МИРКО СТОЈАКОВИЋ
ДРАГАН ТРИФУНОВИЋ

ПЕТРОВИЋЕВА МОДИФИКАЦИЈА ГРЕФЕОВЕ МЕТОДЕ ЗА РЕШАВАЊЕ АЛГЕБАРСКИХ ЈЕДНАЧИНА

Математички весник
5 (20), Св. 4, 1968

Београд

МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК
5 (20) 1968, стр. 439—446

Мирко Стојаковић,
Драган Трифуновић,

ПЕТРОВИЋЕВА МОДИФИКАЦИЈА ГРЕФЕОВЕ МЕТОДЕ ЗА РЕШАВАЊЕ АЛГЕБАРСКИХ ЈЕДНАЧИНА

(Саопштено 9. маја 1968.)

1. Још на студијама у Београду[1], Михаило Петровић је испољио све црте свог талента и показао да се од њега могу у будућности очекивати велика дела. Ни свој таленат, ни ове наде, Петровић није изневерио. На студијама Петровић је у групи одличних великошколаца (Коста Стојановић, Милорад Јовичић и Димитрије Марчић). Показује самосталност у учењу и ради запажене семинарске радове[2] и наградне темате [7].

При крају нешто закасжнеле школске 1885/86 године (српско-бугарски рат), 21. новембра 1886. Петровић је као студент I године завршио семинарски рад из математике који је носио назив *О једној модификацији Грефеова метода за решавање виших бројних једначина*[3]. Рад је вероватно читан на семинару код ондашњег Петровићевог професора Димитрија Нешића. Пре свега треба приметити, да излагање 18-годишњака Петровића, студента I године, има обележје креативног и оригиналног. Материјал семинарског рада не показује уобичајен поступак у семинарским радовима: да се изложи све најпотоњије познато о теми, што је, махом, садржано у уџбеницима или неким доступним расправама. Напротив! Млади Петровић, проучивши Graeffe-ову методу, поставља себи потпуно оригиналан задатак, да изнађе могућност егзистенције једне друге функције него што је она у Graeffe-овој методи. Њему је врло добро позната била арбитражност степенасте функције која везује корене полазне једначине $f(x)=0$ са коренима изведене једначине $\varphi(y)=0$

$$y=x^m$$

где је m — произвољно, довољно велико, одабрано и облика

$$m=2^p, \qquad p \in N$$

и уводи *нову функцију* експоненцијалног облика

$$y=a^x$$

---

[1] После завршеног испита зрелости у I београдској гимназији (1885) Петровић је студирао на Природно-математичком одсеку Филозофског факултета Велике школе у Београду (1889).

[2] Поред семинара који ће овде бити изложен, познат је још један Петровићев семинар из филозофије код професора Љубомира Недића *Да се изложе и критички претресу различне теорије о вољи* (1889) [1].

[3] Заоставштина академика Михаила Петровића, Библиотека САНУ. Рукопис се сада налази у Музеју града Београда.

где a бира произвољно и довољно велико. Петровић је, вероватно, ово највише учинио из чињенице што

$$a^x \succ x^m$$

као и потребе експлицитног изналажења критеријума у конвергенцији децимала корена једначине за унапред дату грешку $10^{-\delta}$.

Увођење нове функције a^x Петровића је приморало да прикаже потпуно свој метод добијања нове — изведене једначине $\varphi(y)=0$. При овоме, студент I године је показао врло солидно познавање и умешно коришћење ставова математичке анализе. Како овај део рукописа обухвата материјал који је потпуно ван програма ниже математичке анализе у I години Велике школе, то одатле непосредан закључак, да је Михаило Петровић, као студент, математику знатно дубље, шире и „унапред" проучавао. — И поред тога што је на појединим местима непрецизан и недовршен у исказима, Петровићев рукопис о Greaffe-овој методи има своје и научне, и историјске вредности: то је *први* написан математички текст нашег знаменитог математичара који уједно и потврђује да је Петровић од првог додира са математиком био на терену оригиналног стваралаштва.

2. У овом изузетном раду Петровић врло прецизно одређује суштину проблема и читаоца одмах уводи у проблем. Ту нема сувишних речи. Нема заобилажења, нема колебања, нема нејасности. Ако би се за неку енциклопедију захтевала дефиниција *Graeff*-ова метода, та би дефиниција некако изгледала, као што ју је Претровић овде изложио. Можда би се Петровићевој дефиницији могло додати следеће: да је данас метод познатији под именом *метод Лобачевског*[4] и будући да се говори о коренима, реалним и комплексним, треба говорити о модулима корена већим или мањим, а не самим коренима. Наиме, као што се зна, скуп комплексних бројева није тотално уређен.

Петровић свој семинар почиње следећим речима: „Лепа Грефеова мисао, да се једна једначина вишега степена може разрешити без претходног познавања броја и граница, стварних и уображених корена њених, трансформацијом исте у другу једначину чији мањи корени ишчезавају према већима, може се остварити не само на начин којим је Грефе основао свој метод решавања виших бројних једначина, но и на ма какав други начин, којим би се постигло то ишчезавање мањих корена према већима". Добри познаваоци Петровићевих дела препознаће већ у овој једној реченици младог студента стил и технику будућег ствараоца. Петровић је математику волео. За њега је Graeffe-ова мисао „лепа". Осећање за лепоту у тако апстрактним стварима није дато свакоме. Многи ће, напротив, за Graeffe-ов метод наћи да је „гломазан", „заморан" и слично. За Петровића он је леп, што, у ствари, и јесте.

У наставку Петровић каже: „Као што је познато, код Грефеове методе циљ се постиже тиме, што се дата једначина претвара у другу

---

[4] Нумеричко решавање алгебарске једначине методом квадрирања корена независно су открили математичари Dandelin [1], Лобачевский [2] и Graeffe [3], која је данас позната као Метод Лобачевског [4, 5]. Метода је веома корисна у случајевима реалних једнаких и неједнаких корена и данас се налази у библиотекама свих електронских рачунских центара као стална „рутина" за практично решавање алгебарских једначина. За случајеве када су корени једначине комплексни, метода је нешто неподеснија и поред извесних нових прилога *С. Бродешский*-а и G. Smeal-a [6]. У односу на друге нумеричке методе, Graeffe-ова метода не захтева познавање претходних приближних вредности корена, при чему се одједном налазе сви корени једначине.

чији су корени извесни степени корена дате једначине, па тачност ишчезавања мањих корена према већима зависи од величине степена. Но ова метода само је један специјалан случај између више начина на који се може поменута идеја остварити, а могућност остварења њенога на више начина може се увидети на овај начин.

Нека је дата једначина

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0 \tag{1}$$

са коренима $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$, претворена у једначину

$$\varphi(y) = y^n + b_1 y^{n-1} + \cdots + b_{n-1} y + b_n = 0 \tag{2}$$

чији су корени $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$, и то тако, да између корена дате и нове једначине постоји релација

$$\xi_k = \Delta(\alpha_k) \tag{3}$$

где Δ означава ма какву познату функцију, па се из познатог образца

$$\frac{(-1)^k b_k}{\Delta(\alpha_1)\Delta(\alpha_2)\cdots\Delta(\alpha_k)} = 1 + \frac{\Delta(\alpha_1)\cdots\Delta(\alpha_{k-1})\Delta(\alpha_{k+1})\cdots\Delta(\alpha_{n-k})\cdots\Delta(\alpha_n)}{\Delta(\alpha_1)\Delta(\alpha_2)\cdots\Delta(\alpha_k)}$$

а у претпоставци да су функције Δ такве природе, да кад се у њима прапромењиве[5] количине смене коренима дате једначине, функције мањих корена ишчезавају према функцијама већих — добијамо образац

$$\frac{(-1)^k b_k}{\Delta(\alpha_1)\Delta(\alpha_2)\cdots\Delta(\alpha_k)} = 1. \tag{4}$$

Стављајући у овај образац $k = 1, 2, 3, \ldots, n$, добија се систем једначина

$$\begin{aligned} -b_1 &= \Delta(\alpha_1) \\ b_2 &= \Delta(\alpha_1)\Delta(\alpha_2) \\ -b_3 &= \Delta(\alpha_1)\Delta(\alpha_2)\Delta(\alpha_3) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (-1)^n b_n &= \Delta(\alpha_1)\Delta(\alpha_2)\cdots\Delta(\alpha_n) \end{aligned} \tag{5}$$

Ако су сад функције такве, да се из њих на елементаран начин могу израчунати и сами корени $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, онда би тиме очевидно и горњи циљ био остварен.

Тражење оваквих функција Δ које задовољавају поменута два услова, и трансформација дате једначине према узетој функцији, није лак посао; такве функције врло су ретке. Грефе је усвојио алгебарску функцију

$$\Delta(x) = x^k \tag{6}$$

пошто та функција за извесну довољно велику вредност степена k задо-

[5] У српкој математичкој литератури све до почетка овог века независно промењива величина у једном аналитичком поступку називана је *прапромењива*. На пример, у диференцијалној једначини $f(x, y, y') = 0$, x је прапромењива, а у решењу ове једначине $\varphi(x, y, c) = 0$ x је промењива.

вољава оба услова. Но, да ли би се уместо ове могла употребити трансцедентна функција

$$\Delta(x) = a^x \tag{7}$$

која се од горње функције разликује тиме, што је у првој произвољна позната количина у изложиоцу $x-a$, а у овој је обратно, x у изложиоцу те произвољне познате количине? Усвојивши ову функцију, како би се могли њоме користити? То су питања на која ћу овде покушати да одговорим".

3. У овом делу рада Петровић показује да солидно влада целокупном проблематиком везаном за проблем решавања једначина, да располаже способношћу да ово познавање проблематике искористи технички и да уме да генералише, тражећи опште услове функције (3) који прате одређени, специјални случај (6) и да одмах из тих општих услова изведе и нове специјалне случајеве (7) дотада непознате. Овај део Петровићевог рада је *оригиналан* допринос питању које проучава. У семинарском раду то се од Петровића није тражило. Зашто Петровић није овај рад касније, уз евентуално дотеривање, публиковао? Вероватно ће то бити објашњено овим што следи.

Ево како студент Петровић излази на крај са трансформисањем алгебарских једначина (1) трансцендентном сменом променљиве (7).

Полазећи од претпоставке да једначина (1) има реалне међусобно различите и позитивне корене уређене по величини што експлицитно у раду није наведено, али из резоновања произлази, Петровић најпре одређује константу a у функцији (7), тако да се може вршити „занемаривање мањих корена према већим". Овај део рада је такође оригиналан. Анализа којом се одређује потребна количина константе a није се имала откуд узети готова, пошто је идеја у целини Петровићева.

Из (7) налазимо да је

$$\xi_i = \Delta(\alpha_i) = a^{\alpha_i}, \quad i = 1,\ 2,\ 3, \ldots,\ n$$

одакле је

$$\frac{\xi_{h+1}}{\xi_h} = 1 : a^{\alpha_h - \alpha_{h+1}}$$

Према напред уведеном уређењу можемо писати

$$\xi_{h+1} < \xi_h \tag{8}$$

те је

$$\alpha_{h+1} < \alpha_h \tag{9}$$

и узимајући за a довољно велику вредност, можемо постићи да количник $\xi_{h+1} : \xi_h$ буде по вољи мали. Рецимо, да желимо

$$\frac{\xi_{h+1}}{\xi_h} < \frac{1}{10^r}$$

тада би морало бити

$$a^{\alpha_h - \alpha_{h+1}} > 10^r \text{ или } a^\delta > 10^r \tag{10}$$

где је δ број мањи од најмање разлике корена једначине (1)[6]. Како је r унапред задато, δ пронађено, то се из (10) одређује вредност за a.

Као што смо поменули, код овог Петровићевог поступка прецизније би било увести апсолутне вредности корена, као и навести претпоставку да нема вишеструких корена, нити корена са једнаким модулима или чак и веома блиским модулима, пошто се тражи број δ за услов

$$\min(\alpha_h - \alpha_{h+1}) > \delta, \quad h \in N.$$

4. Ево како млади Петровић добија коефицијенте b_i трансформоване једначине (2). Newton-ове суме корена

$$S_k = \alpha_1^k + \alpha_2^k + \cdots + \alpha_n^k$$

$$S_k = a^{k\alpha_1} + a^{k\alpha_2} + \cdots + a^{k\alpha_n}$$

изражавају се рекурзивно на познати начин помоћу елементарно симетричких функција тих и истих корена, а то значи помоћу коефицијената одговарајуће једначине

$$S_1 + a_1 = 0$$

$$S_2 + a_1 S_1 + 2\,a_2 = 0$$

$$S_3 + a_1 S_2 + a_2 S_1 + 3\,a_3 = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_n + a_1 S_{n-1} + a_2 S_{n-2} + \cdots + a_{n-1} S_1 + n a_n = 0$$

односно

$$S_1 + b_1 = 0$$

$$S_2 + b_1 S_1 + 2\,b_2 = 0$$

$$S_3 + b_1 S_2 S_1 + 3\,b_3 = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_n + b_1 S_{n-1} + b_2 S_{n-2} + \cdots b_{n-1} S_1 + n\,b_n = 0.$$

Исте ове везе могу се користити и за обрнути задатак, да се помоћу *Newton*-ових сума израчунају елементарно симетричне функције, а то значи коефицијенти b_i тражене једначине (2). И тако, са коефицијента a_i задате једначине (1) прелазимо на *Newton*-ове суме S_k корена једначине (1), са ових на *Newton*-ове суме S'_m корена нове једначине (2), а са ових на коефицијенте b_ν једначине (2). Код овакве трансформације, услед трансцедентности функције (7), Петровић је морао да користи редове. Премда се сав овај посао у принципу може обавити, он је знатно дужи него исти код *Graeffe*-ове методе. Мислимо да је то и разлог што је сам Петровић оценио да овај рад треба да остане оно што је: семинарски рад, а не и рад који би, иако с оригиналним прилазима, у пракси могао да се примењује. Ово објашњење, да се Петровић није одлучио да овај рад доцније

---

[6] Број δ може се добити преуређујући једначину $f(x)=0$ у једначину њених квадратних разлика.

објави не мора да буде ни тачно ни једино. Ево, пак, како се у виду схеме остварује горе наведена трансформација

$$a_i \to S_k \to S'_m \to b_v. \tag{11}$$

Најпре је за свако z

$$a^z = 1 + z\frac{la}{1} + z^2\frac{(la)^2}{2!} + \cdots + z^p\frac{(la)^p}{p!} + \cdots$$

те је

$$a^{k\alpha_i} = 1 + k\,\alpha_i\frac{la}{1} + k^2\alpha_i^2\frac{(la)^2}{2!} + \cdots k^p\alpha_i^p\frac{(la)^p}{p!} + \cdots$$

за $i=1, 2, 3, \ldots, n$, и сумирањем по k добија се

$$S_k = n + kS_1\frac{1\,a}{1} + k^2 S_2\frac{(1\,a)^2}{2!} + \cdots + k^p S_p\frac{(1\,a)^p}{p!} + \cdots$$

за $k=1, 2, 3, \ldots, n$.

Да би се посао донекле олакшао, Петровић предлаже у свом раду и формирање нарочитих таблица у којима би се налазиле готове вредности израза

$$\frac{k^p(la)^p}{p!}$$

са двоструким „улазом" за k и p, а које би се могле користити за већу класу једначина узимајућу већа a.

Кад се једном формира једначина (2) са коефицијентима b (11) даљи поступак се не разликује од поступка код *Graeffe*-ове методе. Свеједно је, наиме, којим путем се дошло до једначине (2) у којој се „мањи корени замењују према већим". И у једном (Петровић) и у другом (*Graeffe*) случају из односа коефицијента налазе се вредности корена

$$\begin{aligned} b_1 &= \xi_1 \\ b_2 &= \xi_1\,\xi_2 \\ b_3 &= \xi_1\,\xi_2\,\xi_3 \\ &\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots \\ b_n &= \xi_1\,\xi_2\,\xi_3\cdots\xi_n \end{aligned}$$

Стога, даља анализа коју Петровић изводи, осврћући се накнадно на случај једнаких корена или на случај имагинарних корена, нема у целини оригинални карактер. Таква анализа могла се наћи и у онда доступној литератури. Данас је та литература још богатија али чињеница да су алгоритми гломазни чак и код Graeffe-ove методе, остала је упркос побољшањима.

У литератури се при примени поступка занемаривања сабирака блиских нули, односно фактора блиских јединици у Viète-овим везама трансформисане једначине (2) разликују случајеви вишеструких комплексних корена, јер се за сваки од тих случајева морају примењивати посебни „трикови". Петровић се са тим такође суочио и пошто је ликвидирао случајеве вишестуких реалних и једноструких комплексних корена, он закључује да случај вишеструких комплексних корена није једноставан. Он каже: „Ту се може израчунати производ модула свих комплексних корена али како би се могли наћи појединачно модули корена, то нисам могао решити".

Пошто се на ову тему више није враћао, Петровић то није „решио" ни тада, ни касније. За малу утеху је, међутим, што то нису решили, бар не довољно употребљиво, ни други. Карактеристично је ипак што Петровић, суочен са овим тешкоћама, није тврдоглав, него искрено признаје своју немоћ, а објективност и скромност његову показује и чињеница, да овај рад није даље ,,протурао", јер је, по нашем мишљењу, увидео да је Graeffe-ова метода ипак употребљивија од његове.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Dandelin: Mem. de la Acad. Royale de Bruxelles.3 (1826), p. 48

[2] Лобачевский: *Алгебра*, Казань, 1834, 257.

[3] Graeffe: *Auflösung der höheren numerichen Gleichungen*, Zürich. 1837.

[4] Scarborough, J.: *Numerical Mathematical Analysis*, Oxford University Press, 1950, p. 213—234.

[5] Whittaker, E. — Robinson, G.: *The Calculus of observations — A Treatise on Numerical Mathematics*, Научна књига, Београд, 1951, стр. 97—107.

[6] Brodetsky S. — Smeal, G.: *On Graeffe's Method for Complex Roots of Algebraic Equations*, Proc. Camb. Phil. Soc., 22 (1924) p. 83—87.

[7] Трифуновић, Д. *Студенски период Михаила Петровића*, Математички весник, Београд 1967, Т. 4 (19), св. 1, стр. 79—97.

[8] Трифуновић, Д.,: *Школовање Михаила Петровића*, Математичка библиотека, Београд, 1966, Т. 32, стр. 137—150.

[9] Трифуновић, Д.,: *Михаило Петровић, Метафоре и алегорије*, Српска књижевна задруга, Коло LX, књ. 405, Београд, 1967, стр. 196.

[10] Трифуновић, Д.,: *Летопис живота и рада Михаила Петровића*, Српска академија наука и уметности, Посебна издања, Одељење природно-математичких наука, Београд, 1968, стр. 768 (у штампи).

LA MODIFICATION DE M. PETROVIĆ DE LA METHODE DE GRAEFFE POUR LA SOLUTION DES EQUATIONS ALGEBRIQUES

M. Stojaković et *D. Trifunović*

Résumé

Les auteurs analyse le premier texte mathématique de M. Petrović ,,Sur une modification de la méthode de Graeffe pour la solution des équations numériques d'ordre supérieurs" déjà écrit en 1886 lors de ses études à Belgrade. Le jeune Petrović, en s'occupant de la méthode de Graeffe, a introduit une nouvelle fonction

$$y = a^x$$

laquelle lie les racines de l'équation initiale $f(x) = 0$ avec les racines de la fonction résultante $\varphi(y) = 0$.

L'introduction de la nouvelle fonction a^x oblige M. Petrović d'exposer complétement sa méthode pour obtenir sa nouvelle fonction résultante $\varphi(y)=0$. A cette occasion, cet étudiant de la première année a montré une connaissance approfondie et une pertinente utilisation des théorèmes de l'analyse mathématique. Cette partie du manuscript comprenant le matériel qui est tout à fait hors le programme de l'Ecole supérieure, on arrive à la conclusion que M. Petrović comme étudiant, il étudiait les mathématiques assez profondement, largement et ainsi dire „à l'avance", et malgré le fait qu'à certains lieux il n'était pas précis et déterminé dans ses énoncés, son manuscript sur la méthode de Graeffe a sa valeur scientifique et historique. C'est le premier texte connu de notre illustre mathématicien, lequel en même temps confirme qu'il se trouvait sur le terrain de la recherche originale dès le commencement de ses études en mathématiques.