УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Бранислав Јововић

Велика одступања статистика интегралног и Колмогоровљевог типа и асимптотска ефикасност одговарајућих тестова сагласности

— мастер рад —

Београд, 2017.

Ментор:

др Бојана Милошевић, доцент,
Математички факултет, Универзитет у Београду

Чланови комисије:

др Милан Јовановић, доцент,
Математички факултет, Универзитет у Београду

др Марко Обрадовић, доцент,
Математички факултет, Универзитет у Београду

Резиме

Појам асимптотске ефикасности проистекао је из потребе да се статистички тестови пореде на основу неке квантитативне особине. Класична теорија Нејман-Пирсона предлаже униформно најмоћније тестове као најбоље, али они постоје на веома уском скупу статистичких модела, много ужем од потребних у теорији и применама. Предложене су разне асимптотске ефикасности (Бахадурова, Питманова, Хаџис-Леманова, Черновљева,...) а у овом раду се разматрају израчунавања у Бахадуровом смислу. Рад је подељен у три поглавља.

У првом поглављу су уведени основни појмови и приказани резултати који своде проблем рачунања Бахадурових асимптотских ефикасности на проблем одређивања великих одступања низа тест статистика. Затим су дати основни резултати теорије великих одступања који захтевају решавање одговарајућих екстремалних проблема на уопштеним Банаховим просторима. Због фундаменталног значаја у раду, приказане су и основе теорије диференцијалног рачуна на Банаховим просторима, прецизније, теорема о постојању имплицитног оператора и теорема о постојању Лагранжових множилаца.

Друго поглавље посвећено је израчунавању великих одступања низова статистика Колмогоровљевог типа, интегралног типа као и њиховим уопштењима, U- и V- статистикама што га чини технички најзахтевнијом целином а приказана тврђења имају далекосежан утицај на теорију математичке статистике.

У трећем поглављу примењени су претходно добијени резултати на израчунавање локалних Бахадурових асимптотских ефикасности. Изложена теорија је потом илустрована на неколико примера.

Садржај

Поглавље 1

Увод

1.1 Општи приступ рачунања асимптотских ефикасности

Нека је случајна величина X дефинисана на простору вероватноћа $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P}_\theta)$ где вероватносну меру $\mathcal{P}_\theta$ одређује параметар θ који припада скупу Θ. Нека је $s = \{X_1, X_2, ...\}$ низ независних једнако расподељених случајних величина дефинисаних на $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P}_\theta)$ са расподелом P_θ.

Размотримо проблем тестирања хипотезе

$$H : \theta \in \Theta_0 \subset \Theta \text{ против алтернативе } A : \theta \in \Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$$

на основу узорка $X_1, ..., X_n$. Нека је дат низ тест статистика $\{T_n\}$, $T_n = T_n(X_1, ..., X_n)$. Без умањења општости, претпоставимо да је критична област теста дата са

$$\{s :\, T_n(s) \geq c\},$$

где је c неки реалан број. Функција моћи теста у тачки $\theta \in \Theta$ је $\gamma(\theta) = P_\theta(T_n \geq c)$ а праг значајности је $\sup\{P_\theta(T_n \geq c) :\, \theta \in \Theta_0\}$.

Дефинишимо за свако $\beta \in (0, 1)$ и $\theta \in \Theta_1$ низ реалних бројева $c_n = c_n(\beta, \theta)$ уз помоћ двоструке неједнакости

$$P_\theta(T_n > c_n) \leq \beta \leq P_\theta(T_n \geq c_n). \tag{1.1}$$

Тада

$$\alpha_n(\beta, \theta) = \sup\{P_{\theta'}(T_n \geq c_n :\, \theta' \in \Theta_0)\}$$

представља минимални праг значајности теста заснованог преко $\{T_n\}$ за који је моћ теста у тачки θ бар β. За произвољан ниво значајности α, $0 < \alpha < \beta$, нека је

$$N_T(\alpha, \beta, \theta) = \min\{n :\, \alpha_m(\beta, \theta) \leq \alpha \text{ за свако } m \geq n\}.$$

Јасно је да је $N_T(\alpha, \beta, \theta)$ најмањи обим узорка такав да за праг значајности не већи од α тест заснован помоћу низа статистика $\{T_n\}$ оствари моћ бар β у алтернативи θ.

Претпоставимо да за тестирање нулте хипотезе H против алтернативне хипотезе A имамо два низа тест статистика $\{T_n\}$ и $\{V_n\}$. Релативна ефикасност низа $\{V_n\}$ у односу на $\{T_n\}$ дефинише се са

$$e_{V,T}(\alpha, \beta, \theta) = \frac{N_T(\alpha, \beta, \theta)}{N_V(\alpha, \beta, \theta)}.$$

Релативну ефикасност тестова у општем случају је веома тешко израчунати. Преласком на граничну вредност неких од параметара тај недостатак се могао ублажити. То мотивише конструкцију нових критеријума за поређење тестова, асимптотских релативних ефикасности (АРЕ). Наводимо само неке од њих, Бахадурову, Хаџис-Леманову и Питманову, а посветићемо се у овом раду само одређивањем Бахадурове асимптотске ефикасности.

- Ако за $\beta \in (0, 1)$ и $\theta \in \Theta_1$ постоји гранична вредност

  $$e^B_{V,T}(\beta, \theta) = \lim_{\alpha \downarrow 0} e_{V,T}(\alpha, \beta, \theta),$$

  онда $e^B_{V,T}(\beta, \theta)$ зовемо Бахадурова асимптотска релативна ефикасност низа $\{V_n\}$ у односу на низ $\{T_n\}$.

- Ако за $\alpha \in (0, 1)$ и $\theta \in \Theta_1$ постоји гранична вредност

  $$e^{HL}_{V,T}(\beta, \theta) = \lim_{\beta \uparrow 1} e_{V,T}(\alpha, \beta, \theta),$$

  онда $e^{HL}_{V,T}(\beta, \theta)$ зовемо Хаџис-Леманова асимптотска релативна ефикасност низа $\{V_n\}$ у односу на низ $\{T_n\}$.

- Ако за $0 < \alpha < \beta < 1$ и $\theta \to \theta_0 \in \partial\Theta_0$ постоји гранична вредност (у односу на неку задату топологију)

  $$e^P_{V,T}(\beta, \theta) = \lim_{\theta \to \theta_0} e_{V,T}(\alpha, \beta, \theta),$$

  онда $e^P_{V,T}(\beta, \theta)$ зовемо Питманова асимптотска релативна ефикасност низа $\{V_n\}$ у односу на низ $\{T_n\}$.

Пример 1.1.1. Нека су $X_1, ..., X_n$ независне случајне величине са расподелом $\mathcal{N}(\theta, 1)$. Нулта хипотеза $H : \theta = 0$ се тестира против алтернативе $A : \theta > 0$. Предложена су два низа тест статистика, $\{\bar{X}_n\}$ и $\{t_n\}$. Како

Студентов t-тест не користи информацију да је дисперзија 1, природно је очекивати да је он мање ефикасан у односу на тест заснован на $\{\bar{X}_n\}$. АРЕ ових тестова су:

$$e^{B}_{t,\bar{X}}(\beta,\theta)\equiv\frac{\ln(1+\theta^2)}{\theta^2}<1,\quad e^{HL}_{t,\bar{X}}(\alpha,\theta)\equiv 1,\quad e^{P}_{t,\bar{X}}(\alpha,\beta)\equiv 1.$$

Одатле видимо да Хаџис-Леманова и Питманова АРЕ нису успеле да разликују тестове у овом случају. Бахадурова АРЕ јасно указује да је Студентов t-тест мање ефикасан, поготово против даљих алтернатива.

◇

Означимо за свако θ, t и сваки низ статистика $\{T_n\}$

$$F_n(t;\theta)=P_\theta(s:\,T_n(s)<t),\quad G_n(t)=\inf\{F_n(t;\theta):\,\theta\in\Theta_0\}.$$

Случајну величину

$$L_n(s)=1-G_n(T_n(s))$$

зовемо P-вредност теста.

У случају да је $\theta\in\Theta_0$ P-вредност је приближно униформно расподељена на $[0,1]$. Бахадур је показао (видети [5], теорема 7.4) да важи оцена

$$P_\theta(L_n\le u)\le u\quad \text{за свако } u\in[0,1]. \tag{1.2}$$

Поред тога, од интереса је и асимптотско понашање P-вредности под алтернативом ($\theta\in\Theta_1$). У многим случајевима за $\theta\in\Theta_1$ имамо конвергенцију у P_θ-вероватноћи

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\ln L_n=-\frac{1}{2}c_T(\theta), \tag{1.3}$$

где је $c_T(\theta)$ неслучајна позитивна функција од параметра $\theta\in\Theta_1$. Вредност $c_T(\theta)$ зовемо Бахадуров тачан нагиб низа $\{T_n\}$ (у даљем тексту нагиб). Наредну теорему, која представља асимптотску релацију нагиба и $N_T(\alpha,\beta,\theta)$ доказао је Бахадур и може се пронаћи у [7].

Теорема 1.1.2. *Ако важи (1.3) за низ статистика $\{T_n\}$ са $c_T(\theta)>0$, тада*

$$N_T(\alpha,\beta,\theta)\sim\frac{2\ln 1/\alpha}{c_T(\theta)}\quad \textit{кад } \alpha\to 0.$$

Доказ. Докажимо прво да за свако $\beta\in(0,1)$ важи

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\ln\alpha_n(\beta,\theta)=-\frac{1}{2}c_T(\theta). \tag{1.4}$$

Претпоставимо супротно, да (1.4) није тачно за неко β. Дефинишимо за то β низ $\{c_n\}$ по формули (1.1). Пошто смо претпоставили да (1.4) не важи следи да постоји растући низ $\{n_k\}$ и ϵ тако да је једна од две наредне неједнакости

$$-n_k^{-1}\ln\alpha_{n_k}(\beta,\theta) < \frac{1}{2}c_T(\theta) - \epsilon, \tag{1.5}$$

$$-n_k^{-1}\ln\alpha_{n_k}(\beta,\theta) > \frac{1}{2}c_T(\theta) + \epsilon, \tag{1.6}$$

тачна за свако k.

У случају (1.5), као последицу од (1.3) имамо да је

$$\begin{aligned} P_\theta\left(-n_k^{-1}\ln L_{n_k} > \frac{1}{2}c_T(\theta) - \epsilon\right) \le & P_\theta(-n_k^{-1}\ln L_{n_k} > -n_k^{-1}\ln\alpha_{n_k}(\beta,\theta)) \\ = & P_\theta(L_{n_k} < \alpha_{n_k}(\beta,\theta)) \\ = & P_\theta(1 - G_{n_k}(T_{n_k}) < 1 - G_{n_k}(c_{n_k})) \\ = & P_\theta(T_{n_k} > c_{n_k}) \le \beta \quad \text{за свако } k. \end{aligned}$$

Лева страна разматране неједнакости тежи ка 1 кад $k \to \infty$, што је у контрадикцији са претпоставком да је $0 < \beta < 1$. Случај (1.6) се разматра аналогно.

Изведимо сада из (1.4) закључак теореме. Нека је $N_\alpha = N_T(\alpha,\beta,\theta)$. Из (1.4) имамо да је

$$\alpha_n(\beta,\theta) > \exp\{-nc_T(\theta)\}$$

за довољно велико n. За такво n, нека је α мање од $\exp\{-nc_T(\theta)\}$. Тада је

$$\exp\{-N_\alpha c_T(\theta)\} < \alpha_{N_\alpha}(\beta,\theta) \le \alpha < \exp\{-nc_T(\theta)\}$$

одакле следи да је $N_\alpha > n$. То обезбеђује да $N_\alpha \to \infty$ кад $\alpha \to 0$.

На основу дефиниције N_α имамо

$$\alpha_{N_\alpha}(\beta,\theta) \le \alpha \le \alpha_{N_\alpha - 1}(\beta,\theta)$$

или, томе еквивалентно,

$$-N_\alpha^{-1}\ln\alpha_{N_\alpha-1}(\beta,\theta) \le -N_\alpha^{-1}\ln\alpha \le -N_\alpha^{-1}\ln\alpha_{N_\alpha}(\beta,\theta).$$

Прелазак на граничну вредност кад $\alpha \to 0$ уз (1.4) комплетира доказ теореме. □

Директна последица ове теореме је да ако важи (1.3) за низове $\{T_n\}$ и $\{V_n\}$, њихова Бахадурова АРЕ се може израчунати као

$$e^B_{V,T}(\beta, \theta) = c_V(\theta)/c_T(\theta).$$

Уз помоћ следеће теореме, коју је доказао Бахадур у свом раду [5], можемо израчунати тачан нагиб статистика.

Теорема 1.1.3. *Нека за низ статистика $\{T_n\}$ важи*

$$T_n \xrightarrow{P_\theta} b(\theta), \quad \theta \in \Theta_1, \tag{1.7}$$

где је $-\infty < b(\theta) < \infty$ и

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln[1 - G_n(t)] = -f(t) \tag{1.8}$$

за свако t из неког отвореног интервала I на ком је f непрекидна и $\{b(\theta), \theta \in \Theta_1\} \subset I$. Тада важи (1.3), штавише за свако $\theta \in \Theta_1$

$$c_T(\theta) = 2f(b(\theta)).$$

Доказ. Нека је $\theta \in \Theta_1$ произвољно и нека је $\epsilon > 0$ тако да $(b-\epsilon, b+\epsilon) \subset I$. Означимо са

$$O = \{s \in \Omega : b - \epsilon < T_n(s) < b + \epsilon\}.$$

Из (1.7) следи да за свако $\delta > 0$ постоји довољно велико n тако да оцена $P_\theta(O) > 1 - \delta$ важи. Како је F_n монотона, за свако $s \in O$ важе и неједнакости

$$1 - F_n(b + \epsilon) \leq L_n(s) \leq 1 - F_n(b - \epsilon).$$

Логаритмовањем и преласком на граничну вредност кад $n \to \infty$ добијамо да под условом (1.8) важи

$$-f(b + \epsilon) \leq \liminf_{n\to\infty} n^{-1} \ln L_n \leq \limsup_{n\to\infty} n^{-1} \ln L_n \leq -f(b - \epsilon)$$

за свако $s \in O$. Преласком на граничну вредност кад $\epsilon \to 0$ и искористивши непрекидност функције f добијамо да у P_θ-вероватноћи важи

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln L_n = -f(t).$$

□

Још један фундаменталан резултат у Бахадуровој теорији је постојање горње границе за нагиб, што је доказано у [5]. Дефинишимо за свака два елемента P_θ и $P_{\theta'}$ из фамилије расподела Кулбак-Лајблерово растојање са

$$K(P_\theta, P_{\theta'}) = \begin{cases} \int_\Omega \ln \frac{dP_\theta}{dP_{\theta'}} dP_\theta & \text{ако је } P_\theta \ll P_{\theta'}, \\ +\infty & \text{иначе.} \end{cases}$$

Често ћемо писати $K(\theta, \theta')$ уместо $K(P_\theta, P_{\theta'})$. Једно од својстава Кулбак-Лајблеровог растојања је $K(\theta, \theta') \geq 0$ као и $K(\theta, \theta') = 0$ акко $P_\theta = P_{\theta'}$. Дефинишимо и за $\theta \in \Theta_1$

$$K(\theta, \Theta_0) = \inf\{K(\theta, \theta_0) : \theta_0 \in \Theta_0\}.$$

Теорема 1.1.4. *За свако* $\theta \in \Theta_1$ *са* P_θ *вероватноћом* 1 *важи*

$$\liminf_{n\to\infty} n^{-1} \ln L_n(s) \geq -K(\theta, \Theta_0).$$

Доказ. Занима нас само случај када је $K(\theta, \Theta_0) < \infty$. Фиксирајмо $\theta \in \Theta_1$ за које то важи. На основу дефиниције инфимума, за произвољно $\epsilon > 0$ постоји $\theta_0 \in \Theta_0$ тако да

$$0 \leq L(\theta, \theta_0) < K(\theta, \Theta_0) + \epsilon < +\infty.$$

За фиксиране θ и θ_0 означимо са K њихово Кулбак-Лајблерово растојање $K(\theta, \theta_0)$. Ако је $K < \infty$ имамо да је $P_\theta \ll P_{\theta_0}$, па на основу Лебег-Радон-Никодимове теореме (видети [30], Теорема 6.27) постоји функција r тако да важи $dP_\theta = r dP_{\theta_0}$. Означимо са $r_n(s) = \prod_{i=1}^n r(X_i)$. Тада на основу јаког закона великих бројева са P_θ-вероватноћом 1 важи

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln r_n(s) = \lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{i=1}^n \ln r(X_i) = \int_\Omega \ln r(x) dP_\theta = K. \tag{1.9}$$

За свако природно n уведимо догађаје

$$A_n = \{L_n < \exp[-n(K + 2\epsilon)]\}, \quad B_n = \{r_n < \exp[n(K + \epsilon)]\}.$$

Тада је

$$\begin{aligned} P_\theta(A_n B_n) =& \int_{A_n B_n} dP_\theta^n = \int_{A_n B_n} r_n dP_{\theta_0}^n \\ \leq& \exp\{n(K + \epsilon)\} \int_{A_n} dP_{\theta_0}^n \\ =& exp\{n(K + \epsilon)\} \cdot P_{\theta_0}(A_n) \leq \exp\{-n\epsilon\} \end{aligned} \tag{1.10}$$

где последња неједнакост следи из (1.2).

На основу (1.10) имамо да ред $\sum_{n=1}^{\infty} P_\theta(A_n B_n)$ конвергира. На основу Борел-Кантелијеве леме са P_θ-вероватноћом 1 само коначан број догађаја се реализовао. Узевши у обзир (1.9) добијамо да неједнакост

$$L_n(s) \geq \exp\{-n(K + 2\epsilon)\}$$

важи скоро сигурно за довољно велико n. Логаритмовањем, дељењем са n, преласком на граничну вредност кад $n \to \infty$ и потом кад $\epsilon \to 0$ добијамо тврђење теореме. □

Теорема 1.1.4 имплицира да нагиб $c_T(\theta)$ произвољне статистике $\{T_n\}$ задовољава неједнакост

$$c_T^B(\theta) \leq 2K(\theta, \Theta_0). \tag{1.11}$$

Природно је дефинисати Бахадурову асимптотку ефикасност теста заснованог на низу статистика $\{T_n\}$ за конкретну алтернативу θ као количник

$$e_T^B(\theta) = \frac{c_T(\theta)}{2K(\theta, \Theta_0)},$$

док локалном Бахадуровом асимптотском ефикасношћу називамо количник

$$e_T^B = \lim_{\theta \to \theta_0} \frac{c_T(\theta)}{2K(\theta, \Theta_0)}, \quad \theta \in \partial\Theta_0. \tag{1.12}$$

Ако у (1.11) стоји једнакост за свако $\theta \in \Theta_1$, тада кажемо да је низ $\{T_n\}$ асимптотски оптималан у Бахадуровом смислу. Ако важи бар асимптотско понашање за свако $\theta_0 \in \partial\Theta_0$

$$c_T(\theta) \sim 2K(\theta, \Theta_0), \quad \theta \to \theta_0$$

тада се каже да је низ статистика $\{T_n\}$ локално асимптотски оптималан у Бахадуровом смислу.

1.2 Основе теорије великих одступања

Рачунања Бахадурове ефикасности, под условима теореме 1.1.3, своди се на одређивање асимптотског понашања вероватноћа мало вероватних догађаја, тј.

$$\lim_{n \to \infty} n^{-1} \ln P(T_n \geq t) = -f(t).$$

Та гранична својства зваћемо велика одступања низа статистика $\{T_n\}$. У овом одељку наводимо основне резултате те теорије на које ћемо се ослањати у даљем раду.

Нека је Y случајна величина са функцијом расподеле F. Означимо са ψ момент генераторну функцију од Y:

$$\psi(t) = Ee^{tY} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ty} dF(y), \quad -\infty < t < \infty,$$

и дефинишимо

$$\rho = \inf\{\psi(t) : t \geq 0\}.$$

Како је $\psi(0) = 1$ и $\psi(t) \geq 0$ следи да је $0 \leq \rho \leq 1$.

Лема 1.2.1. *Нека је Y случајна величина са момент генераторном функцијом $\psi(t)$. Важи*

$$P(Y \geq 0) \leq \rho.$$

Доказ. Нека је $t, 0 \geq t < \infty$ произвољно. Тада важи

$$P(Y \geq 0) = \int_0^{\infty} dF(y) \leq \int_0^{\infty} e^{ty} dF(y) \leq \int_{-\infty}^{\infty} e^{ty} dF(y) \leq \psi(t),$$

одакле проласком инфимума по $t, 0 \geq t < \infty$ добијамо тврђење теореме.

□

Као последицу ове леме због монотоности функције $t \to t^n$ имамо да ако је $Y_i, 1 \leq i \leq n$ прост случајан узорак, онда важи

$$\begin{aligned} P(Y_1 + \cdots + Y_n \geq 0) &\leq \inf\{\psi_{Y_1+\cdots+Y_n}(t) : \ t \geq 0\} \\ &= \inf\{\psi_{Y_1}(t)^n : \ t \geq 0\} \\ &= (\inf\{\psi_{Y_1}(t) : \ t \geq 0\})^n = \rho^n \end{aligned} \tag{1.13}$$

Наредна теорема сматра се основом теорије великих одступања. У приказаном облику доказао ју је Чернов који је уопштио првобитне Крамерове резултате (видети [5], теорема 3.1).

Теорема 1.2.2. *Нека је u_n низ реалних бројева такав да $u_n \to u$, $-\infty < u < +\infty$, и*

$$P(Y > 0) > 0.$$

Тада

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln P(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n \geq nu_n) = -f(u),$$

где је

$$-f(u) = \inf\{-tu + \ln \psi(t) : \ t \geq 0\}.$$

Ако још претпоставимо да је $\psi(t) < \infty$ у околини нуле, $E(Y_i) = 0$ и $DY_i = \sigma^2 > 0$, тада

$$f(u) = \frac{u^2}{2\sigma^2}(1 + o(1)) \quad \textit{кади} \to 0.$$

Пример 1.2.3. Нека је $Y_i, 1 \leq i \leq n$ прост случајан узорак из $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Момент генераторна функција од Y_1 је $\psi(t) = \exp[\mu t + 1/2\sigma^2 t^2]$, $t \in \mathbb{R}$. На основу теореме 1.2.2 добијамо да су велика одступања статистике $\sum_{i=1}^n Y_i$

$$\lim_{n \to \infty} n^{-1} \ln P(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n \geq nu) = -\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}.$$

◇

Уопштимо проблем великих одступања суме случајних величина на проблем великих одступања „погодних" функционала емпиријских мера.

Нека је (S, d) сепарабилан метрички простор, $\mathcal{B}$ Борелова σ-алгебра подскупова од S, и нека је $\Lambda = \mathcal{P}(B)$ скуп свих вероватносних мера на $\mathcal{B}$. Дефинишимо за произвољне $P, Q \in \Lambda$

$$K(Q, P) = \begin{cases} \int\limits_S \ln \frac{dQ}{dP} dQ, & \text{ако } Q \ll P, \\ +\infty, & \text{иначе}, \end{cases} \tag{1.14}$$

и дефинишимо за сваки подскуп Ω од Λ

$$K(\Omega, P) = \inf\{K(Q, P) : \ Q \in \Omega\},$$

имајући на уму да је $K(\varnothing, P) = +\infty$.

Нека је $\{Y_j\}$ низ независних једнако расподељених случајних промењивих које узимају вредности из S и имају расподелу $P \in \Lambda$. Означимо са F_n емпиријску расподелу узорка $Y_1, ..., Y_n$, тј. за сваки $B \in \mathcal{B}$

$$F_n(B) = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} I\{Y_i \in B\}.$$

Дефинишимо у простору Λ топологију τ као минималну за коју су пресликавања $Q \to Q(B)$, $Q \in \Lambda$ непрекидна за свако $B \in \mathcal{B}$. Наводимо теорему која представља главни резултат рада [8].

Теорема 1.2.4. *Нека је* $P \in \Lambda$ *и* $T : \Lambda \to \bar{\mathbb{R}}$ τ*-непрекидни функционал у свакој тачки* $Q \in \Gamma = \{R \in \Lambda : \ K(R, P) < \infty\}$*. Нека је* $\Omega_t^T = \{Q \in \Lambda : T(Q) \geq t\}$*. Ако је функција* $t \to K(\Omega_t^T, P)$ *непрекидна здесна у тачки* $t = r$*, тада је*

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln P(T(F_n) \geq r + \gamma_n) = -K(\Omega_r^T, P)$$

за сваки реалан низ $\{\gamma_n\}$ *такав да* $\gamma_n \to 0$ *кад* $n \to \infty$*.*

Теорема 1.2.4 биће основа за израчунавање великих одступања статистика интегралног типа. За велика одступања њихових уопштења, U- и V-статистика, потребни су нам појмови и резултати који следе.

Нека је Y тополошки простор са σ-алгебром $\mathcal{Y}$. Означимо са $\mathrm{cl}(A)$ и $\mathrm{int}(A)$ затворење и унутрашност скупа $A \subset Y$. Казаћемо за фамилију вероватносних мера $\{\mu_\epsilon\}$ на $\mathcal{Y}$ да задовољава принцип великих одступања са функцијом I, $0 \leq I(y) \leq \infty$ за $y \in Y$ ако су скупови $\{y \in Y : \ I(y) \leq c\}$ компактни за свако $c < \infty$ и за свако $A \in \mathcal{Y}$ важи

$$-I(\mathrm{int}(A)) \leq \liminf_{\epsilon\to 0} \epsilon \ln \mu_\epsilon(A) \leq \limsup_{\epsilon\to 0} \epsilon \ln \mu_\epsilon(A) \leq -I(\mathrm{cl}(A)),$$

где је $I(B) = \inf\{I(y) : \ y \in B\}$.

Нека је $\Phi : S^m \to Y$, симетрична у односу на пермутације својих аргумената. На основу простог случајног узорка $Y_1, ..., Y_n$ дефинисаћемо V-емпиријску меру на простору $\mathcal{Y}$, помоћу

$$H_n(B) = n^{-m} \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_m=1}^{n} I\{\Phi(Y_{i_1}, ..., Y_{i_m}) \in B\}, \quad B \in \mathcal{Y}. \tag{1.15}$$

Докази за наредне две теореме могу се пронаћи у [1] (теорема 3.1 и теорема 3.2).

Теорема 1.2.5. *Нека функција* Φ *пресликава мерљив простор* $(S^m, S^{(m)})$ $(S^{(m)} = \sigma(S \times \dots S))$ *у мерљив простор* $(Y, \mathcal{Y})$*. Означимо са* Q^m m*-производ меру од* Q*. Тада* V*-емпиријска мера* H_n *задовољава принцип великих одступања на простору* $\mathcal{P}(\mathcal{Y})$ *у односу на топологију* τ *са функцијом одступања*

$$J_P(\nu) = \inf\{K(Q, P) : \ \nu = Q^m \circ \Phi^{-1}, Q^m \in \mathcal{P}(S^m)\}.$$

Теорема 1.2.6. *Нека је функционал* $T : \mathcal{P}(\mathcal{Y}) \to \bar{\mathbb{R}}$ τ*-непрекидан, нека је* $\Omega_t = \{\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{Y}) : T(\mu) \geq t\}$*,* $t \in \mathbb{R}$ τ*-затворен, и нека је* H_n *низ* V*-емпиријских мера конструисаних из низа случајних величина* $\{Y_n\}$

са расподелом P. *Претпоставимо да* H_n *задовољава принцип великих одступања на* $\mathcal{P}(\mathcal{Y})$ *у* τ *топологији са функцијом одступања* J_P. *Претпоставимо још да је функција* $\lambda_P(t) = \inf\{J_P(\nu) : \nu \in \Omega_t\}$ *непрекидна здесна у тачки* $t = r$. *Тада*

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln P(T(H_n) \geq r + \gamma_n) = -\lambda_P(t)$$

за сваки реалан низ $\{\gamma_n\}$ *такав да* $\gamma_n \to 0$ *кад* $n \to \infty$.

Последњи резултат који наводимо у овом одељку тиче се постојања решења екстремалног проблема који ће нам бити од значаја, а доказан је у раду [8] (лема 3.2).

Лема 1.2.7. *Нека је* Ω *непразан* τ*-затворен скуп вероватносних мера из* Λ *и нека је* $\mathcal{P} \in \Lambda$. *Тада постоји мера* $\mathcal{Q} \in \Omega$ *за коју важи*

$$K(\mathcal{Q}, \mathcal{P}) = K(\Omega, \mathcal{P}).$$

1.3 Основе диференцијалног рачуна на Банаховим просторима

Као што смо видели у претходном одељку, израчунавање великих одступања захтева решавање екстремалних проблема повезаних са минимизацијом Кулбак-Лајблеровог растојања на одређеним скуповима. Сада наводимо резултате који омогућавају њихово решавање.

Нека су $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ нормирани простори, f_i, $i = 0, 1, ..., m$, глатке функције на $\mathcal{X}$, F глатко пресликавање простора $\mathcal{X}$ у $\mathcal{Y}$. Размотримо екстремални проблем

$$\begin{aligned} &\text{максимизирати (минимизирати) } f_0(x) \text{ под условима} \\ &F(x) = 0, \\ &f_i(x) \gtreqless 0, \quad i = 1, ..., m, \end{aligned} \tag{1.16}$$

где ознака $f_i(x) \gtreqless 0$ значи да i-то ограничење је $f_i(x) = 0$ или $f_i(x) \geq 0$ или $f_i(x) \leq 0$.

Правило Лагранжових множилаца важи за проблем условних екстремума на Банаховим просторима (1.16). Како бисмо га формулисали дефинишимо прво Лагнранжову функцију

$$\mathcal{L}(x, y^*, \lambda, \lambda_0) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x) + \langle y^*, F(x) \rangle,$$

где $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, $y^* \in \mathcal{Y}^*$, симбол $\langle y^*, F(x)\rangle$ означава вредност у коју функционал y^* слика елемент $F(x) \in \mathcal{Y}$ а $\mathcal{Y}^*$ је ознака за дуални простор од $\mathcal{Y}$. Доказ наредне теореме може се пронаћи у [33], одељак 3.2, ми овде наводимо само формулацију.

Теорема 1.3.1. *Нека су $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ Банахови простори, $\mathcal{U}$ отворен подскуп од $\mathcal{X}$. Нека су функције $f_i : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, $i = 0, 1, ..., m$ и пресликавање $F : \mathcal{U} \to \mathcal{Y}$ строго диференцијабилни у тачки $\hat{x}$. Ако је $\hat{x}$ локални екстремум проблема (1.16) и ако је слика $\operatorname{Im}(F'(\hat{x}))$ затворен потпростор у $\mathcal{Y}$, тада постоје Лагранжови множиоци $\hat{y}^*, \hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0$ који нису истовремено једнаки нули, за које важи:*

(а) услов стационарности за Лагранжову функцију по x:

$$\mathcal{L}_x(\hat{x}, \hat{y}^*, \hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0) = 0; \tag{1.17}$$

(б) услов сагласности знакова: $\hat{\lambda}_0 \geq 0$ ако је $\hat{x}$ минимум, $\hat{\lambda}_0 \leq 0$ ако је $\hat{x}$ максимум, и

$$\hat{\lambda}_i \lesseqgtr 0, \quad i = 1, 2, ..., m; \tag{1.18}$$

(в) допунски услов:

$$\hat{\lambda}_i f_i(\hat{x}) = 0, \quad i = 1, 2, ..., m.$$

Ознака (1.17) значи да је Фрешеов извод по x оператора $\mathcal{L}$ у тачки $(\hat{x}, \hat{y}^*, \hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0)$ нула оператор, тј. за свако $h \in \mathcal{X}$, $\mathcal{L}_x(\hat{x}, \hat{y}^*, \hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0)h = 0$. Услови (1.18) значе да ако је у (1.16) $f_i(x) \geq 0$ тада је $\hat{\lambda}_i \leq 0$, ако је $f_i(x) \leq 0$ тада је $\hat{\lambda}_i \geq 0$ и коначно ако је $f_i(x) = 0$ тада $\hat{\lambda}_i$ може бити произвољног знака.

Напомињемо да је пресликавање $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ строго диференцијабилно у тачки $\hat{x}$ ако постоји линеарни оператор $\Upsilon : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ такав да за свако $\epsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ тако да за свако x_1 и x_2 за које важи

$$\|x_1 - \hat{x}\| < \delta, \quad \|x_2 - \hat{x}\| < \delta,$$

важи и

$$\|F(x_1) - F(x_2) - \Upsilon(x_1 - x_2)\|_{\mathcal{Y}} < \epsilon \|x_1 - x_2\|_{\mathcal{X}}.$$

За строгу диференцијабилност дајемо довољан услов, који се може пронаћи у [33], одељак 2.2.3.

Теорема 1.3.2. *Нека су $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ нормирани простори, $\mathcal{U}$ околина тачке $\hat{x} \in \mathcal{X}$ и нека постоји Гатоов извод пресликавања $F : \mathcal{U} \to \mathcal{Y}$ у свакој тачки $x \in \mathcal{U}$. Ако је пресликавање $x \to F'(x)$ непрекидно (у униформној операторској топологији простора $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$) у тачки $\hat{x}$, тада је пресликавање F строго диференцијабилно у $\hat{x}$ (и последично Фреше диференцијабилно у истој тачки). (Овде је ознака $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ коришћена за простор свих линеарних непрекидних пресликавања $\mathcal{X}$ у $\mathcal{Y}$.)*

Формулишимо сада два резултата везана за постојање имплицитне функције и оператора, оба се могу пронаћи у [34].

Теорема 1.3.3. *Нека су $F_i(y_1, ..., y_p; x_1, ..., x_p), i = 1, 2..., p$, реалне непрекидне функције реалних аргумената које се анулирају у тачки $M = (y_1^0, ..., y_p^0; x_1^0, ..., x_s^0)$ и у некој довољно малој кугли с центром у M могу се развити у ред са степенима од $y_i - y_i^0$ и $x_k - x_k^0$, $i = 1, 2, ..., p$, $k = 1, 2, ..., s$. Претпоставимо да ови редови не садрже слободне чланове. Тада, ако је јакобијан*

$$\mathcal{J} = \frac{\partial(F_1, ..., F_p)}{\partial(y_1, ..., y_p)}$$

различит од 0 у тачки M онда систем једначина

$$F_i(y_1, ..., y_p; x_1, ..., x_s) = 0, \quad i = 1, 2, ..., p,$$

има јединствено решење $y_i = \phi_i(x_1, ..., x_s) = 0$, које задовољава услов

$$\phi_i(x_1^0, ..., x_s^0) = y_i^0,$$

и у некој довољно малој кугли са центром у тачки $(x_1^0, ..., x_s^0)$ функције ϕ_i могу бити развијене у ред са степенима од $x_k - x_k^0$, $k = 1, 2, ..., s$.

Нека су $\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2, \mathbb{E}_3$ Банахови простори и означимо са $\mathcal{D}_r(x_0, \mathbb{E})$ куглу полупречника r у простору $\mathbb{E}$ са центром у тачки x_0. Размотримо проблем наласка решења $x = x(y)$ операторске једначине

$$F(x, y) = 0, \tag{1.19}$$

које задовољава услов

$$x(y_0) = x_0 \tag{1.20}$$

ако знамо да је

$$F(x_0, y_0) = 0.$$

За оператор $A : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ ћемо рећи да је аналитички у тачки $x_0 \in \mathcal{X}$ ако важи $A(x_0 + h) = Ax_0 + \sum_{k=1}^{\infty} F_k(h, h, ..., h)$, где су F_k k-линеарне форме за које важи $\|F_k(x_1, ..., x_k)\| \leq M\|x_1\| \ldots \|x_k\|$ за неко $M \geq 0$ а $h \in \mathcal{X}$ је из неке довољно мале области конвергенције $\|h\| < r$ (видети [34], одељак 22). Ако претходно својство важи за све $x_0 \in \mathcal{U}$ онда кажемо да је оператор аналитички на скупу $\mathcal{U}$.

Теорема 1.3.4. *Нека је $F(x, y)$ аналитички оператор дефинисан на скупу $\mathcal{D}_r(x_0, \mathbb{E}_1) \times \mathcal{D}_\rho(y_0, \mathbb{E}_2)$ са вредностима у $\mathbb{E}_3$ такав да оператор*

$$B = F'_x(x_0, y_0)$$

(Фрешеов извод од F по x у тачки (x_0, y_0)) има ограничен инверз. Тада постоје позитивни бројеви r_1 и ρ_1 и јединствени аналитички оператор $f : \mathcal{D}_{\rho_1}(y_0, \mathbb{E}_2) \to \mathcal{D}_{r_1}(x_0, \mathbb{E}_1)$ такав да је

$$x = f(y)$$

решење једначине (1.19) које задовољава услове (1.20).

1.4 Поставка проблема

Нека је $X_1, X_2, ..., X_n$ низ независних једнако расподељених случајних величина са функцијом расподеле F и нека је $F_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I\{X_i \leq t\}$ одговарајућа емпиријска функција расподеле. Проблем који ћемо разматрати је тестирање хипотезе сагласности са расподелом, $H : F = F_0$, где је F_0 позната непрекидна функција расподеле, против опште алтернативе $A : F \neq F_0$ коју ћемо ако буде потребе специфицирати у зависности од случаја. Разне статистике се користе за тестове сагласности, навешћемо неке од њих које ће и бити главни предмет истраживања у даљем раду.

Најпознатија статистика овог типа је Колмогоровљева статистика

$$D_n = \sup_{-\infty<t<\infty} |F_n(t) - F_0(t)| \tag{1.21}$$

и њене варијације, Смирновљева једнострана сатистика

$$D_n^+ = \sup_{-\infty<t<\infty} (F_n(t) - F_0(t)) \tag{1.22}$$

$$D_n^- = \sup_{-\infty<t<\infty} (F_0(t) - F_n(t)) \tag{1.23}$$

као и Кајперова статистика

$$V_n = \sup_{-\infty<t<\infty} (F_n(t) - F_0(t)) - \inf_{-\infty<t<\infty} (F_0(t) - F_n(t)). \tag{1.24}$$

Очигледно је да је

$$D_n = \max(D_n^+, D_n^-) \quad \text{и} \quad V_n = D_n^+ + D_n^-.$$

Вотсон и Дарлинг су предложили центриране верзије Колмогоров-Смирновљевих статистика:

$$G_n = \sup_{-\infty<t<\infty} \left| F_n(t) - F_0(t) - \int\limits_{-\infty}^{\infty} (F_n(s) - F_0(s))dF_0(s) \right|, \tag{1.25}$$

$$G_n^+ = \sup_{-\infty<t<\infty} \left(F_n(t) - F_0(t) - \int\limits_{-\infty}^{\infty} (F_n(s) - F_0(s))dF_0(s) \right), \tag{1.26}$$

$$G_n^- = \sup_{-\infty<t<\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} (F_n(s) - F_0(s))dF_0(s) + F_0(t) - F_n(t) \right). \tag{1.27}$$

Још једну статистику Колмогоровљевог типа коју ћемо разматрати изучавали су Хмаладзе и Аки:

$$K_n = \sup_{-\infty<t<\infty} \left| F_n(t) - \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{1 - F_n(s)}{1 - F_0(s)} dF_0(s) \right| \tag{1.28}$$

(једностране статистике K_n^+ и K_n^- се уводе на сличан начин).

Друга група статистика заснована је на интегралу разлике између F_n и F_0. Најпознатија од њих је Крамер-фон Мизесова статистика

$$\omega_{n,1}^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (F_n(t) - F_0(t))^2 dF_0(t). \tag{1.29}$$

Андерсон и Дарлинг су предложили њено уопштење додавањем ненегативне тежинске функције и посматрањем произвољног природног степена разлике $F_n - F_0$:

$$\omega_{n,q}^k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (F_n(t) - F_0(t))^k q(F_0(t))dF_0(t). \tag{1.30}$$

Приметимо да статистике $\omega_{n,q}^k$ нису постојане против свих алтернатива за непарно k.

Разматраћемо и U- и V-статистике, које су предложили Хефдинг и фон Мизес. Поред осталог, њихова посебност је то што се велики број оцена и тест статистика може представити у облику U- и V- статистика за погодно одабране параметре.

Нека је m природан број, и нека је обим узорка $n \geq m$. Дефинишемо U-статистику са

$$U_n = \binom{n}{m}^{-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq n} \Phi(X_{i_1}, \dots, X_{i_m}), \tag{1.31}$$

где је функција $\Phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ симетрична у односу на сваку пермутацију својих m аргумената.

V-статистика V_n дефинише се помоћу

$$V_n = n^{-m} \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_m=1}^{n} \Phi(X_{i_1}, ..., X_{i_m}). \tag{1.32}$$

Функција Φ зове се језгро а m се зове ред U-статистике (V-статистике).

Пример 1.4.1.

- Узорачка средња вредност јесте U- односно V-статистика са језгром $\Phi(s) = s$.
- Вредност емпиријске функције расподеле у некој тачки $t \in \mathbb{R}$ јесте U- односно V-статистика са језгром $\Phi(s) = I\{s \leq t\}$.
- Вилкоксонова једноузорачка статистика W_n може се представити у облику U-статистике са језгром $\Phi(s,t) = I\{s + t > 0\}$.
- Фон Мизесова интегрална статистика $\omega^2_{n,1}$, може се представити у облику V-статистике са језгром $\Phi(s,t) = 1/2(s^2+t^2) - \max(s,t) + 1/3$.

◇

Након израчунавања великих одступања ових статистика, њихове нагибе добијамо на основу теореме 1.1.3 . Након тога, дељењем добијамо одговарајуће Бахадурове асимптотске ефикасности. Тим израчунавањима је посвећен остатак рада.

Поглавље 2

Велика одступања

2.1 Статистике Колмогоровљевог типа

У овом одељку разматрамо статистике D_n, $D_n^{\pm}$, V_n, G_n, $G_n^{\pm}$, и K_n, $K_n^{\pm}$ дефинисане са (1.21)−(1.28). Без губитка општости можемо претпоставити да је расподела под нултом хипотезом униформна на интервалу $[0,1]$, $F_0(t) = t$, $0 \le t \le 1$ (јер ако је X случајна величина са непрекидном функцијом расподеле F онда је $F(X) \in U(0,1)$).

Резултат о великим одступањима за статистике $D_n, D_n^{\pm}$ и V_n може се пронаћи у [5] а како бисмо га формулисали дефинишимо најпре функције за $0 < a < 1$

$$f(a,t) = \begin{cases} (a+t)\ln\frac{a+t}{t} + (1-a-t)\ln\frac{1-a-t}{1-t}, & 0 \le t \le 1-a, \\ +\infty, & 1-a < t \le 1, \end{cases} \tag{2.1}$$

и

$$g_1(a) = \inf_{0 \le t \le 1} f(a,t).$$

Лема 2.1.1. *Функција g_1 је непрекидна, штавише важи*

$$g_1(a) = 2a^2(1+o(1)), \quad \textit{када} \to 0. \tag{2.2}$$

Доказ. Из (2.1) следи да се инфимум од $f(a,.)$ постиже у тачки $t = t(a)$, корену једначине

$$f_t'(a,t) = \ln\frac{(1-t)(a+t)}{t(1-a-t)} - \frac{a}{t(1-t)} = 0.$$

Из теореме о имплицитној функцији $t(a)$ зависи непрекидно од a. Претпоставимо да се $t(a)$ понаша као $c+\alpha(a)$ кад $a \to 0$ (c је неки реалан број из $(0,1)$, а $\alpha(a) \to 0$ кад $a \to 0$). Након развоја добијамо да је

$$t(a) = \frac{1}{2} + o(1), \tag{2.3}$$

кад $a \to 0$. Уврстивши (2.3) у (2.1) добија се

$$\begin{aligned} g_1(a) = &\left(a + \frac{1}{2} + \alpha\right) \ln\left(1 + \frac{a}{\frac{1}{2} + \alpha}\right) + \left(\frac{1}{2} - \alpha - a\right) \ln\left(1 - \frac{a}{\frac{1}{2} - \alpha}\right) \\ &= 2a^2(1 + o(1)), \end{aligned}$$

кад $a \to 0$. □

Теорема 2.1.2. *Нека је T_n једна од статистика D_n, D_n^+, D_n^- или V_n. Ако је нулта хипотеза H тачна тада је*

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln P(T_n \geq a) = -g_1(a). \tag{2.4}$$

Доказ. Уведимо ознаке

$$P_n^+ = P(D_n^+ \geq a), \quad P_n^- = P(D_n^- \geq a), \quad P_n = P(D_n \geq a).$$

Једнакост $P_n^+ = P_n^-$ доказао је Смирнов (видети [31]). Тада због монотоности и субадитивности вероватоће следи

$$P_n^+ \leq P_n \leq P_n^+ + P_n^- = 2P_n^+. \tag{2.5}$$

Ако покажемо (2.4) за низ статистика D_n^+, због (2.5), тврђење теореме ће следити и за низове D_n^- и D_n. Одредимо доње ограничење за P_n^+.

За свако $t \in [0,1]$

$$P_n^+ \geq P(F_n(t) - t - a \geq 0) = P\left(\sum_{i=1}^{n} I\{X_i \leq t\} \geq n(t+a)\right). \tag{2.6}$$

Момент генераторна функција индикатора $I\{X_i \leq t\}$ је

$$\psi(x) = Ee^{xI\{X_i \leq t\}} = te^x + 1 - t.$$

Да бисмо израчунали (2.6) на основу теореме 1.2.2 потребно је наћи $\inf\{-x(t+a) + \ln(te^x + 1 - t) : x \geq 0\}$. Изједначавањем извода са нулом долазимо до тога да се инфимум достиже у тачки $x = \ln(\frac{1-a-t}{a+t}) + \ln\left(\frac{1-t}{t}\right)$ одакле следи да је

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln P(F_n(t) - t - a \geq 0) = -f(a,t).$$

Како је t било произвољно, имамо

$$\liminf_{n\to\infty} n^{-1} \ln P_n^+ \geq -g_1(a). \tag{2.7}$$

Да бисмо добили исто горње ограничење бирамо природно m довољно велико да важе неједнакости $0 < a - \frac{1}{m} < 1$. Тада за све $1 \leq i \leq m$, пошто су $F_n(t)$ и t неопадајуће, важи

$$\max\left\{F_n(t) - t : \frac{i-1}{m} \leq t \leq \frac{i}{m}\right\} \leq F_n\left(\frac{i}{m}\right) - \frac{i-1}{m}.$$

Стога важи и

$$D_n^+ \leq \max\left\{F_n\left(\frac{i}{m}\right) - \frac{i-1}{m} : 1 \leq i \leq m\right\}.$$

Због субадитивности вероватноће и после због леме 1.2.1 имамо

$$P_n^+ \leq \sum_{i=1}^{m} P\left(F_n\left(\frac{i}{m}\right) - \frac{i-1}{m} - \left(a - \frac{1}{m}\right) \geq 0\right) \leq m e^{-ng_1\left(a-\frac{1}{m}\right)}.$$

Логаритмовањем и преласком на граничну вредност кад $n \to \infty$ добијамо

$$\limsup_{n\to\infty} n^{-1} \ln P_n^+ \leq -g_1\left(a - \frac{1}{m}\right).$$

Због непрекидности g_1, преласком на граничну вредност кад $m \to \infty$, добијамо и тражено горње ограничење

$$\limsup_{n\to\infty} n^{-1} \ln P_n^+ \leq -g_1(a). \tag{2.8}$$

Тврђење теореме за низ D_n^+ следи из (2.7) и (2.8).

Доказ за низ V_n захтева додатне аргументе. Означимо са

$$Q_n = P(V_n \geq a).$$

Како је $Q_n \geq P_n^+$, довољно је доказати

$$\limsup_{n\to\infty} n^{-1} \ln Q_n \leq -g_1(a). \tag{2.9}$$

Приметимо да је

$$V_n = \sup\{F_n(t) - t + u - F_n(u) : \ 0 \le t \le 1, \ 0 \le u \le 1\}.$$

Нека је m природан број довољно велики да важи $0 < a - \frac{2}{m} < 1$ и i, j природни бројеви такви да важи $1 \le i, j \le m$. Тада

$$F_n(t) - t + u - F_n(u) \le F_n\left(\frac{i}{m}\right) - \frac{i-1}{m} + \frac{j}{m} - F_n\left(\frac{j-1}{m}\right) = \Delta_n(i,j)$$

за $\frac{i-1}{m} \le t \le \frac{i}{m}$ и $\frac{j-1}{m} \le u \le \frac{j}{m}$. Приметимо да је

$$F_n\left(\frac{i}{m}\right) - F_n\left(\frac{j-1}{m}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(I\left\{X_i \le \frac{i}{m}\right\} - I\left\{X_i \le \frac{j-1}{m}\right\}\right).$$

Након израчунавања момент генераторне функције за $\Delta_n(i,j)$ и применом теореме 1.2.2 добијамо

$$P(\Delta_n(i,j) \ge a) \le \begin{cases} \exp\left[-nf\left(a - \frac{2}{m}, \frac{i-j+1}{m}\right)\right], & i \ge j-1, \\ \exp\left[-nf\left(a - \frac{2}{m}, 1 - \frac{j-1-i}{m}\right)\right], & i \le j-1. \end{cases} \tag{2.10}$$

Стога је за све i, j,

$$P(\Delta_n(i,j) \ge a) \le \exp\left[-ng_1\left(a - \frac{2}{m}\right)\right],$$

па је и

$$Q_n \le \sum_{i,j} P(\Delta_n(i,j) \ge a) \le m^2 \exp\left[-ng_1\left(a - \frac{2}{m}\right)\right].$$

Логаритмовањем, дељењем са n, потом проласком лимеса прво кад $n \to \infty$ а онда и кад $m \to \infty$, добијамо оцену (2.9) (узели смо у обзир непрекидност функције g_1 коју обезбеђује лема 2.1.1). □

Формулишимо и докажимо теорему о великим одступањима статистика G_n, G_n^+, G_n^-, која је била објављена у раду [32]. Биће довољно да то урадимо за статистику G_n^+ јер као и пре, веома лако можемо установити аналогну неједнакост са (2.5). Уведимо функцију

$$g_2 = \inf\left\{-as - \frac{1}{2}s + \ln\left(\frac{e^s - 1}{s}\right)\right\}.$$

Аналогним поступком као за функцију g_1 (лема 2.1.1) добијамо да је g_2 непрекидна и да важи

$$g_2(a) = 6a^2(1 + o(1)), \quad \text{кад } a \to 0.$$

Теорема 2.1.3. *Ако је нулта хипотеза* H *тачна и* $a \in (0,1)$*, тада*

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln P(G_n^+ \geq a) = -g_2(a).$$

Доказ. Запишимо G_n^+ у следећем облику

$$G_n^+ = \sup_{0\leq t\leq 1} \left[F_n(t) - t + \bar{x} - \frac{1}{2}\right].$$

За произвољно $t \in [0,1]$ имамо

$$P(G_n^+ \geq a) \geq P\left(n^{-1}\sum_{j=1}^{n} Z_j \geq a\right),$$

где је $Z_j = I\{X_j \leq 1\} - t + X_j - \frac{1}{2}$. Момент генераторна функција за Z_j је

$$Ee^{sZ_j} = e^{-s/2}(e^s - 1), \quad s \geq 0.$$

Применом теореме 1.2.2 долазимо до доње оцене

$$\liminf_{n\to\infty} n^{-1} \ln P(G_n^+ \geq a) \geq -\inf_{s\geq 0} \ln[e^{-as}Ee^{sZ_j}] = -g_2(a).$$

Горње ограничење можемо добити на исти начин као у теореми 2.1.2 за статистику D_n^+. Прво искористимо монотоност функције F_n да добијемо оцену

$$\begin{aligned} G_n^+ \leq& \max\left\{F_n\left(\frac{i}{m}\right) - \frac{i-1}{m} + \bar{x} - \frac{1}{2} :\ 1 \leq i \leq m\right\} \\ =& \max\left\{\sum_{i=1}^{n} n^{-1}\left(I\{X_i \leq t\} + X_i - \frac{i-1}{nm} - \frac{1}{2n}\right) :\ 1 \leq i \leq m\right\}. \end{aligned}$$

Поново, због субадитивности вероватноће и леме 1.2.1, након елементарног рачуна добија се тврђење теореме. □

Велика одступања Хмаладзе-Аки статистика K_n, $K_n^{\pm}$ описана су следећом теоремом, коју је доказала Подкоритова у свом раду [10].

Теорема 2.1.4. *Нека је* T_n *нека од статистика* K_n*,* K_n^+*,* K_n^-*. Ако је нулта хипотеза* H *тачна и* $a \in (0,1)$*, тада*

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln P(T_n \geq a) = g_3(a),$$

где је

$$g_3(a) = a + \ln(1-a) = -\frac{1}{2}a^2(1 + o(1)), \quad \textit{кад } a \to \infty.$$

Доказ. Опет је довољно разматрати само K_n^+ јер важи неједнакост аналогна са (2.5). Нека је $t \in [0,1]$ произвољно и нека је $X_{(m)}$ највећа статистика поретка строго мања од t. Важи:

$$\begin{aligned}
&F_n(t) - \int_0^t \frac{1-F_n(s)}{1-s}ds \\
&= F_n(t) - \int_0^{X_{(1)}} \frac{1}{1-s}ds - \int_{X_{(1)}}^{X_{(2)}} \frac{\frac{n-1}{n}}{1-s}ds - \cdots - \int_{X_{(m)}}^{t} \frac{\frac{n-m}{n}}{1-s}ds \\
&= \sum_{i=1}^{m} n^{-1}\left(1+\ln(1-X_{(i)})\right) + \frac{n-m}{n}\ln(1-t) = \ n^{-1}\sum_{j=1}^{n} W_j
\end{aligned}$$

где је

$$W_j = \begin{cases} 1+\ln(1-X_j), & X_j \le t, \\ \ln(1-t), & X_j > t. \end{cases}$$

За произвољно $t \in [0,1]$ тада имамо

$$P(K_n^+ \ge a) \ge P\left(n^{-1}\sum_{j=1}^{n} W_j \ge a\right).$$

Момент генераторна функција за W_1 је

$$\begin{aligned}
\phi_t(s) =& Ee^{sW_1} = E(E(e^{sW_1}|X_1)) = tEe^{s+s\ln(1-X_1')} + (1-t)Ee^{s\ln(1-t)} \\
=& \frac{e^s - (1-t)^{s+1}e^s + (1-t)^{s+1}(s+1)}{s+1}, \quad s \ge 0
\end{aligned}$$

где смо са X_1' означили $X_1|X_1 \le t$, важи $X_1' \in U[0,t]$. На основу теореме 1.2.2 имамо

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\ln P\left(\sum_{j=1}^{n} W_j \ge na\right) = -\psi(a,t),$$

где је $-\psi(a,t) = \inf\{-sa + \ln\phi_t(s) : s \ge 0\}$. Одатле следи

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} n^{-1}\ln P(K_n^+ \ge a) &\ge \sup_{0\le t\le 1}\{-\psi(a,t)\} \\
&= \sup_{0\le t\le 1}\inf_{s\ge 0}\{-sa + \ln\phi_t(s)\} \\
&= \sup_{0\le t\le 1}\inf_{s\ge 0}\{s(1-a) - \ln(1+s) \\
&\quad + \ln(1-(1-t)^{s+1}(1-(s+1)e^{-s}))\}.
\end{aligned}$$

Функција $h(s,t,a) = s(1-a) - \ln(1+s) + \ln(1-(1-t)^{s+1}(1-(s+1)e^{-s}))$ је растућа по t за фиксиране s и a, тј. $h(s,t_1,a) < h(s,t_2,a)$ за $t_1 < t_2$.

Проласком инфимума по свим $s \geq 0$ у последњој неједнакости добијамо да је функција $\inf_{s\geq 0}\{h(s,t,a)\}$ неопадајућа по t. Важи

$$\begin{aligned}\sup_{0\leq t\leq 1}\{-\psi(a,t)\} =& \inf_{s\geq 0} h(s,1,a) = \inf_{s\geq 0}\{s(1-s)-\ln(1+s)\}\\ =& a+\ln(1-a)\equiv g_3(a).\end{aligned}$$

Одатле добијамо да је доње ограничење

$$\liminf_{n\to\infty} n^{-1}\ln P(K_n^+\geq a)\geq g_3(a). \tag{2.11}$$

Да бисмо добили горње ограничење, узмимо природно k довољно велико да важи $a > \epsilon_k = (\ln\ln k)^{-1}$. Због монотоности важи за свако $1\leq i\leq k$

$$\begin{aligned}&\max_{\frac{i-1}{k}\leq t\leq \frac{i}{k}}\left\{F_n(t)-\int_0^t \frac{1-F_n(s)}{a-s}ds\right\}\leq F_n\left(\frac{i}{k}\right)-\int_0^{\frac{i-1}{k}}\frac{1-F_n(s)}{a-s}ds\\ &=F_n\left(\frac{i}{k}\right)-F_n\left(\frac{i-1}{k}\right)+F_n\left(\frac{i-1}{k}\right)-\int_0^{\frac{i-1}{k}}\frac{1-F_n(s)}{a-s}ds.\end{aligned}$$

Одакле се лако добија да важи

$$\begin{aligned}P(K_n^+\geq a)\leq& P\left(\max_{1\leq i\leq k}\left[F_n\left(\frac{i-1}{k}\right)-\int_0^{\frac{i-1}{k}}\frac{1-F_n(s)}{a-s}ds\right]\geq a-\epsilon_k\right)\\ &+P\left(\max_{1\leq i\leq k}\left[F_n\left(\frac{i}{k}\right)-F_n\left(\frac{i-1}{k}\right)\right]\geq\epsilon_k\right)=A_1+A_2.\end{aligned}$$

Оценимо сада A_1 и A_2 користећи прво субадитивност вероватноће а потом и неједнакост (1.13):

$$\begin{aligned}A_1&\leq\sum_{i=1}^k P\left(F_n\left(\frac{i-1}{k}\right)-\int_0^{\frac{i-1}{k}}\frac{1-F_n(s)}{a-s}ds\geq a-\epsilon_k\right)\\ &\leq k\max_{1\leq i\leq k}\exp\left[-n\psi\left(a-\epsilon_k,\frac{i-1}{k}\right)\right]\\ &\leq k\exp[n\sup_{0\leq t\leq 1}\{-\psi(a-\epsilon_k,t)\}]\\ &=k\exp[n(a-\epsilon_k+\ln(1-a+\epsilon_k))]\\ A_2&\leq\sum_{i=1}^k P\left(F_n\left(\frac{i}{k}\right)-F_n\left(\frac{i-1}{k}\right)\geq\epsilon_k\right)\\ &\leq 2k\exp[-n((1-\epsilon_k)\ln(1-\epsilon_k)\\ &\quad+\epsilon_k\ln\epsilon_k+\epsilon_k\ln(k-1))].\end{aligned}$$

Након логаритмовања, потом проласком $\limsup$ кад $n \to \infty$, коришћењем асимптотске релације $\ln(a_n + b_n) \sim \ln \max\{a_n, b_n\}$ кад $n \to \infty$ и тога да је функција $f(x) = x \ln x$ ограничена одоздо са $-e^{-1}$, добијамо

$$\begin{aligned}&\limsup_{n\to\infty} n^{-1} \ln P(K_n^+ \geq a)\\ &\qquad \leq \max\left\{a - \epsilon_k + \ln(1 - a + \epsilon_k), \frac{2}{e} - \epsilon_k \ln(k-1)\right\}.\end{aligned}$$

Преласком на граничну вредност кад $k \to \infty$ добијамо и горње ограничење

$$\limsup_{n\to\infty} n^{-1} \ln P(K_n^+ \geq a) \leq g_3(a). \tag{2.12}$$

Из (2.12) и (2.11) следи тврђење теореме.

□

2.2 Статистике интегралног типа

У овом одељку разматрамо велика одступања интегралне статистике $\omega_{n,q}^k$, дефинисне помоћу једнакости (1.30). Главни резултат објављен је у Никитиновом раду из два дела [11], [12]. Како бисмо га формулисали размотримо прво гранични проблем

$$y'' - \lambda q y^{k-1} = 0, \quad y(0) = y(1) = 0, \quad \int_0^1 y^k q dt = 1. \tag{2.13}$$

Постојање решења проблема (2.13) може се показати методама изложеним у [6], XII поглавље, одељак 2.4. Нека је $\lambda_0 = \lambda_0(q; k)$ најмањи број по апсолутној вредности за који решење проблема (2.13) постоји (сви такви бројеви су негативни) и нека је x_0 одговарајуће решење за $\lambda = \lambda_0$. За пар (x_0, λ_0) ћемо ћемо рећи да је главно решење а за λ_0 да је главна вредност проблема (2.13).

Теорема 2.2.1. *Претпоставимо да је нулта хипотеза H тачна. Нека је k позитиван цео број и нека је q позитивна тежинска функција, интеграбилна на* $(0, 1)$. *Тада*

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln P(\omega_{n,q}^k \geq a) = \sum_{j=2}^{\infty} c_j a^{j/k}, \tag{2.14}$$

где ред са коефицијентима c_j конвергира за довољно мало $a > 0$; штавише $c_2 = \frac{1}{2}\lambda_0(q; k)$.

Доказ. Посматрајмо нашу статистику $\omega_{n,q}^k$ као функционал од F_n

$$\chi(F_n) = \int_0^1 (F_n(t) - t)^k q(t) dt.$$

За сваке две функције расподеле F_1 и F_2 на $[0,1]$ важи

$$\begin{aligned} |\chi(F_1) - \chi(F_2)| &= \left| \int_0^1 (F_1(t) - t)^k q(t) dt - \int_0^1 (F_2(t) - t)^k q(t) dt \right| \\ &\leq \int_0^1 \left| (F_1(t) - t)^k - (F_2(t) - t)^k \right| q(t) dt \\ &= \int_0^1 \left| k\xi^{k-1}(t) \right| \left| (F_1(t) - t) - (F_2(t) - t) \right| q(t) dt \\ &\leq k \int_0^1 q(t) dt \left\{ \sup_{0 \leq t \leq 1} |F_1(t) - F_2(t)| \right\} \end{aligned}$$

где смо користили основну интегралну неједнакост, Лагранжову теорему о средњој вредности и то да је $\left|\xi^{k-1}(t)\right| \in [0,1]$. Низ неједнакости указује на то да је функционал χ ρ-непрекидан што имплицира да је и τ-непрекидан у простору свих функција расподеле на $[0,1]$, Λ_1 (доказ тог тврђења може се пронаћи у [8]).

Уведимо сада за свако $a > 0$ скуп Ω_a, оних функција расподеле на $[0,1]$ које задовољавају неједнакост

$$\int_0^1 (F(t) - t)^k q(t) dt \geq a.$$

За сваку апсолутно непрекидну функцију расподеле F на $[0,1]$ означимо са $K(F)$ одговарајуће Кулбак-Лајблерово растојање

$$K(F) = \int_0^1 F'(t) \ln F'(t) dt.$$

Уведимо још ознаку

$$K(\Omega_a) = \inf\{K(F) : \ F \in \Omega_a\}.$$

Претпоставимо да за довољно мало $a > 0$

$$K(\Omega_a) = -\sum_{j=2}^{\infty} c_j a^{j/k}, \tag{2.15}$$

где је ред са десне стране једнакости баш онај из (2.14). Тада је $K(\Omega_a)$ непрекидна функција по a за довољно мало $a > 0$, показали смо да је $\omega_{n,q}^k$ τ-непрекидан функционал од F_n, па су задовољени сви услови теореме 1.2.4 која нам обезбеђује

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln P(\omega_{n,q}^k \geq a) = -K(\Omega_a). \tag{2.16}$$

Закључак теореме (2.2.1) тада следи из (2.15) и (2.16), па да бисмо комплетирали доказ морамо показати да (2.15) важи, чиме се надаље бавимо.

Скуп Ω_a је непразан за довољно мало a и τ-затворен јер је χ τ-непрекидан, па је $\Omega_a = \chi^{-1}[a, +\infty]$ затворен као инверзна слика затвореног скупа непрекидним пресликавањем. На основу леме 1.2.7, постоји функција расподеле $Q \in \Omega_a$ у којој функционал $F \to K(F)$ достиже инфимум, тј. постоји решење екстремалног проблема рачунања $K(\Omega_a)$.

За израчунавање $K(\Omega_a)$ довољно је посматрати фамилију $\mathcal{F}$, апсолутно непрекидних функција расподеле F на $[0, 1]$ са одговарајућим густинама f (јер ако функција расподеле није апсолутно непрекидна онда је $K(F) = +\infty$ по дефиницији). За $\delta > 0$, дефинишимо подскуп фамилије $\mathcal{F}$

$$V_\delta = \{F \in \mathcal{F} : \ f > \delta \text{ скоро свуда на } [0, 1]\}.$$

Лема 2.2.2. *Постоји ненегативна функција α таква да $\alpha(\delta) \to 0$ кад $\delta \to 0$ и за довољно мало $\delta > 0$ важи*

$$K(\Omega_a) \geq K(\Omega_{a-\alpha(\delta)} \cap V_{\delta/2}) - \delta.$$

Доказ леме. Претпоставимо да се вредност $K(\Omega_a)$ достиже за функцију расподеле F са одговарајућом густином f. Тада

$$f_\delta = \frac{f + \delta}{1 + \delta} > \frac{\delta}{2},$$

па одговарајућа функција расподеле F_δ припада скупу $V_{\delta/2}$. Како f_δ равномерно тежи ка f кад $\delta \to 0$, одатле следи да F_δ конвергира ка F тачка по тачка на $[0, 1]$. Пошто је $[0, 1]$ компактан скуп следи да $F_\delta \to F$ равномерно на $[0, 1]$. То имплицира да

$$\begin{aligned}\lim_{\delta\to 0} \chi(F_\delta) =& \lim_{\delta\to 0} \int_0^1 (F_\delta(t) - t)^k q(t) dt = \int_0^1 \lim_{\delta\to 0} (F_\delta(t) - t)^k q(t) dt \\ =& \int_0^1 (F(t) - t)^k q(t) dt = \chi(F),\end{aligned}$$

па је $F_\delta \in \Omega_{a-\alpha(\delta)} \cap V_{\delta/2}$ где $\alpha(s) \to 0$ кад $\delta \to 0$.

Покажимо сада неједнакост

$$\int_0^1 f_\delta(t) \ln f_\delta(t) dt - \int_0^1 f(t) \ln f(t) dt \leq \delta. \tag{2.17}$$

Применимо Лагранжове теореме о средњој вредности на функцију $x \ln x$ и искориствши да је $K(F) = \int_0^1 f(t) \ln f(t) dt \geq 0$ добијамо

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_\delta(t) \ln f_\delta(t) dt &- \int_0^1 f(t) \ln f(t) dt \\ &= - \ln(1+\delta) - \frac{\delta}{1+\delta} \int_0^1 f(t) \ln f(t) dt \\ &\quad + \frac{1}{1+\delta} \int_0^1 [(f(t)+\delta) \ln(f(t)+\delta) - f(t) \ln f(t)] dt \\ &\leq \frac{1}{1+\delta} \int_0^1 (\ln(f(t)+\delta^*(t)) + 1)\, \delta\, dt, \quad 0 < \delta^*(t) < \delta. \end{aligned}$$

Неједнакост (2.17) следи ако у претходној применимо још елементарну неједнакост $\ln x \leq x - 1$ за $x > 0$. Стога је

$$K(\Omega_a) = \int_0^1 f(t) \ln f(t) dt \geq \int_0^1 f_\delta(t) \ln f_\delta(t) dt - \delta,$$

одакле тврђење леме 2.2.2 следи. □

Сада на основу леме 2.2.2 као и чињенице да инфимум надскупа није већи од инфимума подскупа, важи

$$K(\Omega_{a_1} \cap V_{\delta/2}) - \delta \leq K(\Omega_a) \leq K(\Omega_a \cap V_{\delta/2}), \tag{2.18}$$

где је $a_1 = a - \alpha(\delta)$.

Неједнакост (2.13) нам обезбеђује да израчунавањем $K(\Omega_a \cap V_{\delta/2})$ и преласком на граничну вредност кад $\delta \to 0$ можемо добити $K(\Omega_a)$.

Још једно помоћно тврђење тиче се особина простора $\mathbb{W}_{p,m}[0,1]$ којег чине функције $x(t)$, m пута диференцијабиле, такве да је $x(0) = x(1) = 0$ и $x^{(m)} \in L^p[0,1]$, $0 < p \leq \infty$.

Норма се у простору $\mathbb{W}_{p,m}[0,1]$, за $0 < p < \infty$ дефинише као

$$\|x\|_{\mathbb{W}_{p,m}} = \left[\int_0^1 \left| x^{(m)}(t) \right|^p dt \right]$$

док се за $p = \infty$ дефинише као

$$\|x\|_{\mathbb{W}_{\infty,1}} = \operatorname*{ess\,sup}_{0 \leq t \leq 1} |x'(t)|.$$

Лема 2.2.3. *За свако* $x \in \mathbb{W}_{1,2}[0,1]$

$$\sup_{0\le t\le 1}|x(t)| \le \sup_{0\le t\le 1}|x'(t)| \le \|x\|_{\mathbb{W}_{1,2}}.$$

Доказ леме. Важи

$$|x(t)| = \left|\int_0^t x'(s)ds\right| \le \int_0^1 |x'(s)|ds \le \sup_{0\le t\le 1}|x'(t)|.$$

По Роловој теореми постоји тачка $t_0 \in [0,1]$ тд. $x'(t_0) = 0$. Тада је за свако $t \in [0,1]$

$$|x'(t)| = \left|\int_{t_0}^t x''(s)ds\right| \le \int_0^1 |x''(s)|ds = \|x\|_{\mathbb{W}_{1,2}}.$$

Проласком супремума по свим $t \in [0,1]$ долазимо до неједнакости из тврђења леме. □

Биће погодно, због лакшег записа, прећи са класе $\mathcal{F}$ на класу апсолутно непрекидних функција $x(t) = F(t) - t$, $F \in \mathcal{F}$. Нека је $\mathcal{U} \subset \mathbb{W}_{\infty,1}[0,1] = \mathcal{X}$ отворен подскуп који садржи функције x такве да

$$x'(t) + 1 > \frac{\delta}{2} \quad \text{за скоро све } t \in [0,1]. \tag{2.19}$$

Тада се наш екстремални проблем (израчунавање $K(\Omega_{a_1} \cap V_{\delta/2})$) своди на минимизацију функционала

$$f_0(x) = K(F) = \int_0^1 (x'(t)+1)\ln(x'(t)+1)dt, \tag{2.20}$$

на скупу $\mathcal{U}$ под ограничењем

$$f_1(x) = \int_0^1 x^k(t)q(t)dt - a_1 \ge 0. \tag{2.21}$$

Неједнакост (2.19) обезбеђује постојање Гатоових извода функционала f_0 и f_1 у свакој тачки $x \in \mathcal{U}$, па израчунајмо њихово дејство на произвољном

$h \in \mathbb{W}_{\infty,1}[0,1]$.

$$\begin{aligned}
f_0'(x)h =& \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f_0(x+\epsilon h) - f_0(x)}{\epsilon} \\
=& \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon} \int_0^1 [(x' + \epsilon h' + 1)\ln(x' + \epsilon h' + 1) - (x'+1)\ln(x'+1)]dt \\
=& \int_0^1 (\ln(x'+1)+1)h'dt, \\
f_1'(x)h =& \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f_1(x+\epsilon h) - f_1(x)}{\epsilon} \\
=& \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon} \int_0^1 [(x+\epsilon h)^k q - x^k q]dt = \int_0^1 kx^{k-1}qhdt.
\end{aligned}$$

Као такви, $f_0'(x)$ и $f_1'(x)$ су непрекидни функционали, па нам теорема 1.3.2 обезбеђује строгу диференцијабилност од f_0 и f_1. Сада су сви услови теореме 1.3.1 испуњени на основу које постоје Лагранжови множиоци, $\hat{\lambda}_0$ и $\hat{\lambda}_1$, $\hat{\lambda}_0^2 + \hat{\lambda}_1^2 > 0$, такви да функција $\hat{x}(t)$, решење екстремалног проблема (2.20) - (2.21), задовољава једначину

$$\mathcal{L}_x(\hat{x}, \hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}_1) = 0, \tag{2.22}$$

где је

$$\mathcal{L}(x, \hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}_1) = \hat{\lambda}_0 f_0(x) + \hat{\lambda}_1 f_1(x),$$

уз додатни услов

$$\hat{\lambda}_1 f_1(\hat{x}) = 0.$$

Услов (2.22) значи да је извод функције $\mathcal{L}$ по x нула оператор, тј. за свако $h \in \mathbb{W}_{\infty,1}[0,1]$ важи

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_x(\hat{x}, \hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}_1)h =& \hat{\lambda}_0 f_0'(\hat{x})h + \hat{\lambda}_1 f_1'(\hat{x})h \\
=& \int_0^1 \left[\hat{\lambda}_0(\ln(\hat{x}'(t)+1)+1)h'(t) + k\hat{\lambda}_1 \hat{x}^{k-1}(t)q(t)h(t)\right] dt = 0.
\end{aligned}$$

Парцијалном интеграцијом то се своди на

$$\int_0^1 \left[\hat{\lambda}_0(\ln(\hat{x}'(t)+1)+1) + k\hat{\lambda}_1 \int_t^1 \hat{x}^{k-1}(s)q(s)ds\right] h'(t)dt = 0.$$

Одатле се погодним избором h може добити (видети [9], одељак 7.) да за скоро свако t важи

$$\hat{\lambda}_0(\ln(\hat{x}'(t)+1)+1) + k\hat{\lambda}_1 \int_t^1 \hat{x}^{k-1}(s)q(s)ds = const. \tag{2.23}$$

Можемо сматрати да је (2.23) тачна за све $t \in [0,1]$ јер се вредност функционала f_0 неће променити. Из израза (2.23) следи да је функција $\ln(\hat{x}'+1)$ апсолутно непрекидна, па је по Њутн-Лајбницовој формули скоро свуда диференцијабилна и диференцирањем се добија

$$\hat{\lambda}_0\hat{x}''(t) - k\hat{\lambda}_1\hat{x}^{k-1}(t)(\hat{x}'(t)+1)q(t) = 0. \tag{2.24}$$

Поново можемо претпоставити да (2.24) важи за свако $t \in [0,1]$. Пошто је q позитивна, $\hat{x}'(t)+1 > \delta/2$, и $\hat{\lambda}_1 > 0$, ако би $\hat{\lambda}_0$ било једнако 0, следило би да је $\hat{x} \equiv 0$ што је у супротности са условом (2.21). Дакле услов (2.24) је у нашем случају еквивалентан са Ојлер-Лагранжовом једначином

$$\hat{x}''(t) - \mu\hat{x}^{k-1}(t)(\hat{x}'(t)+1)q(t) = 0, \tag{2.25}$$

уз коју треба узети у обзир нормализациони услов

$$\int_0^1 \hat{x}^k(t)q(t)dt = a_1 \tag{2.26}$$

и гранични услов

$$\hat{x}(0) = \hat{x}(1) = 0. \tag{2.27}$$

У наставку се бавимо конструкцијом решења проблема (2.25)-(2.27). Биће погодно увести следећу нотацију:

$$\epsilon = a_1^{1/k}, \quad \hat{x} = g\epsilon, \quad \nu = \mu\epsilon^{k-2}. \tag{2.28}$$

Једначина (2.25) постаје

$$g'' - \nu g^{k-1}q - \nu\epsilon g^{k-1}g'q = 0, \tag{2.29}$$

услов нормализације постаје

$$\int_0^1 g^k q dt = 1, \tag{2.30}$$

док гранични услови су непромењени

$$g(0) = g(1) = 0. \tag{2.31}$$

Лева страна једнакости (2.29) може се посматрати као аналитички оператор $A(g,\nu,\epsilon)$ из простора $\mathbb{W}_{1,2}[0,1] \times \mathbb{R}^2$ у $L^1[0,1]$. Напоменимо да смо локални екстремум тражили у простору $\mathbb{W}_{\infty,1}$ али смо добили да је двоструко диференцијабилан и да припада простору $\mathbb{W}_{1,2}$ који је на основу леме 2.2.3 садржан у $\mathbb{W}_{\infty,1}$.

Размотримо прво помоћни проблем који се добија из (2.29)-(2.31) узевши да је $\epsilon = 0$:

$$g'' = \nu q g^{k-1} = 0, \quad g(0) = g(1) = 0, \quad \int_0^1 g^k q dt = 1. \tag{2.32}$$

Подсетимо се да је баш (2.32) издвојен као потребан за формулацију теореме, његова решења имаће главни допринос у решавању иницијалног проблема. На почетку одељка смо дефинислаи $\lambda_0 = \lambda_0(q;k)$ као најмањи број по апсолутној вредности ν за који решење проблема (2.32) постоји. То решење означимо са x_0.

У случају када је $k = 1$, главно решење (x_0, λ_0) се може лако изразити помоћу Гринове функције $\mathcal{G}(t,s)$ као

$$\begin{aligned} \lambda_0(q;1) =& -\left(\int_0^1 \int_0^1 \mathcal{G}(t,s)q(t)q(s)dtds\right)^{-1}, \\ x_0(t) =& -\lambda_0 \int_0^1 \mathcal{G}(t,s)q(s)ds, \end{aligned} \tag{2.33}$$

где је

$$\mathcal{G}(t,s) = \min(t,s) - ts, \quad 0 \leq t,s \leq 1.$$

Започнимо конструкцију решења проблема (2.29)-(2.31) од случаја $k = 1$. Уведимо смене

$$x = g - x_0, \quad \lambda = \nu - \lambda_0. \tag{2.34}$$

Тада једначина (2.29) постаје

$$x'' - \lambda q - (\lambda + \lambda_0)\epsilon(x' + x_0')q = 0, \tag{2.35}$$

услов нормализације постаје

$$\int_0^1 (x + x_0) q dt = 1, \tag{2.36}$$

док су гранични услови непромењени

$$x(0) = x(1) = 0. \tag{2.37}$$

Лева страна једнакости (2.35) уз граничне услове (2.37) се може посматрати као аналитички оператор $A(x,\epsilon,\lambda) : \mathbb{W}_{1,2}[0,1] \times \mathbb{R}^2 \to L^1[0,1]$.

Провером по дефиницији, његов Фрешеов извод по x у тачки $(x, 0, 0)$, делује на произвољно $h \in \mathbb{W}_{1,2}[0,1]$ као

$$Bh = A_x(x,0,0)h = h'', \quad h(0) = h(1) = 0.$$

Као такав, оператор B је инвертибилан јер инверзну слику од $y \in L^1[0,1]$ налазимо решавањем диференцијалне једначине $h'' = y$ уз већ поменуте граничне услове, добија се $h(t) = \int_0^1 \mathcal{G}(t,s)y(s)ds$. Стога можемо применити теорему 1.3.4 о имплицитним аналитичким операторима и добити решење проблема (2.35) у облику

$$x = \sum_{i+j \geq 0} x_{i,j}\epsilon^i\lambda^j, \tag{2.38}$$

где је ред апсолутно конвергентан у односу на норму простора $\mathbb{W}_{1,2}[0,1]$ за довољно мале ϵ и $|\lambda| > 0$. Заменом (2.38) у (2.35) и поређењем коефицијената уз одговарајуће степене од ϵ и λ, могу се израчунати $x_{i,j}$ за свако i и j. Специјално, $x_{0,0} = 0$ а $x_{0,1}$ се добија изједначавањем коефицијената уз λ, тј. $x''_{0,1}\lambda - \lambda q = 0$ одакле следи да је

$$x_{0,1} = \int_0^1 \mathcal{G}(t,s)q(s)ds.$$

Стављајући (2.38) у (2.36) и интеграцијом члан по члан добијамо

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 (x + x_0)qdt - 1 = \int_0^1 xqdt + \int_0^1 x_0qdt - 1 \\ &= \int_0^1 (\lambda x_{0,1} + \epsilon x_{1,0} + \sum_{i+j \geq 2} x_{i,j}\epsilon^i\lambda^j)qdt \\ &= -\frac{\lambda}{\lambda_0} + c_{1,0}\epsilon + \sum_{i+j \geq 2} c_{i,j}\epsilon^i\lambda^j, \end{aligned} \tag{2.39}$$

где смо на основу (2.33) искористили да је $\int_0^1 x_{0,1}(t)q(t)dt = -\frac{1}{\lambda_0}$, а $c_{i,j}$ су преостали нумерички коефицијенти. Како ред $\sum_{i+j\geq 1} \|x_{i,j}\|_{\mathbb{W}_{1,2}}\epsilon^i\lambda^j$ конвергира, на основу леме 2.2.3 следи да и $\sum_{i+j\geq 1} \|x_{i,j}\|_{\sup}\epsilon^i\lambda^j$ конвергира, што обезбеђује апсолутну конвергенцију реда (2.39) за довољно мале ϵ и $|\lambda| > 0$. На основу теореме о имплицитној функцији 1.3.3, пошто је извод по λ у тачки $(0,0)$ функције из (2.39) различит од нуле, у довољно малој околини координатног почетка λ јесте аналитичка функција од ϵ. На основу тога и (2.38) имамо

$$x(t) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j(t)\epsilon^j,$$

где ред са десне стране конвергира за довољно мало $\epsilon > 0$. Кад вратимо смене (2.34) и (2.28) добијамо да је решење проблема (2.25)-(2.27) за $k = 1$

$$\begin{aligned}\hat{x}(t) =& x_0 a_1 + \sum_{j=1}^{\infty} x_j(t) a_1^{j+1},\\ \mu =& \lambda_0 a_1 + \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j a_1^{j+1}.\end{aligned}$$

Размотримо сада случај када је $k = 2$. Напоменимо да x_0 и λ_0 зависе од k, иако се користи иста ознака као у случају $k = 1$ у општем случају они не морају бити једнаки. Након смене (2.34), једначина (2.29) поприма облик

$$Bx - R(x, \epsilon, \lambda) = 0, \tag{2.40}$$

где је

$$\begin{aligned}Bx =& x'' - \lambda_0 x q, \qquad (2.41)\\ R(x,\epsilon,\lambda) =& \lambda x q + \lambda x_0 q + \epsilon\lambda x x' q + \lambda_0 \epsilon x x' q + \epsilon\lambda(x x_0)' q\\ &+ \lambda_0 \epsilon x_0 x_0' q + \lambda_0 \epsilon (x_0 x)' q + \epsilon \lambda x_0 x_0' q.\end{aligned}$$

Услов нормализације сада постаје

$$\int_0^1 (x + x_0)^2 q dt = 1, \tag{2.42}$$

док су гранични услови непромењени.

За разлику од претходног случаја, оператор $B : \mathbb{W}_{1,2}[0,1] \to L^1[0,1]$ одређен са (2.41) није инвертибилан. Он није $1-1$ јер је језгро овог оператора димензије 1, знамо да $Bx = 0$ има једно нетривијално решење у простору $\mathbb{W}_{1,2}[0,1]$. Стога се операторско уопштење теореме о имплицитној функцији (тоерема 1.3.4) не може применити. До решења једначина (2.40) долазимо помоћу Љапунов-Шмит једначине гранања.

Означимо са $\mathbb{E}_1$ простор $\mathbb{W}_{1,2}[0,1]$ а са $\mathbb{E}_2$ простор $L^1[0,1]$. Дуални простор од $\mathbb{E}_i$ означимо са $\mathbb{E}_i^*$, за $i = 1,2$. Нека је $B^* : \mathbb{E}_2^* \to \mathbb{E}_1^*$ конјунговани оператор од B (по дефиницији, B^* слика функционал e_2^* у функционал $e_2^* \circ B$) и нека је (x, α) вредност функционала α у тачки x. Означимо са γ онај елемент простора $\mathbb{E}_1^*$ за који је $(x_0, \gamma) = 1$. Како је B облика $Bx = (ax')' + bx$ за $a \equiv 1$ и $b \equiv -\lambda_0 q$, он је Штурм-Лиувилов оператор, последично и Фредхолмов $(\dim(\operatorname{Ker}(B)), \dim(\mathbb{E}_2/\operatorname{Im}(B)) < \infty)$. На основу излагања у [34] из одељка 21, пошто је B Фредхолмов важи да је $\dim(\mathrm{Ker}(B^*)) = \dim(\mathrm{Ker}(B)) = 1$. Нека је $\psi \in \mathbb{E}_2^*$ функционал који генерише језгро оператора B^* и нека је z елемент простора $\mathbb{E}_2$ такав да је $(z, \psi) = 1$.

Одредимо сада z и ψ у функцији од x_0 и q. На основу теореме о репрезентацији функционала на $L^1[0,1]$ (видети [30], теорема 8.19) постоји јединствена функција $a \in L^1[0,1]$ таква да је $(x, \psi) = \int_0^1 x(t)a(t)dt$. Нека је $\psi_1 \in \mathbb{E}_2^*$ такав да важи $(y, \psi_1) = \int_0^1 yx_0dt$. Двоструком применом парцијалне интеграције добијамо да важи за свако $x \in \mathbb{E}_1$ следеће

$$\begin{aligned}(x, B^*\psi_1) =&(Bx, \psi_1) = \int_0^1 B(x)x_0dt = \int_0^1 (x'' - \lambda_0 xq)x_0dt = \\ &= \int_0^1 x''x_0dt - \int_0^1 \lambda_0 xqx_0dt = -\int_0^1 x'x_0'dt - \int_0^1 \lambda_0 xqx_0dt \\ &= \int_0^1 xx_0''dt - \int_0^1 \lambda_0 xqx_0dt = \int_0^1 xB(x_0)dt = \int_0^1 x \cdot 0dt0 = 0\end{aligned}$$

тј. показали смо да $\psi_1 \in \mathrm{Ker}(B^*)$. Пошто је језгро димензије један следи да је наш произвољни избор генератора језгра од B^* баш могло бити $\psi \equiv \psi_1$. Због услова нормализације $\int_0^1 x_0q \cdot x_0 = 1$ следи да је $z \equiv x_0q$ тј. имамо да је $(x_0q, \psi) = 1$.

Дефинишимо сада оператор који слика $\mathbb{E}_1$ у $\mathbb{E}_2$

$$\tilde{B}x = Bx + \xi z, \quad \text{где је } \xi = (x, \gamma).$$

На основу уопштене Шмит-ове леме ([34], одељак 21.3) оператор $\tilde{B}$ је инвертибилан, његов инверзни оператор $\Gamma = \tilde{B}^{-1}$ је ограничен, и важи

$$\Gamma z = x_0, \quad \Gamma^*\gamma = \psi.$$

Запишимо једнакост (2.40) у облику

$$\tilde{B}x = R(x, \epsilon, \lambda) + \xi z, \tag{2.43}$$

сада теорема о имплицитним операторима (теорема 1.3.4) може да се примени јер је Фрешеов извод по x у тачки $(x, \epsilon, \lambda, \xi) = (x_0, 0, 0, 0)$ оператора $\tilde{B}x - R(x, \epsilon, \lambda) - \xi z$ баш $\tilde{B}$ који има ограничен инверз Γ. Она обезбеђује да се решење x може аналитички изразити у довољно малој околини координатног почетка, тј.

$$x = \sum_{i,j,k=0}^{\infty} x_{i,j,k}\xi^i\epsilon^j\lambda^k \tag{2.44}$$

за довољно мале $\xi, \epsilon, |\lambda| > 0$, као и да ред апсолутно конвергира у односу на норму простора $\mathbb{E}_1$.

Како бисмо нашли $x_{i,j,k}$ уврстимо (2.44) у (2.43) и извршимо изједначавање коефицијената уз одговарајуће степене од ξ, ϵ и λ. Као и у случају $k = 1$, одредићемо само првих неколико коефицијената јер кад будемо рачунали јакобијан у координатном почетку само линеарни делови се неће поништити.

Елементарним рачуном добијамо

$$\begin{aligned}
\tilde{B}x_{0,0,0} &= 0 && \Rightarrow \quad x_{0,0,0} = \Gamma 0 = 0\\
\tilde{B}x_{1,0,0} &= z && \Rightarrow \quad x_{1,0,0} = \Gamma z = x_0\\
\tilde{B}x_{i,0,0} &= 0 && \Rightarrow \quad x_{i,0,0} = 0,\ i \geq 2\\
\tilde{B}x_{0,0,1} &= x_0 q && \Rightarrow \quad x_{0,0,1} = \Gamma(x_0 q)\\
\tilde{B}x_{0,1,0} &= \lambda_0 x_0 x_0' q && \Rightarrow \quad x_{0,1,0} = \lambda_0 \Gamma(x_0 x_0' q)\\
\tilde{B}x_{1,0,1} &= x_{1,0,0} q && \Rightarrow \quad x_{1,0,1} = \Gamma(x_0 q)\\
\tilde{B}x_{1,1,0} &= \lambda_0 (x_0 x_{1,0,0})' q && \Rightarrow \quad x_{1,1,0} = 2\lambda_0 \Gamma(x_0 x_0' q)
\end{aligned}$$

и тако даље.

Циљ нам је да покажемо да λ и ξ аналитички зависе од ϵ у околини координатног почетка. Потребне две имплицитне једначине добијамо када (2.44) уврстимо у $\xi = (x, \gamma)$ и када уврстимо у нормализациони услов (2.42).

Уврстимо (2.44) у $\xi = (x, \gamma)$, и дефинишимо $L_{i,j,k} = (x_{i,j,k}, \gamma)$, тада добијамо

$$\xi = \sum_{i=0}^{\infty} L_{i,0,0} \xi^i + \sum_{i=1}^{\infty} \xi^i \sum_{j+k \geq 1} L_{i,j,k} \epsilon^j \lambda^k.$$

Ако искористимо да је $L_{0,0,0} = (x_{0,0,0}, \gamma) = (0, \gamma) = 0$, као и $L_{1,0,0} = (x_0, \gamma) = 1$, долазимо до Љапунов-Шмит једнакости гранања

$$\sum_{i=2}^{\infty} L_{i,0,0} \xi^i + \sum_{i=1}^{\infty} \xi^i \sum_{j+k \geq 1} L_{i,j,k} \epsilon^j \lambda^k = 0.$$

Као што смо већ напоменули од значаја су само водећих неколико коефицијената. Искористићемо особину коју нам је обезбедила Шмит-ова лема, да је $\Gamma^* \gamma = \psi$, односно по дефиницији да је $(\Gamma(x), \gamma) = (x, \psi)$. Уз то искористимо и особину коју смо показали, да је $(x_0q, \psi) = 1$. Добијамо

$$\begin{aligned} L_{2,0,0} &= L_{3,0,0} = \cdots = L_{k,0,0} = \cdots = 0, \\ L_{0,0,1} &= (\Gamma(x_0q), \gamma) = (x_0q, \psi) = 1, \\ L_{0,1,0} &= \lambda_0(\Gamma(x_0q), \gamma), \\ L_{1,0,1} &= (\Gamma(x_0q), \gamma) = (x_0q, \psi) = 1, \\ L_{1,1,0} &= 2\lambda_0(\Gamma(x_0q), \gamma) = 2L_{0,1,0}. \end{aligned}$$

Стога наша једначина гранања постаје

$$F_1(\xi, \epsilon, \lambda) \equiv \lambda + \xi\lambda + L_{0,1,0}(\epsilon + 2\xi\epsilon) + L_{0,2,0}\epsilon^2 + \cdots = 0.$$

Друга имплицитна једначина добија се када се (2.44) уврсти у нормализациони услов (2.42). Лема 2.2.3 нам обезбеђује апсолутну конвергенцију од развоја x^2, последично и интеграцију члан по члан у односу на меру $q\,dt$. Добијамо

$$F_2(\xi, \epsilon, \lambda) \equiv 2\xi + 2\lambda + a_{0,1,0}\epsilon + a_{0,2,0}\epsilon^2 + \cdots = 0, \tag{2.45}$$

где су коефицијенти $a_{i,j,k}$ бројеви, вредности одговарајућих интеграла уз $\xi^i\epsilon^j\lambda^k$.

Сада разматрамо класичну имплицитну једначину

$$(F_1(\xi, \epsilon, \lambda), F_2(\xi, \epsilon, \lambda)) = (0, 0)$$

чији је јакобијан

$$\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(\xi, \lambda)}(0, 0) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

одакле на основу теореме 1.3.3 следи да за довољно мало $\epsilon > 0$ важи

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\epsilon^k, \quad \lambda = \sum_{k=1}^{\infty} d_k\epsilon^k. \tag{2.46}$$

Заменом (2.46) у (2.44) и враћајући смене (2.34) и (2.28) добијамо решење проблема (2.25)-(2.27) за $k = 2$ у облику апсолутно конвергентих редова

$$\hat{x}(t) = x_0a_1^{1/2} + \sum_{j=1}^{\infty} x_j(t)a_1^{(j+1)/2},$$

$$\mu = \lambda_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j a_1^{j/2}.$$

Напоменимо да су коефицијенти x_j и μ_j само означени исто као у случају $k = 1$ али у општем случају они нису једнаки, користе се исте ознаке због једноставности.

Случај $k > 2$ се своди или на регуларан случај $k = 1$ или на гранајући $k = 2$. Користећи се сменом (2.34) трансформишемо једначину (2.29) у ону облика (2.40) где је

$$Bx = x'' - \lambda_0(k-1)x_0^{k-2}xq, \tag{2.47}$$

а оператор $R(x, \epsilon, \lambda)$ садржи чланове ϵ, λ или x степена већег од 1.

Разматрамо следећа два случаја.

I. *Оператор* $B : \mathbb{W}_{1,2}[0,1] \to L^1[0,1]$ *задат са (2.47) има ограничени инверз (регуларан случај).*

Применимо теорему о имплицитном оператору као у случају $k = 1$. Добијамо да је решење проблема (2.25)-(2.27) облика

$$\hat{x}(t) = x_0 a_1^{1/k} + \sum_{j=1}^{\infty} x_j(t) a_1^{(j+1)/2}, \tag{2.48}$$

$$\mu = \lambda_0 a_1^{(2/k-1)} + \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j a_1^{(j-k+2)/k}, \tag{2.49}$$

где редови конвергирају за $a_1 > 0$ довољно мало.

II. *Оператор B није инвертибилан.*

Како је B Штурм-Лиувилов оператор он је и Фредхолмов, па опет, као и у случају $k = 2$, можемо се позвати на Шмит-ову лему. Након тога, применом теореме о имплицитним операторима добили бисмо аналитичку зависност и на крају поставили имплицитне једначине гранања и нормализационог услова. Изрази постају само опширнији и неке формуле ће се променити, али промене нису базичне, нпр у (2.45) ће водећи чланови бити $k\xi + k\lambda$ уместо $2\xi + 2\lambda$. Након тога долазимо до закључка да решење проблема (2.25)-(2.27) заиста има облик (2.48)-(2.49).

Тиме је за свако природно k функција $\hat{x}(t)$ у којој се постиже инфимум функционала f_0 конструисана.

На основу леме 2.2.3, функција $\hat{x}(t)$ дозвољава диференцирање члан по члан и ред са диференцираним члановима конвергира униформно на $[0, 1]$, па је

$$\hat{x}'(t) = x_0'(t) a_1^{1/k} + \sum_{j=1}^{\infty} x_j'(t) a_1^{(j+1)/k}. \tag{2.50}$$

Смењујући (2.50) у функционал $f_0(x)$ и интеграцијом члан по члан добијамо

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (\hat{x}'(t)+1)\ln(\hat{x}(t)+1)dt &= \int_0^1 (\hat{x}'(t)+1)\left(\hat{x}'(t) - \frac{1}{2}\hat{x}'^2(t) + \dots\right)dt \\
&= \int_0^1 \left(\hat{x}'(t) + \frac{1}{2}\hat{x}'^2(t) + \dots\right)dt \\
&= \int_0^1 \hat{x}'(t)dt + \frac{1}{2}\int_0^1 \hat{x}'^2(t)dt + \dots \\
&= 0 + \frac{1}{2}\int_0^1 x_0'^2(t)a_1^{2/k}dt + \dots \\
&= -\frac{1}{2}a_1^{2/k}\int_0^1 x_0''(t)x_0(t)dt + \dots \\
&= -\frac{1}{2}a_1^{2/k}\int_0^1 \lambda_0 x_0^k(t)qdt + \dots \\
&= -\frac{\lambda_0}{2}a_1^{2/k} + \sum_{j=3}^{\infty} b_j a_1^{j/k}, \qquad (2.51)
\end{aligned}$$

где су $b_j = b_j(q;k)$ нумерички коефицијенти, $\lambda_0 = \lambda_0(q;k)$ главна вредност проблема (2.13) и ред конвергира за довољно мало $a_1 > 0$. Тиме смо показали да је

$$K(\Omega_{a_1} \cap V_{\delta/2}) = -\frac{\lambda_0}{2}a_1^{2/k} + \sum_{j=3}^{\infty} b_j a_1^{j/k}.$$

Сетимо се да је $a_1 = a - \alpha(\delta) \to a$ кад $\delta \to 0$. Преласком на граничну вредност у (2.18) кад $\delta \to 0$ и ако искористимо леву неједнакост из (2.51) добијамо

$$K(\Omega_a) \geq -\frac{\lambda_0}{2}a_1^{2/k} + \sum_{j=3}^{\infty} b_j a_1^{j/k}. \qquad (2.52)$$

С друге стране, вредност $K(\Omega_a \cap V_{\delta/2})$ се рачуна аналогно као вредност $K(\Omega_{a_1} \cap V_{\delta/2})$. Одговарајуће решење екстремалног проблема има форму (2.48) само у зависности од a уместо a_1. Стога десна неједнакост од (2.18) постаје

$$K(\Omega_a) \leq -\frac{\lambda_0}{2}a_1^{2/k} + \sum_{j=3}^{\infty} b_j a_1^{j/k}. \qquad (2.53)$$

Сада на основу (2.52) и (2.53) следи тврђење теореме. □

2.3 U- и V-статистике

У овом одељку разамтрамо велика одступања U- и V-статистика дефинисаних помоћу (1.31) и (1.32). Те статистике се уобичајено посматрају у пару због сличних асимптотских својстава а показаћемо да се уз додатне услове велика одступања U- и V-статистика поклапају. Резултате које смо увристили доказали су Никитин и Поникаров, видети [13].

Нека је

$$\Theta(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x_1, ..., x_m) dF(x_1) \dots dF(x_m)$$

Претпостављајући $E|\Phi| < \infty$, дефинишемо

$$\begin{aligned} \Phi_c(x_1, ..., x_c) =& E(\Phi(X_1, ..., X_m)|X_1 = x_1, ..., X_c = x_c) \\ =& E(\Phi(x_1, ..., x_c, X_{c+1}, ..., X_m)), \quad c = 1, ..., m. \end{aligned}$$

Означимо са $\tilde{\Phi} = \Phi - \Theta(F)$ и $\tilde{\Phi}_c = \Phi_c - \Theta(F)$ за $c = 1, ..., m$.

Посматрајмо функције

$$\begin{aligned} g_1(x_1) &= \tilde{\Phi}_1(x_1), \\ g_2(x_1, x_2) &= \tilde{\Phi}_2(x_1, x_2) - g_1(x_1) - g_2(x_2), \\ &\vdots \\ g_m(x_1, ..., x_m) &= \tilde{\Phi}_m(x_1, ..., x_m) - \sum_{i=1}^{m} g_i(x_1) - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le m} g_2(x_{i_1}, x_{i_2}) \\ &\quad - \cdots - \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_{m-1} \le m} g_{m-1}(x_{i_1}, ..., x_{i_{m-1}}). \end{aligned}$$

Нека је r најмањи природан број за који важи

$$g_1 = \cdots = g_{r-1} = 0, \quad g_r \neq 0. \tag{2.54}$$

Број r називамо ранг U- односно V-статистике, или још ранг језгра Φ. У случају када је $r = 1$ рећи ћемо да је језгро недегенерисано, у супротном ћемо рећи да је дегенерисано. Издвојићемо случај $r = 2$ и за њега рећи да је слабо дегенерисано језгро. У овом раду биће израчуната велика одступања за U- и V-статистике са недегенерисаним и слабо дегенерисаним језгром.

Не умањујући општост, претпоставимо да је узорак $X_1, ..., X_n$ из униформне расподеле на интервалу $[0, 1]$. Ако то не би био случај, већ би наш узорак $Y_1, ..., Y_n$ био из расподеле F, онда бисмо могли да посматрамо U- и V-статистику са трансформисаним језгром $\Phi_0(X_1, ..., X_n) = \Phi(F^{-1}(Y_1), ..., F^{-1}(Y_n))$.

Теорема 2.3.1. *Нека је језгро* Φ *V-статистике (1.32) ограничено на* $[0,1]^m$,

$$|\Phi(s_1,...,s_m)| \leq M, \tag{2.55}$$

$E\Phi = 0$ *и* Φ *је ранга 1, тј.*

$$\sigma^2 = E\psi(X_1) > 0, \tag{2.56}$$

где је $\psi(s_1) = E(\Phi(X_1,...,X_m)|X_1 = s_1)$. *Тада за сваки реалан низ* $\{\gamma_n\}$ *такав да* $\gamma_n \to 0$ *важи*

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln P(V_n \geq a + \gamma_n) = \sum_{j=2}^{\infty} b_j a^j, \tag{2.57}$$

где ред са десне стране једнакости конвергира за довољно мало $a > 0$, *штавише* $b_2 = -1/(2m^2\sigma^2)$.

Напомена: Низ $\{\gamma_n\}$ је уведен у формулацији теореме јер многе статистике које не припадају класи V-статистика могу да се апроксимирају уз корекцију коју тај низ представља.

Доказ. Статистику V_n из исказа теореме можемо представити у облику функционала V-емпиријске мере као

$$V_n = T(H_n) = \int_{-M}^{M} x dH_n(x),$$

где је H_n дефинисана формулом (1.15) а константа M помоћу (2.55). Парцијалном интеграцијом добијамо

$$\begin{aligned} |T(H^1) - T(H^2)| &= \left| \int_{-M}^{M} x dH^1(x) - \int_{-M}^{M} x dH^2(x) \right| \\ &= \left| \int_{-M}^{M} x d(H^1 - H^2)(x) \right| = \left| \int_{-M}^{M} (H^1 - H^2)(x) dx \right| \\ &\leq 2M \sup_t \left| H^1(t) - H^2(t) \right| \end{aligned}$$

где су $H^1, H^2 \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ произвољне и поистоветили смо $H^i(t)$ са $H^1(-\infty, t)$. Ова неједнакост обезбеђује непрекидност функционала T у топологији ρ која имплицира τ-непрекидност. На основу теореме (1.2.5) V-емпиријска мера H_n задовољава на $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ принцип великих одступања са функцијом одступања

$$J_P(\nu) = \inf\{K(Q,P) : \nu = Q^m \circ \Phi^{-1}, Q^m \in \mathcal{P}([0,1]^m)\}.$$

Последично, функција λ из исказа теореме (1.2.6) је облика

$$\begin{aligned}\lambda(a) =& J_P(\Omega_a) = \inf\left\{K(Q,P):\ \int_{-M}^{M} ydQ^m \circ \Phi^{-1}(y) \geq a\right\}\\ =& \inf\left\{K(Q,P):\ \int_{I^m} \Phi(s_1,...,s_m)dQ(s_1)\dots dQ(s_m) \geq a\right\},\end{aligned}$$

где је са I^m означен скуп $[0,1]^m$.

Ако је $\lambda(a)$ непрекидна здесна за довољно мало $a > 0$, тада тврђење наше теореме следи на основу теореме 1.2.6 и у наставку то показујемо. Поједноставимо ознаке,

$$\begin{aligned}\Omega_a = \{F \text{ је функција расподеле на } [0{,}1]\\ \int_{I^m} \Phi(s_1,...,s_m)dF(s_1)\dots dF(s_m) \geq a\}.\end{aligned}$$

Означимо са $K(F)$ Кулбак-Лајблерово растојање функције расподеле F од униформне на $[0,1]$, тј.

$$K(F) = \int_0^1 F'(t)\ln F'(t)dt.$$

У сагласности са (1.14) стављамо

$$K(\Omega_a) = \inf\{K(F):\ F \in \Omega_a\}.$$

Показаћемо да је $K(\Omega_a)$ аналитичка функција по a за $a > 0$ довољно мало, штавише

$$K(\Omega_a) = -\sum_{j=2}^{\infty} b_j a^j, \tag{2.58}$$

где је ред са десне стране једнак оном из (2.57). Тада ће $\lambda_P(a) = K(\Omega_a)$ свакако бити непрекидна здесна у a за довољно мало $a > 0$. Стога је остатак доказа посвећен доказивању (2.58).

Приметимо да је $\Omega_a = T^{-1}[a,+\infty]$ па је он τ-затворен као инверзна слика τ-непрекидног пресликавања. На основу леме 1.2.7 имамо да постоји функција расподеле из Ω_a у којој се инфимум $K(\Omega_a)$ достиже, односно постоји решење нашег екстремалног проблема.

Да бисмо израчунали $K(\Omega_a)$ довољно је посматрати класу $\mathcal{F}$ апсолутно непрекидних функција на $[0,1]$ са густинама f. За свако δ дефинишемо као и пре,

$$V_\delta = \{F \in \mathcal{F}:\ f > \delta \text{ скоро свуда на } [0,1]\}.$$

На основу леме (2.1.1) важи

$$K(\Omega_{a_1} \cap V_{\delta/2}) - \delta \leq K(\Omega_a) \leq K(\Omega_a \cap V_{\delta/2}), \tag{2.59}$$

где је $a_1 = a - \alpha(\delta)$.

Нека је $\mathcal{U}$ отворени подскуп од $L^1[0,1]$ који се стастоји од функција f таквих да

$$f(t) > \delta/2, \tag{2.60}$$

за скоро свако $t \in [0,1]$. Наш екстремални проблем се своди на минимизацију функционала

$$g_0 = \int_0^1 f(t) \ln f(t) dt \tag{2.61}$$

дефинисаног на $\mathcal{U}$ од $L^1[0,1]$ уз два додатна ограничења

$$g_1(f) = \int_{I^m} \Phi(s_1, ..., s_m) \prod_{j=1}^{m} f(s_j) ds_1 \dots ds_m - a_1 \geq 0, \tag{2.62}$$

$$g_2(f) = \int_0^1 f(t) dt - 1 = 0. \tag{2.63}$$

Аналогним поступком као у доказу теореме (2.2.1) можемо показати да су функције g_0, g_1 и g_2 строго диференцијабилне на U. Као и пре, задовољени су услови за примену теореме 1.3.1 која нам обезбеђује постојање константи $\hat{\lambda}_0$, $\hat{\lambda}_1$ и $\hat{\lambda}_2$ за које важи $\hat{\lambda}_0^2 + \hat{\lambda}_1^2 + \hat{\lambda}_2^2 > 0$ тако да функција $\hat{f}(t)$, у којој проблем (2.61)-(2.63) достиже локални екстремум, задовољава једнакост

$$\mathcal{L}_f(\hat{f}, \hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2) = 0, \tag{2.64}$$

где је

$$\mathcal{L}(f, \hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}_1) = \hat{\lambda}_0 g_0(f) + \hat{\lambda}_1 g_1(f) + \hat{\lambda}_2 g_1(f),$$

уз додатне услове

$$\hat{\lambda}_1 g_1(\hat{f}) = 0, \tag{2.65}$$

$$\hat{\lambda}_2 g_2(\hat{f}) = 0. \tag{2.66}$$

Рачунајући (2.64), аналогним техникама приказаним у рачуну (2.22), добијамо да за свако $h \in \mathbb{W}_{1,1}[0,1]$ важи

$$\int_0^1 \Bigg(\hat{\lambda}_0(\ln \hat{f}(s_1)+1)+\hat{\lambda}_2 + \hat{\lambda}_1 m \int_{I^{m-1}} \Phi(s_1,...,s_m)\prod_{j=2}^{m}\hat{f}(s_j)ds_2\dots ds_m\Bigg)h'(s_1)ds_1 = 0.$$

Погодним избором h може се показати (видети [9], одељак 7.) да важи

$$\hat{\lambda}_0(\ln \hat{f}(s_1)+1)+\hat{\lambda}_2+\hat{\lambda}_1 m \int_{I^{m-1}} \Phi(s_1,...,s_m)\prod_{j=2}^{m}\hat{f}(s_j)ds_2\dots ds_m = C_1, \tag{2.67}$$

где је C_1 нека константа. Тако добијена Ојлер-Лагранжова једначина разматра се уз нормализационе услове

$$\int_{I^m} \Phi(s_1,...,s_m)\prod_{j=1}^{m}\hat{f}(s_j)ds_1\dots ds_m = a_1, \tag{2.68}$$

$$\int_0^1 \hat{f}(t)dt = 1, \tag{2.69}$$

који следе из (2.65) и (2.66).

Биће показано, остављено је за крај доказа ове теореме, да је $\hat{\lambda}_0 \neq 0$ у (2.67). Одатле следи да је (2.67) еквивалентна са

$$\hat{f}(s_1) = C_2 \exp\left\{\mu \int_{I^{m-1}} \Phi \prod_{j=2}^{m}\hat{f}(s_j)ds_2\dots ds_m\right\}.$$

Због ограничености језгра и због нормализационог услова (2.69) имамо да је $\hat{f}$ ограничена тј. $\hat{f} \in L^{\infty}[0,1]$. Можемо израчунати константу C_2 из услова (2.69), па наша једначина постаје

$$\hat{f}(s_1) = \frac{\exp\left\{\mu \int_{I^{m-1}} \Phi \prod_{j=2}^{m}\hat{f}(s_j)ds_2\dots ds_m\right\}}{\int_0^1 \exp\left\{\mu \int_{I^{m-1}} \Phi \prod_{j=2}^{m}\hat{f}(s_j)ds_2\dots ds_m\right\}ds_1}, \tag{2.70}$$

која се разматра уз нормализациони услов (2.68).

Уведимо смене

$$a_1 = \epsilon, \quad \mu = \lambda\epsilon, \quad \hat{f}(t) = 1+\epsilon x(t). \tag{2.71}$$

Тада (2.70) постаје

$$(1+\epsilon x(s_1))\int_0^1 \exp\left\{\lambda\epsilon\int_{I^{m-1}}\Phi\prod_{j=2}^{m}(1+\epsilon x(s_j))ds_2\dots ds_m\right\}ds_1 \tag{2.72}$$

$$-\exp\left\{\lambda\epsilon\int_{I^{m-1}}\Phi\prod_{j=2}^{m}(1+\epsilon x(s_j))ds_2\dots ds_m\right\}=0, \tag{2.73}$$

а нормализациони услов постаје

$$m\int_0^1\psi(s_1)x(s_1)ds_1+\int_{I^m}\Phi Z(\epsilon,m,x)ds_1\dots ds_m-1=0, \tag{2.74}$$

где је

$$Z(\epsilon,m,x)=\epsilon^{m-1}\prod_{j=1}^{m}x(s_j)+\epsilon^{m-2}\sum_{i=2}^{m}\prod_{j\neq i}x(s_j)+\dots+\epsilon\sum_{j<i}x(s_j)x(s_i).$$

Лева страна једнакости (2.72) може да се посматра као аналитички оператор $A(x,\lambda,\epsilon)\,:\,L^\infty[0,1]\times\mathbb{R}^2\to L^\infty[0,1]$. То следи по дефиницији ако се посматра степени ред добијен након развоја експоненцијалне функције. Наш циљ је да покажемо да је решење проблема (2.72)-(2.74) аналитичка функција од ϵ за довољно мало ϵ.

Приметимо да је

$$\exp\left\{\lambda\epsilon\int_{I^{m-1}}\Phi\prod_{j=2}^{m}(1+\epsilon x(s_j))ds_2\dots ds_m\right\}$$
$$=\exp\left\{\lambda\epsilon\psi(s_1)+\lambda\epsilon^2\int_{I^{m-1}}\Phi R(\epsilon,m,x)ds_2\dots ds_m\right\},$$

где

$$R(\epsilon,m,x)=\epsilon^{m-2}\prod_{j=2}^{m}x(s_j)+\epsilon^{m-3}\sum_{i=2}^{m}\prod_{j\neq i}x(s_j)+\dots+\epsilon\sum_{j=2}^{m}x(s_j).$$

Ако сада развијемо екпоненцијалну функцију у ред и узмемо у обзир само најмање степене од ϵ добијамо

$$\exp\left\{\lambda\epsilon\int_{I^{m-1}}\Phi\prod_{j=2}^{m}(1+\epsilon x(s_j))ds_2\dots ds_m\right\}=1+\lambda\epsilon\psi(s_1)$$
$$+\lambda\epsilon^2\int_{I^{m-1}}\Phi R(\epsilon,m,x)ds_2\dots ds_m+\frac{\lambda^2\epsilon^2}{2}\psi^2(s_1)+A_1\epsilon^3+\dots. \tag{2.75}$$

Овде, коефицијент A_1 уз ϵ^3, као и они уз ϵ већег степена, зависе од Φ, m, λ и x. Исто важи и за коефицијенте A_2 и A_3 који се јављају касније. Интеграцијом (2.75) у односу на s_1 добијамо

$$\begin{aligned}\int_0^1 \exp\left\{\lambda\epsilon\int_{I^{m-1}}\Phi\prod_{j=2}^{m}(1+\epsilon x(s_j))ds_2\dots ds_m\right\}ds_1&\\ =&1+\lambda\epsilon^2\int_{I^m}\Phi R(\epsilon,m,x)ds_1\dots ds_m+\frac{\lambda^2\epsilon^2}{2}\sigma^2+A_2\epsilon^3+\dots,\end{aligned} \tag{2.76}$$

где смо искористили једнакост

$$\int_0^1\psi(s_1)ds_1=E\Phi=0.$$

Узевши у обзир (2.75) и (2.76), наша једначина (2.72) тада постаје

$$\begin{aligned}(1+x(s_1))&\left(1+\lambda\epsilon^2\int_{I^m}\Phi R(\epsilon,m,x)ds_1\dots ds_m+\frac{\lambda^2\epsilon^2}{2}\sigma^2+A_2\epsilon^3+\dots\right)\\ =&\left(1+\lambda\epsilon\psi(s_1)+\lambda\epsilon^2\int_{I^{m-1}}\Phi R(\epsilon,m,x)ds_2\dots ds_m\right.\\ &\left.+\frac{\lambda^2\epsilon^2}{2}\psi^2(s_1)+A_1\epsilon^3+\dots\right)\end{aligned}$$

односно

$$\begin{aligned}x(s_1)-&\lambda\psi(s_1)-\frac{\lambda^2\epsilon}{2}\psi^2(s_1)-\lambda\epsilon\int_{I^{m-1}}\Phi R(\epsilon,m,x)ds_2\dots ds_m+\frac{\lambda^2\epsilon}{2}\sigma^2\\ &+\lambda\epsilon\int_{I^m}\Phi R(\epsilon,m,x)ds_1\dots ds_m+A_3\epsilon^2+\dots=0.\end{aligned} \tag{2.77}$$

Уз (2.77) посматрамо и нормализациони услов (2.74).

Посматрајмо помоћни проблем добијен из (2.74) и (2.77) за тачку $\epsilon=0$. Он је облика

$$\begin{aligned}x(s_1)-\lambda\psi(s_1)=&0,\\ m\int_0^1\psi(s_1)x(s_1)ds_1=&1.\end{aligned}$$

Сменивши x у другој једначини са $\lambda\psi$ добијамо да је пар $\lambda_0=1/(m\sigma^2)$, $x_0=\lambda_0\psi$ јединствено решење тог помоћног проблема. Нека је $\nu=\lambda-\lambda_0$.

Тада је (2.77) облика

$$\begin{aligned} &x(s_1) - \nu\psi(s_1) - \lambda_0\psi(s_1) - \frac{(\lambda_0+\nu)^2\epsilon}{2}\psi^2(s_1) \\ &\quad - (\lambda_0+\nu)\epsilon\int_{I^{m-1}} \Phi R(\epsilon, m, x) ds_2 \dots ds_m + \frac{(\lambda_0+\nu)^2\epsilon}{2}\sigma^2 \\ &\quad + (\lambda_0+\nu)\epsilon\int_{I^m} \Phi R(\epsilon, m, x) ds_1 \dots ds_m + A_3\epsilon^2 + \cdots = 0. \end{aligned} \tag{2.78}$$

Лева страна једнакости може да се посматра као аналитички оператор $A(x, \nu, \epsilon) : L^\infty[0,1] \times \mathbb{R}^2 \to L^\infty[0,1]$. Фрешеов извод по x у тачки $x = x_0$, $\nu = 0$, $\epsilon = 0$ је идентичко пресликавање, које очигледно има ограничени инверзни оператор. Теорема 1.3.4 нам тада обезбеђује да је x аналитичка функција од ν и ϵ за довољно мале $|\nu|, \epsilon > 0$, тј. постоје функције $x_{k,l} \in L^\infty[0,1]$ такве да је

$$x(t) = x_0(t) + \sum_{k+l>0} x_{k,l}(t)\nu^k\epsilon^l \tag{2.79}$$

и ред са десне стране конвергира апсолутно у простору L^∞. Већ смо израчунали да је $x_0 = \lambda_0\psi$, преостале коефицијенте ћемо наћи ако уврстимо (2.79) у (2.78) и изједначимо коефицијенте уз одговарајуће степене од ϵ и λ. За потребе доказа, довољно ће нам бити да израчунамо само

$$x_{1,0}(s_1) = \psi(s_1),$$

одакле следи да је наш ред облика

$$x = \lambda_0\psi + \nu\psi + x_{0,1}\epsilon + \dots.$$

Када то уврдстимо у нормализациони услов (2.74), због апсолутне конвергенције у L^∞ норми можемо интегралити члан по члан. Добијамо

$$m\nu\sigma^2 + c_{0,1}\epsilon + \sum_{i+j\geq 2} c_{i,j}\epsilon^i\nu^j = 0, \tag{2.80}$$

где су коефицијенти независни од ϵ и ν и ред конвергира за довљно мале $|\nu|, \epsilon > 0$. Приметимо да је извод имплицитне функције код (2.80) по ν позитивна константа $m\sigma^2$, стога на основу теореме о имплицитној функцији 1.3.3 имамо да је ν аналитичка функција од ϵ у некој околини координатног почетка:

$$\nu = \sum_{k=1}^{\infty} d_k\epsilon^k. \tag{2.81}$$

Смењујући сада (2.81) у (2.79) за неке $x_k \in L^\infty[0,1]$ имамо конструисано решење у виду конвергентног реда за довољно мало $\epsilon > 0$:

$$x(t) = \lambda_0 \psi(t) + \sum_{k=1}^{\infty} x_k(t)\epsilon^k. \tag{2.82}$$

Ако вратимо сада почетну нотацију (2.71) имамо да је (2.82) облика

$$\hat{f}(t) = 1 + a_1 \lambda_0 \psi(t) + \sum_{k=1}^{\infty} x_k(t) a_1^{k+1}. \tag{2.83}$$

Јасно је да $\hat{f}(t) > \delta/2$ за довољно мале δ и a_1, стога решење нашег екстремалног проблема припада скупу $\Omega_a \cap V_{\delta/2}$. Смењујући (2.83) у функционал (2.62), истим поступком као код смо рачунали (2.51), налазимо да је

$$\int_0^1 \hat{f}(t) \ln \hat{f}(t) dt = -\sum_{k=2}^{\infty} b_k a_1^k$$

за неке нумеричке коефицијенте b_k. Специјално, водећи коефицијент b_2 је

$$b_2 = -\frac{1}{2}\lambda_0^2 \int_0^1 \psi^2(t) dt = -\frac{1}{2m^2\sigma^2}.$$

Присетимо се да $a_1 = a - \alpha(\delta) \to a$ кад $\delta \to 0$. Преласком на граничну вредност лева неједнакост у (2.59) постаје

$$K(\Omega_a) \geq -\sum_{k=2}^{\infty} b_k a^k. \tag{2.84}$$

С друге стране, $K(\Omega_a \cap V_{\delta/2})$ се може израчунати на исти начин као $K(\Omega_{a_1} \cap V_{\delta/2})$ само уместо од a_1 зависиће од a, па је десна неједнакости у (2.59)

$$K(\Omega_a) \leq -\sum_{k=2}^{\infty} b_k a^k. \tag{2.85}$$

Из (2.84) и (2.85) следи закључак теореме у случају да је $\lambda_0 \neq 0$.

Доказ ћемо комплетирати ако покажемо да је $\lambda_0 \neq 0$. Претпоставимо супротно, да је $\lambda_0 = 0$. Главна једначина (2.67) тада поприма облик

$$\int_{I^{m-1}} \Phi(s_1, ..., s_m) \prod_{j=2}^{m} \hat{f}(s_j) ds_2 \ldots ds_m = C, \tag{2.86}$$

за неку константу C. Множењем (2.86) са $\hat{f}_1(s_1)$ и интеграцијом по s_1 од 0 до 1 добијамо

$$\int_{I^m} \Phi(s_1, ..., s_m) \prod_{j=1}^{m} \hat{f}(s_j) ds_1 \dots ds_m = C. \tag{2.87}$$

Ако упоредимо (2.87) са нормализационим условом (2.68) добијамо да је $C = a_1$. Стога (2.86) сада постаје

$$\int_{I^{m-1}} \Phi(s_1, ..., s_m) \prod_{j=2}^{m} \hat{f}(s_j) ds_2 \dots ds_m = a_1. \tag{2.88}$$

Показаћемо чак и у случају да једначина (2.88) има решење, тада функционал (2.55) у њој не достиже минимум.

Размотримо помоћни Лагранжов проблем. Пронаћи доњу границу функционала

$$g_0(f) = \int_0^1 f(t) \ln f(t) dt \tag{2.89}$$

на отвореном подскупу U Банаховог простора $L^1[0,1]$ свих функција f које задовољавају за скоро свако $t \in [0,1]$ неједнакост

$$f(t) > \delta/2$$

под додатним условима

$$\begin{aligned} g_1(f) &= \int_{I^{m-1}} \Phi(s_1, ..., s_m) \prod_{j=2}^{m} f(s_j) ds_2 \dots ds_m = a_1, \\ g_2(f) &= \int_0^1 f(t) dt - 1 = 0. \end{aligned}$$

На основу теореме 1.3.1 долазимо до Ојлер-Лагранжове једначине (са Лагранжовим множиоцима $\hat{\lambda}_0^{(1)}$, $\hat{\lambda}_1^{(1)}$, $\hat{\lambda}_2^{(1)}$ и константом $C^{(1)}$). За $m = 2$ та једначина је облика

$$\hat{\lambda}_0^{(1)} \ln(\hat{f}^{(1)}(s_1) + 1) + \hat{\lambda}_2^{(1)} + \hat{\lambda}_1^{(1)} \Phi(s_1, s_2) = C^{(1)}, \tag{2.90}$$

док за $m > 2$ је облика

$$\begin{aligned} &\hat{\lambda}_0{}^{(1)} \ln(\hat{f}^{(1)} + 1) + \hat{\lambda}_2^{(1)} \\ &\quad + \hat{\lambda}_1^{(1)} (m-1) \int_{I^{m-2}} \Phi(s_1, ..., s_m) \prod_{j=2}^{m-1} \hat{f}^{(1)}(s_j) ds_2 \dots ds_{m-1} = C^{(1)}. \end{aligned} \tag{2.91}$$

У оба случаја, нормалицазиони услови су

$$\int_{I^{m-1}} \Phi(s_1,...,s_m) \prod_{j=2}^{m} \hat{f}^{(1)}(s_j) ds_2 \dots ds_m = a_1, \int_0^1 \hat{f}^{(1)}(t)dt = 1. \tag{2.92}$$

Приметимо прво да (2.90) води до контрадикције. Наиме, за $\hat{\lambda}_1^{(1)} \neq 0$ лева страна зависи од s_2. Последично, Φ је константо у односу на s_2. Због својства симетрије језгра оно је тада константа и по s_1, па је језгро константна функција што је у супротности са условом недегенерисаности језгра. У случају да је $\hat{\lambda}_1^{(1)} = 0$, тада $\ln \hat{f}^{(1)}(s_1)$ је константа због (2.90), па је и $\hat{f}^{(1)}(s_1)$ константа. Како је $\hat{f}^{(1)}(s_1)$ густина, имамо да је $\hat{f}^{(1)}(s_1) \equiv 1$. Та густина не може бити решење нашег проблема јер стављајући $\hat{f}^{(1)}(s_1) \equiv 1$ у (2.92) добијамо да је $\psi(s_1) = a_1$ што је опет у контрадикцији са условом недегенерисаности језгра.

Пређимо на случај $m > 2$. У (2.91) променљива s_m се јавља само као аргумент језгра. Интеграцијом (2.91) по s_m имамо

$$\begin{aligned} &\hat{\lambda}_0{}^{(1)} \ln(\hat{f}^{(1)} + 1) + \hat{\lambda}_2^{(1)} \\ &\quad + \hat{\lambda}_1^{(1)}(m-1) \int_{I^{m-2}} \Phi^{(1)}(s_1,...,s_{m-1}) \prod_{j=2}^{m-1} \hat{f}^{(1)}(s_j) ds_2 \dots ds_{m-1} = C^{(1)}. \end{aligned} \tag{2.93}$$

Опет добијамо једначину облика (2.67) али са језгром

$$\Phi^{(1)}(s_1,...,s_{m-1}) = \int_0^1 \Phi(s_1,...,s_m) ds_m$$

степена $m-1$. За једначину (2.93) сада понављамо конструкцију, тј. тражимо минималну вредност функционала (2.89) на скупу решења једначине (2.93). Долазимо до нове Ојлер-Лагранжове једначине

$$\begin{aligned} &\hat{\lambda}_0{}^{(2)} \ln(\hat{f}^{(2)} + 1) + \hat{\lambda}_2^{(2)} \\ &\quad + \hat{\lambda}_1^{(2)}(m-1) \int_{I^{m-3}} \Phi^{(2)}(s_1,...,s_{m-2}) \prod_{j=2}^{m-2} \hat{f}^{(2)}(s_j) ds_2 \dots ds_{m-2} = C^{(2)}, \end{aligned}$$

где је језгро

$$\Phi^{(2)}(s_1,...,s_{m-2}) = \int_0^1 \Phi^{(1)}(s_1,...,s_{m-1}) ds_{m-1}$$

степена $m-2$. Ако је $\hat{\lambda}_0^{(2)} = 0$, правимо нову итерацију која нам обезбеђује језгро степена $m-3$, и тако даље. Постоје два случаја.

Први, сви $\hat{\lambda}_0^{(k)}$ до $k = m - 2$ су нуле. Тада за $k = m - 2$ долазимо до језгра степена $m = 2$, тј. до једначине облика (2.90) за коју смо показали да води до контрадикције.

Други случај би био да у неком кораку $k < m - 2$ важи $\hat{\lambda}_0^{(k)} \neq 0$ по први пут. Тада једнакост поприма облик

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}_0{}^{(k)} \ln(\hat{f}^{(k)} + 1) + \hat{\lambda}_2^{(k)} \\ + \hat{\lambda}_1^{(k)}(m-1)\int_{I^{m-k-1}} \Phi^{(k)}(s_1, ..., s_{m-k}) \prod_{j=2}^{m-k} \hat{f}^{(k)}(s_j) ds_2 \dots ds_{m-k} = C^{(k)},\end{aligned} \tag{2.94}$$

са језгром

$$\Phi^{(k)}(s_1, ..., s_{m-k}) = \int_0^1 \Phi(s_1, ..., s_m) ds_{m+1} \dots ds_m.$$

Случај када је $\hat{\lambda}_0^{(k)} \neq 0$ у таквој једначини је већ разматран, под том претпоставком смо конструисали решење екстремалног проблема

$$K(\Omega_{a_1}) = \sum_{j=2}^{\infty} b_j a_1^j,$$

где је

$$b_2^{(k)} = \frac{1}{2(m-k)^2 \sigma^{(k)2}}, \quad \sigma^{(k)2} = \int_0^1 \psi^{(k)2}(t) dt,$$

$$\psi^{(k)}(s_1) = \int_{I^{m-k-1}} \Psi^{(k)}(s_1, ..., s_{m-k}) ds_2 ... ds_{m-k}.$$

Очигледно је да се $\psi^{(k)}$ поклапа са функцијом

$$\psi(s_1) = \int_{I^{m-1}} \Phi(s_1, ..., s_m) ds_2 ... ds_{m-k}$$

јер се обе добијају интеграцијом језгра Φ по свим променљивим осим једне. Последично

$$b_2^{(k)} = \frac{1}{2(m-k)^2 \sigma^2}.$$

Пошто је $m - k < m$ следи да је $b_2^{(k)}$ је веће од b_2, па решење проблема (2.94) $\hat{f}^{(k)}$ није минимално (за довољно мало $a_1 > 0$). Тиме долазимо до контрадикције, па је доказ теореме комплетиран. □

Слично тврђење важи и за U-статистике, које се могу апроксимирати V-статистикама уз довољно малу корекцију.

Теорема 2.3.2. *Нека за језгро U-статистике*

$$U_n = \binom{n}{m}^{-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_m \le n} \Phi(X_{i_1}, ..., X_{i_m}),$$

важе претпоставке из теореме 2.3.1. Тада за сваки реалан низ $\{\gamma_n\}$ за који $\gamma_n \to 0$ кад $n \to \infty$, важи:

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln P(U_n \ge a + \gamma_n) = \sum_{j=2}^{\infty} b_j a^j, \tag{2.95}$$

где се ред са десне стране (2.95) поклапа са редом из (2.57) и конвергира за довољно мало $a > 0$.

Доказ. Због једноставности, претпоставимо да је $\gamma_n = 0$. Биће јасно из конструкције доказа да се метод може применити и на општи случај, без тог услова.

Нека је M константа која представља горњу границу језгра Φ из (2.55). По дефиницији U- и V-статистика имамо да важи идентитет

$$V_n = \frac{m!\binom{n}{m}}{n^m} U_n + W_n, \tag{2.96}$$

где сума

$$W_n = \frac{1}{n^m} \sum_{diag} \Phi(X_{i_1}, ..., X_{i_m})$$

садржи „дијагоналне” елементе, тј. сумирано је по свим m-торкама индекса $(i_1, ..., i_m)$ међу којима постоје бар два једнака. Из (2.96) следи да је

$$U_n = \frac{n^m}{m!\binom{n}{m}} V_n - \frac{n^m}{m!\binom{n}{m}} W_n. \tag{2.97}$$

Очигледно је да

$$|V_n| \le M. \tag{2.98}$$

Како сума W_n садржи $n^m - m!\binom{n}{m}$ елемената, имамо

$$|W_n| \le \frac{n^m - m!\binom{n}{m}}{n^m} M. \tag{2.99}$$

Искористимо Стирлингову формулу ($n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$, кад $n \to \infty$) да бисмо добили

$$\frac{n^m}{m!\binom{n}{m}} = 1 + \frac{K}{n} + O(\frac{1}{n^2}), \quad n \to \infty, \tag{2.100}$$

где константа $K > 0$ зависи од m. Фиксирајмо $\epsilon > 0$. Из (2.100) следи да постоји природан број n_0 такав да за сваки $n > n_0$ важи неједнакост

$$0 < \frac{n^m - m!\binom{n}{m}}{n^m} < \frac{\epsilon}{M}. \tag{2.101}$$

Како нас занима гранична вредност када $\epsilon \to 0$, можемо да претпоставимо да $\epsilon < M$. Стога је

$$1 + \frac{\epsilon}{M} < 2. \tag{2.102}$$

Нека је $a > 0$. За $n > n_0$, узимајући у обзир (2.98), (2.99), (2.101) и (2.102), из (2.97) добијамо горњу оцену

$$\begin{aligned}
P(U_n > a) =&P\left(\frac{n^m}{m!\binom{n}{m}}V_n - \frac{n^m}{m!\binom{n}{m}}W_n > a\right)\\
=&P\left(V_n + \left(\frac{n^m}{m!\binom{n}{m}} - 1\right)V_n - \frac{n^m}{m!\binom{n}{m}}W_n > a\right)\\
\leq&P\left(V_n + \left(\frac{n^m}{m!\binom{n}{m}} - 1\right)|V_n| + \frac{n^m}{m!\binom{n}{m}}|W_n| > a\right)\\
\leq&P\left(V_n + \frac{\epsilon}{M}|V_n| + \left(1 + \frac{\epsilon}{M}\right)|W_n| > a\right)\\
\leq&P\left(V_n + \epsilon + \epsilon > a\right) = P(V_n > a - 3\epsilon).
\end{aligned} \tag{2.103}$$

Аналогно, долазимо до доње оцене

$$\begin{aligned}
P(U_n > a) =&P\left(\frac{n^m}{m!\binom{n}{m}}V_n - \frac{n^m}{m!\binom{n}{m}}W_n > a\right)\\
=&P\left(V_n + \left(\frac{n^m}{m!\binom{n}{m}} - 1\right)V_n - \frac{n^m}{m!\binom{n}{m}}W_n > a\right)\\
\geq&P\left(V_n - \frac{\epsilon}{M}|V_n| - \left(1 + \frac{\epsilon}{M}\right)|W_n| > a\right)\\
\geq&P\left(V_n - \epsilon - \epsilon > a\right) = P(V_n > a + 3\epsilon).
\end{aligned} \tag{2.104}$$

Нека су a и ϵ довољно мали да теорема 2.3.1 важи за $a+3\epsilon$ и $a-3\epsilon$. Тада из (2.103), (2.104) и (2.57) следи

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\ln P(U_n > a) \geq \lim_{n\to\infty} n^{-1}\ln P(V_n > a+3\epsilon) = f(a+3\epsilon)$$
$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\ln P(U_n > a) \leq \lim_{n\to\infty} n^{-1}\ln P(V_n > a-3\epsilon) = f(a-3\epsilon),$$

где је $f(a)$ ред са десне стране (2.57). Нека $\epsilon \to 0$. Због непрекидности функције $f(a)$ добијамо тражену релацију

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\ln P(U_n > a+\gamma_n) = \sum_{j=2}^{\infty} b_j a^j.$$

□

Претпостављамо поново да је $\{X_n\}$ низ независних случајних величина из униформне расподеле на $[0,1]$ али, за разлику од претходног случаја, претпоставимо да је језгро Φ дегенерисано, штавише, да је ранга $r=2$. Дефиниција (2.54) функционала (1.32) за $r=2$ значи

$$\int_{I^{m-1}} \Phi(s_1, s_2, ..., s_m) ds_2 \dots ds_m = 0 \quad \text{скоро свуда},$$

док

$$\int_{I^{m-2}} \Phi(s_1, s_2, ..., s_m) ds_3 \dots ds_m$$

није једнак нули скоро свуда.

Означимо са

$$\begin{aligned} \Phi^*(s_1, s_2) &= \int_{I^{m-2}} \Phi(s_1, ..., s_m) ds_3 ... ds_m, \quad m > 2, \\ \Phi^*(s_1, s_2) &= \Phi(s_1, s_2), \quad m = 2. \end{aligned} \tag{2.105}$$

Теорема 2.3.3. *Претпоставимо да је језгро* Φ *V-статистике (1.32) ограничено на* $[0,1]^m$, $|\Phi(s_1, ..., s_m)| \leq M$, $E\Phi = 0$ *и да је* Φ *ранга* 2. *Нека је* ν_0 *најмањи број* ν *за који интегрална једначина*

$$x(s_1) = \nu \int_0^1 \Phi^*(s_1, s_2) x(s_2) ds_2$$

има решење. Нека је $1/\nu_0$ *и проста сопствена вредност интегралног оператора са језгром* Φ^* *који слика* $L^2[0,1]$ *у* $L^2[0,1]$ *и нека је* $\{\gamma_n\}$ *произвољни низ такав да* $\gamma_n \to 0$. *Тада важи релација*

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\ln P(V_n \geq a+\gamma_n) = \sum_{j=2}^{\infty} b_j a^{j/2}, \tag{2.106}$$

где ред са десне стране конвергира за довољно мало $a > 0$*; штавише, водећи коефицијент* $b_2 = -\frac{\nu_0}{2\binom{m}{2}}$.

Доказ. Уведимо ознаке

$$\Omega_a = \{F \text{ је функција расподеле на } [0{,}1] \\ \int_{I^m} \Phi(s_1, ..., s_m) dF(s_1) \dots dF(s_m) \geq a\},$$

$$\begin{aligned} K(F) &= \int_0^1 F'(t) \ln F'(t) dt, \\ K(\Omega_a) &= \inf\{K(F) : \ F \in \Omega_a\}. \end{aligned}$$

Показаћемо да је $K(\Omega_a)$ аналитичка функција по a за $a > 0$ довољно мало, штавише

$$K(\Omega_a) = -\sum_{j=2}^{\infty} b_j a^j, \tag{2.107}$$

где је ред са десне стране једнак оном из (2.106). Тада ће $K(\Omega_a)$ свакако бити непрекидна здесна у a за довољно мало $a > 0$. На исти начин као што је то учињено у доказу теореме 2.3.1, може се показати да су и остали услови теореме 1.2.6 задовољени, на основу које следи тврђење наше теореме. Дакле, комплетираћемо доказ показивањем да важи једнакост (2.107).

Да бисмо израчунали $K(\Omega_a)$ довољно је посматрати класу $\mathcal{F}$ апсолутно непрекидних функција на $[0, 1]$ са густинама f. За свако δ дефинишемо као и пре,

$$V_\delta = \{F \in \mathcal{F} : \ f > \delta \text{ скоро свуда на } [0, 1]\}.$$

На основу леме (2.1.1) важи

$$K(\Omega_{a_1} \cap V_{\delta/2}) - \delta \leq K(\Omega_a) \leq K(\Omega_a \cap V_{\delta/2}), \tag{2.108}$$

где је $a_1 = a - \alpha(\delta)$.

Израчунавање $K(\Omega_{a_1} \cap V_{\delta/2})$ се своди на решавање екстремалног проблема (2.61)-(2.63) са дегенерисаним језгром. Након примене теореме 1.3.1, долазимо до Ојлер-Лагранжове једначине

$$\hat{\lambda}_0(\ln \hat{f}(s_1) + 1) + \hat{\lambda}_2 + \hat{\lambda}_1 m \int_{I^{m-1}} \Phi(s_1, ..., s_m) \prod_{j=2}^{m} \hat{f}(s_j) ds_2 \dots ds_m = C_1. \tag{2.109}$$

где је C_1 нека константа. Тако добијена једначина разматра се уз нормализационе услове (2.68) и (2.69) тј. уз

$$\int_{I^m} \Phi(s_1, ..., s_m) \prod_{j=1}^{m} \hat{f}(s_j) ds_1 \dots ds_m = a_1,$$
$$\int_0^1 \hat{f}(t)dt = 1.$$

Конструишимо сада решење наше Ојлер-Лагранжове једначине у случају када је $\hat{\lambda}_0 \neq 0$. На крају ће бити констатовано да случај $\hat{\lambda}_0 = 0$ води до контрадикције.

Нека је $\hat{\lambda}_0 \neq 0$. Из (2.109) следи

$$\hat{f}(s_1) = C_2 \exp\left\{ \mu \int_{I^{m-1}} \Phi \prod_{j=2}^{m} \hat{f}(s_j) ds_2 \dots ds_m \right\}.$$

Због ограничености језгра и због нормализационог услова (2.69) имамо да је $\hat{f}$ ограничена тј. $\hat{f} \in L^{\infty}[0,1]$. Можемо израчунати константу C_2 из услова (2.69), па наша једначина постаје

$$\hat{f}(s_1) = \frac{\exp\left\{ \lambda \int_{I^{m-1}} \Phi \prod_{j=2}^{m} \hat{f}(s_j) ds_2 \dots ds_m \right\}}{\int_0^1 \exp\left\{ \lambda \int_{I^{m-1}} \Phi \prod_{j=2}^{m} \hat{f}(s_j) ds_2 \dots ds_m \right\} ds_1}, \tag{2.110}$$

која треба да се разматра уз нормализациони услов (2.68).

Уводимо нотацију

$$a_1 = \epsilon^2, \quad \hat{f}(s) = 1 + \epsilon y(s). \tag{2.111}$$

Како је

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{m}(1 + \epsilon y(s_j)) =& \epsilon^m \prod_{j=1}^{m} y(s_j) + \epsilon^{m-1} \sum_{i=1}^{m} \prod_{j\neq i} y(s_j) \\ & + \dots + \epsilon^2 \sum_{i<j} y(s_i)y(s_j) + \epsilon \sum_{j=1}^{m} y(s_j) + 1,\end{aligned} \tag{2.112}$$

имамо

$$\begin{aligned}&\int_{I^{m-1}} \Phi \prod_{j=2}^{m}(1 + \epsilon y(s_j)) ds_2 \dots ds_m \\ &\qquad = \int_{I^{m-1}} \Phi \left(\epsilon^{m-1} \prod_{j=2}^{m} y(s_j) + \dots + \epsilon \sum_{j=2}^{m} y(s_j) \right) ds_2 \dots ds_m.\end{aligned}$$

Последњи сабирак нестаје због дегенерисаности језгра. Ово је место где се по први пут појављује разлика у односу на недегенерисан случај.

Како је језгро Ψ симетрично, можемо сменити $\sum_{j=2}^{m} y(s_j)$ са $(m-1)y(s_2)$ под интегралом. Тада је

$$\begin{aligned}\exp\left\{\lambda\int_{I^{m-1}}\Phi\prod_{j=2}^{m}\hat{f}(s_j)ds_2\dots ds_m\right\}&\\ =\exp\left\{\lambda\epsilon(m-1)\int_{I^{m-1}}\Phi y(s_2)ds_2\dots ds_m\right.&\\ \left.+\lambda\epsilon\int_{I^{m-1}}\Phi S(\epsilon,m,y)ds_2\dots ds_m\right\},&\end{aligned}\tag{2.113}$$

где

$$S(\epsilon,m,y)=\epsilon^{m-2}\prod_{j=2}^{m}y(s_j)+\dots+\epsilon\sum_{2\le j_1<j_2\le m}y(s_{j_1})y(s_{j_2}).$$

Први сабирак у експоненту јесте водећи члан док други, уз $S(\epsilon,m,y)$, садржи веће степене од ϵ те ће он остваривати мањи утицај на решење.

Након сличних трансформација и смене промењивих (2.111) нормализациони услов (2.68) постаје

$$\int_{I^m}\Phi(s_1,...,s_m)N(\epsilon,m,y)ds_1\dots ds_m=1,\tag{2.114}$$

где је

$$N(\epsilon,m,y)=\epsilon^{m-2}\prod_{j=1}^{m}y(s_j)+\dots+\sum_{1\le j_1<j_2\le m}y(s_{j_1})y(s_{j_2}).\tag{2.115}$$

Након развоја експоненцијалне фукнције у (2.113) и остављајући само водеће степене од ϵ долазимо до

$$\begin{aligned}\exp\left\{\lambda\epsilon(m-1)\int_{I^{m-1}}\Phi y(s_2)ds_2\dots ds_m\right.&\\ \left.+\lambda\epsilon\int_{I^{m-1}}\Phi S(\epsilon,m,y)ds_2\dots ds_m\right\}&\\ =\ 1+\lambda\epsilon(m-1)\int_{I^{m-1}}\Phi y(s_2)ds_2\dots ds_m&\\ +\lambda\epsilon\int_{I^{m-1}}\Phi S(\epsilon,m,y)ds_2\dots ds_m+D_1\epsilon^2+\dots,&\end{aligned}\tag{2.116}$$

где коефицијент D_1 уз ϵ^2, као и коефицијенти уз веће степене од ϵ, зависи од Φ, m и x. Исто важи и за коефицијенте D_2 и D_3 који се појављују у наставку. Интеграцијом реда по s_1, добијамо

$$\begin{aligned}\int_0^1 \exp\Big\{\lambda\epsilon(m-1)\int_{I^{m-1}} &\Phi y(s_2)ds_2\dots ds_m \\ &+\lambda\epsilon\int_{I^{m-1}}\Phi S(\epsilon,m,y)ds_2\dots ds_m\Big\}\,ds_1 \\ &= 1+\lambda\epsilon(m-1)\int_{I^m}\Phi y(s_2)ds_1\dots ds_m \\ &+\lambda\epsilon\int_{I^m}\Phi S(\epsilon,m,y)ds_1\dots ds_m + D_2\epsilon^2+\dots \\ &=1+\lambda\epsilon\int_{I^m}\Phi S(\epsilon,m,y)ds_1\dots ds_m + D_2\epsilon^2+\dots, \qquad (2.117)\end{aligned}$$

искористили смо да се сабирак

$$\begin{aligned}&\lambda\epsilon(m-1)\int_{I^m}\Phi y(s_2)ds_1\dots ds_m \\ &=\lambda\epsilon(m-1)\int_0^1 y(s_2)\Big(\int_{I^{m-1}}\Phi ds_1 ds_3\dots ds_m\Big)ds_2\equiv 0\end{aligned}$$

анулира због дегенерисаности језгра.

Смењивањем (2.116) и (2.117) у главну једначину (2.110), она поприма облик

$$\begin{aligned}(1+\epsilon y(s_1))\Big(1+\lambda\epsilon&\int_{I^m}\Phi S ds_1\dots ds_m + D_2\epsilon^2+\dots\Big) \\ &= 1+\lambda\epsilon(m-1)\int_{I^{m-1}}\Phi y(s_2)ds_2\dots ds_m \qquad (2.118)\\ &+\lambda\epsilon\int_{I^{m-1}}\Phi S ds_2\dots ds_m + D_1\epsilon^2+\dots\end{aligned}$$

Ослободивши се загада и дељењем са ϵ у (2.118) добијамо

$$\begin{aligned}&y(s_1)-\lambda(m-1)\int_{I^{m-1}}\Phi y(s_2)ds_2\dots ds_m \\ &-\lambda\int_{I^{m-1}}\Phi S ds_2\dots ds_m+\lambda\int_{I^m}\Phi S ds_1\dots ds_m + D_3\epsilon+\dots=0.\end{aligned} \qquad (2.119)$$

Напоменимо да се ова једначина посматра уз нормализациони услов (2.114).

Као и пре, идеја нам је да леву страну једнакости (2.119) посматрамо као аналитички оператор $A(y,\lambda,\epsilon) : L^\infty[0,1]\times\mathbb{R}^2 \to L^\infty[0,1]$. Циљ нам је да покажемо да је решење проблема (2.119), (2.114) аналитичка функција од ϵ, за ϵ довољно мало.

Конструишимо прво решење за помоћни проблем који се добија из (2.119), (2.114) за $\epsilon = 0$. То је линеарна интегрална једначина

$$y(s_1) - \lambda(m-1)\int_{I^{m-1}} \Phi y(s_2) ds_2 \dots ds_m = 0 \tag{2.120}$$

уз нормализациони услов

$$\binom{m}{2}\int_{I^m} \Phi y(s_1) y(s_2) ds_1 \dots ds_m = 1.$$

Користећи нотацију (2.105), нашу једначину (2.120) можемо записати у облику

$$y(s_1) - \lambda(m-1)\int_0^1 \Phi^*(s_1,s_2) y(s_2) ds_2 = 0.$$

Посматрамо одговарајући линеарни интегрални оператор са симетричним језгром $\Phi^*(s_1,s_2)$ као оператор из $L^2[0,1] \to L^2[0,1]$. Он је самоадјунгован и компактан, па на основу спектралне теореме за самоадјунговане компактне операторе (видети [30], теорема 14.4) има реалан и највише пребројив ограничен скуп сопствених вредности. Све су позитивне због услова нормираности, па постоји највећа и означимо је са $1/(\lambda_0(m-1))$, тј. $\nu_0 = \lambda_0(m-1)$ је баш онај реалан број из исказа теореме. Како смо претпоставили да је сопствени потпростор који одговара вредности $1/(\lambda_0(m-1))$ димензије 1 (претпоставили смо да је $1/(\lambda_0(m-1))$ проста сопствена вредност), постоји јединствено x_0 које задовољава једначине

$$x_0(s_1) - \lambda_0(m-1)\int_{I^{m-1}} \Phi x_0(s_2) ds_2 \dots ds_m = 0 \tag{2.121}$$

$$\binom{m}{2}\int_{I^m} \Phi x_0(s_1) x_0(s_2) ds_1 \dots ds_m = 1. \tag{2.122}$$

Пређимо сада на конструкцију решења иницијалног проблема. Уведимо смене

$$x(t) = y(t) - x_0(t), \quad \mu = \lambda - \lambda_0.$$

Тада (2.119) и (2.114) постају

$$\begin{aligned} x(s_1) + x_0(s_1) - (\lambda_0 + \mu)(m-1) \int_{I^{m-1}} \Phi(x(s_2) + x_0(s_2)) ds_2 \dots ds_m \\ - (\lambda_0 + \mu) \int_{I^{m-1}} \Phi S(\epsilon, m, x + x_0) ds_2 \dots ds_m \\ + (\lambda_0 + \mu) \int_{I^m} \Phi S(\epsilon, m, x + x_0) ds_1 \dots ds_m + D_3 \epsilon + \dots = 0 \end{aligned} \tag{2.123}$$

и

$$\int_{I^m} \Phi N(\epsilon, m, x + x_0) ds_1 \dots ds_m = 1. \tag{2.124}$$

Запишимо (2.123) у облику

$$Bx = R(x, \epsilon, \mu), \tag{2.125}$$

где је

$$(Bx)(s_1) = x(s_1) - \lambda_0(m-1) \int_{I^{m-1}} \Phi x(s_2) ds_2 \dots ds_m \tag{2.126}$$

а преостали сабирци из (2.123) су уврштени у $R(x, \epsilon, \mu)$:

$$\begin{aligned} R(x, \epsilon, \mu) =& (\lambda_0 + \mu) \int_{I^{m-1}} \Phi S(\epsilon, m, x(s_2) + x_0(s_2)) ds_2 \dots ds_m \\ & - (\lambda_0 + \mu) \int_{I^m} \Phi S(\epsilon, m, x(s_2) + x_0(s_2)) ds_1 \dots ds_m \\ & + \mu(m-1) \int_{I^{m-1}} \Phi S(x(s_2) + x_0(s_2)) ds_2 \dots ds_m \\ & + \lambda_0 \int_{I^{m-1}} \Phi x_0(s_2) ds_2 \dots ds_m - D_3 \epsilon + \dots . \end{aligned} \tag{2.127}$$

Да бисмо дошли до (2.127) користили смо (2.121).

Приметимо да оператор $B : L^\infty[0,1] \to L^\infty[0,1]$ одређен са (2.126) јесте Фрешеов извод оператора A у тачки $x = x_0$. B није инвертибилан, није $1-1$ јер знамо да је језгро овог оператора димензије 1, знамо да $Bx = 0$ има једно нетривијално решење јер је $1/(\lambda_0(m-1))$ била проста сопствена вредност по претпоставкама из теореме. Стога се операторско уопштење теореме о имплицитној функцији (тоерема 1.3.4) не може применити, па ћемо као и пре, решење наћи помоћу Љапунов-Шмитове једначине гранања.

Означимо са $\mathbb{E}_1$ простор $L^\infty[0,1]$ а са $\mathbb{E}_2$ простор $L^2[0,1]$. Дуални простор од $\mathbb{E}_i$ означимо са $\mathbb{E}_i^*$, за $i = 1, 2$. Нека је $B^* : \mathbb{E}_2^* \to \mathbb{E}_1^*$ конјунговани оператор од B и нека је (x, α) вредност функционала α у тачки x.

Оператор $Cx = x$ као идентичко пресликавање има ограничен инверз а $Dx = \lambda_0(m-1)\int_{I^{m-1}} \Phi x(s_2)ds_2 \dots ds_m$ јесте линеарни интегрални оператор и као такав је компактан. Одатле следи да је $B = C + D$ Фредхолмов на основу Николскијеве теореме јер се може представити у облику збира инвертибилног и компактног оператора (видети [35]).

Означимо са γ онај елемент простора $\mathbb{E}_1^*$ за који је $(x_0, \gamma) = 1$. На основу излагања у [34] из одељка 21, пошто је B Фредхолмов важи да је $\dim(\mathrm{Ker}(B^*)) = \dim(\mathrm{Ker}(B)) = 1$. Нека је $\psi \in \mathbb{E}_2^*$ функционал који генерише језгро оператора B^* и нека је z елемент простора $\mathbb{E}_2$ такав да је $(z, \psi) = 1$.

Одредимо сада z и ψ у функцији од x_0 и Φ. На основу теореме о репрезентацији функционала на $L^1[0,1]$ (видети [30], теорема 8.19) постоји јединствена функција $a \in L^1[0,1]$ тд. $(x, \psi) = \int_0^1 x(t)a(t)dt$. Нека је $\psi_1 \in \mathbb{E}_2^*$ тд. $(y, \psi_1) = \int_0^1 yx_0dt$. Искористивши (2.121), добијамо да важи за свако $x \in \mathbb{E}_1$ следеће

$$\begin{aligned}(x, B^*\psi_1) =&(Bx, \psi_1) = \int_0^1 (Bx)(s_1)x_0(s_1)ds_1\\ =&\int_0^1 \left((x(s_1) - \lambda_0(m-1)\int_{I^{m-1}} \Phi x(s_2)ds_2 \dots ds_m)\right)x_0(s_1)ds_1\\ =&\int_0^1 x(s_1)x_0(s_1)ds_1 - \lambda_0(m-1)\int_{I^m} \Phi x_0(s_1)x(s_2)ds_1 \dots ds_m\\ =&\lambda_0(m-1)\int_{I^m} \Phi x_0(s_1)x(s_2)ds_1 \dots ds_m\\ &- \lambda_0(m-1)\int_{I^m} \Phi x_0(s_1)x(s_2)ds_1 \dots ds_m = 0\end{aligned}$$

тј. показали смо да $\psi_1 \in \mathrm{Ker}(B^*)$. Пошто је језгро димензије један следи да је наш произвољни избор генератора језгра од B^* баш могло бити $\psi \equiv \psi_1$. Тада је због услова нормализације за x_0 (2.122)

$$z \equiv \binom{m}{2}\int_{I^{m-1}} \Phi x_0(s_2)ds_2 \dots ds_m,$$

одакле следи формула која ће нам бити потребна касније

$$\left((m-1)\int_{I^{m-1}} \Phi x_0(s_2)ds_2 \dots ds_m, \psi\right) = \frac{m-1}{\binom{m}{2}}(z, \psi) = \frac{m-1}{\binom{m}{2}}. \tag{2.128}$$

Дефинишимо сада оператор који слика $\mathbb{E}_1$ у $\mathbb{E}_2$

$$\tilde{B}x = Bx + \xi z, \quad \text{где је } \xi = (x, \gamma).$$

На основу уопштене Шмит-ове леме ([34], одељак 21.3) оператор $\tilde{B}$ је инвертибилан, његов инверзни оператор $\Gamma = \tilde{B}^{-1}$ је ограничен, и

$$\Gamma z = x_0, \quad \Gamma^* \gamma = \psi.$$

Запишимо једнакост (2.125) у облику

$$\tilde{B}x = R(x, \epsilon, \mu) + \xi z. \tag{2.129}$$

Сада теорема о имплицитним операторима (теорема 1.3.4) може да се примени јер је Фрешеов извод по x у тачки $(x, \epsilon, \lambda, \xi) = (x_0, 0, 0, 0)$ оператора $\tilde{B}x - R(x, \epsilon, \lambda) - \xi z$ баш $\tilde{B}$ који има ограничен инверз Γ. Она обезбеђује да се решење x може аналитички изразити у довољно малој околини координатног почетка, тј.

$$x = \sum_{i,j,k=0}^{\infty} x_{i,j,k} \xi^i \epsilon^j \mu^k \tag{2.130}$$

за довољно мале $\xi, \epsilon, |\mu| > 0$, као и да ред апсолутно конвергира у односу на норму простора $\mathbb{E}_1$.

Како бисмо нашли $x_{i,j,k}$ уврстимо (2.130) у (2.129) и извршимо изједначавање коефицијената уз одговарајуће степене од ξ, ϵ и μ. Као и пре, одредићемо само првих неколико коефицијената јер кад будемо рачунали јакобијан у координатном почетку само линеарни делови се неће поништити.

Елементарним рачуном добијамо

$$\begin{aligned}
\tilde{B}x_{0,0,0} &= 0 & &\Rightarrow \quad x_{0,0,0} = \Gamma 0 = 0 \\
\tilde{B}x_{1,0,0} &= z & &\Rightarrow \quad x_{1,0,0} = \Gamma z = x_0 \\
\tilde{B}x_{i,0,0} &= 0 & &\Rightarrow \quad x_{i,0,0} = 0, \ i \geq 2 \\
\tilde{B}x_{0,0,1} &= (m-1) \int_{I^{m-1}} \Phi x_0(s_2) ds_2 \ldots ds_m \\
&\Rightarrow \quad x_{0,0,1} = \Gamma \left((m-1) \int_{I^{m-1}} \Phi x_0(s_2) ds_2 \ldots ds_m \right)
\end{aligned}$$

и тако даље.

Циљ нам је да покажемо да μ и ξ аналитички зависе од ϵ у околини координатног почетка. Потребне две имплицитне једначине добијамо када (2.130) уврстимо у $\xi = (x, \gamma)$ и када уврстимо у нормализациони услов (2.124).

Сменимо (2.130) у $\xi = (x, \gamma)$ и дефинишимо $L_{i,j,k} = (x_{i,j,k}, \gamma)$, тада добијамо

$$\xi = \sum_{i=0}^{\infty} L_{i,0,0}\xi^i + \sum_{i=1}^{\infty} \xi^i \sum_{j+k\geq 1} L_{i,j,k}\epsilon^j \mu^k.$$

Ако искористимо да је $L_{0,0,0} = (x_{0,0,0}, \gamma) = (0, \gamma) = 0$, као и $L_{1,0,0} = (x_0, \gamma) = 1$, долазимо до Љапунов-Шмит једнакости гранања

$$\sum_{i=2}^{\infty} L_{i,0,0}\xi^i + \sum_{i=1}^{\infty} \xi^i \sum_{j+k\geq 1} L_{i,j,k}\epsilon^j \lambda^k = 0.$$

Оно што нас занима су само водећих неколико коефицијената. Искористићемо особину коју нам је обезбедила Шмит-ова лема, да је $\Gamma^*\gamma = \psi$, односно по дефиницији да је $(\Gamma(x), \gamma) = (x, \psi)$ као и особину (2.128). Добијамо

$$\begin{aligned}
L_{2,0,0} =& L_{3,0,0} = \dots = L_{k,0,0} = \dots = 0, \\
L_{0,0,1} =& \Bigg(\Gamma\Bigg((m-1)\int_{I^{m-1}} \Phi x_0(s_2) ds_2 \dots ds_m\Bigg), \gamma\Bigg) \\
=& \Bigg((m-1)\int_{I^{m-1}} \Phi x_0(s_2) ds_2 \dots ds_m, \psi\Bigg) = \frac{m-1}{\binom{m}{2}},
\end{aligned}$$

итд. Стога наша једначина гранања постаје

$$F_1(\xi, \epsilon, \mu) \equiv \frac{m-1}{\binom{m}{2}}\mu + L_{0,1,0}\epsilon + L_{0,1,1}\mu\epsilon + L_{0,2,0}\epsilon^2 + \dots = 0. \tag{2.131}$$

Друга имплицитна једначина добија се када се (2.130) уврсти у нормализациони услов (2.124). Интеграцију члан по члан нам обезбеђује равномерна конвергенција реда, а нас занима само последњи сабирак од N из дефиниције (2.115) јер сви остали сабирци садрже већи степен од ϵ. Добијамо

$$\begin{aligned}
1 =& \binom{m}{2} \int_{I^m} \Phi\Bigg((x(s_1) + x_0(s_1))(x(s_2) + x_0(s_2)) + \dots\Bigg) ds_1 \dots ds_m \\
=& \binom{m}{2} \int_{I^m} \Phi\Bigg(\prod_{l=1}^{2} (\sum_{i,j,k=0}^{\infty} x_{i,j,k}(s_l)\xi^i\epsilon^j\mu^k + x_0(s_l)) + \dots\Bigg) ds_1 \dots ds_m \\
=& \binom{m}{2} \int_{I^m} \Phi\Bigg(\prod_{l=1}^{2} x_0(s_l) + 2\xi\prod_{l=1}^{2} x_0(s_l) + c_{0,1,0}\epsilon + c_{0,0,1}\mu + \dots\Bigg) ds_1 \dots ds_m \\
=& 1 + 2\xi + a_{0,1,0}\epsilon + a_{0,0,1}\mu + \dots.
\end{aligned}$$

Користили смо релацију да је $x_{0,0,0} = x_0$ и нормализациони услов за x_0 (2.122).

Наша друга имплицитна једначина сада постаје

$$F_2(\xi, \epsilon, \mu) \equiv 2\xi + a_{0,1,0}\epsilon + a_{0,0,1}\mu + \cdots = 0, \tag{2.132}$$

где су коефицијенти $a_{i,j,k}$ бројеви, вредности одговарајућих интеграла уз $\xi^i \epsilon^j \mu^k$.

Објединивши једначине (2.131) и (2.132) добијамо класичну имплицитну једначину

$$(F_1(\xi, \epsilon, \mu), F_2(\xi, \epsilon, \mu)) = (0, 0).$$

Одговарајући јакобијан је

$$\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(\xi, \lambda)}(0, 0) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{m-1}{\binom{m}{2}} \\ 2 & a_{0,0,1} \end{vmatrix} \neq 0,$$

одакле на основу теореме 1.3.3 следи да за довољно мало $\epsilon > 0$ важи

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \epsilon^k, \quad \mu = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \epsilon^k.$$

Заменом добијених редова у (2.130) добијамо

$$x(t) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j(t) \epsilon^j.$$

Стога је

$$y(t) = x_0(t) + x(t) = x_0(t) + \sum_{j=1}^{\infty} x_j(t) \epsilon^j.$$

Вративши смену (2.111) добијамо

$$\hat{f}(t) = 1 + x_0(t) a_1^{1/2} + \sum_{j=1}^{\infty} x_j(t) a_1^{(j+1)/2}. \tag{2.133}$$

Очигледно је да $\hat{f}(t) > \delta/2$ за довољно мале a_1 и δ стога добијено решење екстремалног проблема припада скупу $\Omega_{a_1} \cap V_{\delta/2}$.

Смењујући (2.133) у функционал (2.61) и развијајући логаритамску функцију у ред (истим поступком као код смо рачунали (2.51)), налазимо да је

$$\int_0^1 \hat{f}(t) \ln \hat{f}(t) dt = \frac{1}{2} a_1 \int_0^1 x_0^2(t) dt + \sum_{j=3}^{\infty} b_j a_1^{j/2},$$

за неке коефицијенте b_j. Узевши у обзир (2.121) и (2.122) добијамо

$$\begin{aligned}\int_0^1 x_0^2(s_1)ds_1 = &\int_0^1 \Big(\lambda_0(m-1)\int_{I^{m-1}} \Phi x_0(s_2)ds_2\dots ds_m\Big)x_0(s_1)ds_1\\ =&\frac{\lambda_0(m-1)}{\binom{m}{2}}\binom{m}{2}\int_{I^m}\Phi y(s_1)y(s_2)ds_1\dots ds_m = \frac{\lambda_0(m-1)}{\binom{m}{2}},\end{aligned}$$

последично,

$$g_0(\hat{f}) = \frac{\lambda_0(m-1)}{2\binom{m}{2}}a_1 + \sum_{j=3}^{\infty} b_j a_1^{j/2}.$$

Присетимо се да $a_1 = a + \alpha(\delta)$ кад $\delta \to 0$, преласком на граничну вредност у (2.108) кад $\delta \to 0$, имамо да је

$$K(\Omega_a) = \frac{\lambda_0(m-1)}{2\binom{m}{2}}a + \sum_{j=3}^{\infty} b_j a^{j/2} = \frac{\nu_0}{2\binom{m}{2}}a + \sum_{j=3}^{\infty} b_j a^{j/2}.$$

Да бисмо комплетирали доказ преостаје да се покаже да је $\hat{\lambda}_0 \neq 0$ за Ојлер-Лагранжову једначину (2.109), али аргументи су готово исти као и у недегенерисаном случају. Претпоставивши супротно, у случају када је $m = 3$ долази се до контрадикције аналогно, а општи случај кад $m > 3$ се може свести на $m = 3$. □

Слично тврђење важи и за U-статистике.

Теорема 2.3.4. *Нека за језгро U-статистике*

$$U_n = \binom{n}{m}^{-1} \sum_{1\le i_1<\dots<i_m\le n} \Phi(X_{i_1}, ..., X_{i_m}),$$

важе претпоставке из теореме 2.3.3. Тада за сваки реалан низ $\{\gamma_n\}$ за који $\gamma_n \to 0$ кад $n \to \infty$, важи:

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\ln P(U_n \ge a + \gamma_n) = \sum_{j=2}^{\infty} b_j a^{j/2},$$

где ред са десне стране се поклапа са редом из (2.106) и конвергира за довољно мало $a > 0$.

Доказ теореме 2.3.4 аналоган је доказу теореме 2.3.2 јер приказана метода није зависила од ранга језгра, уз напомену да се овог пута врши позивање на теорему 2.3.3.

Пример 2.3.5. Размотримо општи случај пондерисане Крамер-фон Мизесове статистике

$$\omega_{n,q}^2 = \int_0^1 (F_n(u) - u)^2 q(u) du,$$

где је ненегативна функција q интеграбилна на $[0, 1]$. Она се може написати у облику V-статистике степена $m = 2$ и ранга $r = 2$:

$$V_n = n^{-2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \Phi(X_i, X_j)$$

са ограниченим језгром

$$\Phi(s,t) = \int_0^1 (I\{s \leq u < 1\} - u)(I\{t \leq u < 1\} - u) q(u) du. \tag{2.134}$$

У случају да је $1/\nu_0$, највећа сопствена вредност интегралног оператора са језгром Φ проста, задовољени су услови теореме 2.3.4, па важи

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln P(\omega_{n,q}^2 \geq a) = -\frac{\nu_0}{2} a + \sum_{j=3}^{\infty} b_j a^{j/2},$$

што се поклапа са резултатом из теореме 2.2.1.

$\diamondsuit$

Ови резултати су у великој мери допринели развоју теорије тестирања статистичких хипотеза јер је управо њиховом применог омогућено рачунање Бахадурових асимптотских ефикасности неких нових тест статистика (видети [14]-[29]).

Поглавље 3

Бахадурова асимптотска ефикасност

3.1 Локални Бахадурови нагиби

Резултати приказани у другом поглављу, о великим одступањима разних статистика тестова сагласности, омогућавају нам да израчунамо водеће чланове њихових Бахадурових нагиба, последично и њихову локалну Бахадурову асимптотску ефикасност.

Означимо са Θ скуп свих непрекидних функција расподеле $F_\theta(.)$ са униформном метриком

$$\rho(F_{\theta_1}, F_{\theta_2}) = \sup_{-\infty<t<\infty} |F_{\theta_1}(t) - F_{\theta_2}(t)|.$$

Означимо са $f(., \theta)$ одговарајућу густину и са P_θ расподелу. Претпостављамо да нам је параметарски скуп Θ_0 сачињен од само једне функције расподеле F_0 и означимо са $\Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$.

Метода за израчунавање тачних нагиба заснована на теореми 1.1.3 примењива је на све низове статистика које смо разматрали. Оно што треба напоменути је да је у неким случајевима потребно наметнути додатне услове како би се обезбедила конвергенција у P_θ-вероватноћи низа статистика ка функцији $b(\theta)$. У свим случајевима ослањамо се и на Гливенко-Кантелијеву теорему која обезбеђује равномерну конвергенцију F_n ка F_θ скоро сигурно (за узорак из расподеле F_θ).

- За статистике Колмогоровљевог типа D_n, G_n и V_n као и за интегралну статистику $\omega_{n,q}^k$ нису нам неопходне додатне претпоставке, већ на основу Гливенко-Кантелијеве теореме имамо да је

$$b_D(\theta) = \sup_{-\infty<t<\infty} |F_\theta(t) - F_0(t)|,$$

$$b_G(\theta) = \sup_{-\infty<t<\infty} \left| F_\theta(t) - F_0(t) - \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\theta(s) - F_0(s))dF_0(s) \right|,$$

$$b_V(\theta) = \sup_{-\infty<t<\infty} (F_\theta(t) - F_0(t)) - \inf_{-\infty<t<\infty} (F_0(t) - F_\theta),$$

$$b_{\omega_q^k}(\theta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (F_\theta(t) - F_0(t))^k q(F_0(t))dF_0(t).$$

Одатле, на основу теореме 1.1.3 као и теорема 2.1.2, 2.1.3, 2.2.1 имамо

$$c_D(\theta) = 4\big(\sup_{-\infty<t<\infty} |F_\theta(t) - F_0(t)|\big)^2,$$

$$c_G(\theta) = 12\left(\sup_{-\infty<t<\infty} \left| F_\theta(t) - F_0(t) - \int\limits_{-\infty}^{\infty} (F_\theta(s) - F_0(s))dF_0(s) \right|\right)^2,$$

$$c_V(\theta) = 4\big(\sup_{-\infty<t<\infty} (F_\theta(t) - F_0(t)) - \inf_{-\infty<t<\infty} (F_0(t) - F_\theta)\big)^2,$$

$$c_{\omega_q^k}(\theta) = -\lambda_0(q;k)\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} (F_\theta(t) - F_0(t))^k q(F_0(t))dF_0(t)\right)^{2/k},$$

кад $F_\theta \to F_0$. За једностране варијанте ових статистика важе аналогни резултати.

- За конвергенцију Хмаладзе-Аки статистике K_n у вероватноћи ка $b_K(\theta)$ довољна су нам додатна два услова (видети [4]):

  (А) Постоји функција расподеле S_θ и низови реалних бројева $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ тако да важи $\sqrt{n}a_n \to \infty$, $b_n/(\sqrt{n}a_n) \to 0$, и

  $$R_\theta^n((z - b_n)/a_n) \to S_\theta(z),$$

  где је

  $$R_\theta(z) = \begin{cases} F_\theta(F_0^{-1}(1 - e^{-z})), & z \geq 0, \\ 0, & z < 0; \end{cases}$$

  (Б)

  $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - F_\theta(t)}{1 - F_0(t)} dF_0(t) < \infty.$$

Тада је функција $b(\theta)$ облика

$$b_K(\theta) = \sup_{-\infty<t<\infty} \left| F_\theta(t) - \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{1-F_\theta(s)}{1-F_0(s)} dF_0(s) \right|,$$

одакле применом теореме 1.1.3 као и теореме 2.1.4 добијамо

$$c_K(\theta) = \sup_{-\infty<t<\infty} \left| F_\theta(t) - \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{1-F_\theta(s)}{1-F_0(s)} dF_0(s) \right|^2,$$

кад $F_\theta \to F_0$. Аналогно се добија за статистике $K_n^{\pm}$.

- Због својих истих асимптотских својстава, идентични резултати важе за одговарајуће U- и V-статистике. Наводимо само за U_n а резултати се могу пронаћи у раду [3]. На основу закона великих бројева за U-статистике, важи

$$U_n \xrightarrow{P_\theta} b_U(\theta) = E_\theta \Phi(X_1, ..., X_m), \quad \text{кад } n \to \infty.$$

Претпоставља се, због постојаности теста, да је језгро Φ такво да важи $b_\Phi(\theta) > 0$ за $\theta \in \Theta_1$ као и да $b_\Phi(\theta) \to 0$ кад $F_\theta \to F_0$. На основу теореме 1.1.3 и теореме 2.3.2 у случају недегенерисаног језгра, односно теореме 2.3.4 у случају дегенерисаног имамо:

1. ако је језгро ранга 1 тада је локални Бахадуров тачан нагиб статистике U_n

$$c_U(\theta) = \frac{b_\Phi^2(\theta)}{m^2\sigma^2} \quad \text{кад } F_\theta \to F_0;$$

2. ако је језгро ранга 2 тада је локални Бахадуров тачан нагиб статистике U_n

$$c_U(\theta) = \frac{2\nu_0 b_\Phi(\theta)}{m(m-1)} \quad \text{кад } F_\theta \to F_0.$$

Уз претпоставку о ограничености језгра, као и уз додатне услове:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_\theta(x,\theta)| dx < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f_{\theta\theta}(x,\theta)| dx < \infty, \tag{3.1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_{\theta\theta\theta}(x,\theta)| dx < \infty \tag{3.2}$$

за θ довољно мало, асимптотско понашање Бахадуровог нагиба је одређеније. Наиме важе следеће теореме, видети [3].

Теорема 3.1.1. *Нека је $\{U_n\}$ низ недегенерисаних U- или V-статистика са ограниченим језгром и нека важе услови (3.1). Тада кад $F_\theta \to F_0$*

$$c_U(\theta) \sim \frac{1}{\sigma^2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) f_\theta(x,0)dx\right)^2 \cdot \theta^2.$$

Теорема 3.1.2. *Нека је $\{U_n\}$ низ слабо дегенерисаних U- или V-статистика са ограниченим језгром и нека важе услови (3.1) и (3.2). Тада кад $F_\theta \to F_0$*

$$c_U(\theta) \sim \nu_0 \int_{\mathbb{R}^2} \Phi^*(x_1,x_2) f_\theta(x_1,0) f_\theta(x_2,0) dx_1 dx_2 \cdot \theta^2.$$

Напоменимо још, да у случају регуларних фамилија расподела важи релација

$$2K(\theta) \sim I(f)\cdot\theta^2, \quad \text{кад } F_\theta \to F_0, \tag{3.3}$$

где је

$$I(f) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f_\theta^2(x,0)}{f(x,0)}dx$$

Фишерова информациона функција, видети [5]. Уз помоћ ње, локалних Бахадурових нагиба и формуле (1.12), рачунаћемо локалне ефиканости тестова.

3.2 Примери

Израчунајмо локалне Бахадурове ефикасности тестова заснованим на статистикама D_n, V_n, G_n, K_n и ω_n^2 за бliske алтернативе из нормалне, Кошијеве и експоненцијалне расподеле.

Пример 3.2.1. Нека је F_θ функција расподеле случајне величине са $\mathcal{N}(\theta,1)$ расподелом. Кулбак-Лајблерово растојање таквих алтернатива је

$$\begin{aligned} K(\theta,0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \log\frac{e^{-(x-\theta)^2/2}}{e^{-x^2/2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\theta)^2/2}dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\theta x - \frac{\theta^2}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} e^{-(x-\theta)^2/2}dx = \frac{\theta^2}{2}. \end{aligned}$$

Важи и

$$F_\theta(x) - \Phi(x) = \Phi(x-\theta) - \Phi(x) \sim -\theta \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad \text{кад } \theta \to 0.$$

Уврстивши то у добијене изразе за нагибе кад $\theta \to 0$ добијамо резултате приказане у табели 3.1.

$c_D(\theta)$	$c_V(\theta)$	$c_G(\theta)$	$c_K(\theta)$	$c_{\omega^2}(\theta)$
$\frac{2}{\pi}\theta^2$	$\frac{2}{\pi}\theta^2$	$12\frac{(1-\sqrt{2})^2}{4\pi}\theta^2$	$0.81\theta^2$	$\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\theta^2$

Табела 3.1: *Бахадурови локални нагиби за* $\mathcal{N}(\theta,1)$ *алтернативу.*

e_D^B	e_V^B	e_G^B	e_K^B	$e_{\omega^2}^B$
0.64	0.64	0.96	0.81	0.91

Табела 3.2: *Бахадурове локалне ефикасности за* $\mathcal{N}(\theta,1)$ *алтернативу.*

Бахадурове локалне ефикасности поменутих тестова против алтернативе из нормалне расподеле са померајем дате су у табели 3.2.

◇

Пример 3.2.2. Нека је $F_\theta = 1/\pi \arctan(x-\theta) + 1/2$ функција расподеле случајне величине са Кошијевом расподелом са параметром локације θ. Тада је

$$F_\theta(x) - F_0(x) = \frac{1}{\pi}(\arctan(x-\theta) - \arctan(x)) \sim -\theta \frac{1}{\pi(1+x^2)},$$

кад $\theta \to 0$. Уврстивши то у изразе за локалне нагибе, добијамо резултате приказане у табели 3.3.

$c_D(\theta)$	$c_V(\theta)$	$c_G(\theta)$	$c_K(\theta)$	$c_{\omega^2}(\theta)$
$\frac{4}{\pi^2}\theta^2$	$\frac{4}{\pi^2}\theta^2$	$\frac{3}{\pi^2}\theta^2$	$0.33\theta^2$	$\frac{3}{8}\theta^2$

Табела 3.3: *Бахадурови локални нагиби за* $\mathcal{C}(\theta,1)$ *алтернативу.*

На основу формуле (3.3) имамо да је Кулбак-Лајблерово растојање

$$K(\theta,0) \sim \int_{\mathbb{R}} \frac{f_\theta^2(x,0)}{f(x,0)} dx \cdot \theta^2 = \int_{\mathbb{R}} \frac{\left(\frac{1}{\pi(1+x^2)}\right)^2}{\frac{1}{\pi(1+x^2)}} dx \cdot \theta^2 = \frac{\theta^2}{2}, \text{ кад } \theta \to 0.$$

e_D^B	e_V^B	e_G^B	e_K^B	$e_{\omega^2}^B$
0.41	0.41	0.30	0.33	0.38

Табела 3.4: *Бахадурове локалне ефикасности за $\mathcal{N}(\theta, 1)$ алтернативу.*

Локалне Бахадурове ефикасности поменутих тестова против алтернативе из Кошијеве расподеле са померајем дате су у табели 3.4.

◇

Пример 3.2.3. Нека је $F_\theta = 1 - e^{-(1+\theta)x}$, $x \geq 0$ функција расподеле случајне величине са $\mathcal{E}(1+\theta)$ расподелом. Тада је

$$F_\theta - F_0 \sim \theta e^{-x} x, \quad \text{кад } \theta \to 0.$$

Уврстивши то у добијене изразе за нагибе добијамо резултате приказане у табели 3.5.

$c_D(\theta)$	$c_V(\theta)$	$c_G(\theta)$	$c_K(\theta)$	$c_{\omega^2}(\theta)$
$4e^{-2}\theta^2$	$4e^{-2}\theta^2$	$\frac{3}{4}\theta^2$	θ^2	$\frac{2\pi^2}{27}\theta^2$

Табела 3.5: *Бахадурови локални нагиби за $\mathcal{E}(1+\theta)$ алтернативу.*

У овом случају можемо израчунати по дефиницији $K(\theta, 0) \sim \frac{\theta^2}{2}$ кад $\theta \to 0$. Локалне Бахадурове ефикасности поменутих тестова против алтернативе из експоненцијалне расподеле са параметром скалирања дате су у табели 3.6.

e_D^B	e_V^B	e_G^B	e_K^B	$e_{\omega^2}^B$
0.54	0.54	0.75	1	0.73

Табела 3.6: *Бахадурове локалне ефикасности за $\mathcal{E}(1+\theta)$ алтернативу.*

◇

Резултати претходна 3 примера обједињени су у табели 3.7.

	e_D^B	e_V^B	e_G^B	e_K^B	$e_{\omega^2}^B$
$\mathcal{N}(\theta,1)$	0.64	0.64	0.96	0.81	0.91
$\mathcal{C}(\theta,1)$	0.41	0.41	0.30	0.33	0.38
$\mathcal{E}(1+\theta)$	0.54	0.54	0..75	1	0.73

Табела 3.7: *Бахадурове локалне ефикасности.*

Можемо закључити да не постоји униформно оптимални тест против опште алтернативе, принуђени смо да тестове специјализујемо у односу на проблем.

Ако бисмо интегралну статистику $\omega_{n,1}^2$ посматрали као специјалан случај V-статистике са слабо дегенерисаним језгром $\Phi(s,t) = \frac{1}{2}(s^2+t^2) - \max(s,t) + \frac{1}{3}$ (пример 2.3.5 за $q = 1$), онда би резултати примера 3.2.1 могли да се добију и на следећи начин.

Пример 3.2.4. Нека је F_θ функција расподеле случајне величине са $\mathcal{N}(\theta,1)$ расподелом. Тада је на основу теореме 3.1.2

$$\begin{aligned} c_{\omega^2}(\theta) &\sim \pi^2 \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{2}(s^2+t^2) - \max(s,t) + \frac{1}{3}\right) s\phi(s)\, t\phi(t)\, ds\, dt \cdot \theta^2 \\ &= -\pi^2 \int_{\mathbb{R}^2} \max(s,t) st\, \phi(s)\phi(t)\, ds\, dt \cdot \theta^2 \\ &= \pi^2 \int_{\mathbb{R}} \phi^3(s)\, ds \cdot \theta^2 = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \cdot \theta^2, \end{aligned}$$

кад $\theta \to 0$, што се свакако поклапа са претходним резултатима.

◇

Пример 3.2.5. Нека је Θ_0 скуп свих апсолутно непрекидних функција расподеле F_{θ_0} симетричних око нуле и нека је Θ_1 скуп свих F_θ функција расподеле случајне величине са $\mathcal{N}(\theta,1)$ расподелом. За тестирање нулте хипотезе $H : F \in \Theta_0$ против алтернативе $A : F \in \Theta_1$ користићемо Вилкоксонову једноузорачку статистику W_n, U-статистику са језгром $\Phi_1(s,t) = I\{s+t>0\} - \frac{1}{2}$.

Расподела тест статистике W_n је иста за сваку $F_{\theta_0} \in \Theta_0$, па не умањујући општост можемо претпоставити да је под нултом хипотезом узорак из $\mathcal{N}(0,1)$. Прва пројекција језгра је

$$\psi(s) = E(\Phi_1(X_1,s)) = P(X_1+s>0) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \Phi(s),$$

и $\sigma^2 = \frac{1}{12}$. Дакле језгро је недегенерисано, па ћемо локални Бахадуров нагиб овог теста добити коришћењем теореме 3.1.1, односно имамо да је

$$c_W(\theta) \sim 12 \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2} - \Phi(s) \right) s\phi(s) ds \right)^2 \cdot \theta^2 = \frac{3}{\pi}\theta^2, \text{ кад } \theta \to 0.$$

Може се показати, (видети [2]) да је двоструко Кулбак-Лајблерово растојање алтернативе F_θ до фамилије симетричних расподела Θ_0

$$2K(\theta, \Theta_0) \sim \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(f'_\theta(x,0) - f'_\theta(-x,0))^2}{f(x,0)} dx \cdot \theta^2 = \frac{1}{4} I_1(f) \cdot \theta^2,$$

кад $\theta \to 0$, где смо увели ознаку

$$I_1(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(f'_\theta(x,0) - f'_\theta(-x,0))^2}{f(x,0)} dx.$$

У конкретном случају нормалних алтернатива са локацијским параметром имамо да је $\frac{1}{4} I_1(\phi) = 1$, па добијамо да је Бахадурова локална ефикасност Вилкоксоновог теста против поменутих алтернатива

$$e_W^B = \frac{3}{\pi} \approx 0.96.$$

◊

Пример 3.2.6. Нека је Θ_0, као у претходном примеру, скуп свих апсолутно непрекидних функција расподеле F_{θ_0} симетричних око нуле и нека је Θ_1 скуп Азалинијевих алтернатива нормалне расподеле односно скуп свих F_θ са густином расподеле $f(x, \theta) = 2\phi(x)\Phi(\theta x)$. За тестирање $H : F \in \Theta_0$ против алтернативе $A : F \in \Theta_1$ користићемо Вилкоксонову једноузорачку статистику W_n. Као у претходном примеру, на основу теореме 3.1.1 имамо

$$c_W(\theta) \sim 12 \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2} - \Phi(s) \right) 2\phi(s) \frac{s}{\sqrt{2\pi}} ds \right)^2 \cdot \theta^2 = \frac{6}{\pi^2}\theta^2, \text{ кад } \theta \to 0.$$

Горња граница за Бахадуров нагиб у овом случају је

$$2K(\theta, \Theta_0) \sim \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(2\phi(x)\frac{x}{\sqrt{2\pi}} - 2\phi(-x)\frac{-x}{\sqrt{2\pi}})^2}{\phi(x)} dx \cdot \theta^2 = \frac{2}{\pi} \cdot \theta^2$$

кад $\theta \to 0$, па је локална Бахадурова ефикасност Вилкоксоновог теста против Азалинијевих алтернатива

$$e_W^B = \frac{3}{\pi} \approx 0.96.$$

◊

Литература

[1] R. Serfling, W. Wang; Large deviation results for U- and V-statistics, -empiricals, and -processes, Preprint, Univ. Texas, Dallas, (1997).

[2] Ya. Yu. Nikitin; Asymptotic Efficiency of Nonparametric Tests, Cambridge University Press, (1995).

[3] Ya. Yu. Nikitin, I. Peaucelle; Efficiency and local optimality of nonparametric tests based on U- and V-statistics, METRON - International Journal of Statistics, vol. $LXII$, n. 2, pp. 185-200, (2004).

[4] S. Aki; Some test statistics based on the martingale term of the empirical distribution function. Ann. Inst. Statist. Mathem., 38:1-21, (1986).

[5] R. R. Bahadur; Some Limit Theorems in Statistics, Philadelphia: SIAM, (1971).

[6] P. Hartman; Ordinary Differential Equations, Second Edition, Society for Industrial and Applied Math, (2002).

[7] P. Groeneboom, J. Osterhoff; Bahadur efficiencies and probabilities of large deviations. Statist. Neerdlandica 31: 1-24, (1977).

[8] P. Groeneboom, J. Osterhoff, and F. H. Ruymgaart; Large deviation theorems for empirical probability measures. Ann. Probab. 7: 553-86, (1979).

[9] L. C. Young; Lectures on the Calculus of Variations and Optimal Control Theory. Philadelphia: Saunders, (1969).

[10] Large deviations and Bahadur efficiency of Khmaladze-Aki statistic. Translated from Zapiski Nauchnykh Seminarov Leningradskogo Otdeleniya Matematicheskogo Instituta im. V. A. Steklova Akademii Nauk SSSR, Vol. 184, pp. 227-233, (1990).

[11] Ya. Yu. Nikitin; Large deviations and asymptotic efficiency of statistics of integral type, Part I. Zapiski Nauch. Semin. LOMI 85:175-87 (1979); transl.: J. Soviet Mathem. 20: 2224-31, (1980).

[12] Ya. Yu. Nikitin; Large deviations and asymptotic efficiency of statistics of integral type, Part II. Zapiski Nauch. Semin. LOMI 97:151-75 (1980); transl.: J. Soviet Mathem. 24: 585-603, (1984).

[13] Ya.Yu. Nikitin, E.V. Ponikarov; Rough large deviation asymptotics of Chernoff type for von Mises functionals and U-statistics. In: Proceedings of Saint-Petersburg Mathematical Society, Vol. 7. pp. 124–167 (1999). English translation in AMS Translations, ser. 2, 203:107–146, 2001.

[14] G. T. Bookiya, Ya. Yu. Nikitin; Asymptotic efficiency of new nonparametric symmetry tests for generalized skew alternatives, Zapiski Nauchn. Semin. POMI, 454, 82–101, (2016).

[15] V.V. Litvinova, Y.Y. Nikitin; Two families of normality tests based on Polya-type characterization and their efficiencies, J. Math. Sci. 139(3), 6582-6588, (2006).

[16] V.V. Litvinova, Ya.Yu. Nikitin; Kolmogorov tests of normality based on some variants of Polya characterization, J. Math. Sci., 219, 782–788, (2016).

[17] B. Milošević; Asymptotic efficiency of new exponentiality tests based on a characterization, Metrika, 79, 221–236, (2016).

[18] Milošević, M. Obradović; Characterization based symmetry tests and their asymptotic efficiencies, Stat. Prob. Lett., 119, 155–162, (2016).

[19] B. Milošević, M. Obradović; Two-dimensional Kolmogorov-type goodness-of-fit tests based on characterisations and their asymptotic efficiencies, Journ. Nonparam. Stat., 28, 413–427, (2016).

[20] Ya.Yu. Nikitin; Large deviations of U-empirical Kolmogorov-Smirnov tests, and their efficiency, J. Nonparam. Stat. 22(5), 649–668, (2010).

[21] Y.Y. Nikitin, M. Ahsanullah; New U-empirical tests of symmetry based on extremal order statistics, and their efficiencies, in: Mathematical Statistics and Limit Theorems, Springer International Publishing, pp. 231–248, (2015).

[22] Ya.Yu. Nikitin, K.Yu. Volkova; Asymptotic efficiency of exponentiality tests based on order statistics characterization, Georgian Math. J., 17, 749–763, (2010).

[23] Ya.Yu. Nikitin, K.Yu. Volkova; Exponentiality tests Based on Ahsanullahs characterization and their efficiency, J. Math. Sci., 204, 42–54, (2015).

[24] M. Obradović, M. Jovanović, B. Milošević; Goodness-of-fit tests for Pareto distribution based on a characterization and their asymptotics, Statistics, 49, 1026–1041, (2015).

[25] K.Y. Volkova; On asymptotic efficiency of exponentiality tests based on Rossberg's characterization, J. Math. Sci., 167(4), 486–494, (2010).

[26] K.Y. Volkova, Y.Y. Nikitin; On the asymptotic efficiency of normality tests based on the Shepp property, Vestnik St. Petersburg Univ. Mathematics, 42, 256–261, (2009).

[27] K. Volkova; Goodness-of-fit tests for the Pareto distribution based on its characterization, Stat. Meth. Applic., 25, 1–23, (2015).

[28] K. Volkova; Goodness-of-fit tests for exponentiality based on Yanev-Chakraborty characterization and their efficiencies, Proc. 19th Europ. Young Statisticians Meet., Nagy S., ed., Prague, 156–159, (2015).

[29] K.Y. Volkova, Y.Y. Nikitin; Goodness-of-fit tests for the power function distribution based on the Puri-Rubin characterization and their efficiencies, J. Math. Sci., 199(2), 130–138, (2014).

[30] М. Арсеновић, М. Достанић, Д. Јоцић; Теорија мере, функционална анализа, теорија оператора, Завод за уџбенике, Београд, (2012).

[31] Н. В. Смирнов; Приближение законов распределения случайных величин по эмпирическим данным, Успеџи математических наук, 10: 197-206, (1944).

[32] Я. Ю. Никитин; Бахадуровская эффективность критериев согласия Вацона–Дарлинга, Проблемы теории вероятностных распределений. Ш, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 158, Наука, Ленинград. отд., Л., 138–145, (1987).

[33] В.М. Алексеев, В.М. Тихомиров, С.В. Фомин; Оптимальное управление, Наука. Главная редакция физико-математической литературы, (1979).

[34] М. М. Вайнберг, В. А. Треногин; Теория ветвления решений нелинейных уравнений, Наука, Москва, (1969).

[35] В.А. Треногин; Функциональный анализ, Наука, Москва, (1980).

Биографија аутора

Бранислав Јововић рођен је 25.7.1993. у Београду где је и завршио основну школу „Ђуро Стругар”. Школовање је наставио у Математичкој гимназији у Београду. Основне студије уписао је на Математичком факултету у Београду, смер Статистика, актуарска и финансијска математика, које је завршио 2016. године са просечном оценом 9,83.

Запослен је на Математичком факултету од 2016. године у звању сарадника у настави. Држао је вежбе из 4 предмета: Статистички софтвер 3, Линеарни статистички модели, Стохастички модели у операционим истраживањима, Биостатистика (на Биолошком факултету).

Области његовог интересовања су теорија вероватноће и математичка статистика.