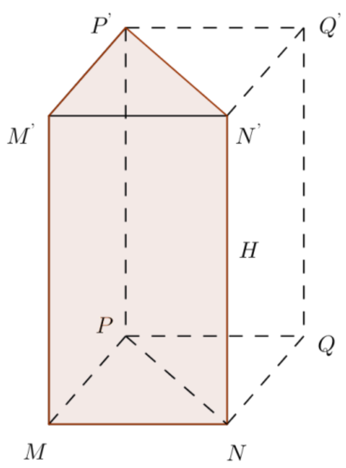
Слика 4.13. Запремина квадра

Колико се јединица запремина може „сложити“ у једном реду основе квадра? Колико има таквих редова? Колико је таквих слојева? Колико укупно јединица запремине има у таквом квадру?

Основа квадра има $a \cdot b$ јединичних квадрата. Над сваким од њих може се поставити јединична коцка и добити један слој који ће имати $a \cdot b$ јединица запремине. Оваквих слојева има c, што значи да у квадру има $(a \cdot b) \cdot c$, односно abc јединица запремине.

Према томе, запремина V квадра је

$$V = a \cdot b \cdot c.$$



Слика 4.14. Призма

Ова формула важи и када су a, b и c не само природни бројеви, већ и ма који позитивни реални бројеви.

Како је производ $a \cdot b$ једнак површини основе квадра, c је висина квадра, то важи:

Запремина квадра једнака је производу површине основе и његове висине.

Краће, $V = B \cdot H$.

Ако се размотри случај када је основа правоугли троугао. Нека је дата права тространа призма $MNPM'N'P'$ (слика 4.14).

Призму се допуни до квадра $MNPQM'N'P'Q'$. Допуна је призма $PQNP'Q'N'$, подударна датој призми. Запремина допуне једнака је запремини дате призме – означи се са V. Дакле, запремина V_k квадра једнака је двострукој запремини тростране призме, тј.

$$V_{к} = 2 \cdot V.$$

Како је запремина квадра $V_{к} = B_k \cdot H$ (B_k је површина правоугаоника $MNPQ$ а H је висина квадра односно призме) биће:

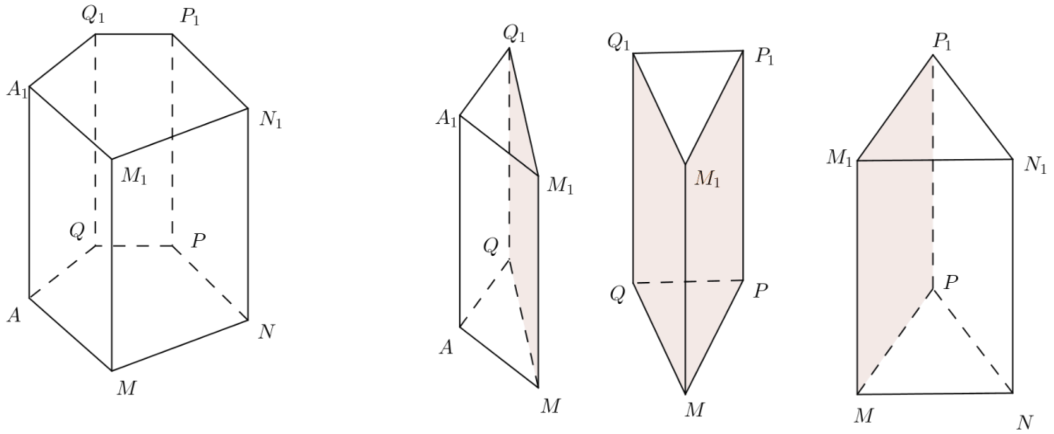
$$2 \cdot V = B_k \cdot H, \text{ тј. } V = \frac{B_k}{2} \cdot H.$$

Половина површине основе квадра износи $\frac{B_k}{2}$, па површина основе тростране призме износи *B*. Отуда запремина наше тростране призме је

$$V = B \cdot H,$$

тј. запремина је једнака производу површине основе и висине призме.

Ако је основа призме неки други троугао, претварањем тог троугла у правоугли троугао (једнаке површине као дати), доказ се своди на претходни случај.



Слика 4.15. Растављање призме на тростране

У случају, пак, када је основа призме било који конвексан многоугао са n страница, дели се призма на $n-2$ правих тространих призми (слика 4.15), па је запремина дате призме једнака збиру запремина $V_1, V_2, \ldots, V_{n-2}$ тако насталих тространих призми:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_{n-2}\,.$$

Ако се са $B_1, B_2, \ldots B_{n-1}$ означе редом површине основа тространих призми, а са H њихову заједничку висину, тада је

$$V = B_1H + B_2H + B_3H + \cdots + B_{n-2}H, \text{ тј.}$$

$$V = (B_1 + B_2 + B_3 + \cdots + B_{n-2}) \cdot H,$$

односно

$$V = B \cdot H.$$

За сваку праву призму важи:

Запремина призме једнака је производу површине основе и висине [1].

4.1.2.1 Запремина квадра и коцке

Основа ове призме је правоугаоник, чије су ивице a и b, а висина тела је c, па је запремина квадра

$$V = B \cdot H \text{ или } \boldsymbol{V = a \cdot b \cdot c}.$$

У случају када је $a = b = c$, квадар је коцка, па њена запремина износи

$$\boldsymbol{V = a^3.}$$

Задаци:

Основни ниво

1. Израчунај запремину коцке ивице $2cm$.
2. Израчунај површину и запремину квадра чије су ивице $1cm$, $2cm$ и $3cm$.

Средњи ниво

3. Збир дужина свих ивица коцке је $24cm$. Израчунај запремину коцке.
4. Две ивице квадра су $3cm$ и $4cm$. израчунај трећи ивицу квадра ако је површина квадра $136cm^2$.

Напредни ниво

5. Три месингане коцке, ивице $3cm$,$4cm$ и $5cm$, саливене су у једну. Колика је ивица те нове коцке?
6. Основе квадра су квадрати, а дијагонални пресек је квадрат површине $100cm^2$. Израчунај запремину квадра.

4.1.2.2 Запремина правилне четворостране призме

Основа призме је квадрат, па је $B = a^2$.

Запремина правилне четворостране призме је према томе

$$\boldsymbol{V = a^2 \cdot H}.$$

Задаци:

Основни ниво

1. Израчунај запремину правилне четворостране призме основне ивице $5cm$ и висине $9cm$.

Средњи ниво

2. Израчунај запремину правилне четворостране призме чија је површина $450cm^2$, а висина четири пута већа од основне ивице.

Напредни ниво

3. Израчунај запремину правилне четворостране призме код које је основна ивица $8cm$, а површина дијагоналног пресека $112.8cm^2 (\sqrt{2} = 1{,}41)$.

4.1.2.3 Запремина правилне тростране призме

Основа правилне тростране призме је једнакостранични троугао странице a, па се површина основе рачуна по следећој формули

$$B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

И запремина ове призме је

$$\boldsymbol{V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H}.$$

Задаци:

Основни ниво

1. Израчунај запремину правилне тростране призме основне ивице $2cm$ и висине $8cm$.

Средњи ниво

2. Израчунај запремину правилне тростране једнакоивичне призме ако је површина њеног омотача $108cm^2$.

Напредни ниво

3. Површина основе правилне тростране призме је $\sqrt{3}cm^2$, а однос висине призме и основне ивице је 5: 2. Израчунај запремину призме.

4.1.1.1 Запремина правилне шестостране призме

У основи призме је правилан шестоугао, па је $B = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, те запремина призме износи

$$\boldsymbol{V = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H}.$$

Задаци:

Основни ниво

1. Израчунај запремину правилне шестростране призме ако је површина основе $6\sqrt{3}cm^2$ а висина призме је $6cm$.

Средњи ниво

2. Одреди запремину правилне шестостране призме основне ивице $4cm$ ако је површина основе једнака површини омотача призме.

Напредни ниво

3. Израчунај запремину правилне шестостране призме висине $10cm$ ако је површина
   1. Већег дијагоналног пресека $240cm^2$;
   2. Мањег дијагоналног пресека $60\sqrt{3}cm^2$.

4.2 Пирамида

Ако се рогаљ са теменом S пресече једном равни, која сече све његове ивице, а не садржи теме S, добија се геометријско тело ограничено многоуглом $A_{1,}A_2 \dots A_n$ и троугловима $SA_1A_2, SA_2A_3, \dots, SA_nA_1$. Такво геометријско тело, ограничено делом једне рогљасте површи и једним многоуглом, назива се *пирамида*.

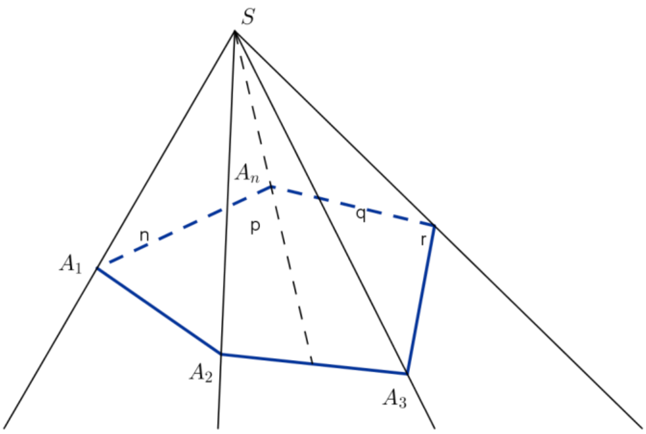
Теме рогља S је врх пирамиде.

Многоугао $(A_{1,}A_2 \dots A_n)$ који лежи у пресечној равни је *основа пирамиде*, а странице тог троугла су *основне ивице пирамиде*.

Одсечци ивица рогља $(SA_1, SA_2, \dots, SA_n)$ су бочне ивице пирамиде, а троуглови одређени од страна рогља $(SA_1A_2, SA_2A_3, \dots, SA_nA_1)$ су бочне стране пирамиде (слика 4.16).

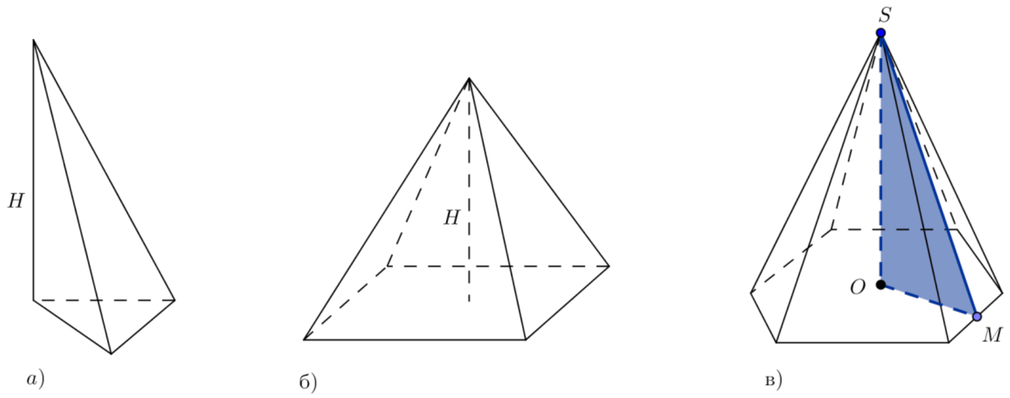
Бочне стране пирамиде чине омотач пирамиде *M*.

Дуж нормална на основу пирамиде, чија је једна крајња тачка врх пирамиде, а друга припада равни основе, назива се висина пирамиде. Означава се са *H*.



Слика 4.16. Рогаљ

Према броју страница основе разликују се тростране, четворостране, петостране и уопште n-тостране пирамиде (слика 4.17).

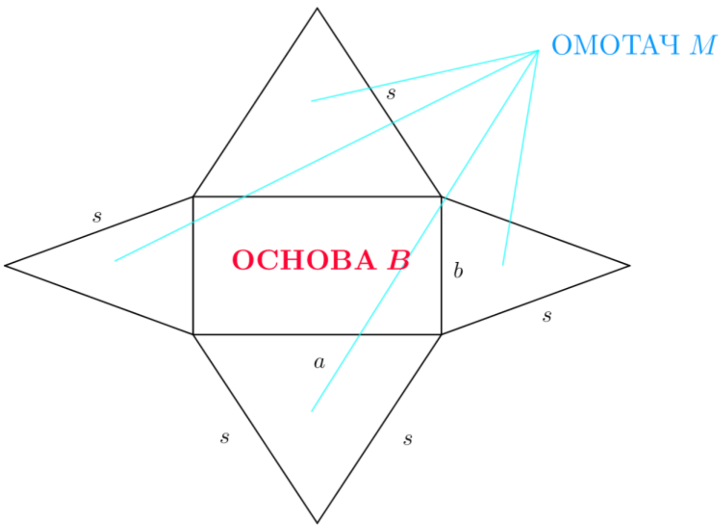


Слика 4.17. Пирамиде (тространа, чеворострана, шестострана)

Пирамида је правилна:

1) Ако је њена основа правилан многоугао;
2) Ако се подножје њене висине налази у центру описане кружнице око основе.

Код правилне пирамиде бочне стране су подаударни једнакокраки троуглови. Висина бочне стране правилне пирамиде назива се *апотема* правилне пирамиде (SM на слици 4.17.в). Апотеме код правилне пирамиде су једнаке.



Слика 4.18. Мрежа пирамиде

Посматра се само омотач и основа пирамиде. Ако се бочне стране и основа пирамиде нацрта у равни, као што је урађено на слици 4.18, добија се *мрежа* пирамиде. На мрежи се јасно истичу основа и бочне стране – омотач пирамиде.

Мрежа пирамиде се користи за прављење модела пирамиде (од хартије, картона, лима). Ако се прави модел пирамиде од хартије треба да се води рачина и о деловима за лепљење.

4.2.1 Површина пирамиде

Израчунавање површине једне пирамиде своди се на израчунавање површине њене основе B и њених бочних страна, које чине омотач M.

Површина пирамиде једнака је збиру површне основе и површине омотача.

Записује се овом формулом:

$$\boldsymbol{P = B + M}.$$

Из опште формуле за израчунавање површине пирамиде узводе се за тростране, четворостране и друге пирамиде одговарајуће посебне формуле [1].

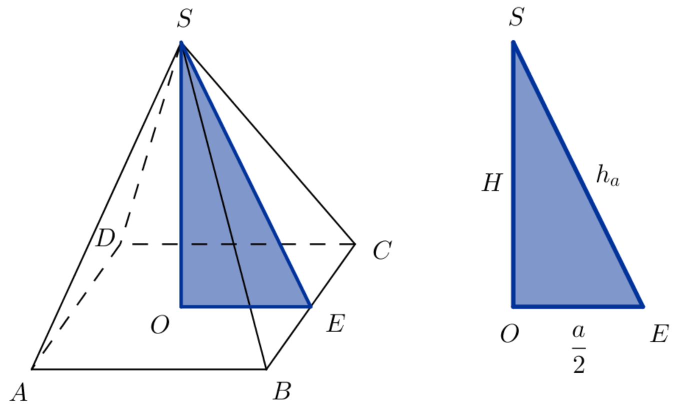
4.2.1.1 Површина правилне четворостране пирамиде

Како је $B = a^2$, а $M = 4 \cdot \frac{a \cdot h_a}{2}$, то је

$$P = B + M, \text{ односно } \boldsymbol{P = a^2 + 2ah_a}.$$

Значи, за израчунавање тражене површине потребна нам је поред основне ивице и апотема h_a. Израчунава се зато најпре апотема h_a. Посматра се слика 4.19 дате пирамиде уочава се правоугли троугао OSE који чине висина, апотема и половина основне ивице пирамиде. Применом Питагорине теореме налази се

$$h_a{}^2 = H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2, \text{ односно } \boldsymbol{h_a = \sqrt{H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}}\ .$$



Слика 4.19. Четворострана пирамида

Задаци:

Основни ниво

1. Израчунај површину правилне четворостране пирамиде ако је површина основе $36cm^2$ и површина омотача $60cm^2$.

Средњи ниво

2. Израчунај површину правилне четворостране пирамиде ако је површина основе $36cm^2$, а висина пирамиде $4cm$.

Напредни ниво

3. Основна ивица правилне четворостране пирамиде је $24cm$. Израчунај висину пирамиде ако се површина омотача према површини основе односи као $5 : 4$.

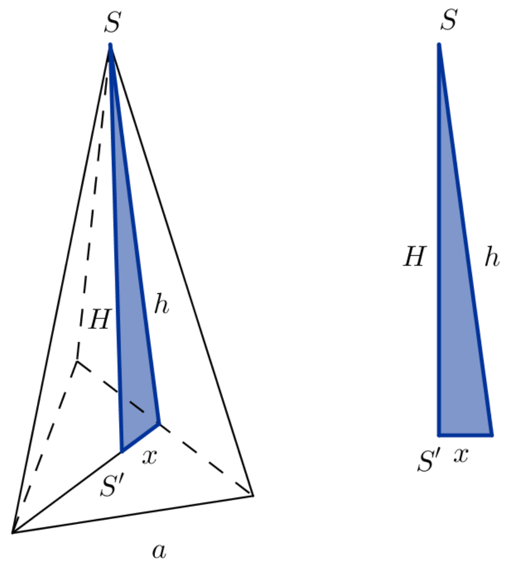
4.2.1.2 Површина правилне тростране пирамиде

Како је код правине тростране пирамиде основа једнакостраничан троугао, а омотач чине три подударна троугла, чија је основица ивица a и висина h, то је

$$P = B + M\text{, односно, } \boldsymbol{P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3ah}{2}}.$$

Да би се израчунала површина пирамиде мора се прво израчунати апотема h. На слици 4.20 види се да је $x = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}$, па је

$$h^2 = H^2 + x^2.$$



Слика 4.20. Тространа пирамида

Задаци:

Основни ниво

1. Израчунај површину правилне тростране пирамиде ако је основна ивица $8cm$ и висина бочне стране $12cm$.

Средњи ниво

2. Основна ивица правилне тростране пирамиде је $6cm$, а површина омотача је два пута већа од површине базе. Израчунај површину пирамиде.

Напредни ниво

3. Израчунај површину правилне тростране пирамиде чија је висина бочне стране $2m$, а нагиб бочних страна према равни основе 60°.

4.2.1.3 Површина правилне шестостране пирамиде

Из већ познатих елемената:

$$P = B + M,\ B = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \text{ и } M = 6 \cdot \frac{a \cdot h}{2},$$

следи

$$\boldsymbol{P = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 6 \cdot \frac{a \cdot h}{2}}.$$

Задаци:

Основни ниво

1. Израчунај површину правилне шестостране пирамиде ако је површина основе $B = 72\sqrt{3}cm^2$ и површина омотача $M = 120\sqrt{3}cm^2$.

Средњи ниво

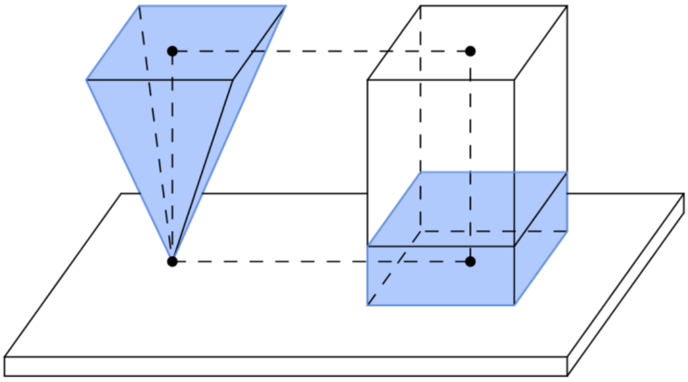
2. Израчунај површину правилне шестостране пирамиде ако је:
   а) основна ивица $4\sqrt{3}cm$ и висина пирамиде $8cm$;
   б) основна ивица $8cm$ и висина бочне стране $5\sqrt{3}cm$;
   в) висина бочне стране $2\sqrt{3}cm$ и висина пирамиде $3cm$.

Напредни ниво

3. Израчунај површину правилне шестостране пирамиде чија је висина $4cm$, а нагиб бочних ивица према равни основе 45°.

4.2.2 Запремина пирамиде

Ако се направе шупљи модели једне призме и једне пирамиде, али тако да су им основе подударне и да имају једнаке висине (слика 4.21), поставља се питање какав однос постоји између запремина ових полиедара?



Слика 4.21. Однос запремина пирамиде и призме

Пирамида се најпре напуни ситним песком, а затим се тај песак преспе у призму. Пресипање песка треба поновити још два пута да би се призма напунила. Дакле, пирамида има, у овом случају, три пута мању запремину од призме [2].

Ова чињеница, која се експериментално уочава, може се и доказати. Наиме, важи теорема:

Запремина пирамиде једнака је трећини приоизвода површине основе и висине.

То се записује формулом:

$$\boldsymbol{V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot H.}$$

4.2.2.1 Запремина правилне четворостране пирамиде

Основа правилне четворостране пирамиде је квадрат, па је површина основе $B = a^2$ и запремина такве пирамиде:

$$\boldsymbol{V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot H.}$$

Задаци:

Основни ниво

1. Израчунај запремину правилне четворостране пирамиде ако је површина основе $36cm^2$, а висина пирамиде $4cm$.

Средњи ниво

2. Висина правилне четворостране пирамиде је $9cm$, а запремина $300cm^3$. Израчунај дужину основне ивице.

Напредни ниво

3. Дијагонални пресек правилне четворостране пирамиде је једнакостранични троугао површине $4\sqrt{3}cm^2$. Израчунај запремину пирамиде.

4.2.2.2 Запремина правилне тростране пирамиде

За правилну тространу пирамиду је $B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, па је

$$\boldsymbol{V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H.}$$

Задаци:

Основни ниво

1. Израчунај запремину правилне тростране пирамиде ако је површина омотача $72cm^2$ и основна ивица $6cm$.

Средњи ниво

2. Израчунај запремину правилне тростране пирамиде код које је површина основе $9\sqrt{3}cm^2$, а површина бочне стране $9cm^2$.

Напредни ниво

3. Израчунај запремину једнакоивичне тростране пирамиде чија је површина $36\sqrt{3}cm^2$.

4.2.2.3 Запремина правилне шестостране пирамиде

Како је $B = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, то је

$$\boldsymbol{V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H.}$$

Задаци:

Основни ниво

1. Израчунај запремину правилне шестостране пирамиде ако је $\mathrm{B} = 36\sqrt{3}cm^2$ и висина пирамиде $6cm$.

Средњи ниво

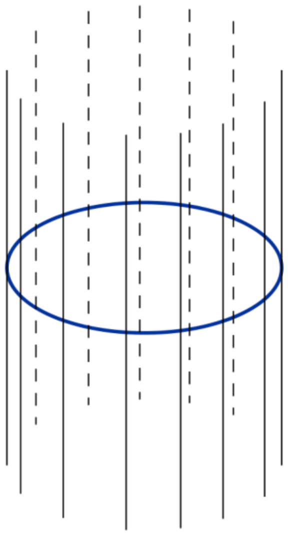
2. Запремина правилне шестостране пирамиде је $162cm^3$, а основна ивица $3\sqrt{3}cm$. Израчунај висину пирамиде.

Напредни ниво

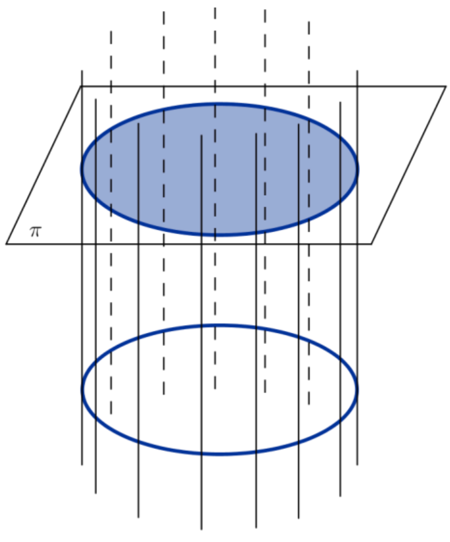
3. Колика је запремина правилне шестостране пирамиде основне ивице a код које бочна ивица и њена пројекција на основу чине угао од 45°.

4.3 Ваљак

Посматра се једна права која се, остајући паралелна свом првобитном положају, креће по некој кружници тако да је нормална на раван којој та кружница припада. Права на тај начин описује површ (слика 4.22) која се назива ***цилиндрична површ.***



Слика 4.22. Цилиндрична површ



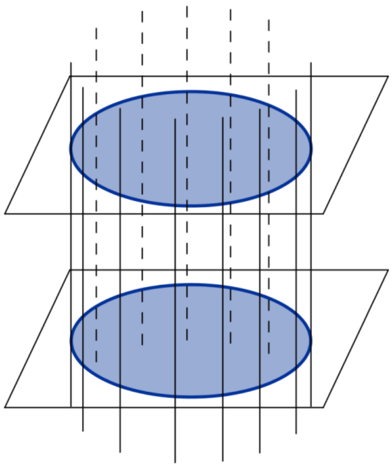
Слика 4.23. Пресек цилиндричне површи и равни

Покретна права је ***изводница***, а стална кружница је ***водиља*** цилиндричне површи.

Ако се примети да се уместо кружнице за водиљу може узети и нека друга линија, изводница не мора бити нормална на раван кружнице. Ти случајеви се неће разматрати.

Пресек цилиндричне површи и равни π нормалне на изводницу назива се ***нормални пресек***. Нормални пресек представља кружницу (слика 4.23).

Ако се посматра цилиндрична површ код које је изводница нормална на раван водиље и ако се ова цилиндрична површ пресече двема паралелним равнима нормалним на изводницу, добиће се обло геометријско тело ограничено са два круга и делом цилиндричне површи (слика 4.24).



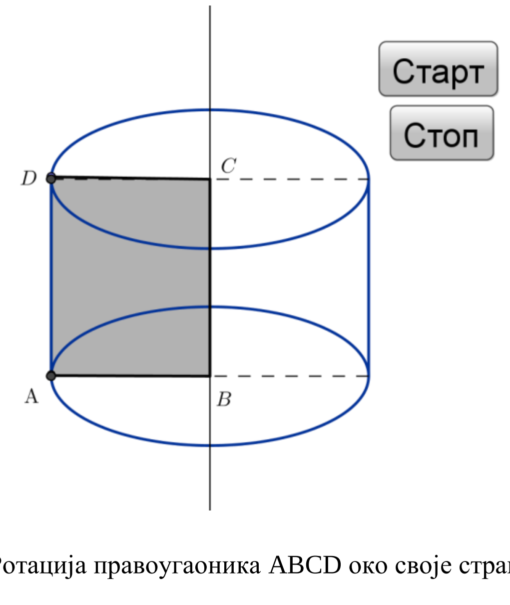
Слика 4.24. Ваљак

Геометријско тело ограничено са два круга у паралелним равнима и делом цилиндричне површи, чије су изводнице нормалне на равни тих кругова, назива се ваљак.

Кругови су основе ваљка. Део цилиндричне површи између равни основа је омотач ваљка. Дуж нормална на основе, са крајњим тачкама у основама, назива се висина ваљка (нпр. CB на слици 4.25). Висина се обележава са H.

Нека се правоугаоник ABCD обрће око своје странице BC. Шта образује скуп свих тачака у простору кроз које правоугаоник пролази? Лако се види да покретне странице правоугаоника описују ваљак (слика 4.25). Страница AB правоугаоника је полупречник основе тог ваљка. Непокретна страница BC је његова висина. Страница AD описује омотач ваљка. Ова дуж се назива ***изводница ваљка*** [1].

Права којој припада дуж BC назива се ***оса ваљка***. Пресек ваљка и равни којој припада оса ваљка назива се ***осни пресек ваљка***. Осни пресек ваљка је правоугаоник, а може бити и квадрат, ако је пречник основе ваљка једнак висини ваљка.



Слика 4.25. Ротација правоугаоника ABCD око своје странице CB

Задаци:

Основни ниво

1. Одреди полупречник (r) и висину (H) ваљка који настаје када правоугаоник са страницама $a = 10cm$ и $b = 4cm$ окреће око:
   а) странице a;
   б) странице b;
   в) симетрале странице a;
   г) симетрала странице b.

Средњи ниво

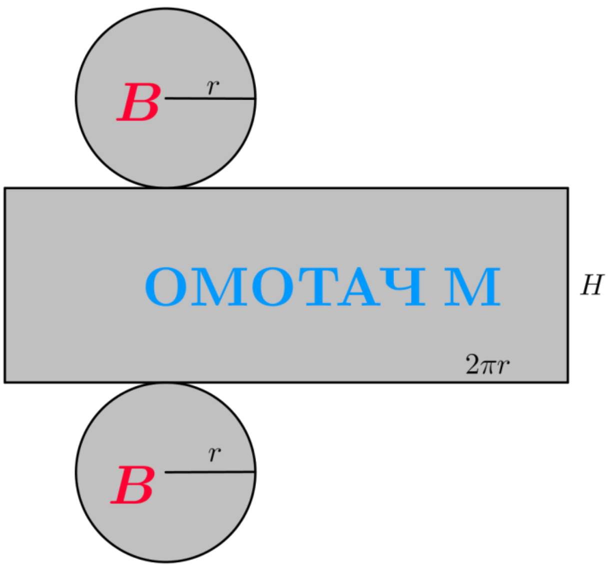
2. Ротацијом правоугаоника око једне његове странице настаје ваљак чија је површина осног пресека $100cm^2$. Колика је површина тог правоугаоника?

Напредни ниво

3. Израчунај површину осног пресека равностраног ваљка ако је:
   a) $r = 2cm$;
   b) $\mathrm{H} = 9cm$;
   c) дијагонала осног пресека $d = 10cm$.

4.3.1 Површина ваљка

Посматра се ваљак начињен од хартије. Када се развије површ тог ваљка у једну раван, тако што се ваљак расече по изводници и круговима основа, добије се мрежа ваљка (слика 4.26).



Слика 4.26. Мрежа ваљка

Закључује се, мрежу ваљка чине две основе (два подударна круга) и омотач (правоугаоник чија је једна страница обим основе а друга висина ваљка).

Површину ваљка чине површине његових основа и површина омотача. Следи,

Површина ваљка једнака је збиру површина основа и површине омотача.

Површина основе се означава са B, а површина омотача са M, онда се површина P ваљка записује у облику:

$$\mathrm{P} = 2 \cdot \mathrm{B} + \mathrm{M}$$

Како је основа круг полупречника r, а омотач је правоугаоник страница 2rπ и H, то је

$$B = r^2\pi \text{ и } M = 2r\pi H,$$

па је

$$P = 2r^2\pi + 2r\pi H, \text{ односно}$$

$$P = 2r\pi(r + H). \text{ O,}$$

Задаци:

Основни ниво

1. Израчунај површину правог ваљка ако је $r = 3cm$, $\mathrm{H} = 4cm$.

Средњи ниво

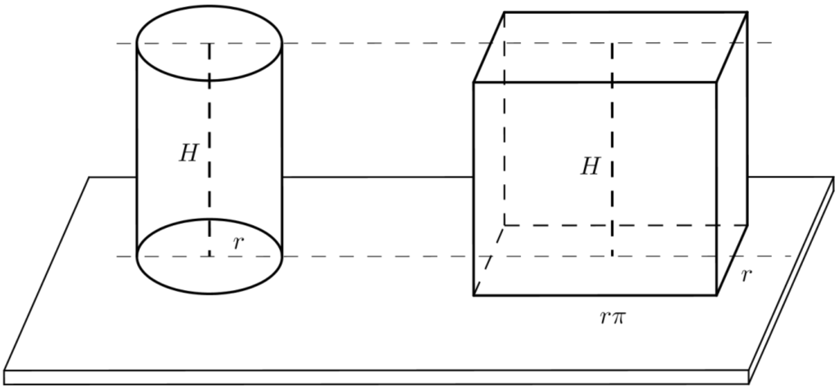
2. Израчунај површину правог ваљка код кога је $\mathrm{H} = 2r$ ако је:
   а) $\mathrm{B} = 25\pi cm^2$; б) $\mathrm{M} = 64\pi cm^2$.

Напредни ниво

3. У правилну шестострану призму основне ивице $a = 8cm$ и висине $H = 2cm$ уписан је и око ње описан ваљак. Наћи површине тих ваљака.

4.3.2 Запремина ваљка

Ако се ваљак упореди са квадром који има једнаку површину основе и висину као и ваљак, добиће се запремина. Направи се од картона модел ваљка полупречника основе r и висине H. Направи се од картона и модел квадра са ивицама r, rπ и H (слика 4.27). Пунећи ове моделе песком утврдиће се однос запремина ових тела.



Слика 4.27. Запремина ваљка

Овим огледом утврђује се да је запремина ваљка једнака запремини квадра са којим ваљак има једнаку основу и једнаку висину.

Како запремина посматраног квадра износи

$$r \cdot r\pi \cdot H \text{ тј. } r^2 \cdot \pi \cdot H,$$

то је запремина V ваљка

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot H.$$

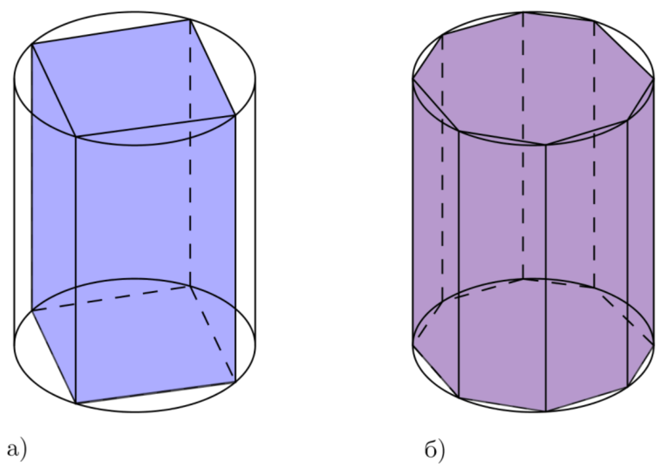
Ако се са B означи површина основе ваљка, добија се

$$V = B \cdot H,$$

јер је $B = r^2\pi$.

Одавде следи,

Запремина ваљка једнака је производу површине његове основе и висине.



Слика 4.28. Однос запремине ваљка и призме

До формуле за израчунавање запремине ваљка може се доћи и на следећи начин. Ако се у ваљак упише једна правилна четворострана призма (слика 4.28.а). Запремина ове призме је, очигледно, мања од запремине ваљка. Ако се број основних ивица ове призме удвостручи (слика 4.28.б), запремина тако добијене призме постаје ближа запремини ваљка. Настављајући овакво удвостручавање основних ивица уписане призме добија се сваки пут призма чија је запремина већа од запремине претходне и све ближа запремини датог ваљка. То нас наводи на закључак да је и запремина ваљка, као и запремина уписане призме, једнака производу основе и висине:

$$V = B \cdot H, \text{тј. } V = r^2 \cdot \pi \cdot H.$$

Задаци:

Основни ниво

1. Израчунај запремину ваљка ако је површина основе $25\pi cm^2$ и висина $5cm$.

Средњи ниво

2. Израчунај запремину равностраног ваљка ($\mathrm{H} = 2r$) ако је обим осног пресека ваљка $16\ cm$.

Напредни ниво

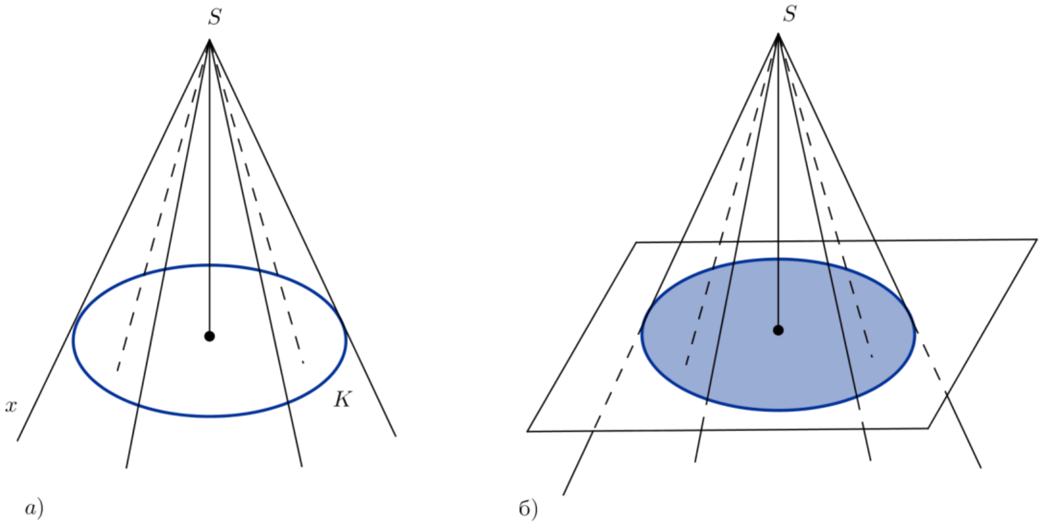
3. Дијагонала осног пресека ваљка образује са равни основе угао од 60°. Израчунај површину ваљка ако је његова запремина $16\sqrt{3}\pi cm^3$.

4.4 Купа

Уочи се у равни круг К и ван тог круга тачка S која припада правој нормалној на раван круга и пролази кроз центар круга (слика 4.29.а). Ако полуправа Sx клизи по кружници, она описује површ која се назива ***конусна површ***.

Тачка S је врх конусне површи, а права која пролази кроз центар круга и врх, је њена ***оса***.

Полуправа Sx је ***изводница***, а круг К је ***водиља*** конусне површи.



Слика 4.29. Конусна површ

Ако се конусна површ пресече једном равни нормалном на осу, добија се обло геометријско тело ограничено делом конусне површи и делом равни (слика 4.29.б). ***Геометријско тело ограничено једним делом обртне конусне површи и кругом назива се права кружна купа, или краће, купа.***

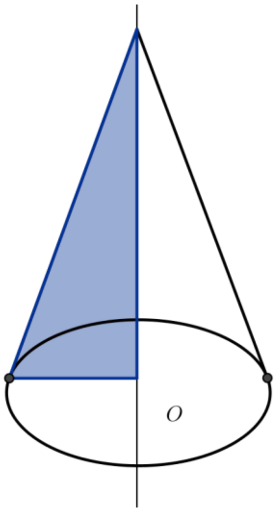
Круг је основа купе. Део конусне површи је ***омотач*** купе. Врх конусне површи је и ***врх*** купе.

Нормална дуж на основу, чије су крајње тачке врх купе и центар основе, назива се ***висина*** купе. Висином се назива и дужина ове нормале.

Одсек изводнице конусне површи од врха S до основе купе назива се ***изводница купе***. Изводница се назива и дужина тог одсека. Све изводнице праве купе су једнаке.

Ако ортогонална пројекција врха купе на раван њене основе не пада у центар њене основе, онда је то ***коса*** купа.

Правоугли троугао се обрће око једне своје катете. Шта образује скуп свих тачака кроз које тај троугао пролази? Скуп свих тачака кроз које тај троугао пролази образује праву купу (слика 4.30). Покретна катета је полупречник купе и она образује основу купе. Непокретна катета је висина купе, а хипотенуза је изводница купе – она описује омотач. Права којој припада висина купе је оса купе.

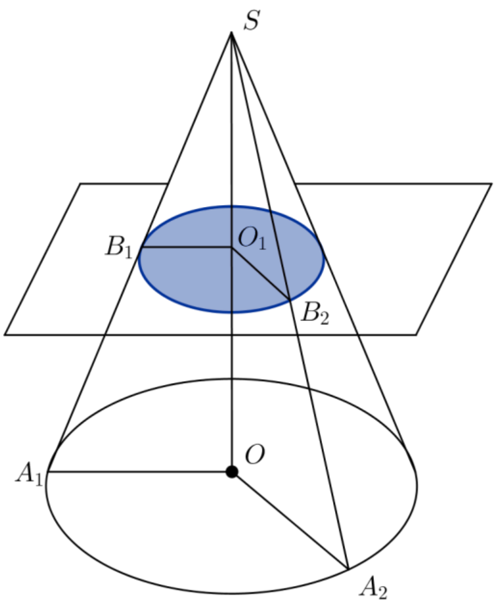


Слика 4.30. Ротација правоуглог троугла око једне своје катете

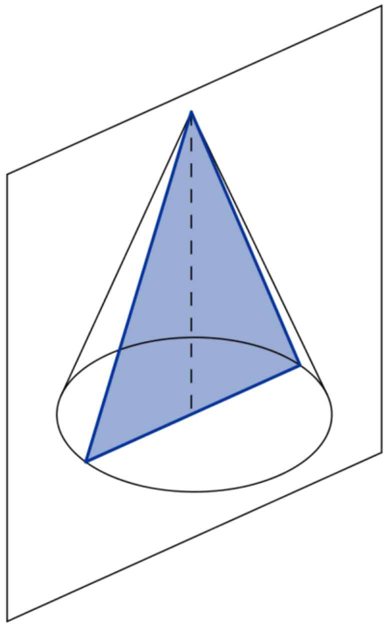
Купа се пресече са равни која је нормална на осу купе. Шта се добија као пресек? Посматрајући и утврђујући троуглове SO_1B_1, SO_1B_2,..., на слици 4.31 покажи да је круг пресек дате равни и купе.

Да ли је пресек купе и равни нормалне на њену осу увек круг?

Пресек купе и равни којој припада оса купе назива се ***осни пресек купе***. Осни пресек купе је троугао (слика 4.32). Осни пресек купе може да буде једнакостраничан троугао, док правоугли није могуће.



Слика 4.31. Пресек купе и равни нормалне на њу



Слика 4.32. Осни пресек купе

Задаци:

Основни ниво

1. Одреди полупречник основе и висину купе која настаје ротацијом једнокраког троугла основице $6cm$ и крака $5cm$ око симетрале основице.

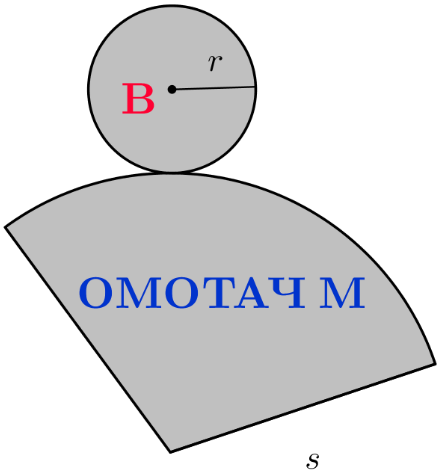
Средњи ниво

1. Израчунај дужину изводнице праве купе ако је:
   а) $r = 9cm$, $\mathrm{H} = 12cm$; б) $r = \mathrm{H} = 6cm$.

Напредни ниво

2. Централни угао кружног исечка је $240°$, а његов полупречник $18cm$.
   а) Израчунај дужину лука тог исечка.
   б) Ако је тај исечак омотач купе израчунај полупречник основе купе.
   в) Израчунај површину основе те купе.

4.4.1 Површина купе



Слика 4.33. Мрежа купе

Ако се купа разреже дуж једне изводнице и по кругу основе па се развије у раван као на слици 4.33, добија се ***мрежа купе***.

Мрежу купе чине круг и кружни исечак. При том је полупречник круга једнак полупречнику r основе купе, а полупречник кружног исечка једнак је изводници s купе.

Површину P купе образују површина основе B и површина омотача M.

Према томе:

Површина купе једнака је збиру површина основе и омотача.

Кратко се записује:

$$P = B + M$$

Основа купе је круг, па је В $= r^2\pi$. Омотач купе је кружни исечак чији је полупречник једнак изводници купе (s), а дужина лука тог кружног исечка је $2r\pi$. Према формули за површину кружног исечка се добија:

$$M = \frac{1}{2}2r\pi s \text{ тј. } M = r\pi s.$$

Отуда је површина купе:

$$P = r^2\pi + r\pi s, \text{ тј.}$$

$$P = r\pi(r + s).$$

Закључује се да површина купе зависи од полупречника основе купе и изводнице купе.

Како се површина купе израчунава по обрасцу

$$P = r\pi(r + s),$$

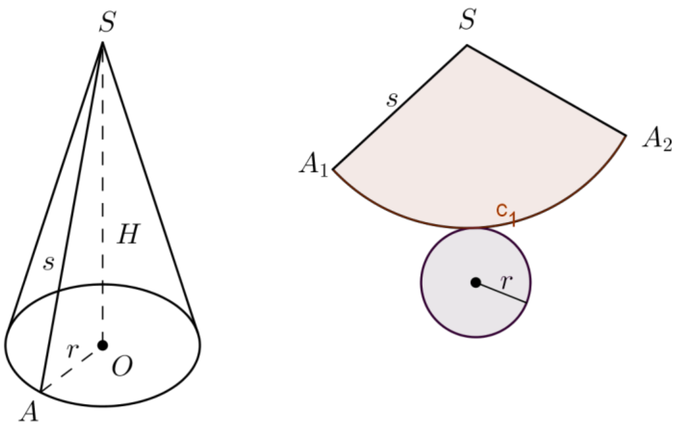
то је неопходно да се зна полупречник купе и њена изводница. Како је полупречник купе познат, преостаје само да се одреди њена изводница.

Уочи се правоугли троугао AOS (слика 4.34). Означи се

$|\mathrm{AO}| = r, |OS| = H, |AS| = s,$ види се да је, када се примени Питагорина теорема,

$$s^2 = r^2 + H^2,$$

а одавде $s = \sqrt{r^2 + H^2}$.



Слика 4.34. Издвајање троугла AOS код купе

Задаци:

Основни ниво

1. Површина праве купе је $96\pi cm^2$, а површина њеног омотача је $60\pi cm^2$. Наћи површину основе купе.

Средњи ниво

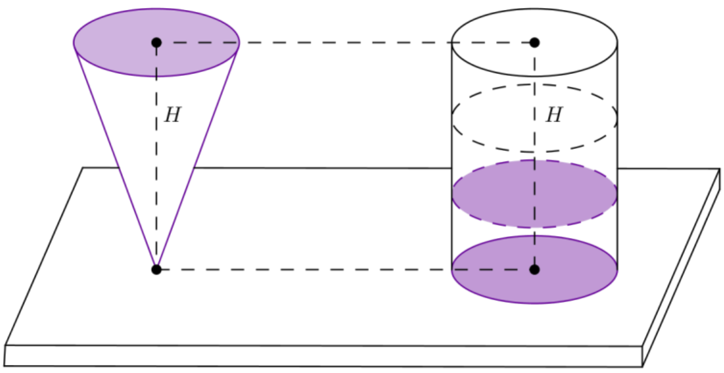
2. Израчунај површину праве купе ако је дато:
   а) $= 5cm$, H $= 12cm$;
   б) $= 3cm, s = 5cm$;
   в) H $= 8cm, s = 10cm$.

Напредни ниво

3. Један пловак чине две купе које се налазе са разних страна заједничке основе. Колико треба лима за њихову израду ако је пречник заједничке основе $0{,}73m$, а њихове висине $12cm$ и $60cm$ (отпаци се не укључују)?

4.4.2 Запремина купе

Направе се од картона модели ваљка и купе, тако да имају једнаке висине и једнаке основе. Какав је однос запремина ових тела?



Слика 4.35. Однос запремина купе и ваљка

Напуни се најпре модел купе ситним песком, па се тај песак затим премести у ваљак. Овим огледом се показује да је запремина купе три пута мања од запремине ваљка ако имају једнаке основе и једнаке висине (слика 4.35). Како је запремина ваљка једнака производу површине основе B и висине H, закључује се:

Запремина купе једнака је трећини производа површина основе и висине.

Ово се записује на следећи начин:

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot H.$$

Како је

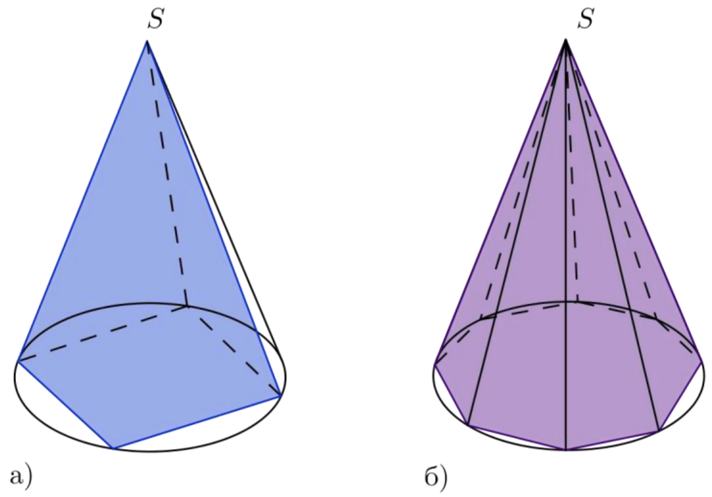
$$B = r^2\pi,$$

то је

$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot H.$$

До исте формуле за израчунавање купе може се доћи и на другачији начин.

У купу се упише једна правилна четворострана пирамида (слика 4.36.а). Ако се удвостручи број њених основних ивица, тада ће се површина основе пирамиде повећати и приближити површини основе купе, па ће се повећати и запремина пирамиде (слика 4.36.б). Ако се настави са удвостручавањем броја основних ивица пирамиде, повећаваће се и запремина тако добијених пирамида и све више ће се приближавати запремини дате купе. То нас упућује на закључак да је и запремина купе, као и запремина пирамиде, једнака трећини производа површине основе и висине [2].



Слика 4.36. Однос запремина купе и пирамиде

Задаци:

Основни ниво

1. Површина основе праве купе износи $9\pi cm^2$, а висина $4cm$. Израчунати запремину купе.

Средњи ниво

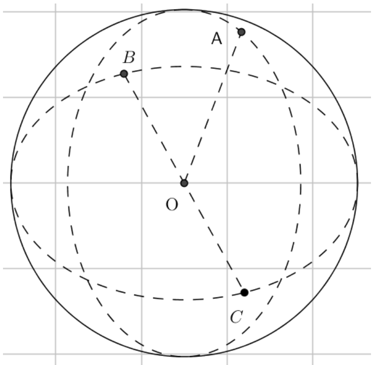
2. Правоугли троугао чија је хипотенуза $26cm$, а једна катета $10cm$ ротира око краће катете. Израчунај запремину обртног тела.

Напредни ниво

3. Основа купе има површину $7\pi cm^2$. Када се развије омотач те купе, добије се осмина круга. Израчунај површину и запремину те купе.

4.5 Лопта

Скуп свих тачака у простору једнако удаљених од једне тачке О простора образује површ која се назива ***сфера*** (слика 4.37).



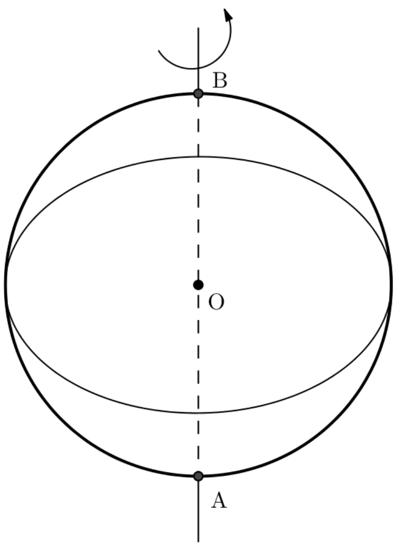
Слика 4.37. Сфера

Тачка О је ***центар*** сфере, а дуж чије су крајње тачке центар сфере и произвољна тачка на сфери назива се ***полупречник***.

Дужину ове дужи се такође назива полупречник. Дуж која спаја две тачке на сфери и садржи центар сфере је ***пречник сфере***.

Тело ограничено сфером назива се ***лопта***.

Центар сфере је истовремено и центар лопте, а полупречник сфере је, такође, истовремено и полупречник лопте. Сфера дели простор на две области: унутрашњу и спољашњу област сфере. Све тачке, чије је растојање до центра мање од полупречника сфере, припадају унутрашњој области. Тачка припада спољашњој области сфере ако је растојање тачке од центра веће од полупречника. Тачка припада сфери, ако је растојање до центра једнако полупречнику сфере.



Слика 4.38. Обртање круга око свог пречника

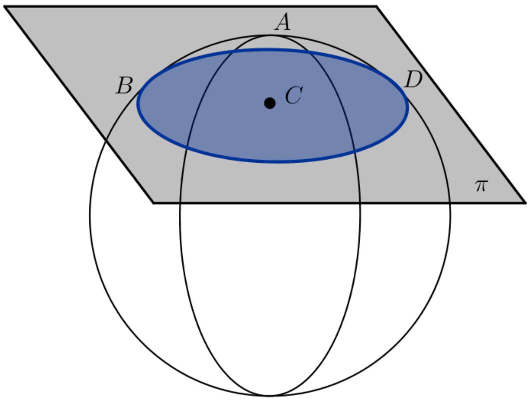
Скуп свих тачака унутрашње области сфере и свих тачака сфере образује лопту.

Лопта је, као и сфера, одређена својим центром и полупречником. Зато се понекад лопта означава са L(O,r), а сфера са S(O, r), где је O центар, а r полупречник лопте, односно сфере.

Уочи се круг K(O,r) и један његов пречник AB (слика 4.38). Шта се добија његовим обртањем око пречника AB? Добија се лопта.

Пресече се лопта L(O,r) са равни π и посматра се добијени пресек. Пресек лопте и равни је увек круг (слика 4.39). Ако тој равни припада центар лопте, пресечни круг се назива ***велики круг лопте***.

Део лопте који одсеца нека раван (раван BCD на слици 4.39) назива се ***лоптин одсечак***. Круг по коме раван сече лопту, назива се ***основа лоптиног исечка***. Део сфере, који заједно са основом лоптиног одсечка ограничава тај одсечак назива се ***калота***.

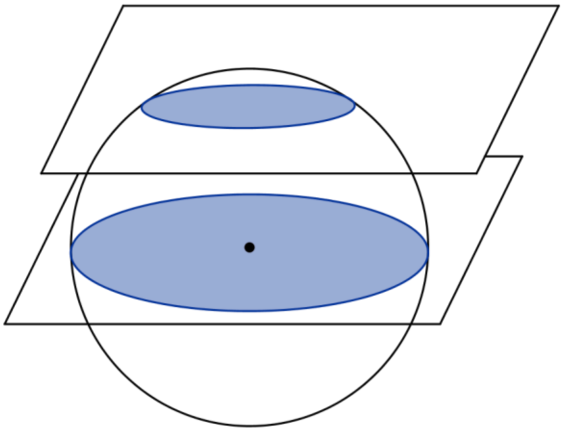


Слика 4.39. Лоптин одсечак - калота

Калота, чији је гранични круг велики круг сфере, назива се ***полусфера***, а лоптин одсечак , чија је основа велики круг лопте, је ***полулопта***.

Ако лопта и раван имају само једну заједничку тачку, каже се да раван додирује лопту, да је то ***тангентна раван***. На пример, посматра се лопта на столу. Лопта и раван стола имају само једну заједнилку тачку а раван стола је тангентна раван.

Пресече се лопта на две паралелне равни (слика 4.40). Део сфере између две паралелне равни које секу ту сферу, назива се ***сферни појас (зона)***.



Слика 4.40. Сферни појас - зона

Део лопте између две паралелне равни које је секу назива се ***лоптин слој***.

Задаци:

Основни ниво

1. Скуп свих тачака у простору једнако удаљених од једне сталне тачке назива се ______________________.
   Сфера заједно са унутрашњости је део простора који се назива _______________________.

   На цртици упиши одговор.

Средњи ниво

2. Одреди полупречник лопте ако је:
   а) површина великог лоптиног круга $100\pi cm^2$;
   б) обим великог лоптиног круга $50\pi cm^2$.

Напредни ниво

3. Лопта полупречника $14cm$ котрља се (без клизања) по равној површини. Колико метара пређе лопта након десет обртаја (узми $\pi = \frac{22}{7}$).

4.5.1 Површина лопте

Може се доказати да за површину лопте важи теорема ***Површина лопте једнака је четвоространој површини њеног великог круга.***

Ако се полупречник лопте означи са r, површина великог круга лопте износи $r^2\pi$, па је површина лопте:

$$P = 4 \cdot r^2 \cdot \pi.$$

Задаци:

Основни ниво

1. Израчунај површину лопте чији је полупречник $r = 3cm$.

Средњи ниво

2. Круг обима $9\pi cm$ окреће се око једног свог пречника. Израчунај површину обртног тела.

Напредни ниво

3. Растојање две тачке A и B , које припадају сфери, је $30cm$, а удаљеност центра те сфере од дужи AB је $18cm$. Израчунај површину те сфере.

4.5.2 Запремина лопте

За запремину лопте важи теорема

Запремина лопте једнака је трећини производа њене површине и полупречника.

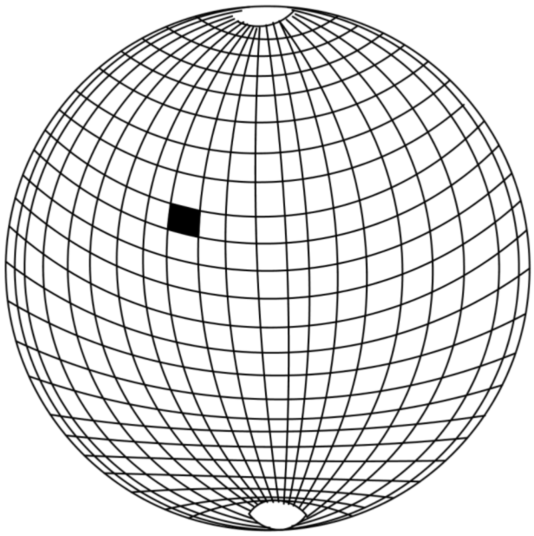
Означи се полупречник лопте са r. Тада запремина V лопте је

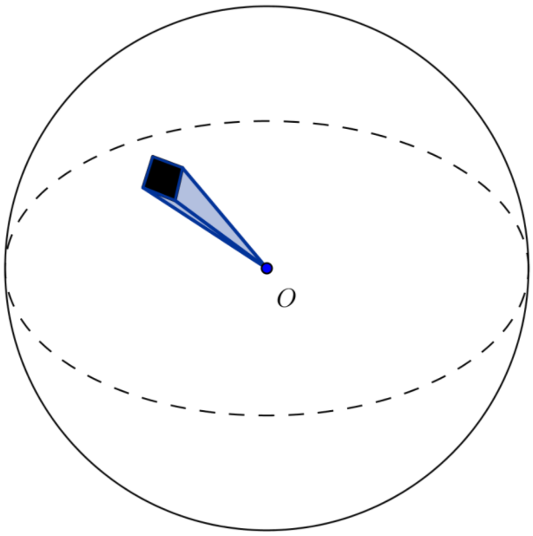
$$V = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot r^2 \cdot \pi \cdot r, \text{ односно, } V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi.$$

На слици 4.41.а је модел лопте чија је сфера кружницама подељена на мање делове. Границе ових делова су делови кружница на лопти. Уколико су делови сфере мањи, мање се разликују од четвороуглова, односно троуглова.

Површине малих делова сфере се означе са P_1, P_2,...,P_n. Један такав мали део је истакнут на слици 4.41.а.

Узме се сада један од тих делова површи лопте, као основа „пирамиде“ са врхом у центру лопте и висином једнаком полупречнику лопте (слика 4.41.б).





Слика 4.41. Запремина лопте

Запремина V лопте је једнака збиру запремина свих таквих „пирамида“ . Свака од ових „пирамида“ има запремину блиску броју $\frac{1}{3}$ $P_i \cdot H$, где је P_i површина дела површи лопте који чини основу „пирамиде“.

Према овоме запремина V лопте је:

$$V \approx \frac{1}{3} \cdot P_1 \cdot H + \frac{1}{3} \cdot P_2 \cdot H + \cdots + \frac{1}{3} \cdot P_n \cdot H,$$

или, с обзиром да је H ≈ r .

$$V \approx \frac{1}{3} \cdot (P_1 + P_2 + \cdots + P_n) \cdot r.$$

Како је збир површина свих делова сфере једнак површини лопте, тј.

$$P_1 + P_2 + \cdots + P_n = 4 \cdot r^2 \cdot \pi,$$

то се за запремину лопте узима

$V = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot r^2 \cdot \pi \cdot r$, односно, $V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi.$

Задаци:

Основни ниво

1. Израчунај запремину лопте чији је полупречник $2cm$.

Средњи ниво

2. Полукруг површине $50\pi cm^2$ ротира око свог пречника. Израчунај запремину тако добијеног тела.

Напредни ниво

3. Од оловне плоче облика квадра, чије су ивице $40cm, 25cm$ и $5cm$, треба излити оловне кугле полупречника $1cm$.
   a) Колика је маса једне такве кугле?
   b) Колико ће се оваквих кугли добити од дате плоче ($\rho = 11{,}4 g/cm^3$)?

Закључак

Примена рачунара у настави математике доприноси квалитету, не само наставног процеса, него и квалитету образовања. „*При обучавању деце неопходно је тежити к томе да се код њих постепено сједињује знање са умењем. Изгледа да је од свих наука једино математика способна да у потпуности задовољи овај захтев.*“ (Immanuel Kant)

Циљ овог рада је да помогне наставницима да свaладају отпор ученика према предмету математика, тј. разбијање предрасуда да је математика „баук“. Наставник, као организатор и координатор наставног процеса, може допринети подизању мотивације ученика. Својим поступцима, системом праћења и награђивања и другим облицима спољашње мотивације, наставник може значајно утицати на развој унутрашње мотивације ученика.

Увођење образовног софтвера Геогебре у школе и унапређивање наставе је један од битних корака у учењу математике. Употреба овог софтвера била би од велике користи, јер нуди одличан начин представљања, математичких објеката што ученицима олакшава усвајање знања, а самим тим и побољшава квалитет наставног процеса. Овакав начин презентације градива пробудиће кративност ученика и на тај начин заитересовати за помно праћење на часовима. Креирањем електронских лекција помоћу Геогебре омогућава се боља визуелизација, већа прецизност и скраћује се време потребно за обраду задатака. Наравно, Геогебра се може користити и у другим областима математике, ако се настава добро припреми и прилагоди ученицима.

Задатак овог рада је да наставницима укаже на погодности увођења програмског пакета Геогебра у настави математике, као и могућност за што веће остваривање образовних стандарда. На овај начин наставник мотивише ученике да прате на часу, што представља кључни моменат у усвајању знања па касније и примени наученог.

Литература

[1] Душан Аднађевић, Драгослав Милић, Математика за 8. разред основне школе, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд 2006.

[2] Душан Аднађевић, Драгослав Милић, Збирка задатака из математике за 8. разред основне школе,Завод за уџбенике и наставна средства, Београд 2000.

[3] Миодраг Максимовић, Збирка задатака из математике за 8. разред основне школе,"САЈНОС"ДОО, Нови Сад 2011.

[4] Соња Вученов, Мерење ученичког напретка при коришћењу рачунара у настави математике, мастер рад, Нови Сад 2012.

[5] Жолт Наместовски, Утицај примене савремених наставних средстава на повећање ефикасности наставе у основној школи, магистарска теза, Зрењанин 2008.

[6] Наташа Чикош Мандреш, Образовани информациони системи и програми – унапређивање наставе математике, мастер рад, Београд 2013.

[7] Љубица Поповић, Примена рачунара у настави математике, мастер рад, Београд 2012.

[8] Саво Ђебић, Геометрија у школској настави математике, Иновације у настави, год. 1, бр.1 (1983) 5-17