MATEMATIČKI INSTITUT

POSEBNA IZDANJA

KNJIGA 11

ZLATKO P. MAMUZIĆ

KONEKSNI PROSTORI

BEOGRAD
1974.

MATEMATIČKI INSTITUT

POSEBNA IZDANJA

KNJIGA 11

ZLATKO P. MAMUZIĆ

KONEKSNI PROSTORI

BEOGRAD
1974.

Tehnički urednik: Milan ČAVČIĆ

Primljeno na 71. sednici Naučnog veća Matematičkog instituta 5. aprila 1973. godine

Republička zajednica za naučni rad SR Srbije učestvovala je u troškovima izdavanja ove publikacije.

Prema mišljenju Republičkog sekretarijata za kulturu SR Srbije broj 413-117/73-02 od 23. maja 1973. godine, ova publikacija je oslobođena poreza na promet.

Djuri Kurepi

SADRŽAJ

UVOD

Izvesne kategorije apstraktnih prostora predstavljaju danas neizbežnu potku u mnogim matematičkim istraživanjima. Posebno važnu ulogu pri tome igraju određene invarijante u odnosu na njihova obostrano jednoznačna i obostrano neprekidna preslikavanja. U ovome radu analiziraju se prvenstveno invarijante koneksnosti (povezanosti, suvislosti) u kategorijama okolinskih, topoloških, uniformnih, infinitezimalnih (Efremovič—Smirnov) ili δ-prostora, sintopogenih i semitopogenih prostora (A. Császár). Evo ukratko sadržaja:

U § 1.1. analizirana je koneksnost u kategoriji okolinskih prostora. Ako je (E, τ) jedan prostor iz te kategorije, gde E znači nosilac tog prostora, a τ (uopštenu) topološku strukturu, opravdano je uobičajenu koneksnost u toj kategoriji označavati i sa τ-koneksnost, s obzirom na docnije uvedenu $\mathcal{U}$-koneksnost u kategoriji uniformnih, δ-koneksnost u kategoriji δ-prostora i $\mathfrak{S}$-koneksnost u kategoriji sintopogenih odnosno $\mathcal{S}$-koneksnost semitopogenih prostora. U § 1.2. karakterisani su topološki prostori binarnom relacijom svezanosti (tj. τ-svezanosti), odnosno dualnom relacijom odvajanja (separacije) A. D. Wallace-a. U § 1.3. izložena je definicija s-koneksnih skupova u smislu definicije A. D. Wallace-a i dato nekoliko svojstava takvih skupova. U § 1.4. razmatrani su uslovi pod kojima će biti τ-koneksan okolinski proizvod τ-koneksnih okolinskih prostora. U § 1.5. analizirano je svojstvo lokalne koneksnosti okolinskih prostora i razmatrani su uslovi pod kojima će biti lokalno koneksni okolinski proizvod prostori i okolinski količnik prostori. Paragraf 2. je posvećen definiciji i svojstvima $\mathcal{U}$-koneksnih uniformnih i δ-konesnih δ-prostora Efremovič-Smirnova, saobrazno rezultatima koje su izložili S. G. Mrovka i W. J. Pervin u njihovom radu [1] iz 1964. godine. $\mathcal{U}$-koneksnost (δ-koneksnost) proizvoda uniformnih (δ-prostora) razmatrana je u § 3.2.

Za analizu pojma $\mathcal{S}$-koneksnosti semitopogenih i $\mathfrak{S}$-koneksnosti sintopogenih prostora potrebno je poznavanje semitopogenih i sintopogenih struktura (A. Császár, [1], [2]). Kako su te strukture u najnovije vreme prodrle u svetsku matematičku literaturu, smatrao sam za potrebno ne samo da se pozivam na rezultate A. Császár-a, nego da u § 3.1. lapidarno izložim osnovne definicije i neke stavove koji se odnose na sintopogene strukture. Mislim da će to biti posebno korisno za domaćeg čitaoca koji želi da na našem jeziku ima jedan brzi uvid u te rezultate. Paragraf 3.2. posvećen je $\mathfrak{S}$-koneksnim sintopogenim prostorima u smislu rezultata koje su izložili J. L. Sieber i W. J. Pervin u radu [1]. Tu je pokazano da je $\mathfrak{S}$-koneksan proizvod proizvoljne kolekcije $\mathfrak{S}$-koneksnih sintopogenih prostora odakle je, specijalno, izveden odgovarajući rezultat za proizvod uniformnih i δ-prostora. U § 3.3. izloženo je uopštenje $\mathfrak{S}$-koneksnosti na semitopogene prostore i dati izvesni kriterijumi i svojstva $\mathscr{S}$-koneksnih skupova, saobrazno rezultatima mojih radova [2] i [6]. Naposletku, § 3.3.1. posvećen je jednom prilazu definiciji koneksnosti za topogene prostore, drukčijem od prethodnih, koji je dao C. Amihăesei u radu [1].

Dodaću još da su § 1.4. i § 1.5. obrađeni saobrazno rezultatima mojih radova [5] i [7].

Napominjem da je za uspešno čitanje ove monografije dovoljno poznavanje teorije skupova, sistema realnih brojeva i osnovnih pojmova opšte topologije kako je to, na primer, izloženo u mojoj knjizi [1].

U odnosu na vrlo obiman materijal o koneksnim prostorima, rasut po raznim časopisima i, manje ili više, obrađivan sistematski u raznim standardnim delima, iz navedenog sadržaja vidi se da je svrha ovog rada strogo ograničena. Zato zainteresovanog čitaoca za jedan širi i detaljniji zahvat u ovo područje opšte topologije upućujem na standardnu literaturu, specijalno na monumentalno delo [1] K. Kuratowskog. No podesno je da na ovom mestu naznačim neke oblasti, veoma bogate invarijantama koneksnosti, koje bi mogle biti predmet posebnih studija.

To je na prvom mestu teorija krivih. Po definiciji, lukovi su homeomorfizmi, a krive su neprekidne slike segmenta [0, 1] numeričke prave. Uobičajena je ova topološka karakterizacija luka: Topološki prostor E je luk, ako i samo ako je E kompaktan, koneksan i metrizabilan prostor, sa tačno dve nepresečne tačke (tačka x koneksnog prostora E je njegova presečna tačka, ako se odstranjivanjem te tačke dobije nekoneksni skup $E \setminus x$). (Videti, na primer, H. F. Cullen, [1], ili D. W. Hall i G. L. Spencer [1], ili članak [1] M. Vencelj). Međutim, postoji i ova topološka karakterizacija luka koju je dao H. J. Kowalsky u [1]: Topološki prostor E je luk, ako i samo ako je ispunjeno sledeće: 1) E je separabilni T_1-prostor sa bar dve tačke; 2) E je koneksan i lokalno koneksan, i 3) postoje dve tačke a, b u E tako da je E jedini koneksni podskup od E koji sadrži te dve tačke (tj. E je ireducibilno koneksan oko te dve tačke). Za veoma blisku problematiku linearnog uređivanja topoloških prostora, H. Herrlich je u [1] za koneksne T_1-prostore E našao da mogu biti linearno uređeni, ako i samo ako su lokalno koneksni i ako svi njihovi koneksni delovi M imaju tu osobinu da sadrže najviše dve tačke x, y tako da su skupovi $M \setminus x$ i $M \setminus y$ još uvek koneksni. Zanimljive rezultate dobio je takođe Poljakov u radu [1].

Da koneksnost i lokalna koneksnost igraju važnu ulogu u linearno uređenim prostorima, primećeno je i ranije (vid., na primer, radove [1] — [4] Đ. Kurepe). Posebno bi bilo zanimljivo detaljno opisati do danas uočenu njihovu ulogu u rešavanju Suslinova problema kojemu je Đ. Kurepa posvetio znatan deo istraživanja što se može videti, na primer, iz navedenih njegovih radova.

Pitanje topološke karakterizacije krive takođe je rešeno i rešenje je sadržina ova dva stava koji se mogu naći u standardnim udžbenicima topologije (videti, na primer, H. F. Cullen, [1]):

1. Ako je prostor E neprekidna slika segmenta [0, 1] numeričke prave u Hausdorff-ovom prostoru, onda je E kompaktan, koneksan, lokalno koneksan metrički prostor.

2. (Hahn-Mazurkiewicz-ev teorem). Svaki neprazni, kompaktni, koneksni, lokalno koneksni metrički prostor je neprekidna slika segmenta [0, 1] numeričke prave.

U okvir ove problematike svakako ulaze i rezultati koje je S. Mardešić publikovao u radu [1], gde je efektivnom konstrukcijom primera pokazao da se navedena dva stava, uz izvesne modifikacije, ne mogu proširiti na nemetrizabilne prostore.

Predmet jedne posebne studije mogli bi biti rezultati i problemi pokrenuti još od P. S. Urysohn-a u njegovom radu [1]. Rešavajući naime problem kardinalnih brojeva koneksnih skupova, Urysohn je u tome radu konstruisao prebrojiv koneksni Hausdorff-ov prostor. Potom je E. Hewitt u radu [1] konstruisao prebrojiv koneksni Urysohn-ov prostor (to su topološki prostori kod kojih proizvoljno uzete dve različite račke a, b imaju disjuktne adherencije $\overline{Ua}$ i $\overline{Ub}$ bar jednog para Ua i Ub njihovih okolina). Zatim je sledio čitav niz interesantnih rezultata raznih autora: R. H. Bing je u radu [1] dao primer prebrojivog koneksnog Hausdorff-ovog prostora, jednostavniji od Urysohn-ovog; J. Martin je u radu [1] konstruisao Hausdorff-ov prebrojiv prostor koji je koneksan i poseduje jednu tačku raspršenja ili dispersije (tačka x koneksnog prostora E je njegova tačka dispersije, ako je skup $E\setminus x$ totalno nekoneksan, tj. nijedan višečlani deo skupa $E\setminus x$ nije koneksan); P. Roy je u [1] konstruisao prebrojiv koneksni Urysohn-ov prostor sa jednom tačkom dispersije; A. M. Kirch je u [1] konstruisao prebrojiv koneksni i lokalno koneksni Hausdorff-ov prostor; F. B. Jones i A. H. Stone su u radu [1] konstruisali prebrojiv koneksni i lokalno koneksni Urysohn-ov prostor, itd. Postoje u literaturi i drugi radovi sa interesentnim rezultatima koji se odnose na tu problematiku.

U poslednje vreme sve značajniju ulogu igraju ekstremalno nekoneksni prostori (to su prostori kod kojih su adherencije $\overline{O}$ otvorenih skupova O takođe otvoreni skupovi). Ti su prostori ocrtali jedno novo poglavlje opšte topologije koje takođe može biti predmet posebne studije. O tome postoje radovi raznih autora po raznim časopisima, pa se ovde ograničavam da pomenem rad [1] od D. P. Strauss i radove [1] i [2] A. Arhangelskoga. Posebno bi bilo od interesa detaljniju pažnju posvetiti totalno nekoneksnim prostorima među kojima se nalazi jedna od klasa R-prostora koje su bile predmet izučavanja Đ. Kurepe i P. Papića (vid. na pr. moju knjgu [1] gde je navedena dalja literatura u vezi sa R-prostorima). Takođe bi bilo zanimljivo opisati koneksnost i lokalnu koneksnost u terminima metrika, realnih i apstraktnih (vid. na pr. moju knjgu [1]). Specijalno bi bilo od interesa videti kako se one opisuju u terminima metrika nad topološkim polupoljima koje su uveli M. Ja. Antonovski, V. G. Boltjanski i T. A. Sarimsakov, na primer, u [1] i [2].

Napomenimo još da u ovoj knjižici nije posmatran slučaj višeznačnih preslikavanja jednog prostora u drugi. O tome čitalac može detaljnije videti, na primer, u radu [1] V. I. Ponomareva.

Sigurno je da to nisu jedine oblasti topologije i njenih primena koje bi se mogle izučavati sa gledišta uloge svojstava koneksnosti i lokalne koneksnosti.

Dodaću još da je sadržaj ove monografije bio predmet mojih izlaganja u Matematičkom institutu u Beogradu i to ili u ranijem Odseku za topologiju, ili u Odeljenju za matematičku analizu, ili pak u okviru seminara koji sam vodio 1971/72. godine. Ona je namenjena prvenstveno matematičarima i može biti od koristi već i studentima viših semestara, posebno poslediplomcima. Priloženim spiskom literature, svakako nepotpunim, pružen je zainteresovanom čitaocu dalji prilaz ovoj problematici.

Recenzenti rukopisa ovog rada bili su Đuro Kupera i Milosav Marjanović, profesori Univerziteta u Beogradu. Smatram svojom dužnošću da im zahvalim za trud koji su uložili, što je imalo za posledicu izvesna stilska poboljšanja i preciziranja nekih definicija i dokaza. Naravno, autor je odgovoran za svaki propust ili omašku i unapred zahvaljuje čitaocu koji mu na iste ukaže.

U Beogradu, aprila 1973. godine

Z. P. Mamuzić

1. KONEKNOST U OKOLINSKIM PROSTORIMA

1.1. Koneksni okolinski prostori

Sa (E, τ) biće označen apstrakni prostor, pri čemu τ znači jednoznačno preslikavanje partitivna skupa $P(E)$ skupa E u skup $P(E)$. Prostor (E, τ) je okolinski (vidi Z. Mamuzić, [1]) ako su ispunjena prva tri od sledećih pet uslova:

1^0 $\tau(\Lambda)=\Lambda$, ($\Lambda=$ prazan skup).

2^0 $A \subset \tau A$, za svaki skup $A \in P(E)$.

3^0 Iz $B \subset A$ sledi $\tau B \subset \tau A$, za $A, B \in P(E)$.

4^0 $\tau(A \cup B) \subset \tau A \cup \tau B$, za $A, B \in P(E)$ (aksiom distributivnosti).

5^0 $\tau(\tau A) \subset \tau A$, za svako $A \in P(E)$ (aksiom tranzitivnosti).

Ako τ ispunjava svih 5 navedenih uslova, (E, τ) je topološki prostor.

DEFINICIJA 1.1.1. *Za skupove* A, B *okolinskog prostora* (E, τ) *kazaćemo da su uzajamno svezani ili τ-svezani ako je ispunjen uslov*

$$(A \cap \tau B) \cup (B \cap \tau A) \neq \Lambda. \tag{1.1.1}$$

Kazaćemo da su skupovi A, B *uzajamno odeljeni ili separisani ili τ-separisani, ako oni nisu prazni i ako je ispunjen uslov (tzv. Lennes—Hausdorff-ov uslov)*

$$(A \cap \tau B) \cup (B \cap \tau A) = \Lambda. \tag{1.1.2}$$

Iz prethodne definicije neposredno izlazi da uzajamno odeljeni skupovi nemaju zajedničkih tačaka. Međutim, obratno ne mora važiti. Na primer, skupovi A i B definisani poluintervalom $(-1,0]$ i intervalom $(0,1)$ numeričke prave R^1 su disjunktni, ali su uzajamno svezani. No ako su oba skupa A i B zatvorena, njihova disjunktnost povlači sobom i njihovu uzajamnu odeljenost.

Neposredna posledica gornje definicije su i ove činjenice: ako je $A_1 \subset A$, $B_1 \subset B$ i ako su uzajamno svezani skupovi A_1 i B_1, uzajamno su svezani i skupovi A i B; ako je $A_1 \subset A$, $B_1 \subset B$ i ako su skupovi A i B uzajamno separisani, uzajamno su separisani i skupovi A_1 i B_1.

STAV 1.1.1. *Ako su skupovi* A, B *okolinskog prostora* (E, τ) *uzajamno odeljeni i* $A \cup B = E$, *tada su oba skupa* A *i* B *i otvorena i zatvorena.*

Dokaz. Neka skupovi A i B ispunjavaju Lennes—Hausdorff-ov uslov (1.1.2). Ako se tačka x nalazi u skupu A, ona tada ne može biti u skupu τB pa postoji neka njena okolina Vx koja je potpuno sadržana u skupu A. To znači da je skup A otvoren. Na isti način pokazuje se da je i skup B otvoren. Kako skupovi A i B sigurno nemaju zajedničkih tačaka, oni su u prostoru (E, τ) uzajamni komplementi pa otuda moraju biti i zatvoreni, q. e. d.

Posmatrajmo sada diskretan prostor $\{0,1\}$ koji se sastoji iz dve tačke 0 i 1. Postoje samo dva preslikavanja okolinskog prostora (E, τ) u prostor $\{0,1\}$: jedno preslikava (E, τ) *u* 0, a drugo *u* 1. Ta su preslikavanja konstante i, očevidno, neprekidna su.

DEFINICIJA 1.1.2. *Okolinski prostor* (E, τ), *koji se sastoji bar iz dve tačke, jeste koneksan, ako i samo ako nijedno preslikavanje prostora* (E, τ) *na diskretan prostor* $\{0,1\}$ *nije neprekidno. Jednočlani okolinski prostori su koneksni po konvenciji.*

Podvucimo činjenicu da se među preslikavanjima, koja se pominju u prethodnoj definiciji, ne nalaze konstante.

Podesno je neprekidna preslikavanja okolinskog prostora (E, τ) zvati τ-funkcije, a koneksne prostore u smislu definicije 1.1.2, zvati τ-koneksnim. Uvođenje takvih naziva opravdava najpre činjenica da ovde posmatrani pojmovi neprekidnosti i koneksnosti neposredno zavise od topološke strukture određene sa τ, a, sem toga, docnije ćemo videti kako se upravo ti nazivi dalje modifikuju prema uniformnim strukturama, δ-strukturama i uređajnim strukturama. Međutim, u ovom paragrafu upotrebljavaćemo već uobičajene klasične nazive neprekidnosti i koneksnosti.

STAV 1.1.2. *Okolinski prostor* (E, τ) *je koneksan, ako i samo ako prostor* (E, τ) *nije moguéno rastaviti na dva uzajamno odeljena skupa.*

Dokaz. Neka se okolinski prostor (E, τ) sastoji bar iz dve tačke. Uzmimo najpre da postoje skupovi $A, B \subset E$, $A \cup B = E$ koji su uzajamno odeljeni. Definišimo preslikavanje $f: E \to \{0,1\}$ ovako:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } x \in A, \\ 1, & \text{,, ,, } x \in B. \end{cases}$$

Funkcija f je očigledno neprekidna, a nije konstanta. Zato prostor (E, τ) nije koneksan. Obratno, uzmimo da prostor (E, τ) nije mogućno rastaviti na dva uzajamno odeljena skupa, a da ipak postoji neko neprekidno preslikavanje $g: E \to \{0, 1\}$ koji nije konstanta. Stavimo

$$g^{-1}(0) = A, \quad g^{-1}(1) = B.$$

Skupovi A i B nisu prazni, disjunktni su i njihova unija daje skup E. Skupovi A i B su otvoreni. Na primer, ako je $x \in E$, $g(x) = 0$, zbog neprekidnosti funkcije g postoji okolina Vx tačke x koja se potpuno preslikava u 0, što znači da mora biti $Vx \subset g^{-1}(0) = A$. Zato su oba skupa A i B i zatvorena, odakle sledi da ti skupovi moraju biti i uzajamno odeljeni, suprotno pretpostavci, q. e. d.

Evo nekoliko primera.

Primer 1.1.1. Svaki okolinski prostor (E, τ) indiskretne topologije (tj. $\tau\Lambda = \Lambda$ i $\tau A = E$ za svako $A \neq \Lambda$, $A \subset E$) je koneksan.

Primer 1.1.2. Nijedan okolinski prostor (E, τ), koji se sastoji bar iz dve tačke, diskretne topologije (tj. $\tau A = A$ za svako $A \subset E$) nije koneksan.

Primer 1.1.3. Neka se skup E sastoji iz dve tačke a i b, tj. $E = \{a, b\}$ pa definišemo okolinski prostor pomoću sledećeg preslikavanja τ:

$$\tau\Lambda = \Lambda, \quad \tau\{a\} = \{a\}, \quad \tau\{b\} = \{a, b\}, \quad \tau\{a, b\} = \{a, b\}.$$

Prostor (E, τ) je koneksan (tzv. koneksna dvotačka). Naime, iako je $b \notin \tau\{a\}$, imamo $a \in \tau\{b\}$, pa su jedina dva neprazna prava dela $\{a\}$ i $\{b\}$ skupa $\{a, b\}$ uzajamno svezana.

Primer 1.1.4. Nešto kasnije dokazaćemo da je numerička prava R^1 koneksan topološki prostor. Štaviše, svi euklidski prostori R^n su koneksni topološki prostori.

Gotovo očigledan je sledeći kriterijum koneksnosti koji se često koristi.

STAV. 1.1.3. *Okolinski prostor* (E, τ) *je koneksan, ako i samo ako, sem praznog skupa* Λ *i skupa* E, *u prostoru* (E, τ) *nema drugih skupova koji su istovremeno i otvoreni i zatvoreni.*

Dokaz. Ako bi postojao pravi deo A skupa E koji bi bio i otvoren i zatvoren, takav bi bio i njegov komplement $E \setminus A = B$ pa bi se prostor (E, τ) mogao rastaviti na dva uzajamno odeljena skupa A i B. Obratno, ako takav skup A ne postoji, prostor (E, τ) nije mogućno rastaviti na dva uzajamno odeljena skupa.

DEFINICIJA 1.1.3. *Neprazan skup* $S \subset E$ *okolinskog prostora* (E, τ) *je koneksan, ako i samo ako je koneksan okolinski prostor* (S, σ) *kao potprostor prostora* (E, τ) *(tj.* $\sigma A = S \cap \tau A$, *za svako* $A \subset E$). *Prazan skup* Λ *je koneksan po konvenciji*.

STAV 1.1.4. *Okolinski prostor* (E, τ) *je koneksan, ako i samo ako svaki par tačaka* $a, b \in E$ *leži u nekom koneksnom skupu prostora* (E, τ).

Dokaz. To je očigledno ako je prostor (E, τ) koneksan. Obratno, pretpostavimo da je uslov stava 1.1.4. ispunjen a da prostor (E, τ) nije koneksan. Tada postoje dva neprazna skupa A, B, $A \cup B = E$ sa osobinom $A \cap \tau B \cup B \cap \tau A = \Lambda$. Videli smo da su skupovi A i B i otvoreni i zatvoreni. Zato je sigurno $\tau A = A$ i $\tau B = B$. Uzmimo neku tačku $a \in A$ i neku tačku $b \in B$ pa pretpostavimo da postoji neki koneksni skup S koji sadrži te tačke. Posmatrajmo okolinski prostor (S, σ) kao potprostor prostora (E, τ). Ako stavimo

$$P = S \cap A, \quad Q = S \cap B \quad \text{biće} \quad \sigma P = S \cap \tau(S \cap A), \quad \sigma Q = S \cap \tau(S \cap B)$$

i zato

$$P \cap \sigma Q \cup Q \cap \sigma P = S \cap A \cap S \cap \tau(S \cap B) \cup S \cap B \cap S \cap \tau(S \cap A) =$$
$$= S \cap A \cap \tau(S \cap B) \cup S \cap B \cap \tau(S \cap A).$$

Međutim je $\tau(S \cap B) \subset \tau B = B$ i $\tau(S \cap A) \subset \tau A = A$. Kako je sem toga $S \cap A \subset A$ i $S \cap B \subset B$, a skupovi A i B su uzajamno odeljeni u prostoru (E, τ), vidimo da skupovi $S \cap A$ i $S \cap B$ moraju biti uzajamno odeljeni u prostoru (S, σ). Kako je dakle $S \cap A \cup S \cap B = S$, prostor (S, σ) bio bi tako rastavljen na dva uzajamno odeljena skupa, suprotno pretpostavci da je (S, σ) koneksan. A to znači da se prostor (E, τ) ne može rastaviti na dva uzajamno odeljena skupa, pa mora biti koneksan, q. e. d.

STAV 1.1.5. *Neka je okolinski prostor* (S, σ) *potprostor okolinskog prostora* (E, τ). *Skupovi* $A, B \subset S$ *su uzajamno odeljeni u prostoru* (S, σ), *ako i samo ako su oni uzajamno odeljeni u prostoru* (E, τ).

Dokaz. To sledi iz činjenice da je

$$A \cap \sigma B \cup B \cap \sigma A = A \cap (S \cap \tau B) \cup B \cap (S \cap \tau A)$$
$$= A \cap \tau B \cup B \cap \tau A.$$

Neposredna posledica prethodnog stava je sledeći.

STAV 1.1.6. *Neka je* (S, σ) *potprostor okolinskog prostora* (E, τ). *Skup* $A \subset S$ *je koneksan u prostoru* (S, σ), *ako i samo ako je koneksan u prostoru* (E, τ).

Nekoliko značajnih primera, koji se odnose na numeričku pravu R^1, biće izloženo u obliku sledeća četiri stava.

STAV 1.1.7. *Skup* Q *svih racionalnih tačaka numeričke prave* R^1 *nije koneksan. Skup* $R^1 \setminus Q$ *svih iracionalnih tačaka numeričke prave nije koneksan.*

Dokaz. Uzmimo interval $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ numeričke prave pa stavimo $A = Q \cap (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $B = Q \cap (R_1 \setminus (-\sqrt{2}, \sqrt{2}))$. Neka je (Q, σ) potprostor numeričke prave. Tada je $\sigma A = A$ i $\sigma B = B$, $A \cap B = \Lambda$, $A \cup B = Q$. Kako su u prostoru (Q, σ) skupovi A i B uzajamno odeljeni taj prostor nije koneksan. Na isti način pokazuje se da ni skup svih iracionalnih tačaka nije koneksan.

STAV 1.1.8. *Svaki segment numeričke prave je koneksan.*

Dokaz. Uzmimo segment $[a, b]$, $a < b$, numeričke prave R^1 i pretpostavimo da nije koneksan. Tada postoje dva neprazna uzajamno odeljena skupa A, B, $A \cup B = [a, b]$ na koje je mogućno rastaviti prostor $[a, b]$ kao potprostor numeričke prave. U potprostoru $[a, b]$ skupovi A i B su i otvoreni i zatvoreni. Pretpostavimo da se tačka a nalazi u skupu A. Postoji interval (α, β), $\alpha < a$, $a < \beta < b$, numeričke prave takav da je $(\alpha, \beta) \cap [a, b] = [a, \beta) \subset A$. Prema tome, postoji tačka x sa osobinom $a < x < \alpha$ i $[a, x] \subset A$. Stavimo sada

$$X = \{x : [a, x] \subset A\},$$

pa posmatrajmo gornju među $\sup X = s$ skupa X. Tačka s mora se nalaziti ili u skupu A ili u skupu B. Ako je $s \in A$, tada mora biti $A = [a, s]$ i $B = (s, b]$. Međutim, skup B je zatvoren u potprostoru $[a, b]$ pa bi moralo biti i $s \in B$ suprotno činjenici da skupovi A i B nemaju zajedničkih tačaka. Uzmimo sada da se tačka s nalazi u skupu B. Tada bi moralo biti $A = [a, s)$ i $B = [s, b]$. No kako je skup A zatvoren u $[a, b]$, nužno bi moralo biti $A = [a, s]$ tj. $s \in A$, suprotno pretpostavci. Zato je segment $[a, b]$ koneksan, q. e. d.

STAV 1.1.9. *Ako su tačke* a, b, $a < b$, *numeričke prave* R^1 *sadržane u nekom koneksnom skupu* $S \subset R^1$, *onda je u skupu* S *sadržan i čitav segment* $[a, b]$.

Dokaz. Pretpostsvimo da postoji tačka p, $a < p < b$, koja ne leži u skupu S pa stavimo

$$A = \{s : s \in S,\ s < p\}, \quad B = \{s : s \in S,\ p < s\}.$$

Očigledno je $A \cup B = S$ i skupovi A, B su uzajamno odeljeni u potprostoru (S, σ) pa skup S ne bi bio koneksan, suprotno pretpostavci. Zato je čitav segment $[a, b]$ sadržan u skupu S, q. e. d.

STAV 1.1.10. *Numerička prava* R^1 *je koneksan topološki prostor. Pored praznog i jednočlanih skupova, jedini koneksni skupovi numeričke prave su još intervali* (a, b), (a, ∞), ($-\infty$, a), *poluintervali* (a, b], ($-\infty$, a], *segmenti* [a, b] *i polusegmenti* [a, b) *i* [a, ∞).

Dokaz. Numerička prava R^1 je koneksna jer iz $a, b \in R^1$ $a < b$, sledi da je čitav segment $[a, b]$ sadržan u R^1 (stav 1.1.8. i stav 1.1.4). Iz istog razloga koneksni su i ostali skupovi nabrojani u stavu 1.1.10.

Obratno, neka je S koneksan skup numeričke prave R^1, koji nije ni prazan ni jednočlan. Postoje dakle dve tačke $a, b \in S$. Neka je $a < b$. Pošto je skup S koneksan, prema stavu 1.1.9. u skupu S je sadržan čitav segment $[a, b]$. Zaıo postoji tačka p sa osobinom $a < p < b$. Stavimo sada

$$X = \{s : s \in S,\ s \leq p\},$$

$$Y = \{s : s \in S,\ s \geq p\}.$$

Ako je skup S ograničen i sleva i zdesna, postoji donja međa $\inf X$ skupa X i postoji gornja međa $\sup Y$ skupa[1] Y. Primenom prethodna dva stava pokazuje se da skup S nužno mora biti jednog od sledećih oblika: $(\inf X,\ \sup Y)$, $[\inf X,\ \sup Y)$, $(\inf X,\ \sup Y]$, $[\inf X,\ \sup Y]$. Ako je skup S neograničen sleva, S je nužno oblika $(-\infty,\ \sup Y)$ ili $(-\infty,\ \sup Y]$. Ako je skup S neograničen zdesna on je nužno oblika $(\inf X, \infty)$ ili $[\inf X, \infty)$. Ako je skup S neograničen na obe strane, on je nužno oblika $(-\infty, \infty) = R^1$, q.e.d.

Pre no što izložimo još nekoliko opštih stavova, pokazaćemo da je svojstvo koneksnosti jedno topološko svojstvo (topološka invarijanta).

STAV 1.1.11. *Neka je* f *neprekidno preslikavanje koneksnog okolinskog prostora* (S, σ) *na okolinski prostor* (T, τ). *Tada je i prostor* (T, τ) *koneksan.*

Dokaz. Pretpostavimo da prostor (T, τ) nije koneksan. Skup T bi se tada mogao rastaviti na dva uzajamno odeljena skupa A i B, tj. $A \cup B = T$, $A \cap \tau B = \Lambda$ i $B \cap \tau A = \Lambda$. No tada bi skupovi $f^{-1}(A)$ i $f^{-1}(B)$ bili takođe uzajamno odeljeni i njihova unija davala bi skup S, pa prostor (S, σ) ne bi bio koneksan, suprotno pretpostavci. Zaista, ako bi, na primer, postojala tačka $x \in \sigma f^{-1}(B)$, $x \in f^{-1}(A)$ bilo bi tada

$$f(x) \in \tau f(f^{-1}(B)) \subset \tau B$$

i $f(x) \in A$, pa skupovi A i B ne bi bili uzajamno odeljeni u prostoru (T, τ), suprotno polaznoj pretpostavci, q. e. d.

Ako je f neprekidno preslikavanje prostora (S, σ) u prostor (T, τ), onda je f neprekidno preslikavanje prostora (S, σ) na potprostor $(f(S), \tau_1)$ prostora (T, τ). Zato uopšte možemo reći:

[1] Očigledno je $\inf X = \inf S$ i $\sup Y = \sup S$.

STAV 1.1.12. *Neprekidne slike koneksnih skupova su koneksni skupovi.*
Iz prethodna dva, neposredno sledi:

STAV 1.1.13. *Svojstvo koneksnosti je topološka invarijanta.*

Dokaz. Zaista, ako je jedan od dva homeomorfna okolinska prostora koneksan, na osnovi stava 1.1.11. koneksan je i drugi, q. e. d.

Koliko je svojstvo koneksnosti značajno, pokazuju već sledeća dva stava.

STAV 1.1.14. *Neka je* f *neprekidno preslikavanje segmenta* [a, b] *numeričke prave* R^1 *u* R^1 *i neka su* $\inf f$ *donja, a* $\sup f$ *gornja međa funkcije* f *na tome segmentu. Ako je* y *bilo koja tačka sa osobinom* $\inf f \leq y \leq \sup f$, *postoji tačka* x, $a \leq x \leq b$ *tako da je* $f(x) = y$. *Specijalno, ako postoje tačke* x_1, x_2 *tako da je* $f(x_1) < 0$, $f(x_2) > 0$, *tada postoji tačka* x_0 *tako da je* $f(x_0) = 0$.

Dokaz. Poznato je (vidi Z. P. Mamuzić, B. P. Đerasimović [1], str. 98) da neprekidna funkcija $f: [a, b] \to R^1$ efektivno dostiže svoju donju među $\inf f$ i svoju gornju među $\sup f$, pa je, prema stavu 1.1.12, $f([a, b]) = [\inf f, \sup f]$, tj. neprekidna slika segmenta $[a, b]$ je takođe segment $[\inf f, \sup f]$, q. e. d.

STAV 1.1.15. *Neka je* f *neprekidno preslikavanje segmenta* [a, b] *numeričke prave* R^1 *u sebe samog. Tada postoji bar jedna tačka* $x_0 \in [a, b]$ *sa svojstvom* $f(x_0) = x_0$. (*Drugim rečima: segment* [a, b] *numeričke prave poseduje svojstvo nepokretne tačke*).

Dokaz. Ako je $f(a) = a$ ili $f(b) = b$, to je očigledno. Uzmimo dakle da je $f(a) > a$ i $f(b) < b$. Neka je I: $[a, b] \to [a, b]$ identično preslikavanje, tj. $I(x) = x$, za svako $x \in [a, b]$. Obe funkcije f i I su neprekidne, pa je neprekidna i njihova razlika $f - I$. Međutim je

$$f(a) - I(a) = f(a) - a > 0, \quad f(b) - I(b) = f(b) - b < 0.$$

Prema staʌu 1.1.14. postoji dakle tačka x_0 sa osobinom $f(x_0) - I(x_0) = f(x_0) - x_0 = 0$, tj. $f(x_0) = x_0$, q. e. d.

Evo sada još nekoliko opštih stavova.

STAV 1.1.16. *Neka je skup* S *koneksan u okolinskom prostoru* (E, τ) *i neka je* $S \subset T \subset \tau S$. *Tada je i skup* T *koneksan. Specijalno, adherencija koneksnog sknpa je koneksan skup.*

Dokaz. Pretpostavimo da skup T nije koneksan. Tada postoje dva uzajamno odeljena skupa $A, B \subset T$ sa osobinom $A \cup B = T$. Uzmimo najpre da je i $A \cap S \neq \Lambda$ i $B \cap S \neq \Lambda$. Unija ta dva preseka jednaka je skupu S. Međutim, ti su preseci i uzajamno odeljeni jer su delovi uzajamno odeljenih skupova A i B. Prema tome, skup S ne bi bio koneksan, suprotno pretpostavci. Uzmimo sada da je $B \cap S = \Lambda$. Tada je $S \subset A$ odakle $\tau S \subset \tau A$ i zato iz $B \subset T \subset \tau S$ sledilo bi da mora biti i $B \subset \tau A$, tj. skupovi A i B ne bi bili uzajamno odeljeni, suprotno pretpostavci. Na isti način dolazi se do kontradikcije ako se uzme da je $A \cap S = \Lambda$, q. e. d.

STAV 1.1.17. *Neka je* S *neprazan skup u okolinskom prostoru* (E, τ). *Ako interior i eksterior skupa* S *nisu prazni, onda su oni uzajamno odeljeni.*

Dokaz. Interior (unutrašnjost) $u(S)$ i eksterior (spoljašnost) $s(S)$ skupa S su skupovi definisani ovako:

$$u(S) = C\tau(CS), \quad s(S) = C\tau(CCS),$$

gde se C oznaka za operaciju komplementiranja u prostoru (E, τ). Dokazaćemo da su skupovi $s(S) \cap \tau u(S)$ i $u(S) \cap \tau s(S)$ prazni. Ako prvi od ta dva preseka ne bi bio prazan, postojala bi tačka $x \in s(S)$ i $x \in \tau u(S)$. Zato bi bilo $x \notin \tau S$ pa bi postojala okolina Vx tačke x sa osobinom $Vx \subset CS \subset \tau(CS)$ te okolina Vx ne bi sekla skup $C\tau(CS)$, tj. ne bi bilo $x \in \tau C\tau(CS) = \tau u(S)$, suprotno pretpostavci. Ako drugi od posmatranih preseka ne bi bio prazan, postojala bi tačka $x \in u(S)$ i $x \in \tau s(S)$. To znači da bi bilo $x \notin \tau(CS)$ pa bi postojala neka okolina Vx tačke x sa svojstvom $Vx \cap CS = \Lambda$ i zato $Vx \subset S \subset \tau S = \tau(CCS)$ pa Vx ne bi imala zajedničkih tačaka sa skupom $C\tau(CCS)$, tj. bilo bi $x \notin \tau C\tau(CCS) = \tau s(S)$, suprotno pretpostavci. Drugim rečima, skupovi $u(S)$ i $s(S)$ su uzajamno odeljeni[2], q. e. d.

STAV 1.1.18. *Ako koneksni skup* A *seče i skup* S *i njegov komplement* C S *u okolinskom prostoru* (E, τ), *onda skup* A *seče i rub skupa* S.

Dokaz. Rub skupa S je $r(S) = r_u(S) \cup r_s(S)$, gde je $r_u(S) = S \setminus u(S)$ unutrašnji rub skupa S, a $r_s(S) = \tau(S) \setminus S$ spoljašnji rub skupa S. Stav je trivijalan ako koneksni skup A ima bar jednu tačku zajedničku sa rubom skupa S. Uzmimo dakle da skup A nema tačaka zajedničkih sa rubom $r(S)$ skupa S, a da skup A seče i interior $u(S)$ i eksterior $s(S)$ skupa S. Preseci $A \cap u(S)$ i $A \cap s(S)$ tada nisu prazni i sadržani su u uzajamno odeljenim skupovima $u(S)$, $s(S)$ (stav 1.1.17). Ti su preseci dakle takođe uzajamno odeljeni pa kako njihova unija daje skup A, ovaj skup ne bi bio koneksan, suprotno pretpostavci, q. e. d.

---

[2] Neposredniji dokaz tog stava je (M. Marjanović):

$$\tau u(S) \cap s(S) = \tau u(S) \cap C\tau(S) C \tau(S) \cap C\tau(S) = \Lambda$$

i

$$u(S) \cap \tau s(S) = C\tau(CS) \cap \tau(C\tau C)(CS) = C\tau(CS) \cap \tau u(CS) = \Lambda.$$

STAV 1.1.19. *Okolinski prostor* (E, τ) *je koneksan, ako i samo ako svaki njegov pravi deo ima neprazan bar jedan od svojih rubova: unutrašni ili spoljašnji.*

Dokaz. Uslov je potreban prema prethodnom stavu. Ako je uslov stava ispunjen, nijedan pravi deo prostora (E, τ) ne može biti istovremeno i otvoren i zatvoren, pa je prostor koneksan, q. e. d.

STAV 1.1.20. *Neka su skupovi* S *i* T *koneksni i uzajamno svezani u okolinskom prostoru* (E, τ). *Tada je i unija tih skupova koneksan skup.*

Dokaz. Pretpostavimo da unija $S \cup T$ nije koneksan skup u prostoru (E, τ). Postoji dakle par uzajamno odeljenih skupova A i B sa osobinom $A \cup B = S \cup T$. Uzmimo najpre da je i $A \cap S \neq \Lambda$ i $B \cap S \neq \Lambda$. Kako je skup S koneksan i $A \cap S \cup B \cap S = S$, ta dva preseka moraju biti uzajamno svezana, pa uzajamno svezani moraju biti i skupovi A i B koji, respektivno, te preseke sadrže. Uzmimo sada da je i $A \cap T \neq \Lambda$ i $B \cap T \neq \Lambda$. Kako je skup T koneksan, pokazuje se i na isti način kao i u prethodnom slučaju da ti preseci moraju biti uzajamno svezani skupovi odakle sledi da bi i skupovi A i B morali biti uzajamno svezani, suprotno pretpostavci. Od ostalih slučajeva mogućna su još dva: ili je $A \cap S = \Lambda$ i $B \cap T = \Lambda$, ili je $B \cap S = \Lambda$ i $A \cap T = \Lambda$. No u prvom od ta dva slučaja mora biti $A = T$, $B = S$, a u drugom $A = S$, $B = T$. U oba slučaja bi skupovi A i B morali biti tada svezani prema uslovima samog stava 1.1.20, suprotno pretpostavci, q. e. d.

Nije teško proveriti i sledeću činjenicu:

STAV 1.1.20'. *Ako su skupovi* S *i* T *uzajamno odeljeni u okolinskom prostoru* (E, τ), *ako je* A *koneksan skup sadržan u uniji* $S \cup T$, *nužno mora biti ili* $A \subset S$ *ili* $A \subset T$.

Dokaz. U protivnom slučaju skupovi $A \cap S$ i $A \cap T$ bili bi takođe τ-odeljeni pa skup A ne bi bio koneksan, suprotno pretpostavci, q. e. d.

STAV 1.1.21. *Neka je* S_α, $\alpha \in (\alpha)$, *proizvoljna familija koneksnih skupova okolinskog prostora* (E, τ) *i neka su za svaki par indeksa* $\alpha, \beta \in (\alpha)$ *skupovi* S_α *i* S_β *uzajamno svezani. Tada je i unija* $S = \dot{\cup}\{S_\alpha : \alpha \in (\alpha)\}$ *svih skupova* S_α *koneksan skup.*

Dokaz. Neka je $a, b \in S$ proizvoljan par tačaka. Ako obe tačke a, b leže u nekom skupu S_α, one se već nalaze u jednom koneksnom skupu. Neka je dakle $\alpha \neq \beta$ i $a \in S_\alpha$, $b \in S_\beta$. Prema stavu 1.1.20. unija $S_\alpha \cup S_\beta$ je koneksan skup, pa te tačke opet leže u jednom koneksnom skupu. Zato je i skup S koneksan prema stavu 1.1.4, q. e. d.

Neposredna posledica prethodnog je:

STAV 1.1.21'. *Neka je* S_α, $\alpha \in (\alpha)$ *proizvoljna familija koneksnih skupova okolinskog prostora* (E, τ) *i neka postoji indeks* $\alpha_0 \in (\alpha)$ *takav da je za svako* $\alpha \in (\alpha)$ *par skupova* S_{α_0}, S_α *uzajamno svezan. Tada je i unija* $\{S_\alpha : \alpha \in (\alpha)\}$ *kondksan skup.*

Kao jednu od značajnijih posledica stava 1.1.21, istaknimo i sledeći stav:

STAV 1.1.22. *Neka je* S_α, $\alpha \in (\alpha)$, *proizvoljna familija koneksnih skupova okolinskog prostora* (E, τ) *i neka presek svih članova te familije nije prazan skup. Tada je unija* $S = \cup \{S_\alpha : \alpha \in (\alpha)\}$ *svih skupova* S_α *koneksan skup.*

1.2. Karakterisanje topoloških prostora binarnom relacijom τ-svezanosti

Neka je (E, τ) T_1-prostor, tj. topološki prostor u kome je svaka tačka zatvoren skup. Drugim rečima, preslikavanje $\tau : P(E) \to P(E)$ ispunjava svih 5 ranije pobrojanih uslova 1^0—5^0 i sem toga je $\tau a = a$, za svako $a \in E$. Na kombiniranom proizvodu $P(E) \times P(E)$ definišimo jedan podskup δ na sledeći način:

DEFINICIJA 1.2.1. *Uređen par* (A, B) *skupova* $A, B \in P(E)$ *je u binarnoj relaciji* δ, *ako i samo ako su skupovi* A *i* B τ-*svezani, tj.* $(A, B) \in \delta$ *ako i samo ako* $(A \cap \tau B) \cup (B \cap \tau A) \neq \Lambda$.

Možemo odmah uvesti i ovu terminologiju: ako je $(A, B) \in \delta$, kazaćemo da je skup A blizu skupu B, a ako je $(A, B) \notin \delta$, kazaćemo da je skup A daleko od skupa B. Tu je terminologiju uveo V. A. Efremovič kod infinitezimalnih ili δ-prostora, o kojima ćemo govoriti docnije.

Lako je proveriti da binarna relacija δ u T_1-prostoru (E, τ) ispunjava sledeće uslove:

I $(A, \Lambda) \notin \delta$, za svako $A \subset E$.

II $(A, B) \in \delta \Rightarrow (B, A) \in \delta$, za svako a $A, B \subset E$.

III $A \cap B \neq \Lambda \Rightarrow (A, B) \in \delta$, $A, B \subset E$.

IV $A_1 \subset A, B_1 \subset B$ i $(A_1, B_1) \in \delta$ povlače sobom $(A, B) \in \delta$, $A, B \subset E$.

V $(A_1 \cup A_2, B) \in \delta \Rightarrow$ bar jedan od parova (A_1, B) i (A_2, B) je u δ.

VI $(a, \tau A) \in \delta \Rightarrow (a, A) \in \delta$, $a \in E$, $A \subset E$ (umesto $\{a\}$, za $a \in E$, pišemo jednostavno a).

VII $(a, b) \in \delta, \Rightarrow a = b$, $a, b \in E$.

VIII Ako je $(A, B) \in \delta$ tada postoji bar jedna tačka $a \in A$ sa osobinom $(a, B) \in \delta$ ili bar jedna tačka $b \in B$ sa osobinom $(b, A) \in \delta$, $A, B \subset E$.

Obratno, neka je na skupu E definisana binarna relacija δ koja ispunjava svih 8 uslova I—VIII. Ako stavimo

$$(1.2.1) \qquad \tau A = \{a : (a, A) \in \delta\}, \quad A \subset E,$$

pokazaćemo da preslikavanje $\tau : P(E) \to P(E)$ ispunjava svih 5 uslova 1^0—5^0 topoloških prostora (§ 1.1.) i, sem toga je $\tau a = a$, $a \in E$.

Zaista:

1^0 $\tau \Lambda = \{a : (a, \Lambda) \in \delta\} = \Lambda$, jer $(a, \Lambda) \notin \delta$, $a \in E$, zbog uslova I.

2^0 Kako je $a \cap A \neq \Lambda$ za svako $a \in A$, to je, zbog III, $(a, A) \in \delta$ za svako $a \in A$ i zato $A \subset \tau A$.

3^0 Neka je $B \subset A$ i $(b, B) \in \delta$. Zbog II je $(B, b) \in \delta$ a zbog IV mora biti i $(A, b) \in \delta$, tj. $(b, A) \in \delta$ i zato $b \in \tau A$. Drugim rečima, $\tau B \subset \tau A$.

4^0 Neka je $(A \cup B, x) \in \delta$, gde je x neka tačka iz E. Prema aksiomu V je ili $(A, x) \in \delta$ ili $(B, x) \in \delta$, tj. sbog II, ili $(x, A) \in \delta$ ili $(x, B) \in \delta$, i zato je ili $x \in \tau A$ ili $x \in \tau B$.Prema tome: $\tau(A \cup B) \subset \tau A \cup \tau B$.

5^0 Neka je $a \in \tau\tau A$, tj. $(a, \tau A) \in \delta$; prema aksiomu VI mora biti i $(a, A) \in \delta$, tj. $a \in \tau A$, odakle $\tau\tau A \subset \tau A$.

Time smo dokazali da uređena trojka (E, δ, τ), gde je E dati skup, δ binarna relacija na E koja ispunjava aksiome I—VI, a τ definisano sa (1.2.1) predstavlja topološki prostor. Štaviše, to je jedan T_1-prostor kad je ispunjen aksiom VII, jer tada iz $a \in \tau b$ sledi $a = b$, tj. $\tau a = a$, za svako $a \in E$. Dalje, aksiom VIII tvrdi: ako je $(A, B) \in \delta$, tada je $a \in \tau B$ bar za jednu tačku $a \in A$, ili $b \in \tau A$ bar za jednu tačku $b \in B$, tj. ako su skupovi A i B blizu jedan drugom, oni su τ-svezani i to baš u topologiji τ koja je binarnom relacijom δ definisana na skupu E načinom (1.2.1).

Binarna relacija δ dualna je ovoj:

$$(1.2.2) \qquad (A \mid B) \Leftrightarrow (A, B) \notin \delta, \quad A, B \subset E.$$

Nije teško iskazati aksiome I—VIII posredstvom binarne relacije $(A \mid B)$ koju je zapravo i uveo A. D. Wallace u radu [1] i pomoću te relacije sa odgovarajućih 8 aksioma dokazao gornji karakterizacioni teorem T_1-prostora, u kojima je $(A \mid B)$, ako i samo ako skupovi A i B ispunjavaju uslov Lennes—Hausdorff-a (1.1.2). Prostore definisane na skupu E posredstvom binarnih relacija (1.2.2) A. D. Wallace naziva separacioni prostori (separation – spaces). W. J. Pervin je u radu [1] takođe proučavao te prostore (i to upravo posredstvom binarne relacije δ) i uporedio sa δ-prostorima, uniformnim prostorima i sintopogenim prostorima, o kojima ćemo govoriti docnije.

Neka je sada (E, τ) topološki prostor i uvedimo binarnu relaciju δ onako kako je to učinjeno u definiciji 1.2.1. Ako je prostor (E, τ) koneksan, tada za svaki par skupova A, $B \subset E$ sa osobinom $A \cup B = E$ mora biti

$(A \cap \tau B) \cup (B \cap \tau A) \neq \Lambda$, tj. $(A, B) \in \delta$. Obratno, ako ne postoji ni jedan par skupova $A, B \subset E$ sa osobinom $A \cup B = E$ i $(A, B) \notin \delta$, prostor (E, τ) je koneksan. Primetimo da su tada A i B uzajamni komplementi u prostoru (E, τ) pa možemo iskazati ovaj kriterijum τ-koneksnosti topoloških prostora:

STAV 1.2.1. *Topološki prostor* (E, τ) *je* τ-*koneksan, ako i samo ako je* $(A, E \setminus A) \in \delta$ *za svako* $A \subset E$, $A \neq \Lambda$, $A \subset E$, *tj. ako i samo ako je svaki pravi deo skupa* E *blizu svome komplementu.*

Videćemo da se kod δ-prostora na isti način iskazuje jedan kriterijum δ-koneksnosti, ali koji kod tih prostora nije ekvivalentan τ-koneksnosti.

1.3. Skupovi s-koneksni u smislu definicije A. D. Wallace-a

A. D. Wallace je u pomenutom radu [1] nazvao *s*-prostorima klasu separacionih prostora koji ispunjavaju aksiome I—V. U stvari, kad se adherencija τ definiše na način (1.2.1), kao što se iz gornjeg dokaza može videti, klasa *s*-prostora je klasa okolinskih prostora koji ispunjavaju aksiom distributivnosti. Evo sada definicije A. D. Wallace-a:

DEFINICIJA 1.3.1. *Neka je* (E, δ, τ) *s-prostor. Skup* $S \subset E$ *je s-koneksan, ako i samo ako se ne može rastaviti na dva neprazna daleka skupa. Specijalno, prostor* (E, δ, τ) *je s-koneksan, ako i samo ako se ne može rastaviti na dva daleka neprazna skupa, tj. ako i samo ako je svaki pravi deo* A *skupa* E *blizu svome komplementu, tj.* $(A, E \setminus A) \in \delta$, *za svako* $A \subset E$, $A \neq \Lambda$, $A \neq E$.

Primetimo da bismo umesto „*s*-koneksan" već i ovde mogli reći „δ-koneksan", kao što ćemo to učiniti kod δ-prostora V. A. Efremoviča.

Prethodna definicija ima opravdanja, jer ima *s*-koneksnih prostora koji nisu τ-koneksni.

Primer (A. D. Wallace). Neka je $E = [0,1]$ pa za $X, Y \subset E$ stavimo $(X, Y) \in \delta \Leftrightarrow \overline{X} \cap \overline{Y} \neq \Lambda$ ($\overline{X}$ i $\overline{Y}$ su adherencije skupova X i Y u segmentu $[0,1]$ kao potprostoru numeričke prave). Nije teško proveriti da je (E, δ, τ), gde je τ definisano na način (1.2.1), jedan *s*-prostor (ovde δ ispunjava i aksiome VI i VII). Štaviše, za svako $A \subset E$ ovde je $\tau A = \overline{A}$. Neka je sada S skup svih racionalnih brojeva na segentu E. Skup S je svuda gust na E tj. $\overline{S} = \tau S = E$. Skup S je *s*-koneksan u prostoru (E, δ, τ), ali nije τ-koneksan. A. D. Wallace je u pomenutom radu definisao i *s*-neprekidna preslikavanja *s*-prostora:

DEFINICIJA 1.3.2. *Preslikavanje* f *s-prostora* (E, δ, τ) *u s-prostor* (E', δ', τ') *je s-neprekidno ili* δ-*neprekidno, ako i samo ako iz* $A', B' \subset E'$ *i* $(A', B') \notin \delta'$ *sledi* $(f^{-1}(A'), f^{-1}(B')) \notin \delta$.

Napomenimo sada da je diskretan prostor $\{0,1\}$ jedan s-prostor u kome su dva podskupa blizu, ako i samo ako njihov presek nije prazan. Jedina preslikavanja s-prostora (E, δ, τ) *u* prostor $\{0,1\}$ jesu konstante i one su, očevidno s-nepredidne.

STAV 1.3.1. *s-prostor* (E, δ, τ) *je s-koneksan, ako i samo ako nema s-neprekidnih preslikavanja prostora* (E, δ, τ) *na diskretan prostor* $\{0,1\}$.

Dokaz. Neka je s-prostor (E, δ, τ) s-koneksan. Kad bi postojala s-neprekidna funkcija $f: E \to \{0,1\}$ koja nije konstanta, skupovi $f^{-1}(0)$ i $f^{-1}(1)$ ne bi bili prazni i, sem toga, bili bi uzajamno daleki jer su i skupovi $\{0\}$ i $\{1\}$ uzajamno daleki, pa (E, δ, τ) ne bi bio s-koneksan prostor. Obratno, neka sem konstanata nema drugih s-neprekidnih preslikavanja prostora (E, δ, τ) na prostor $\{0,1\}$. Kad (E, δ, τ) ne bi bio s-koneksan, postojali bi pravi delovi $A, B \subset E$ sa osobinom $(A, B) \notin \delta$. definišimo sada funkciju f ovako:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in A, \\ 1, & x \in B. \end{cases}$$

Očigledno je f jedna s-neprekidna funkcija koja nije konstanta, suprotno pretpostavci, q. e. d.

Navešćemo sada nekoliko stavova:

STAV 1.3.2. *Neka su u s-prostoru* (E, δ, τ) *skupovi* S *i* T *daleki jedan od drugog, neka je skup* A *s-koneksan i sadržan u uniji* $S \cup T$. *Tada je ili* $A \subset S$ *ili* $A \subset T$.

Dokaz. Ako bi bilo i $A \cap S \neq \Lambda$ i $A \cap T \neq \Lambda$, onda bi i ta dva preseka bila daleka jedan od drugog, pa kako njihova unija daje skup A, taj skup ne bi bio s-koneksan, suprotno pretpostavci, q. e. d.

STAV 1.3.3. *Neka su skupovi* P *i* Q *s-koneksni i blizu jedan drugom u s-prostoru* (E, δ, τ). *Tada je i njihova unija* $P \cup Q$ *s-koneksan skup.*

Dokaz je analogan dokazu stava 1.1.20.

STAV 1.3.4. *Neka je u s-prostoru* (E, δ, τ) *data familija s-koneksnih skupova* S_α, $\alpha \in (\alpha)$, *i neka postoji indeks* $\alpha_0 \in (\alpha)$ *takav da je* $(S_{\alpha_0}, S_\alpha) \in \delta$ *za svako* $\alpha \in (\alpha)$. *Tada je i unija* $\cup \{S_\alpha : \alpha \in (\alpha)\}$ *s-koneksan skup.*

Dosaz. Pretpostavimo da postoje skupovi $P, Q \subset E$ tako da je $(P, Q) \notin \delta$ i $P \cup Q = \cup \{S_\alpha : \alpha \in (\alpha)\}$. Kako je S_{α_0} s-koneksan skup, prema stavu 1.3.2. ili je $S_{\alpha_0} \subset P$ ili je $S_{\alpha_0} \subset Q$. Uzmimo da je $S_{\alpha_0} \subset P$. Dalje, postoji neko $\alpha \in (\alpha)$ sa svojstvom $Q \cap S_\alpha \neq \Lambda$, pa zato $S_\alpha \subset Q$, opet prema stavu 1.3.2. Kako su skupovi P i Q daleki jedan od drugog, daleki bi bili jedan od drugog i skupovi S_{α_0} i S_α, suprotno pretpostavci. Zato unija skupova S_α, $\alpha \in (\alpha)$, mora biti s-koneksan skup, q. e. d.

STAV 1.3.5. *Neka je skup* S *u* s-*prostoru* $(\mathrm{E}, \delta, \tau)$ s-*koneksan i neka je* $\mathrm{S} \subset \mathrm{T} \subset \tau \mathrm{S}$. *Tada je i skup* T s-*koneksan.*

Dokaz. Vodeći računa o definiciji 1.3.1. skupovi koji se sastoje samo iz jedne tačke jesu s-koneksni. Skup $\tau S \setminus S$ sastoji se iz svih onih tačaka koje nisu u S ali su blizu skupa S. Prema tome, možemo staviti $S_{\alpha_0} = S$ i sa S_α, $\alpha \in (\alpha)$, označiti one jednočlane skupove iz $\tau S \setminus S$ koji u uniji sa S_{α_0} daju upravo skup T, tj. možemo tada pisati $T = \cup \{S_\alpha : \alpha \in (\alpha)\}$. Kako je dakle $(S_{\alpha_0}, S_\alpha) \in \delta$ za svako $\alpha \in (\alpha)$, prema prethodnom stavu skup T je s-koneksan, q. e. d.

STAV 1.3.6. *Neka je* S *neprazan* s-*koneksni skup* s-*prostora* $(\mathrm{E}, \delta, \tau)$. *Postoji maksimalni skup* $\mathrm{K}_E(\mathrm{S}) \subset \mathrm{E}$ *u kome je sadržan skup* S.

Dokaz. Stavimo $S_{\alpha_0} = S$ i sa $\{S_\alpha, \alpha \in (\alpha)\}$, označimo familiju svih s-koneksnih skupova koji su blizu skupa S_{α_0}. Tada je skup $K_E(S) = \cup \{S_\alpha : \alpha \in (\alpha)\}$ s-koneksan prema stavu 1.3.4. i, očevidno, to je maksimalni s-koneksni skup koji u s-prostoru (E, δ, τ) sadrži skup $S_{\alpha_0} = S$, q. e. d.

Za neka dalja razmatranja s-koneksnih skupova čitalac se upućuje na već pomenutu raspravu [1] A. D. Wallace-a.

Osim toga, P. C. Hammer je u radu [1] uveo i neke druge definicije koneksnosti u vezi sa tzv. „proširenim topologijama" („extended topology") no o čemu ovom prilikom nećemo govoriti. Zainteresovan čitalac može o tome detaljnije naći u naznačenoj raspravi.

1.4 Koneksni okolinski proizvod-prostori

Analiziraćemo sada pod kojim će uslovima svojstvo τ-koneksnosti posedovati okolinski i, specijalno, topološki proizvod-prostori, kada to svojstvo poseduju prostori - faktori, i obratno. U tu svrhu biće nam potrebna definicija okolinskog proizvoda okolinskih prostora koji ispunjavaju aksiom distributivnosti i, sem toga, nekoliko pomoćnih stavova.

STAV 1.4.1. *Neka su* f *i* g *neprekidne funkcije definisane na okolinskom prostoru* (S, V) *koji ispunjava aksiom distributivnosti sa vrednostima u okolinskom prostoru* (T, W) *koji ispunjava Hausdorff-ov aksiom odeljivanja* T_2. *Neka je* A *skup svuda gust u prostoru* (S, V) *i neka su restrikcije funkcija* f *i* g *na skup* A *jednake. Tada su jednake i same funkcije* f *i* g.

Dokaz. Zbog neprekidnosti funkcija f i g biće (vidi moju knjigu [1])

$$\lim_{t \to x} f(t) = f(x), \qquad \lim_{t \to x} g(t) = g(x),$$

za svako $x \in S$. To znači da su za svaku okolinu $Wf(x)$ tačke $f(x)$ i svaku okolinu $Wg(x)$ tačke $g(x)$ u prostoru (T, W) postoje okoline V_1 i V_2 tačke x u prostoru (S, V) sa svojstvom

$$V_1 \subset f^{-1}(Wf(x)), \qquad V_2 \subset g^{-1}(Wg(x)). \tag{1.4.1}$$

Zbog gustoće skupa A je $A \cap V_1 \neq \Lambda$ i $A \cap V_2 \neq \Lambda$ pa su tačke $f(x)$ i $g(x)$ limesi funkcija f i g kad t teži ka x ostajući u skupu A, tj.

$$\lim_{t \to x,\, t \in A} f(t) = f(x), \qquad \lim_{t \to x,\, t \in A} g(t) = g(x).$$

Ako bi bilo $f(x) \neq g(x)$, postojale bi u prostoru (T, W) dve disjunktne okoline tačaka $f(x)$ i $g(x)$. Neka su to okoline $Wf(x)$ i $Wg(x)$. Neka su dalje V_1 i V_2 upravo one okoline tačke x u prostoru (S, V) sa koje važe inkluzije (1.4.1). Zbog aksioma distributivnosti presek $V_1 \cap V_2 = V_3$ takođe je okolina tačke x pa je

$$\Lambda \neq A \cap V_3 \subset (A \cap V_1) \cap (A \cap V_2)$$

i zato je

$$f(A \cap V_3) \subset Wf(x), \; g(A \cap V_3) \subset Wg(x).$$

Odatle sledi da okoline $Wf(x)$ i $Wg(x)$ ne bi bile bez zajedničkih tačaka, suprotno pretpostavci. Zato mora biti $f(x) = g(x)$ za svako $x \in S$, q. e. d.

Primenom stava 3. iz § 6. moje knjige [1] mogućno je dokazati stav 1.4.1. i bez upotrebe limesa (M. Marjanović). Uzmimo naime da postoji tačka $x \in S = \bar{A}$ sa svojstvom $f(x) \neq g(x)$. Zbog aksioma separacije T_2, postoje disjunktne okoline $Wf(x)$ i $Wg(x)$ tačaka $f(x)$ i $g(x)$ u prostoru (T, W). Kako su funkcije f i g neprekidne, postoje okoline V_1 i V_2 tačke x tako da je

$$f(V_1) \subset Wf(x) \text{ i } g(V_2) \subset Wg(x).$$

Kako prostor (S, V) ispunjava aksiom distributivnosti, postoji okolina V tačke x tako da je $V \subset V_1 \cap V_2$ i zato

$$f(V) \subset Wf(x) \text{ i } g(V) \subset Wg(x).$$

No tada je i $A \cap V \neq \Lambda$ pa postoji tačka $s \in A \cap V$ sa svojstvom

$$f(s) \in Wf(x) \text{ i } g(s) \in Wg(x),$$

a to je nemogućno, jer je $f(s) = g(s)$ za svako $s \in A$, q. e. d.

STAV 1.4.2. *Neka je* S *neprazan skup i neka je* $(T_\alpha, \mathcal{W}^\alpha)$ *data familija okolinskih prostora koji ispunjavaju aksiom distributivnosti, gde indeks* α *prolazi konačnim ili beskonačnim skupom* (α) *indeksa. Neka je za svako* α *definisana funkcija*

$$f_\alpha : S \to T_\alpha$$

pa na skupu S *definišimo okolinsku bazu*

$$\mathcal{V} = \cup \{\mathcal{V}_a : a \in S\}$$

na sledeći način: za dato $a \in S$, *skup* $Va \subset S$ *stavićemo u lokalnu okolinsku bazu* $\mathcal{V}_a$ *tačke* a, *ako i samo ako postoji konačan skup* $(\alpha)^*$ *indeksa* α *sa svojstvom*

$$\cap \{f_\alpha^{-1}(Wf_\alpha(a)) : \alpha \in (\alpha)^*\} \subset Va. \tag{1.4.2}$$

Pod navedenim uslovima važi sledeće:

1. Okolinski prostor $(S, \mathcal{V})$ *ispunjava aksiom distributivnosti. 2. Familija* $\mathcal{V}$ *je najopsežnija okolinska baza prostora* $(S, \mathcal{V})$. *3. Za svako* $\alpha \in (\alpha)$, *funkcija* f_α *je neprekidna na* $(S, \mathcal{V})$. *4. Okolinski prostor* $(S, \mathcal{V})$ *je grublji od svih okolinskih prostora koji ispunjavaju aksiom distributivnosti i koje je na skupu* S *mogućno definisati tako da sve funkcije* f_α, $\alpha \in (\alpha)$ *budu još uvek neprekidne.*

Dokaz. 1. Neka su $V_1 a$ i $V_2 a$ dve okoline tačke $a \in S$. Uzmimo najpre da postoje dva konačna skupa $(\alpha)^*_1$ i $(\alpha)^*_2$ indeksa tako da je

$$\cap \{f^{-1}(Wf_\alpha(a)) : \alpha \in (\alpha)^*_1\} \subset V_1 a,$$

$$\cap \{f_\alpha^{-1}(Wf_\alpha(a)) : \alpha \in (\alpha)^*_2\} \subset V_2 a.$$

Ako stavimo $(\alpha)^*_1 \cup (\alpha)^*_2 = (\alpha)^*_3$ biće

$$\cap \{f_\alpha^{-1}(Wf_\alpha(a)) : \alpha \in (\alpha)^*_3\} \subset V_1 a \cap V_2 a,$$

jer se presek na levoj strani te inkluzije sadrži u presecima levih strana prethodne dve inkluzije. Zato je i presek $V_1 a \cap V_2 a$ okolina tačke a. Ako se u definiciji (1.4.2) skup $(\alpha)^*$ sastoji samo od jednog indeksa α, tada postoje okoline $W_1 f_\alpha(a)$ i $W_2 f_\alpha(a)$ tačke $f_\alpha(a)$ tako da je

$$f_\alpha^{-1}(W_1 f_\alpha(a)) \subset V_1 a,$$

$$f_\alpha^{-1}(W_2 f_\alpha(a)) \subset V_2 a,$$

i zato

$$f_\alpha^{-1}(W_1 f_\alpha(a)) \cap f_\alpha^{-1}(W_2 f_\alpha(a)) = f_\alpha^{-1}(W_1 f_\alpha(a) \cap W_2 f_\alpha(a)) \subset V_1 a \cap V_2 a,$$

pa kako je

$$W_1 f_\alpha(a) \cap W_2 f_\alpha(a)$$

takođe jedna okolina tačke $f_\alpha(a)$, vidimo da i presek $V_1 a \cap V_2 a$ mora biti neka okolina tačke a. Prostor $(S, \mathcal{V})$ ispunjava zato aksiom distributivnosti.

2. Ako je B proizvoljan skup sadržan u skupu S i ako je b unutrašnja tačka skupa B, onda postoji okolina Vb tačke b sa osobinom $Vb \subset B$. Prema definiciji (1.4.2) to znači da postoji presek konačno mnogo skupova oblika $f_\alpha^{-1}(Wf_\alpha(b))$ koji je sadržan u skupu B, pa je $B \in \mathcal{V}_b$, tj. $\mathcal{V}_b$ je najopsežnija lokalna okolinska baza tačke b.

3. Uzmimo bilo koju tačku $a \in S$ i bilo koju okolinu $Wf_\alpha(a)$ tačke $f_\alpha(a)$ u prostoru $(T_\alpha, \mathcal{W}^\alpha)$ pa stavimo $f_\alpha^{-1}(Wf_\alpha(a)) = Va$. Tada je $f_\alpha(Va) \subset Wf_\alpha(a)$ pa je funkcija f_α neprekidna. To važi za svako $\alpha \in (\alpha)$ pa su sve funkcije f_α neprekidne na prostoru $(S, \mathcal{V})$.

4. Neka je $(S, \mathcal{G})$ bilo koji okolinski prostor na S koji ispunjava aksiom distributivnosti, gde je $\mathcal{G} = \cup\{\mathcal{G}_a : a \in S\}$ njegova najopsežnija okolinska baza. Treba dokazati da je $\mathcal{V} \subset \mathcal{G}$. Neka je a bilo koja tačka u S i Va bilo koja njena okolina u prostoru $(S, \mathcal{V})$. To znači da postoji konačan skup $(\alpha)^*$ indeksa sa osobinom

$$\cap\{f_\alpha^{-1}(Wf_\alpha(a)) : \alpha \in (\alpha)^*\} \subset Va.$$

Po pretpostavci su na prostoru $(S, \mathcal{G})$ sve funkcije f_α neprekidne pa za svako $\alpha \in (\alpha)^*$ postoji okolina $I^\alpha a$ tačke a sa svojstvom

$$I^\alpha a \subset f_\alpha^{-1}(Wf_\alpha(a)).$$

Zato je

$$\cap\{I^\alpha a : \alpha \in (\alpha)^*\} \subset Va.$$

No prostor $(S, \mathcal{G})$ ispunjava aksiom distributivnosti pa je presek na levoj strani te inkluzije takođe okolina tačke a. No to znači da i skup Va mora biti član najopsežnije lokalne okolinske baze $\mathcal{G}_a$ tačke a, tj. mora biti $\mathcal{V}_a \subset \mathcal{G}_a$, q. e. d.

Sada ćemo postupak topologiziranja skupova izložen u prethodnom stavu primeniti na kombinirani proizvod skupova, naime, imamo ovu njegovu posledicu:

STAV 1.4.3. *Neka je data familija* $(T_\alpha, \mathcal{W}^\alpha)$, $\alpha \in (\alpha)$, *okolinskih prostora koji ispunjavaju aksiom distributivnosti i neka je*

$$S = \Pi\{T_\alpha : \alpha \in (\alpha)\} = \Pi\, T_\alpha$$

kombinirani proizvod skupova T. *Neka su*

$$f_\alpha : S \to T_\alpha$$

projekcije skupa S *na* T_α *za svako* $\alpha \in (\alpha)$, *tj. za* $g \in S$ *je* $f_\alpha(g) = g(\alpha)$, $\alpha \in (\alpha)$, *pa na skupu* S *definišimo okolinsku bazu onako kako je to učinjeno u* (1.2.4): *za svako* $g \in S$ *i svaki podskup* $Vg \subset S$ *stavićemo* Vg *u lokalnu okolinsku bazu* $\mathcal{V}_g$ *tačke* g, *ako i samo ako postoji konačan skup* $(\alpha)^*$ *indeksa* α *sa osobinom da je*

$$(1.4.2') \qquad \cap \{ f_\alpha^{-1}(Wg(\alpha)) : \alpha \in (\alpha)^* \} \subset Vg.$$

Tada važi sledeće: 1. Okolinski prostor $(S, \mathcal{V})$ *ispunjava aksiom distributivnosti 2. Familija* $\mathcal{V} = \cup \{\mathcal{V}_g : g \in S\}$ *je najopsežnija okolinska veza prostora* $(S, \mathcal{V})$. *3. Sve proekcije* f_α *su neprekidne funkcije. 4. Okolinski prostor* $(S, \mathcal{V})$ *je grublji od svih okolinskih prostora koje je mogućno definisati na skupu* S *tako da sve funkcije* f_α *budu još uvek neprekidne.*

DEFINICIJA 1.4.1. *Okolinski prostor* $(S, \mathcal{V})$ *definisan na proizvodu* $S = \Pi\, T_\alpha$ *okolinskih prostora* $(T_\alpha, \mathcal{W}^\alpha)$ *kako je to izloženo u prethodnom stavu zove se okolinski proizvod-prostor (vidi takođe moj rad* [4]*).*

Za dalje izlaganje biće podesno da u okolinski proizvod-prostor $(S, \mathcal{V})$ umesto $\mathcal{V}$ uvedemo drugu okolinsku bazu.

STAV 1.4.4. *Neka je* $(S, \mathcal{V})$ *okolinski proizvod okolinskih prostora* $(T_\alpha, \mathcal{W}^\alpha)$, $\alpha \in (\alpha)$, *koji ispunjavaju aksiom distributivnosti, neka je* $(\alpha)^* \in (\alpha)$ *konačan skup indeksa, pa sa*

$$(1.4.3) \qquad \prod_{(\alpha)^*} Wg(\alpha),$$

gde su $Wg(\alpha)$ *okoline tačaka* $g(\alpha)$ *u prostoru* $(T_\alpha, \mathcal{W}^\alpha)$, *označimo skup svih onih tačaka* $p \in S$ *za koje je* $p(\alpha) \in Wg(\alpha)$, *ako je* $\alpha \in (\alpha)^*$ *i* $p(\alpha) \in T_\alpha$, ako je $\alpha \in (\alpha) \setminus (\alpha)^*$. *Tada je familija svih skupova oblika* (1.4.3) *takođe jedna okolinska baza okolinskog proizvod-prostora* $(S, \mathcal{V})$.

Dokaz. Kako su skupovi oblika onih na levoj strani inkluzije (1.4.2') takođe članovi okolinske baze $\mathcal{V}$ okolinskog proizvod-prostora $(S, \mathcal{V})$, stav 1.4.4. biće dokazan ako pokažemo da je

$$(1.4.4) \qquad \Pi\, Wg(\alpha) = \cap \{ f_\alpha^{-1} (Wg(\alpha)) : \alpha \in (\alpha)^* \}.$$

Uzmimo neko p koje je sadržano u levoj strani te jednakosti. Tada je

$$p(\alpha) \in Wg(\alpha), \quad \text{za} \quad \alpha \in (\alpha)^*$$

i

$$p(\alpha) \in T_\alpha, \quad \text{za} \quad \alpha \in (\alpha) \setminus (\alpha)^*.$$

No kako je $p(\alpha)=f_\alpha(p)$, odmah vidimo da p mora biti sadržano i u drugoj strani te jednakosti. Da važi i obratno, takođe je očigledno, q. e. d.

STAV 1.4.5. *Neka je* $\mathrm{h}: \mathrm{S} \to \{0,1\}$ *neprekidno preslikavanje okolinskog proizvod-prostora* $(\mathrm{S}, \mathcal{U})$ *na diskretan prostor* $\{0,1\}$ *i neka je* $\mathrm{a} \in \mathrm{S}$ *jedna određena tačka. Tada je za svako* $\alpha \in (\alpha)$ *neprekidno i parcijalno preslikavanje*

$$\mathrm{h}_\alpha : \mathrm{T}_\alpha \to \{0,1\}$$

okolinskog prostora $(\mathrm{T}_\alpha, \mathcal{U}^{(\alpha)})$ *na prostor* $\{0,1\}$ *definisano ovako:*

$$\mathrm{h}_\alpha(\mathrm{x}) = \mathrm{h}(\mathrm{y}), \quad \mathrm{x} \in \mathrm{T}_\alpha,$$

gde je $\mathrm{y} \in \mathrm{S}$ *ona tačka za koju važi*

$$\mathrm{y}(\alpha)=\mathrm{x} \quad i \quad \mathrm{y}(\beta)=\mathrm{a}(\beta) \quad za \quad \beta\neq\alpha.$$

Dokaz. Zbog neprekidnosti funkcije h postoji okolina Vy tačke y u prostoru $(S, \mathcal{U})$ sa osobinom

$$h(Vy) \subset \{h(y)\},$$

gde je $h(y)$ ili 0 ili 1. Kako je $y(\alpha)=x$, a projekcija $f_\alpha : S \to T_\alpha$ neprekidna, postoji okolina Wx tačke $x \in T_\alpha$ tako da je $f_\alpha^{-1}\,(Wx) \subset Vy$, tj.

$$\prod_\alpha Wx \subset Vy$$

prema (1.4.4), ako $\prod\limits_\alpha Wx$ znači skup svih onih tačaka p iz S za koje je $p(\alpha) \in Wx$ i $p(\beta) \in T_\beta$ za $\beta\neq\alpha$. Zato

$$h(\prod_\alpha Wx) \subset h(Vy) \subset \{h(y)\}. \tag{1.4.5}$$

Uzmimo sada bilo koju tačku $b \in Wx$. Biće tada

$$f_\alpha^{-1}(b) \subset f_\alpha^{-1}\,(Wx) = \prod_\alpha Wx.$$

No u skupu $f_\alpha^{-1}(b)$ nalazi se i ona tačka z iz skupa S za koju je $f_\alpha(z)= = z(\alpha)=b$ i $z(\beta)=a(\beta)$ za $\beta\neq\alpha$. Prema (1.4.5) to znači da mora biti $h(z)=h(y)$ pa je zato $h_\alpha(b)=h(z)$, tj. $h_\alpha(b)=h(y)$ i zato $h_\alpha(Wx) \subset \{h(y)\}$. Prema tome, funkcija h_α je neprekidna, q. e. d.

STAV 1.4.6. *Neka u okolinskom proizvodu* ($S = \Pi T_\alpha$, $\mathcal{U}$), *svi okolinski prostori* (T_α, $\mathcal{W}^\alpha$), $\alpha \in (\alpha)$, *ispunjavaju aksiom distributivnosti i neka su svi oni koneksni. Neka je* $h: S \to \{0,1\}$ *neprekidno preslikavanje prostora* (S, $\mathcal{U}$) *na diskretan prostor* $\{0,1\}$ *i neka je* $a \in S$ *jedna po volji fiksirana tačka. Tada je* $h(p) = h(a)$ *za sve one tačke* p *iz skupa* S *za koje je* $p(\alpha) = a(\alpha)$ *izuzev za najviše konačno mnogo indeksa iz skupa* (α) *i skup svih tačaka* p *iz* S *sa tom osobinom je svuda gust u prostoru* (S, $\mathcal{U}$).

Dokaz. Definišimo parcijalno preslikavanje $h_\alpha: T_\alpha \to \{0,1\}$ kao i u prethodnom stavu: ako je $y \in S$ i ako je $y(\alpha) = x$, $y(\beta) = a(\beta)$ za $\beta \neq \alpha$ stavićemo $h_\alpha(x) = h(y)$. Prema stavu 1.4.5. funkcija h_α je neprekidna pa kako je prostor (T_α, $\mathcal{W}^\alpha$) koneksan, funkcija h_α svodi se na konstantu. Ali je $h_\alpha(a(\alpha)) = h(y)$ i $h_\alpha(a(\alpha)) = h(a)$ pa zato mora biti $h(y) = h(a)$. Uzmimo sada neki drugi indeks $\gamma \neq \alpha$ pa na sličan način definišimo parcijalno preslikavanje $h_\gamma: T_\gamma \to \{0,1\}$ sa $h_\gamma(\xi) = h(y_1)$ gde je $y_1 \in S$ ona tačka za koju važi $y_1(\gamma) = \xi$ i $y_1(\beta) = y(\beta)$ za $\beta \neq \gamma$. Funkcija h_γ je neprekidna a prostor (T_γ, $\mathcal{W}^\gamma$) koneksan pa se funkcija h_γ svodi na konstantu. Ali je $h_\gamma(y(\gamma)) = h(y_1)$ i $h_\gamma(y(\gamma)) = h(y)$ i zato $h(y_1) = h(y)$ pa zbog $h(y) = h(a)$ vidimo da mora biti i $h(y_1) = h(a)$. Primetimo sada da za tačku $y_1 \in S$ važi $y_1(\beta) = a(\beta)$ izuzev za najviše dva indeksa α i γ. Matematičkom indukcijom taj se postupak može produžiti povolji i pokazati da je $h(p) = h(a)$ za sve one tačke $p \in S$ za koje je $p(\alpha) = a(\alpha)$ izuzev za najviše konačno mnogo indeksa iz skupa (α). Neka je sa A označen skup svih tačaka p iz S sa tom osobinom. Pokazaćemo da je adherencija $\bar{A}$ skupa A jednaka skupu S u prostoru (S, $\mathcal{U}$), tj. da je skup A svuda gust u tom prostoru. Neka je $g \in S$ povolji uzeta tačka i neka je $\prod_{(\alpha)^*} Wg(\alpha)$ proizvoljna okolina tačke g u prostoru (S, $\mathcal{U}$). To znači da je $Wg(\alpha) = T_\alpha$ za $\alpha \in (\alpha) \setminus (\alpha)^*$, gde je $(\alpha)^* \subset (\alpha)$ konačan skup. No među tačkama koje leže u okolini $\prod_{(\alpha)^*} Wg(\alpha)$ nalaze se tačke p za koje važi $p(\alpha) \in Wg(\alpha)$ za $\alpha \in (\alpha)^*$ i $p(\alpha) \in T_\alpha$ za $\alpha \in (\alpha) \setminus (\alpha)^*$. Kako svaka okolina oblika Vg sadrži neku okolinu oblika $\prod_{(\alpha)^*} Wg(\alpha)$, to znači da je $g \in \bar{A}$ i zato $S = \bar{A}$, q. e. d.

STAV 1.4.7. *Okolinski proizvod-prostor koneksnih okolinskih prostora koji ispunjavaju aksiom distributivnosti je koneksan.*

Dokaz. Neka je ($S = \prod_{(\alpha)} T_\alpha$, $\mathcal{U}$) okolinski proizvod-prostor koneksnih okolinskih prostora (T_α, W^α), $\alpha \in (\alpha)$, koji ispunjavaju aksiom distributivnosti. Neka je $h: S \to \{0,1\}$ neprekidno preslikavanje prostora (S, $\mathcal{U}$) na diskretan prostor $\{0,1\}$. Ako je $a \in S$ jedna fiksirana tačka, prema prethodnom stavu postoji svuda gust skup A u prostoru (S, $\mathcal{U}$) sa osobinom da je $h(p) = h(a)$, za svako $p \in A$. Definišimo sada funkciju $f: S \to \{0,1\}$ ovako: $f(g) = h(a)$ za svako $g \in S$. Funkcija f je očigledno neprekidna pri čemu je $f(x) = h(a) = h(x)$ za svaku tačku $x \in A$. Prema stavu 1.4.1. to znači da je $f(x) = h(x) = h(a)$ za sve tačke $x \in S$, odakle sledi da je funkcija f konstanta, pa je prostor (S, $\mathcal{U}$) koneksan, q. e. d.

Obratno, ako je okolinski proizvod-prostor koneksan, imamo stav:

STAV 1.4.8. *Neka je* $(S, \mathcal{V})$ *okolinski proizvod-prostor okolinskih prostora* $(T_\alpha, \mathcal{W}^\alpha)$, $\alpha \in (\alpha)$, *koji ispunjavaju aksiom distributivnosti. Ako je prostor* $(S, \mathcal{V})$ *koneksan, tada su i svi prostori faktori* $T_\alpha, \mathcal{W}^\alpha)$ *koneksni.*

Dokaz. To je neposredna posledica činjenice da su sve projekcije $f_\alpha : S \to T_\alpha$ neprekidne funkcije koje skup S preslikavaju na skup T_α. Zato prema stavu 1.1.12. svi prostori $(T_\alpha, \mathcal{W}_\alpha)$ moraju biti koneksni, q. e. d.

Ako u stavu (1.4.2.) uvedemo samo uslov

$$(1.4.2'') \qquad f_\alpha^{-1}(Wf_\alpha(a)) \subset Va$$

onda tim načinom definisana okolinska baza $\mathcal{V}$ u prostoru $(S, \mathcal{V})$ neće, u opštem slučaju, ispunjavati aksiom distributivnosti. Zato i odgovarajući okolinski proizvod-prostor $(S = \Pi\, T_\alpha, \mathcal{V})$, u kome je umesto (1.4.2') stavljeno samo

$$(1.4.2''') \qquad f_\alpha^{-1}(Wg(\alpha)) \subset Vg,$$

ne mora ispunjavati aksiom distributivnosti. No, s obzirom na stav 1.1.12, stav 1.4.8. može biti nešto uopšten:

STAV 1.4.9. *Neka je* $(S = \Pi\, T_\alpha, \mathcal{V})$ *okolinski proizvod-prostor okolinskih prostora* $(S_\alpha, \mathcal{W}^\alpha)$, *pri čemu je okolinska baza* $\mathcal{V}$ *definisana sa* (1.4.2'''). *Ako je prostor* $(S, \mathcal{V})$ *koneksan, onda su i svi prostori faktori* $(T_\alpha, \mathcal{W}^\alpha)$ *koneksni.*

Dokazaćemo sada sledeći stav:

STAV 1.4.10. *Ako svaki prostor* $(T_\alpha, \mathcal{W}^\alpha)$, $\alpha \in (\alpha)$, *ispunjava aksiom tranzitivnosti tada i okolinski prostor* $(S, \mathcal{V})$, *definisan u stavu* 1.4.2. *ispunjava isti aksiom, pa bilo da je okolinska baza* $\mathcal{V}$ *definisana na način* 1.4.2. *ili* 1.4.2''.

Dokaz. Stav je dovoljno dokazati za slučaj da je okolinska baza $\mathcal{V}$ definisana na način 1.4.2. Neka je $a \in S$ bilo koja tačka i Va bilo koja njena okolina. Prema tome, postoji konačan skup $(\alpha)^* = \{\alpha_i : i = 1,2,\ldots,n\}$ indeksa tako da je

$$\cap\{f_{\alpha_i}^{-1}(Wf_{\alpha_i}(a)) : i = 1,2,\ldots,n\} \subset Va.$$

Po pretpostavci, za svaku okolinu $Wf_{\alpha_i}(a)$, $i = 1,2,\ldots,n$, postoji neka okolina $W^i f_{\alpha_i}(a) \subset Wf_{\alpha_i}(a)$ sa osobinom da za svako $b \in W^i f_{\alpha_i}(a)$ postoji neka okolina $W^i b$ tačke b tako da je $W^i b \subset Wf_{\alpha_i}(a)$ (svojstvo ekvivalentno aksiomu tranzitivnosti).

Tada je

$$V^1a = \cap \{f_{\alpha_i}^{-1}(W^i f_{\alpha_i}(a)) : i = 1,2,\ldots,n\} \subset \cap \{f_{\alpha_i}^{-1}(Wf_{\alpha_i}(a)) : i = 1,2,\ldots,n\}$$

i zato

$$V^1 a \subset Va.$$

Uzmimo sada neku tačku $y \in V^1 a$. Biće:

$$f_{\alpha_i}(y) \in W^i f_{\alpha_i}(a), i = 1,2,\ldots,n.$$

Zato postoji neka okolina

$$W^i f_{\alpha_i}(y)$$

tačke $f_{\alpha_i}(y)$ sa svojstvom

$$W^i f_{\alpha_i}(y) \subset Wf_{\alpha_i}(a),$$

za svako $i = 1,2,\ldots,n$. Odatle sledi

$$f_{\alpha_i}^{-1}(W^i f_{\alpha_i}(y)) \subset f_{\alpha_i}^{-1}(Wf_{\alpha_i}(a))$$

i zato

$$\cap \{\alpha_i^{-1}(W^i(y)) : i = 1,2,\ldots,n\} \subset \cap\{f_{\alpha_i}^{-1}(Wf_{\alpha_i}(a)) : i = 1,2,\ldots,n\}.$$

No presek skupova na levoj strani te inkluzije je neka okolina tačke y, koju ćemo označiti sa Vy. Tako vidimo da je $Vy \subset Va$ za svaku tačku $y \in V^1a$, što znači da prostor $(S, \mathcal{V})$ ispunjava aksiom tranzitivnosti, q. e. d.

Kao neposrednu posledicu prethodnog, imamo specijalno:

STAV 1.4.11. *Neka je* $(S = \Pi\, T_\alpha, \mathcal{V})$ *okolinski proizvod-prostor okolinskih prostora* $(T_\alpha, \mathcal{W}^\alpha)$, $\alpha \in (\alpha)$, *koji ispunjavaju aksiom tranzitivnosti i aksiom distributivnosti. Tada i prostor* $(S, \mathcal{V})$ *ispunjava te aksiome. Drugim rečima, prostor* $(S, \mathcal{V})$ *je topološki proizvod topoloških prostora* $(T_\alpha, \mathcal{W}^\alpha)$, $\alpha \in (\alpha)$.

S obzirom na stavove 1.4.7, 1.4.8. i 1.4.11. možemo stilizovati ovaj stav:

STAV 1.4.12. *Topološki proizvod ma koliko topoloških prostora je koneksan, ako i samo ako su svi prostori-faktori koneksni.*

Kao primer, navedimo ovde euklidske prostore R^n koji nisu ništa drugo do topološki proizvodi numeričke prave R^1 uzete n-puta kao faktor. Kako je numerička prava R^1 koneksna, možemo reći:

STAV 1.4.13. *Svi euklidski prostori su koneksni.*

Ukazaćemo ovde još na neke stavove. Neka su τ_α adherencije okolinskih prostora $(T_\alpha, \mathcal{U}^\alpha)$, $\alpha \in (\alpha)$, i neka je τ adherencija okolinskog prostora $(S, \mathcal{V})$ pri čemu je $\mathcal{V}$ okolinska baza definisana na S posredstvom preslikavanja $f_\alpha : S \to T_\alpha$ i okolina Va definisanih na način (1.4.2″). Prostori $(T^\alpha, \mathcal{U}^\alpha)$ pa ni prostor $(S, \mathcal{V})$, ne moraju verifikovati aksiom distributivnosti. Tada važi (vidi takođe moj rad [8]):

$$\tau A = \cap \{ f_\alpha^{-1} \tau_\alpha f_\alpha A : \alpha \in (\alpha) \}, \quad A \subset S. \tag{1.4.6}$$

Dokaz. Uzmimo najpre da je $g \in \tau A$. Kako su sve funkcije f_α neprekidne, mora biti (vidi, na primer, moju knjigu [1]) $f_\alpha(g) \in \tau_\alpha f_\alpha A$ i zato

$$g \in f_\alpha^{-1} \tau_\alpha f_\alpha A \quad \text{za svako} \quad \alpha \in (\alpha).$$

Definišimo sada na skupu S okolinski prostor (S, σ) stavljajući

$$\sigma A = \Pi \{ f_\alpha^{-1} \tau_\alpha f_\alpha A : \alpha \in (\alpha) \}, \quad A \subset S.$$

Zaista, lako je proveriti da operator $\sigma : P(S) \to P(S)$ ispunjava aksiome 1^0, 2^0 i 3^0 okolinskih prostora. Prema tome, iz prvog dela ovog dokaza sledi da je $\tau A \subset \sigma A$ za sve delove A skupa S. No lako je pokazati da bi to značilo da bi okolinski prostor (S, σ) bio grublji od okolinskog prostora (S, τ). S druge strane, sva preslikavanja

$$f_\alpha : (S, \sigma) \to (T_\alpha, \mathcal{U}^\alpha), \quad \alpha \in (\alpha),$$

neprekidna su, jer iz $g \in \sigma A$ sledi $f_\alpha(g) \in \tau_\alpha f_\alpha A$ za sve indekse $\alpha \in (\alpha)$. Međutim, prema osobinama prostora (S, τ) (vidi takođe moj rad [4]), prostor (S, τ) je grublji od svih okolinskih prostora na S za koje su sve funkcije f_α još uvek neprekidne. Zato mora biti $\sigma A \subset \tau A$ za sve delove A skupa S. Iz te i gore dokazane relacije sledi da mora biti $\sigma A = \tau A$, $A \subset S$, q. e. d.

Lako je proveriti da stav (1.4.6) važi i za slučaj kada svi okolinski prostori $(T_\alpha, \mathcal{U}^\alpha)$ verifikuju aksiom distributivnosti, pa ga u tom slučaju verifikuje i okolinski prostor $(S, \mathcal{V})$ definisan u stavu 1.4.2.

Specijalno, relacija (1.4.6) važi i kada je reč o okolinskim proizvod-prostorima $(S, \mathcal{V})$ okolinskih prostora $(T_\alpha, \mathcal{U}^\alpha)$, $\alpha \in (\alpha)$, gde će f_α značiti projekcije prostora $(S, \mathcal{V})$ na prostore $(T_\alpha, \mathcal{U}^\alpha)$. To u stvari znači da se okolinski proizvod-prostori mogu upravo i definisati neposredno pomoću relacije (1.4.6). Tako je Don A. Mattson u [1] zapravo i definisao proizvod-prostore razmatrajući proširene topologije (extended topology) P. C. Hammer-a. Specijalno je Don A. Mattson-u uspelo da u pomenutom radu dokaže da je koneksan okolinski proizvod prebrojivo mnogo koneksnih okolinskih prostora koji ne verifikuju aksiom distributivnosti.

STAV 1.4.14. *Neka je* $(S = \Pi T_\alpha, \mathcal{U}, \tau)$ *okolinski proizvod-prostor okolinskih prostora* $(T_\alpha, \mathcal{U}^\alpha, \tau_\alpha)$, $\alpha \in (\alpha)$, *koji zadovoljavaju aksiom distributivnosti. Neka je za svako* $\alpha \in (\alpha)$ *dat neprazan skup* $A_\alpha \subset T_\alpha$. *Tada je*

$$(1.4.7) \qquad \tau \prod_{(\alpha)} A_\alpha = \prod_{(\alpha)} \tau_\alpha A_\alpha,$$

gde τ *i* τ_α *znače adherencije. S druge strane, imamo*

$$(1.4.8) \qquad \operatorname{int} \prod_{(\alpha)^*} A_\alpha = \prod_{(\alpha)^*} \operatorname{int} A_\alpha$$

gde je $(\alpha)^*$ *konačan skup indeksa iz skupa* (α), $A_\alpha = T_\alpha$ *za* $\alpha \in (\alpha) \setminus (\alpha)^*$ *i gde* int X *označuje interior skupa* X *u odnosu na prostor u kome skup* X *leži,*

Dokaz. Neka se tačka g iz S nalazi u levoj strani relacije (1.4.7). Zbog neprekidnosti projekcija $f_\alpha : S \to T_\alpha$, biće (vidi moju knjgu [1], § 6, stav 3) $f_\alpha(g) = g(\alpha) \in \tau_\alpha A_\alpha$ za svako $\alpha \in (\alpha)$. Zato se tačka g nalazi i u desnoj strani te relacije. Obratno, neka se tačka g nalazi u desnoj strani relacije (1.4.7). Tada je $f_\alpha(g) = g(\alpha) \in \tau_\alpha A_\alpha$ za svako $\alpha \in (\alpha)$. Prema tome, za svaku okolinu $Wg(\alpha)$ tačke $g(\alpha) \in T_\alpha$ postoji tačka $b(\alpha) \in A_\alpha$ sa osobinom $b(\alpha) \in Wg(\alpha)$. Specijalno, izuzev za neki konačan skup $(\alpha)^*$ indeksa α, možemo uzeti $Wg(\alpha) = T_\alpha$. Tada je $b(\alpha) \in Wg(\alpha)$ za $\alpha \in (\alpha)^*$ i $b(\alpha) \in T_\alpha$ za $\alpha \in (\alpha) \setminus (\alpha)^*$. To znači da tačka $b \in S$, koja ima osobinu da je $f_\alpha(b) = b(\alpha) \in A_\alpha$, $\alpha \in (\alpha)$, leži u skupu $\prod_{(\alpha)^*} Wg(\alpha)$ i zato $b \in \tau \prod_{(\alpha)} A_\alpha$.

Dokažimo sada relaciju (1.4.8). Neka se tačka g nalazi u levoj strani te relacije. Postoji dakle njena okolina $\prod_{(\alpha)^*} Wg(\alpha)$ koja je sadržana u skupu $\prod_{(\alpha)^*} A_\alpha$. Kako je zato $Wg(\alpha) \subset A_\alpha$ i $f_\alpha(g) \in Wg(\alpha)$, vidimo da je $g(\alpha) \in \operatorname{int} A_\alpha$ za svako α i zato $g \in \prod_{(\alpha)^*} \operatorname{int} A_\alpha$. Obratno, neka tačka g leži u desnoj strani (1.4.8). Za svako $\alpha \in (\alpha)^*$ postoji dakle okolina $Wg(\alpha)$ tačke $g(\alpha) \in A_\alpha$ sa osobinom $Wg(\alpha) \subset A_\alpha$; ako je $\alpha \in (\alpha) \setminus (\alpha)^*$, stavićemo $Wg(\alpha) = T_\alpha$. Vidimo tako da tačka g leži u skupu $\prod_{(\alpha)^*} Wg(\alpha) \subset \prod_{(\alpha)^*} A_\alpha$ i zato $g \in \operatorname{int} \prod_{(\alpha)^*} A_\alpha$, čime se završava dokaz stava.

Za uslove pod kojima će okolinski količnik prostor biti koneksan, čitalac može konsultovati moj rad [3].

1.5. Lokalno koneksni okolinski prostori

DEFINICIJA 1.5.1. *Unija svih koneksnih skupova u okolinskom prostoru* (E, τ) *koji sadrže tačku* a *iz* E, *zove se koneksna komponenta te tačke. Koneksnu komponentu tačke* a *označićemo sa* E (a).

DEFINICIJA 1.5.2. *Neka je* (A, σ) *potprostor okolinskog prostora* (E, τ). *Koneksne komponente* A(a) *tačaka* a $\in$ A *u prostoru* (A, σ) *zvaćemo jednostavno koneksne komponente skupa* A.

STAV 1.5.1. *Koneksne komponente* E(a) *tačaka* a $\in$ E *okolinskog prostora* (E, τ) *su koneksni skupovi u tome prostoru.*

Dokaz. To je neposredna posledica stava 1.1.22, q. e. d.

STAV 1.5.2. *Koneksne komponente* E(a) *i* E(b) *dve tačke* a, b $\in$ E *okolinskog prostora* (E, τ) *ili su jednake ili nemaju nijedne tačke zajedničke.*

Dokaz. Dovoljno je dokazati da je svaka komponenta $E(a)$, $a \in E$ u isti mah komponenta $E(b)$ i svake tačke $b \in E(a)$. Zaista, kad bi postojala tačka $x \in E(a)$, $x \notin E(b)$, prema definiciji 1.5.1. tačka x ne bi ležala ni u jednom koneksnom skupu koji sadrži tačku b, tj. tačka x ne bi mogla ležati ni u skupu $E(a)$, suprotno pretpostavci. Na isti način pokazuje se da ne može nastupiti ni slučaj $x \in E(b)$, $x \notin E(a)$ pa mora biti $E(a) = E(b)$, q. e. d.

STAV 1.5.3. *Koneksne komponente tačaka u okolinskom prostoru* (E, τ) *su zatvoreni skupovi u tome prostoru.*

Dokaz. Zaista, neka je $a \in E$ bilo koja tačka i $E(a)$ njena koneksna komponenta u prostoru (E, τ). Prema stavu 1.1.16, adherencija $\tau E(a)$ skupa $E(a)$ je koneksan skup pa, s obzirom na definiciju 1.5.1, mora biti $\tau E(a) \subset E(a)$, što znači da je $E(a)$ zatvoren skup, q. e. d.

Štaviše, važi stav opštiji od prethodnog:

STAV 1.5.4. *Neka je* A *zatvoren skup u okolinskom prostoru* (E, τ). *Tada je i svaka koneksna komponenta skupa* A *zatvoren skup u prostoru* (E, τ).

Dokaz. Neka je (A, σ) potprostor prostora (E, τ) i neka je $A(a)$ koneksna komponenta tačke $a \in A$ u prostoru (A, σ). Prema prethodnom stavu je $\sigma A(a) = A(a)$. Pretpostavimo da skup $A(a)$ nije zatvoren u prostoru (E, τ). Tada bi postojala jedna tačka $x \in \tau A(a)$ sa osobinom $x \notin A(a)$. Međutim je $x \in \tau A(a) \subset \tau A = A$ i zato $x \in A$ odakle

$$x \in A \cap \tau A(a) = \sigma A(a) = A(a)$$

suprotno pretpostavci. Zato je $\tau A(a) = A(a)$, q. e. d.

U stvari, taj dokaz pokazuje da važi ova opšta činjenica u bilo kojem okolinskom prostoru (E, τ). Neka je F zatvoren skup u tome prostoru. Tada je u tome prostoru zatvoren i svaki onaj podskup iz F koji je zatvoren u skupu F kao potprostoru prostora (E, τ).

S druge strane, za otvorene skupove važi analogon prethodnog stava (vidi stav 1.5.7), ali pod novim uslovima.

STAV 1.5.5. *Neka okolinski prostor* (E, τ) *ispunjava aksiom distributivnosti i neka je* $G \subset E$ *otvoren skup u tome prostoru. Tada je u tome prostoru otvoren i svaki podskup* $A \subset G$ *koji je otvoren u potprostoru* (G, σ) *prostora* (E, τ).

Dokaz. Neka je skup $A \subset G$ otvoren u prostoru (G, σ). Tada je (videti moju knjigu [1])

$$\operatorname{int}_G A = G \cap \operatorname{int}_E [A \cup (E \setminus G)] = A$$

gde int znači interior ili unutrašnjost skupa, a indeks uz int označuje prostor na koji se odnosi. Kako prostor (E, τ) ispunjava aksiom distributivnosti i kako je $\operatorname{int}_E G = G$, biće

$$\begin{aligned} G \cap \operatorname{int}_E [A \cup (E \setminus G)] &= \operatorname{int}_E [G \cap [A \cup (E \setminus G)]] \\ &= \operatorname{int}_E (G \cap A) = G \cap \operatorname{int}_E A. \end{aligned}$$

Zato je

$$\operatorname{int}_G A = G \cap \operatorname{int}_E A.$$

Ali iz $A \subset G$ sledi

$$\operatorname{int}_E A \subset \operatorname{int}_E G = G$$

i zato

$$G \cap \operatorname{int}_E A = \operatorname{int}_E A,$$

pa je

$$\operatorname{int}_G A = \operatorname{int}_E A.$$

No iz $\operatorname{int}_G A = A$ sledi dalje

$$\operatorname{int}_E A = A,$$

što znači da je skup A otvoren i u prostoru (E, τ), q. e. d.

STAV 1.5.6. *Neka su* A *i* B *dva τ-odeljena skupa u okolinskom prostoru* (E, τ). *Tada je svaka koneksna komponenta unije* $A \cup B$ *sadržana ili u skupu* A *ili u skupu* B.

Dokaz. To je neposredna posledica stava 1.1.20′, q. e. d.

DEFINICIJA 1.5.3. *Okolinski prostor* (E, τ) *je lokalno koneksan, ako i samo ako svaka tačka* $x \in E$ *ima lokalnu okolinsku bazu koja se sastoji iz τ-ko-*

neksnih skupova. Podskup $A \subset E$ *je lokalno koneksan u prostoru* (E, τ), *ako i samo ako je lokalno koneksan potprostor* (A, σ) *prostora* (E, τ).

Primer 1.5.1. Numerička prava R^1 je koneksni, lokalno koneksni prostor. Svi euklidski prostori R^n su koneksni i lokalno koneksni.

Primer 1.5.2. Prostor Q svih racionalnih tačaka kao potprostor numeričke prave R^1 nije lokalno koneksan.

Primer 1.5.3. Svaki diskretan prostor je lokalno koneksan (kod takvih prostora svaka tačka predstavlja jednu njenu okolinsku bazu, a svaki jednočlani skup je koneksan).

Primer 1.5.4. Graf $\Gamma = \left\{\left(x, \sin\frac{1}{x}\right) : x > 0\right\} \cup \{(0, y) : - -1 \leqslant y \leqslant +1\}$ je koneksan ali nije lokalno koneksan u dvodimenzionom euklidskom prostoru R^2.

Da li je koneksna dvotačka (vidi primer 1.1.3.) lokalno koneksna?

STAV 1.5.7. *Koneksne komponente otvorenih skupova u okolinskim lokalno koneksnim prostorima su otvoreni skupovi u tim prostorima. (Vidi takođe bez dokaza u Đ. Kurepa,* [3], *str. 467).*

Dokaz. Neka je G neprazan otvoren skup okolinskog prostora (E, τ) i sa $\operatorname{int}_E G$ označimo njegov interior u tome prostoru. Tada je $\operatorname{int}_E G = G$. Neka je $x \in G$ bilo koja tačka i neka je $G(x)$ njena koneksna komponenta u odnosu na G kao potprostor prostora (E, τ). Za dokaz stava dovoljno je dokazati da je $G(x) \subset \operatorname{int}_E G(x)$. Neka je $y \in G(x)$. Kako je $G(x) \subset G$, postoji neka okolina Vy tačke y sa svojstvom $Vy \subset G$. Kako je (E, τ) lokalno koneksan prostor, postoji koneksna okolina V^1y tačke y sa osobinom $V^1y \subset Vy$ i zato $V^1y \subset G$. No $G(x)$ je koneksan skup u prostoru (E, τ) pa kako je

$$y \in V^1y \cap G(x),$$

unija $V^1y \cup G(x)$ takođe je koneksna u tome prostoru (vidi stav 1.1.22). No $G(x)$ je koneksna komponenta tačke x, odakle sledi da mora biti $V^1y \subset G(x)$. A to znači da je $y \in \operatorname{int}_E G(x)$, q. e. d.

Specijalno, vidimo da su u lokalno koneksnim prostorima koneksne komponente pojedinih tačaka otvoreni skupovi u tim prostorima.

Ako taj stav uporedimo sa stavom 1.5.3, onda vidimo da analogon stava 1.5.3 za otvorene skupove važi tek u okolinskim lokalno koneksnim prostorima. S druge strane. ako stav 1.5.7. uporedimo sa stavom 1.5.5, onda vidimo da svojstvo lokalne koneksnosti, za koneksne komponente otvorenih skupova, može zameniti svojstvo distributivnosti okolinskog prostora.

STAV 1.5.8. *Neka je* (E, τ) *okolinski prostor koji vertifikuje aksiom tranzitivnosti. Ako su koneksne komponente otvorenih skupova u prostoru* (E, τ) *otvorene, taj je prostor lokalno koneksan.*

Dokaz. Pod uslovom stava su u prostoru (E, τ) interirori (unutrašnjosti) njegovih podskupova otvoreni i taj se prostor može rekonstruisati bazom otvorenih okolina. Zato je dovoljno pokazati da za svaku tačku $x \in E$ i svaki skup Vx sa osobinom $x \in \operatorname{int} Vx$ postoji koneksni otvoreni skup $V^0 x$ sa osobinom $V^0 x \subset \operatorname{int} Vx$. Neka je $k(x)$ koneksna komponenta tačke x u skupu $\operatorname{int} Vx$ kao potprostoru prostora (E, τ). Po pretpostavci, $k(x)$ je otvoren skup u prostoru (E, τ). Zato možemo staviti $k(x) = V^0 x$ pa je $V^0 x \subset \operatorname{int} Vx$, q. e. d.

Neposredna posledica prethodna dva stava je

STAV 1.5.9. *Okolinski prostor* (E, τ) *koji verifikuje aksiom tranzitivnosti je lokalno koneksan, ako i samo ako su koneksne komponente otvorenih skupova otvoreni skupovi u tome prostoru.*

Za topološke prostore imamo sledeći kriterijum koji se odnosi na topološku bazu.

STAV 1.5.10. *Topološki prostor je lokalno koneksan, ako i samo ako poseduje topološku bazu koja se sastoji od koneksnih skupova.*

Dokaz. Neka je (E, τ) lokalno koneksni topološki prostor i neka je o bilo koji njegov neprazni otvoreni skup. Za svako $x \in o$ postoji koneksna otvorena okolina Vx tačke x sa osobinom $Vx \subset o$. Prema tome, skup o može da se napiše u obliku $\cup \{Vx : x \in o\}$ takvih skupova Vx. To znači da familija svih otvorenih koneksnih okolina Vx tačaka $x \in E$ predstavlja jednu topološku bazu prostora (E, τ). Obratno, neka je B topološka baza prostora (E, τ) koja se sastoji od koneksnih skupova u tome prostoru. Neka je $x \in E$ bilo koja tačka i $0x$ bilo koja njena otvorena okolina. Postoji koneksna okolina $0^1 x \in B$ tačke x sa osobinom $0^1 x \subset 0x$. To znači da tačka x ima lokalnu okolinsku bazu koja se sastoji od koneksnih skupova, q. e. d.

Međutim, sledeći kriterijum važi za sve okolinske prostore.

STAV 1.5.11. *Okolinski prostor* (E, τ) *je lokalno koneksan, ako i samo ako za svaku tačku* $a \in E$ *i svaku okolinsku bazu* $\mathcal{V}_a$ *te tačke, njenu okolinsku bazu sačinjavaju i koneksne komponente iste tačke u odnosu na njene okoline* $Va \in \mathcal{V}_a$.

Dokaz. Taj stav je posledica definicije 1.5.3. i stava 1.1.6.

Izložićemo još jedan kriterijum lokalne koneksnosti okolinskih prostora uvodeći prethodno ovu definiciju (vidi moj rad [7]).

DEFINICIJA 1.5.3'. *Okolinski prostor* (E, τ) *je koneksan u malom u tački* a, *ako i samo ako za svaku okolinu* Va *tačke* a *postoji njena okolina* Wa, *sadržana u* Va, *sa svojstvom da za svaku tačku* $b \in Wa$ *postoji neki koneksni skup u kom su sadržane obe tačke* a, b *i koji je sadržan u skupu* Va.

To je uopštenje jedne definicije St. Mazurkievicz-a i H. Hahn-a (vidi H. Hahn [1]) u kojoj se umesto okolinama operiše sa otvorenim skupovima („Zusammenhang im Kleinen"). H. Hahn je pokazao u stvari da je kod metrizabilnih prostora svojstvo „Zusammenhang im Kleinen" u svakoj tački, ekvivalentno lokalnoj koneksnosti posmatranog prostora.

J. G. Hocking i G. S. Young su u [1] tu ekvivalentnost dokazali kod topoloških prostora. Sa definicijom 1.5.3′, ovde ćemo pokazati da analogna ekvivalentnost važi i kod okolinskih prostora.

Pre svega, očigledno je da su lokalno koneksni okolinski prostori koneksni u malom u svakoj tački. Pokažimo da važi i obratno:

STAV 1.5.11′. *Ako je okolinski prostor* (E, τ) *koneksan u malom u svakoj tački, on je lokalno koneksan.*

Dokaz. Uzmimo proizvoljnu tačku $a \in E$ i proizvoljnu njenu okolinu Va. Neka je $\mathrm{Komp}(a)$ koneksna komponenta tačke a u odnosu na Va. Postoji okolina $Wa \subset Va$ iste tačke sa osobinom da za svaku tačku $b \in Wa$ postoji koneksni skup $H(a, b)$ koji sadrži skup $\{a, b\}$ i koji je sadržan u okolini Va. Zato je unija

$$\cup \{H(a, b) : b \in Wa\}$$

koneksan skup sadržan u Va i, prema tome, sadržan u koneksnoj komponenti Komp (a). Prema tome,

$$Wa \subset \cup \{H(a, b) : b \in Wa\} \subset \mathrm{Komp}\ (a).$$

Drugim rečima, tačka a mora ležati u unutrašnjosti (interioru) komponente $\mathrm{Komp}(a)$. A to znači da koneksne komponente tačke a u odnosu na njene okoline Va takođe obrazuju jednu njenu okolinsku bazu. Prema stavu 1.5.11 to znači da je prostor (E, τ) lokalno koneksan, što je trebalo dokazati.

Neprekidna slika lokalno koneksnog prostora ne mora biti lokalno koneksan skup. U primeru 1.5.2. konstatovali smo da skup Q svih racionalnih tačaka kao potprostor numeričke prave R^1, nije lokalno koneksan. Ako na istom skupu Q kao nosiocu definišemo diskretan prostor, označimo ga sa Q_1, onda Q_1 je lokalno koneksan prostor. Identično preslikavanje $I : Q_1 \to Q$ prostora Q_1 na prostor Q je neprekidno, prostor Q_1 je lokalno koneksan, a njegova slika $I(Q_1) = Q$ nije lokalno koneksna. Ali imamo ovaj stav:

STAV 1.5.12. *Neka je* $\mathrm{f} : S \to T$ *neprekidno preslikavanje okolinskog prostora* (S, σ) *na okolinski prostor* (T, τ) *i neka ono ispunjava uslov*

$$\mathrm{f}(\mathrm{int}\,\mathrm{A}) = \mathrm{int}(\mathrm{f}(\mathrm{A})) \tag{1.5.1}$$

za svaki skup $\mathrm{A} \subset \mathrm{S}$. *Ako je prostor* (S, σ) *lokalno koneksan, onda je lokalno koneksan i prostor* (T, τ).

(*U stvari, kako je* f *neprekidno, uslov* $f(\operatorname{int} A) \supset \operatorname{int} f(A)$ *je već ispunjen, (vidi stav* 3, § 6, *moje knjige* [1]) *pa za jednakost* (1.5.1.) *bilo bi dovoljno pretpostaviti još uslov* $f(\operatorname{int} A) \subset \operatorname{int} f(A)$).

Dokaz. Uzmimo bilo koju tačku $s \in S$ i bilo koju okolinu $Wf(s)$ tačke $f(s)$ u prostoru (T, τ). Kako je f neprekidna funkcija, a prostor (S, σ) lokalno koneksan, postoji koneksna okolina Vs tačke s sa osobinom

$$f(Vs) \subset Wf(s).$$

Međutim je $s \in \operatorname{int} Vs$ pa je zato

$$f(s) \in f(\operatorname{int} Vs) = \operatorname{int}(f(Vs)) \subset \operatorname{int} Wf(s) \subset Wf(s).$$

Kako je dalje V_s koneksan skup u prostoru (S, σ), njegova neprekidna slika $f(Vs)$ je koneksan skup u prostoru (T, τ) i zato sadržan u koneksnoj komponenti $Kf(s)$ tačke $f(s)$ u odnosu na okolinu $Wf(s)$ tačke $f(s)$. Zato je

$$f(s) \in \operatorname{int} f(Vs) \subset \operatorname{int} Kf(s) \subset Wf(s),$$

tj. koneksne komponente $Kf(s)$ tačke $f(s)$ u odnosu na njene okoline $Wf(s)$ obrazuju jednu okolinsku bazu iste tačke, pa je prema stavu 1.5.11 prostor (T, τ) lokalno koneksan, čime se završava dokaz.

Primetimo da ako je skup $A \subset S$ otvoren, uslov (1.5.1) znači da je tada njegova slika $f(A) \subset T$ otvoren skup (tj. f je *otvoreno preslikavanje*).

Kao posledicu prethodnog imamo

STAV 1.5.12′. *Svojstvo lokalne koneksnosti je topološka invarijanta.*

Dokaz. Neka je $f: S \to T$ obostrano jednoznačno preslikavanje okolinskog prostora (S, σ) na okolinski prostor (T, τ) i neka ono ispunjava uslov (1.5.1.). Tada je f homeomorfizan (vidi stav 5, § 6, moje knjige [1]) i prema stavu 1.5.12 ili su oba prostora lokalno koneksna ili nijedan, što je trebalo dokazati.

STAV 1.5.13. *Neka je* $(S = \Pi\, T_\alpha, \mathcal{U})$ *okolinski proizvod-prostor okolinskih prostora* $(T_\alpha, \mathcal{U}^\alpha)$, $\alpha \in (\alpha)$, *koji zadovoljavaju aksiomu distributivnosti. Ako je* $g \in S$ *bilo koja tačka i* $K(g(\alpha))$ *koneksna komponenta tačke* $g(\alpha) \in T_\alpha$ *u prostoru* $(T_\alpha, \mathcal{U}^\alpha)$, $\alpha \in (\alpha)$, *tada je*

$$K(g) = \prod_{(\alpha)} Kg(\alpha)$$

koneksna komponenta tačke g *u prostoru* $(S, \mathcal{U})$.

Dokaz. Kako su skupovi $K(g(\alpha))$ koneksni u prostorima $(T_\alpha, \mathcal{U}^\alpha)$, $\alpha \in (\alpha)$, prema stavu 1.4.7, skup $K(g)$ je koneksan u prostoru $(S, \mathcal{U})$. Pretpostavimo da postoji koneksan skup $H \subset S$ sa osobinom da je $K(g) \subset H$. Tada je projekcija $f_\alpha(H) = H_\alpha \subset T_\alpha$ koneksan skup u prostoru $(T_\alpha, \mathcal{U}^\alpha)$ i pri tome je $f_\alpha(K(g)) \subset f_\alpha(H) = H_\alpha$ koneksan skup u istom prostoru. No kako je $f_\alpha(K(g)) = K(g(\alpha))$, a $K(g(\alpha))$ je koneksna komponenta tačke $g(\alpha) \in T_\alpha$, mora biti $H_\alpha = K(g(\alpha))$. Zato je

$$H = \prod_{(\alpha)} H_\alpha = \prod_{(\alpha)} K(g(\alpha)) = K(g).$$

Time je dokaz završen.

STAV 1.5.14. *Neka je data beskonačna familija lokalno koneksnih okolinskih prostora* $(T_\alpha, \mathcal{U}^\alpha)$, $\alpha \in (\alpha)$, *koji zadovoljavaju aksiomu distributivnosti i koji su, izuzev za neki konačan skup* $(\alpha)^{**}$ *indeksa, koneksni. Tada je i njihov okolinski proizvod-prostor* $(S = \prod_{(\alpha)} T_\alpha, \mathcal{U})$ *lokalno koneksan.*

Dokaz. Neka je $g \in S$ bilo koja tačka pa uzmimo bilo koju njenu okolinu oblika (vidi stav 1.4.4) $\prod_{(\alpha)^*} Wg(\alpha)$ gde je $(\alpha)^* \subset (\alpha)$ konačan skup. Neka je $K(g(\alpha))$ koneksna komponenta tačke $f_\alpha(g) = g(\alpha) \in Wg(\alpha)$ u odnosu na okolinu $Wg(\alpha)$ iste tačke, pri čemu je $Wg(\alpha) = T_\alpha$ za $\alpha \in (\alpha) \setminus (\alpha)^*$. Kako je po pretpostavci $g(\alpha) \in \operatorname{int} K(g(\alpha))$ za $\alpha \in (\alpha)^* \cup (\alpha)^{**}$ a $K(g(\alpha)) = \operatorname{int} K(g(\alpha)) = T_\alpha$ za $\alpha \in (\alpha) \setminus ((\alpha)^* \cup (\alpha)^{**})$ (jer, za te indekse α svi prostori $(T_\alpha, \mathcal{U}^\alpha)$ su koneksni!), vidimo da je

$$g \in \prod_{(\alpha)^* \cup (\alpha)^{**}} \operatorname{int} Kg(\alpha).$$

Prema relaciji (1.4.8) vidimo tako da mora biti i

$$g \in \operatorname{int} \prod_{(\alpha)^* \cup (\alpha)^{**}} K(g(\alpha)).$$

S druge strane, prema stavu 1.5.13 je

$$K(g) = \prod_{(\alpha)^* \cup (\alpha)^{**}} K(g(\alpha))$$

i zato

$$g \in \operatorname{int} K(g) = \operatorname{int} \prod_{(\alpha)^* \cup (\alpha)^{**}} K(g(a)) \subset \prod_{(\alpha)^* \cup (\alpha)^{**}} K(g(\alpha)) \subset \prod_{(\alpha)^*} Wg(\alpha),$$

gde je $K(g)$ koneksna komponenta tačke g u odnosu na njenu okolinu $\prod_{(\alpha)^*} Wg(\alpha)$. Vidimo da za svaku tačku $g \in S$ i svaku njenu okolinu, tačka g leži u interioru koneksne komponente iste tačke u odnosu na tu okolinu, pa je prema stavu 1.5.11, $(S, \mathcal{U})$ lokalno koneksan, čime se završava dokaz.

Važi i obrat prethodnog stava:

STAV 1.5.15. *Neka je data beskonačna familija okolinskih prostora* $(T_\alpha, \mathcal{U}^\alpha)$, $\alpha \in (\alpha)$, *koji zadovoljavaju aksiomu distributivnosti i neka je okolinski proizvod-prostor* $(S = \Pi\, T_\alpha, \mathcal{U})$ *tih prostora lokalno koneksan. Tada su svi prostori faktori* $(T_\alpha, \mathcal{U}^\alpha)$, $\alpha \in (\alpha)$, *lokalno koneksni i, izuzev za neki konačan skup indeksa* α, *svi ti prostori su koneksni.*

Dokaz. Neka je $A \subset S$ bilo koji neprazni podskup u prostoru $(S, \mathcal{U})$ i neka je

$$g \in \operatorname{int} A$$

u tome prostoru. Postoji dakle okolina

$$Vg = \prod_{(\alpha)^*} Wg(\alpha)$$

sadržana u skupu A. Međutim je

$$f_\alpha(Vg) = Wg(\alpha) \subset f_\alpha(A)$$

pa je zato $g(\alpha) \in \operatorname{int} f_\alpha(A)$. Drugim rečima, dokazali smo da je

$$f_\alpha(\operatorname{int} A) \subset \operatorname{int} f_\alpha(A),$$

pa kako su sve projekcije f_α, $\alpha \in (\alpha)$, neprekidne, prema stavu 1.5.12 svi prostori $(T_\alpha, \mathcal{U}^\alpha)$ su lokalno koneksni. Dokazaćemo sada da među prostorima $(T_\alpha, \mathcal{U}^\alpha)$, $\alpha \in (\alpha)$, može biti najviše konačno mnogo prostora koji nisu koneksni. Pretpostavimo naime suprotno: postoji beskonačan skup $(\alpha)_1 \subset (\alpha)$ indeksa α tako da za $\alpha \in (\alpha)_1$ prostori $(T_\alpha, \mathcal{U}^\alpha)$ nisu koneksni. Uzmimo jednu tačku $g \in S$ i formirajmo sve koneksne komponente $Kg(\alpha)$ tačaka $g(\alpha) \in T_\alpha$, $\alpha \in (\alpha)$. Tada je prema stavu 1.5.13,

$$K(g) = \prod_{(\alpha)} K(g(\alpha))$$

koneksna komponenta tačke g u prostoru $(S, \mathcal{U})$. Međutim, kako je $K(g(\alpha)) \neq T_\alpha$ za beskonačno mnogo indeksa $\alpha \in (\alpha)_1$, ne postoji nijedna okolina

$$\prod_{(\alpha)^*} Wg(\alpha)$$

tačke g koja bi bila sadržana u skupu $K(g)$, jer je $(\alpha)^* \subset (\alpha)$ konačan skup i $Wg(\alpha) = T_\alpha$ za $\alpha \in (\alpha) \setminus (\alpha)^*$. Zato koneksna komponenta $K(g)$ ne bi bila otvorena u lokalno koneksnom prostoru $(S, \mathcal{U})$, a to je nemogućno prema stavu 1.5.7. Drugim rečima, najviše konačno mnogo prostora-faktora u prostoru $(S, \mathcal{U})$ nisu koneksni, q. e. d.

Specijalno važe prethodna dva stava u slučaju topološkog proizvoda topoloških prostora pa ćemo tu činjenicu stilizovati u obliku ovog jednog stava:

STAV 1.5.16. *Topološki proizvod topoloških prostora je lokalno koneksan, ako i samo ako su svi prostori-faktori lokalno koneksni i ako najviše konačan broj tih prostora nije koneksan.*

Razmotrićemo sada pitanje da li se svojstvo lokalne koneknosti sa datih lokalno koneksnih prostora prenosi na njihove okolinske količnik-prostore. Neka je (S, σ) dati lokalno koneksni okolinski prostor, neka je T dati neprazni skup i $f: S \to T$ preslikavanje prostora (S, σ) na skup T. Tada na skupu T možemo definisati (vidi moj rad [4]) okolinski prostor (T, τ) na sledeći način. Ako je $x \in S$ proizvoljna tačka i $f(x) \in T$ njena slika u skupu T, podskup $Wf(x) \subset T$, koji sadrži tačku $f(x)$, stavićemo u okolinsku bazu $\mathcal{W}$ prostora (T, τ), ako i samo ako skup

$$f^{-1}(Wf(x)) \subset S$$

pripada okolinskoj bazi prostora (S, σ). Pokazuje se tada da je f neprekidna funkcija i da je za svako $x \in S$, maksimalna okolinska baza tačke $f(x)$ opsežnija od maksimalne okolinske baze iste tačke bilo kog okolinskog prostora na T za koji je f još uvek neprekidna funkcija. Okolinski prostor (T, τ) možemo zvati indukovan okolinski prostor, ili okolinski količnik-prostor prostora (S, σ), mada se, u skladu sa već uobičajenom terminologijom u opštoj topologiji, tim imenom naziva onaj specijalan slučaj u kome se za T uzima skup-količnik S/ρ, gde je ρ jedna data relacija ekvivalencije na skupu S, a za funkciju f funkcija $f(x) = \mathrm{kl}_\rho [x]$, $x \in S$, gde $\mathrm{kl}_\rho [x]$ znači klasu ekvivalencije tačke $x \in S$ u odnosu na relaciju ekvivalencije ρ.

STAV 1.5.17. *Neka je okolinski prostor* (S, σ) *lokalno koneksan. Tada je lokalno koneksan i njegov okolinski količnik-prostor* (T, τ).

Dokaz. Uzmimo bilo koju tačku $x \in S$ i proizvoljnu okolinu $Wf(x)$ tačke $f(x)$ u prostoru (T, τ). Označimo sa $Vf(x)$ koneksnu komponentu tačke $f(x)$ u odnosu na skup $Wf(x)$. Tada je

$$f^{-1}(Vf(x)) \subset f^{-1}(Wf(x)).$$

Kako je skup $f^{-1}(Wf(x))$ jedna okolina tačke x u prostoru (S, σ), a taj je prostor lokalno koneksan, neka je Vx koneksna komponenta tačke x u odnosu na $f^{-1}(Wf(x))$, tj. jedna koneksna okolina iste tačke sadržana u tome skupu. Kako je funkcija f neprekidna, slika $f(Vx)$ je koneksna u (T, τ) i zato sadržana u koneksnoj komponenti $Vf(x)$. Zato je $Vx \subset f^{-1}(Vf(x))$, pa je $Vf(x)$ takođe neka okolina tačke $f(x)$ jer je $f^{-1}(Vf(x))$ neka okolina tačke x. Zato je prostor (T, τ) lokalno koneksan, što je trebalo dokazati.

Naravno, dokazani stav važi specijalno i kada je $T = S/\rho, f(x) = \mathrm{kl}_\rho [x]$, $x \in S$, (vidi takođe moj rad [7]).

Lako je proveriti da okolinski količnik prostori (T, τ) verifikuju aksiom distributivnosti ako isti verifikuje i prostor (S, σ). Međutim, aksiom tranzitivnosti ne prenosi se sa datih okolinskih prostora pa njihove količnik prostore, ako se ovi definišu na gore izloženi način, tj. ako se za primitivni pojam uzme pojam okoline. Na tu mi je činjenicu ukazao M. Hušek (Prag) navodeći sledeći primer E. Čeha [2]. Za skupove S, T, adherencije σ, τ i funkciju f uzima se ovo:

$$S = \{a, b', b'', c\};$$

$$\sigma a = \{a, b'\}, \ \sigma b' = \{b'\}, \ \sigma b'' = \{b'', c\}, \ \sigma c = \{c\};$$

$$\sigma X = \cup \{\sigma x : x \in X\}, \ X \subset S.$$

$$T = \{\alpha, \beta, \gamma\};$$

$$\tau \alpha = \{\alpha, \beta\}, \ \tau \beta = \{\beta, \gamma\}, \ \tau \gamma = \{\gamma\};$$

$$\tau Y = \cup \{\tau y : y \in Y\}, \ Y \subset T.$$

$$f(a) = \alpha, \ f(b') = f(b'') = \beta, \ f(c) = \gamma.$$

Prostor (S, σ) verifikuje aksiom tranzitivnosti, a prostor (T, τ) ne verifikuje taj aksiom. Međutim, funkcija f je neprekidna i inverzne slike okolina tačaka u (T, τ) obrazuju jednu okolinsku bazu prostora (S, σ).

Zato ćemo u kategoriji okolinskih prostora koji verifikuju aksiom trazitivnosti, količnik-prostore definisati posredstvom pojma otvorenog skupa kao primitivnog.

Ako okolinski prostor (S, σ) verifikuje aksiom tranzitivnosti, on se može rekonstruisati familijom $\mathcal{O}$ otvorenih skupova koja ispunjava ova dva aksioma (vidi moju knjigu [1]): 1°. Prazan skup Λ i skup S su članovi familije $\mathcal{O}$.. 2°. Unija proizvoljno mnogo članova familije $\mathcal{O}$ je član iste familije.

Uzmimo sada neprazan skup T i preslikavanje $f: S \to T$ skupa S na skup T pa na T definišimo familiju $\mathcal{B}$ skupova $B \subset T$ na već uobičajeni način u topologiji, stavljajući

$$B \in \mathcal{B}$$

ako i samo ako je

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{O}.$$

Lako je proveriti da familija $\mathcal{B}$ takođe verifikuje navedena dva aksioma pa posredstvom te familije na skupu T definisani okolinski prostor (T, τ) takođe verifikuje aksiom tranzitivnosti. Pokazuje se da je f neprekidna funkcija i da je familija $\mathcal{B}$ finija od svake familije $\mathcal{B}_1$ otvorenih skupova na T za koju je

f još uvek neprekidna funkcija. Tako definisani prostor (T, τ) u kategoriji okolinskih prostora koji verifikuju aksiom tranzitivnosti možemo zvati količnikom prostora (S, σ) mada je uobičajeno da se taj naziv zadržava za slučaj kada je $T = S/\rho$, gde je ρ jedna relacija ekvivalencije na S, i $f(x) = \mathrm{kl}_\rho [x]$, $x \in S$.

STAV 1.5.18. *U kategoriji okolinskih prostora koji verifikuju aksiom tranzitivnosti, svojstvo lokalne koneksnosti prenosi se sa datog prostora na njegov količnik-prostor.*

Dokaz. Stav ćemo dokazati na taj način što ćemo pokazati da su u količnik prostoru (T, τ) prostora (S, σ) koneksne komponente otvorenih skupova otvorene. Neka je B proizvoljan otvoreni skup u prostoru (T, τ) i neka je $b \in B$ jedna proizvoljna tačka tog skupa. Sa $B(b)$ označićemo koneksnu komponentu tačke b u odnosu na B. Tada je skup $f^{-1}(B)$ otvoren skup u prostoru (S, σ). Za trenutak ćemo sa $f^{-1}(b)$ označiti jednu određenu tačku skupa $f^{-1}(B)$, a sa $S(f^{-1}(b))$ označićemo koneksnu komponentu tačke $f^{-1}(b)$ u odnosu na $^{-1}(B)$. Kako je prostor (S, σ) lokalno koneksan, skup $S(f^{-1}(b))$ je otvoren u prostoru (S, σ). Njegova neprekidna slika

$$f(S(f^{-1}(b)))$$

je koneksna i, sem toga je

$$b \in f(S(f^{-1}(b))) \subset B.$$

No, po pretpostavci je $B(b)$ koneksna komponenta tačke b u odnosu na B, pa zato mora biti

$$f(S(f^{-1}(b))) \subset B(b)$$

odakle sledi

$$S(f^{-1}(b)) \subset f^{-1}(B(b)),$$

što znači da skup $B(b)$ mora biti otvoren u prostoru (T, τ), jer je otvoren u prostoru (S, σ) i skup $S(f^{-1}(b))$.

Zaista, kako je koneksna komponenta $B(b)$ tačke b ujedno koneksna komponenta svake tačke $x \in B(b)$, mora biti $S(f^{-1}(x) \subset f^{-1}(B(b))$ za svako $x \in B(b))$, odakle

$$\bigcup_{x \in B(b)} S(f^{-1}(x)) \subset f^{-1}(B(b))$$

i zato

$$B(b) \subset f(\bigcup_{x \in B(b)} S(f^{-1}(x))) \subset B(b).$$

Prema tome je

$$\bigcup_{x \in B(h)} S(f^{-1}(x)) = f^{-1}(B(b)),$$

jer su svi skupovi $S(f^{-1}(x))$ otvoreni u prostoru (S, σ) pa je i njihova unija otvoren skup u tom prostoru. A to znači da skup $B(b)$ mora biti otvoren u prostoru (T, τ). Time je dokaz stava završen.

Specijalno stav važi kada je $T = S/\rho$, $f(x) = \mathrm{kl}_\rho[x]$, $x \in S$. Štaviše, u slučaju topoloških prostora, dobija se odatle poznat stav:

STAV 1.5.19. *Ako je topološki prostor lokalno koneksan, takav je i njegov količnik.*

2. $\mathcal{U}$-KONEKSNOST UNIFORMNIH PROSTORA I δ- KONEKSNOST δ- PROSTORA EFREMOVIČA — JU. M. SMIRNOVA

Koneksnost okolinskih i, uopšte, topoloških prostora označavali smo i kao τ-koneksnost, gde τ označuje topološku ili uopštenu topološku strukturu okolinskih prostora. U radu [1] su S. G. Mrovka i W. J. Pervin uveli pojam uniformne koneksnosti uniformnih prostora i pojam ekvikoneksnosti kod δ-prostora V. V. Efremovič — Ju. M. Smirnova (za definiciju tih prostora vidi na pr. moju knjigu [1]). Uniformnu koneksnost označavaćemo sa $\mathcal{U}$ -koneksnost a ekvikoneksnost sa δ-koneksnost. Pre no što pređemo na definicije tih pojmova, istaknimo sledeće činjenice koje će biti korisne u daljem izlaganju.

Neka su dati δ-prostori

$$(E_1, \delta_1, \tau_1), (E_2, \delta_2, \tau_2), (E_3, \delta_3, \tau_3)$$

i neka je $f: E_1 \to E_2$ preslikavanje prvog prostora u drugi. Kao što je poznato, f je δ-funkcija, ako i samo ako iz $(M, N) \notin \delta_2$ sledi $(f^{-1}(M), f^{-1}(N)) \notin \delta_1$. Neka je f δ-funkcija i neka je $g: E_2 \to E_3$ takođe δ-funkcija. Tada je složena funkcija $g \circ f$ δ-funkcija. Zaista, neka je $(P, Q) \notin \delta_3$. Tada je $(g^{-1}(P), g^{-1}(Q)) \notin \delta_2$ pa je zato i

$$(f^{-1}(g^{-1}(P)), f^{-1}(g^{-1}(Q))) = ((g \circ f)^{-1}(P), (g \circ f)^{-1}(Q)) \notin \delta_1,$$

tj. $g \circ f$ je δ-funkcija.

Slično tome, neka su dati uniformni prostori

$$(E_1, \mathcal{U}_1, \tau_1), (E_2, \mathcal{U}_2, \tau_2), (E_3, \mathcal{U}_3, \tau_3)$$

i neka je $f: E_1 \to E_2$ preslikavanje prvog prostora u drugi. Kao što je poznato, f je $\mathcal{U}$-funkcija, ako i samo ako za svako $V_2 \in \mathcal{U}_2$ važi $f^{-1}(V_2) \in \mathcal{U}_1$, gde je

$$f^{-1}(V_2) = \{(x, y) : x, y \in E_1 \text{ i } (f(x), f(y)) \in V_2\}$$

Ako je f jedna $\mathcal{U}$-funkcija i ako je $g: E_2 \to E_3$ takođe $\mathcal{U}$-funkcija, kao i maločas pokazuje se da je tada složena funkcija $g \circ f$ takođe jedna $\mathcal{U}$-funkcija.

Napomenimo još da diskretan prostor $\{0,1\}$, koji se sastoji od dve tačke, postaje δ-prostor kad se bliskim proglase oni njegovi podskupovi čiji presek nije prazan (vidi takođe napomenu posle definicije 1.3.2). Jedina preslikavanja δ-prostora (E, δ, τ) u prostor $\{0,1\}$ jesu konstante i one su, očevidno, δ-neprekidne.

Evo sada definicije δ-koneksnosti δ-prostora (vidi takođe stav 1.3.1):

DEFINICIJA 2.1. *δ-prostor* (E, δ, τ) *je δ-koneksan, ako i samo ako nema δ-preslikavanja prostora* (E, δ, τ) *na diskretan prostor* $\{0,1\}$.

Uvedenu definiciju opravdava činjenica da δ-koneksnost nije ekvivalentna τ-koneknosti. Na primer, skup Q svih racionalnih brojeva, kao potprostor numeričke prave R^1, nije τ-koneksan. Međutim, prostor Q je ekvikoneksan kao δ-prostor definisan na sledeći način. Neka je na partitivnom skupu $P(R^1)$ definisana binarna relacija δ ovako: za $M, N \subset R^1$ je $(M, N) \in \delta$ ako i samo ako je $D(M, N) = 0$, gde $D(M,N)$ znači rastojanje skupova M, N u odnosu na uobičajenu metriku $d(x,y) = |x - y|$, $x, y \in R^1$, numeričke prave. Tada R^1 postaje δ-prostor pa Q postaje njegovim δ-potprostorom ako skupove $A, B \subset Q$ budemo smatrali blizu jedan drugom, ako i samo ako su oni blizu jedan drugom u R^1. S druge strane, smatrajući diskretan prostor $\{0,1\}$ takođe metričkim prostorom stavljajući $d(0,0) = d(1,1) = 0$ i $d(0,1) = 1$, možemo i u njega uvesti delta-strukturu na isti način i pri tome izlazi da u prostoru $\{0,1\}$ skupovi $\{0\}$ i $\{1\}$ nisu blizu jedan drugom. Uzmimo sada bilo koju δ-funkciju f definisanu na Q sa vrednostima u prostoru $\{0,1\}$. Kako su $\{0\}$ i $\{1\}$ dva uzajamno daleka skupa u $\{0,1\}$, to $f^{-1}(\{0\})$ i $f^{-1}(\{1\})$ moraju biti uzajamno daleki skupovi u prostoru Q. No nije teško videti da jedan od skupova $f^{-1}(\{0\})$ i $f^{-1}(\{1\})$ mora biti prazan. U protivnom slučaju bili bi to pravi delovi skupa Q čija unija daje upravo skup Q. Kako su oni uzajamno daleki u Q, moraju oni biti uzajamno daleki i u R^1 odakle bi sledilo $D(f^{-1}(\{0\}), f^{-1}(\{1\})) = \eta > 0$. To znači da bi na R^1 postajao interval $(\alpha, \beta) \subset R^1$ sa osobinom da je $d(\alpha, \beta) = \eta > 0$ u kome ne bi bilo tačaka iz Q, a to je nemoćno, jer je Q svuda gust na R^1. Prema tome, ili je $f^{-1}(\{0\})$ prazno ili je $f^{-1}(\{1\})$ prazno, pa f mora biti konstanta.

Videćemo da isti primer opravdava i definiciju $\mathcal{U}$-koneksnosti. Međutim, pre no što je izložimo, dobro će biti da podsetimo na uzajamnu vezu koja postoji između uniformnih i δ-prostora. Neka je (E, δ, τ) δ-prostor pri čemu δ označuje njegovu δ-strukturu, a τ označuje topologiju definisanu na E tom strukturom. Ako su skupovi $A, B \in P(E)$ uzajamno daleki, tj. ako je $(A, B) \notin \delta$, formiraćemo podskup

$$U(A, B) = C[(A \times B) \cup (B \times A)] \subset E \times E$$

kombinovanog proizvoda $E \times E$. Očigledno da taj skup sadrži dijagonalu

$$\triangle = \{(x, x) : x \in E\}.$$

Kada A, B prolaze familijom svih uzajamno dalekih skupova u δ-prostoru (E, δ, τ) i kada formiramo familiju $\mathscr{B}$ svih konačnih preseka odgovarajućih skupova $U(A, B)$, pokazuje se da je $\mathscr{B}$ jedna baza neke uniformne strukture $\mathcal{U}$ na skupu E, saglasne sa topologijom τ δ-prostora (E, δ, τ). Drugim rečima, taj je prostor ujedno uniformni prostor uniformne strukture $\mathcal{U}$. Obratno, neka je $(E, \mathcal{U}, \tau)$ uniformni prostor (A. Weil-a), pri čemu $\mathcal{U}$ znači njegovu uniformnu strukturu, a τ topologiju na E definisanu tom strukturom. Na skupu $P(E)$ definisaćemo binarnu relaciju δ na sledeći način : za $A, B \in P(E)$ stavićemo $(A, B) \in \delta$, ako i samo ako za svako $V \in \mathcal{U}$ postoje tačke $x \in A$ i $y \in B$ tako da je $(x, y) \in V$. Pokazuje se tada da je δ jedna δ-struktura na skupu E saglasna sa topologijom τ uniformnog prostora $(E, \mathcal{U}, \tau)$. Drugim rečima, taj je prostor ujedno jedan δ-prostor δ-strukture δ. Kaže se takođe da je δ jedna δ-struktura ne E indukovana uniformnom strukturom $\mathcal{U}$.

Evo sada definicije $\mathcal{U}$-koneksnosti:

DEFINICIJA 2.2. *Uniformni prostor* $(E, \mathcal{U}, \tau)$ *je* $\mathcal{U}$*-koneksan, ako i samo ako nema* $\mathcal{U}$*-preslikavanja prostora* $(E, \mathcal{U}, \tau)$ *na diskretan prostor* $\{0,1\}$ *shvaćen kao uniformni prostor diskretne uniformne strukture.*

Napomenimo da su jedina preslikavanja prostora $(E, \mathcal{U}, \tau)$ *u* prostor $\{0,1\}$ konstante koja su, očevidno, $\mathcal{U}$-neprekidna.

Pokazaćemo sada da je svaka $\mathcal{U}$-funkcija u isti mah i neka δ-funkcija. Neka je.

$$f : S \to T$$

bilo koja $\mathcal{U}$-funkcija koja preslikava uniformni prostor $(S, \mathcal{U}, \sigma)$ u uniformni prostor $(T, \mathcal{W}, \tau)$, gde $\mathcal{U}$ i $\mathcal{W}$ znače uniformne strukture, a σ i τ odgovarajuće topologije definisane tim strukturama. Na $P(S)$ odnosno $P(T)$ definišimo binarnu relaciju δ_1 odnosno δ_2 stavljajući $(A, B) \in \delta_1$ odnosno $(P, Q) \in \delta_2$, ako i samo ako za svako $V \in \mathcal{U}$ odnosno $W \in \mathcal{W}$ postoje tačke $x \in A$, $y \in B$ odnosno $z \in P$, $w \in Q$ tako da je

$$(x, y) \in V \quad \text{odnosno} \quad (z, w) \in W.$$

Kao što smo već pokazali, tako definisane binarne relacije δ_1 i δ_2 su δ-strukture saglasne respektivno sa uniformnim strukturama $\mathcal{U}$ odnosno $\mathcal{W}$. Uzmimo sada da je $(P, Q) \notin \delta_2$. Pokazaćemo da tada mora biti i

$$(f^{-1}(P), f^{-1}(Q)) \notin \delta_1. \tag{2.1}$$

Iz prve pretpostavke sledi naime da postoji bar jedno $W^0 \in \mathcal{W}$ sa osobinom

$$(P \times Q) \cap W^0 = \Lambda.$$

Ako relacija (2.1) ne bi bila tačna, za svako $V \in \mathcal{U}$ postojale bi tačke $x \in f^{-1}(P)$, $y \in f^{-1}(Q)$ sa svojstvom $(x, y) \in V$. Kako je f $\mathcal{U}$-funkcija, za svako $W \in \mathcal{W}$ postoji $V \in \mathcal{U}$ tako da iz $(a, b) \in V$ sledi $(f(a), f(b)) \in W$.

Specijalno, za $W^0 \in \mathcal{W}$ postoji neko $V^0 \in \mathcal{U}$ tako da iz $(a, b) \in V^0$ sledi $(f(a), f(b)) \in W^0$.

No kako postoje tačke

$$x_0 \in f^{-1}(P), \quad y_0 \in f^{-1}(Q)$$

sa svojstvom $(x_0, y_0) \in V^0$ to mora biti i $(f(x_0), f(y_0)) \in W^0$ i zato bi bilo

$$(P \times Q) \cap W^0 \neq \Lambda,$$

jer je $f(x_0) \in P$ i $f(y_0) \in Q$. Tako smo došli do protivurečnosti. Prema tome, $\mathcal{U}$-funkcija f mora biti i δ-funkcija.

Odatle neposredno sledi da je prostor Q racionalnih brojeva kao uniformni potprostor numeričke prave R^1, shvaćene kao uniformni prostor (vidi moju knjigu [1], str. 108), $\mathcal{U}$-koneksan. Vidimo tako da ima prostora koji nisu τ-koneksni, ali su $\mathcal{U}$-koneksni i δ-koneksni. Obratno, τ-koneksni δ-prostori i uniformni prostori su ujedno i δ-koneksni i $\mathcal{U}$-koneksni. To sledi iz činjenice da su $\mathcal{U}$-funkcije i δ-funkcije neprekidne, a ako je uniformni prostor (δ-prostor) τ-koneksan on je ujedno i $\mathcal{U}$-koneksan (δ-koneksan) jer su tada $\mathcal{U}$-preslikavanja (δ-preslikavanja) posmatranog prostora na diskretan prostor $\{0,1\}$ neprekidna pa moraju biti konstante.

Sledećim stavom iskazuje se ekvivalentnost pojmova $\mathcal{U}$-koneksnosti i δ-koneksnosti, a u isti mah izlažu se i izvesni kriterijumi.

STAV 2.1. (S. G. MRÓVKA i W. J. PERVIN). *Neka je* $(\mathrm{E}, \mathcal{U}, \tau)$ *uniforman prostor i neka je* $\delta \subset \mathrm{P}(\mathrm{E}) \times \mathrm{P}(\mathrm{E})$ *δ-struktura definisana na skupu* E *uniformnom strukturom* $\mathcal{U}$. *Tada su sledeća svojstva međusobno ekvivalentna:*

1) δ-prostor $(\mathrm{E}, \delta, \tau)$ *je δ-koneksan.*

2) Za svaku δ-funkciju $\mathrm{f}: \mathrm{E} \to \mathrm{R}^1$ *skup* $\mathrm{f}(\mathrm{E})$ *je svuda gust na nekom intervalu numeričke prave* R^1.

3) Za svaki pravi deo $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$ *važi*

$$(\mathrm{A}, \mathrm{E} \setminus \mathrm{A}) = (\mathrm{A}, C\mathrm{A}) \in \delta,$$

tj. svaki pravi deo A *skupa* E *blizu je svome komplementu* $\mathrm{E} \setminus \mathrm{A} = CA$.

4) Apsolutno δ-proširenje $(\mathrm{E}^*, \delta^*, \tau^*)$ *(kompaktifikacija Ju. M. Smirnova) je τ^*-koneksno.*

5) Uniformni prostor $(\mathrm{E}, \mathcal{U}, \tau)$ *je* $\mathcal{U}$-koneksan.

6) Za svaku $\mathcal{U}$-funkciju $\mathrm{f}: (\mathrm{E}, \mathcal{U}, \tau) \to \mathrm{R}^1$ *skup* $\mathrm{f}(\mathrm{E})$ *je svuda gust na intervalu* $(\inf \mathrm{f}(\mathrm{E}), \sup \mathrm{f}(\mathrm{E}))$ *numeričke prave* R^1 *(tj. adherencija* $\overline{\mathrm{f}(\mathrm{E})}$ *skupa* $\mathrm{f}(\mathrm{E})$ *je segment* $[\inf \mathrm{f}(\mathrm{E}), \sup \mathrm{f}(\mathrm{E})]$, *poluinterval* $(-\infty, \sup \mathrm{f}(\mathrm{E})]$, *polusegment* $[\inf \mathrm{f}(\mathrm{E}), \infty)$ *ili interval* $(-\infty, \infty) = \mathrm{R}^1$).

7. Uniformni prostor $(E, \mathcal{U}, \tau)$ *je lančasto koneksan, što znači: za svaki uređen par* $(p, q) \in E \times E$ *tačaka* $p, q \in E$ *i svako* $U \in \mathcal{U}$ *postoji prirodan broj* n *takav da je*

$$(p, q) \in U^n = \underbrace{U \circ U \circ \ . \ . \ . \ \circ U}_{n \text{ puta}},$$

tj. (p, q) *se nalazi u kompoziciji* U^n *skupa* U *komponovanog sa samim sobom n-puta.*

Dokaz. Izložićemo dokaz tog stava koji su dali njegovi autori u radu [1].

1) $\Rightarrow$ 2) Pretpostavimo da skup $f(E)$ nije svuda gust na intervalu $(\inf f(E), \sup f(E))$, uključujući tu i mogućnosti $\inf f(E) = -\infty$ i $\sup f(E) = +\infty$. To znači da bi postojala tačka x u tom intervalu koja ne leži u adherencijii $\overline{f(E)}$ skupa $f(E)$, odakle bi sledila egzistencija nekog konačnog intervala $(a, b) \subset (\inf f(E), \sup f(E))$ oko tačke x koji ne bi imao tačaka zajedničkih sa skupom $f(E)$, tj. bilo bi

$$(a, b) \cap f(E) = \Lambda.$$

Na skupu $(-\infty, a] \cap [b, \infty)$ definišimo sada funkciju g sa vrednostima u diskretnom prostoru $\{0,1\}$ ovako:

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, a], \\ 1, & x \in [b, \infty). \end{cases}$$

Funkcija g je očevidno jedna δ-funkcija. Prema tome, složena funkcija $g \circ f : E \to \{0,1\}$ bila bi jedna δ-funkcija koja nije konstanta, pa prostor (E, δ, τ) ne bi bio δ-koneksan, suprotno pretpostavci.

2) $\Rightarrow$ 6). Videli smo da je svaka $\mathcal{U}$-funkcija u isti mah i neka δ-funkcija. Prema tome, ako uslov 2) važi za δ-funkciju f, važi on i za $\mathcal{U}$-funkciju $f : (E, \mathcal{U}, \tau) \to R^1$.

6) $\Rightarrow$ 5), Diskretan prostor $\{0,1\}$, koji se sastoji od dve tačke 0 i 1, smatrajmo kao podskup numeričke prave R^1. Pretpostavimo sada da je $f : (E, \mathcal{U}, \tau) \to \{0,1\}$ neka $\mathcal{U}$-funkcija. To znači da bi skup $f(E)$ morao biti svuda gust na nekom intervalu numeričke prave R^1, tj. adherencija $\overline{f(E)}$ tog skupa numeričke prave morala bi biti neki segment numeričke prave koji sadrži tačke 0 i 1, što je nemogućno. Zato mora biti ili $f(x) = 0$ za svako $x \in E$, ili $f(x) = 1$ za svako $x \in E$, tj. f mora biti konstanta pa je uniformni prostor $(E, \mathcal{U}, \tau)$ $\mathcal{U}$-koneksan.

5) $\Rightarrow$ 7). Pretpostavimo da uniformni prostor $(E, \mathcal{U}, \tau)$ nije lančasto koneksan. Tada postoji uređen par $(p, q) \in E \times E$ i skup $U \in \mathcal{U}$ takav da je $(p, q) \notin U^n$ za svaki prirodni broj n. Kako je $(p, p) \in U$, skup svih onih tačaka x iz E za koje je $(p, x) \in U^n$ za neko n, nije prazan. Definisaćemo sada jednu funkciju $f : E \to R^1$ ovako:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ako postoji neko } n \text{ tako da je } (p, x) \in U^n, \\ 1, & \text{u ostalim slučajevima.} \end{cases}$$

Očevidno je $f(p) = 0$ i $f(q) = 1$. Dokazaćemo sada da je f jedna $\mathcal{U}$-funkcija. Primetimo da diskretan prostor $\{0,1\}$ ima za bazu njegove uniformne strukture skup $\{(0,0),(1,1)\} = \triangle$. Dokazaćemo da je $U \subset f^{-1}(\triangle)$ i, prema tome, da je $f^{-1}(\triangle) \in \mathcal{U}$ odakle sledi da f mora biti jedna $\mathcal{U}$-funkcija. Zaista, neka je $(x, y) \in U$. Ako je $f(x) = 0$ tada je $(p, x) \in U^n$ za neko n pa je $(p, y) \in U \circ U^n = U^{n+1}$, tj. mora biti i $f(y) = 0$. S druge strane, ako sada uzmemo da je $f(y) = 1$ mora biti i $f(x) = 1$. Zaista, kad bi bilo $f(x) = 0$, bilo bi $(p, x) \in U^n$ za neko n odakle $(p, y) \in U \circ U^n = U^{n+1}$, tj. bilo bi i $f(y) = 0$, suprotno pretpostavci. Prema tome je $U \subset f^{-1}(\triangle)$, tj. $f^{-1}(\triangle) \in \mathcal{U}$. Imamo dakle $\mathcal{U}$-funkciju $f : E \to \{0,1\}$ koja nije konstanta, pa $(E, \mathcal{U}, \tau)$ ne bi bio $\mathcal{U}$-koneksan, suprotno pretpostavci.

7 $\Rightarrow$ 3), Pretpostavimo da je prostor $(E, \mathcal{U}, \tau)$ lančasto koneksan i neka je $A \subset E$ pravi deo skupa E. Uzmimo neku tačku $p \in A$ i neku tačku $q \in E \setminus A$. Za svako $U \in \mathcal{U}$ postoji prirodni broj n takav da je $(p, q) \in U^n = U \circ U \circ \ldots \circ U$. Prema tome, postoji niz tačaka $p, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, \ldots, x_n = q$ sa osobinom da je $(x_{k-1}, x_k) \in U$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Kako je $q \in E \setminus A$, postoji u tom nizu prva tačka x_i za koju je $x_i \in E \setminus A$ i zato $x_{i-1} \in A$. Vidimo tako da za svako $U \in \mathcal{U}$ postoji neki uređeni par (x_{i-1}, x_i) tačka x_{i-1}, x_i iz skupa E sa osobinom $(x_{i-1}, x_i) \in U$. Zato mora biti $(A, E \setminus A) \in \delta$ za binarnu relaciju δ definisanu na $P(E) \times P(E)$ uniformnom strukturom $\mathcal{U}$ posmatranog prostora $(E, \mathcal{U}, \tau)$.

3) $\Rightarrow$ 4), Neka je $(E^\star, \delta^\star, \tau^\star)$ apsolutno proširenje (vidi Smirnov [1]) δ-prostora (E, δ, τ). Prostor $(E^\star, \delta^\star, \tau^\star)$ je bikompaktan, skup E je svuda gust u prostoru $(E^\star, \delta^\star, \tau^\star)$, tj. $\tau^\star E = E^\star$ i, za $P, Q \subset E$, važi $(P, Q) \in \delta$ ako i samo ako $(P, Q) \in \delta^\star$, tj. ako i samo ako je

$$(\tau^\star P) \cap (\tau^\star Q) \neq \Lambda.$$

Neka je ispunjen uslov 3) pa pretpostavimo da prostor $(E^\star, \delta^\star, \tau^\star)$ nije koneksan. Postoje dakle u tome prostoru dva istovremeno otvorena i zatvorena skupa $A, B \subset E^\star$ sa osobinom

$$A \cup B = E^\star, \quad A \cap B = \Lambda.$$

Zato je i

$$(A \cap E) \cup (B \cap E) = E, \quad (A \cap E) \cap (B \cap E) = \Lambda.$$

Međutim je

$$\tau^\star (A \cap E) = A, \quad \tau^\star (B \cap E) = B.$$

Zaista, imamo

$$\tau^\star A = A, \quad \tau^\star B = B.$$

Ako je $x \in \tau^\star (A \cap E)$ očigledno mora biti $x \in \tau^\star A = A$. Obratno, neka je $x \in A$ pa uzmimo da je $x \notin \tau^\star (A \cap E)$. Tada bi u prostoru $(E^\star, \delta^\star, \tau^\star)$ postojala okolina Vx tačke x sa osobinom

$$Vx \cap (A \cap E) = \Lambda,$$

što je nemogućno, jer je E svuda gust u $E^\star$ (očigledno je $A \cap E \neq \Lambda$; u protivnom slučaju bilo bi $E \subset B$ pa kako je A otvoren i neprazan skup u $(E^\star, \delta^\star, \tau^\star)$, bilo bi $A \cap E = \Lambda$, što je nemogućno, jer je E svuda gust u $E^\star$). Na isti način dokazuje se da je i $\tau^\star(B \cap E) = B$. Prema tome, imaćemo

$$(\tau^\star(A \cap E)) \cap (\tau^\star(B \cap E)) = \Lambda$$

i zato

$$(A \cap E, B \cap E) \notin \delta,$$

tj.

$$(A \cap E, E \setminus (A \cap E)) \notin \delta,$$

pa prostor (E, δ, τ) ne bi bio δ-koneksan, suprotno pretpostavci.

4) $\Rightarrow$ 1). Diskretan prostor $\{0,1\}$, smatran kao potprostor numeričke prave R^1, jeste zatvoren i bikompaktan pa je zato, posmatran kao δ-prostor, apsolutno zatvoren. Neka je sada $(E^\star, \delta^\star, \tau^\star)$ apsolutno δ-proširenje prostora (E, δ, τ) i neka je $f: E \to \{0,1\}$ bilo koja δ-funkcija. Prema jednom stavu Ju. M. Smirnova (vidi [1]), postoji jednoznačno određena neprekidna ekstenzija $f^\star: E^\star \to \{0,1\}$ funkcije f na čitav prostor $(E^\star, \delta^\star, \tau^\star)$. Kako je taj prostor koneksan (tj. $\tau^\star$-koneksan), funkcija $f^\star$ nužno mora biti konstanta. Zato je i njena restrikcija f na prostor (E, δ, τ) takođe konstanta, tj. prostor (E, δ, τ) je δ-koneksan, što je trebalo dokazati.

Prema autorima prethodnog stava (vidi [1]), ako je neki uniformizabilni prostor (E, τ) $\mathcal{U}$-koneksan (δ-koneksan) u odnosu na svaku $\mathcal{U}$-strukturu (δ-strukturu) saglasnu sa njegovom topologijom τ, tada je taj prostor i τ-koneksan. Dalje, za δ-prostore (E, δ) koji poseduju svojstvo Lindelöf-a, ako svaka realna δ-funkcija $f: (E, \delta) \to R^1$ ima osobinu da je skup $f(E)$ neki interval (tj. funkcija f poseduje svojstvo Darboux-a), tada je prostor (E, δ) τ-koneksan.

Ovde nisu posmatrani problemi koneksnosti za slučaj prostora (tzv. prostranstva smežnosti) koje su definisali i analizirali V. M. Ivanova i A. A. Ivanov u radu [1]. Izvesne interesantne rezultate koji se odnose na koneksnost u toj kategoriji prostora, dobila je A. A. Ivanova u radu [1]. Kako ti prostori u izvesnom smislu uopštavaju δ-prostore, bilo bi zanimljivo videti kako bi se na njih mogla proširiti δ-koneksnost tako da je, verujem, ova problematika još uvek otvorena.

3. SINTOPOGENA KONEKSNOST ILI $\mathfrak{s}$-KONEKSNOST

Razvijajući dalje razmatranja izložena u prethodnom paragrafu, J. L. Sieber i W. J. Pervin definisali su u radu [1], sintopogenu koneksnost ili $\mathfrak{s}$-koneksnost sintopogenih prostora A. Császára. Evo najpre nekoliko definicija i stavova iz teorije A. Császára [1], [2].

3.1. Sintopogeni prostori

Semitopogeni uređaj. Neka je E neprazan skup i $P(E)$ partitivan skup skupa E. Binarna relacija $<$ na skupu $P(E)$ je semitopogena, ako su ispunjeni ovi uslovi:

$$(0_1) \qquad \Lambda < \Lambda \text{ i } E < E.$$

$$(0_2) \qquad A < B \Rightarrow A \subset B.$$

$$(0_3) \qquad A \subset A^1 < B^1 \subset B \Rightarrow A < B.$$

Iz prva dva od tih uslova neposredno sledi da je semitopogena relacija $<$ uređajna. Jer, ako je $A < B$ i $B < C$ tada je

$$A \subset B < C \subset C \Rightarrow A < C,$$

pa je relacija $<$ tranzitivna. Zato ćemo semitopogenu relaciju $<$ zvati još i semitopogeni uređaj.

Polazeći od proizvoljne familije σ delovi skupa E, koja sadrži i skup E i prazan skup Λ, mogućno je definisati semitopogeni uređaj $<$ na $P(E)$ ovako: za $A, B \in P(E)$ stavićemo $A < B$ ako postoji skup $S \in \sigma$ takav da je

$$A \subset S \subset B.$$

Familija σ zove se generator semitopogenog uređaja $<$. Očigledno je σ generator semitopogenog uređaja $<$, ako i samo ako je $S < S$ za svako $S \in \sigma$.

S druge strane, polazeći od datog semitopogenog uređaja $<$, mogućno je definisati novi semitopogeni uređaj $<^c$, koji se sove komplementarni uređaj uređaja $<$, na sledeći način: za $A, B \in P(E)$ stavićemo

$$A <^c B,$$

ako i samo ako je

$$E \setminus B < E \setminus A.$$

Ako je σ generator semitopogenog uređaja $<$, onda je familija σ^c svih skupova $E \setminus S$, $S \in \sigma$, generator komplementarnog uređaja $<^c$. Ako je

$$< = <^c,$$

semitopogeni uređaj $<$ je simetričan. Semitopogeni uređaj $<$ je simetričan, ako i samo ako iz $S \in \sigma$ sledi $E \setminus S \in \sigma$.

Topogeni uređaj. Topogenim zove se semitopogeni uređaj na skupu $P(E)$ koji ispunjava sledeći uslov:

(Q) Iz $A, B, A^1, B^1 \in P(E)$ i $A < B$, $A^1 < B^1$ sledi

$$A \cap A^1 < B \cap B^1 \quad \text{i} \quad A \cup A^1 < B \cup B^1.$$

Za simetrične semitopogene uređaje, uslov (Q) i bilo koji od sledeća dva uslova (Q^1) i (Q^{11}) su međusobno ekvivalentni.

(Q^1) Iz $A < B$ i $A^1 < B^1$ sledi $A \cap A^1 < B \cap B^1$.

(Q^{11}) Iz $A < B$ i $A^1 < B^1$ sledi $A \cup A^1 < B \cup B^1$.

Neka je σ generator semitopogenog uređaja $<$. Taj je uređaj topogen, ako i samo ako je σ mreža u odnosu na inkluziju $\subset$, tj. ako i samo ako iz $S, S^1 \in \sigma$ sledi $S \cap S^1 \in \sigma$ i $S \cup S^1 \in \sigma$. Komplementarni semitopogeni uređaj $<^c$ topogenog uređaja $<$ je topogen. Semitopogeni uređaj $<$, proizveden generatorom σ, je topogen, ako i samo ako je σ Boole-ova algebra u odnosu na relaciju inkluzije $\subset$, tj. ako iz $S, S^1 \in \sigma$ sledi $S \cup S^1 \in \sigma$ i $E \setminus S \in \sigma$.

Perfektni semitopogeni uređaj. Semitopogeni uređaj $<$ je perfektan ako ispunjava uslov:

(P) Iz $A_i, B_i \in P(E)$ i $A_i < B_i$, $i \in I$, sledi

$$\cup \{A_i : i \in I\} < \cup \{B_i : i \in I\},$$

gde je I proizvoljan skup indeksa.

Uslov (P) ekvivalentan je ovom:

(P[1]) Iz A_i, $B \in P(E)$ i $A_i < B$, $i \in I$, sledi

$$\cup \{A_i : i \in I\} < B,$$

gde je I proizvoljan skup indeksa.

Važi stav:

Semitopogeni uređaj $<$ je perfektan, ako i samo ako je $A < B$ kad je $x < B$ za svako $x \in A$ (jednostavnosti radi, pisano je x umesto $\{x\}$).

Neka je σ generator semitopogenog uređaja $<$. Semitopogeni uređaj $<$ je perfektan, ako i samo ako iz $S_i \in \sigma$, $i \in I$, sledi $\cup \{S_i : i \in I\} \in \sigma$, gde je I proizvoljan skup indeksa.

Očigledno je da će topogeni uređaj $<$ biti perfektan ako se druga polovina uslova (Q) zameni uslovom (P).

Biperfektni semitopogeni uređaj. Semitopogeni uređaj $<$ je biperfektan ako je ispunjen uslov

(B) Iz A_i, $B_i \in P(E)$ i $A_i < B_i$, $i \in I$,

sledi

$$\cup \{A_i : i \in I\} < \cup \{B_i : i \in I\}$$

i

$$\cap \{A_i : i \in I\} < \cap \{B_i : i \in I\},$$

gde je I proizvoljan skup indeksa.

Uslov (B) je očigledno uopštenje uslova (Q). Prema tome, biperfektni semitopogeni uređaji su topogeni.

Semitopogeni uređaj $<$ je biperfektan, ako i samo ako su i uređaj $<$ i njegov komplementarni uređaj $<^c$ perfektni. Prema tome, kako je $(<^c)^c = <$, iz prethodnog stava sledi: ako je semitopogeni uređaj $<$ biperfektan, biperfektan je i njegov komplementarni uređaj $<^c$.

Semitopogeni uređaj koji je perfektan i simetričan, jeste biperfektan.

Neka je σ generator semitopogenog uređaja $<$. Uređaj $<$ je biperfektan, ako i samo ako iz $S_i \in \sigma$, $i \in I$, sledi

$$\cup \{S_i : i \in I\} \in \sigma \text{ i } \cap \{S_i : i \in I\} \in \sigma,$$

gde je I proizvoljan skup indeksa.

Primetimo da za proizvoljne skupove $A, B \in P(E)$ važi

$$A = \cup \{\{x\} : x \in A\} \text{ i } B = \cap \{E \setminus \{y\} : y \in E \setminus B\}.$$

Tada se pokazuje da važi sledeći stav: Semitopogeni uređaj $<$ je biperfektan, ako i samo ako iz $A < B$ sledi da je $x < E \setminus y$ za svako $x \in A$ i svako $y \in E \setminus B$, i obratno (jednostavnosti radi stavljeno je x umesto $\{x\}$ i y umesto $\{y\}$).

Posredstvom biperfektnih topogenih uređaja na $P(E)$ mogućno je definisati refleksivne binarne relacije na skupu E (tj. podskupove $U \subset E \times E$ koji sadrži dijagonalu $\triangle \subset E \times E$) i, obratno, posredstvom refleksivnih binarnih relacija na E mogućno je definisati biperfektne topogene uređaje na $P(E)$. O tome govori sledeći stav:

Neka je $<$ biperfektni topogeni uređaj na $P(E)$ pa stavimo $(x,y) \in U$ ako nije tačno da je $x < E \setminus y$, gde su x i y tačke iz skupa E. Tada je U jedna refleksivna binarna relacija na E. I upravo dati biperfektni uređaj $<$ možemo dobiti posredstvom maločas definisanog skupa $U \subset E \times E$ ako za $A, B \in P(E)$ stavimo $A < B$ pod uslovom da iz $x \in A$ i $(x,y) \in U$ sledi $y \in B$.

Obratno, kad je data refleksivna binarna relacija U na E, upravo na pokazani način mogućno je definisati topogeni, biperfektni uređaj $<$ na $P(E)$. A polazeći od tog uređaja, mogućno je gore naznačenim postupkom dobiti upravo refleksivnu binarnu relaciju U. Ako je tim putem uspostavljena veza između biperfektnog topogenog uređaja $<$ i refleksivne binarne relacije U, tada se $<$ i U zovu združenim (asociranim).

Biperfektni topogeni uređaj $<$ na $P(E)$ je simetričan, ako i samo ako je simetrična asocirana binarna relacija U na skupu E, tj. ako je $U^{-1} = U$.

Sintopogeni prostori. Familija $\mathcal{S} = \{<\}$ topogenih uređaja $<$ na $P(E)$ zove se sintopogena struktura na skupu E ako su ispunjena ova dva uslova:

($\mathcal{S}_1$) Familija $\mathcal{S}$ je usmerena s obzirom na relaciju inkluzije, tj. za svaki par topogenih uređaja $<'$, $<'' \in \mathcal{S}$ postoji topogeni uređaj $< \in \mathcal{S}$ takav da je i $<' \subset <$ i $<'' \subset <$, tj. postoji uređaj $<$ finiji od data dva $<'$ i $<''$.

($\mathcal{S}_2$) Za svaki topogeni uređaj $< \in \mathcal{S}$ postoji topogeni uređaj $<' \mathcal{S}$ takav da ako je $A < B$ tada postoji skup C sa svojstvom $A <' C <' B$.

Skup E na kome je definisana sintopogena struktura $\mathcal{S}$ zove se sintopogeni prostor i označuje sa $[E, \mathcal{S}]$. Elementi skupa E zovu se tačkama tog prostora.

Sintopogeni prostor $[E, \mathcal{S}]$ je simetričan, ako je sintopogena struktura $\mathcal{S}$ simetrična, tj. ako su svi topogeni uređaji $<$ familije $\mathcal{S}$ simetrični.

Sintopogeni prostor $[E, \mathcal{S}]$ je sintopološki, ako je sintopogena struktura $\mathcal{S}$ perfektna, (ona se tada zove i sintopologija), tj. ako su svi topogeni uređaji $<$ familije $\mathcal{S}$ perfektni.

Sintopogeni prostor $[E, \mathcal{S}]$ je biperfektan ili biperfektni sintopološki prostor, ako je sintopološka struktura $\mathcal{S}$ biperfektna, tj. ako su svi topogeni uređaji familije $\mathcal{S}$ biperfektni.

Simetrični sintopološki prostor $[E, \mathcal{S}]$ je biperfektan.

Sintopogeni prostor $[E, \mathcal{T}]$ zove se topogeni prostor, ako se sintopogena struktura $\mathcal{T}$ sastoji samo iz jednog topogenog uređaja $<$ (ona se tada zove prosta sintopogena struktura). Kako je uslov ($\mathbf{S}_1$) tada očigledno ispunjen, vidimo da topogeni uređaj $<$ definiše topogenu strukturu, ako i samo ako je ispunjen uslov ($\mathbf{S}_2$), tj. ako i samo ako iz $A < B$ sledi egzistencija skupa C tako da je $A < C < B$.

Topološki prostor je topogeni prostor $[E, \mathscr{T}]$ koji je u isti mah sintopološki. Topogena sintopologija $\mathscr{T}$ zove se topologija ili topološka struktura.

Uzmimo sada topološki prostor $[E, \mathscr{T}]$ u smislu prethodne definicije, gde se $\mathscr{T}$ sastoji samo iz jednog topogenog uređaja $<$. Sa $\mathscr{G}$ označimo familiju svih delova $G \subset E$ koji ispunjavaju uslov $G < G$. Očigledno su tada ispunjeni uslovi:

(G_1) $$\Lambda \in \mathscr{G}, \ E \in \mathscr{G}.$$

(G_2) $$\text{Iz } G_i \in \mathscr{G}, \ i \in I, \ \text{ sledi } \ \cup \{G_i : i \in I\} \in \mathscr{G},$$

gde je I proizvoljna familija indeksa.

(G_3) $$\text{Iz } G_i \in \mathscr{G}, \ i = 1, 2, \ldots, n \ \text{ sledi } \ \cap \{G_i : i = 1, 2, \ldots, n\} \in \mathscr{G},$$

gde je n bilo koji prirodni broj.

Prema tome, $[E, \mathscr{T}]$ je topološki prostor u smislu klasične definicije, pri čemu familiju njegovih otvorenih skupova predstavlja upravo familija $\mathscr{G}$. U okviru teorije sintopogenih prostora taj se prostor zove klasičan topološki prostor.

Obratno, pođimo od klasičnog topološkog prostora $(E, \mathscr{G})$, gde je sa $\mathscr{G}$ označena familija njegovih otvorenih skupova, pa familiju $\mathscr{G}$ uzmimo za generator jednog uređaja $<$ na $P(E)$ stavljajući $A < B$, ako i samo ako postoji skup $G \in \mathscr{G}$ sa osobinom $A \subset G \subset B$. Tako definisani uređaj $<$ je topogen i perfektan pa je struktura $\mathscr{T}$, koju sačinjava $<$, topogena i sintopogena tj. topološka. Označimo sada sa $\mathscr{G}'$ familiju svih skupova $G \subset E$ sa osobinom $G < G$. Ako je $G \in \mathscr{G}$, tada je $G \subset G \subset G$ pa je $G < G$ i zato $G \in \mathscr{G}'$, tj. imamo $\mathscr{G} \subset \mathscr{G}'$. Obratno, ako je $G \in \mathscr{G}'$, tada je $G < G$ što znači da postoji skup $H \in \mathscr{G}$ sa osobinom da je $G \subset H \subset G$, tj. $H = G$ i zato $G \in \mathscr{G}$, tj. imamo i $\mathscr{G}' \subset \mathscr{G}$. Zato je $\mathscr{G}' = \mathscr{G}$.

Tako vidimo da klasična topologija jednoznačno određuje topologiju u smislu prethodnih definicija.

No i obratno, topologija $\mathscr{T}$ u smislu prethodnih definicija jednoznačno određuje klasičnu topologiju na skupu E. Neka je naime $\mathscr{G}$ familija svih skupova $G \subset E$ sa osobinom $G < G$. Familijom $\mathscr{G}$ jednoznačno je određena familija otvorenih skupova na E. Jer, ako je $G < G$ i $A \subset G \subset B$, tada je $A \subset G < G \subset B$ i zato $A < B$. Obratno, neka je $A < B$ pa stavimo $G = \cup \{H : H < B\}$. Očigledno je $G < B$ jer je $<$ perfektna topogena relacija na $P(E)$. Kako je $<$ topogena struktura na E, postoji skup $C \subset E$ takav da je

$$G < C < B$$

odakle $G \subset B$. No iz $C < B$ sledi $C \subset G$ i zato $C = G$. Prema tome je $G < G$.

Za klasičnu topologiju $\mathcal{G}$ i topologiju $\mathcal{T}$, koje se jedna iz druge izvode na pokazani način, kaže se da su združene (asocirane) i za odgovarajuće prostore kaže se da su združeni (asocirani).

Neka je sada $[E, \mathcal{T}]$ topogeni prostor čija je topogena struktura $\mathcal{T}$ simetrična, tj. $\mathcal{T}$ se sastoji samo iz jednog topogenog uređaja $<$ sa osobinom $<^c = <$. Za $A, B \in P(E)$ stavićemo sada

$$(A, B) \notin \delta$$

ako i samo ako $A < E \setminus B$. Kazaćemo još da su tada skupovi A i B daleko jedan od drugog, odnosno, da su skupovi $P, Q \in P(E)$ blizu jedan drugom i pisati $(P, Q) \in \delta$, ako i samo ako nije tačno da je $P < E \setminus B$.

Pokazuje se da tako definisana binarna relacija δ na skupu $P(E)$ ispunjava sve aksiome $(\delta_1), (\delta_2), (\delta_3), (\delta_4)$ i (δ_5) uopštenih δ-prostora Efremović—Smirnova (vidi na primer, moju knjigu [1]). Prema tome, (E, δ) je jedan uopšteni δ-prostor.

Obratno, neka je dat uopšteni δ-prostor (E, δ) pa na skupu $P(E)$ definišimo binarnu relaciju $<$ ovako: za $A, B \in P(E)$ stavićemo

$$A < B,$$

ako i samo ako je $(A, E \setminus B) \notin \delta$. Pokazuje se da je $<$ jedan topogeni uređaj koji je simetričan i, štaviše, obrazuje topogenu strukturu $\mathcal{T}$ na E, pa je $[E, \mathcal{T}]$ jedan topogeni prostor. Pođe li se sada od tog prostora pa na gore opisani način definiše novi δ-prostor na skupu E, proizilazi da se time dobije upravo δ-prostor (E, δ) od koga se i pošlo.

Za topogene strukture $\mathcal{T}$ i uopštene δ-strukture definisane na istom skupu $P(E)$, koje proizilaze jedna iz druge na pokazani način, kaže se da su združene ili asocirane, a za odgovarajuće prostore $[E, \mathcal{T}]$ i (E, δ) da su združeni ili asocirani.

Neka je sada data sintopogena biperfektna struktura (ili, biperfektna sintopologija) $\mathbf{S}$ na skupu E, pa definišimo uniformizirajuću familiju $\mathcal{U}$ delova $U_< \subset E \times E, < \in \mathbf{S}$, na skupu E ovako: za dato $< \in \mathbf{S}$ stavićemo $U_< \in \mathcal{U}$, ako i samo ako je $U_<$ skup svih uređenih parova $(x, y) \in E \times E$ za koje nije tačno da je $x < E \setminus y$. Pokazuje se tada da familija $\mathcal{U}$ ispunjava sledeće uslove: (U_1). $\Delta \subset U$, za svako $U \in \mathcal{U}$, gde je Δ dijagonala kombiniranog proizvoda $E \times E$. (U_2). Za svaki par skupova $V, W \in \mathcal{U}$ postoji skup $U \in \mathcal{U}$ sa osobinom

$$U \subset V \cap W.$$

(U_3). Za svaki skup $U \in \mathcal{U}$ postoji skup $W \in \mathcal{U}$ takav da je $W \circ W \subset U$, gde je kružić $\circ$ oznaka za kompoziciju podskupova proizvoda $E \times E$.

Uređeni par $(E, \mathcal{U})$, A. Császár naziva kvaziuniforman prostor (to nije isto što i kvaziuniforman prostor u smislu definicije A. Appert-a, vidi na primer, moju knjigu [1]).

Obratno, neka je $(E, \mathcal{U})$ kvaziuniforman prostor kvaziuniformne strukture $\mathcal{U}$ pa definišimo familiju $\mathbf{S}$ uređajnih relacija $<_U$ na $P(E)$, $U \in \mathcal{U}$, na sledeći način : za dato $U \in \mathcal{U}$ i $A, B \in P(E)$ stavićemo

$$A <_U B,$$

ako i samo ako iz $x \in A$ i $(x, y) \in U$ sledi $y \in B$. Pokazuje se da je tako definisana familija $\mathbf{S}$ biperfektna sintopologija na E pa je $[E, \mathbf{S}]$ biperfektni sintopološki prostor. S druge strane, ako se pođe od familije $\mathbf{S}$ pa se gornjim načinom definišu binarne relacije $U_<$, dobiće se upravo kvaziuniformna struktura $\mathcal{U}$. Kaže se da su strukture $\mathbf{S}$ i $\mathcal{U}$, koje se pokazanim načinom dobijaju jedna iz druge, združene ili asocirane, a za odgovarajuće prostore $[E, \mathbf{S}]$ i $(E, \mathcal{U})$ da su združeni ili asocirani.

Uzmimo sada da je $\mathbf{S}$ simetrična sintopologija na E. Kako su perfektni i simetrični topogeni uređaji biperfektni, to znači da su simetrične sintopologije biperfektne. No asocirana kvaziuniformna struktura $\mathcal{U}$ poseduje tada i osobinu da su svi njeni elementi simetrični, tj. pored (U_1), (U_2) i (U_3) ona ispunjava i uslov: (U_4). Za svako $U \in \mathcal{U}$ je $U^{-1} \in \mathcal{U}$.

To znači da je tada $\mathcal{U}$ uniformna struktura u smislu definicija N. Bourbaki-a i $(E, \mathcal{U})$ je uniformni prostor.

Obratno, ako se pođe od jednog uniformnog prostora $(E, \mathcal{U})$ u smislu definicija N. Bourbaki-a, gde $\mathcal{U}$ predstavlja jedan fundamentalan sistem simetričnih okruženja U dijagonale $\Delta \subset E \times E$, pokazuje se da sa strukturom $\mathcal{U}$ asocirana struktura $\mathbf{S}$ semitopogenih uređaja $<$ predstavlja upravo simetričnu sintopologiju na skupu E. Za simetričnu sintopologiju $\mathbf{S}$ i uniformnu strukturu $\mathcal{U}$, koje se jedna iz druge dobijaju izloženim postupcima, kaže se da su združene ili asocirane, a za odgovarajuće prostore $[E, \mathbf{S}]$ i $(E, \mathcal{U})$ da su združeni ili asocirani.

Evo sada nekoliko primera.

Primer 3.1.1. Izložićemo nekoliko sintopogenih struktura definisanih na skupu svih realnih brojeva (u ovom primeru označenim sa E), a koje će redom biti označene ovako:

$$\mathcal{T},\ \mathcal{T}^t,\ \mathcal{T}^{tp},\ \mathcal{T}^c,\ \mathcal{T}^{ctp},\ \mathcal{T}^s,\ \mathcal{T}^{sb} = \mathcal{H},\ \mathcal{H}^t,\ \mathcal{H}^{tp}.$$

Neka je ε dati pozitivan realan broj. Za $A, B \subset E$ stavićemo

$$(<_\varepsilon) \qquad A <_\varepsilon B \Leftrightarrow \sup A + \varepsilon \leqslant \inf(E \setminus B).$$

Ako se još stavi $\sup \Lambda = -\infty$, $\inf \Lambda = \infty$, nije teško proveriti da je binarna relacija $<_\varepsilon$ topogeni uređaj na E. Taj uređaj nema generatora.

Polazeći od topogenog uređaja $<_\varepsilon$ mogućno je definisati komplementarni uređaj $<_\varepsilon^c$ na E stavljajući

$$A <_\varepsilon^c B \Leftrightarrow E \setminus B <_\varepsilon E \setminus A,$$

tj.

$$(<_\varepsilon^c) \qquad A <_\varepsilon^c B \Leftrightarrow \inf A - \varepsilon \geqslant \sup (E \setminus B).$$

Polazeći ponovo od topogenog uređaja $<_\varepsilon$ mogućno je definisati simetrični topogeni uređaj $<_\varepsilon^s$ na E ovako:

$$(<_\varepsilon^s) \qquad A <_\varepsilon^s B \Leftrightarrow$$

postoji konačan rastav skupa A, tj.

$$A = \cup \{A_i : i = 1, 2, \ldots, n, \}$$

tako da je

$$(m_i - \varepsilon, M_i + \varepsilon) \subset B,$$

gde je

$$m_i = \inf A_i, \; M_i = \sup A_i, \; i = 1, 2, \ldots, n, \; A_i \neq \Lambda.$$

Stavimo sada

$$(\mathcal{T}) \qquad \mathcal{T} = \{ <_\varepsilon : \varepsilon > 0 \}.$$

Pokazuje se da je $\mathcal{T}$ biperfektna sintopologija na E pa je $[E, \mathcal{T}]$ biperfektni sintopogeni prostor. Kvaziuniformna struktura $\mathcal{U} = \{U_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$, asocirana strukturi $\mathcal{T}$, dobiće se na sledeći način: stavićemo $U_\varepsilon \in \mathcal{U}$, ako i samo ako $(x, y) \in U_\varepsilon$ znači isto što i x non $<_\varepsilon E \setminus y$ tj. isto što i $\sup x + \varepsilon$ non $\leqslant \inf y$, tj. $x + \varepsilon$ non $\leqslant y$, tj. ako je $y - x < \varepsilon$.

Polazeći od strukture $\mathcal{T}$, definisaćemo sada topogenu strukturu $<$ na E ovako: za $A, B \subset E$ stavićemo $A < B$, ako i samo ako postoji $\varepsilon > 0$ tako da je $A <_\varepsilon B$. Drugim rečima, stavlja se

$$< \; = \cup \{ <_\varepsilon : \varepsilon > 0 \} = \cup \mathcal{T}.$$

Tim načinom definisana struktura označuje se sa $\mathcal{T}^t$ i sastoji se dakle samo od jednog topogenog uređaja $<$ na E. Drugim rečima,

$$(\mathcal{T}^t) \qquad A < B \Leftrightarrow \sup A < \inf (E \setminus B), \; A, B \subset E.$$

Polazeći od strukturn $\mathcal{T}^t$, mogućno je definisati perfektnu topogenu strukturu na E stavljajući

$$(\mathcal{T}^{tp}) \qquad A <^p B \Leftrightarrow x < B \text{ za svako } x \in A.$$

Ta se struktura označuje sa $\mathcal{T}^{tp}$. Drugim rečima

$$A <^p B \Leftrightarrow x < \inf(E \setminus B) \text{ za svako } x \in A.$$

Prema tome, $[E, \mathcal{T}^{tp}]$ je topološki prostor. Klasična topologija asocirana strukturi $\mathcal{T}^{tp}$ je topologija čiju familiju $\mathcal{G}$ otvorenih skupova čine svi intervali oblika $(-\infty, x)$, $-\infty \leqslant x \leqslant \infty$ što se može izvesti iz $\mathcal{T}^{tp}$ ili posredstvom kvaziuniformne strukture $\mathcal{U}$.

Stavimo sada

$$\mathcal{T}^c = \{<^c_\varepsilon : \varepsilon > 0\}.$$

To je takođe biperfektna sintopologija na E i ako sa $\mathcal{U}^c$ označimo kvaziuniformnu strukturu asociranu strukturi $\mathcal{T}^c$, tj. $\mathcal{U}^c = \{U_\varepsilon{}^c : \varepsilon > 0\}$, biće $U_\varepsilon{}^c \in \mathcal{U}$, ako i samo ako je $(x,y) \in U_\varepsilon{}^c$, tj. ako i samo ako je $\inf x - \varepsilon$ non $\geqslant \sup y$ za svako $\varepsilon > 0$, tj. ako i samo ako je $x - y < \varepsilon$.

Dalje, struktura $\mathcal{T}^{ct}$, koja se sastoji samo od jednog elementa $<^c$, definisana je ovako

$$(\mathcal{T}^{ct}) \qquad <^c = \cup \{<_\varepsilon{}^c : \varepsilon > 0\} = \cup \mathcal{T}^c.$$

Drugim rečima, $A <^c B$ znači isto što i činjenicu da postoji $\varepsilon > 0$ sa svojstvom $A <_\varepsilon{}^c B$, tj. da je $\inf A - \varepsilon \geqslant \sup(E \setminus B)$. No to znači da je $A <^c B \Leftrightarrow \inf A > \sup(E \setminus B)$. Struktura $\mathcal{T}^{ct}$ je topogena.

Posredstvom strukture $\mathcal{T}^{ct}$ možemo definisati topogenu sintopološku strukturu $\mathcal{T}^{ctp}$ stavljajući

$$A <^{cp} B \Leftrightarrow x <^c B \text{ za svako } x \in A.$$

Drugim rečima,

$$(\mathcal{T}^{ctp}) \qquad A <^{cp} B \Leftrightarrow x > \sup(E \setminus B), \text{ za svako } x \in A.$$

Prema tome, $[E, \mathcal{T}^{ctp}]$ je topološki prostor čija se klasična topologija sastoji iz familije $\mathcal{G}^c$ otvorenih skupova koju čine intervali (x, ∞), $-\infty \leqslant x \leqslant \infty$, što se pokazuje ili polazeći od $(\mathcal{T}^{ctp})$ ili od $\mathcal{U}^c$. Kaže se da je topologija $\mathcal{G}^c$ asocirana strukturi $\mathcal{T}^{ctp}$.

Stavimo sada

$$(\mathcal{T}^s) \qquad \mathcal{T}^s = \{<_\varepsilon{}^s : \varepsilon > 0\},$$

pa definišimo novu familiju $\mathcal{T}^{sb}$ biperfektih topogenih uređaja $<_\varepsilon{}^{sb}$, tj.

$$\mathcal{J}^{sb} = \{<_\varepsilon^{sb} : \varepsilon > 0\},$$

na sledeći način: za $A, B \subset E$ stavićemo

$$A <_\varepsilon^{sb} B, \text{ ako i samo ako je}$$

$$x <_\varepsilon^{s} E \setminus y \text{ za svako } x \in A$$

i svako $y \in E \setminus B$. S obzirom na definiciju uređaja $<_\varepsilon^{s}$, mora biti $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset E \setminus y$, što znači da je $|y-x| \geqslant \varepsilon$. Drugim rečima, biperfektni uređaj $<_\varepsilon^{sb}$ može biti definisan ovako:

$$(\mathcal{J}^{sb}) \qquad A <_\varepsilon^{sb} B \Leftrightarrow |y-x| \geqslant \varepsilon,$$

za svako $x \in A$ i svako $y \in E \setminus B$.

Biperfektni topogeni uređaj $<_\varepsilon^{sb}$ mogućno je karakterisati i preciznije. Za $X, Y \subset E$ stavimo

$$\rho(X, Y) = \inf\{|y-x| : x \in X, y \in Y\}.$$

Prema tome,

$$A <_\varepsilon^{sb} A \Leftrightarrow \rho(A, E \setminus B) \geqslant \varepsilon.$$

Biperfektna, simetrična sintopologija $\mathcal{J}^{sb}$ označuje se sa $\mathcal{H}$, tj. stavlja se

$$\mathcal{H} = \mathcal{J}^{sb}.$$

Sa $\mathcal{U}$ označićemo uniformnu strukturu asociranu strukturi $\mathcal{H}$, tj. stavićemo

$$\mathcal{U} = \{V_\varepsilon : \varepsilon < 0\},$$

gde je V_ε definisano na već poznati način:

$$(x, y) \in V_\varepsilon \Leftrightarrow x \text{ non } <_\varepsilon^{sb} E \setminus y \Leftrightarrow |x-y| < \varepsilon.$$

Dalje, polazeći od simetrične, biperfektne sintopologije $\mathcal{H}$ mogućno je definisati simetričnu topogenu strukturu $\mathcal{H}^t$ koja se sastoji samo od jednog elementa $<$ definisanog ovako: za $A, B \subset E$ je $A < B$, ako i samo ako postoji $\varepsilon > 0$ tako da je

$$A <_\varepsilon^{sb} B,$$

tj. ako i samo ako je $\rho(A, E \setminus B) \geqslant \varepsilon$.

Drugim rečima

$$< = \cup \mathscr{H} = \cup \{ <_\varepsilon^{sb} : \varepsilon > 0 \}.$$

Struktura $\mathscr{H}^t$ izvedena je iz strukture $\mathscr{H}$ i, očigledno važi

$$(\mathscr{H}^t) \qquad A < B \Leftrightarrow \rho(A, E \setminus B) > 0.$$

Ppsredstvom strukture $\mathscr{H}^t$ definisaćemo još topogenu strukturu $\mathscr{H}^{tp}$ koja se sastoji iz jednog elementa $<^p$ definisanog ovako:

$$A <^p B \Leftrightarrow x < B, \quad \text{za svako} \quad x \in A,$$

tj.

$$A <^p B \Leftrightarrow \rho(x, E \setminus B) > 0, \quad \text{za svako} \quad x \in A.$$

Prema tome, $\mathscr{H}^{tp}$ je topologija na E.

Definišimo sada δ-strukturu asociranu strukturi $\mathscr{H}^t$ (i zato izvedenu iz uniformne rtrukture $\mathscr{U}$). Za $A, B \subset E$ treba staviti $(A, B) \in \delta$, ako i samo ako nije tačno da je $A < E \setminus B$, tj.

$$(A, B) \in \delta \Leftrightarrow \text{nije tačno da je } \rho(A, E \setminus (E \setminus B)) = \rho(A, B) > 0,$$

tj.

$$(\delta) \qquad (A, B) \in \delta \Leftrightarrow \rho(A, B) = 0.$$

Slično tome, definišimo klasičnu topologiju $\mathscr{G}$ asociranu strukturi $\mathscr{H}^{tp}$ (i zato izvedenu iz uniformne strukture $\mathscr{U}$). Za $G \subset E$ treba staviti $G \in \mathscr{G}$, ako i samo ako je $G <^p G$, tj. ako i samo ako je $\rho(x, E \setminus G) > 0$ za svako $x \in G$, tj. ako i samo ako

$$\inf\{ |x-y| : y \in E \setminus G \} > 0.$$

Drugim rečima, $G <^p G$, ako i samo ako postoji $\varepsilon > 0$ tako da je

$$\inf\{ |x-y| : y \in E \setminus G \} \geqslant \varepsilon, \text{ za svako } x \in G,$$

tj. ako i samo ako je

$$(x - \varepsilon,\ x + \varepsilon) \subset G, \text{ za svako } x \in G.$$

Vidimo dakle da je klasična topologija, asocirana topologiji $\mathscr{H}^{tp}$, upravo uobičajena topologija numeričke prave. Gore izvedene strukture $\mathscr{U}$, δ i $\mathscr{G}$, zovu se prirodnim strukturama numeričke prave.

Primer 3.1.2. Neka je σ mreža podskupova (ne obavezno svih) skupa E i neka je $\Lambda \in \sigma$ i $E \in \sigma$. Uzmimo σ za generator topogenog uređaja $<$ na E, tj. stavimo: $A < B \Leftrightarrow$ postoji $S \in \sigma$ sa svojstvom $A \subset S \subset B$. Kako je $A \subset S \subset S \subset B$ to je $A < S < B$, što znači da je i uslov $(\mathbf{S}_2)$ ispunjen, pa je $\mathscr{T} = \{<\}$ topogena struktura na E. Ta je struktura simetrična ako je σ Boole-ova algebra, perfektna ako je σ zatvorena u odnosu na operaciju unije $\cup$ i biperfektna ako je σ zatvorena u odnosu i na operaciju unije $\cup$ i na operaciju preseka $\cap$.

Primer 3.1.3. Uzmimo sada da je familija σ, posmatrana u prethodnom primeru, jednaka $P(E)$, tj. familija svih delova skupa E. Ako su A, B bilo koja dva dela skupa E i ako je $A \subset B$, tada je $A \subset A \subset B$ i zato $A < B$. Drugim rečima, sada je

$$A < B \Leftrightarrow A \subset B.$$

S obzirom na prethodni primer, lako je proveriti da je familija $\{<\}$ koja se sastoji samo iz jednog elementa $<$, biperfektna i simetrična topologija na E.

Fundamentalni sistem $\mathscr{B}$ okruženja dijagonale $\Delta \subset E \times E$ uniformne strukture $\mathscr{U}$ asocirane strukturi $\{<\}$ sastoji se samo iz Δ: jer, $U \in \mathscr{B}$, ako i samo ako iz $(x, y) \in U$ sledi x non $\subset E \setminus y$, a to je moguće samo kada je $x = y$, tj. mora biti $U = \Delta$. Uniformna struktura $\mathscr{U}$ je dakle diskretna. δ-strutura, asocirana strukturi $\{<\}$, dobiće se ovako: $(A, B) \in \delta \Leftrightarrow A$ non $\subset E \setminus B$, tj. $(A, B) \in \delta \Leftrightarrow A \cap B \neq \Lambda$. Ona se može dobiti i iz uniformne strukture $\mathscr{U}$ baze $\Delta : (A, B) \in \delta \Leftrightarrow$ postoji $(x, x) \in \Delta$ tako da je $x \in A$, $x \in B$ i zato $A \cap B \neq \Lambda$. Kako je dalje $\bar{G} \subset G$ za svako $G \subset E$, familija svih delova skupa E je klasična topologija asocirana strukturi $\{<\}$ (diskretna topologija na E).

Način, na koji je δ-struktura formirana iz uniformne strukture u ovom primeru, jeste specijalan slučaj jednog opšteg postupka koji se sastoji u sledećem. Neka je $\mathbf{S}$ simetrična sintopologija na E i neka je $\mathscr{U}$ uniformna struktura asocirana strukturi $\mathbf{S}$. Simetrični topogeni uređaj $<$, definisan sa $< = \cup\, \mathbf{S}$, biće jedini element simetrične topogene strukture $\mathbf{S}^t$ izvedene iz $\mathbf{S}$. Tada je δ-strukturu δ, asociranu strukturi $\mathbf{S}^t$, mogućno izvesti iz strukture $\mathscr{U}$ ovako: staviti $(A, B) \in \delta$, ako i samo ako za svako $U \in \mathscr{U}$ postoji $(x, y) \in U$ tako da je $x \in A$ i $y \in B$.

Pojam okoline, adherencije i interiora (unutrašnjosti) u sintopogenim prostorima. Neka je $[E, \mathbf{S}]$ sintopogeni prostor sintopogene strukture $\mathbf{S}$. Skup $Vx \subset E$ je okolina tačke $x \in E$ ako i samo ako postoji neki uređaj $< \in \mathbf{S}$ sa svojstvom $x < Vx$. Familija svih okolina svih tačaka iz E obrazuje jednu okolinsku bazu na E (u smislu definicije M. Fréchet-a) pa se na taj način strukturom $\mathbf{S}$ može na E definisati neki okolinski prostor. Ako je $A \subset E$, sa $\bar{A}$ se na uobičajen način označuje adherencija skupa A, pa je $x \in \bar{A}$, ako i samo ako za svaku okolinu Vx tačke x važi $Vx \cap A \neq \Lambda$. Slično tome, skup A je svuda gust na E, ako je $\bar{A} = E$. Tačka $x \in E$ je unutrašnja tačka skupa

A, ako i samo ako postoji uređaj $< \in \mathbf{S}$ tako da je $x < A$. Skup svih unutrašnjih tačaka skupa A zove se interior (unutrašnjost) skupa A. Skup A je otvoren, ako i samo ako je jednak svom interioru. Skup A je zatvoren, ako i samo ako je jednak svojoj adherenciji, itd.

Inverzna slika semitopogenog uređaja. Neka je $f: E \to E'$ jednoznačno preslikavanje neprazna skupa E u skup E' na kome je definisan semitopogeni uređaj $<'$. Za $A, B \subset E$ stavićemo sada

$$A < B \Leftrightarrow f(A) <' E' \setminus f(E \setminus B) = Cf(CB)$$

(gde C znači operator prelazi na komplement skupa). Tako definisana binarna relacija $<$ je semitopogeni uređaj na skupu E i označuje se sa $f^{-1}(<')$, tj. stavlja se

$$< = f^{-1}(<')$$

i zove se inverzna slika semitopogenog uređaja $<'$, određena funkcijom f. Ako je $<'$ topogeni uređaj na E', topogena je i njegova inverzna slika na E. Svojstva simetričnosti, perfektnosti i biperfektnosti uređaja $<'$ prenose se i na uređaj $f^{-1}(<')$. Specijalno, neka je $f: E_0 \to E$ identično (kanonsko) preslikavanje podskupa $E_0 \subset E$ u skup E na kom je definisan semitopogeni uređaj $<$. Njegova inverzna slika

$$<_0 = f^{-1}(<)$$

zove se restrikcija semitopogenog uređaja $<$ na podskup E_0 i označuje sa $< | E_0$, tj. stavlja se

$$<_0 = < | E_0 .$$

S obzirom na gornju definiciju, lako se vidi da za $A, B \subset E_0 \subset E$ važi

$$A <_0 B \Leftrightarrow A < B \cup (E \setminus E_0).$$

Naravno, simetričnost, topogenost i biperfektnost uređaja $<$ prenosi se i na uređaj $<_0$.

Za inverznu sliku $< = f^{-1}(<')$ semitopogenog uređaja $<'$ važi uopšte ovaj kriterijum: $A < B \Leftrightarrow$ postoje skupovi A', B' sa osobinom $A' <' B'$ i, sem toga, $A \subset f^{-1}(A')$ i $f^{-1}(B') \subset B$. Pokazuje se odatle da iz $A' <' B'$ sledi $f^{-1}(A') < f^{-1}(B')$.

Slika semitopogenog uređaja. Posmatrajmo opet preslikavanje $f: E \to E'$ skupa E u skup E' pri čemu je na E definisan semitopogeni uređaj $<$. Za $A', B' \subset E'$ stavićemo $A' <' B'$, ako i samo ako je $f^{-1}(A') < f^{-1}(B')$. Tada je binarna relacija $<'$ takođe semitopogeni uređaj na E i označuje se sa $f(<)$, tj. stavlja se $f(<) = <'$. Opet, topogenost, simetričnost, perfektnost i biperfektnost relacije $<$ prenosi se na sliku $f(<) = <'$. Važi $f(f^{-1}(<')) = <'$ za bilo koji semitopogeni uređaj $<'$ definisan na E'.

Inverzna slika sintopogene strukture. Neka je $f \to [E', \mathcal{S}']$ jednoznačno preslikavanje neprazna skupa E_μ u sintopogeni prostor $[E', \mathcal{S}']$ sintopogene strukture $\mathcal{S}'$. Stavimo sada

$$\mathcal{S} = f^{-1}(\mathcal{S}') = \{f^{-1}(<') : <' \in \mathcal{S}'\}.$$

Nije teško proveriti da je $\mathcal{S}$ sintopogena struktura na skupu E. Ona se zove inverznom slikom sintopogene strukture $\mathcal{S}'$ posredstvom funkcije f. Inverzna slika topogene strukture je topogena. Ako je sintopogena struktura $\mathcal{S}$ simetrična, perfektna ili biperfektna, takva je i njena inverzna slika.

Potprostor sintopogenog prostora. Neka je $[E, \mathcal{S}]$ sintopogeni prostor sintopogene strukture $\mathcal{S}$ i neka je E_0 neprazan dep skupa E.
Stavićemo

$$\mathcal{S} \mid E_0 = \{ < \mid E_0 : < \in \mathcal{S}\}.$$

Sintopogena struktura $\mathcal{S} \mid E_0$ zove se restrikcija sintopogene strukture $\mathcal{S}$ na podskup E_0, a sintopogeni prostor $[E_0, \mathcal{S} \mid E_0]$ zove se potprostor prostora $[E, \mathcal{S}]$. Naravno, ako je struktura $\mathcal{S}$ topogena, simetrična, perfektna ili biperfektna, takva je i struktura $\mathcal{S} \mid E_0$. Opet, odatle se kao specijalni slučajevi dobijaju potprostori topoloških prostora, δ-prostora i uniformnih prostora.

Neprekidna preslikavanja sintopogenih prostora. Neka je

$$f : [E, \mathcal{S}] \to [E', \mathcal{S}']$$

jednoznačno preslikavanje sintopogenog prostora $[E, \mathcal{S}]$ sintopogene strukture $\mathcal{S}$ u sintopogeni prostor $[E', \mathcal{S}']$ strukture $\mathcal{S}'$. Za funkciju f kaže se da je $(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$-neprekidna, ako je struktura $\mathcal{S}$ finija od inverzne slike $f^{-1}(\mathcal{S}')$ strukture $\mathcal{S}'$. Drugim rečima: za svaki topogeni uređaj $<' \in \mathcal{S}'$ postoji topogeni uređaj $< \in \mathcal{S}$ takav da iz $A, B \subset E$ i $f(A) <' E' \setminus f(E \setminus B)$ sledi $A < B$.

Važi kriterijum: funkcija f je $(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$-neprekidna, ako i samo ako iz $A', B' \subset E'$ i $A' <' B'$ sledi $f^{-1}(A') < f^{-1}(B')$.

VAŽI STAV: *Neka je* $f : [E, \mathcal{S}] \to [E', \mathcal{S}']$ *funkcija* $(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$*-neprekidna i neka je* $\mathcal{S}_1$ *sintopogena struktura na* E *finija od* $\mathcal{S}$, *a* $\mathcal{S}_1'$ *sintopogena struktura na* E' *grublja od* $\mathcal{S}'$. *Tada je funkcija* f *i* $(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_1')$*-neprekidna.*

Neka je funkcija f obostrano jednoznačno preslikavanje sintopogenog prostora $[E, \mathcal{S}]$ na sintopogeni prostor $[E', \mathcal{S}']$. Ako je funkcija f $(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$-neprekidna, a njena inverzna funkcija f^{-1} je $(\mathcal{S}', \mathcal{S})$-neprekidna, kaže se tada da je f izomorfizam tih prostora.

Primer 3.1.4. Neka je f jednoznačno preslikavanje sintopogenog prostora $[E, \mathcal{S}]$ u skup svih realnih brojeva koji ćemo ovde označiti sa E'. Tada važe stavovi:

Funkcija f je $(\mathcal{S}, \mathcal{J})$ neprekidna, ako i samo ako za svako A_0 postoji uređaj $< \in \mathcal{S}$ takav da je

$$f^{-1}((-\infty,]) < f^{-1}(-\infty, x+\varepsilon)), \quad -\infty \leqslant x \leqslant \infty.$$

Funkcija f je $(\mathcal{S}, \mathcal{J}^c)$-negrekidna, ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji uređaj $\in \mathcal{S}$ takav da je $f^{-1}([x, \infty)) < f^{-1}((x-\varepsilon, \infty))$, $-\infty \leqslant x \leqslant \infty$.

Neka je f realna funkcija (tako nazivamo svaku funkciju čiji je kodomen skup E' realnih brojeva) definisana na biperfektnom sintopogenom prostoru $[E, \mathcal{S}]$ i neka je $\mathcal{U}$ kvaziuniformna struktura asocirana strukturi $\mathcal{S}$. Funkcija f je $(\mathcal{S}, \mathcal{J})$-neprekidna $[(\mathcal{S}, \mathcal{J}^c)$-neprekidna], ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji relacija $U \in \mathcal{U}$ tako da iz $(x, y) \in U$ sledi $f(y) - f(x) < \varepsilon$ $[f(x) - f(y) < \varepsilon]$.

Neka je f realna funkcija definisana na topološkom prostoru $[E, \mathcal{T}]$ i neka je $\mathcal{G}$ familija otvorenih skupova klasične topologije asocirane strukturi $\mathcal{T}$. Funkcija f je $(\mathcal{T}, \mathcal{J}^{tp})$-neprekidna (semineprekidna odozgo) $[(\mathcal{T}, \mathcal{J}^{ctp})$-neprekidna (semineprekidna odozdo)], ako i samo ako je $f^{-1}((-\infty, x)) \in \mathcal{G}$ $[f^{-1}((x, \infty)) \in \mathcal{G}]$.

Neka je f realna funkcija definisana na biperfektnom sintopogenom prostoru $[E, \mathcal{S}]$ i neka je $\mathcal{U}$ kvaziuniformna struktura asocirana strukturi $\mathcal{S}$. Funkcija f je $(\mathcal{S}, \mathcal{H})$-reprekidna, ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji relacija $U \in \mathcal{U}$ tako da iz $(x, y) \in U$ sledi $|f(y) - (x)| < \varepsilon$.

Neka je f realna funkcija definisana na simetričnom topogenom prostoru $[E, \mathcal{T}]$ i neka je δ δ-struktura asocirana strukturi $\mathcal{T}$. Funkcija f je $(\mathcal{T}, \mathcal{H}^t)$-neprekidna, ako i samo ako za $(A, B) \in \delta$ sledi $\rho(f(A), f(B)) = 0$.

Neka je f realna funkcija definisana na topološkom prostoru $[E, \mathcal{T}]$. Funkcija f je $(\mathcal{T}, \mathcal{H}^{tp})$-neprekidna, ako i samo ako iz

$$\rho(f(x), f(E \setminus B)) > 0 \quad \text{sledi} \quad x < B.$$

Proizvod sintopogenih prostora. Evo najpre još nekoliko definicija koje će nam trebati. Neka je $<$ semitopogeni uređaj na E. Tada je na E moguće definisati topogeni uređaj $<^q$ ovako: $A <^q B \Leftrightarrow$ postoje prirodni brojevi m, n i skupovi A_i, B_j, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$, tako da je

$$A = \cup \{A_i : i = 1, 2, \ldots, m\}, \; B = \cap \{B_j : j = 1, 2, \ldots, n\},$$

i

$$A_i < B_j$$

za svako $i = 1, 2, \ldots, m$ i svako $j = 1, 2, \ldots, n$.

Pokazuje se da je $<^q$ topogeni uređaj finiji od $<$ i grublji od svih topogenih uređaja na E koji su finiji od $<$.

Neka su dalje $\mathfrak{S}_1$ i $\mathfrak{S}_2$ dve sintopogene strukture na E. Kaže se da je struktura $\mathfrak{S}_2$ finija od strukture $\mathfrak{S}_1$ i piše se $\mathfrak{S}_1 < \mathfrak{S}_2$, ako za svaki topogeni uređaj $<_1 \in \mathfrak{S}_1$ postoji topogeni uređaj $<_2 \in \mathfrak{S}_2$ finiji od $<_1$, tj. takav da je $<_1 \subset <_2$. Strukture $\mathfrak{S}_1$ i $\mathfrak{S}_2$ su ekvivalentne ako je istovremeno $\mathfrak{S}_1 < \mathfrak{S}_2$ i $\mathfrak{S}_2 < \mathfrak{S}_1$, što se označuje kraće sa $\mathfrak{S}_1 \sim \mathfrak{S}_2$.

Neka je sada data familija sintopogenih struktura na jednom istom skupu E:

$$\mathfrak{S}^\lambda = \{ <^\lambda_\gamma : \gamma \in \Gamma_\lambda \}, \ \lambda \in (\lambda),$$

gde su Γ_λ i (λ) dati skupovi indeksa γ odnosno λ. Tada je mogućno definisati sintopogenu strukturu koja se označuje sa

$$\underset{\lambda \in (\lambda)}{V} \mathfrak{S}^\lambda$$

čiji su elementi topogeni uređaji

$$< = (\underset{(\lambda)^*}{\cup} <^\lambda_{\gamma_\lambda})^q$$

gde $(\lambda)^*$ znači proizvoljan konačni skup indeksa λ, tj. $(\lambda)^* \subset (\lambda)$.

Sintopogena struktura $\underset{\lambda \in (\lambda)}{V} \mathfrak{S}^\lambda$ finija je od svake strukture $\mathfrak{S}^\lambda, \lambda \in (\lambda)$ i grublja od svake strukture koja je finija od svih struktura $\mathfrak{S}^\lambda$.

Uzmimo sada datu familiju sintopogenih prostora $[E_\lambda, \mathfrak{S}^\lambda]$, $\lambda \in (\lambda)$ i neka je

$$E = \Pi \{E^\lambda : \lambda \in (\lambda)\} = \underset{(\lambda)}{\Pi} E^\lambda$$

kombinirani proizvod svih skupova $E^\lambda, \lambda \in (\lambda)$. Označimo sa f_λ projekciju skupa E na E^λ, tj. za $x \in E$ je $f_\lambda(x) = x(\lambda) \in E^\lambda$. Funkcijama f_λ određene su istovremeno inverzne slike

$$f_\lambda^{-1}(\mathfrak{S}^\lambda)$$

struktura $\mathfrak{S}^\lambda$, a one su sintopogene strukture na E. Definišimo sada na skupu E sintopogenu strukturu

$$\mathfrak{S} = \underset{\lambda \in (\lambda)}{\times} \mathfrak{S}^\lambda$$

stavljajući

$$\underset{\lambda \in (\lambda)}{\times} \mathfrak{S}^\lambda = \underset{\lambda \in (\lambda)}{V} f^{-1}(\mathfrak{S}^\lambda).$$

Time smo na $E = \prod_{\lambda \in (\lambda)} E^\lambda$ definisali sintopogeni prostor

$$[E = \prod_{(\lambda)} E^\lambda, \mathcal{S}]$$

koji se zove proizvod sintopogenih prostora $[E^\lambda, \mathcal{S}^\lambda]$, $\lambda \in (\lambda)$.

Mogućno je pokazati da se sintopogena struktura $\mathcal{S}$ sastoji iz sledećih topogenih uređaja $<$. Neka je

$$\mathcal{S}^\lambda = \{ <^\lambda_\gamma : \gamma \in \Gamma_\lambda \}, \ \lambda \in (\lambda), \ A, B \subset E,$$

i neka $(\lambda)^\star \subset (\lambda)$ prolazi svim konačnim podskupovima skupa (λ). Za određeni konačni skup $(\lambda)^\star$ stavlja se da je

$$A < B,$$

ako i samo ako postoji prirodan broj m takav da je

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{i=m} A_i, \qquad \bigcup_{i=1}^{i=m} B_i \subset B,$$

pri čemu je

$$A_i = \prod_{(\lambda)} A_i^\lambda, \quad B_i = \prod_{(\lambda)} B_i^\lambda, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

gde je

$$A_i^\lambda <^\lambda_{\gamma_\lambda} B_i^\lambda \quad \text{za} \quad i = 1, 2, \ldots, m \quad \text{i} \quad \lambda \in (\lambda)^\star, \ \gamma_\lambda \in \Gamma_\lambda,$$

$$A_i^\lambda = B_i^\lambda = E^\lambda \quad \text{za} \quad i = 1, 2, \ldots, m \quad \text{i} \quad \lambda \in (\lambda) \setminus (\lambda)^\star.$$

Dalje važi ovaj stav:

Neka je $[\prod_{(\lambda)} E_\lambda, \mathcal{S}]$ proizvod sintopogenih prostora $[E_\lambda, \mathcal{S}^\lambda]$, $\lambda \in (\lambda)$, neka su $E^\lambda_\ast \subset E^\lambda$ podskupovi skupova E^λ i stavimo:

$$\mathcal{S}^\lambda_\ast = \mathcal{S}^\lambda \mid E^\lambda_\ast, \ \lambda \in (\lambda),$$

$$E_\ast = \prod_{(\lambda)} E^\lambda_\ast, \quad \mathcal{S}_\ast = \mathop{\times}_{\lambda \in (\lambda)} \mathcal{S}^\lambda_\ast.$$

Tada je

$$\mathcal{S}_\ast = \mathcal{S} \mid E_\ast.$$

Uzmimo, specijalno, jedno fiksirano $\mu \in (\lambda)$ pa stavimo

$$E_*^{\mu} = E^{\mu}$$

i, za $\lambda \neq \mu$,

$$E_*^{\lambda} = \{x^{\lambda}\},$$

tj. za $\lambda \neq \mu$, uzmimo samo po jednu tačku x^{λ} iz E^{λ}. Neka je f_{μ} projekcija proizvoda

$$E = \prod_{(\lambda)} E^{\lambda}$$

na skup E^{μ} i stavimo

$$E_{\mu} = \prod_{(\lambda)} E_*^{\lambda}$$

pri čemu je, dakle, na desnoj strani $E_*^{\lambda} = \{x^{\lambda}\}$ za $\lambda \neq \mu$ i $E_*^{\mu} = E^{\mu}$.

Posmatrajmo sada restrikciju $f_{\mu} \mid E_{\mu}$ funkcije f_{μ} na skup E_{μ} i sintopogenu strukturu

$$\mathbf{S}_{\mu} = \mathbf{S} \mid E_{\mu}.$$

Pokazuje se tada da je sintopogeni prostor

$$[E_{\mu}, \mathbf{S}_{\mu}]$$

izomorfan sa prostorom $[E^{\mu}, \mathbf{S}^{\mu}]$.

Neka je opet $[E = \prod_{(\lambda)} E^{\lambda}, \mathbf{S}]$ proizvod sintopogenih prostora $[E^{\lambda}, \mathbf{S}^{\lambda}]$, $\lambda \in (\lambda)$. Prema definiciji topogenih uređaja $< \in \mathbf{S}$, ako uzmemo bilo koju tačku $x = \prod_{(\lambda)} x_{\lambda}$, i skup $B \subset E$ takav da je

$$x < B$$

postojaće skup B_1 i konačan skup $(\lambda)^* \subset (\lambda)$ indeksa λ takav da je

$$B_1 = \prod_{(\lambda)} B_1^{\lambda} \subset B,$$

$$x_{\lambda} <^{\lambda}_{\gamma_{\lambda}} B_1^{\lambda} \quad \text{za} \quad \lambda \in (\lambda)^*$$

pri čemu je

$$B_1^{\lambda} = E^{\lambda}, \; \lambda \in (\lambda) \setminus (\lambda)^*.$$

S obzirom na definiciju okolina tačaka u sintopogenim prostorima, to znači da je skup B jedna okolina tačke x i, prema tome, svaka okolina Vx tačke x sadrži neki skup oblika B_1.

3.2. $\mathcal{S}$-koneksni prostori

Izložićemo sada definiciju $\mathcal{S}$-koneksnih sintopogenih prostora sa nekoliko rezultata koje su Sieber i Pervin dali u radu [1].

DEFINICIJA 3.2.1. *Sintopogeni prostor* [E, $\mathcal{S}$] *je* $\mathcal{S}$*-koneksan, ako i samo ako nema* ($\mathcal{S}, \mathcal{D}$)*-neprekidnih preslikavanja prostora* [E, $\mathcal{S}$] *na diskretan sintopogeni prostor* [D, $\mathcal{D}$], *gde je* D $= \{0,1\}$, *a* $\mathcal{D}$ *diskretna sintopogena struktura na skupu* D.

Napomenimo da jedina preslikavanja sintopogenog prostora $[E, \mathcal{S}]$ *u* prostor $[D, \mathcal{D}]$ jesu konstante koje su, očevidno, ($\mathcal{S}, \mathcal{D}$)-neprekidne.

DEFINICIJA 3.2.2. *Neprazni skupovi* A, B $\subset$ E *sintopogenog prostora* [E, $\mathcal{S}$] *su uzajamno* $\mathcal{S}$*-separisani ili* $\mathcal{S}$*-odeljeni, ako i samo ako postoji topogeni uređaj* $<$ *u sintopogenoj strukturi* $\mathcal{S}$ *takav da je*

$$A < E \setminus B \quad \text{i} \quad B < E \setminus A.$$

Skupovi A, B su uzajamno $\mathcal{S}$-svezani, ako i samo ako nisu uzajamno $\mathcal{S}$-odeljeni.

STAV 3.2.1. *Sintopogeni prostor* [E, $\mathcal{S}$] *je* $\mathcal{S}$*-koneksan, ako i samo ako se ne može razložiti u dva uzajamno* $\mathcal{S}$*-odeljena skupa.*

Dokaz. Neka je sintopogeni prostor $[E, \mathcal{S}]$ $\mathcal{S}$-koneksan pa pretpostavimo da se može razložiti u dva $\mathcal{S}$-odeljena skupa A i B. Definišimo preslikavanje $f: E \to \{0,1\}$ ovako:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } x \in A, \\ 1, & \text{,, ,, } x \in B. \end{cases}$$

Kako je $\{0\} \subset \{0\}$ pa zato $\{0\} < \{0\}$ i $\{1\} \subset \{1\}$ pa zato $\{1\} < \{1\}$, postoji topogeni uređaj $<' \mathcal{S}$ takav da je

$$f^{-1}(\{0\}) <' f^{-1}(\{0\})$$

i

$$f^{-1}(\{1\}) <' f^{-1}(\{1\})$$

Tako imamo jednu ($\mathcal{S}, \mathcal{D}$)-neprekidnu funkciju f koja nije konstanta pa prostor $[E, \mathcal{S}]$ ne može biti $\mathcal{S}$-koneksan, suprotno pretpostavci.

Obratno, uzmimo da se prostor $[E, \mathbf{S}]$ ne može razložiti u dva neprazna i uzajamno $\mathbf{S}$-odeljena skupa, a da ipak postoji $(\mathbf{S}, \mathscr{D})$-neprekidno preslikavanje $f: E \to [D, \mathscr{D}]$ koje nije konstanta. Stavimo

$$A = f^{-1}(\{0\}) \quad \text{i} \quad B = f^{-1}(\{1\}).$$

Kako je $\{0\} < \{0\}$ i $\{1\} < \{1\}$ postoji $<' \in \mathbf{S}$ tako da je $A <' A$ i $B <' B$, tj.

$$A <' E \setminus B \quad \text{i} \quad B <' E \setminus A,$$

jer je $A \cup B = E$ i $A \cap B = \Lambda$. Tako smo našli dva uzajamno $\mathbf{S}$-odeljena skupa koji razlažu skup E, suprotno pretpostavci. Time je stav dokazan.

STAV 3.2.2. *Sintopogeni prostor* $[E, \mathbf{S}]$ *je* $\mathbf{S}$*-koneksan, ako i samo ako ne postoji pravi deo* A *skupa* E *i topogeni uređaj* $< \in \mathbf{S}$ *takav da je*

$$A < A \text{ i } E \setminus A < E \setminus A.$$

Dokaz. Uzmimo da je prostor $[E, \mathbf{S}]$ $\mathbf{S}$-koneksan i da ipak postoji njegov pravi deo A sa osobinama navedenim u stavu. Stavimo $E \setminus A = B$. Biće tada

$$A < E \setminus B \text{ i } B < E \setminus A,$$

pa se skup E može razložiti na dva uzajamno $\mathbf{S}$-odeljena skupa. Prema prethodnom stavu to znači da prostor $[E, \mathbf{S}]$ ne bi bio $\mathbf{S}$-koneksan suprotno pretpostavci.

Obratno, ako prostor $[E, \mathbf{S}]$ nije $\mathbf{S}$-koneksan, on se može razložiti na dva uzajamno $\mathbf{S}$-odeljena skupa A i B tako da je

$$A \cup B = E, \quad A \cap B = \Lambda$$

$$A < E \setminus B, \quad B < E \setminus A.$$

Kako je $E \setminus B = A$, biće $A < A$ i $E \setminus A < E \setminus A$, pa je ispunjen uslov stava 3.3.2. Time je taj stav dokazan.

Kada je sintopogena struktura $\mathbf{S}$ simetrična, uslov $E \setminus A < E \setminus A$ u prethodnom stavu može izostati jer je automatski ispunjen čim je $A < A$.

STAV 3.2.3. *Neka je* $[A, \mathbf{S} \mid A]$ *potprostor sintopogenog prostora* $[E, \mathbf{S}]$. *Podskupovi* $P, Q \subset A$ *skupa* A *sa uzajamno* $\mathbf{S} \mid A$*-odeljeni, ako i samo ako su uzajamno* $\mathbf{S}$*-odeljeni.*

Dokaz. Stavimo

$$\mathcal{S}_0 = \mathcal{S} \mid A \quad \text{i} \quad <_0 = < \mid A \quad \text{za} \quad < \in \mathcal{S}.$$

Tada je za $X, Y \subset A$,

$$X <_0 Y \Leftrightarrow X < Y \cup (E \setminus A).$$

Prema tome

$$P <_0 A \setminus Q \Leftrightarrow P < (A \setminus Q) \cup (E \setminus A) = E \setminus Q$$

i

$$Q <_0 A \setminus P \Leftrightarrow Q < (A \setminus P) \cup (E \setminus A) = E \setminus P.$$

Odatle odmah sledi da je

$$P <_0 A \setminus Q \quad \text{i} \quad Q <_0 A \setminus P$$

ako i samo ako je

$$P < E \setminus Q \quad \text{i} \quad Q < E \setminus P.$$

Time je dokaz stava završen.

DEFINICIJA 3.2.3. *Skup* A $\subset$ E *u sintopogenom prostoru* [E, $\mathcal{S}$] *je* $\mathcal{S}$*-koneksan, ako i samo ako je* $\mathcal{S} \mid$ A*-koneksan potprostor* [A, $\mathcal{S} \mid$ A].

STAV. 3.2.4. *Podskup* A *sintopogenog prostora* [E, $\mathcal{S}$] *je* $\mathcal{S}$*-koneksan, ako i samo ako se ne može razložiti na dva uzajamna* $\mathcal{S}$*-odeljena skupa.*

Dokaz. To neposredno sledi iz stava 3.2.3.

STAV 3.2.5. *Neka je* f $(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$*-neprekidno preslikavanje* $\mathcal{S}$*-koneksnog sintopogenog prostora* [E, $\mathcal{S}$] *na sintopogeni prostor* [E', $\mathcal{S}'$]. *Tada je i prostor* [E', $\mathcal{S}'$] $\mathcal{S}'$*-koneksan.*

Dokaz. Pretpostavimo da prostor $[E', \mathcal{S}']$ nije $\mathcal{S}'$-koneksan. Tada postoji pravi deo $A' \subset E'$ takav da je

$$A' <' A' \quad \text{i} \quad E' \setminus A' <' E' \setminus A'$$

za neko $<' \in \mathcal{S}'$, prema stavu 3.2.2. Zbog $[\mathcal{S}\ \mathcal{S}']$-neprekidnosti funkcije f, tada postoji sintopogeni uređaj $< \in \mathcal{S}$ takav da je

$$f^{-1}(A') < f^{-1}(A')$$

i

$$E \setminus f^{-1}(A') < E \setminus f^{-1}(A').$$

Kako je $f^{-1}(A')$ pravi deo skupa E, prostor $[E, \mathfrak{S}]$ ne bi bio $\mathfrak{S}$-koneksan, suprotno pretpostavci. Time je stav dokazan.

Evo sada još nekoliko stavova analognih stavovima koji se odnose na τ-koneksnost (vidi § 1.1.).

STAV 3.2.6. *Neka je skup* A $\mathfrak{S}$*-koneksan u sintopogenom prostoru* $[E, \mathfrak{S}]$ *i neka je* $A \subset M \cup N$, *gde su* M, N *dva uzajamnn* $\mathfrak{S}$*-odeljena skupa u* $[E, \mathfrak{S}]$. *Tada je ili* $A \subset M$ *ili* $A \subset N$.

Dokaz. Pretpostavimo da je i $A \cap M \neq \Lambda$ i $A \cap N \neq \Lambda$. Tada je

$$A \cap M \subset M < E \setminus N \subset E \setminus A \cap N$$

i

$$A \cap N \subset N < E \setminus M \subset E \setminus A \cap M,$$

za neko $< \in \mathfrak{S}$. Zato je

$$A \cap M < E \setminus A \cap N$$

i

$$A \cap N < E \setminus A \cap M,$$

pa kako je

$$(A \cap N) \cup (A \cap M) = A,$$

to znači da bi se skup A mogao prikazati kao unija dva uzajamno $\mathfrak{S}$-separisana skupa, suprotno pretpostavci da je skup A $\mathfrak{S}$-koneksan. Tako je stav dokazan.

STAV 3.2.7. *Ako su neprazni skupovi* A *i* B *sintopogenog prostora* $[E, \mathfrak{S}]$ $\mathfrak{S}$*-koneksni i uzajamno* $\mathfrak{S}$*-svezani, tada je i njihova unija* $\mathfrak{S}$*-koneksni skup.*

Dokaz. Pretpostavimo da unija $A \cup B$ nije $\mathfrak{S}$-koneksna Tada bi postojala dva uzajamno $\mathfrak{S}$-odeljena neprazna skupa M i N sa osobinom $M \cup N = A \cup B$. Prema prethodnom stavu je ili $A \subset M$ ili $A \subset N$. Neka je $A \subset M$. Slično tome, ili je $B \subset M$ ili je $B \subset N$. Ako bi bilo i $B \subset M$ onda bi bilo $A \cup B = M$ suprotno pretpostavci da skupovi M i N predstavljaju jedno $\mathfrak{S}$-odvajanje unije $A \cup B$. Zato bi moralo aiti $B \subset N$, a to je takođe nemogućno jer tada skupovi A i B ne bi bili uzajamno $\mathfrak{S}$-svezani, suprotno pretpostavci. Time je stav dokazan.

STAV 3.2.8 *Neka je* A_λ, $\lambda \in (\lambda)$, *proizvoljna familija nepraznih skupova u sintopogenom prostoru* $[E, \mathfrak{S}]$ *takva da su, za prizvoljno* $\lambda, \mu \in (\lambda)$, *skupovi* A_λ *i* A_μ $\mathfrak{S}$*-koneksni i uzajamno* $\mathfrak{S}$*-svezani. Tada je i njihova unija* $\cup \{A_\lambda : \lambda \in (\lambda)\}$ $\mathfrak{S}$*-koneksni skup.*

Dokaz. Ako pretpostavimo suprotno, postojao bi par uzajamno $\mathcal{S}$-odeljenih skupova M i N sa osobinom

$$M \cup N = \cup \{A_\lambda : \lambda \in (\lambda)\}.$$

To znači da za proizvoljna dva indeksa λ i μ skupovi A_λ i A_μ ne bi u isti mah mogli biti ni u M ni u N, a ne bi se moglo desiti ni to da jedan bude sadržan u M a drugi u N. Naravno, to je apsurd čime se završava i dokaz.

STAV 3.2.9 *Neka je* $A_\lambda, \lambda \in (\lambda)$, *proizvoljna familija* $\mathcal{S}$-*koneksnih skupova čiji presek nije prazan,*

$$\cap \{A_\lambda : \lambda \in (\lambda)\} \neq \Lambda.$$

Tada je i unija tih skupova $\mathcal{S}$-*koneksna.*

Dokaz. Neposredna posledica prethodnog stava.

STAV 3.2.10 *Neka je* A *neprazni* $\mathcal{S}$-*koneksni skup sintopogenog prostora* $[E, \mathcal{S}]$ *i* $B \subset E$ *sa osobinom da je* $A \subset B \subset \overline{A}$, *gde je* $\overline{A}$ *adherencija skupa* A, *izvedena iz strukture* $\mathcal{S}$. *Tada je i skup* B $\mathcal{S}$-*koneksan. Specijalno, adheroncija* $\overline{A}$ $\mathcal{S}$-*koneksnog skupa* A *je* $\mathcal{S}$-*koneksan skup.*

Dokaz. Ako skup B ne bi bio $\mathcal{S}$-koneksan, postojala bi dva uzajamno $\mathcal{S}$-odeljena skupa M i N sa osobinom $M \cup N = B$. Kako je $\mathcal{S}$-koneksni skup A sadržan u skupu B, prema stavu 3.2.6. ili je $A \subset M$ je $A \subset N$. Neka je $A \subset N$. Uzmimo neku tačku $x \in M$. Postoji neki topogeni uređaj $< \in \mathcal{S}$ tako da je $x \in M < B \setminus N \subset B \setminus A$ i zato $x < B \setminus A$. To znači da je skup $B \setminus A$ neka okolina tačke x u prostoru $[E, \mathcal{S}]$. No kako je takođe $x \in \overline{A}$, to znači da presek $A \cap (B \setminus A)$ ne bi mogao biti prazan, što u stvari jeste jer je $A \subset B$. Tako smo došli do kontradikcije, pa je stav dokazan.

Posmatrajmo sada proizvod sintopogenih prostora.

STAV 3.2.11. *Proizvod* $[E, \mathcal{S}]$ *sintopogenih prostora* $[E^\lambda, \mathcal{S}^\lambda]$, $\lambda \in (\lambda)$, *je* $\mathcal{S}$-*koneksan, ako i samo ako je svaki sintopogeni prestor* $[E^\lambda, \mathcal{S}^\lambda]$ $\mathcal{S}^\lambda$-*koneksan,* $\lambda \in (\lambda)$.

Dokaz. Neka je $[E, \mathcal{S}]$ $\mathcal{S}$-koneksan i neka je $f_\lambda : E \to E^\lambda$ projekcija proizvoda E na $E^\lambda, \lambda \in (\lambda)$. Kako su funkcije f_λ $[\mathcal{S}, \mathcal{S}^\lambda]$-neprekidne, prema stavu 3.2.5. svaki prostor $[E^\lambda, \mathcal{S}^\lambda]$ je $\mathcal{S}^\lambda$-koneksan. Obratno, neka su svi prostori-faktori $[E^\lambda, \mathcal{S}^\lambda]$, $\mathcal{S}^\lambda$-koneksni. Fiksirajmo jednu određenu tačku $a \in E$, $a = \{a_\lambda\}$, pri čemu je dakle, $f_\lambda(a) = a_\lambda \in E^\lambda$, $\lambda \in (\lambda)$. Fiksirajmo sada i jedan određeni indeks $\mu_1 \in (\lambda)$ pa formirajmo potprostor

$$[E\mu_1, \mathcal{S}\mu_1],$$

gde je

$$E_{\mu_1} = \prod_{(\omega)} E_*{}^\lambda, \quad \mathfrak{s}_{\mu_1} = \mathfrak{s} \mid E_{\mu_1},$$

pri čemu je $E_*{}^{\mu_1} = E^{\mu_1}$, $E_*{}^\lambda = a_\lambda$, za $\lambda \neq \mu_1$, tj. za $\lambda \neq \mu_1$ skupovi $E_*{}^\lambda$ sastoje se od po jedne tačke a_λ. Kako je prostor $[E_{\mu_1}, \mathfrak{s}_{\mu_1}]$ izomorfan sa prostorom $[E^{\mu_1}, \mathfrak{s}^{\mu_1}]$, a ovaj je po pretpostavci $\mathfrak{s}^{\mu_1}$-koneksan, to je i prostor $[E_{\mu_1}, \mathfrak{s}_{\mu_1}]$ $\mathfrak{s}_{\mu_1}$-koneksan. Zato je skup E_{μ_1} $\mathfrak{s}$-koneksan.

Neka je sada $\mu' = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n\}$ proizvoljan konačan skup indeksa μ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, pa formirajmo potprostor

$$[E_{\mu'}, \mathfrak{s}_{\mu'}]$$

gde je

$$E_{\mu'} = \prod_{(\omega)} E_*{}^\lambda, \quad \mathfrak{s}_{\mu'} = \mathfrak{s} \mid E_{\mu'},$$

pri čemu je

$$E_*{}^{\mu_1} = E^{\mu_1}, \ldots, E_*{}^{\mu_n} = E^{\mu_n}$$

i

$$E_*{}^\lambda = a_\lambda, \quad \text{za} \quad \lambda \neq \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n,$$

tj. za te indekse λ skupovi $E_*{}^\lambda$ sastoje se od po jedne tačke a_λ. Polazeći od već formiranog $\mathfrak{s}_{\mu_1}$-koneksnog prostora $[E_{\mu_1}, \mathfrak{s}_{\mu_1}]$, matematičkom indukcijom pokazuje se da je potprostor $[E_{\mu'}, \mathfrak{s}_{\mu'}]$ $\mathfrak{s}_{\mu'}$-koneksan. Zato je skup $E_{\mu'}$ $\mathfrak{s}$-koneksan i, sem toga, sadrži tačku a.

Posmatrajmo sada uniju $A = \cup E_{\mu'}$ kada μ' prolazi svim konačnim skupovima $\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n\}$ indeksa iz (λ). Skup A sadrži tačku a i, prema stavu 3.2.9, on je $\mathfrak{s}$-koneksan. Dokazaćemo sada da je $\overline{A} = E$, tj. da je skup A svuda gust u E. Uzmimo bilo koju tačku $x = \{x_\lambda\} \in E$ i bilo koju okolinu Vx tačke x u prostoru $[E, \mathfrak{s}]$. Odmah možemo pretpostaviti da je Vx oblika

$$\prod_{(\omega)} B^\lambda,$$

pri čemu je

$$x_\lambda <^\lambda{}_{\gamma_\lambda} B^\lambda \quad \text{za} \quad \lambda \in (\lambda)^*,$$

i

$$B^\lambda = E^\lambda \quad \text{za } \lambda \in (\lambda) \setminus (\lambda)^*,$$

gde $(\lambda)^*$ znači konačan skup indeksa iz skupa (λ). Stavimo sada $(\lambda)^* = \mu'$ pa uzmimo jednu tačku b iz Vx koja ima tu osobinu da je $f_\lambda(b) = a_\lambda \in E^\lambda$ za $(\lambda) \setminus (\lambda)^*$, tj. za $\lambda \in (\lambda) \setminus \mu'$, a inače je $f_\lambda(b) = b_\lambda \in B^\lambda, b_\lambda \neq a_\lambda$, za $\lambda \in (\lambda)^* = \mu'$. Očigledno je $b \in A$ i zato $A \cap Vx \neq \Lambda$, tj. $x \in \overline{A}$. Zato je $\overline{A} = E$. Prema stavu 3.2.10. to znači da je prostor $[E, \mathfrak{s}]$ $\mathfrak{s}$-koneksan, što je trebalo dokazati.

Posmatraćemo sada proizvode δ-prostora i $\mathcal{U}$-prostora i pokazati da su oni δ-koneksni odnosno $\mathcal{U}$-koneksni, ako su takvi faktori. No prethodno ćemo definisati $\mathbf{S}^t$ strukturu i jedan stav u vezi sa tom strukturom. Neka je dat sintopogeni prostor $[E, \mathbf{S}]$, pa polazeći od sintopogene strukture $\mathbf{S}$ stavićemo

$$< = \cup \mathbf{S},$$

tj. za skupove $A, B \subset E$ biće

$$A < B,$$

ako i samo ako postoji topogeni uređaj $<_1 \in \mathbf{S}$ takav da je

$$A <_1 B.$$

Struktura, koja se dakle sastoji samo iz jednog topogenog uređaja $<$, takođe je sintopogena i označuje se sa $\mathbf{S}^t$. Tako možemo definisati novi sintopogeni prostor $[E, \mathbf{S}^t]$ pa je očigledno da važi stav:

STAV 3.2.12. *Sintopogeni prostor* $[E, \mathbf{S}^t]$ *je* $\mathbf{S}^t$*-koneksan, ako i samo ako je sintopogeni prostor* $[E, \mathbf{S}]$ $\mathbf{S}$*-koneksan.*

Uzmimo sada proizvoljnu familiju simetričnih topogenih prostora

$$[E^\lambda, \mathcal{T}^\lambda], \ \lambda \in (\lambda),$$

kojima su asogirani odgovarajući δ^λ-prostori

$$(E^\lambda, \delta^\lambda).$$

Ako stavimo

$$E = \prod_{(\lambda)} E^\lambda,$$

$$\mathbf{S} = \times_{\lambda \in (\lambda)} \mathcal{T}^\lambda, \ \mathcal{T} = \mathbf{S}^t,$$

onda će se definisati proizvod

$$[E, \mathcal{T}]$$

koji je takođe simetrični topogeni prostor sa odgovarajućom asociranom δ-strukturom δ, tj. δ-prostorom (E, δ). Taj δ-prostor je, prema definicijama A. Császára, proizvod δ^λ-prostora $(E^\lambda, \delta^\lambda)$, $\lambda \in (\lambda)$. Vodeći računa o definicijama iz teorije sintopogenih prostora, prostor (E, δ) mogućno je detaljnije definisati ovako:

Neka je data familija δ^λ-prostora $(E^\lambda, \delta^\lambda)$, $\lambda \in (\lambda)$. Polazeći od struktura δ^λ definisaćemo strukturu δ na sledeći način: za

$$A, B \subset E = \prod_{(\lambda)} E^\lambda$$

stavićemo

$$(A, B) \in \delta,$$

ako i samo ako za proizvoljne dve konačne dekompozicije

$$A = \cup \{A_i : i = 1, 2, \ldots, m\},$$

$$B = \cup \{B_j : j = 1, 2, \ldots, n\},$$

skupova A i B postoje dva indeksa i, j takva da je

$$(f_\lambda(A_i), f_\lambda(B_j)) \in \delta^\lambda$$

za svako $\lambda \in (\lambda)$, gde f_λ znači projekciju skupa E na koordinatni skup E^λ. Tako dobiveni δ-prostor (E, δ) je proizvod δ^λ-prostora $(E^\lambda, \delta^\lambda)$, $\lambda \in (\lambda)$.

Očevidno je δ^λ-prostor $(E^\lambda, \delta^\lambda)$ δ^λ-koneksan, ako i samo ako je asocirani simetrični topogeni prostor $[E^\lambda, \mathscr{T}^\lambda]$ $\mathscr{T}^\lambda$-koneksan.

Pretpostavimo sada da je svaki δ^λ-prostor $(E^\lambda, \delta^\lambda)$ δ^λ-koneksan, tj. da je svaki topogeni prostor $[E^\lambda, \mathscr{T}^\lambda]$ $\mathscr{T}^\lambda$-koneksan. Prema stavu 3.2.11. tada je $\mathbf{S}$-koneksan i sintopogeni proizvod-prostor

$$[E, \mathbf{S}]$$

gde je

$$E = \prod_{(\lambda)} E^\lambda \quad \text{i} \quad \mathbf{S} = \underset{\lambda \in (\lambda)}{\times} \mathscr{T}^\lambda.$$

No kako je po stavu 3.2.12. $\mathbf{S}^t$-koneksan i prostor $[E, \mathbf{S}^t]$, to znači da će tada biti δ-koneksan i δ-prostor (E, δ), jer je $\mathbf{S}^t = \mathscr{T}$, a δ je δ-struktura asocirana strukturi $\mathscr{T}$.

Drugim rečima, dokazali smo stav:

STAV 3.2.13. *Proizvod proizvoljne familije δ-koneksnih δ-prostora je δ-koneksni δ-prostor.*

Neka je sada data proizvoljna familija $\mathscr{U}^\lambda$-koneksnih uniformnih prostora $(E^\lambda, \mathscr{U}^\lambda)$, $\lambda \in (\lambda)$, gde je

$$\mathscr{U}^\lambda = \{U^\lambda{}_\gamma : \gamma \in \Gamma_\lambda\}$$

uniformna struktura na E^λ. Sa $\mathfrak{S}^\lambda$ označimo simetričnu sintopologiju (koja je, dakle, biperfektna) združenu sa uniformnom strukturom $\mathcal{U}^\lambda$ i neka je $[E^\lambda, \mathfrak{S}^\lambda]$ odgovarajući simetrični sintopogeni prostor.

Ako stavimo

$$\mathfrak{S} = \underset{\lambda \in \omega}{\times} \mathfrak{S}^\lambda,$$

možemo definisati biperfektnu sintopogenu strukturu

$$\mathfrak{S}^b = \{<^b : < \in \mathfrak{S}\},$$

pri čemu, za dato $< \in \mathfrak{S}$, $P <^b Q$ znači da postoje skupovi indeksa (i), (j) tako da je

$$P = \cup \{P_i : i \in (i)\},$$

$$Q = \cap \{Q_j : j \in (j)\} \text{ i } P_i < Q_j, \; i \in (i), \; j \in (j).$$

Kada još stavimo

$$E = \underset{\omega}{\Pi} E^\lambda,$$

možemo definisati biperfektni sintopološki prostor

$$[E, \mathfrak{S}^b]$$

i istom asocirani uniformni prostor

$$(E, \mathcal{U}),$$

gde je $\mathcal{U}$ uniformna struktura asocirana strukturi $\mathfrak{S}^b$. Po definiciji, uniformni prostor $(E, \mathcal{U})$ zove se proizvod uniformnih prostora $(E^\lambda, \mathcal{U}^\lambda)$, $\lambda \in (\lambda)$. Saobrazno definicijama A. Császára, to znači da za $(x, y) \in E \times E$ i $U \in \mathcal{U}$ važi

$$(x, y) \in U$$

ako i samo ako postoji konačan skup $(\lambda)^* \subset (\lambda)$ indeksa λ tako da je

$$(x^\lambda, y^\lambda) \in U^\lambda{}_{\gamma_\lambda} \quad \text{za} \quad \lambda \in (\lambda)^*,$$

gde je

$$U^\lambda{}_{\gamma_\lambda} \in \mathcal{U}^\lambda, \; \gamma_\lambda \in \Gamma_\lambda.$$

Za dokaz da je uniformni prostor $(E, \mathcal{U})$ $\mathcal{U}$-koneksan, pokazuje se najpre da je skup A, definisan u stavu 3.2.11, svuda gust i u prostoru $[E, \mathfrak{S}]$ i u prostoru $[E, \mathfrak{S}^b]$. S druge strane, videli smo da su prostori

$$[E_\mu, \mathfrak{S}_\mu] \text{ i } [E^\mu, \mathfrak{S}^\mu]$$

izomorfni. Ako uzmemo strukturu

$$\mathcal{S}^b{}_\mu = (\mathcal{S} \mid E_\mu)$$

pokazuje se da je tada i prostor

$$[E_\mu, \mathcal{S}^b{}_\mu]$$

izomorfan sa prostorom $[E^\mu, \mathcal{S}^\mu]$. Međutim, pokazuje se da je

$$(\mathcal{S} \mid E_\mu)^b = \mathcal{S}^b \mid E_\mu .$$

Zato je skup A $\mathcal{S}^b$-koneksan pa je zato i skup $\overline{A} = E$ $\mathcal{S}^b$-koneksan. To znači da prelazom na asociranu uniformnu strukturu $\mathcal{U}$, proizvod $(E, \mathcal{U})$ mora biti $\mathcal{U}$-koneksan. Drugim rečima dokazali smo stav:

STAV 3.2.14. *Proizvod proizvoljne familije $\mathcal{U}$-koneksnih uniformnih prostora je $\mathcal{U}$-koneksni uniformni prostor.*

Navešćemo ovde još nekoliko zaključaka u vezi sa $\mathcal{S}$-koneksnošću sintopogenih prostora (vidi J. L. Sieber i W. J. Pervin, [1]).

Primetimo da je kompaktni uniformni prostor $(E, \mathcal{U})$ $\mathcal{U}$-koneksan, ako i samo ako je on τ-koneksan, gde je τ topologija asocirana sa uniformnom strukturom $\mathcal{U}$. Sledeći stav daje uopštenje tog svojstva:

STAV 3.2.15. *Ako je sintopogeni prostor $]E, \mathcal{S}]$ $\mathcal{S}$-koneksan i kompaktan poda je on i $\mathcal{S}^{tp}$-koneksan.*

S druge strane, videli smo da su $\mathcal{U}$-koneksni i δ-koneksni oni skupovi numeričke prave koji su svuda gusti na nekom intervalu. Uopštenje tog svojstva daje sledeći stav:

STAV 3.2.16. *Dati skup* A *numeričke prave je $\mathcal{J}^s$-koneksan, ako i samo ako je svuda gust na nekom intervalu.*

Evo sada karakterizacije $\mathcal{S}$-koneksnih sintopogenih prostora posredstvom realnih funkcija.

STAV 3.2.17. *Neka je* $f: [E, \mathcal{S}] \to R^1$ *proizvoljno* $(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$*-neprekidno preslikavanje sintopogenog prostora* $[E, \mathcal{S}]$ *u skup svih realnih arojeva* R^1, *gde* $\mathcal{S}'$ *znači bilo koju od ovih struktura na* R^1, : $\mathcal{J}^s$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}^t$ *i* $\mathcal{H}^{tp}$. *Sintopogeni prostor* $[E, \mathcal{S}]$ *je* $\mathcal{S}$*-koneksan, ako i samo ako je slika* $f(E) \subset R^1$ $\mathcal{S}'$*-koneksan skup.*

Dokaz. Ako je prostor $[E, \mathbb{S}]$ $\mathbb{S}$-koneksan, a f $(\mathbb{S}, \mathbb{S}')$-neprekidno, slika $f(E)$ je $\mathbb{S}'$-koneksan skup. Obratno, ako prostor $[E, \mathbb{S}]$ nije $\mathbb{S}$-koneksan, postoje dva skupa $A, B \subset E$ i topogeni uređaj $< \in \mathbb{S}$ takav da je $A < E \setminus B$ i $B < E \setminus A$. Definišimo sada preslikavanje $f: E \to R^1$ stavljajući $f(x) = 0$, ako je $x \in A$ i $f(x) = 1$ ako je $x \in B$. Tada slika $f(E) = \{0,1\}$ nije $\mathbb{S}'$-koneksan skup, mada je $f(\mathbb{S}, \mathbb{S}')$-neprekidno. Time je stav dokazan.

Taj stav uopštava izvesne već poznate stavove. Na primer, kada je struktura $\mathbb{S}$ sintopogenog prostora $[E, \mathbb{S}]$ prosta i perfektna, ona je asocirana sa klasičnom topologijom na skupu E, pa se tako dobija klasičan rezultat da je prostor (E, τ) τ-koneksan ako i samo ako svaka realna funkcija na skupu E poseduje svojstvo Darboux-a (kada se stavi $\mathbb{S}' = \mathcal{H}^{tp}$, gde je $\mathcal{H}^{tp}$ prosta i perfektna sintopogena struktura asocirana sa uobičajenom sintopologijom numeričke prave). Slično tome, gornji stav kao specijalne slučajeve obuhvata izvesne stavove S. G. Mrowke i W. J. Pervina koji se odnose na $\mathcal{U}$-koneksnost uniformnih odnosno na δ-koneksnost δ-prostora.

Neka je (E, τ) potpuno regularan prostor i βE Stone-Čehova kompaktifikacija tog prostora. Ako sa δ_β označimo δ-strukturu asociranu sa prostorom βE, onda se još lako pokazuje da važi stav: Potpuno regularan prostor (E, τ) je τ-koneksan, ako i samo ako je δ_β-koneksan kao potprostor u prostoru βE.

3.3. $\mathcal{S}$-koneksni semitopogeni prostori

Evo sada definicije semitopogenih prostora, a zatim i uopštenja definicije $\mathbb{S}$-koneksnosti na te prostore (vidi moj rad [2].

DEFINICIJA 3.3.1. *Skup* E *na kome je definisana familija* $\mathcal{S}$ *semitopogenih uređaja (vidi* § 3.1) *zvaćemo semitopogeni prostor koji ćemo označiti sa* $(E, \mathcal{S})$.

DEFINICIJA 3.3.2. *Neka je* $(E, \mathcal{V})$ *okolinski prostor gde je sa* $\mathcal{V}$ *označena njegova najopsežnija okolinska baza. Za familiju* $\mathcal{S}$ *semitopogenih uređaja na skupu* E *kazaćemo da je saglasna sa bazom* $\mathcal{V}$ *ako je ispunjen ovaj uslov: podskup* V *skupa* E *je u najopsežnijoj lokalnoj okolinskoj bazi* $\mathcal{V}_x$ *tačke* x, *ako i samo ako postoji semitopogeni uređaj* $<$ *u familiji* $\mathcal{S}$ *tako da je* $x < V$. *Tada nije teško dokazati ova dva stava (vidi moj rad* [2]).

STAV 3.3.1. *Za svaku familiju* $\mathcal{S}$ *semitopogenih uređaja na skupu* E *postoji jedan i samo jedan okolinski prostor* $(E, \mathcal{V})$ *na* E *čija je najopsežnija okolinska baza* $\mathcal{V}$ *saglasna sa* $\mathcal{S}$.

STAV 3.3.2. *Za svaki okolinski prostor* $(E, \mathcal{V})$ *na* E *postoji bar jedna familija* $\mathcal{S}$ *semitopogenih uređaja na skupu* E *saglasna sa njegovom najopsežnijom okolinskom bazom.*

Neka je (R, σ) neki potprostor okolinskog prostora $(E, \mathcal{U}, \tau)$, gde σ i τ znače odgovarajuće operatore adherencije. Označimo sa i_σ i i_τ odgovarajuće operatore uzimanja interiora. Prema gornjim stavovima, možemo na E definisati familiju $\mathcal{S}$ koja se sastoji samo iz jednog semitopogenog uređaja $<$ na E, stavljajući $A < B$, ako i samo ako $A \subset i_\tau B$. Na sličan način možemo na skupu R definisati familiju $\mathcal{S}_0$ koja se sastoji samo od jednog semitopogenog uređaja $<_0$ ako stavimo $P <_0 Q$, ako i samo ako je $P \subset i_\sigma Q$. No, u mojoj knjizi [1] dokazao sam da je

$$i_\sigma X = R \cap i_\tau (X \cup (E \setminus R)),$$

za svako $X \subset R$. Prema tome, biće $P <_0 Q$, ako i samo ako je $P < Q \cup (E \setminus R)$. Ta činjenica opravdava sledeću definiciju koja se u slučaju sintopogenih prostora poklapa sa A. Császár-ovom:

DEFINICIJA 3.3.3. *Neka je* R *podskup semitopogenog prostora* $(\mathrm{E}, \mathcal{S})$ *pa definišimo na* R *semitopogeni prostor* $(\mathrm{R}, \mathcal{S}_0)$ *ovako: za* $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \subset \mathrm{R}$ *stavićemo* $\mathrm{P} <_0 \mathrm{Q}$, *tj.* $<_0 \in \mathcal{S}_0$, *ako i samo ako postoji* $< \in \mathcal{S}$ *tako da je* $\mathrm{P} < \mathrm{Q} \cup (\mathrm{E} \setminus \mathrm{R})$. *Tako definisani prostor* $(\mathrm{R}, \mathcal{S}_0)$ *je potprostor prostora* $(\mathrm{E}, \mathcal{S})$.

Kada je reč o preslikavanjima semitopogenih prostora, analogno definiciji $(\mathfrak{s}, \mathfrak{s}')$-neprekidnosti preslikavanja sintopogenih prostora definisaćemo $(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ -neprekidnost preslikavanja sintopogenih prostora: preslikavanje $f: (E, \mathcal{S}) \to (E', \mathcal{S}')$ je $(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$-neprekidno, ako i samo ako iz $A', B' \subset E'$ i $A' <' B'$ za neko $<' \in \mathcal{S}'$, sledi $f^{-1}(A') < f^{-1}(B')$ za neko $< \in \mathcal{S}$.

Evo sada uopštenja definicije $\mathfrak{s}$-koneksnosti na semitopogene prostore:

DEFINICIJA 3.3.4. *Semitopogeni prostor* $(\mathrm{E}, \mathcal{S})$ *je* $\mathcal{S}$*-koneksan, ako i samo ako nema* $(\mathcal{S}, \mathcal{D})$*-neprekidnih preslikavanja prostora* $(\mathrm{E}, \mathcal{S})$ *na prostor* $[\mathrm{D}, \mathcal{D}]$ *(za definiciju prostora* $[\mathrm{D}, \mathcal{D}]$ *vidi* § 3.1.).

Napomenimo da jedina preslikavanja semitopogenog prostora $(E, \mathcal{S})$ *u* prostor $[D, \mathcal{D}]$ jesu konstante, koja su, očevidno, $(\mathcal{S}, \mathcal{D})$-neprekidna.

Evo odmah i uopštenja pojma $\mathcal{S}$-odeljenosti:

DEFINICIJA 3.3.5. *Dva podskupa* A, B *semitopogenog prostora* $(\mathrm{E}, \mathcal{S})$ *su* $\mathcal{S}$*-odeljena ako u* $\mathcal{S}$ *postoje semitopogeni uređaji* $<, <'$ *tako da je*

$$\mathrm{A} < \mathrm{E} \setminus \mathrm{B} \ \ i \ \ \mathrm{B} <' \mathrm{E} \setminus \mathrm{A}.$$

Neposredno se može dokazati stav:

STAV 3.3.3. *Neka je familija* $\mathcal{S}$ *semitopogenih uređaja prostora* $(\mathrm{E}, \mathcal{S})$ *usmerena* (*tj. za* $<, <' \in \mathcal{S}$ *postoji* $<'' \in \mathcal{S}$ *tako da je* $< \subset <''$ *i* $<' \subset <''$).

Tada su dva skupa A, B iz E *uzajamno* $\mathcal{S}$*-odeljena, ako i samo ako postoji semitopogeni uređaj* $< \in \mathcal{S}$ *sa osobinom da je* $A < E \setminus B$ *i* $B < E \setminus A$.

Dokažimo sada najpre sledeća dva kriterijuma $\mathcal{S}$-koneksnosti semitopogenih prostora:

STAV 3.3.4. *Neka je* $(E, \mathcal{S})$ *semitopogeni prostor. Tada su sledeća svojstva međusobom ekvivalentna:*

1. *Prostor* $(E, \mathcal{S})$ *je* $\mathcal{S}$*-koneksan.*

2. *Ne postoji podela skupa* E *na dva uzajamno* $\mathcal{S}$*-odeljena skupa.*

3. *Ne postoji neprazan pravi deo* A *skupa* E *takav da je* $A < A$ *i* $E \setminus A <' E \setminus A$ *za neki par semitopogenih uređaja* $<, <' \in \mathcal{S}$.

Dokaz. $1 \Leftrightarrow 2$ Pretpostavimo da je prostor $(E, \mathcal{S})$ $\mathcal{S}$-koneksan i da postoji podela skupa E na dva $\mathcal{S}$-odeljena podskupa A i B. Postojali bi dakle semitopogeni uređaji $<, <' \in \mathcal{S}$ tako da je $A < E \setminus B$ i $B <' E \setminus A$. Štaviše, mora biti $A = E \setminus B$ i $B = E \setminus A$, jer su A i B neprazni delovi skupa E. No funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in A, \\ 1, & x \in B, \end{cases}$$

očigledno je $(\mathcal{S}, \mathcal{D})$-neprekidna i nije konstanta. Zaista, imamo $0 <_D 0$ i $1 <_D 1$. S druge strane je $f^{-1}(0) = A$, $f^{-1}(1) = B$, $f^{-1}(0) = E \setminus f^{-1}(1)$ i $f^{-1}(1) = E \setminus f^{-1}(0)$. Biće dakle $f^{-1}(0) < f^{-1}(0)$ i $f^{-1}(1) <' f^{-1}(1)$ što znači da je funkcija f $(\mathcal{S}, \mathcal{D})$-neprekidna. Obratno, pretpostavimo da ne postoji podela skupa E na dva $\mathcal{S}$--odeljena podskupa i da prostor $(E, \mathcal{S})$ nije $\mathcal{S}$-koneksan. Postoji dakle nekonstantno preslikavanje f, $(\mathcal{S}, \mathcal{D})$-neprekidno, prostora $(E, \mathcal{S})$ na prostor $[D, \mathcal{D}]$. Kako je $0 <_D 0$ i $1 <_D 1$, postoje dva semitopogena uređaja $<, <' \in \mathcal{S}$ takva da je $f^{-1}(0) < f^{-1}(0)$ i $f^{-1}(1) <' f^{-1}(1)$. Odatle sledi podela skupa E na dva $\mathcal{S}$--odeljena podskupa $f^{-1}(0)$ i $f^{-1}(1)$, suprotno pretpostavci.

$2 \Leftrightarrow 3$. Pretpostavimo da prostor $(E, \mathcal{S})$ poseduje svojstvo 2, a da ne poseduje svojstvo 3 stava 3.3.4. Tada postoji pravi, neprazni deo A skupa E tako da je $A < A$ i $E \setminus A <' E \setminus A$ za neka dva semitopogena $<, <'$ uređaja iz $\mathcal{S}$. Ako stavimo $E \setminus A = B$, tj. $A = E \setminus B$, odmah dolazimo do kontradikcije. Obratno, ako prostor $(E, \mathcal{S})$ poseduje svojstvo 3, a ne poseduje svojstvo 2, tj. $A < A$, $E \setminus A <' E \setminus A$, stavljajući $B = E \setminus A$ bilo bi $A < E \setminus B$ i $B <' E \setminus A$, i tako bi se opet došlo do kontradikcije. Time se završava dokaz.

STAV 3.3.5. *Dva skupa* P, Q *semitopogenog potprostora* $(R, \mathcal{S}_0)$ *semitopogenog prostora* $(E, \mathcal{S})$ *su* $\mathcal{S}_0$*-odeljena, ako i samo ako su oni* $\mathcal{S}$*-odeljeni.*

Dokaz. Prema definiciji 3.3.3. imaćemo $P <_0 R \setminus Q$ ako i samo ako je $P < (R \setminus Q) \cup (E \setminus R) = E \setminus Q$; na isti način biće $Q <_0 R \setminus P$ ako i samo ako je $Q <' (R \setminus P) \cup (E \setminus R) = E \setminus P$. Odatle neposredno sledi tvrđenje u stavu.

Za podskup R semitopogenog prostora $(E, \mathscr{S})$ kaže se da je $\mathscr{S}$-koneksan ako je potprostor $(R, \mathscr{S}_0)$ $\mathscr{S}_0$-koneksan.

Iz stava 3.3.5. odmah se vidi da je podskup R semitopogenog prostora $(E, \mathscr{S})$ $\mathscr{S}$-koneksan, ako i samo ako R nije unija dva neprazna $\mathscr{S}$-odeljena svoja dela.

STAV 3.3.6. *Neka je* f $(\mathscr{S}, \mathscr{S}')$*-neprekidno preslikavanj* $\mathscr{S}$*-koneksnog semitopogenog prostora* $(E, \mathscr{S})$ *na semitopogeni prostor* $(E', \mathscr{S}')$. *Tada je prostor* $(E', \mathscr{S}')$ $\mathscr{S}'$*-koneksan.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno: postoji podskup $A' \subset E'$ koji nije prazan i nije jednak skupu E', tako da je $A' <_{E'} A'$ i $E' \setminus A' <'_{E'} E' \setminus A'$ za dva semitopogena uređaja $<_{E'}, <'_{E'} \in \mathscr{S}'$. Kako je funkcija $f\,(\mathscr{S}, \mathscr{S}')$-neprekidna, postoje dva semitopogena uređaja $<_E, <'_E \in \mathscr{S}$ tako da je $f^{-1}(A') < < f^{-1}(A)$ i $f^{-1}(E' \setminus A') <'_E f^{-1}(E' \setminus A')$, tj. $E \setminus f^{-1}(A') <'_E E \setminus f^{-1}(A')$, što dovodi do kontradikcije.

DEFINICIJA 3.3.6. *Unutrašnji* $\mathscr{S}$*-rub skupa* R *semitopogenog prostora* $(E, \mathscr{S})$ *je skup tačaka* $x \in R$ *sa osobinom da ne postoji nijedan semitopogeni uređaj* $<$ *u* $\mathscr{S}$ *sa osobinom* $x < R$. *Spoljašnji* $\mathscr{S}$*-rub skupa* R *je unutrašnji rub njegovog komplementa* $E \setminus R$. $\mathscr{S}$*-rub skupa* R *je unija njegovog unutrašnjeg i spoljašnjeg* $\mathscr{S}$*-ruba.*

STAV 3.3.7. *Semitopogeni prostor* $(E, \mathscr{S})$ *je* $\mathscr{S}$*-koneksan ako svaki njegov pravi deo ima neprazni* $\mathscr{S}$*-rub.*

Dokaz tog stava je neposredan kad se uzmu u obzir prethodna definicija i stav 3.3.4.

Evo sada još nekoliko svojstava $\mathscr{S}$-koneksnosnih prostora i skupova, koje nije teško dokazati (vidi moj rad [6]).

STAV 3.3.8. *Snmitopogeni prostor* $(E, \mathscr{S})$ *je* $\mathscr{S}$*-koneksan, ako i samo ako svaki par tačaka skupa* E *leži u nekom njegovom* $\mathscr{S}$*-koneksnom podskupu.*

STAV 3.3.9. *Neka su skupovi* P *i* Q $\mathscr{S}$*-koneksni u semitopogenom prostoru* $(E, \mathscr{S})$ *i neka su oni* $\mathscr{S}$*-svezani. Tada je unija* $P \cup Q$ $\mathscr{S}$*-koneksan skup u tome prostoru.*

Napomenimo da se $\mathscr{S}$-svezanim skupovima nazivaju takva dva skupa koja nisu $\mathscr{S}$-odeljena.

STAV 3.3.10. *Ako presek dva $\mathcal{S}$-koneksna skupa u semitopogenom prostoru nije prazan, njihova unija je $\mathcal{S}$-koneksan skup.*

STAV 3.3.11. *Neka je* $A_\alpha, \alpha \in (\alpha)$, *proizvoljna familija $\mathcal{S}$-koneksnih skupova semitopogenog prostora* $(E, \mathcal{S})$ *i neka su za svaki par indeksa* $\alpha, \beta \in (\alpha)$, *skupovi* A_α *i* A_β *$\mathcal{S}$-svezani. Tada je i njihova unija*

$$A = \cup \{A_\alpha : \alpha \in (\alpha)\}$$

$\mathcal{S}$-koneksan skup.

STAV 3.3.12. *Ako presek makoliko $\mathcal{S}$-koneksnih skupova u semitopogenom prostoru* $(E, \mathcal{S})$ *nije prazan, unija **tih** skupova je $\mathcal{S}$-koneksan skup.*

STAV 3.3.13. *Neka je* $A_\alpha, \alpha \in (\alpha)$, *proizvoljna familija $\mathcal{S}$-koneksnih skupova semitopogenog prostora* $(E, \mathcal{S})$ *i neka za svaki par indeksa* $\alpha, \beta \in (\alpha)$ *postoji indeks* $\gamma \in (\alpha)$ *tako da su parovi* A_α, A_γ *i* A_β, A_γ *uzajamno $\mathcal{S}$-svezani. Tada je i unija* A *tih skupova $\mathcal{S}$-koneksan skup.*

Neka je $(E, \mathcal{S})$ semitopogeni prostor. Tada na E možemo definisati okolinsku bazu $\mathcal{V}$ ovako : za $x \in E$ stavićemo podskup Vx u lokalnu okolinsku bazu $\mathcal{V}_x$ tačke x, ako i samo ako postoji semitopogeni uređaj $< \in \mathcal{S}$ takav da je $x < Vx$. Kazaćemo da je tako definisani okolinski prostor (E, τ) asociran semitopogenom prostoru $(E, \mathcal{S})$. Ako je dat skup $A \subset E$, tada se adherencija $\tau A = \overline{A}$ tog skupa definiše na uobičajen način (vidi moju knjigu [1]), pa se i ostali pojmovi kao što su zatvorenost, otvorenost itd. skupova definišu na uobičajeni način. Kada dakle govorimo o tim pojmovima u semitopogenom prostoru, tada mislimo upravo na asocirani okolinski prostor.

STAV 3.3.15. *Neka je skup* $A \subset E$ *$\mathcal{S}$-koneksan u semitopogenom prostoru* $(E, \mathcal{S})$ *i neka je* $A \subset B \subset \overline{A}$. *Tada je i skup* B *$\mathcal{S}$-koneksan.*

Neposredna posledica tog stava je

STAV 3.3.16. *Adherencija* $\overline{A}$ *$\mathcal{S}$-koneksnog skupa* A *u semitopogenom prostoru* $(E, \mathcal{S})$ *je $\mathcal{S}$-koneksan skup.*

Pređimo sada na definiciju $\mathcal{S}$-koneksnih komponenti u semitopogenim prostorima. U stvari, za sintopogene prostore, $\mathfrak{S}$-koneksne komponente definisali su J. L. Sieber i W. J. Pervin u njihovom radu [1] pa ovde uvodimo analognu definiciju za slučaj semitopogenih prostora.

DEFINICIJA 3.3.7. *Unija svih $\mathcal{S}$-koneksnih skupova koji sadrže datu tačku* a *u semitopogenom prostoru* $(E, \mathcal{S})$, *zove se $\mathcal{S}$-koneksna komponenta te tačke.*

$\mathscr{S}$-koneksne komponente skupa $A \subset E$ *su* $\mathscr{S}_0$*-koneksne komponente tačaka* $a \in A$ *u semitopogenom prostoru* $(A, \mathscr{S}_0)$ *kao potprostoru prostora* $(E, \mathscr{S})$.

Neposredno se dokazuju stavovi (vidi moj rad [6]).

STAV 3.3.17. *$\mathscr{S}$-koneksne komponente tačaka* a *i skupova* $A \subset E$ *u semitopogenom prostoru* $(E, \mathscr{S})$ *su* $\mathscr{S}$*-koneksni skupovi u tome prostoru.*

STAV 3.3.18. *$\mathscr{S}$-koneksne komponente dveju tačaka* a, b *u semitopogenom prostoru* $(E, \mathscr{S})$ *ili se poklapaju ili su disjunktne.*

Prema tome, skup $\mathscr{S}$-komponenti svih tačaka u semitopogenom prostoru $(E, \mathscr{S})$ daje jednu particiju skupa E na disjunktne skupove.

STAV 3.3.19. *$\mathscr{S}$-koneksne komponente tačaka semitopogenog prostora* $(E, \mathscr{S})$ *su zatvoreni skupovi u tom prostoru.*

Važi stav opštiji od toga:

STAV 3.3.20. *$\mathscr{S}$-koneksne komponente zatvorenih skupova u semitopogenom prostoru* $(E, \mathscr{S})$ *su zatvoreni skupovi u tom prostoru.*

STAV 3.3.21. *Neka su* A *i* B *dva* $\mathscr{S}$*-odeljena skupa u semitopogenom prostoru* $(E, \mathscr{S})$. *Svaka* $\mathscr{S}$*-koneksna komponenta unije* $A \cup B$ *tih skupova sadržana je ili u skupu* A *ili u skupu* B.

Analogno svojstvu lokalne koneksnosti kod okolinskih prostora (vidi moj rad [7]) mogućno je kod semitopogenih prostora definisati pojam lokalne $\mathscr{S}$-koneksnosti:

DEFINICIJA 3.3.8. *Semitopogeni prostor* $(E, \mathscr{S})$ *je lokalno* $\mathscr{S}$*-koneksan, ako i samo ako svaka tačka* $a \in E$ *ima lokalnu okolinsku bazu koja se sastoji iz* $\mathscr{S}$*-koneksnih skupova. Skup* $A \subset E$ *je lokalno* $\mathscr{S}$*-koneksan, ako i samo ako je semitopogeni prostor* $(A, \mathscr{S}_0)$ *lokalno* $\mathscr{S}_0$*-koneksan kao potprostor prostora* $(E, \mathscr{S})$.

Tada i u semitopogenim prostorima važi sledeći stav:

STAV 3.3.22. *Neka je* G *otvoren skup u semitopogenom lokalno* $\mathscr{S}$*-koneksnom prostoru* $(E, \mathscr{S})$. *Tada su* $\mathscr{S}$*-koneksne komponente skupa* G *otvoreni skupovi u tome prostoru.*

Koliko je autoru ovog rada poznato, kako pojam tako i svojstva lokalno $\mathscr{S}$-koneksnih semitopogenih i sintopogenih prostora nisu do sada detaljnije istraživani. Zato bi bilo od interesa nastaviti ispitivanja u tome pravcu.

3.3.1. Koneksni topogeni prostori u smislu definicije C. Amihăesei-a

Prilaz definiciji koneksnosti, za slučaj topogenih prostora, drukčiji od prethodnog, dao je C. Amihăesei u radu [1]. Podsetimo da je okolinski prostor (E, τ) τ-koneksan, ako i samo ako svaki njegov pravi deo A ima neprazan bar jedan od njegovih rubova: unutrašnji ili spoljašnji. To drugim rečima znači da je okolinski prostor (E, τ) τ-koneksan, ako i samo ako za svaki pravi deo A skupa E postoji bar jedna tačka x u E koja nije unutrašnja tačka ni skupa A ni njegovog komplementa $E \setminus A$. To naravno važi i za topološke prostore. Upravo ta činjenica leži u osnovi uopštenja definicije koneksnosti C. Amihăesei-a na topogene strukture koja glasi:

DEFINICIJA 3.3.1.1. *Neka je dat topogeni prostor* $[E, \mathscr{F}]$, *gde* $\mathscr{F}$ *znači topogenu strukturu na* E. *Topogena struktura* $\mathscr{F}$, *čiji jedini topogeni uređaj označimo sa* $<$, *jeste koneksna, ako i samo ako postoji bar jedna tačka* $x \in E$ *tako da nije ni* $x < A$ *ni* $x < E \setminus A$. *Topogeni prostor* $[E, \mathscr{F}]$ *je koneksan, ako i samo ako je topogena struktura* $\mathscr{F}$ *koneksna.*

S obzirom na definiciju 3.3.5, to znači da je topogeni prostor $[E, \mathscr{F}]$ koneksan, ako i samo ako svaki njegov pravi deo ima neprazan $\mathscr{S}$-rub.

Postoji topogeni prostor čija topogena struktura niti je perfektna niti je simetrična (i, prema tome, kojem se ne može asocirati niti topološki prostor niti δ-prostor), a koji je koneksan u smislu prethodne definicije. To je naime topogeni prostor $[E, \mathcal{J}^t]$, gde je E skup svih realnih brojeva, a $\mathcal{J}^t$ ranije uvedena topogena struktura na E definisana na sledeći način:

$$A < B \text{ ako i samo ako } \sup A < \inf (E \setminus B).$$

Primetimo da kod topogene strukture $\mathcal{J}^t$ familija $N_<$ svih skupova $A \subset E$ sa svojstvom da je $A < A$, jeste prazna ($N_<$ se zove jezgra strukture $\mathcal{J}^t$). Štaviše, C. Amihăesei je naveo i primer simetrične topogene strukture čija je jezgra prazna. Topogene strukture praznih jezgara nisu perfektne.

Neka je sada $[E, \mathscr{F}]$ topološki prostor, tj. $\mathscr{F}$ jer perfektna topogena struktura' koja se sastoji samo iz jednog elementa $<$. Primetimo da je tačka x iz E u rubu skupa $A \subset E$, ako i samo ako nije ni $x < A$ ni $x < E \setminus A$. Tada očigledno važi ovaj stav:

STAV 3.3.1.1. *Topološki prostor* $[E, \mathscr{F}]$ *je koneksan, ako i samo ako svaki njegov pravi deo ima neprazan rub.*

Vidimo tako da je topogeni sintopološki prostor $[E, \mathscr{F}]$ koneksan u smislu definicije 3.3.1.1. C. Amihăesei-a, ako i samo ako je τ-koneksan njemu asocirani topološki prostor (E, τ). S druge strane, pokazuje se da nijedan simetrični prostor $[E, \mathscr{F}]$ nije koneksan.

Neka je $[E, \mathscr{F}]$ topološki prostor i $A \subset E$ bilo koji njegov neprazan deo. Kaže se da je skup A koneksan, ako je on koneksan kao topološki potprostor prostora $[E, \mathscr{F}]$. Pokazuje se tada da u simetričnim topološkim prostorima ne postoje koneksni skupovi.

Za topogene simetrične prostore je očigledan sledeći stav:

STAV 3.3.1.2. *Ako topogeni simetrični prostor* $[E, \mathscr{F}]$ *ima nepraznu jezgru* $N_{<}$, *onda on nije koneksan.*

S druge strane, postoji ova karakterizacija koneksnih topogenih simetričnih prostora:

STAV 3.3.1.3. *Simetrični topogeni prostor* $[E, \mathscr{F}]$ *je koneksan, ako i samo ako je koneksan topološki prostor* $[E, \mathscr{F}^p]$.

($\mathscr{F}^p$ = savršena topogena struktura na E, u opštem slučaju, nesimetrična, izvedena iz strukture $\mathscr{F}$ stavljajući $A <^p B$, ako i samo ako postoji dekompozicija

$$A = \cup \{A_i : i \in I\}$$

skupa A tako da je $A_i < A$ za svako $i \in I$, gde je $<$ jedini elemenat iz $\mathscr{F}$).

Stav sledi iz činjenice da je $x <^p A$, ako i samo ako je $x < A$.

Neka je δ δ-struktura asocirana simetričnoj topogenoj strukturi $\mathscr{F}$ topogenog prostora $[E, \mathscr{F}]$. Tada je za $A, B \subset E$, $(A, B) \in \delta$, ako i samo ako nije tačno da je $A < E \setminus B$. Zato postoji i ovaj kriterijum:

STAV 3.3.1.4. *Simetrični topogeni prostor* $[E, \mathscr{F}]$ *je koneksan, ako i samo ako u asociranoj* δ-*strukturi* δ *za svaki pravi deo* A *skupa* E *postoji bar jedna tačka* x *iz* E *koja je blizu i skupu* A *i njegovom komplementu* $E \setminus A$, *tj.* $(x, A) \in \delta$ i $(x, E \setminus A) \in \delta$.

C. Amihăesei definiše tada koneksnost u δ-prostorima ovako:

DEFINICIJA 3.3.1.2. δ-*prostor* (E, δ) *je koneksan, ako i samo ako je koneksan asocirani topogeni simetrični prostor* $[E, \mathscr{F}]$.

Otuda i ovakav kriterijum koneksnosti δ-prostora:

STAV 3.3.1.5. δ-*prostor* (E, δ) *je koneksan, ako i samo ako je asocirani klasični topološki prostor* (E, τ) τ-*koneksan.*

SPISAK OZNAKA

Oznake $\in$, $\subset$, $\cup$, $\cap$ imaju uobičajeno značenje pripadanja kao element, inkluzije, unije i preseka; $x \notin E$ znači da x kao element ne pripada skupu E. Oznaka $E \setminus A$ znači skup svih onih elemenata skupa E koji ne leže u skupu A; ako je sem toga $A \subset E$, ta razlika znači komplement skupa A u odnosu na skup E i označuje se takođe sa CA.

Λ = prazan skup.

q. e. d. = quod erat demontsrandum = što je trebalo dokazati.

inf = infimum

sup = supremum

$r(x)$ = rub skupa X.

$r_u(X)$ = unutrašnji rub skupa X.

$r_s(X)$ = spoljašnji rub skupa X.

$u(X)$ = int (X) = unutrašnjost ili interior skupa X.

$s(X)$ = spoljašnost skupa X.

$\Rightarrow$ = znak implikacije.

$\Leftrightarrow$ = znak implikacije u oba pravca.

$(A \mid B)$ znači da su skupovi A i B τ – odeljeni.

$\overline{X}$ = adherencija skupa X.

Ako su A i B skupovi, $A = B$ znači da su oni jednaki; $A \neq B$ znači da skup A nije jednak skupu B.

(α) = dati skup indeksa α.

lim = limes.

$\Pi \{X_\alpha : \alpha \in (\alpha)\} = \Pi X_\alpha$ kombinirani ili kartezijev proizvod skupova X_α kad indeks α prolazi skupom indeksa (α).

$f: A \to B$ znači funkciju f čiji je domen skup A, a kodomen $f(A)$ sadržan u skupu B. Za funkciju f kazaćemo da je preslikavanje *u skup* B ako postoji bar jedna tačka $y \in B$ za koju ne postoji nijedna tačka $x \in A$ sa osobinom $f(x) = y$. Za funkciju f kazaćemo da je preslikavanje *na skup* B ako za svaku tačku $y \in B$ postoji bar jedna tačka $x \in A$ sa osobinom $f(x) = y$.

X/ρ = količnik skupa X u odnosu na binarnu relaciju ekvivalencije ρ definisanu na skupu X.

$\mathrm{kl}_\rho [x]$ = klasa ekvivalencije tačke x u odnosu na binarnu relaciju ekvivalencije ρ.

$A \times B$ = kombinirani proizvod skupova A i B.

Ako je $f: X \to Y$ i $B \subset Y$, $f^{-1}(B)$ znači skup svih onih elemenata a iz X za koje je $f(a) \in B$.

Ako su A i B podskupovi kombiniranog proizvoda $X \times Y$, $A \circ B$ znači njihovu kompoziciju.

A^{-1} = skup svih uređenih parova (x, y) za koje je $(y, x) \in A$.

∞, $-\infty$ = uobičajene oznake za neprave realne brojeve „plus beskonačno" i „minus beskonačno".

Ako su f i g funkcije, $g \circ f$ i $f \circ g$ znače njihove kompozicije.

Ako su posebne oznake uvedene u slučaju sintopogenih i semitopogenih prostora, onda su one objašnjene u samom tekstu.

LITERATURA

ALEXANDROFF, P. S.

[1] Einführung in die Mengenlehre und die Theorie der reellen Funktionen, VEB, Berlin, 1956 (prevod s ruskog jezika).

AMIHĂESEI, C.

[1] Connexion dans les espaces topogènes, Ann. Sti. Univ. „Al. I. Cuza" Iasi Sect. I a Mat. (N. S.) 16 (1970), 257—263.

АНТОНОВСКИЙ, М. Я., БОЛТЯНСКИЙ, В Г., САРЫМСАКОВ, Т. А.

[1] Топологические полуполя, Ташкент, 1960.

[2] Очерк теорий топологических полуполеи, Успехи мат. наук. Том XXI, 4 (130), 1966, 185—218.

APPERT, A.

[1] Propriétés des espaces les plus généraux, Act. sci. et ind. 145, 146, Paris, 1934.

APPERT, A. et KY-FAN

[1] Espaces toplogiques intermédiaires, Act. sci. et ind. 1121, Paris, 1951.

АРХАНГЕЛЬСКИЙ, А. В.

[1] Экстремально несвязни бикомпакт веса *c* неоднороден, ДАН. Т. 175 (1967), 751—753.

[2] Groupes topologiques extremalement discontinues, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 265 (1967), 822—825.

BING, R. H.

[1] A connected countable Hausdorff space, Proc. of the Am. Math. Soc. 4 (1953), 474.

BOURBAKI, N.

[1] Topologie générale, Act. sci. et ind. 858, 1142, Paris, 1951.

CSÁSZÁR, Á

[1] Sur une classe de structures topologiques générales, Revue de Math. pures et appl. (Ac. de la Rep. Pop. Roumaine) II (1957), 399—407.

[2] Grundlagen der allgemeinen Topologie, Ak. Kiado, Budapest, 1963.

ČECH, E.

[1] Topologicke prostori, Časopis pro pešt. mat. a fys. 66 (1937). D 225—D264.

[2] Topological spaces, Academia, Prague, 1966.

CULLEN, H. F.

[1] Introduction to general topology, D. C. Heath and Comp. Boston, 1967.

HAHN, H.

[1] Über die Komponenten offener Mengen, Fund. Math. 2 (1921), 191—192.

HALL, D. W. and SPENCER, G. L.

[1] Elementary topology, New York, J. Wiley, 1955.

HAMMER, P. C.

[1] Extended topology: connected sets and Wallace separations, Port. Math. 22 (1963), 167—187.

HAUSDORFF, F.

[1] Grundzüge der Mengenlehre, Chelsea Publ. Co., New York, 1949.

HEWITT, E.

[1] On two problems of Urysohn, Ann. of Math. 47 (1945), 503—509.

HERRLICH, H.

[1] Ordnungsfähigkeit zusammenhängender Räume, Fund. Math. 57 (1965), 305—311

HOCKING J. G., YOUNG G. S.

[1] Topology, Reading, Mass, Addison—Wesley, 1961.

ИВАНОВА, В. М и ИВАНОВ, А. А.

[1] Пространства смежности и бикампактные расширения топологических пространств, Изв. АН СССР, серия матем. 23 (1959), 613—634.

ИВАНОВА, В. М.

[1] Отношения близости и пространства замкнутых подножеств, Мат. Сборник, Т. 65 (107) : 1 (1964), 18—28.

JONES, F. B. and STONE, A. H.

[1] Countable locally connected Urysohn spaces, Colloquium math. 22 (1971), 239—244.

KELLEY, J. L.

[1] General Topology, New York, Van Nostrand, 1955.

KIRCH, A. M.

[1] A countable, connected, locally connected Hausdorff space, Am. Math. Monthly, 76 (1969), 169—171.

KNASTER, B., KURATOWSKI, K.

[1] Sur les ensembles connexes, Fund. Math. 2 (1921), 206—255.

KOWALSKY, H. J.

[1] Kennzeichnung von Bogen, Fund. Math 46 (1958), 103—107.

[2] Topologische Räume, Birkhaüser Verlag, 1961.

KURATOWSKI, K.

[1] Topology, vol. I (1968), Academic Press, New York and London, Panst. wydaw naukowe, Warszawa. (Te dve knjige preveo je na ruski jezik M. Ja. Antonovski 1966 i 1969, respektivno, u izdanju „Mir", Moskva).

KUREPA, Đ. (= G.)

[1] Teorija skupova, Školska knjiga, Zagreb, 1951.

[2] Ensembles ordonnés et ramifiés, Thèse, Paris, 1935, 1—138 (ili Publ. Math., Beograd, 4 (1935), 1—138.

[3] Le problème de Souslin et les espaces abstraits, Revista de ciencias, Lima—Peru. № 453 (1945), 457—488.

[4] Around the general Suslin problem, Topology and its Applications, Beograd, 1969, 239—245.

MAMUZIĆ, Z. P.

[1] Introduction to general topology, Noordhoff, Gronningen, 1963. (To je prevod na engleski jezik knjige „Uvod u opštu topologiju", Zavod za izd. udžb. SR Srbije, 1960; preveo L. F. Boron uz pomoć W. J. Pervina, J. L. Siebera i R. C. Moore-a).

[2] Note sur les espaces de voisinages (V) et les ordres semitopogènes, Mat. Vesnik, 3 (18) (1966), 231—237.

[3] Nota o savršeno kompaktnim (koneksnim) okolinskim prostorima, Mat. Vesnik 3 (18) (1966), 265—270.

[4] Neighborhood product and quotient spaces, Mat. Vesnik, 3 (18) (1966), 5—10.

[5] Nota o proizvodu koneksnih okolinskih prostora, Mat. Vesnik, 5 (20) (1968), 207—210.

[6] Nekoliko svojstava S-koneksnosti semitopogenih prostora, Mat. Vesnik, 7 (22) (1970), 119—124.

[7] Sur les espaces de voisinages localement connexes, Mat. Vesnik, 8 (23) (1971), 377—
—386.

[8] A note on neighborhood product spaces, Mat. Vesnik, 9 (24) (1972), 401—402.

MAMUZIĆ, Z. P. i ĐERASIMOVIĆ, B. P.

[1] Osnovi matematičke analize, Naučna knjiga, 1970.

MARDEŠIĆ, S.

[1] On the Hahn-Mazurkiewicz theorem in non-metric spaces, Proc. of the Am Math. Soc. 2 (1960), 929—937.

MARTIN, F.

[1] A countable Hausdorff space with a dispersion point, Duke Math. Journ. 33 (1966), 165—167.

MATTSON, DON, A.

[1] Extended topology. On abstract spaces, (thesis), University of Wisconsin, 1965.

MROWKA, S. G. and PERVIN, W. J.

[1] On uniform connectedness, Proc. of the Am. Math. Soc. 15 (1964), 446—449.

PERWIN, W, J.

[1] On separation and proximity spaces, The Am. Math. Monthly, 71 (1964), 158—161.

ПОЛЯКОВ, А. И.

[1] О свойстве максимальнои связности, Вестник Московского университета, № 4 (1970), 50—53.

ПОНОМАРЕВ, В. И.

[1] О своиствах топологических пространств, сохранаюшися при многозначных непреривных отображениях, Мат. сборник, Т. 51 (93), 515—536.

ROY, P.

[1] A countable connected Urysohn space with a dispersion point, Duke Math. Journ. 33 (1966), 331—333.

SIEBER, J. L. and PERVIN, W. J.

[1] Connectedness in syntopogenous spaces, Proc. of the Am. Math. Soc. 15 (1964), 590—
—595.

SIERPINSKI, W.

[1] Sur les ensembles connexes et non connexes, Fund. Math., 2 (1921), 81—95.

СМИРНОВ, Ю. М.

[1] О пространствах близости, Мат. Сборник, 31 (1952), 543—574.

STRAUSS, DONA, P.

[1] Extremally disconnected spaces, Proc. of the Am. Math. Soc. 18 (1967), 305—309.

URYSOHN, P.

[1] Über die Mächtigekit der zusammenhängenden Mengen, Math. Annalen, 94 (1925), 262—295.

VENCELJ, M.

[1] Lok kot topološki prostor, Obzornik za matematiko in fiziko, 12 (1965), 103—110.

WALLACE, A. D.

[1] Separation Spaces, Annals of Mathematics, Vol. 42 (1941), 687—697.

REGISTAR