SUR UNE CLASSE DE DÉTERMINANTS

PAR

MICHEL PÉTROVITCH

Professeur à l'Université de Belgrade

Le déterminant

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \dots\dots\dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} \dots\dots\dots & a_{n2} \\ \dots & \dots\dots\dots\dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} \dots\dots\dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

où, α_k, r_k, g_k $(k = 1, 2, \dots\dots n)$ étant trois suites de nombres quelconques, on a

$$a_{ki} = \alpha_k + r_k\, g_i \quad \begin{matrix} i = 1, 2, & \dots n \\ k = 1, 2, & \dots n \end{matrix}$$

jouit de la propriété suivante :

Le déterminant est identiquement nul lorsque $n > 2$; il est généralement différent de zéro pour $n = 2$.

Le déterminant Δ_n ayant pour mineurs du premier ordre les déterminants Δ_{n-1} de même classe que Δ_n, il suffit de montrer que Δ_3 est identiquement nul. Or, Δ_3 se laisse décomposer en une somme de huit déterminants du troisième ordre dont chacun, après y avoir extrait le nombre correspondant α_k ou r_k multipliant les éléments d'une même colonne, se trouve avoir deux colonnes identiques, et par suite est nul.

Par contre, pour $n = 2$ on a

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha_1 + r_1\, g_1 & \alpha_2 + r_2\, g_1 \\ \alpha_1 + r_1\, g_2 & \alpha_2 + r_2\, g_2 \end{vmatrix} = (g_1 - g_2)\,(r_1\, \alpha_2 - r_2\, \alpha_1)$$

est généralement différent de zéro.

Cette propriété des déterminants Δ_n trouve une application intéressante dans les analyses chimiques quantitatives, conduisant à un résultat assez curieux qui a son importance pratique.

Supposons qu'au lieu de séparer et de peser individuellement les n corps A_1, A_2, ... A_n que l'on cherche à déterminer quantitativement dans un mélange (E) à analyser, on effectue avec le mélange une suite d'opérations chimiques, les mêmes pour tous les corps A_k, le nombre d'opérations étant égal à celui des corps. Les produits de chaque opération étant pesés collectivement, les données ainsi obtenues fournissent un système d'équations en nombre égal à celui des corps A_k, servant à calculer les quantités de ces corps contenues dans (E).

Considérons, pour fixer les idées, le cas de n métaux $A_1, \dots A_n$ dans un mélange (E); transformons-les d'abord en composés $B'_1, B'_2, \dots, B'_n$ d'une même espèce chimique (par exemple en chlorures), l'indice inférieur indiquant le métal correspondant A_k.

Soient $m'_1, m'_2, \dots m'_n$ les poids moléculaires des composés B'_k, q_1 le poids total de ces composés et x'_k le nombre inconnu indiquant combien de fois le poids m'_k se trouve contenu dans le mélange (E); on aura l'équation

$$m'_1 x'_1 + m'_2 x'_2 + \dots + m'_n x'_n = q_1$$

Transformons ensuite les composés B^1_k en composés $B^2_1, B^2_2, \dots B^2_n$ d'une autre espèce (par exemple en sulfates) et soient m^2_k, x^2_k, q_2 les quantités correspondantes analogues aux précédentes; on aura l'équation

$$m^2_1 x^2_1 + m^2_2 x^2_2 + \dots + m^2_n x^2_n = q_2$$

En effectuant ainsi n opérations différentes, on aura le système d'équations linéaires.

$$(1) \quad \begin{cases} m^1_1 x^1_1 + m^1_2 x^1_2 + \dots + m^1_n x^1_n = q_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ m^n_1 x^n_1 + m^n_2 x^n_2 + \dots + m^n_n x^n_n = q_n \end{cases}$$

Désignons alors par:

1° μ^1_k le nombre absolu indiquant combien des poids atomiques de A_k se trouvent contenus dans le poids moléculaire du composé B^1_k (nombre qui se détermine à l'aide de la formule chimique de B_k^1);

2° ρ_k le nombre absolu indiquant combien des poids atomiques de A_k se trouvent contenus dans le mélange (E).

On aura

$$x_k = \frac{\rho_k}{\mu^1_k}$$

D'autre part, le rapport

$$\frac{\mu^i_k}{m^1_k} = a_{ki}$$

représente le poids moléculaire réduit du composé B^i_k, de sorte que les poids $M^1_k, M^2_k, \dots M^n_k$ des composés respectifs $B^1_k, B^2_k, \dots B^n_k$ contiennent un même poids du métal A_k, à savoir un poids atomique de ce métal.

Désignons enfin: 1° par α_k le poids atomique du métal A_k; 2° par r_k le nombre entier définissant la valence chimique de A_k; 3° par h^i_k le poids du groupe chimique lié dans le composé B^i_k à un poids atomique du métal A_k.

Le rapport h^1_k a manifestement une même valeur g_1 pour tous les métaux A_k. Et comme l'on a

$$a_{k1} = \alpha_k + h^1_k$$

on aura

$$a_{k1} = \alpha_k + r_k \, g_1$$

Le déterminant du système

$$(2) \qquad \begin{array}{c} a_{11} \, \rho_1 + a_{21} \, \rho_2 + \ldots + a_{n1} \, \rho_n = q_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \, \rho_1 + a_{n2} \, \rho_2 + \ldots + a_{nn} \, \rho_n = q^n \end{array}$$

auquel se réduit le système (1), est donc un déterminant Δ^n, ce qui conduit directement à la conclusion suivante:

L'analyse n'est réalisable que si le nombre des métaux A^k *est égal à* 2. Dans le cas où ce nombre est supérieur à 2, le déterminant Δ^n est nul et le calcul des ρ_k devient illusoire.

Mais on peut encore opérer de manière à effectuer sur les A^k un certain nombre λ d'opérations chimiques *homogènes* (c'est-à-dire transformant les A_k collectivement en composés d'une même espèce, par exemple en chlorures), et un certain nombre μ d'opérations *hétérogènes* (c'est-à-dire transformant les A^k en composés de différentes espèces, les uns par exemple en chlorures, les autres en carbonates, etc.).

L'analyse n'est alors réalisable que si $\lambda \leqq 2$, *c'est-à-dire si* $\mu \geqq n - 2$.