УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Данијел Суботић

Оцењивање густине расподела у присуству грешке мерења

— мастер рад —

Београд, 2017.

Предговор

Оцењивање густине у присуству грешака у мерењу је један од важних проблема у непараметарској статистици. Значајни примери су непараметарска регресија с грешкама у независним промењљивим и изоштравање слике или сигнала. У последње време наведене области добијају на значају, како практично, тако и теоријски. Најчешће коришћена метода оцењивања ослања се на деконволуцију расподеле и оцену густине језгром. С једне стране ове методе се користе у реалним проблемима, као што су поменута реконструкција слике или сигнала и разни економетријски и биометријски модели. С друге стране, неопходно је дубоко познавање Фуријеове анализе, теорије вероватноћа, функционалне анализе да би се строго засновао и објаснио поступак деконволуције.

У раду ће бити размотрена три модела: један с класичном адитивном грешком мерења, један с Берксоновом грешком и мешавина две претходно наведене грешке. Биће представљени услови под којима је могуће користити ову методу оцењивања у наведеним моделима. Циљ рада је испитати асимптотско понашање средње интегралне квадратне грешке (MISE). За сваки од наглашених модела потребно је пронаћи оптимални параметар равнања, који се користи приликом оцењивања.

Рад је подељен у три целине. У првом поглављу уводе се основни појмови и резултати оцењивања густине језгром у случају без грешке. Друго поглавље представља главни део рада, у коме се разматрају сва три наведена модела и проучавају њихове основне особине: пристрасност, постојаност, одређивање параметра равнања. У трећем поглављу изводимо симулације добијених резултата у другом поглављу.

Садржај

Поглавље 1

Увод

Функција густина расподеле је један од основних појмова у вероватноћи и статистици. Нека је X нека апсолутно непрекидна случајна величина са функцијом густине $f(\cdot)$. Задавањем функције $f(\cdot)$ можемо одредити и вредност функције расподеле, помоћу релације

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Сада претпоставимо да имамо прост случајан узорак $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ из непознате функције расподеле, а самим тим и функције густине. Циљ је оценити функцију густине те расподеле у случају када се само располаже простим случајним узорком.

1.1 Оцењивање густине

1.1.1 Оцењивање језгром

Упоредно са тестирањем хипотеза једно од основних питања математичке статистике је свакако оцењивање. Посебно је актуелно оцењивање густине. Једна од чувенијих, најстаријих и најкоришћенијих метода је наравно хистограм. Нека је дата почетна тачка x_0 и дужина интервала h. Тада је један интервал хистограма

$$[x_0 + mh, x_0 + (m+1)h), \quad m \in \mathbb{Z}.$$

У том случају оцењујемо густину $f(\cdot)$ у тачки $x \in \mathbb{R}$ као

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^{n} I\{X_i \text{ у истом интервалу са тачком } x\}.$$

Но ова идеја има своје недостатке, које свакако хоћемо да превазидјемо. Ти недостаци су:

- одређивање почетне тачке x_0,
- хистограм није диференцијабилан, ни непрекидан,
- проблем одређивања дужине сваког интервала, тј. параметра h.

Једна од природних идеја за побољшање је "наивна" оцена густине

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{2nh} \sum_{j=1}^{n} I \left\{ \left| \frac{x - X_j}{h} \right| < 1 \right\},$$

где су $X_1, \ldots, X_n$ елементи простог случајног узорка, $I(\cdot)$ индикаторска функција. Међутим, испоставља се да ни та оцена није довољно квалитетна, зато уводимо оцену густине $f(\cdot)$ језгром

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{j=1}^{n} K \left(\frac{x - X_j}{h} \right),$$

где је $K(\cdot)$ функција коју зовемо језгром. Ова функција задовољава следеће особине

- $\int_{-\infty}^{\infty} K^2(t)dt < \infty$,
- $\int_{-\infty}^{\infty} t^2 K(t)dt = k_2 < \infty$,
- $\int_{-\infty}^{\infty} |t^3| K(t)dt < \infty$,
- K је симетрична функција,
- $\int_{-\infty}^{\infty} K(t)dt = 1$,
- $\int_{-\infty}^{\infty} tK(t)dt = 0$.

Дефиниција 1.1.1. *Редом језгра $K(\cdot)$ зовемо такав број $k \in \mathbb{N}$ да важи следеће*

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^j K(t)dt = 0, \quad j = \overline{1, j-1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^j K(t)dt \neq 0, \quad j = k.$$

Приметимо да према наведној дефиницији важи да је одабрано језгро $K(\cdot)$ реда 2.

Са $b(\cdot)$ означавамо пристрасност грешке, тј.

$$b(\widehat{f}) = E(\widehat{f}(x)) - f(x).$$

Једна од мера квалитета оцене је средње интегрална квадратна грешка ($MISE(\cdot)$), која се дефинише као

$$MISE(\widehat{f}) = E\int_{-\infty}^{\infty}(\widehat{f}(x) - f(x))^2 dx.$$

Све то можемо даље да уопштимо у једну теорему. Али пре тога формулишимо лему.

MISE и његов асимптотски развој

Лема 1.1.1. *Нека је f непрекидна функција у тачки x, нека важи $h_n \to 0$, када $n \to \infty$ и $nh_n \to \infty$ када $n \to \infty$. Тада је $\widehat{f}_n(x)$ постојана оцена $f(x)$.*

Теорема 1.1. *Нека је $f \in C^{(3)}$ и има ограничен трећи извод у околини тачке x. Нека је $K(\cdot)$ симетрично језгро, које задовољава:*

(1.) $\int_{-\infty}^{\infty} K^2(t)dt < \infty$,

(2.) $\int_{-\infty}^{\infty} t^2 K(t)dt = k_2 < \infty$,

(3.) $\int_{-\infty}^{\infty} |t^3| K(t)dt < \infty$,

(4.) K је симетрична функција,

(5.) $\int_{-\infty}^{\infty} K(t)dt = 1$,

(6.) $\int_{-\infty}^{\infty} tK(t)dt = 0$.

Тада за сваки низ $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ за који важи $h_n \to 0$, када $n \to +\infty$ важи да

$$b(\widehat{f}_n(x)) = \frac{1}{2}h_n^2 f''(x)k_2 + o(h_n^2).$$

Додатно, ако $nh_n \to +\infty$, онда

$$D(\widehat{f}_n(x)) = \frac{1}{nh_n} f(x)\int_{-\infty}^{\infty} K^2(t)dt + o\left(\frac{1}{nh_n}\right),$$

а за средње интегралну квадратну грешку важи

$$MISE(\widehat{f}) \sim \frac{1}{4}h_n^4 k_2^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(f''(x)\right)^2 dx + \frac{1}{nh_n}\int_{-\infty}^{\infty} K^2(t)dt.$$

Доказ.

$$b(\widehat{f}_n(x)) = E(\widehat{f}(x)) - f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\frac{1}{h}K\left(\frac{x-y}{h}\right)dy - f(x),$$

увођењем линеарне смене $y = x - ht$ узимајући у обзир услов (4.) и (5.), добијамо

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-ht)K(t)dt - f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t)(f(x-ht) - f(x))dt. \tag{1.1}$$

Применом Тејлорове формуле добијамо

$$f(x-ht) = f(x) + (x-ht-x)f'(x) + \frac{1}{2}(x-ht-x)^2 f''(x) + R_n,$$

где је R_n – Тејлоров остатак, и заменом у (1.1) добијамо

$$b(\widehat{f}_n(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t)\left(-ht\cdot f'(x) + \frac{1}{2}h^2t^2 f''(x) + R_n\right)dt,$$

на основу услова теореме (2.) и (6.) следи

$$b(\widehat{f}_n(x)) = \frac{1}{2}h^2 k_2 f''(x) + O(h^3), \quad h \to 0.$$

Поновимо сличан поступак за дисперзију оцене $\widehat{f}(x)$.

$$\begin{aligned}
D(\widehat{f}(x)) &= E([\widehat{f}(x)]^2) - E^2(\widehat{f}(x)) && (1.2)\\
&= \frac{1}{n}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{h^2}K^2\left(\frac{x-y}{h}\right)f(y)dy - \frac{1}{n}\left(f(x) + b(\widehat{f}(x))\right)^2 && (1.3)\\
&= \frac{1}{nh}\int_{-\infty}^{\infty}K^2(t)f(x-ht)dt - \frac{1}{n}\left(f(x) + O(h^2)\right)^2 && (1.4)\\
&= \frac{1}{nh}\int_{-\infty}^{\infty}K^2\left(f(x) - htf'(x) + h^2t^2f''(x) + \dots\right)dt + O\left(\frac{1}{n}\right) && (1.5)\\
&= \frac{1}{nh}f(x)\int_{-\infty}^{\infty}K^2(t)dt + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty. && (1.6)
\end{aligned}$$

Након чега је могуће израчунати и $MISE(\cdot)$.

$$\begin{aligned}
MISE(\widehat{f}) &= \int_{-\infty}^{\infty}\left[b^2(\widehat{f}(x)) + D(\widehat{f}(x))\right]dx && (1.7)\\
&\sim \frac{1}{4}h_n^4k_2^2\int_{-\infty}^{\infty}[f''(x)]^2dx + \frac{1}{nh_n}\int_{-\infty}^{\infty}K^2(t)dt && (1.8)
\end{aligned}$$

□

1.1.2 Одређивање параметра равнања

Следећа питања која се природно намећу: су како изабрати језгро и параметар равнања (bandwidth) h.

Једна од основних метода одабира параметра h је коришћењем $MISE(h)$ односно, налажењем таквог параметра равнања, које минимизује средње интегралну квадратну грешку оцене густине. Видимо да $MISE(\cdot)$ имплицитно зависи од h, тј.

$$AMISE(\widehat{f}; h) = \frac{1}{4}h^4 k_2^2 \int_{-\infty}^{\infty} [f''(x)]^2 dx + \frac{1}{nh}\int_{-\infty}^{\infty} K^2(t)dt, \tag{1.9}$$

где смо са $AMISE(\cdot)$ означили асимптотску средње интегралну квадратну грешку.

Нађемо извод по h од функције

$$r(h) = a \cdot h^4 + \frac{b}{nh},$$

где је $a = \frac{1}{4}k_2^2 \int_{-\infty}^{\infty}[f''(x)]^2 dx$, $b = \int_{-\infty}^{\infty} K^2(t)dt$. Одавде добијамо да је решење

$$h^* = \sqrt[5]{\frac{b}{4na}}.$$

Када се убаци ова вредност параметра $h = h^*$ у (1.9) добија се

$$AMISE(\widehat{f}; h) = C(K)\frac{5}{4}\left(\int_{-\infty}^{\infty}(f''(x))^2 dx\right)^{1/5} h^{-4/5}, \tag{1.10}$$

где чинилац

$$C(K) = k_2^{2/5}\left(\int_{-\infty}^{\infty} K^2(t)dt\right)^{4/5},$$

можемо посебно минимизовати без утицаја на h.

Чинилац k_2 не представља проблем, увек можемо скалирати језгро $K(\cdot)$ тако да $k_2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 K(t)dt = 1$, тако што ставимо да је

$$K(t) \to k_2^{-5/2} K(k_2^{-1/2} t)$$

Стога, остаје само да се минимизује $\int_{-\infty}^{\infty} K^2(t)dt$ при условима

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(t)dt = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} t^2 K(t)dt = 1.$$

Тражена функција $K(\cdot)$ постоји и то је

$$K_e(t) = \frac{3}{4\sqrt{5}}\left(1 - \frac{t^2}{5}\right), \quad t \in [-\sqrt{5}, \sqrt{5}] \tag{1.11}$$

и нула иначе. Језгро $K_e(\cdot)$ је у литератури добило назив **Јепањешњиковљево језгро**.

Сада када имамо најефикасније језгро, можемо дефинисати следећи појам.

Дефиниција 1.1.2. *Нека је $\mathcal{K}$ скуп језгара. Релативна ефикасност језгра $K(\cdot)$ у односу на $K_e(\cdot)$ у ознаци $eff(K)$ је функција $eff : \mathcal{K} \to [0,1]$, дефинисана као*

$$eff(K) = \left[\frac{C(K_e)}{C(K)}\right]^{5/4}. \tag{1.12}$$

У литератури се најчешће користе следећа језгра: нормално (K_n), униформно (K_u), троугаоно (K_t), синусно (K_s):

$$\begin{aligned} K_n(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}, \qquad t \in \mathbb{R}, \\ K_u(t) &= \frac{1}{2}, \qquad t \in [-1,1], \\ K_t(t) &= 1 - |t|, \qquad t \in [-1,1], \\ K_s(t) &= \frac{1}{2\pi} \frac{\sin^2(x/2)}{(x/2)^2}, \qquad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

И одговарајуће релативне ефикасности, уз напомену да $K_s(\cdot)$ није језгро реда 2:

$$\begin{aligned} eff(K_n(t)) &= 0.9512, \\ eff(K_u(t)) &= 0.9295, \\ eff(K_t(t)) &= 0.9858. \end{aligned}$$

На основу чега видимо да утицај језгра није од великог значаја. Чак униформно језгро има довољно велику релативну ефикасност.

1.1.3 Веза са карактеристичном функцијом

Нека је дат прост случајан узорак $X_1, \ldots, X_n$. Оценимо $\phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$ природном оценом

$$\widehat{\phi}_X(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e^{itX_j}.$$

Уколико сада желимо да применимо инверзну трансформацију да добијемо густину, настаје проблем, јер је тај интеграл дивергентан. Зато ћемо помножити $\widehat{\phi}_X(t)$ са одговарајућом функцијом $K(\cdot)$ таквом да интеграл постане конвергентан.

Уобичајан избор за то је нормално или униформно језгро. Тада добијамо следећи низ једнакости

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\phi}_X(t) \cdot K(t) e^{-itX} dt \tag{1.13}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} e^{it(X_j - x)} K(t) dt \tag{1.14}$$

$$= \frac{1}{2\pi n}\sum_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty} K(t) e^{it(X_j - x)} dt \tag{1.15}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{nh}\sum_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty} K\left(\frac{v}{h}\right) e^{iv\frac{X_j - x}{h}} dv \tag{1.16}$$

$$= \frac{1}{nh}\sum_{j=1}^{n}\phi_K\left(X_j - x\right), \tag{1.17}$$

где је $\phi_K(\cdot)$ Фуријеова трансформација функције $K(\cdot)$.

1.2 Фуријеова анализа

На основу једнакости (1.17) видимо да се проблем оцењивања густине расподеле језгром може природно превести на карактеристичне функције, односно Фуријеове трансформације. Уведимо овде основне појмове и алате, које ћемо користити у даљем раду.

1.2.1 Фуријеова трансформација у $L^1(\mathbb{R})$

Дефиниција 1.2.1. *Кажемо да функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ припада $L^1(\mathbb{R})$ простору ако важи $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$.*

Даље можемо уопштити и на произвољне L^p просторе за $p \in [1, \infty]$.

Дефиниција 1.2.2. *Кажемо да функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ припада $L^p(\mathbb{R})$ простору ако важи $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx < \infty$.*

Дефиниција 1.2.3. *Функцију $\phi_f(\cdot) = f^{ft}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx$, $t \in \mathbb{R}$ зовемо Фуријеовом трансформацијом функције $f(\cdot)$ у тачки t у ознаци $f^{ft}(t)$ или $\phi_f(t)$.*

Дефиниција 1.2.4. *Нека су* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *и* $g \in L^p(\mathbb{R})$, $p \geq 1$. *Функција*

$$[f * g](x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y)f(y)dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

се назива конволуцијом функција $f(\cdot)$ *и* $g(\cdot)$ *у тачки* $x \in \mathbb{R}$ *у ознаци* $f * g$.

Лема 1.2.1. *Нека су* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *и* $g \in L^p(\mathbb{R})$, $p \geq 1$. *Тада важи*

$$||f * g||_p \leq ||f||_1 \cdot ||g||_p.$$

Сада можемо прећи на формулације неких основних својства.

Теорема 1.2. *Нека су* f *и* g *две функције из* $L^1(\mathbb{R})$ *простора и* $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. *Тада важе следећи ставови*

(а) *Линеарност*

$$(\lambda f + \mu g)^{ft} = \lambda \phi_f + \mu \phi_g.$$

(б) *Конволуција*

$$(f * g)^{ft} = \phi_f \cdot \phi_g = f^{ft} \cdot g^{ft}.$$

(в) *Ограниченост*

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |\phi_f(t)| \leq ||f||_1.$$

(г) *Униформна непрекидност*

$$|\phi_f(t) - \phi_f(s)| \to 0, \quad |t - s| \to 0.$$

(д) *Симетрија*
За све реалновредносне f *важи* $\phi_f(-t) = \overline{\phi_f(t)}, \forall t \in \mathbb{R}$; *и, специјално, ако је* f *симетрична, важи* $\phi_f(-t) = \phi_f(t) \in \mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Доказ. (а) По дефиницији важи

$$\begin{aligned}(\lambda f + \mu g)^{ft} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \left(\lambda f(x) + \mu g(x)\right) dx \\ &= \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)dx + \mu \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} g(x)dx \\ &= \lambda \phi_f + \mu \phi_g.\end{aligned}$$

(б) Важи следећи низ једнакости

$$
\begin{aligned}
(f * g)^{ft}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}[f * g](x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itz} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy \right] dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ity} f(y) \int_{-\infty}^{\infty} e^{it(x-y)} g(x-y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ity} f(y)dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{ity} g(y)dy = \phi_f(t)\phi_g(t).
\end{aligned}
$$

(в)

$$
\begin{aligned}
\sup_{t\in\mathbb{R}} |\phi_f(t)| &= \sup_{t\in\mathbb{R}} | \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)dx| \\
&\leq \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{\infty} |e^{itx}||f(x)|dx \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \sup_{t\in\mathbb{R}} |e^{itx}|dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx = ||f||_1.
\end{aligned}
$$

Прва неједнакост важи услед основне интеграбилне неједнакости и неједнакости Коши-Шварц-Буњаковски.
(г)

$$
\begin{aligned}
|\phi_f(t) - \phi_f(s)| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{itx} - e^{isx}||f(x)|dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |e^{i(t-s)x} - 1||f(x)|dx,
\end{aligned}
$$

приметимо да важи $|e^{i(t-s)x} - 1||f(x)| \leq 2|f(x)|$ и за свако $x \in \mathbb{R}$ $|e^{i(t-s)x} - 1||f(x)| \to 0$ када $|t-s| \to 0$. Испуњени су услови за примену теореме о доминантној конвергенцији, и интеграл тежи ка 0 када $|t-s| \to 0$.
(д) Размотримо следеће

$$
\phi_f(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{e^{itx}} f(x)dx = \overline{\phi_f(t)}.
$$

Специјално, за симетричну функцију $f(\cdot)$

$$
\begin{aligned}
\phi_f(t) &= \int_{-\infty}^{0} e^{itx} f(x)dx + \int_{0}^{\infty} e^{itx} f(x)dx \\
&= \int_{0}^{\infty} e^{-itx} f(x)dx + \int_{0}^{\infty} e^{itx} f(x)dx \\
&= 2\int_{0}^{\infty} \cos(tx) f(x)dx \in \mathbb{R},
\end{aligned}
$$

за свако t, где симетричност функције ϕ_f следи због симетричности косинуса. $\square$

Теорема 1.3. *Претпоставимо да је $f \in L^1(\mathbb{R})$ ограничена и непрекидна у некој тачки $x \in \mathbb{R}$ и, специјално, $\phi_f \in L^1(\mathbb{R})$. Тада је*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \phi_f(t) dt.$$

Доказ. Уведимо густину нормалну расподелу $\rho_R(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}R} e^{-\frac{x^2}{2R^2}}$, чија је Фуријеова трансформација

$$\phi_{\rho_R}(t) = e^{-\frac{R^2 t^2}{2}},$$

која очито припада $L^1(\mathbb{R})$.

Размотримо

$$I_R(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2\pi} R \rho_R(t) e^{-itx} \phi_f(t) dt. \tag{1.18}$$

Због интеграбилности ϕ_f по услову теореме, неједнакости $|\sqrt{2\pi} R \rho_R(t)| \leq 1$ и $\lim_{R\to\infty} \sqrt{2\pi} R \rho_R(t) = 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$ закључујемо да важи теорема о доминантној конвергенцији (ТДК).

$$I_R(x) \to_{R\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \phi_f(t) dt. \tag{1.19}$$

Са друге стране из Фубинијеве теореме следи да

$$\begin{aligned} I_R(x) &= \int \sqrt{2\pi} R \rho_R(t) e^{-itx} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ity} f(y) dy dt & (1.20) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \int \sqrt{2\pi} R \rho_R(t) e^{it(y-x)} dt dy & (1.21) \\ &= \sqrt{2\pi} R \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \phi_{\rho_R}(y-x) dy & (1.22) \\ &= \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{z}{R} + x\right) e^{-\frac{z^2}{2}} dz. & (1.23) \end{aligned}$$

Поново, можемо применити ТДК, јер је f ограничена и непрекидна у x. Приказали смо на два различита начина лимес $I_R(x)$ када $R \to \infty$ стога важи $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \phi_f(t) dt = f(x) \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 2\pi f(x). \tag{1.24}$$

На основу чега следи тврђење теореме. $\square$

1.2.2 Фуријеова трансформација у $L^2(\mathbb{R})$

Увешћемо и неколико основних појмова и ставова.

Дефиниција 1.2.5. *Скуп свих ограничених непрекидних функција у $L^1(\mathbb{R})$ означавамо $\mathcal{C}$.*

И неке основне ставове.

Лема 1.2.2. *Скуп $\mathcal{C}$ јесте један линеаран простор.*

Лема 1.2.3. *Скуп свих ограничених непрекидних функција $\mathcal{C}$ припада $L^2(\mathbb{R})$.*

Доказ. Нека су $f, g \in \mathcal{C}$, тада важи следећи низ једнакости

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\phi_f(t)dt\overline{g(x)}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\overline{g(x)}dx\phi_f(t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\phi_g}(-t)\phi_f(t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\phi_g(-t)}\phi_f(t)dt\end{aligned}$$

Стављајући сада $g = f$ добијамо да заправо $f \in \mathcal{C} \implies f \in L^2(\mathbb{R})$. □

Теорема 1.4. *Фуријеова трансформација у $L^2(\mathbb{R})$, дефинисана јединственим продужењем Фуријеове трансформације на $\mathbb{C}$ је бијективно пресликавање из $L^2(\mathbb{R})$ у $L^2(\mathbb{R})$. Њено инверзно пресликавање је једнако са $f \to \frac{1}{2\pi}\phi_f(\cdot)$. Даље важе*

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\langle \phi_f, \phi_g\rangle, \quad \forall f, g \in L^2(\mathbb{R}),$$

што се зове Station Планшереловом једнакошћу, и

$$||f||_2^2 = \frac{1}{2\pi}||\phi_f||_2^2, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}),$$

што се зове Парсеваловом једнакошћу.

Лема 1.2.4. *За сваку $f \in L^2(\mathbb{R})$ и за сваку $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ важи*

$$(f * g)^{ft} = \phi_f\phi_g \tag{1.25}$$

Сви докази наведених ставова, као и детаљнији опис могу се наћи у [2] стране 178-189.

Поглавље 2

Грешке мерења

У простим експериментима, попут бацања коцкице за игру, резултат је увек јасан и прецизан - тачно се зна који је број пао. Међутим постоје бројни примери када забележени, добијени или измерени резултат прати нека случајна грешка.

У литератури се могу наћи три врсте грешака мерења: класична, Берксонова и мешавина претходно наведених грешака. Грешку може да проузрокује како апарат или алат који бележи резултат – класична грешка (мерење тежине, висине, фотоапарат слика без фокуса); тако и грешке које настају после експеримента услед класификације, кластеризације – Берксонова грешка. У овом поглављу ћемо приказати сваку од њих.

У даљем тексту са $X = (X_1, \ldots, X_n)$, $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$ означавамо векторе случајних величина.

2.1 Класична грешка

У многим практичним проблемима се дешава да праву вредност неке величине није могуће директно измерити или добити, већ само преко неке друге величине, која у себи укључује (случајну) грешку. Односно, желимо да добијемо праве податке о обележју X, али уместо тога можемо само да добијемо Y, за који важи

$$Y = X + \varepsilon,$$

где је ε случајна величина независна од X, која представља грешку мерења. Такав модел називамо **модел са класичном адитивном-грешком.** Расподелу за ε сматрамо познатом[1], њену густину ћемо

[1] биће речи касније о случају када расподела за грешку није позната

означавати са $f_\varepsilon(\cdot)$, док функцију расподеле са $Z(\cdot)$, густину случајне промењиве Y са $f_Y(\cdot)$, а функцију расподеле са $G(\cdot)$. Тада према познатој теореми о конволуцији две независне случајне величине важи следеће

$$G = F * Z,$$

где смо са $F(\cdot)$ означили непознату функцију расподеле промењиве X, док са $*$ означавамо операцију конволуције. Уколико даље преведемо проблем са функција расподела на функције густине и њихове карактеристичне функције то добијамо да конволуција прелази у производ и важи следеће

$$\phi_Y(t) = \phi_X(t) \cdot \phi_\varepsilon(t),$$

где је $\phi_\varepsilon(\cdot)$ позната карактеристична функција. Одакле даље можемо да изведемо

$$\phi_X(t) = \frac{\phi_Y(t)}{\phi_\varepsilon(t)}.$$

У циљу налажења оцене за $\phi_X(t)$ потребно је пре тога оценити $\phi_Y(\cdot)$, док се $\phi_\varepsilon(\cdot)$ сматра познатом. Једна природна оцена за ϕ_Y добијена на основу узорка обима n је

$$\widehat{\phi}_Y(t) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} e^{itY_j}. \tag{2.1}$$

Теорема 2.1. *Оцена $\widehat{\phi}_Y(t)$ карактеристичне функције $\phi_Y(t)$ је непристрасна и постојана.*

Доказ. Непристрасност:

$$E(\widehat{\phi}_Y(t)) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} E(e^{itY_j}) = E(e^{itY_1}) = \cdots = E(e^{itY_n}) = \phi_Y(t). \tag{2.2}$$

Постојаност:

$$D[\widehat{\phi}_Y(t)] = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} D(e^{itY_j}) = \frac{1}{n}D(e^{itY_1}), \tag{2.3}$$

где знамо да је $D(e^{itY}) < \infty$, одакле следи постојаност оцене. □

На основу горе наведених резултата можемо добити такозвану **наивну оцену** карактеристичне функције ϕ_X.

$$\widehat{\phi}_X(t) = \frac{\widehat{\phi}_Y(t)}{\phi_\varepsilon(t)}, \quad \forall t \in D,$$

где је D одговарајућа област да $\phi_\varepsilon(t) \neq 0$. Даље на основу тога применом теореме 1.3 из првог поглавља може се добити оцена густине

$$\widehat{f}_{X_1}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\widehat{\phi}_X(t)dt.$$

2.1.1 Оцењивање језгром

Применом аналогне идеје, која се користи у случају без грешке мерења добијемо нову оцену густине случајне величине X.

Сада уместо класичне оцене за функцију $\phi_Y(\cdot)$ уводимо њену оцену помоћу језгра, тј.

$$\widehat{\phi}_{Y_2}(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{nh}\sum_{j=1}^{n} e^{itx}\cdot K\left(\frac{x-Y_j}{h}\right)dx = \widehat{\phi}_Y(t)\cdot\phi_K(th),$$

где је $\widehat{\phi}_Y(\cdot)$ оцена из прошлог поглавља, док је $\phi_K(\cdot)$ Фуријеова трансформација језгра.

Након убацивања овакве оцене у раније изведене формуле добијамо следећу оцену тражене Фуријеове трансформације $\phi_X(\cdot)$

$$\widehat{\phi}_X(t) = \frac{\widehat{\phi}_Y(t)\cdot\phi_K(th)}{\phi_\varepsilon(t)}, \tag{2.4}$$

што даље применом теореме о инверзној Фуријеовој трансформацији функције резултује новом оценом густине

$$\widehat{f}_{X_2}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\widehat{\phi}_X(t)dt, \tag{2.5}$$

која је добро дефинисана за сваку ненула функцију $\phi_\varepsilon(\cdot)$ на одговарајућем интервалу, где $\phi_K(\cdot)$ има компактан носач. Таква оцена се назива **стандардна оцена деконволуционим језгром**.

На снази су следеће теореме.

Теорема 2.2. *Претпоставимо да је $f_X(\cdot)$ ограничена и непрекидна функција и $\phi_X \in L^1(\mathbb{R})$, такође претпоставимо да је $\phi_\varepsilon(t) \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Функција $K \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ и $\phi_K(\cdot)$ има компактни носач.*

Тада за свако $x \in \mathbb{R}$ важи

(a) $E\left[\widehat{f}_X(x)\right] = [K_h * f_X](x)$, *где је* $K_h(\cdot) = \frac{1}{h}K(\frac{\cdot}{h})$,

(б) $D\left(\widehat{f}_X(x)\right) \leq \frac{1}{2\pi}||f_X * f_\varepsilon||_\infty \cdot \frac{1}{n}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\phi_K(th)}{\phi_\varepsilon(t)}\right|^2 dt.$

Доказ. (a) На основу Фубинијеве теореме важи

$$E(\widehat{f}(x)) = E\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}/\phi_\varepsilon(t)\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} e^{itY_j}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{ithz}K(z)dz\right]dt\right]. \tag{2.6}$$

По дефиницији модела и Фуријеове трансформације важи следеће

$$\phi_K(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itz}K(z)dz,$$

$$\phi_Y(t) = E(e^{itY}),$$

$$\phi_X(t) = \frac{\phi_Y(t)}{\phi_\varepsilon(t)}.$$

Што заменом у (2.6) добија се

$$E(\widehat{f}(x)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\frac{E\left(e^{itY_1}\right)}{\phi_\varepsilon(t)}\cdot\phi_K(th)dt \tag{2.7}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\frac{\phi_Y(t)}{\phi_\varepsilon(t)}\cdot\phi_K(th)dt \tag{2.8}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\phi_X(t)\phi_K(th)dt \tag{2.9}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}[K_h * f_X]^{ft}(t)dt. \tag{2.10}$$

Да бисмо добили тврђење теореме 2.2(а) потребно је применити теорему о инверзној Фуријеовој трансформацији.

Како је према услову теореме $K \in L^1(\mathbb{R})$ имамо

$$||\phi_{K_h}||_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}}|\phi_{K_h}(t)| \tag{2.11}$$

$$= ||\phi_K||_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}}|\phi_K(t)| \tag{2.12}$$

$$= \sup_{t\in\mathbb{R}}|\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}K(x)dx| \tag{2.13}$$

$$\leq \sup_{t\in\mathbb{R}}\int_{-\infty}^{\infty}|K(x)|dx = ||K||_1. \tag{2.14}$$

Стога

$$[K_h * f_X]^{ft} = \phi_{K_h}\cdot\phi_X \in L^1(\mathbb{R}),$$

и $\phi_K(\cdot)$ има компактан носач.

Даље важи

$$||K_h * f_X||_\infty \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{\infty} |f_X(y)K_h(x-y)|\, dy \tag{2.15}$$
$$\leq ||f_X||_\infty \cdot \sup_{x\in\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{\infty} |K_h(x-y)|\, dy \tag{2.16}$$
$$= ||f_X||_\infty ||K||_1 \tag{2.17}$$

и

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} [f_X(x-z) - f_X(y-z)]K_h(z)dz\right|$$
$$= \left|\int_{-\infty}^{\infty} [f_X(x-zh) - f_X(y-zh)]K(z)dz\right|,$$

зато непрекидност функције $[K_h * f_X]$ следи из непрекидности функције $f_X(\cdot)$ и теореме о доминантној конвергенцији, када се размотри лимес $y \to x$. Сада можемо применити теорему инверзвој Фуријеовој трансформацији и да добијемо

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}[K_h * f_X]^{ft}(t)dt = [K_h * f_X](x). \tag{2.18}$$

(б) Како су $Y_1, \ldots, Y_n$ независне и једнакорасподељене случајне величине то можемо извести

$$D(\widehat{f}(x)) = \frac{1}{2^2\pi^2 n^2}\sum_{j=1}^{n} D\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-it(x-Y_j)}\frac{\phi_K(th)}{\phi_\varepsilon(t)}dt\right] \tag{2.19}$$
$$\leq \frac{1}{4\pi^2 n} E\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-it(x-Y_1)}\frac{\phi_K(th)}{\phi_\varepsilon(t)}dt\right| \tag{2.20}$$
$$= \frac{1}{4\pi^2 n}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itz}\frac{\phi_K(th)}{\phi_\varepsilon(t)}dt\right|^2 [f_X * f_\varepsilon](x-z)dz \tag{2.21}$$
$$\leq ||f_X * f_\varepsilon||_\infty \cdot \frac{1}{4\pi^2 n}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itz}\frac{\phi_K(th)}{\phi_\varepsilon(t)}dt\right|^2 dz \tag{2.22}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\cdot ||f_X * f_\varepsilon||_\infty \cdot \frac{1}{n}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\phi_K(th)}{\phi_\varepsilon(t)}\right|^2 dt, \tag{2.23}$$

где је Парсевалова једнакост била искоришћена у последњем кораку. Приметимо да важи

$$|[f_X * f_\varepsilon](x)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} f_X(y)f_\varepsilon(x-y)dy\right| \leq ||f_X||_\infty < \infty, \tag{2.24}$$

при напомени да је $\int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x)dx = 1$.

$\square$

Приметимо да се математичка очекивања оцене $\widehat{f}_X(\cdot)$ и оцене дефинисане у случају без грешака мерења поклапају.

Помоћу резултата теореме могуће је проценити средње квадратну грешку оцене густине, тј. MSE

$$MSE(\widehat{f}_X(x)) = E|\widehat{f}_X(x) - f_X(x)|^2, \tag{2.25}$$

и добити горњу границу грешке оцене густине у тачки $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} MSE(\widehat{f}_X(x)) &= |E\widehat{f}_X(x) - f_X(x)|^2 + D(\widehat{f}_X(x)) \qquad (2.26)\\ &\leq |[K_h * f_X](x) - f_X(x)|^2 + \frac{1}{2\pi}||f_X * f_\varepsilon||_\infty \cdot \frac{1}{n}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\phi_K(th)}{\phi_\varepsilon(t)}\right|^2 dt. \end{aligned}$$

У циљу одређивања грешке на целој реалној правој изводимо интегралну средње квадратну грешку оцене густине ($MISE(\cdot)$)

$$MISE(\widehat{f}_X) = E\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}_X(x) - f_X(x)|^2 dx. \tag{2.27}$$

На снази је и следећа значајна теорема која представља уопштење сличне формуле за $MISE(\cdot)$ изведене у случају када није присутна грешка мерења.

Теорема 2.3. *Претпоставимо да је густина $f_X(\cdot)$ садржана у $L^2(\mathbb{R})$ и да важи $\phi_\varepsilon(t) \neq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Нека је $K(\cdot)$ такође из $L^2(\mathbb{R})$ и $\phi_K(\cdot)$ са компактним носачем.*

Тада добијамо

$$\begin{aligned} MISE(\widehat{f}_X) &= \frac{1}{2\pi n}\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_K(th)|^2 \Big[|\phi_\varepsilon(t)|^{-2} - |\phi_X(t)|^2\Big] dt\\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_K(th) - 1|^2 |\phi_X(t)|^2 dt. \end{aligned}$$

Доказ. Према Фуријеовој трансформацији изводимо да

$$\widehat{\phi}_X(t) = \phi_K(th)\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{e^{itY_j}}{\phi_\varepsilon(t)}. \tag{2.28}$$

И можемо даље добити

$$
\begin{aligned}
MISE(\widehat{f}_X) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E\left|\widehat{\phi}_X(t)-\phi_X(t)\right|^2 dt && (2.29)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} D[\widehat{\phi}_X(t)]dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |E\widehat{\phi}_X(t)-\phi_X(t)|^2 dt && (2.30)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_K(th)|^2 \frac{D[e^{itY_1}]}{n\cdot|\phi_\varepsilon(t)|^2} dt && (2.31)\\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\frac{\phi_K(th)E[e^{itY_1}]}{\phi_\varepsilon(t)} - \phi_X(t)|^2 dt\\
&= \frac{1}{2\pi n}\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_K(th)|^2(|\phi_\varepsilon(t)|^{-2} - |\phi_X(t)|^2)dt && (2.32)\\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_K(th)-1|^2|\phi_X(t)|^2 dt.
\end{aligned}
$$

□

2.1.2 Одређивање параметра равнања

Главни резултати и њихова уопштења се могу наћи у раду [9].

Оцене густине методом деконволуције у многоме зависе од расподеле грешке. У овом поглављу приказаћемо резултате које се односе на налажење оптималног параметра равнања. Тај проблем се може разбити на две велике класе решења у зависности од функције густине случајне величине грешке у класичном адитивном моделу.

Дефиниција 2.1.1. *Кажемо да расподела случајне величине ε припада класи суперглатких расподела реда β ако њена карактеристична функција $\phi_\varepsilon(\cdot)$ задовољава*

$$d_0|t|^{\beta_0}e^{-|t|^\beta/\gamma} \le |\phi_\varepsilon(t)| \le d_1|t|^{\beta_1}e^{-|t|^\beta/\gamma}, \quad t\to\infty, \tag{2.33}$$

где су β_0, $\beta_1 \in \mathbb{R}$, а d_0, d_1, β, γ позитивне константе.

Дефиниција 2.1.2. *Кажемо да расподела случајне величине ε припада класи обичних глатких (обичне глаткости) расподела реда β ако њена карактеристична функција $\phi_\varepsilon(\cdot)$ задовољава*

$$d_0|t|^{-\beta} \le |\phi_\varepsilon(t)| \le d_1|t|^{-\beta}, \quad t\to\infty, \tag{2.34}$$

где су d_0, d_1, β позитивне константе.

Пример 1. *Примери суперглатких функција - нормална, мешавина нормалне, Кошијева.*
Примери расподела обичне глаткости - гама, дупла експоненцијална.

Приметимо да оцену деконволуцијом из прошлог параграфа можемо записати на следећи начин

$$\widehat{f}_X(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{h_n}g_n\left(\frac{x-Y_j}{h_n}\right), \tag{2.35}$$

где је

$$g_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\left(\frac{\phi_K(t)}{\phi_\varepsilon(t/h_n)}\right)dt. \tag{2.36}$$

Резултати овог дела се базирају на рад Фана из 1991. године (в. [9]). Следећи услови су неопходни:

($A1$) $\phi_K(\cdot)$ је симетрична функција, са $m+2$ ограничених интеграбилних извода на $(-\infty,+\infty)$,

($A2$) $\phi_K(t) = 1 + O(|t|^m)$, када $t \to 0$,

($A3$) $\phi_\varepsilon(t) \neq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Пре формулација теорема од значаја је дефинисати следећи скуп $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{B}_{m,\alpha,B} = \left\{f(x) : |f^{(m)}(x) - f^{(m)}(x+\delta)| \leq B\delta^{\alpha}\right\}.$$

Теорема 2.4. *Нека важе услови $A1, A2, A3$ и*

(Б1) $\phi_K(t) = 0$, *за* $|t| \geq 1$,

(Б2) $|\phi_\varepsilon(t)||t|^{-\beta_0}e^{|t|^{\beta}/\gamma} \geq d_0$, *када* $t \to \infty$ *за неке позитивне константе* β, γ, d_0 *и константу* β,

Тада одабиром параметра $h_n = \left(\frac{4}{\gamma}\right)^{1/\beta}(\log(n))^{-1/\beta}$ *добија се*

$$\sup_{f\in\mathcal{B}_{m,\alpha,B}} E(\widehat{f}_X(x) - f_X(x))^2 = O\left((\log(n))^{-2(m+\alpha)/\beta}\right). \tag{2.37}$$

Доказ. Важи следеће

$$\sup_{f\in\mathcal{B}_{m,\alpha,B}}\left|E[\widehat{f}_X(x)] - f_X(x)\right| = \sup_{f\in\mathcal{B}_{m,\alpha,B}}\left|\int_{-\infty}^{\infty} f_X(y)\frac{1}{h_n}K(\frac{x-y}{h_n})dy - f_X(x)\right| \tag{2.38}$$

$$\leq Ch_n^k, \tag{2.39}$$

за неку константу C, где је $k = m + \alpha$, где неједнакост важи јер

$$\begin{aligned}&\left|\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\frac{1}{h_n}K(\frac{x-y}{h_n})dy - f_X(x)\right| \\ &= \left|\frac{1}{h_n}\int_{-\infty}^{\infty} K\left(\frac{x-y}{h_n}\right)\frac{f^{(m)}(\theta)-f^{(m)}(x)}{m!}(y-x)^m dy\right|\end{aligned}$$

за неко θ између x и y. Даље пролазом $\sup\limits_{f\in\mathcal{B}_{m,\alpha,B}}$ добија се

$$\sup_{f\in\mathcal{B}_{m,\alpha,B}}\left|\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\frac{1}{h_n}K(\frac{x-y}{h_n})dy - f_X(x)\right| \leq \frac{C}{h_n}\int_{-\infty}^{\infty}\left|K\left(\frac{y}{h_n}\right)\right|\frac{|y|^k}{m!}dy,$$

Док је дисперзија

$$D[\widehat{f}_X(x)] \leq \frac{1}{4\pi^2 n h_n^2}\left[\int_{-1}^{1}\frac{|\phi_K(t)|}{|\phi_\varepsilon(t/h_n)|}dt\right]^2. \tag{2.40}$$

Према претпоставци Б2 за довољно велико фиксно M, такво да $Mh_n \leq |t| \leq 1$ важи

$$|\phi_\varepsilon(t/h_n)| \geq \frac{d_0}{2}(t/h_n)^{\beta_0}e^{-h_n^{\beta}/\gamma}. \tag{2.41}$$

Такође према А3

$$|\phi_\varepsilon(t/h_n)| \geq \min_{|t|\leq M}|\phi_\varepsilon(t)| > 0, \quad |t| \leq M\cdot h_n. \tag{2.42}$$

Видимо да важи

$$D[\widehat{f}_X(x)] \leq \frac{1}{4\pi^2 n h_n^{\alpha}}O(e^{2h_n^{-\beta}/\gamma}) = o(n^{-1/3}) \tag{2.43}$$

одабиром за h_n:

$$h_n = \left(\frac{4}{\gamma}\right)^{1/\beta}(\log(n))^{-1/\beta} \tag{2.44}$$

где је $\alpha = 2$ ако је $\beta_0 \geq 0$ и $\alpha = 2 - \beta_0$ за $\beta_0 < 0$. Одакле следи тврђење теореме. $\square$

Аналогна теорема за расподеле обичне глаткости.

Теорема 2.5. *Нека важе услови* $A1, A2, A3$ *и*

(B1) $|\phi_\varepsilon(t)t^\beta| \geq d_0$, *за неку позитивну константу* d_0,

(B2) $\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_K(t)t^\beta|dt < \infty$ *и* $\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_K(t)t^{(\beta)}|^2 dt < \infty$

тада одабиром за параметар $h_n = d \cdot n^{-1/(2(m+\alpha+\beta)+1)}$ *за неко* $d > 0$ *добија се*

$$\sup_{f \in \mathcal{B}_{m,\alpha,B}} E(\widehat{f}_X(x) - f_X(x))^2 = O\left(n^{-2(m+\alpha)/(2(m+\alpha+\beta)+1)}\right). \tag{2.45}$$

Доказ. Узимањем вредности h_n наведену у датој теореми и примењујући калкулацију спроведену у доказу претходне теореме, добијамо

$$\sup \left| E[\hat{f}_X(x)] - f_X(x) \right| = O(h_n^k) = O(n^{-(k)/(2k+2\beta+1)}),$$

где је $k = m + \alpha$. По узору на доказ претходне теореме, израчунајмо дисперзију оцене. Означимо

$$g_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \frac{\phi_K(t)}{\phi_\varepsilon(t/h_n)} dt.$$

Тада

$$D[\widehat{f}_X(x)] \leq \frac{1}{nh_n^2} E\left(g_n^2\left(\frac{x - Y_1}{h_n}\right)\right). \tag{2.46}$$

Бикел и Ритов су 1988. године доказали да за функцију густине f_Y случајне величине $Y = X + \varepsilon$ важи $\sup f(x) \leq C$, за неку позивитну константу C. Према Парсеваловом идентитету даље важи

$$E\left(g_n^2\left(\frac{x - Y_1}{h_n}\right)\right) = h_n \int_{-\infty}^{\infty} g_n^2(y) f_Y(x - h_n y) dy \leq \frac{Ch_n}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\phi_K(t)t^l|^2}{|\phi_\varepsilon(t/h_n)|^2} dt.$$

Даље сличним аргументима као у доказу прве теореме можемо закључити да је последњи израз реда величине $O(h_n^{-2\beta+1})$. И према (2.46) добијамо тражено. □

Наводимо последицу резултата, чије извођење се може наћи у књизи [2] на страници 42.

Последица 2.1.1. *Нека је* $k > 0$ *ред језгра* $K(\cdot)$, *за које важи* $K(\cdot) \in L^2(\mathbb{R})$, $\phi_K(\cdot)$ *има носач* $[-1, 1]$, $||\phi_K||_\infty \leq 1$ *и* $\sup_{t \neq 0} |t|^{-k} |\phi_K(t) - 1| < \infty$. *Нека је*

$$\mathcal{F}_{k,C;L^2} = \left\{ f : \int_{-\infty}^{\infty} |\phi_f(t)|^2 |t|^{2k} dt \leq C \right\}.$$

Тада
(а) за густине грешке обичне глаткости одабиром за $h_n = d \cdot n^{-1/(2(m+\alpha+\beta)+1)}$ *за неко* $d > 0$ *добија се*

$$\sup_{f \in \mathcal{F}_{k,C;L^2}} E||\widehat{f}_X - f||_2^2 = O(n^{-2(m+\alpha)/(2(m+\alpha+k+1))}).$$

(б) за густине грешке које су супергладке одабиром за $h_n = \left(\frac{4}{\gamma}\right)^{1/k} (\log(n))^{-1/k}$ *добија се*

$$\sup_{f \in \mathcal{F}_{k,C;L^2}} E||\widehat{f}_X - f||_2^2 = O(\log(n)^{-2(m+\alpha)/k}).$$

Дефинишимо оцену функције расподеле $F(x)$ у тачки $x \in \mathbb{R}$ случајне величине X

$$\widehat{F}_n(x) = \int_{-M_n}^{x} \widehat{f}_X(t) dt, \tag{2.47}$$

где је M_n низ константи који тежи ка бесконачности.

Теорема 2.6. *Нека важе услови Б1, Б2, А3 теореме 2.4 и нека је* $\phi_K(\cdot)$ *симетрична функција, са* $m + 3$ *ограничених интеграбилних извода на* $(-\infty, +\infty)$, *и* $\phi_K(t) = 1 + O(|t|^{m+1})$, *када* $t \to 0$. *Тада при одабиру истог параметра* h *као у теореми 2.4 и* $M_n = n^{1/3}$ *се добија*

$$\sup_{f \in C'_{m,\alpha,B}} E_f(\widehat{F}_n(x) - F(x))^2 = O\left((\log n)^{-2(m+\alpha+1)/\beta}\right) \tag{2.48}$$

где је

$$C'_{m,\alpha,B} = \left\{ f \in \mathcal{B}_{m,\alpha,B} : \exists C \in \mathbb{R}, F(-n) \leq C(\log n)^{-(m+2)/\beta} \right\}. \tag{2.49}$$

Доказ овог тврђења се може наћи у [9].

У овом делу разматрамо одабир оптималног језгра у моделу са класичном адитивном грешком. Одабир језгра у овом мастер раду се искључиво наслања на рад [8].

Дефиниција 2.1.3. *Мерљива функција $F : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ је правилно променљива у бесконачности са индексом правилне променљивости $\alpha \in \mathbb{R}$, ако за свако $x > 0$ важи*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{F(tx)}{F(x)} = x^{\alpha}. \tag{2.50}$$

Дефиниција 2.1.4. *Ако је у једнакости (2.50) $\alpha = 0$ функцију $F(\cdot)$ из дефиниције 2.1.3 називамо споро променљивом функцијом.*

Детаљнија се упознати са појмом правилно променљивих функција могуће у [10].

Разматрамо језгра за које важи

$$\phi_K(t) \sim t^{-\alpha} L(t),$$

када $t \to \infty$, $\alpha > 0$ и са $L(\cdot)$ смо означили споро променљиву функцију у бесконачности. Такође претпоставимо да је језгро $K(\cdot)$ k- тог реда. При тим условима може се показати (рад [8] страна 1601) да удео језгра $K(\cdot)$ у одређивању минимума $MISE(\cdot)$ је пропорционалан са

$$\theta_K^{2/(2\alpha+2k+1)},$$

где је

$$\theta_K = |\phi_K^{(k)}(0)|^{2\alpha+1} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |t|^{2\alpha} \phi_K^2(t) dt \right]^k. \tag{2.51}$$

Случај када је $\alpha \in \mathbb{N}$

У случају када је α природан број применом Планшереловe једнакости добијамо

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t|^{2\alpha} \phi_K^2(t) dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \left[K^{(\alpha)}(x) \right]^2 dx. \tag{2.52}$$

Из (2.51) видимо да $|k_k| = |\int t^k K(t) dt| = |\phi_K^{(k)}(0)|$. Добијамо да је оптимално језгро $K(\cdot)$ дефинисано тако да минимизује

$$|k_k|^{2\alpha+1} \left[\int_{-\infty}^{\infty} (K^{(\alpha)})^2 dx \right]^k, \tag{2.53}$$

и да важи $k_0 = 1$, $k_j = 0, \forall j \in \overline{1, k-1}, |k_k| \neq 0$.

Али овакав задатак је сингуларан. Да би се решио тај проблем потребни су додатни услови - број промена знака језгра.

Дефиниција 2.1.5. *Скуп свих функција које мењају свој знак тачно k пута означавамо са $\mathfrak{N}_k$.*

Нови услов нс основу ког минимизујемо $K(\cdot)$ је

$$|k_k|^{2\alpha+1}\left[\int_{-\infty}^{\infty}(K^{(\alpha)})^2dx\right]^k \tag{2.54}$$

и важи $k_j = 0, \forall j \in \overline{1, k-1}, k_k \neq 0, K \in C^{\alpha}[a,b] \cap \mathfrak{N}_{k-2}$ и $K^{(j)}(a) = K^{(j)}(b) = 0$ за $0 \leq j < \max(\alpha, 1)$.

Решење датог проблема је изведено и приказано у раду Грановскиог и Милера "Optimizing Kernel Methods: A Unifying Variational Principle" 1991. године. ([20])

Оптимално (уз дате услове) језгро $K_{k,\alpha}$ је јединствено дефинисан полином степена $k+2\alpha$, ограничен на симетрични компактни сегмент $[-\tau,\tau]$. У случају $\tau = 1$ решење је полином

$$K_{k,\alpha}(x) = \sum_{i=0}^{k+2\alpha}\lambda_i x^i,$$

где је $\lambda_i = 0$ ако је $k+i$ непарно и

$$\lambda_i = \frac{(-1)^{i/2}(k+2\alpha+2)!(k+2\alpha+2-i)k(k+i)!}{(i+1)!2^{2k+2\alpha+3}(k/2)!((k+2\alpha+2)/2)!((k+2\alpha+2-i)/2)!((k+i)/2)!} \tag{2.55}$$

када је $k+i$ парно.

Полазећи од оптималног језгра на $[-1,1]$ скалирањем је могуће добити језгро дефинисано на произвољном симетричном интервалу. То скалирање нема удела на θ_K дефинисаног са (2.51).

Пример 2. *Прикажемо нека оптимална језгра типа $K_{k,\alpha}$ дефинисана* *на* $[-1,1]$:

$$\begin{aligned}
K_{2,0}(x) &= \frac{3}{4}(1-x^2),\\
K_{2,1}(x) &= \frac{15}{16}(1-x^2)^2,\\
K_{2,2}(x) &= \frac{35}{32}(1-x^2)^3,\\
K_{2,3}(x) &= \frac{315}{256}(1-x^2)^4,\\
K_{4,0}(x) &= \frac{15}{32}(3-7x^2)(1-x^2),\\
K_{4,1}(x) &= \frac{35}{64}(3-9x^2)(1-x^2)^2,\\
K_{4,2}(x) &= \frac{315}{512}(3-11x^2)(1-x^2)^3,\\
K_{4,3}(x) &= \frac{693}{1024}(3-13x^2)(1-x^2)^4.
\end{aligned}$$

Упоређивање оптималних и других језгара

Уведемо следећи појам

Дефиниција 2.1.6. *Функцију*

$$\rho(K) = \left(\frac{\theta_{K_2}}{\theta_K}\right)^{2/(2k+2\alpha+1)} \tag{2.56}$$

зовемо релативном ефикасношћу произвољног језгра $K(\cdot)$ *у односу на језгро*

$$K_2(x) = 48\cos(x)\frac{1-\frac{15}{x^2}}{\pi x^4} - 144\sin(x)\frac{2-\frac{5}{x^2}}{\pi x^5}.$$

У литератури и практичним проблемима се углавном користе следећа четири језгра

$$\begin{aligned}
K_1(x) &= \frac{\sin(x)}{\pi x},\\
K_2(x) &= 48\cos(x)\frac{1-\frac{15}{x^2}}{\pi x^4} - 144\sin(x)\frac{2-\frac{5}{x^2}}{\pi x^5},\\
K_3(x) &= \frac{96}{\pi}\left(\frac{\sin(x/4)}{x}\right)^4,\\
K_4(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}.
\end{aligned}$$

Од изведених оптималних језгара $K_{k,\alpha}$ очекује се да ће бити значајно бољи од K_1, K_2, K_3, K_4. Међутим испоставља се да K_2 има одређене погодности кад је ефикасност у питању.

Приметимо да је заправо $K_{2,0}(\cdot)$ језгро Јепанечникова, које је дефинисано у уводу рада. Израчунајмо за њега релативну ефикасност $\rho(K_{2,0})$.

$$\theta_{K_{2,0}} = |\phi_{K_{2,0}}^{(2)}(0)| \left[\int_{-\infty}^{\infty} \phi_{K_{2,0}}^2(t)dt\right]^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{9}{125} = 2.842.$$

$$\theta_{K_2} = |\phi_{K_2}^{(2)}(0)| \left[\int_{-\infty}^{\infty} \phi_{K_2}^2(t)dt\right]^2 \sim 6 \cdot 0.465 = 2.79.$$

$$\rho(K_{2,0}) = \left(\frac{2.79}{2.842}\right)^{2/5} = 0.9926.$$

И за сва остала језгра типа $K_{2,\alpha}$ вредности су такође мање од 1, чак значајно мање.

Напомена: узели смо $k = 2$ јер су сва језгра K_1, K_2, K_3, K_4 реда 2.

2.2 Берксонова грешка

Чести проблем са Берксоновом грешком је у томе, што није тривијално правити разлику између класичног и Берксоновог модела. Модел који се разматра кад се говори о Берксоновој грешци има облик

$$X = Y + \varepsilon,$$

који на први поглед изгледа исто као и у случају са класичном грешком, али битно је кад се десио моменат додавања адитивне грешке, да ли пре мерења (класична) или након мерења, што се односи на модел са Берксоновом грешком. У овом моделу претпоставка је да позната расподела случајне величине ε и добијен узорак $Y_1, \dots, Y_n$, на основу чега је циљ пронаћи густину расподеле $X_1, \dots, X_n$.

Пример 3. *Претпоставимо да су добијени следећи подаци, да је Y има следеће карактеристике $Y \sim \mathcal{N}(0, 2)$, док за грешку важи $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Уколико радимо са Берксоновим моделом, онда добијамо да $X \sim \mathcal{N}(0, 3)$. Док уколико са моделом са класичном грешком резултат је $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.*

Пример 4. *Чест пример када се говори о Берксоновој грешци је проблем мерења удела радијације на одређене болести. Могуће је измерити само резултате анализа неких људских органа, на пример тироидне жлезде, али не и директно удео радијације. На основу чега људима, који деле сличне резултате анализа упадају у исту класу и добијају исту дозу одговарајучег лека.*

При Фуријеовој трансформацији датих података добијамо

$$\phi_X(t) = \phi_Y(t) \cdot \phi_\varepsilon(t), \tag{2.57}$$

где опет уводимо оцену за $\phi_Y(t)$

$$\widehat{\phi}_Y(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e^{itY_j}.$$

Одакле даље можемо добити оцену за $\phi_X(t)$

$$\widehat{\phi}_X(t) = \widehat{\phi}_Y(t) \cdot \phi_\varepsilon(t).$$

Применом теореме о инверзној Фуријеовој трансформацији можемо извести наивну оцену за функцију густине $f_X(\cdot)$ у тачки $x \in \mathbb{R}$

$$\widehat{f}_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \widehat{\phi}_X(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \phi_\varepsilon(t) \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e^{itY_j} dt, \tag{2.58}$$

што се даље може записати у облику језгра

$$\widehat{f}_X(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\phi_\varepsilon(t)e^{-it(x-Y_j)}dt = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}G_\varepsilon(x-Y_j). \tag{2.59}$$

Видимо да је заправо $G_\varepsilon(x) = f_\varepsilon(x)$. Па је једино потребно задовољити услове инверзне Фуријеове трансформације.

Теорема 2.7. *Нека је $\phi_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R})$, $\sup_t |\phi_\varepsilon| < \infty$ и $f_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R})$ ограничена и непрекидна функција у тачки $x \in \mathbb{R}$. Тада је оцена дефинисана у (2.59) непристрасна.*

Доказ. Заиста

$$\begin{aligned} E(\widehat{f}_X(x)) &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}E(f_\varepsilon(x-Y_j)) = E(f_\varepsilon(x-Y_1)) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x-t)f_Y(t)dt = [f_\varepsilon * f_Y](x) = f_X(x), \end{aligned}$$

јер према дефиницији модела $X = Y + \varepsilon$. □

Теорема 2.8. *Нека је $\phi_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R})$, $\sup_t |\phi_\varepsilon| < \infty$ и $f_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R})$ ограничена и непрекидна функција у тачки $x \in \mathbb{R}$. Такође, нека је $f_X \in L^2(\mathbb{R})$ и f_Y ограничена. Тада важи*

$$D\left[\widehat{f}_X(x)\right] = \frac{1}{n}\int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon^2(x-t)f_Y(t)dt - \frac{1}{n}f_X^2(x). \tag{2.60}$$

Доказ. Слично као у доказу претходне теореме

$$D\left[\widehat{f}_X(x)\right] = E[\widehat{f}_X^2(x)] - E^2[\widehat{f}_X(x)].$$

Где даље изводимо сабирак по сабирак.

$$E[\widehat{f}_X^2(x)] = \frac{1}{n}\int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon^2(x-t)f_Y(t)dt,$$

и

$$E^2[\widehat{f}_X(x)] = \frac{1}{n}[\int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x-t)f_Y(t)dt]^2 = \frac{1}{n}f_X^2(x),$$

што у комплету доказује ову теорему. □

Теорема 2.9. *Према претпоставкама наведим у претходне две теореме важи*

$$MISE[\widehat{f}_X] = \frac{1}{2\pi n}\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_\varepsilon(t)|^2 dt - \frac{1}{n}\int_{-\infty}^{\infty} f_X^2(x)dx. \tag{2.61}$$

Доказ. Заиста комбинацијом дефиниције $MISE(\cdot)$ и резултата претходне две теореме добијамо

$$\begin{aligned} MISE(\widehat{f}_X) &= E\int_{-\infty}^{\infty} (\widehat{f}_X(x) - f_X(x))^2 dx \\ &= E\int_{-\infty}^{\infty} (\widehat{f}_X^2(x) - 2f_X(x)\widehat{f}_X(x) + f_X^2(x))dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} D[\widehat{f}_X(x)]dx + \int_{-\infty}^{\infty} [E(\widehat{f}_X(x)) - f_X(x)]^2 dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon^2(x-t)f_Y(t)dt - f_X^2(x)\right] dx. \end{aligned}$$

Применом Парсевалове једнакости добијамо

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon^2(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_\varepsilon(t)|^2 dt.$$

□

Одакле видимо да наивна оцена конвергира брзином $\sqrt{n}$.

2.2.1 Оцењивање језгром

До неких побољшања и у овом моделу је могуће доћи применом методе језгара.

Оцена изведена у претходном делу не може да се израчуна у случају када $|\phi_\varepsilon|$ није интеграбилно. Стога уводимо методу језгра у Берксоновом моделу.

Нека је $K(\cdot)$ неко симетрично језгро и $h_n \to 0$, када $n \to \infty$ позитиван параметар равнања.

Уз следеће услове

(Г1) $\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_X(t)|dt < \infty$,

(Г2) $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |\phi_K(t)\phi_\varepsilon(t/h)| < \infty$ и $\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_K(t)\phi_\varepsilon(t/h)|dt < \infty$, предлаже се оцена густине $f_X(\cdot)$ у тачки $x \in \mathbb{R}$

$$\widehat{f}_X(x) = \frac{1}{nk} \sum_{j=1}^{n} K_\varepsilon \left(\frac{x - Y_j}{h_n} \right), \tag{2.62}$$

где је

$$K_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \phi_K(t) \phi_\varepsilon(t/h) dt. \tag{2.63}$$

Ради добијања следећих резултата неопходно је увести додатне услове

(Д1) $f_Y(\cdot)$ је ограничена функција густине

(Д2) $f_X(\cdot)$ је $k+1$ пута диференцијабилна, где је k ред језгра, $f_X(\cdot)$ и $f_X^{(k)}(\cdot)$ припадају $L^2(\mathbb{R})$ и $f_X^{(k+1)}(\cdot)$ ограничена

(Д3) $K \in L^2(\mathbb{R})$ ограничено и симетрично језгро k-ог реда, т.д. $\int_{-\infty}^{\infty} \left| x^{k+1} K(x) \right| dx < \infty$

Теорема 2.10. *Нека важе услови Г1 и Г2 и нека је*

$$\widehat{f}_X(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^{n} K_\varepsilon \left(\frac{x - Y_j}{h} \right)$$

оцена $f_X(x)$, где је $K_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \phi_K(t) \phi_\varepsilon(t/h) dt$.

Тада

$$E(\widehat{f}_X(x)) = [K_h * f_X](x),$$

где је $K_h(x) = \frac{K(\frac{x}{h})}{h}$.

Доказ. Имамо да

$$E[\widehat{f}_X(x)] = \frac{1}{h} E \left[K_\varepsilon \left(\frac{x - Y}{h} \right) \right].$$

На основу чега важи

$$\frac{1}{h} E \left[K_\varepsilon \left(\frac{x - Y}{h} \right) \right] = \frac{1}{2\pi h} \int_{-\infty}^{\infty} E(e^{-it(x - Y_1)/h}) \phi_K(t) \phi_\varepsilon(t/h) dt.$$

$E(e^{-it(x-Y_1)/h}) = \phi_Y(t/h)$ па следи

$$E[\widehat{f}_X(x)] = \frac{1}{2\pi h} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_Y(t/h) \phi_\varepsilon(t/h) \phi_K(t) dt,$$

из дефиниције Берксоновог модела $X = Y + \varepsilon$ важи

$$E[\widehat{f}_X(x)] = \frac{1}{2\pi h}\int_{-\infty}^{\infty} \phi_X(t/h)\phi_K(t)dt = \frac{1}{h}E\left(K\left(\frac{x-X}{h}\right)\right).$$

Одавде је

$$\frac{1}{h}E\left(K\left(\frac{x-X}{h}\right)\right) = \frac{1}{h}\int_{-\infty}^{\infty} K((x-t)/h))f_X(t)dt = [K_h * f_X](x).$$

□

Теорема 2.11. *Нека важе услови Г1, Г2, Д1, Д3 и нека је*

$$\widehat{f}_X(x) = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} K_\varepsilon\left(\frac{x-Y_j}{h}\right),$$

где је $K_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\phi_K(t)\phi_\varepsilon(t/h)dt$*, оцена* $f_X(x)$*.*
Тада

$$D(\widehat{f}_X(x)) = \frac{1}{nh}\int_{-\infty}^{\infty} K_\varepsilon^2(v)f_Y(x-hv)dv - \frac{[K_h * f_X(x)]^2}{n},$$

где је $K_h(x) = \frac{K(\frac{x}{h})}{h}$*.*

Доказ. Слично, следи из следећег низа једнакости

$$\begin{aligned} D(\widehat{f}_X(x)) &= E(\widehat{f}_X^2(x)) - E^2(\widehat{f}_X(x)) \\ &= \frac{1}{n}E\left[\frac{1}{h^2}K_\varepsilon^2\left(\frac{x-Y_1}{h}\right)\right] - \frac{1}{n}[K_h * f_X]^2(x) \\ &= \frac{1}{nh^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(K_\varepsilon\left(\frac{x-u}{h}\right)\right)^2 f_Y(u)du - \frac{1}{n}[K_h * f_X]^2(x), \end{aligned}$$

где увођењем смене $v = \frac{x-u}{h}$ добијамо тражено решење. □

Теорема 2.12. *Нека важе услови Г1, Г2, Д1, Д2, Д3.*
Тада

$$MISE[\widehat{f}_X] = \frac{1}{nh}\int_{-\infty}^{\infty} K_\varepsilon^2(v)dv + \left(1-\frac{1}{n}\right)\int_{-\infty}^{\infty}[K_h * f_X(x)]^2dx$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty} f_X^2(x)dx - 2\int_{-\infty}^{\infty}[K_h * f_X(x)]f_X(x)dx$$

Доказ. Заиста

$$MISE[\widehat{f}_X(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} D[\widehat{f}_X(x)]dx + \int_{-\infty}^{\infty} [E(\widehat{f}_X(x)) - f_X(x)]^2 dx.$$

Решимо део по део

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} [E(\widehat{f}_X(x)) - f_X(x)]^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \left([K_h * f_X](x) - f_X(x)\right)^2 dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [K_h * f_X]^2(x)dx - 2\int_{-\infty}^{\infty} [K_h * f_X](x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} f_X^2(x)dx.\end{aligned}$$

И део са дисперзијом

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} D[\widehat{f}_X(x)]dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{nh}\int_{-\infty}^{\infty} K_\varepsilon^2(v) f_Y(x - hv)dv - \frac{[K_h * f_X]^2(x)}{n}\right] dx \\ &= \frac{1}{nh}\int_{-\infty}^{\infty} K_\varepsilon^2(v)dv - \frac{1}{n}\int_{-\infty}^{\infty} [K_h * f_X]^2(x)dx.\end{aligned}$$

□

2.2.2 Одређивање параметра равнања

У овом одељку базираћемо се првенствено на рад "Kernel density estimation with Berkson error"([7]), који детаљно разматра одабир параметра h користећи различите приступе.

Разматраћемо три приступа одабира параметра h :

1. Бирамо да је $h = 0$, као што се то узима при наивној оцени језгра $f_X(\cdot)$.
2. Бирамо h које оптимизује $f_Y(\cdot)$, јер $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(x - y) f_\varepsilon(y)dy$.
3. Бирамо h које оптимизује оцену баш $f_X(\cdot)$.

Наведимо одговарајуће оцене густине $f_X(\cdot)$ сваког од дата три случаја

1.
$$\widehat{f}_{X_1}(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f_\varepsilon(x - Y_j).$$

Параметар $h_n = 0$ у датом случају.

2.
$$\widehat{f}_{X_2}(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}_Y(x-t)f_\varepsilon(t)dt.$$

Параметар h_n се бира тако да оптимизује оцену густине $\widehat{f}_Y(\cdot)$, коју рачунамо из добијених података методама оцене густине када нема грешке.

3.
$$\widehat{f}_{X_3}(x) = \frac{1}{nh_n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-it(x-Y_j)/h_n}\phi_K(t)\phi_\varepsilon(t/h_n)dt.$$

Параметар h_n се бира тако да оптимизује оцену густине $f_X(\cdot)$.

Као и раније користићемо $MISE(\cdot)$ као меру квалитета добијених оцена и на основу њих бирати параметре h_n за сваки од три наведених случаја. Оптимално h ћемо рачунати као

$$h_i = argmin_{\{h:h\geq 0\}}MISE_i(h),$$

$i = 1, 2, 3$ означава сваки од начина одабира параметра h.

Важи следећа теорема.

Теорема 2.13. *Претпоставимо да важи* $\widehat{\phi}_X, \phi_X \in L^2(\mathbb{R})$. *Тада за свако* $i = 1, 2, 3$ *важи*

$$2\pi MISE_i(h) = \int_{-\infty}^{\infty}|1-\phi_K(ht)|^2|\phi_\varepsilon(t)|^2|\phi_Y(t)|^2dt \tag{2.64}$$
$$+\frac{1}{n}\int_{-\infty}^{\infty}|\phi_K(ht)|^2|\phi_\varepsilon(t)|^2(1-|\phi_Y(t)|^2)dt \tag{2.65}$$

У случају $i = 1$, *када је* $h = 0$ *остаје само други сабирак.*

Доказ. Према датим условима Планшерелова теорема нам гарантује да

$$\int_{-\infty}^{\infty}(f_X(x)-\widehat{f}_X(x))^2dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\phi_X(t)-\widehat{\phi}_X(t)|^2dt.$$

Убацимо то у $MISE(\cdot)$ и добијамо

$$\begin{aligned}
MISE(h) &= E\int_{-\infty}^{\infty}(f_X(x)-\widehat{f}_X(x))^2dx \\
&= \frac{1}{2\pi}E\int_{-\infty}^{\infty}|\phi_X(t)-\widehat{\phi}_X(t)|^2dt \\
&= \frac{1}{2\pi}E\int_{-\infty}^{\infty}|\phi_Y(t)\phi_\varepsilon(t)-\phi_K(ht)\phi_\varepsilon(t)\widehat{\phi}_Y(t)|^2dt \\
&= \frac{1}{2\pi}E\int_{-\infty}^{\infty}|\phi_\varepsilon(t)|^2|\phi_Y(t)-\phi_K(ht)\widehat{\phi}_Y(t)|^2dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\phi_\varepsilon(t)|^2E\left|\phi_Y(t)-\phi_K(ht)\widehat{\phi}_Y(t)\right|^2dt
\end{aligned}$$

У последњој једнакости примењена је Фубинијева теорема. Одакле се добија применом теореме 1.4 на страни 22 књиге Цибакова, 2009 ([23]).

$$E\left|\phi_Y(t)-\phi_K(ht)\widehat{\phi}_Y(t)\right|^2 = |1-\phi_K(ht)|^2|\phi_Y(t)|^2+\frac{1}{n}|\phi_K(th)|^2(1-|\phi_Y(t)|^2).$$

□

За следећу теорему значајна ће бити следећа лема, чији се доказ може наћи у раду [4].

Лема 2.2.1. *Под условима $K(\cdot)$ симетрична густина у $\mathbb{R}$ и $\phi_K(\cdot)$ њена Фуријеова трансформација која је четири пута непрекидно диференцијабилна. Нека је k_2 дисперзија језгра $K(\cdot)$. Тада Тејлоров развој $\phi_K(\cdot)$ око нуле се добија*

$$\phi_K(t) = 1-\frac{t^2k_2}{2}+R(t),$$

такво да постоји $C\in\mathbb{R}$ за свако $t\in\mathbb{R}$ важи

$$R(t)\le C|t|^4.$$

Теорема 2.14. *Нека је*

$$k_2=\int_{-\infty}^{\infty}x^2K(x)dx$$

Уз претпоставке прошле леме и услова

$$\int_{-\infty}^{\infty}|t|^8|\phi_\varepsilon(t)|^2dt<\infty,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_\varepsilon(t)|dt < \infty,$$

важи

$$\begin{aligned} 2\pi MISE(h) = {} & \frac{1}{n}\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_\varepsilon(t)|^2(1-|\phi_Y(t)|^2)dt \\ & + \left(\frac{h^4}{4}\int_{-\infty}^{\infty} t^4 k_2^2 \cdot |\phi_\varepsilon(t)|^2|\phi_Y(t)|^2 dt \right. \\ & \left. - \frac{h^2}{n}\int_{-\infty}^{\infty} t^2 k_2 \cdot |\phi_\varepsilon(t)|^2(1-|\phi_Y(t)|^2)dt\right)(1+O(h^2)). \end{aligned} \tag{2.66}$$

Доказ. Према леми постоји $R(\cdot)$ такав да

$$|R(t)| \leq C|t|^4,$$

и

$$\phi_K(t) = 1 - \frac{k_2 t^2}{2} + R(t).$$

Како је језгро $K(\cdot)$ симетрично, то су $K(\cdot)$ и $R(\cdot)$ реалновредносне функције. Важи следећи низ једнакости

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |1-\phi_k(th)|^2|\phi_\varepsilon(t)|^2|\phi_Y(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{t^2h^2k_2}{2} - R(ht)\right|^2 |\phi_\varepsilon(t)|^2|\phi_Y(t)|^2 dt \\ &= \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} (t^2h^2k_2)|\phi_\varepsilon(t)|^2|\phi_Y(t)|^2 dt \\ &- \int_{-\infty}^{\infty} R(ht)(t^2h^2k_2)|\phi_\varepsilon(t)|^2|\phi_Y(t)|^2 dt \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} R^2(ht)|\phi_\varepsilon(t)|^2|\phi_Y(t)|^2 dt. \end{aligned}$$

Искористићемо границу за $R(\cdot)$ у последња два сабирка и добијамо за неки позитиван број a

$$\begin{aligned} &|R(ht)(t^2h^2k_2)| \leq C|ht|^4|t^2h^2k_2| \leq a|h|^6|t|^6 \\ &|R^2(ht)| \leq C^2|ht|^8 \leq a|h|^8|t|^8 \end{aligned}$$

Дакле оба можемо ограничити са $|h|^6$. Уз услов

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t|^8|\phi_\varepsilon(t)|dt < \infty$$

добијамо да важи

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t|^8|\phi_\varepsilon(t)|^2|\phi_Y(t)|^2 dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} |t|^8|\phi_\varepsilon(t)|^2 dt < \infty$$

Након чега можемо закључити

$$\int_{-\infty}^{\infty} |1-\phi_K(th)|^2 |\phi_\varepsilon(t)|^2 |\phi_Y(t)|^2 dt = \left(\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} (t^2h^2k_2)^2 |\phi_\varepsilon(t)|^2 |\phi_Y(t)|^2\right)(1+O(h^2))$$

Други део доказујемо аналогно. □

На основу теореме 2.14 применом асимптотских особина можемо за сваки од наведених приступа израчунати одговарајући параметар равнања h_i, $i = 1, 2, 3$ који минимизује своје $MISE_i(\cdot)$, $i = 1, 2, 3$.

Случај $i = 1$

Односно $h = 0$ добијамо следеће асимптотско понашање $MISE(0)$

$$2\pi MISE(0) = \frac{1}{n}\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_\varepsilon(t)|^2 (1-|\phi_Y(t)|^2) dt \tag{2.67}$$

тј брзина конвергенције је n^{-1}.

Случај $i = 2$

При додатним условима на $f_Y(\cdot)$ параметар h је реда $n^{-1/5}$ (Ванд и Џонс, 1995. године, стр 100). Специјално претпоставимо:

$$h_2^* = Q(n)n^{-1/5} \tag{2.68}$$

где је $Q : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}^+$ таква да $\limsup_{n\to\infty} Q(n) < \infty$ и $\liminf_{n\to\infty} Q(n) > 0$.

После дужег рачуна добија се:

$$2\pi MISE(h_2^*) = \left(\frac{Q^4(n)n^{-4/5}}{4}\int_{-\infty}^{\infty} t^4k_2^2 |\phi_\varepsilon(t)|^2 (1-|\phi_Y(t)|^2) dt\right)(1+o(1)) \tag{2.69}$$

Случај $i = 3$

У случају $i = 3$ потребно је минимизирати функцију

$$r(h) = \frac{h^4}{4}\cdot a - \frac{h^2}{n}\cdot b,$$

где смо означили $a = \int_{-\infty}^{\infty} t^4 k_2^2 \cdot |\phi_\varepsilon(t)|^2 |\phi_Y(t)|^2 dt$, $b = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 k_2 \cdot |\phi_\varepsilon(t)|^2 (1 - |\phi_Y(t)|^2) dt$ односно решити једначину

$$r'(h) = ah^3 - \frac{2b}{n} h = 0$$

одакле следи

$$h_3^* = \sqrt{\frac{2b}{na}} = \sqrt{\frac{2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} t^2 |\phi_\varepsilon(t)|^2 (1 - |\phi_Y(t)|^2) dt}{n \cdot \int_{-\infty}^{\infty} t^4 k_2 \cdot |\phi_\varepsilon(t)|^2 |\phi_Y(t)|^2 dt}} \tag{2.70}$$

И добијамо за $MISE$

$$\begin{aligned} 2\pi MISE(h_3^*) = & \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} |\phi_\varepsilon(t)|^2 (1 - |\phi_Y(t)|^2) dt \qquad (2.71) \\ & - \frac{1}{n^2} \frac{(\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |\phi_\varepsilon(t)|^2 (1 - |\phi_Y(t)|^2) dt)^2}{\int_{-\infty}^{\infty} t^4 \cdot |\phi_\varepsilon(t)|^2 |\phi_Y(t)|^2 dt} + O(n^{-3}). \end{aligned}$$

И упоредимо њихово асимптотско понашање у сва три случаја.

1. $h_1^* = 0$ и h_3^*:

   $$1 - \frac{MISE(h_3^*)}{MISE(0)} =$$
   $$\frac{1}{n} \frac{(\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |\phi_\varepsilon(t)|^2 (1 - |\phi_Y(t)|^2) dt)^2}{\int_{-\infty}^{\infty} t^4 |\phi_\varepsilon(t)|^2 |\phi_Y(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} |\phi_\varepsilon(t)|^2 (1 - |\phi_Y(t)|^2) dt} + O(n^{-2})$$

   Видимо да је доста боља оцена добијена у случају $i = 3$, односно одабиром h_n којим се минимизује баш $MISE(\widehat{f_X})$.

2. h_2^* и h_3^*:

   $$\frac{MISE(h_3^*)}{MISE(h_2^*)} < 1$$

   Асимптотски $MISE(h_2^*)$ је реда $n^{-4/5}$, док је $MISE(h_3^*)$ реда n^{-1}.

3. $h_1^* = 0$ и h_2^*:

   $$\frac{MISE(0)}{MISE(h_2^*)} < 1$$

   Асимптотски $MISE(h_2^*)$ је реда $n^{-4/5}$, док је $MISE(0)$ реда n^{-1}.

Закључак је да је најбоље користити параметар равнања h_n који минимизује оцену у случају $i = 3$. Најгори резултат се показао у слуцају $i = 2$. Док случај када је $h_n = 0$ не оцењује толико лоше, а најлакши је за рачун.

2.3 Мешавина грешака

У претходна два одељка смо видели да се генералне технике оцењивања густине значајно разликују у зависности од модела који се разматра.

Нека је $f_X(\cdot)$ непозната функција густине случајне величине X. И нека је модел са мешавином грешака Берксонове и класичне дат помоћу

$$V = W + \varepsilon,$$

где је ε - позната класична грешка, V - измерена случајна величина, W - непозната, док је

$$X = W + \delta,$$

где је δ - позната променљива, која одговара Берксоновој грешци, X - случајна величина чију густину желимо да оценимо, W - случајна величина "посредник" преко које имамо информације о X. Посебно, све то можемо да запишемо у облику карактеристичних функција, као у претходна два одељка, тада се добије

$$\phi_V(t) = \phi_W(t) \cdot \phi_\varepsilon(t),$$

$$\phi_X(t) = \phi_W(t) \cdot \phi_\delta(t).$$

Одакле следи

$$\phi_X(t) = \frac{\phi_V(t)}{\phi_\varepsilon(t)} \cdot \phi_\delta(t),$$

уз услове $\phi_\varepsilon(t) \neq 0, \forall t \in [a,b]$ и $|\phi_X(\cdot)|$ - интеграбилна функција.

Тада применом теореме о инверзној Фуријеовој трансформацији добијамо наивну оцену у случају моделу у присуству мешавине грешака

$$\widehat{f}_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \frac{\widehat{\phi}_V(t)}{\phi_\varepsilon(t)} \cdot \phi_\delta(t) dt, \tag{2.72}$$

где је $\widehat{\phi}_V(\cdot)$ - Фуријеова трансформација узорка, тј.

$$\widehat{\phi}_V(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e^{itV_j}$$

Лема 2.3.1. *Нека важе услови $|\phi_\varepsilon(t)| \neq 0$ за свако $t \in [a,b]$, $\sup_{t\in\mathbb{R}} |\phi_\delta(t)|/|\phi_\varepsilon(t)| < \infty$ и $\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_\delta(t)|/|\phi_\varepsilon(t)| dt < \infty$.*

Тада оцена дефинисана у (2.72) је непристрасна оцена густине $f_X(x)$ у тачки $x \in \mathbb{R}$.

Доказ.

$$E(\widehat{f}_X(x)) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}E(e^{itV_j})\frac{\phi_\delta(t)}{\phi_\varepsilon(t)}dt$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\phi_V(t)\frac{\phi_\delta(t)}{\phi_\varepsilon(t)}dt,$$

сетимо се да

$$\phi_X(t) = \frac{\phi_V(t)}{\phi_\varepsilon(t)}\cdot\phi_\delta(t),$$

одакле следи тврђење леме. □

Лема 2.3.2. *Нека важе услови* $|\phi_\varepsilon(t)| \neq 0$ *за свако* $t \in [a,b]$, $\sup_{t\in\mathbb{R}} |\phi_\delta(t)|/|\phi_\varepsilon(t)| < \infty$, $\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_\delta(t)|/|\phi_\varepsilon(t)|dt < \infty$ *и* $f_V(\cdot)$ *ограничена.*

Тада оцена дефинисана у (2.72) има дисперзију

$$D(\widehat{f}_X(x)) = \frac{1}{n}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-it(x-u)}\frac{\phi_\delta(t)}{\phi_\varepsilon(t)}dt\right)^2 f_V(u)du - \frac{1}{n}f_X^2(x). \quad (2.73)$$

Доказ. Заиста, применом основних особина дисперзије и Фуријеове трансформације важи

$$D(\widehat{f}_X(x)) = \frac{1}{4\pi^2 n^2}\sum_{j=1}^{n} D\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-it(x-V_j)}\frac{\phi_\delta(t)}{\phi_\varepsilon(t)}dt\right)$$
$$= \frac{1}{4\pi^2 n}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-it(x-u)\frac{\phi_\delta(t)}{\phi_\varepsilon(t)}dt}\right)^2 f_V(u)du - \frac{1}{n}f_X^2(x).$$

□

Теорема 2.15. *Нека важе услови*

- $|\phi_\varepsilon(t)| \neq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$,
- $\sup_t \left|\frac{\phi_\delta t}{\phi_\varepsilon(t)}\right| < \infty$ *и* $\int \left|\frac{\phi_\delta t}{\phi_\varepsilon(t)}\right| dt < \infty$,
- $f_V(\cdot)$ *ограничена функција,*
- $f_X \in L^2(\mathbb{R})$.

Тада

$$MISE(\widehat{f}_X) = \frac{1}{2\pi n}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\phi_\delta(t)|^2}{|\phi_\varepsilon(t)|^2}dt - \frac{1}{n}\int_{-\infty}^{\infty} f_X^2(x)dx. \quad (2.74)$$

Доказ. Изводи се након директне примене Парсевалове једнакости на

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}(e^{-itx}\frac{\phi_\delta(t)}{\phi_\varepsilon(t)})^2dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\phi_\delta(t)|^2}{|\phi_\varepsilon(t)|^2}dt,$$

и уз резултате претходне две леме лако се добија тражени резултат. □

2.3.1 Оцењивање језгром

Оцена дефинисана у прошлом одељку има своје озбиљне мане, налик оним што су имали и одговарајуће наивне оцене у претходним моделима. Главни проблем је да се оцена (2.72) не може израчунати када је $|\phi_\delta|/|\phi_\varepsilon|$ неинтеграбилна функција. Зато овде уводимо следеће претпоставке: $K(\cdot)$ симетрично језгро, $h = h_n \to 0$ када $n \to \infty$. У раду [3] приказана је следећа теорема.

Теорема 2.16. *Нека важе услови*

1. $|\phi_\varepsilon(t)| \neq 0$, $\forall t \in [a, b]$,
2. $\int_{-\infty}^{\infty}|\phi_X(t)|dt < \infty$,
3. $\sup_t|\phi_K(t)\phi_\delta(t/h)/\phi_\varepsilon(t/h)| < \infty$ *и* $\int_{-\infty}^{\infty}|\phi_K(t)\phi_\delta(t/h)/\phi_\varepsilon(t/h)|dt < \infty$.

Нека је

$$\widehat{f}_X(x;h) = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n}K_\varepsilon^\delta\left(\frac{x-V_j}{h}\right)$$

оцена $f_X(x)$*, где је* $K_\varepsilon^\delta(x;h) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}\phi_K(t)\phi_\delta(t/h)/\phi_\varepsilon(t/h)dt$.

Тада је пристрасност оцене $\widehat{f}_X(x;h)$ *једнака*

$$b(\widehat{f}_X(x;h)) = K_h * f_X(x) - f_X(x),$$

где је $K_h(x) = \frac{K(\frac{x}{h})}{h}$.

Доказ. Важи следеће

$$\begin{aligned}
E\left(\frac{1}{h}K_\varepsilon^\delta\left(\frac{x-V}{h}\right)\right) &= \frac{1}{2\pi h}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx/h}E(e^{itV/h})\phi_K(t)\phi_\delta(t/h)/\phi_\varepsilon(t/h)dt \\
&= \frac{1}{2\pi h}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx/h}\phi_W(t/h)\phi_\varepsilon(t/h)\phi_K(t)\phi_\delta(t/h)/\phi_\varepsilon(t/h)dt \\
&= \frac{1}{2\pi h}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx/h}\phi_W(t/h)\phi_K(t)\phi_\delta(t/h)dt \\
&= \frac{1}{2\pi h}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx/h}\phi_X(t/h)\phi_K(t)dt \\
&= \frac{1}{h}E\left(K\left(\frac{x-X}{h}\right)\right) \\
&= E\left(K_h\left(x-X\right)\right).
\end{aligned}$$

□

Теорема 2.17. *Нека важе услови*

1. $|\phi_\varepsilon(t)| \neq 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$,
2. $\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_X(t)|dt < \infty$,
3. $\sup_t |\phi_K(t)\phi_\delta(t/h)/\phi_\varepsilon(t/h)| < \infty$ *и* $\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_K(t)\phi_\delta(t/h)/\phi_\varepsilon(t/h)|dt < \infty$,
4. $K(\cdot)$ *је ограничено симетрично језгро* k- *тог реда и важи* $\int_{-\infty}^{\infty} |t^{k+1}K(t)|dt < \infty$,
5. $f_V(\cdot)$ *је ограничена функција.*

Нека је

$$\widehat{f}_X(x;h) = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} K_\varepsilon^\delta\left(\frac{x-Vj}{h}\right),$$

где је $K_\varepsilon^\delta(x;h) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\phi_K(t)\phi_\delta(t/h)/\phi_\varepsilon(t/h)dt$, *оцена* $f_X(x)$.
Тада

$$D(\widehat{f}_X(x;h)) = \frac{1}{nh}\int_{-\infty}^{\infty}[K_\varepsilon^\delta(v)]^2 f_V(x-hv)dv - \frac{[K_h * f_X(x)]^2}{n}$$

где је $K_h(x) = \frac{K(\frac{x}{h})}{h}$

Доказ. Нађимо $E(\widehat{f}_X^2(x))$, аналогно као што смо тражили у прошлој теореми.

$$\begin{aligned}
E(\widehat{f}_X^2(x)) &= \frac{1}{nh^2} E\left(\left[K_\varepsilon^\delta\left(\frac{x-V_1}{h}\right)\right]^2\right) \\
&= \frac{1}{nh^2}\int K_\varepsilon^\delta\left(\frac{x-v}{h}\right)^2 f_V(v)dv \\
&= \frac{1}{nh^2}\int K_\varepsilon^\delta\left(\frac{x-t}{h}\right)^2 f_V(t)dt \\
&= \frac{1}{nh}\int \left[K_\varepsilon^\delta(v)\right]^2 f_V(x-vh)dv.
\end{aligned}$$

Док други сабирак се добија квадрирањем и дељењем са n очекивања добијеног у прошлој теореми. □

Теорема 2.18. *Нека важе услови:*

1. $|\phi_\varepsilon(t)| \neq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$,
2. $\int |\phi_X(t)|dt < \infty$,
3. $\sup_t \left|\frac{\phi_K(t)\phi_\delta t/h}{\phi_\varepsilon(t/h)}\right| < \infty$ *и* $\int \left|\frac{\phi_K(t)\phi_\delta(t/h)}{\phi_\varepsilon(t/h)}\right| dt < \infty$,
4. $f_V(\cdot)$ *ограничена функција,*
5. $K(\cdot) \in L^2(\mathbb{R})$ *симетрично језгро* k *- тог реда и* $\int |t^{k+1}K(t)|dt < \infty$,
6. $f_X(\cdot)$ *је* $k+1$ *пута непрекидно диференцијабилна функција,* f_X, $f_X^{(k)} \in L^2(\mathbb{R})$ *и* $f_X^{(k+1)}$ *ограничена.*

Тада

$$MISE[\widehat{f}_X(\cdot;h)] = \frac{1}{nh}\int_{-\infty}^{\infty}[K_\varepsilon^\delta(v)]^2dv + \left(1-\frac{1}{n}\right)\int_{-\infty}^{\infty}[K_h * f_X(x)]^2dx \tag{2.75}$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} f_X^2(x)dx - 2\int_{-\infty}^{\infty}[K_h * f_X(x)]f_X(x)dx$$

Доказ. Доказ следи директно из претходне две теореме. □

Према Парсеваловој једнакости видимо да при условима из теореме (2.18) такође можемо добити

$$\int_{-\infty}^{\infty}[K_\varepsilon^\delta(v)]^2dv = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\phi_K(t)|^2\frac{|\phi_\delta(t/h)|^2}{|\phi_\varepsilon(t/h)|^2}dt. \tag{2.76}$$

Како је $|\phi_\delta| \leq 1$ добијамо да оцена конвергира бар истом брзином као у случају оцене у моделу са класичном грешком, где важи $\phi_\delta(t) = 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Такође, горња граница се достиже у случају када је $\delta = 0$, тада се тачно добије иста вредност као у моделу са класичном грешком. Иначе обратимо пажњу да су заправо обе оцене и одговарајући $MISE$ израчунати у одељку за класичну и Берксонову грешку могу се добити из ове, само ако ставимо да је $\varepsilon = 0$, односно $\delta = 0$, респективно.

Под условима теореме (2.18) такође можемо добити другачији облик за дисперзију

$$\int_{-\infty}^{\infty} D[\widehat{f}_X(x)]dx = \frac{1}{2\pi nh}\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_K(t)|^2 \frac{|\phi_\delta(t/h)|^2}{|\phi_\varepsilon(t/h)|^2}dt - \frac{1}{n}\int_{-\infty}^{\infty}[K_h * f_X(x)]^2 dx, \tag{2.77}$$

и за пристрасност

$$\int_{-\infty}^{\infty} b^2[\widehat{f}_X(x)]dx = \frac{h^{2k}}{(k!)^2}k_k^2 \int_{-\infty}^{\infty}\left(f_X^{(k)}\right)^2 dx + O(h^{2k+2}), \tag{2.78}$$

Други сабирак опада брзином n^{-1}, док за први сабирак је теже рећи којом брзином опада због $|\phi_\delta|/|\phi_\varepsilon|$. И овде се дели на више класа могуће брзине конвергенције у зависности од већ напоменутог количника.

2.3.2 Одређивање параметра равнања

Налик разматрањима глаткости Фуријеових трансформација густина у случају класичне грешке у овом одељку се разматра глаткост количника $|\phi_\delta|/|\phi_\varepsilon|$, где је ϕ_ε - Фуријеова трансформација функције густине класичне грешке, а ϕ_δ - Фуријеова трансформација функције густине Берксонове грешке.

Случај 1: Берксонова грешка има већу глаткост

Нека важи

$$\frac{|\phi_\delta(t)|}{|\phi_\varepsilon(t)|} \leq c_2 t^{-q}, \tag{2.79}$$

где је $q \geq \frac{1}{2}$, а c_2 позитивна константа.

Размотрићемо $1/2 < q \leq 1$ (случај $q > 1$ је обухваћен раније). Другим речима гледамо случај када је количник $\frac{|\phi_\delta|}{|\phi_\varepsilon|}$ обичне глаткости (појам дефинисан раније). Ако је $\phi_K(\cdot) \in C^{(2)}$ и $\phi_K^{(2)}$ ограничено, тада се може доказати да је први члан развоја (2.77) могуће записати у облику $a_1/n+$

$a_2 h^{2q-1}/n + o(h^{2q-1}/n)$, где су a_1, a_2 позитивне константе. Из (2.77) и (2.78) изводимо да је

$$MISE(h) = \frac{a_1}{n} + \frac{a_2 h^{2q-1}}{n} - \frac{a_3}{n} + a_4 h^{2k} + o(h^{2k}) + o(h^{2q-1}/n), \tag{2.80}$$

$a_1.a_2, a_3, a_4$ позитивне константе.

Ако је $a_1 < a_3$ тада оптимално h се добија из првог извода $MISE(\cdot)$ по h.

$$MISE'(h) = (2q-1)\frac{a_2 h^{2q-2}}{n} + 2ka_4 h^{2k-1} = 0.$$

И добија се

$$h \sim n^{-1/(2k-2q+1)}. \tag{2.81}$$

Како је $q > 1/2$ $MISE(\cdot)$ је реда n^{-1}.

Ако је $a_1 \geq a_3$, онда параметар равнања који минизује (2.83) $h = 0$. Одабираом таквог параметра добија се проблем при оцењивању густине у тачкама, које су добијене из узорка (детаљније у раду [3].) Зато се захтева услов да је h строго позитиван, што наравно не доводи до минимума $MISE(\cdot)$, брзина конвергенције и даље остане $\sqrt{n}$, док год је одабрано $h \sim n^{-1/(2k)}$.

Случај 2: Класична грешка има већу глаткост

Прво дефинишимо следеће.

Дефиниција 2.3.1. *Скуп $\mathcal{NS}$ зовемо скупом свих функција глаткости мање од $t^{-1/2}$, односно*

$$\mathcal{NS} = \tag{2.82}$$

$$\left\{ f : \exists M > 0, \forall |t| > M, |f(t)| \geq t^{\frac{-1}{2}} C(t),\ \textit{где}\ \inf_t C(t) > 0, \lim_{|t|\to\infty} C(t) = \infty \right\}. \tag{2.83}$$

Разматрамо овде случај када је количник $\frac{|\phi_\delta|}{|\phi_\varepsilon|}$ глаткости мање од $t^{-1/2}$, тј. $\frac{|\phi_\delta|}{|\phi_\varepsilon|} \in \mathcal{NS}$. На снази је следећи лема (доказ се може наћи [3], стр 102.)

Лема 2.3.3. *Нека важе услови из теореме 2.18 и $\frac{|\phi_\delta|}{|\phi_\varepsilon|} \in \mathcal{NS}$. Тада*

$$MISE(\widehat{f}_X) = AMISE(\widehat{f}_X)(1 + o(1)), \tag{2.84}$$

где је

$$AMISE(\widehat{f}_X) = \frac{1}{2\pi nh}\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_K(t)|^2 \frac{|\phi_\delta(t/h)|^2}{|\phi_\varepsilon(t/h)|^2} dt + \frac{h^{2k}}{(k!)^2} k_k^2 \int_{-\infty}^{\infty} [f_X^{(k)}(x)]^2 dx.$$

Уколико функција $\frac{|\phi_\delta|}{|\phi_\varepsilon|}$ опада (расте) полиномијалном, тј. обичне глаткости.

Теорема 2.19. *Нека важе услови из теореме 2.18 и $\frac{|\phi_\delta|}{|\phi_\varepsilon|}$ је функција обичне глаткости реда $\beta < \frac{1}{2}$ за неке константе $d_0, d_1 > 0$. Нека је $K(\cdot)$ таква функција да важи $\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_K(t)|^2 |t|^{-2\beta} dt < \infty$.*

Тада важи

$$AMISE(\widehat{f}_X) = c_1 \frac{h^{2\beta-1}}{n} + c_2 h^{2k}. \tag{2.85}$$

Специјално за $h \sim n^{-1/(2k+1-2\beta)}$ важи да је

$$AMISE(\widehat{f}_X) = n^{-2k/(2k+1-2\beta)}. \tag{2.86}$$

Уколико функција $\frac{|\phi_\delta|}{|\phi_\varepsilon|}$ опада експоненцијално, тј. суперглатка функција.

Следи теорема која покрива последњи случај.

Теорема 2.20. *Нека важе услови из теореме 2.18 и $\frac{|\phi_\delta|}{|\phi_\varepsilon|}$ је суперглатка функција реда $\beta > 0$ за неке константе $d_0, d_1, \gamma, > 0$ и $\beta_0, \beta_1 \in \mathbb{R}$. Нека је $\phi_K(\cdot)$ функција са носачем $[-B, B]$ и $\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_K(t)|^2 |t|^{2\beta_1} dt < \infty$.*

Тада важи

$$AMISE(\widehat{f}_X) = O(n^{-1} h^{-2\beta_1 - 1} e^{2\frac{|B/h|^\beta}{\gamma}}) + c_2 h^{2k}. \tag{2.87}$$

Специјално за $h \sim d \cdot B \cdot (2/\gamma)^{1/\beta} (\log n)^{-1/\beta}$, где је $d \geq 1$ важи да је

$$AMISE(\widehat{f}_X) = (\log n)^{-2k/\beta}. \tag{2.88}$$

Докази ових ставова су слични доказима из теорема 2.4, 2.5 и последице 2.1.1, представљених у делу са класичном грешком.

2.4 Дискусија

2.4.1 Непозната расподела грешке

Може се приметити да све што је изведено у другом поглављу важи само при услову да је тачно позната функција расподеле грешака, како класичне, тако и Берксонове. Међутим у пракси је нереално очекивати толико прецизно одређену функцију расподеле грешака. Било би нефер оставити без неког коментара овај случај. У великом је успону покушај ослабљивања услова тачног познавања расподеле грешака и развијене су следеће методе.

Узорак из ε (δ)

Једна од метода је да се претпостави да је добијен узорак из расподеле грешака из неког другог експеримента директно. Такве идеје су размотрене у радовима и литератури попут [11] и [12]. Може се размотрити и случај да се X може измерити како са грешком, тако и без грешке, па на основу тога добити узорак из расподеле грешака. Тачније, нека је X' вектор где је све измерено без утицаја грешке мерења, а X са нашом стандардном ознаком, тј. $Y = X + \varepsilon$ добијамо га само преко Y. Тада је $Y - X' = \varepsilon$ баш низ тражених елемената из расподеле грешака.

Поновљена мерења

У овом случају можемо да добијемо више пута измерено Y, рецимо $m \in \mathbb{N}$, тј. Y^1, Y^2, $\ldots$, Y^m. Тада свака одговарајућа разлика

$$Y^j - Y^i = \varepsilon^j - \varepsilon^i.$$

На основу чега даље можемо оценити Фуријеову трансформацију $\phi_\varepsilon(\cdot)$.

$$E(e^{it(\varepsilon^j - \varepsilon^i)}) = E(e^{it(Y^j - Y^i)}) = |\phi_\varepsilon(t)|^2 \tag{2.89}$$

И добија се оцена

$$\widehat{\phi}_\varepsilon(t) = |\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} e^{it(Y^j - Y^i)}|^{1/2}. \tag{2.90}$$

Детаљније је овај случај размотрен у раду [13] и другим.

Делимично позната расподеле грешке

Такође се разматрају случајеви када је позната фамилија расподеле грешака (униформна, нормална, експоненцијална) али не и њени параметри.

2.4.2 Избор параметра равнања

Постоје и принципијално другачији начина избора параметра равнања од представљених у раду. Као и случајеви где се параметар h не бира униформно за све $x \in \mathbb{R}$, већ се мења у зависности од положаја тачке x. Детаљније се може погледати у радовима [14], [15], [16].

Поглавље 3

Симулације

У овом поглављу представићемо неке од изведених резултата у претходном поглављу на простим примерима. Најпре у моделу са класичном грешком извешћемо симулације на у случају суперглатке расподеле грешке и расподеле грешке обичне глаткости. У моделу са Берксоновом грешком упоређујемо резултате оцењивање у случају наивне оцене и оцене густине деконволуционим језгром. Док у моделу са обе грешке симулирамо оцену густине у случају грешака из нормалне (суперглатке) и лапласове (обичне глаткости) расподела.

Све симулације су добијене и написане у програмском језику R.

3.1 Класична грешка

Нека је дат модел

$$Y = X + \varepsilon.$$

Густину X желимо да оценимо, расподела ε је позната, а добијамо узорак из расподеле Y. У овом примеру размотрићемо следеће. Нека је променљива X мешавина нормалних расподела:

$$F = \frac{1}{3}\mathcal{N}(-6,2) + \frac{1}{3}\mathcal{N}(3,3) + \frac{1}{3}\mathcal{N}(11,3).$$

Док је расподела класичне грешке $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Параметар h се добија у складу са теоремом из другог поглавља за суперглатке карактеристичне функције грешака и зависи од величине узорка.

$$h = \sqrt{\sigma_\varepsilon^2}\left(\frac{\log(n)}{2}\right)^{-1/2}.$$

Односно у нашем случају за величину узорка $n = 250$ и $\sigma_\varepsilon^2 = 1$ добија се

$$h = \left(\frac{\log(250)}{2}\right)^{-1/2} = 0.6018496.$$

Даље применом језгра $K_2(\cdot)$ добијени су следећи графици слика 3.1 $(\sigma_\varepsilon = 1)$ и слика 3.2 $(\sigma_\varepsilon = 1.2)$.

График 3.1: Деконволуција мешавине нормалних при нормалној грешци.

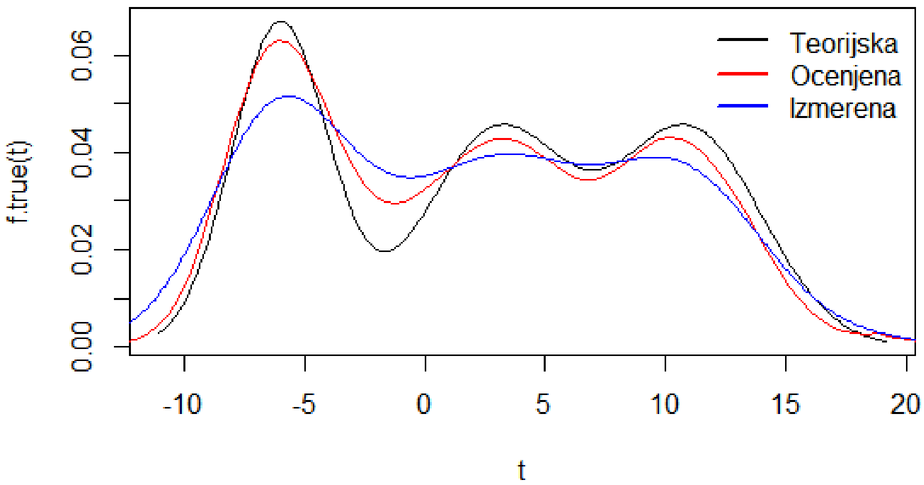
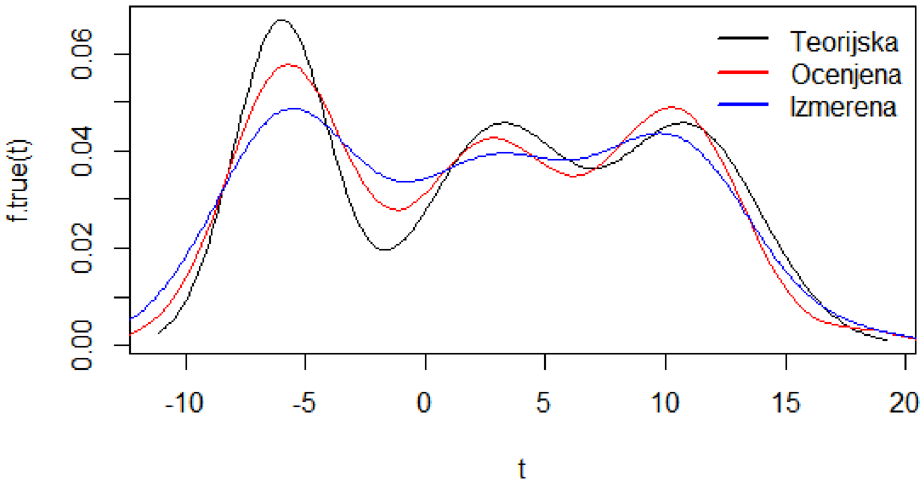


График 3.2: Деконволуција мешавине нормалних при нормалној грешци са већом дисперзијом.



За Лапласову расподелу $f_\varepsilon(x) = \frac{1}{2b}e^{-\frac{|x-\mu|}{b}}$, где су μ - средња вредност, а b - параметар скалирања, односно дисперзија је $2b^2$. Лапласова расподела припада расподелама обичне глаткости и њена фуријеова трансформација је

$$\phi_\varepsilon(t) = \frac{e^{i\mu t}}{1+b^2t^2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Узимањем исте оригиналне расподеле

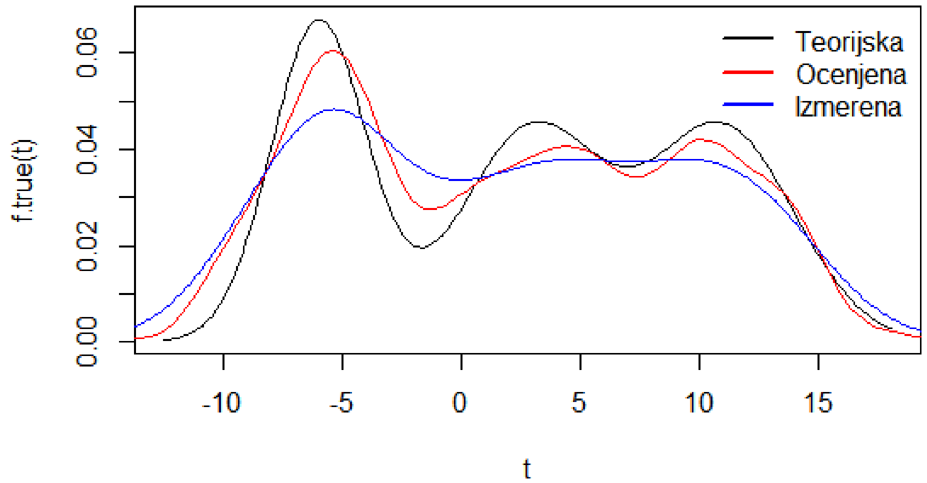
$$F = \frac{1}{3}\mathcal{N}(-6,2) + \frac{1}{3}\mathcal{N}(3,3) + \frac{1}{3}\mathcal{N}(11,3),$$

и грешке из Лапласове расподеле са параметрима $\mu = 0$ и $b = \frac{1}{2}$ на узорку $n = 250$ важи да се параметар равнања добија у складу са одговарајућом теоремом за расподеле грешке обичне глаткости

$$h = \left(\frac{5\sigma_\varepsilon^4}{n}\right)^{1/9} = 0.5550473.$$

На основу чега добија се график 3.3.

График 3.3: Деконволуција мешавине нормалних при Лапласовој грешци.



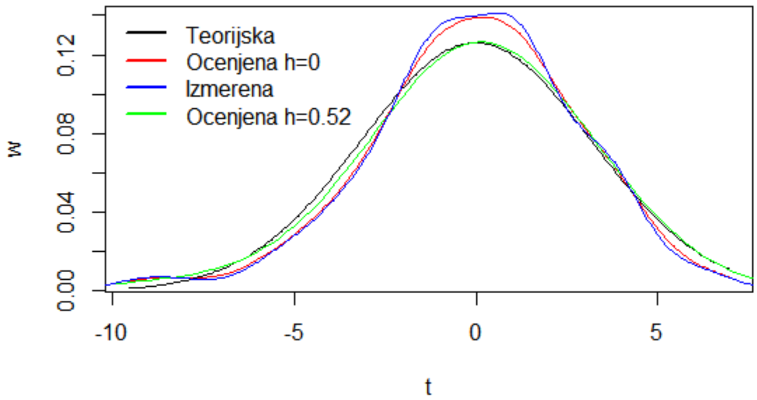
Напомена: овде су размотрени само компликовани случајеви деконволуције, у случају обичне нормалне расподеле за X ствари су много лепше. Такође, што је мањи однос дисперзија $\frac{D(X)}{D(\varepsilon)}$ то је теже добити квалитетну оцену деконволуционим језгром у моделу са класичном грешком.

3.2 Берксонова грешка

Прво размотримо типичне случајеве са нормалном расподелом за Y и ε - Берксоновом грешком. И упоредићемо оцене добијене различитим приступима у одељку 2.2.

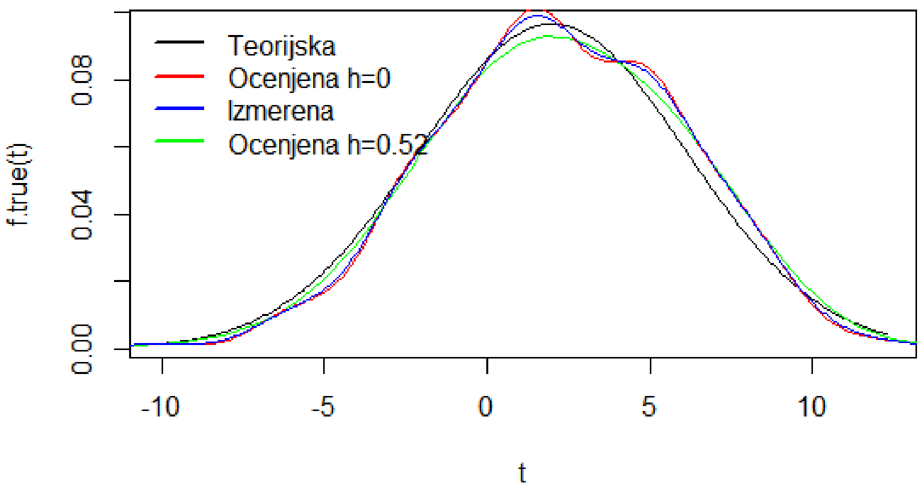
Нека је модел дат са $X = Y + \varepsilon$ и $Y \sim \mathcal{N}(0, 9)$, док $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Тада је према трећм приступу одабран параметар $h_3^* = 0.52173$ према једнакости (2.70), док према првом приступу $h = 0$ и оцена је тривијална.

График 3.4: $Y \sim \mathcal{N}(0,9)$, Берксонова грешка - $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0,1)$.



У случају да је $Y \sim \mathcal{N}(2,9)$, док $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0,1)$. Тада је теоријска расподела за X коју оцењујемо заправо једнака $X \sim \mathcal{N}(2,10)$. Па се добијају резултати приказани на графику 3.5.

График 3.5: $Y \sim \mathcal{N}(2,9)$, Берксонова грешка - $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0,1)$.



Видимо да је ипак трећи приступ са значајно бољом оценом, чак и на најпростијим примерима.

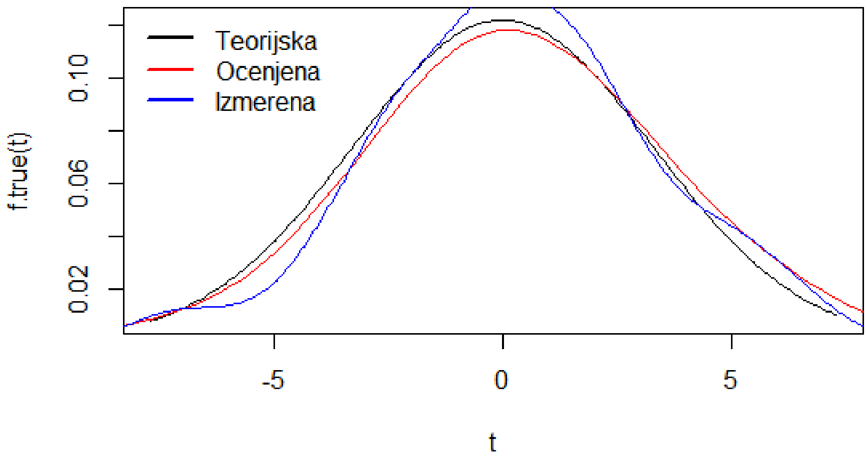
3.3 Мешавина грешака

Симулираћемо случајеве, где одговарајућа класична грешка из нормалне и Лапласове расподеле, док Берксонова само из нормалне. Прво: $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0,1)$, $\delta \sim \mathcal{N}(0,1.7)$, $W \sim \mathcal{N}(0,9)$, $n = 250$. Теоријска расподела за X, према моделу са мешавином грешака, је

$$X = W + \delta \sim \mathcal{N}(0, 10.7).$$

На графику 3.6 можемо видети оцену густину.

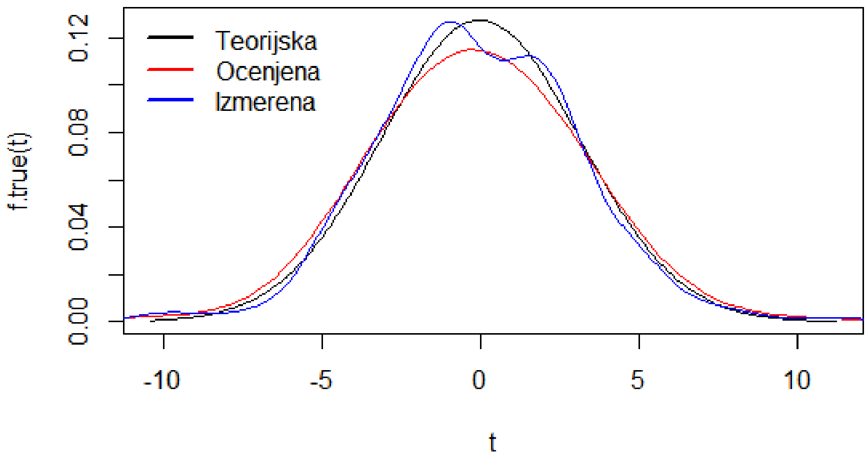
График 3.6: $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0,1)$, $\delta \sim \mathcal{N}(0,1.7)$, $W \sim \mathcal{N}(0,9)$, $n = 250$.



На графику 3.7: $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0,1.44)$, $\delta \sim \mathcal{N}(0,0.81)$, $W \sim \mathcal{N}(0,9)$. Теоријска расподела за X, према моделу са мешавином грешака, је

$$X = W + \delta \sim \mathcal{N}(0, 9.81).$$

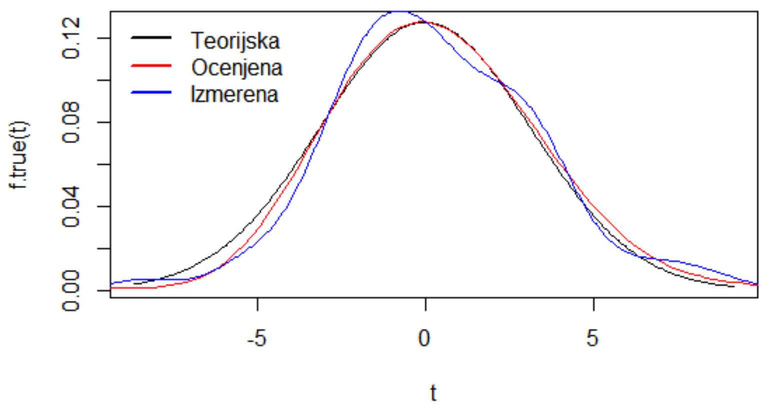
График 3.7: $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, 1.44)$, $\delta \sim \mathcal{N}(0, 0.81)$, $W \sim \mathcal{N}(0, 9)$.



На графику 3.8: $\varepsilon \sim \mathcal{L}(0, 1)$, $\delta \sim \mathcal{N}(0, 0.81)$, $W \sim \mathcal{N}(0, 9)$. Теоријска расподела за X, према моделу са мешавином грешака, је

$$X = W + \delta \sim \mathcal{N}(0, 9.81).$$

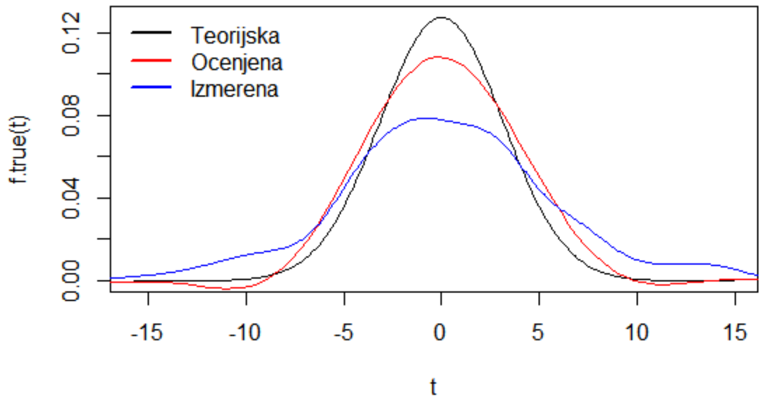
График 3.8: $\varepsilon \sim \mathcal{L}(0, 1)$, $\delta \sim \mathcal{N}(0, 0.81)$, $W \sim \mathcal{N}(0, 9)$.



На графику 3.9: $\varepsilon \sim \mathcal{L}(0, 3)$, $\delta \sim \mathcal{N}(0, 0.81)$, $W \sim \mathcal{N}(0, 9)$. Теоријска расподела за X, према моделу са мешавином грешака, је

$$X = W + \delta \sim \mathcal{N}(0, 9.81).$$

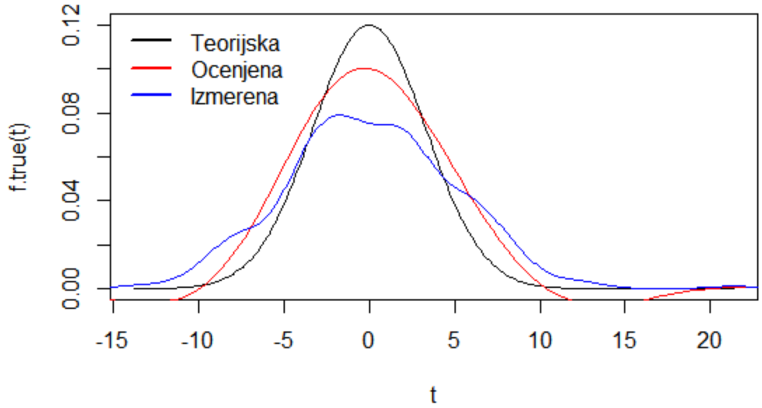
График 3.9: $\varepsilon \sim \mathcal{L}(0,3)$, $\delta \sim \mathcal{N}(0,0.81)$, $W \sim \mathcal{N}(0,9)$.



На графику 3.10: $\varepsilon \sim \mathcal{L}(0,3)$, $\delta \sim \mathcal{N}(0,2)$, $W \sim \mathcal{N}(0,9)$. Теоријска расподела за X, према моделу са мешавином грешака, је

$$X = W + \delta \sim \mathcal{N}(0,11).$$

График 3.10: $\varepsilon \sim \mathcal{L}(0,3)$, $\delta \sim \mathcal{N}(0,2)$, $W \sim \mathcal{N}(0,9)$.



Поглавље 4

Закључак

У раду смо представили оцењивање густине три врсте модела са грешкама, као и неке њихове основне особине. Видимо да је оцењивање густине у моделу са класичном грешком најпотпуније и највише истраживања спроведено баш у оквиру тог модела. Много зависи од расподеле класичне грешке, на основу чега могу значајно да се разликују добијени асимптотски резултати. Одабир језгра је истражен само у уском скупу језгара, чак ни језгро $K_2(\cdot)$ (у односу на које смо дефинисали релативну ефикасност) није у том скупу.

У моделу са Берксоновом грешком смо првенствено посматрали три различита приступа оцењивања и одговарајући одабири параметра h при оцењивању густине. Резултати добијени симулацијама и теоријом ипак сугеришу да је боље користити оцењивање језгром (трећи приступ) у моделу са Берксоновом грешком, где се парамаметар равнања бира у односу на средње квадратну интегралну грешку.

Модел са мешавином грешака је најмање истражен и много зависи од количника карактеристичних функција грешака Берксонове и класичне. У односу на тај количник раздвајамо случајеве и видимо да се $MISE(\cdot)$ асимптотски различито понаша.

Правци за даљи рад би могли да буду:

- Ослабљивање услова везаних за познавање грешака у сва три случаја.
- Налажење оптималних језгара за сваки од наведених модела и успостављање статистичких особина.
- Налажење нових правила за одабир параметра равнања у сва три случаја.

- Детаљније истраживање модела са Берксоновом грешком и мешавином грешака у смислу оцењивања густине расподеле.

Литература

[1] B. W. Silverman: Density Estimation for Statistics and Data Analysis, Springer, 1986.

[2] A. Meister: Deconvolution Problems in Nonparametric Statistics, Springer, 2009.

[3] A. Delaigle: Nonparametric density estimation from data with mixture of Berkson and classical errors, The Canadian Journal of Statistics, Vol. 35, No. 1, 2007.

[4] J. P. Long, N. El Karoui, J. A. Rice: Kernel Density Estimation with Berkson Error, arXiv: 1401.3362, 2014.

[5] R. J. Carrol, D. Ruppert, L. A. Stefanski, C.M. Crainiceanu: Measurement Error in Nonlinear Models, Chapman & Hall/CRC, 2006.

[6] L. A. Stefanski, R. J. Carrol: Deconvoluting kernel density estimators, Statistics 21, 1990.

[7] J. Berkson: Are there two regression problems?, Journal of American Statistical Association, 1950.

[8] A. Delaigle, P. Hall: On optimal kernel choice for deconvolution, Statist. Probab. Lett. 76, 2006.

[9] J. Fan: On the optimal rates of convergence for nonparametric deconvolution problems, Ann. Stat. 19, 1991.

[10] П. Младеновић: Екстремне вредности случајних низова, Математички факултет, Београд, 2002.

[11] M.H. Neumann: On the effect of estimating the error density in nonparametric deconvolution. Journal of Nonparametric Statistics, 1997.

[12] S. Efromovich: Nonparametric Curve Estimation: Methods, Theory and Applications. Springer-Verlag, 1999.

[13] A. Meister: Density estimation with normal measurement error with unknown variance, Statist. Sinica 16, 2006.

[14] A. Delaigle, I. Gijbels: Bootstrap bandwidth selection in kernel density estimation from a contaminated sample, Ann. Inst. Stat. Math. 56, 2004.

[15] A. Delaigle, I. Gijbels: Practical bandwidth selection in deconvolution kernel density estimation, Computational Statistics and Data Analysis, 45, 2004,

[16] A. Achilleos, A. Delaigle: Local bandwidth selectors for deconvolution kernel density estimation, Statistics and Computing, 2012.

[17] A. Meister: Deconvolving Compactly Supported Densities, Math. Meth. Stat. 16, 2007.

[18] L. Devroye: Consistent deconvolution in density estimationn. Can. J. Stat. 17, 1989.

[19] M. Benšić, K. Sabo: Uniform distribution width estimation from data observed with Laplace additive error, Journal of the Korean Statistical Society 45, 2016.

[20] B. L. Granovsky, H-G. Müller: Optimizing Kernel Methods: A Unifying Variational Principle, 1991.

[21] B. L. S. Prakasa Rao: Nonparametric Functional Estimation. Academic, New York, 1983.

[22] P. J. Bickel, Y. Ritov: Estimating integrated squared density derivatives: Sharp best order convergence estimates. Sankhyi Ser. A 50, 1988.

[23] A.B. Tsybakov: Introduction to nonparametric estimation, Springer, 2009.

Биографија

Данијел Суботић је основну школу ОШ Ђ257 похађао (2000-2009.) у Москви, Руској Федерацији, где је успешно учествовао на бројним такмичењима из математике. Од 2009. године преселио се у Београд, где је уписао другу годину средње школе. 2012. године завршио је XV Београдску гимназију. Исте године уписао је Математички факултет у Београду, смер Математика, модул Статистика, актуарска и финансијска математика. Дипломирао је 2016. године, са просечном оценом 9,14 и положеним једним потпуно изборним предметом: Теорија бројева 1. У академској 2016-2017 години радио као сарадник у настави на Математичком факултету Универзитета у Београду на катедри за вероватноћу и статистику.