Matematički fakultet
Univerzitet u Beogradu

Kompleksni brojevi i elementarna geometrija

Master rad

Student: Milena Lazović 1063/2015
Mentor: Dr Miodrag Mateljević

Beograd,
2017.

Sadržaj

1 Uvod

Ljudi su matematiku koristili u praksi mnogo pre nego što je formalno postala nauka. Prvi matematički spisi nastali su još u starom Egiptu i Mesopotamiji kada su ljudi premeravali zamljište, utvrđivali položaje zvezda, bavili se gradjevinom i raznim drugim delatnostima. Čovek je spoznao da na nebu sija samo jedno Sunce, da svaki čovek ima dve noge, da neke životinje imaju dve, neke četiri noge. Tako je posmatranjem predmeta u prirodi došao do pojmova koje mi danas apstraktno zovemo: jedan, dva, tri, četiri ...

Izučavajući matematiku u osnovnoj školi sreli smo se sa sledećim skupovima brojeva $\mathbb{N}$ (prirodni brojevi), čijim proširivanjem smo stigli do skupa $\mathbb{Z}$ (celi brojevi). Međutim i skup celih brojeva kasnije smo proširili do skupa $\mathbb{Q}$ (racionalni brojevi). Uvođenjem operacije korenovanja shvatili smo da nam do tada naučeni skupovi brojeva nisu dovoljni, pa smo se upoznali sa brojevima koje smo nazvali iracionalni brojevi i skup ovih brojeva označavali smo slovom $\mathbb{I}$. Skup racionalnih i iracionalnih brojeva zajedno nazivali smo skupom realnih brojeva koji smo označavali slovom $\mathbb{R}$. Međutim i skup realnih brojeva morao je biti proširen zbog nemogućnosti rešavanja nekih jednačina u njemu.

Skup realnih brojeva proširen je do skupa kompleksnih brojeva, kojima ćemo posvetiti malo više pažnje.

Skup kompleksnih brojeva možemo interpretirati kao euklidsku ravan, odnosno, polazeći od teorije kompleksnih brojeva možemo konstruisati model euklidske ravni. Preslikavanja skupa kompleksnih brojeva u skup kompleksnih brojeva tada interpretiramo kao transformacije euklidske ravni. Ispostavlja se da je izuzetno pogodno raditi na taj način. Naime, izometrijske transformacije (translacija, rotacija, osna refleksija), transformacije sličnosti (homotetija) i inverzija zadaju se veoma jednostavnijim formulama. Takođe mnoge značajne teoreme kao što su na primer: O težištu trougla, O centru opisanog kruga trougla, O ortocentru trougla, O Ojlerovoj pravoj se jednostavno iskazuju i dokazuju uz korišćenje kompleksnih brojeva. Interesantan je i dokaz stava koji tvrdi da se inverzijom uopštene kružnice slikaju u uopštene kružnice.

Osim za proučavanje elementarne geometrije kompleksni brojevi su izuzetno pogodni i za proučavanje hiperboličke geometrije (na primer Poenkareovog disk modela i Poenkareovog poluravanskog modela).

2 Skup kompleksnih brojeva

Kao što smo već napomenuli, skup kompleksnih brojeva nastao je proširivanjem skupa realnih brojeva. Iako nam se iz današnje perspektive čini da su kompleksni brojevi uvedeni za potrebe rešavanja kvadratne jednačine, to nije tačno. U vreme kada su otkriveni kompleksni brojevi kvadratna jednačina je bila poznata već više od 3000 godina, i za rešavanje kvadratne jednačine bilo je dovoljno znati da može imati dva, jedno ili nijedno rešenje.

Razlog za otkriće kompleksnih brojeva bio je rešavanje kubne jednačine. Ovde se kompleksni brojevi nikako nisu mogli zaobići. Opštu algebarsku jenačinu trećeg stepena

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

rešio je Scipio del Fero koji je bio student i profesor Univerziteta u Bolonji. Nezavisno od njega kubnu jednačinu uspeo je da reši i Nikolo Fontana Tartalja koji je svoj metod rešavanja držao u tajnosti sve do 1539. godine kada tajnu otkriva italijanskom matematičaru Đirolamu Kardanu. Kardano par godina kasnije objavljuje delo pod nazivom Ars magna (Velika veština) u kome objavljuje formule za rešavanje kubne jednačine, zbog čega se i danas formule za rešavanje takve jednačine nazivaju Kardanove formule.

Kompleksni brojevi u matematici dovedeni su u ravnopravan položaj sa realnim brojevima, pri čemu su Abraham de Moivre i Leonhard Euler posebno zaslužni.

Kasnije su kompleksni brojevi povezani sa geometrijom u čemu posebnu zaslugu ima matematičar Carl Friedrich Gauss.

2.1 Imaginarna jedinica

Posmatrajmo jednačinu $x^2 + 1 = 0$.
Ova jednačina nema rešenja u skupu realnih brojeva, tj. ne postoji realan broj x takav da je $x^2 = -1$. Uvodimo imaginarnu jedninicu i za koji važi

$$i^2 = -1.$$

Broj i (imaginarna jedinica) ima osnovnu ulogu u opisivanji našeg novog skupa kompleksnih brojeva.

2.1.1 Recipročna vrednost imaginarne jedinice

$$\frac{1}{i} = \frac{1}{i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$$

2.1.2 Stepeni imaginarne jedinice

Veoma je bitno znati da se vrednosti stepena imaginarne jedinice ciklično ponavljaju.

$$\begin{gathered}\dots\\ i^{-3}=i\\ i^{-2}=-1\\ i^{-1}=-i\\ i^{0}=1\\ i^{1}=i\\ i^{2}=-1\\ i^{3}=-i\\ i^{4}=1\\ \dots\end{gathered}$$

Pa na osnovu ovoga za bilo koji ceo broj n znamo da je

$$\begin{gathered}i^{4n}=1\\ i^{4n+1}=i\\ i^{4n+2}=-1\\ i^{4n+3}=-i.\end{gathered}$$

2.2 Imaginaran broj

U skupu kompleksnih brojeva definisane su operacije sabiranja i množenja. Umnožak bilo kog realnog broja x i imaginarne jedinice i jeste kompleksan broj (pri čemu važi $x \neq 0$). Ovakve kompleksne brojeve nazivamo imaginarnim brojevima.

Za svaki imaginaran broj xi važi da je njegov kvadrat negativan realan broj.

2.3 Kompleksan broj - algebarski zapis

Kompleksan broj je zbir realnog i imaginarnog broja. Odavde vidimo da je svaki realan broj x ujedno i kompleksan broj jer se može napisati u obliku $x + 0 \cdot i$, a takođe svaki imaginaran broj yi je ujedno i kompleksan broj jer se može zapisati kao $0 + yi$.

Kompleksan broj obično označavamo slovom z i predstavljamo ga u obliku $z = x + yi$, gde je x realan broj, a yi imaginaran broj. Ovakav prikaz kompleksnog broja naziva se algebarski prikaz. U ovakvom zapisu kompleksnog broja x i y predstavljaju realne brojeve i imaju svoje nazive. Broj x je realni deo kompleksnog broja z, a broj y je imaginaran deo kompleksnog broja z, što se može zapisati na sledeći način.

$$x = \operatorname{Re} z, \qquad y = \operatorname{Im} z.$$

Dva kompleksna broja jednaka su kada su im jednaki i realni i imaginarni delovi, tj.

$$z_1 = z_2 \text{ ako važi } x_1 = x_2 \text{ i } y_1 = y_2.$$

Skup kompleksnih brojeva označavamo sa $\mathbb{C}$.

$$\mathbb{C} = \{x + yi : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

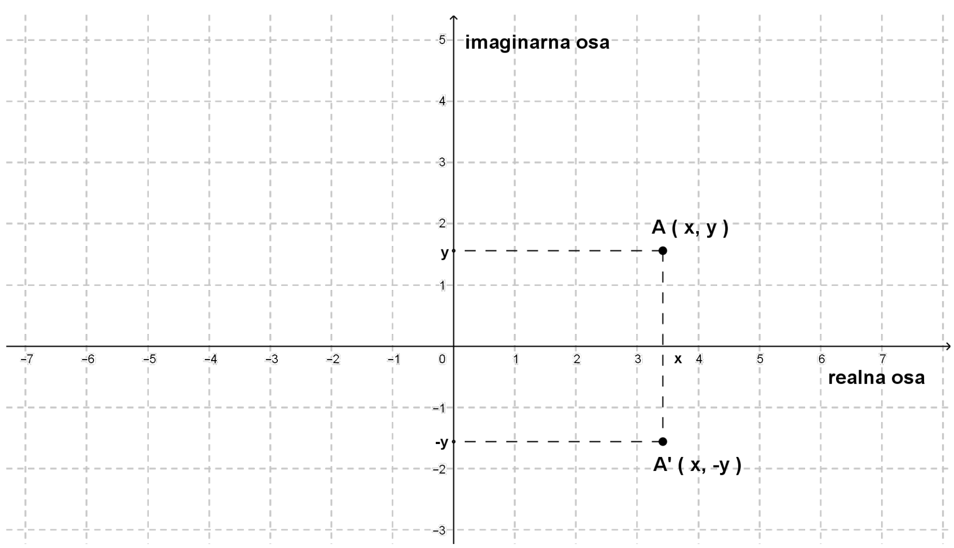
2.3.1 Konjugovano kompleksan broj

Konjugovano kompleksni broj broja $z = x + yi$ jeste broj $\bar{z} = x - yi$, tj. kompleksni broj, koji se od datog broja razlikuje samo po znaku imaginarnog dela. Par kompleksnih brojeva z i $\bar{z}$ nazivamo parom kompleksno konjugovanih brojeva. Primetimo da za konjugovano kompleksni broj broja z važi:

$$\bar{\bar{z}} = \overline{x - yi} = x + yi = z.$$

Kompleksne brojeve moguće je predstaviti u koordinatnom sistemu xOy, pri čemu se x osa koordinatnog sistema naziva realna osa u $\mathbb{C}$, a y osa imaginarna osa u $\mathbb{C}$. Prema tome svakom kompleksnom broju odgovaraće tačno jedna tačka koordinatnog sistema. Svi realni brojevi biće smešteni na realnoj osi, dok će svi imaginarni brojevi biti smešteni na imaginarnoj osi.

Kompleksnom broju $z = x + yi$ odgovaraće tačka $A = (x, y)$ pri čemu je (x, y) uređen par realnih brojeva $x = \operatorname{Re} z$ i $y = \operatorname{Im} z$, dok će konjugovano kompleksnom broju $\bar{z} = x - yi$ odgovarati tačka $A' = (x, -y)$. (slika 1)



Slika 1: Kompleksno konjugovani brojevi

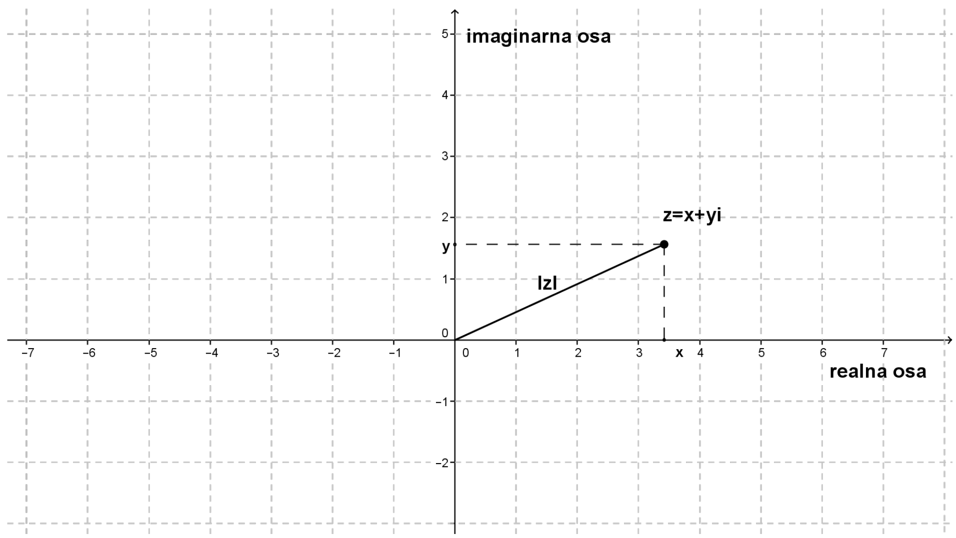
Kao što se vidi sa slike 1 konjugovano kompleksni broj A' dobijamo osnom simetrijom broja A u odnosu na realnu osu.

2.3.2 Moduo kompleksnog broja

Definicija 1. *Moduo kompleksnog broja z označavamo sa $|z|$ i to je nenegativan realan broj*

$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}.$$

Primećujemo da moduo kompleksnog broja nije ništa drugo do rastojanje kompleksnog broja u kompleksnoj ravni od tačke $O = (0, 0)$. (slika 2)



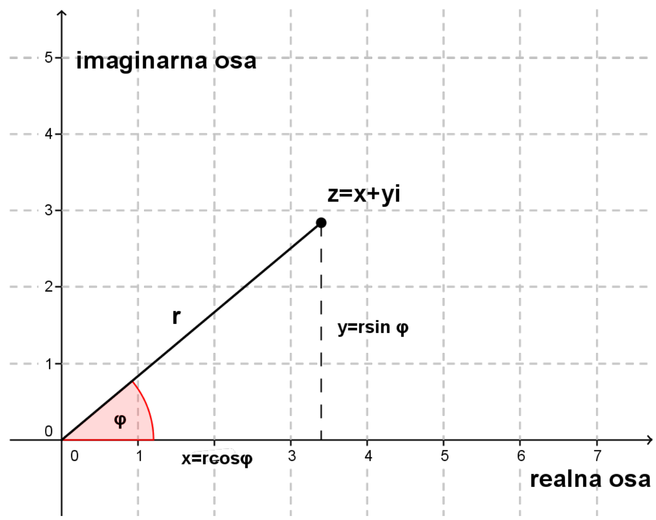
Slika 2: Moduo kompleksnog broja

2.4 Trigonometrijski oblik kompleksnog broja

Proširivanje skupova brojeva dešavalo se postepeno. Uzrok tome bilo je to što neke algebarske operacije nisu mogle biti izvršene u odredjenom skupu. Tako smo skup prirodnih brojeva proširili do skupa celih brojeva jer skup $\mathbb{N}$ nije bio zatvoren za operaciju oduzimanja, skup $\mathbb{Z}$ proširili smo do skupa $\mathbb{Q}$ jer nije bio zatvoren za operaciju deljenja. Susrećući se sa raznim problemima došli smo do skupa kompleksnih brojeva ($\mathbb{C}$). Do skupa $\mathbb{C}$ došli smo proširivanjem skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. U skupu $\mathbb{R}$ nismo mogli da nadjemo koren iz svakog realnog broja, tj. ovaj skup nije bio zatvoren za korenovanje. U skupu $\mathbb{C}$ moguće je naći koren svakog kompleksnog broja, štaviše važi da jednačina $z^n = a$ pri čemu je n zadati priridan broj, a zadati kompleksan broj različit od nule i z nepoznata, ima tačno n rešenja.

Za određivanje korena kompleksnog broja pogodno je koristiti trigonometrijski zapis kompleksnog broja.

Predstavimo najpre neki kompleksan broj z u kompleksnoj ravni. (slika 3)



Slika 3: Prikaz kompleksnog broja u kompleksnoj ravni

Na slici 3 prikazan je kompleksan broj $z = x + yi$. Duž koja spaja tačku $O(0, 0)$ sa tačkom koja odgovara broju z označena je slovom r. Dužina ove duži r jednaka je rastojanju broja z od koordinatnog početka, tj. modulu kompleksnog broja z. Na ovoj slici obeležen je još i ugao φ koji ova duž određuje sa pozitivnim delom realne ose kompleksne ravni.

Primećujemo da se svaki kompleksan broj jednoznačno može predstaviti pomoću ove dve vrednosti (rastojanja r od koordinatnog početka i ugla φ).

Pritom se r i φ nazivaju polarne koordinate kompleksnog broja z.

Uočimo na slici 3 pravougli trougao čije su stranice r, x i y. Posmatrajući ovaj trougao možemo odgovarajućim formulama povezati vrednosti x, y, r i φ.

Znajući da je sinus nekog ugla u pravouglom trouglu odnos naspramne katete i hipotenuze imamo vezu $\sin\varphi = \dfrac{y}{r}$.
Slično kosinus ugla u pravouglom trouglu jeste odnos nalegle katete i hipotenuze odakle imamo vezu $\cos\varphi = \dfrac{x}{r}$.
Odavde promenljive x i y možemo izraziti pomoću polarnih koordinata r i φ

$$x = r \cdot \cos\varphi, \qquad y = r \cdot \sin\varphi. \tag{1}$$

Ako sada kompleksan broj $z = x + yi$ zapišemo zamenjujući promenljive x i y jednakostima (1) dobićemo:

$$z = x + yi = r \cdot \cos\varphi + r \cdot \sin\varphi \cdot i = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi).$$

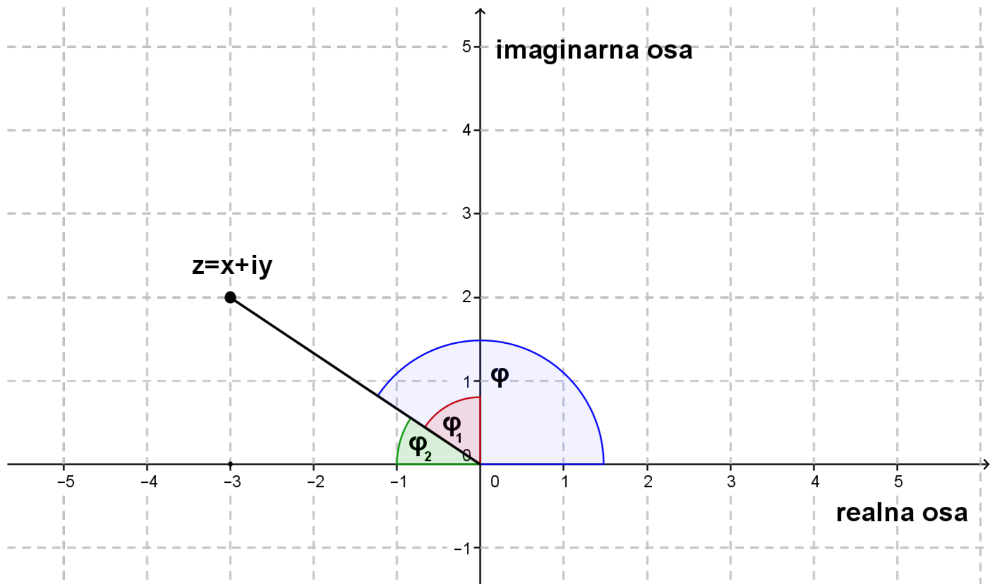
Da bismo kompleksan broj $z = x + yi$ preveli iz algebarskog zapisa u trigonometrijski moramo voditi računa o tome u kom kvadrantu se broj z nalazi. Rastojanje broja z do koordinatnog početka računaćemo po već poznatoj formuli $r = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}$, tj. $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, dok za izračunavanje argumenta moramo razlikovati slučajeve kada je kompleksan broj z u prvom, zatim u drugom, pa u trećem i četvrtom kvadrantu:

- ako je
$$x > 0, \qquad y > 0$$
kompleksan broj z nalazi se u prvom kvadrantu i tada vrednost njegovog argumenta φ dobijamo pomoću formule $\varphi = \arctan\dfrac{y}{x}$.

- u slučaju da je

$$x < 0, \qquad y > 0$$

izračunavanje vrednosti argumenta φ biće za nijansu komplikovanije. Naime, naš kompleksan broj z je u tom slučaju u drugom kvadrantu (slika 4).



Slika 4: Argument kompleksnog broja iz drugog kvadranta

Ako sa φ_1 označimo ugao čija je vrednost jednaka razlici traženog ugla φ i pravog ugla, a sa φ_2 označimo ugao suplementan uglu φ dobićemo:

$$\varphi_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \qquad \varphi = \frac{\pi}{2} + \varphi_1$$

$$\tan \varphi_1 = \frac{|x|}{y} = -\frac{x}{y}$$

$$\varphi_1 = \arctan\left(-\frac{x}{y}\right)$$

odakle za argument φ dobijamo da je

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \arctan\left(-\frac{x}{y}\right)$$

kako je arctan neparna funkcija dalje sledi da je

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{x}{y}$$

Za izračunavanje argumenta φ možemo koristiti i njegov suplementan ugao koji smo označili sa φ_2. U tom slučaju bi važilo:

$$\varphi_2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \qquad \varphi = \pi - \varphi_2$$

$$\tan \varphi_2 = \frac{y}{|x|} = -\frac{y}{x}$$

$$\varphi_2 = \arctan\left(-\frac{y}{x}\right)$$

odakle za argument φ dobijamo da je

$$\varphi = \pi - \arctan\left(-\frac{y}{x}\right)$$

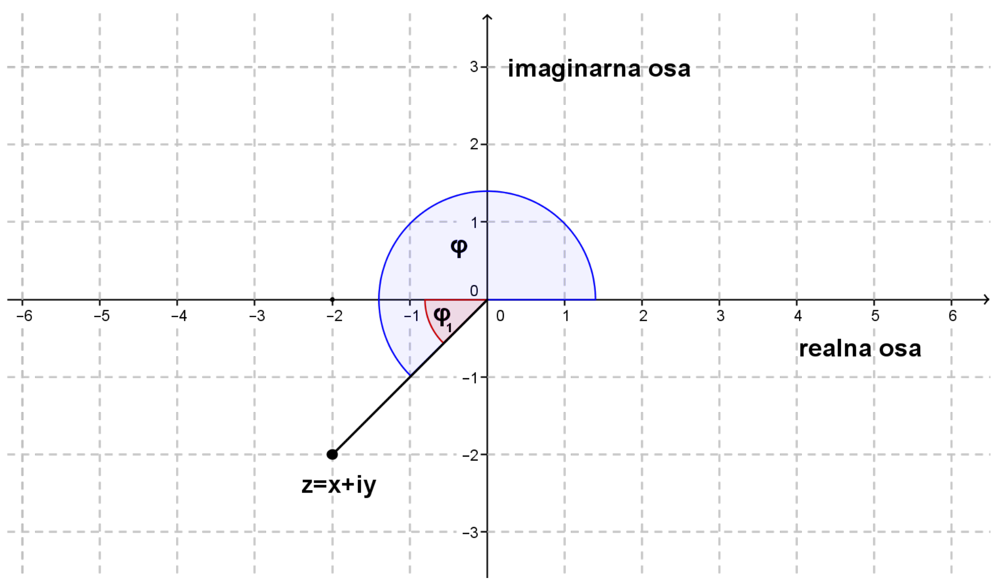
kako je arctan neparna funkcija dalje sledi da je

$$\varphi = \pi + \arctan\frac{y}{x}$$

- u slučaju da je

$$x < 0, \qquad y < 0$$

kompleksan broj z nalazi se u trećem kvadrantu (slika 5)



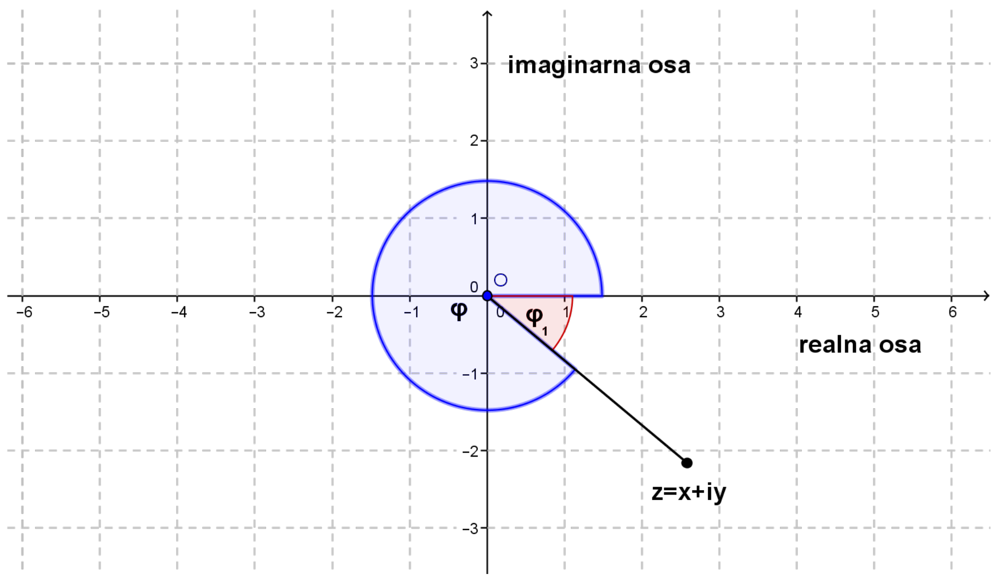
Slika 5: Argument kompleksnog broja iz trećeg kvadranta

Ako sa φ_1 označimo ugao čija je vrednost jednaka razlici traženog ugla φ i opruženog ugla dobićemo da je:

$$\varphi_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \qquad \varphi = \pi + \varphi_1$$

$$\tan \varphi_1 = \frac{|y|}{|x|} = \frac{-y}{-x} = \frac{y}{x}$$
$$\varphi_1 = \arctan \frac{y}{x}$$
odakle za argument φ dobijamo da je
$$\varphi = \pi + \arctan \frac{y}{x}$$

- ako je
$$x > 0, \qquad y < 0$$
i tada znamo da broj z pripada četvrtom kvadrantu (slika 6)



Slika 6: Argument kompleksnog broja iz četvrtog kvadranta

Ako sa φ_1 označimo ugao čija je vrednost jednaka razlici punog ugla i traženog ugla φ dobićemo da je:
$$\varphi_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \qquad \varphi = 2\pi - \varphi_1$$
$$\tan \varphi_1 = \frac{|y|}{x} = \frac{-y}{x} = \left(-\frac{y}{x}\right)$$
$$\varphi_1 = \arctan \left(-\frac{y}{x}\right)$$
odakle kako znamo da je arctan neparna funkcija za argument φ dobijamo da je
$$\varphi = 2\pi + \arctan \frac{y}{x}$$

- Za $y = 0$ argument uzima vrednosti 0 ili π u zavisnosti od toga da li je x pozitivno ili negativno. Ako je $x > 0$ onda je $\varphi = 0$, a ako je $x < 0$ onda je $\varphi = \pi$.

  Za $x = 0$ argument uzima vrednosti $\dfrac{\pi}{2}$ ili $\dfrac{3\pi}{2}$ u zavisnosti od toga da li je y pozitivno ili negativno. Ako je $y > 0$ onda je $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, a ako je $y < 0$ onda je $\varphi = \dfrac{3\pi}{2}$.

Zadatak 1. *Kompleksni broj* $z = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ *zapisati u trigonometrijskom obliku.*

Rešenje. Odredimo prvo šta je realni, a šta imaginarni deo ovog kompleksnog broja. Realni deo je $\operatorname{Re} z = \sqrt{2}$, primećujemo da je $\operatorname{Re} z > 0$, dok je $\operatorname{Im} z = -\sqrt{2}$ i važi da je $\operatorname{Im} z < 0$. Kada bismo ovaj broj predstavili u kompleksnoj ravni on bi se nalazio u četvrtom kvadrantu, što će nam pomoći pri određivanju argumenta. Izračunajmo najpre moduo i argument ovog kompleksnog broja

$$r = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\tan\varphi = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1 \quad \text{sledi} \quad \varphi = \frac{7\pi}{4}.$$

Sada kompleksni broj $z = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ dobija svoj trigonometrijski oblik:

$$z = 2 \cdot \left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right).$$

$\triangle$

Zadatak 2. *Kompleksni broj* $z = 5$ *zapisati u trigonometrijskom obliku.*

Rešenje. Kod kompleksnog broja $z = 5$ primećujemo da je $\operatorname{Re} z = 5$ i $\operatorname{Re} z > 0$, a $\operatorname{Im} z = 0$. Odakle zaključujemo da je njegovo mesto u kompleksnoj ravni na realnoj osi i to na pozitivnom delu realne ose.
Izračunajmo moduo i argument kompleksnog broja $z = 5$:

$$r = \sqrt{5^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\tan\varphi = \frac{0}{5} = 0 \quad \text{sledi} \quad \varphi = 0.$$

Zato je

$$z = 5 \cdot (\cos 0 + i \cdot \sin 0).$$

$\triangle$

Komentar: U slučaju da je i realni deo broja z bio jednak 0, tj. da je $z = 0$ važilo bi $r = 0$, dok argument φ ne bi imao svoju vrednost.

2.5 Eksponencijalni oblik kompleksnog broja

Za svako $\varphi \in \mathbb{R}$ važi
$$e^{\varphi i} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$
Navedena formula naziva se Ojlerova formula, ona povezuje trigonometrijske funkcije sa kompleksnim eksponencijalnim funkcijama.
Poznavajući Tejlorove razvoje trigonometrijskih funkcija $\sin\varphi$ i $\cos\varphi$, kao i eksponencijalne funkcije $e^{i\varphi}$ pokazaćemo da važi
$$z = |z|e^{i\varphi}.$$
Tejlorovi razvoji pomenutih funkcija su:
$$\sin\varphi = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\varphi^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \varphi \in \mathbb{R}$$
$$\cos\varphi = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\varphi^{2n}}{(2n)!}, \qquad \varphi \in \mathbb{R}$$
$$e^{i\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^n}{n!}, \qquad \varphi \in \mathbb{R}.$$
Uzimajući u obzir periodično ponavljanje stepena imaginarne jedinice i zamenom Tejlorovih razvoja za funkcije sinus i kosinus u Tejlorov razvoj za eksponencijalnu funkciju dobićemo baš Ojlerovu formulu $e^{\varphi i} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.
Kako je:
$$(i\varphi)^{2k} = i^{2k}\varphi^{2k} = (-1)^k\varphi^{2k}$$
i
$$(i\varphi)^{2k+1} = i^{2k+1}\varphi^{2k+1} = i(-1)^k\varphi^{2k+1},$$
nalazi se
$$e^{i\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\varphi^{2n}}{2n!} + i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\varphi^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$
Dalje poznavajući trigonometrijski oblik kompleksnog broja
$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$
i zamenom $\cos\varphi + i\sin\varphi$ sa $e^{i\varphi}$ dobijamo
$$z = |z|e^{i\varphi}.$$
Ovakav zapis kompleksnog broja z naziva se eksponencijalni zapis i od posebnog je značja jer je izvršavanje nekih računskih operacija znatno lakše kada su brojevi prikazani u eksponencijalnom obliku.

3 Osnovne operacije u skupu $\mathbb{C}$

3.1 Sabiranje i oduzimanje kompleksnih brojeva

Sabiranje ili oduzimanje kompleksnih brojeva najlakše je izvršiti ako su brojevi zadati u algebarskom obliku. Skup $\mathbb{C}$ je zatvoren za ove operacije, tj. rezultat sabiranja ili oduzimanja dva ili više kompleksnih brojeva biće ponovo kompleksan broj.
Ako su $z_1 = x_1 + y_1 i$ i $z_1 = x_2 + y_2 i$ $(x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R})$ bilo koji kompleksni brojevi onda se njihov zbir, odnosno njihova razlika računaju na sledeći način:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = x_1 + y_1 i + x_2 + y_2 i \\ &= (x_1 + x_2) + (y_1 i + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= (x_1 + y_1 i) - (x_2 + y_2 i) = x_1 + y_1 i - x_2 - y_2 i \\ &= (x_1 - x_2) + (y_1 i - y_2 i) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) i \end{aligned}$$

Dakle, rezultat sabiranja (oduzimanja) dva kompleksna broja je kompleksan broj čiji je realni deo jednak ziru (razlici) realnih delova kompleksnih brojeva koje sabiramo (oduzimamo), a imaginarni deo jednak zbiru (razlici) imaginarnih delova kompleksnih brojeva koje sabiramo (oduzimamo).

3.2 Množenje kompleksnih brojeva

Jedan od lakših načina da pomnožimo dva kompleksna broja jeste da ih predstavimo u trigonometrijskom obliku, a zatim izvršimo množenje.
Neka su z_1 i z_2 dva kompleksna broja zadata u trigonometrijskom obliku.

$$z_1 = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1)$$

$$z_2 = r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2)$$

Oslobađajući se zagrada množenjem odgovarajućih članova i koristeći adicione formule dobijamo sledeće:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \cdot (\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \cdot (\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + i \cdot (\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cos\varphi_2))$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Dakle kompleksne brojeve u trigonometrijskom obliku množimo tako što im module pomnožimo, a argumente saberemo, pa je moduo proizvoda $r_1 \cdot r_2$, a argument $\varphi_1 + \varphi_2$.

Zadatak 3. *Izračunaj proizvod kompleksnog broja* $z_1 = 2\sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + i \cdot \sin\frac{\pi}{2}\right)$ *i* $z_2 = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right)$.

Rešenje.

$$z_1 \cdot z_2 = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + i \cdot \sin\frac{\pi}{2}\right)\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$z_1 \cdot z_2 = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{4} + i \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$z_1 \cdot z_2 = 4 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$z_1 \cdot z_2 = 4 \cdot \left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

△

3.3 Deljenje kompleksnih brojeva

Prvo ćemo odrediti trigonometrijski oblik broja $\frac{1}{z}$, $z \neq 0$ gde je

$$z = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$

.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi} \cdot \frac{\cos\varphi - i \cdot \sin\varphi}{\cos\varphi - i \cdot \sin\varphi}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\cos\varphi - i \cdot \sin\varphi}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = \frac{1}{r} \cdot (\cos(-\varphi) + i \cdot \sin(-\varphi)).$$

Primećujemo da je moduo broja $\frac{1}{z}$ jednak $\frac{1}{r}$, a argument broja $\frac{1}{z}$ je $-Arg(z)$, gde $Arg(z)$ označava višeznačnu funkciju.

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{r}, \qquad Arg\left(\frac{1}{z}\right) = -Arg(z).$$

Sada koristeći znanja o množenju kompleksnih brojeva u trigonometrijskom obliku možemo deljenje da shvatimo kao množenje prvog broja sa recipročnom vrednošću drugog, odakle dobijamo:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Dakle količnik dva kompleksna broja u trigomonetrijskom obliku biće kompleksan broj čiji je moduo jednak količniku modula deljenika i delioca, a argument jednak razlici argumenata brojeva koje delimo.

Zadatak 4. *Odredi količnik kompleksnih brojeva* $z_1 = 2\sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + i \cdot \sin\frac{\pi}{2}\right)$ *i* $z_2 = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right)$.

Rešenje.

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right).$$

△

3.4 De Moivreova formula

De Moivreova formula odnosi se na stepenovanje kompleksnog broja. Kompleksan broj je najlakše stepenovati kada je predstavljen u trigonometrijskom obliku. Pošto nam je poznato kako se množe dva kompleksna broja u trigonometijskom obliku biće lako objasniti kako stepenujemo neki broj. Znajući da je

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

znamo da je,

$$z_1 \cdot z_1 = r_1 r_1 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_1) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_1))$$

na sličan način dobijamo i

$$z_1 \cdot z_1 \cdot z_1 = r_1 r_1 r_1 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_1 + \varphi_1) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_1 + \varphi_1))$$

$$\vdots$$

Odakle dobijamo De Moivreovu formulu za stepenovanje kompleksnog broja

$$z = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$

$$z^n = r^n \cdot (\cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi)).$$

Iz De Moivreove formule možemo odrediti šta je moduo, a šta argument stepena nekog broja z.
Dakle za vrednosti modula i argumenta dobijamo:

$$|z^n| = r^n, \qquad \arg(z^n) = n \cdot \arg(z).$$

3.5 Korenovanje kompleksnog broja

Dok realni brojevi nemaju uvek n-ti koren, kod kompleksnih brojeva ovo niije slučaj. Izračunati n-ti koren iz nekog kompleksnog broja z znači pronaći sve kompleksne brojeve w takve da važi $z = w^n$.
N-ti koren kompleksnog broja ima oznaku $\sqrt[n]{z}$.
Neka je broj $z = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ proizvoljan kompleksan broj i neka je $w = p \cdot (\cos\psi + i \cdot \sin\psi)$ kompleksan broj za koji važi $z = w^n$ tada je:

$$r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi) = p^n \cdot (\cos(n\psi) + i \cdot \sin(n\psi))$$

odakle je:

$$p^n = r \quad \text{odnosno} \quad p = \sqrt[n]{r}$$

pa je

$$n\psi = \varphi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad \text{odnosno} \quad \psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}.$$

U formuli $p = \sqrt[n]{r}$ oznaka $\sqrt[n]{r}$ predstavlja realni n-ti koren, jer je r uvek pozitivan broj pošto se radi o rastojanju od koorinatnog početka koje je uvek pozitivno. Iz druge formule bismo na prvi pogled zaključili da ψ ima beskonačno mnogo vrednosti jer k može uzeti bilo koju vrednost iz skupa celih brojeva, međutim ovo nije tačno. Posle određenog vremena ove vrednosti će se ponavljati i formirati isti kompleksni broj. Uzimajući za k vrednosti $0, 1, 2, 3, \ldots, (n-1)$ dobijamo sledeće vrednosti za argument ψ:

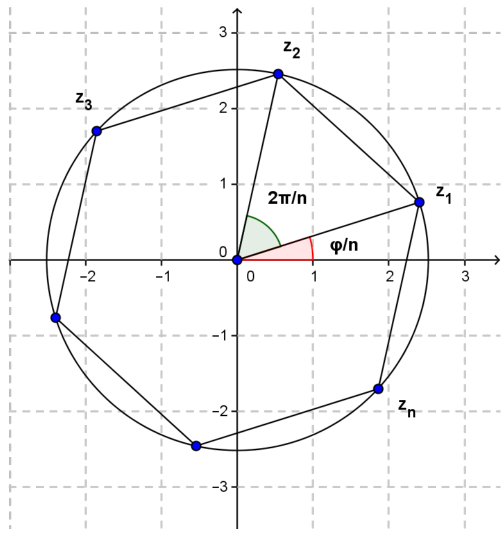
$$\frac{\varphi}{n}, \frac{\varphi + 2\pi}{n}, \frac{\varphi + 4\pi}{n}, \ldots \frac{\varphi + 2(n-1)\pi}{n}.$$

Ukoliko za k uzmemo vrednost veću od $n - 1$ tada za argument ψ dobijamo neku od već navedenih vrednosti.
Odavde zaključujemo da postoji tačno n različitih vrednosti n-tog korena kompleksnog broja z:

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + \sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Ako ih predstavimo u kompleksnoj ravni uočićemo da sve vrednosti korena pripadaju istoj kružnici, jer im je moduo isti, dok se razlikuju samo po argumentu. Argumenti kod svaka dva susedna korena razlikuju se za $\frac{2\pi}{n}$.

Sa slike 7 vidimo da n-ti koreni formiraju pravilan n-tougao čiji centar jeste koordinatni početak.



Slika 7: Koreni kompleksnog broja

4 Geometrijske transformacije kompleksne ravni

4.1 Bilinearna preslikavanja

Ako su a, b, c i d kompleksni brojevi takvi da je $ad - bc \neq 0$, preslikavanje

$$\omega = l(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

nazivamo bilinearno preslikavanje.
Preslikavanje l je preslikavanje iz $\bar{\mathbb{C}}$ u $\bar{\mathbb{C}}$, gde je $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.
Na primer $-\frac{d}{c}$ se preslikava u ∞ i ∞ se preslikava u $\frac{a}{c}$ ako $c \neq 0$.
Bilinearno preslikavanje jednoznačno preslikava $\bar{\mathbb{C}}$ u $\bar{\mathbb{C}}$, štaviše svako bilinearno preslikavanje je kompozicija sledećih preslikavanja:

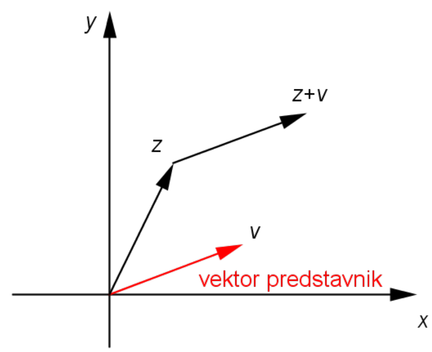
- translacije $T_v(z)$
- rotacije $R_{c,\alpha}(z)$
- homotetije $H_{O,k}(z)$
- inverzije $I(z)$

4.2 Translacija za v

Za dati kompleksan broj $v = p + iq$, funkcija $f_v : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definisana sa

$$f_v(z) = z + v$$

određuje translaciju za radijus vektor tačke v.



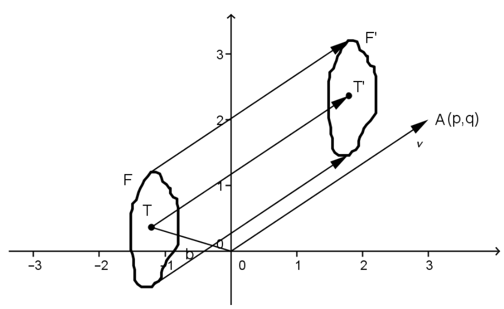
Slika 8: Translacija za vektor položaja tačke v ($T_v(z)$)

Za svaki vektor postoji usmerena duž koja pripada tom vektoru (toj klasi) takva da je njen početak koordinatni početak.

Ako je F neka figura u $z-$ravni svaka tačka te figure će preslikavanjem

$$z \to z + v = z'$$

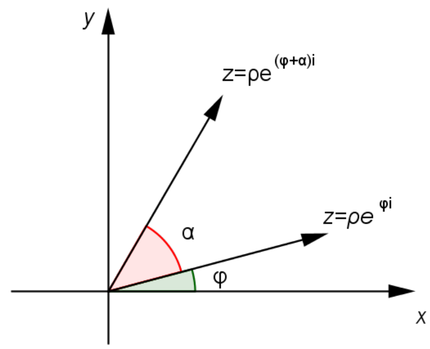
biti translirana za isti vektor, pa će figura F biti preslikana na njoj podudarnu figuru F', dobijenu translacijom za vektor $\overrightarrow{OA}$, gde je $A(p.q)$.



Slika 9: Translacija figure F za vektor v ($T_v(F)$)

4.3 Rotacija oko koordinatnog početka za ugao α

Za dati ugao α, funkcija $f_\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definisana sa $f_\alpha(z) = e^{i\alpha}z$ određuje rotaciju oko koordinatnog početka za ugao α.



Slika 10: Rotacija oko koordinatnog početka za ugao α ($R_\alpha(z)$)

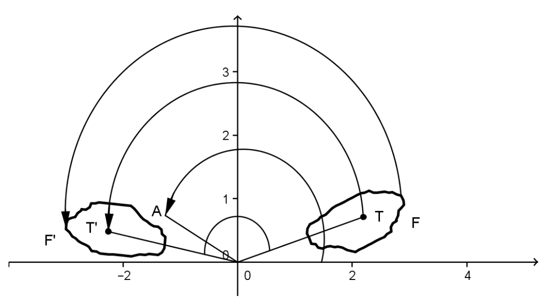
Ma kakav da je kompleksan broj $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, proizvod $z' = e^{i\alpha}z$ je kompleksan broj

$$z' = e^{i\alpha}z = r(\cos(\alpha+\varphi) + i\sin(\alpha+\varphi)).$$

Opet, ako je F figura u $z-$ravni, pri preslikavanju

$$z \to e^{i\alpha}z = z'$$

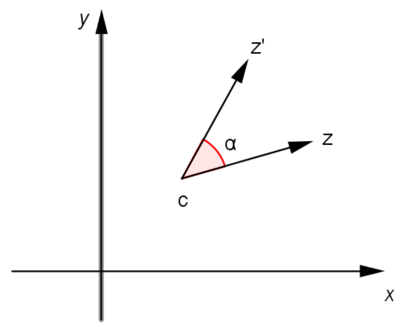
će svaka tačka figure F biti rotirana za isti (orijentisani) ugao, pa će figura F biti preslikana na njoj podudarnu figuru F', dobijenu rotacijom figure F oko O za ugao α (slika 11). I ovo preslikavanje je bijekcija.



Slika 11: Rotacija figure F oko koordinatnog početka za ugao α ($R_\alpha(F)$)

4.4 Rotacija sa centrom c za ugao α

Rotacija oko tačke c je nešto komplikovanija u odnosu na rotaciju oko koordinatnog početka u smislu da se vrši translacija za vektor $-c$ kako bi se rotacija izvršila u koordinatnom početku, a zatim translacija za vektor c kako bismo vratili centar rotacije u početni položaj.
Za dati ugao α i kompleksni broj c preslikavanje $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definisana sa $f(z) = (z-c)e^{i\alpha} + c$ odrađuje u kompleksnoj ravni rotaciju oko tačke c za ugao α.



Slika 12: Rotacija oko tačke c za ugao α $(R_{c,\alpha}(z))$

4.5 Homotetija

Neka je O data tačka i k realan broj različit od 0. Ako se figura F preslikava u F', tako da svakoj tački T figure F odgovara odredjena tačka T' figure F' tada se $OT' = k \cdot OT$ naziva homotetija sa centrom u O i koeficijentom k.

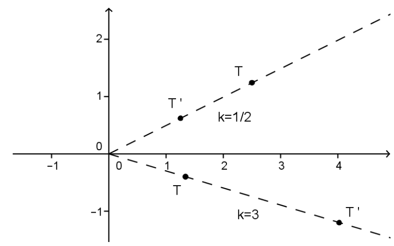
Zapisuje se $H_{O,k}$.
Za ma koji kompleksan broj z, $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$, proizvod $kz = z'$ je kompleksan broj

$$z' = kr(\cos\phi + i\sin\phi).$$

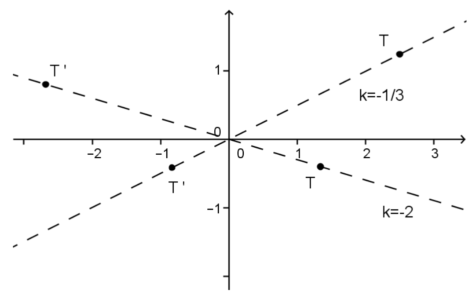
- Ako je $k > 0$, onda je $|z'| = kr$, i tačka T' će pripadati polupravoj OT (slika 13) , pri čemu će tačka T biti između O i T' ako je $k > 1$ ili će tačka T' biti između O i T za $0 < k < 1$.
- Ako je $k = 1$ tačka T preslikava se na samu sebe, tj. $T' \equiv T$.
- Ako je $k < 0$, onda je $|k| = -k$, pa je

  $$z = kr(\cos\phi + i\sin\phi) = |k|r(-\cos\phi - i\sin\phi) = |k|r(\cos(\phi+\pi) + i\sin(\phi+\pi)).$$

  U tom slučaju je $|z'| = |k|r$ i $\phi' = \phi + \pi$, što znači da tačka T' pripada pravoj OT, ali su tačke T i T' sa raznih strana tačke O(slika 14).



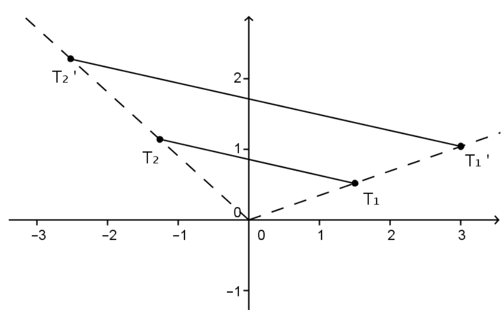
Slika 13: Homotetija sa centrom u tački O i koeficijentom $k > 0$



Slika 14: Homotetija sa centrom u tački O i koeficijentom $k < 0$

- Ako je $k = -1$ u pitanju je centralna simetrija sa centrom u tački O.

Neka je $k \in \mathbb{R}^+$ bez umanjenja opštosti i neka su z_1 i z_2 proizvoljni kompleksni brojevi, a T_1 i T_2 njima odgovarajuće tačke u $z-$ravni. Neka tačke T_1' i T_2' odgovaraju kompleksnim brojevima $z_1' = kz_1$ i $z_2' = kz_2$ (slika 15).
Trouglovi ΔOT_1T_2 i $\Delta OT_1'T_2'$ su slični:
$\measuredangle O$ je zajednički, $|OT_1'| : |OT_1| = |OT_2'| : |OT_2'| = k$, pa je i $|T_1'T_2'| : |T_1T_2| = k$, odnosno $|T_1'T_2'| = k|T_1T_2|$.



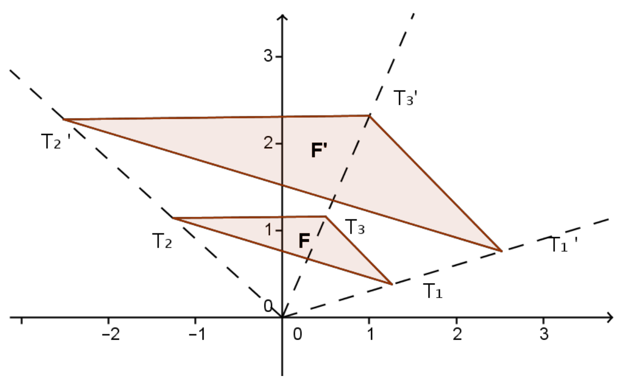
Slika 15: Homotetija duži T_1T_2

Neka je F figura u $z-$ravni. Pri preslikavanju

$$z \to z' = kz, \qquad (k \in \mathbb{R}^+),$$

za svake dve tačke važi da se rastojanje između slika dobija množenjem rastojanja između originala sa k. Na taj način slika F' figure F biće homotetična slika figure F sa faktorom homotetije k (slika 16).

Ako je $k < 0$ homotetija sa faktorom $|k|$ komponuje se sa centralnom simetrijom sa centrom simetrije u koordinatnom početku.



Slika 16: Homotetija figure F

Još neke osobine homotetije:

- Homotetija ne menja raspored tačaka prave.
- Homotetija preslikava ugao u podudaran ugao sa paralelnim kracima.
- Kompozicija dve homotetije je homotetija.
- Akoje $k \neq 1$ jedina fiksna tačka homotetije je njen centar.
- Homotetija svaku pravu preslikava u njoj paralelnu pravu.
- Svake dve paralelne prave su homotetične.
- Jedine invarijantne prave homotetije (za $k \neq 1$) su one koje sadrže centar homotetije.
- Homotetija $H_{O,k}$ u ravni je direktna transformacija.
- Homotetija preslikava krug u krug (svaka dva kruga su homotetična).

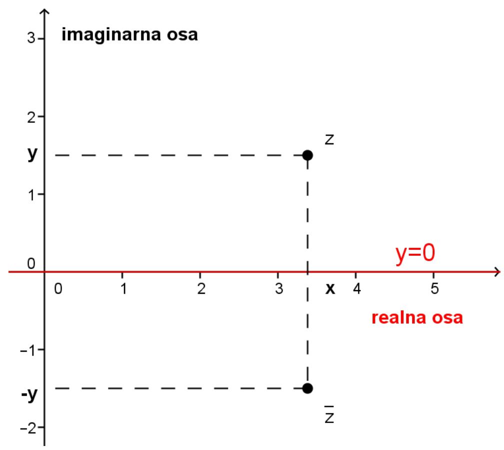
Homotetija je bijekcija, jednoznačno je određena svojim centrom i koeficijentom. Ona održava sličnost, raspored tačaka, paralelnost, jednakost uglova, a ne održava dužinu - nije izometrija.

4.6 Refleksija u odnosu na pravu p

Razlikovaćemo nekoliko položaja prave u odnosu na koju vršimo refleksiju

- $y = 0$

  Tada je refleksija u odnosu na pravu koja predstavlja realnu osu $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definisana na sledeći način:
$$f(z) = \bar{z}.$$



Slika 17: Refleksija u odnosu na pravu $y = 0$

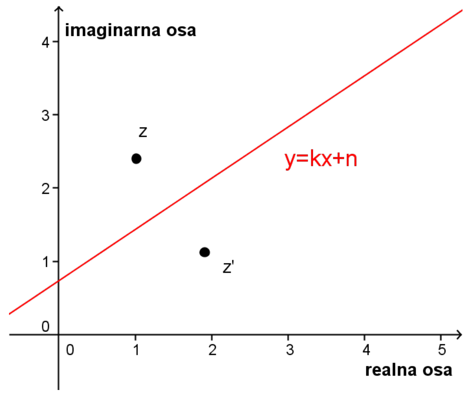
- $y = kx + n$

  Prilikom ove refleksije potrebno je pravu translirati za vektor $-n$ kako bi ona prolazila kroz koordinatni početak, zatim je moramo rotirati za ugao $-\arctan k$ kako bi se poklopila sa realnom osom. Konjugovanjem vršimo refleksiju u odnosu na realnu osu kao u prethodnom slučaju, a onda vraćamo pravu u prvobitan položaj, tj. rotiramo je za ugao $\arctan k$ i transliramo za vektor n.

  Tada je opisano preslikavanje $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definisano na sledeći način
$$f(z) = \overline{(z-n)e^{-i\arctan k}}e^{i\arctan k} + n.$$

- $x = 0$

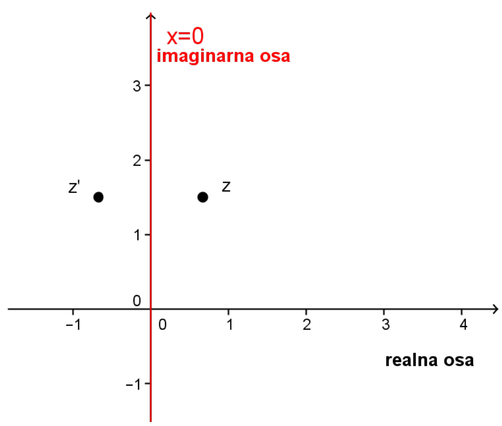
  Refleksiju u odnosu na imaginarnu osu izvršićemo tako što ćemo prvo zarotirati pravu $x = 0$ za ugao $-\dfrac{\pi}{2}$ kako bi se poklopila sa realnom osom, zatim ćemo konjugovanjem izvršiti refleksiju i rotacijom za ugao $\dfrac{\pi}{2}$ vratiti



Slika 18: Refleksija u odnosu na pravu $y = kx + n$

se u početni položaj.
Tada je opisano preslikavanje $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definisano na sledeći način

$$f(z) = \overline{ze^{-i\frac{\pi}{2}}}e^{i\frac{\pi}{2}} = \bar{z}e^{i\pi} = -\bar{z}$$

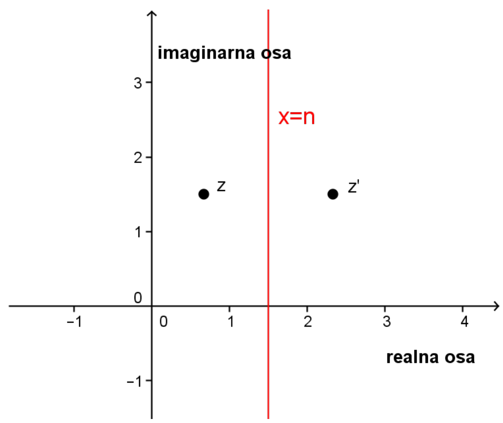


Slika 19: Refleksija u odnosu na pravu $x = 0$

- $x = n$
  Da bismo izvršili refleksiju u odnosu na pravu $x = n$ poretbno je transli- rati je za vektor $-n$ kako bi se poklopila sa imaginarnom osom $x = 0$. Zatim ćemo kao u prethodnom slučaju izvršiti rotaciju za ugao $-\dfrac{\pi}{2}$ kako

bi se poklopila sa realnom osom, konjugovanjem ćemo izvršiti refleksiju i rotacijom za ugao $\frac{\pi}{2}$ vratiti se u položaj $x = 0$. Preostala je još translacija za vektor n kako bismo pravu u odnosu na koju se vrši refleksija doveli u početni položaj, a ujedno i sve ostale tačke kompleksne ravni.
Tada je opisano preslikavanje $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definisano na sledeći način

$$f(z) = \overline{(z-n)e^{-i\frac{\pi}{2}}}e^{i\frac{\pi}{2}} + n$$



Slika 20: Refleksija u odnosu na pravu $x = n$

4.7 Inverzija u odnosu na krug

Neka je k krug čiji je centar tačks O a poluprečnik r. Tada preslikavanje kojim se svakoj tački z različitoj od O pridružuje tačka ω poluprave Oz, takva da je:

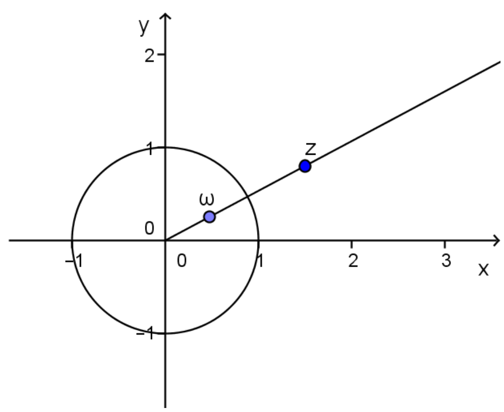
$$Oz \cdot O\omega = r^2$$

zovemo inverzijom ravni u odnosu na krug k. Pri tom je k krug inverzije, tačka O je centar inverzije, a r je poluprečnik inverzije.

Inverzija je bijektivno preslikavanje definisano na ravni $\mathbb{C}$ bez O. Ako je tačka ω inverzna tački z, tada je i tačka z inverzna tački ω, pa je, stoga, inverzija involucija.

Inverzija u odnosu na krug je preslikavanje ravni koje dati krug preslikava na sebe, dok unutrašnjost kruga slika u njegovu spoljašnjost i obrnuto. Inverzija slika prave i krugove te ravni opet u prave i krugove. Naime, ako objekat koji preslikavamo sadrži centar inverzije (centar kruga), tada se on slika u pravu, u suprotnom se slika u krug.

Izvedimo najpre formulu za inverziju u odnosu na jediničnu kružnicu $|z| = 1$, tj. razmotrimio slučaj kada je $r = 1$.



Slika 21: Inverzija u odnosu na jediničnu kružnicu

Kako je centar inverzije koordinatni početak, to je rastojanje od tačke z do centra jednako $|z|$. Neka je ω slika tačke z pri inverziji tada je sa $|\omega|$ označeno rastojanje od tačke ω do centra inverzije. Tj.

$$|z| \cdot |\omega| = 1^2$$

odakle dobijamo

$$|\omega| = \frac{1}{|z|}.$$

Kako se z i ω nalaze na istoj polupravoj to je $\arg z = \arg \omega$, pa iz eksponencijalnog zapisa brojeva z i ω dobijamo:

$$\omega = |\omega| e^{i \arg \omega} = \frac{1}{|z|} e^{i \arg z} = \frac{|z| e^{i \arg z}}{|z|^2} = \frac{z}{z \cdot \bar{z}} = \frac{1}{\bar{z}}.$$

Dakle dobili smo da je inverzija u odnosu na jediničnu kružnicu preslikavanje $z \to \frac{1}{\bar{z}}$, tj.

$$\omega(z) = \frac{1}{\bar{z}}.$$

4.7.1 Uopštena kružnica

Uopštena kružnica jeste kružnica ili prava.
Jednačine prave i kružnice u Euklidskoj ravni zadate su na sledeći način:

- Neka su $a, b, c \in \mathbb{R}$ i $a^2 + b^2 \neq 0$ jednačina prave p je
$$p = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 | ax + by + c = 0 \right\}$$
- Jednačina kružnice čiji je centar tačka $c = (a, b)$, a poluprečnik r, $r > 0$ je
$$k = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \right\}$$

Naš sledeći zadatak jeste da jednačine prave i kružnice napišmo u terminima kompleksnih brojeva.

- jednačina prave pomoću kompleksnih brojeva
$$a \operatorname{Re} z + b \operatorname{Im} z + c = 0$$
$$a \frac{z + \bar{z}}{2} + b \frac{z - \bar{z}}{2i} + c = 0$$
$$\frac{a - ib}{2} z + \frac{a + ib}{2} \bar{z} + c = 0$$
uvođenjem oznake $A = \dfrac{a + ib}{2}$ i $D = c$ dobijamo
$$\bar{A} z + A \bar{z} + D = 0, \qquad A \neq 0 \tag{2}$$
- jednačina kružnice čiji je centar tačka c poluprečnika r pomoću kompleksnih brojeva
$$|z - c|^2 = r^2$$
$$(z - c)\overline{(z - c)} = r^2$$
$$(z - c)(\bar{z} - \bar{c}) = r^2$$
$$z\bar{z} - z\bar{c} - c\bar{z} + c\bar{c} = r^2$$
$$z\bar{z} - \bar{c}z - c\bar{z} + |c|^2 - r^2 = 0$$
uvođenjem oznake $C = |c|^2 - r^2$ i $B = -c$ dobijamo
$$z\bar{z} + \bar{B} z + B \bar{z} + C = 0, \qquad |B|^2 - C > 0 \tag{3}$$

Formule (2) i (3) možemo objediniti na sledeći način:

$$Ez\bar{z} + \bar{F}z + F\bar{z} + G = 0, \qquad E, G \in \mathbb{R}, \quad F \in \mathbb{C}$$

pri čemu razlikujemo kada je

- $E = 0$ i $F \neq 0$ jednačnina prave
- $E \neq 0$ i $\left|\frac{F}{E}\right|^2 - \frac{G}{E} > 0$ jednačina kružnice

$$\left|\frac{F}{E}\right|^2 - \frac{G}{E} > 0$$

$$\frac{|F|^2}{E^2} - \frac{GE}{E^2} > 0$$

$$\frac{|F|^2 - GE}{E^2} > 0$$

$$|F|^2 > GE$$

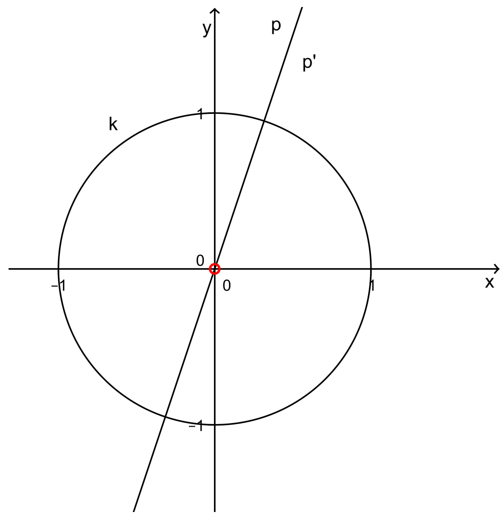
Konačno dolazimo do sledećeg zaključka:
Neka su $E, G \in \mathbb{R}$, $F \in \mathbb{C}$ takvi da je $|F|^2 > EG$ tada je

$$Ez\bar{z} + \bar{F}z + F\bar{z} + G = 0$$

jednačina uopštene kružnice (uopštena kružnica jeste kružnica ili prava).
Pri tome ako je $E \neq 0$ data jednačina jeste jednačina kružnice, a ako je $E = 0$ data jednačina je jednačina prave.

4.7.2 Svojstva inverzije

Teorema 1. *Prava koja sadrži centar inverzije, inverzijom u odnosu na krug preslikava se na sebe.*



Slika 22: Inverzija prave koja sadrži centar inverzije

Dokaz.

$$p : \bar{F}z + F\bar{z} = 0$$

Inverzija je zadata formulom $\omega = \dfrac{1}{\bar{z}}$, dakle $z = \dfrac{1}{\bar{\omega}}$.
Zamenom u gornju jednačinu dobijamo

$$\bar{F}\frac{1}{\bar{\omega}} + F\frac{1}{\omega} = 0 \qquad /\omega\bar{\omega}$$

$$\bar{F}\omega + F\bar{\omega} = 0$$

dakle prava p koja sadrži centar inverzije se inverzijom u odnosu na krug preslikava na samu sebe izuzev koordinatnog početka. △

Teorema 2. *Prava koja ne sadrži centar inverzije, inverzijom u odnosu na krug preslikava se na kružnicu koja sadrži centar inverzije ali bez te tačke.*

Dokaz.

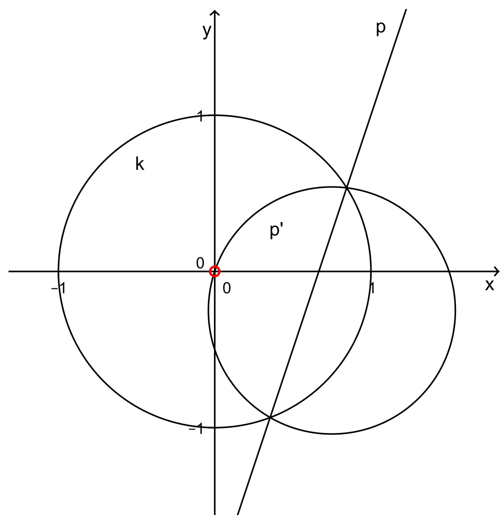
$$p : \bar{F}z + F\bar{z} + G = 0, \qquad G \neq 0 \;\; jer \;\; O \notin p$$

kako je slika tačke z pri inverziji $\omega = \dfrac{1}{\bar{z}}$, odatle $z = \dfrac{1}{\bar{\omega}}$.
Zamenom u prethodnu jednačinu dobijamo

$$\bar{F}\frac{1}{\bar{\omega}} + F\frac{1}{\omega} + G = 0 \qquad /\omega\bar{\omega}$$

$$\bar{F}\omega + F\bar{\omega} + G\omega\bar{\omega} = 0, \quad G \neq 0$$

dakle slika prave koja ne sadrži centar inverzije pri inverziji u odnosu na krug jeste krug p' bez koordinatnog početka (slika 23). $\triangle$



Slika 23: Inverzija prave koja ne sadrži centar inverzije

Teorema 3. *Ako sadrži centar inverzije O krug se preslikava na pravu.*

Dokaz.

$$Ez\bar{z} + \bar{F}z + F\bar{z} = 0, \quad E \neq 0$$

zamenom z sa $z = \dfrac{1}{\bar{\omega}}$ dobijamo

$$E\frac{1}{\bar{\omega}}\frac{1}{\omega} + \bar{F}\frac{1}{\bar{\omega}} + F\frac{1}{\omega} = 0 \quad /\omega\bar{\omega}$$

$$E + \bar{F}\omega + F\bar{\omega} = 0, \quad E \neq 0$$

što predstavlja jednačinu prave koja ne sadrži tačku O. $\triangle$

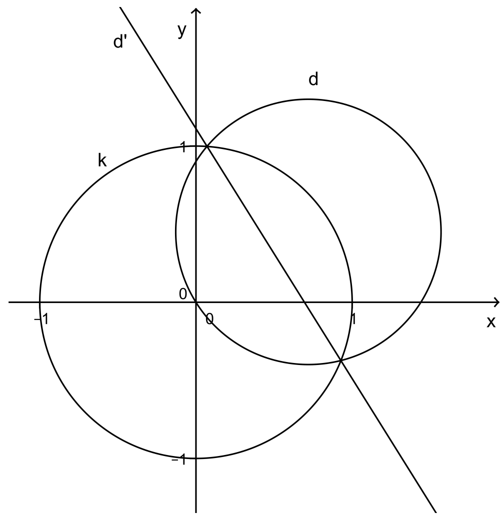
Teorema 4. *Ako ne sadrži centar inverzije O krug se preslikava na krug.*

Dokaz.

$$Ez\bar{z} + \bar{F}z + F\bar{z} + G = 0, \quad E \neq 0, \quad G \neq 0 \ \ jer \ \ O \notin k$$

zamenom z sa $z = \dfrac{1}{\bar{\omega}}$ dobijamo

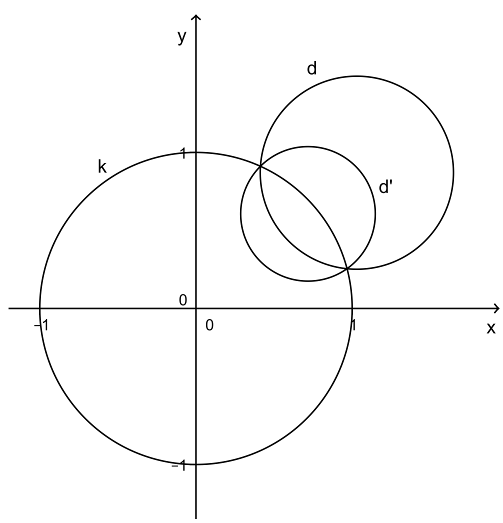
$$E\frac{1}{\bar{\omega}}\frac{1}{\omega} + \bar{F}\frac{1}{\bar{\omega}} + F\frac{1}{\omega} + G = 0 \quad /\omega\bar{\omega}$$



Slika 24: Inverzija kruga koji sadrži centar inverzije

$$E + \bar{F}\omega + F\bar{\omega} + G\omega\bar{\omega} = 0, \quad E \neq 0, \quad G \neq 0$$

što predstavlja jednačinu kruga koji ne sadrži tačku O. $\triangle$



Slika 25: Inverzija kruga koji ne sadrži centar inverzije

Primećujemo da nam kompleksni brojevi olakšavaju dokazivanje svojstava inverzije.

5 Tvrđenja Euklidske geometrije i njihovi dokazi pomoću kompleksnih brojeva

Da bismo dokazali tvrđenja elementarne geometrije potrebno je da interpretiramo neke osnovne geometrijske pojmove preko algebarskih jednakosti. Tako ćemo probleme planimetrijskog tipa svesti na rad sa jednačinama, tj. rešavaćemo problem algebarskog tipa.

5.1 Podela duži u datom odnosu

Neka su A, B i C različite tačke kompleksne ravni sa kompleksnim koordinatama a, b i c. Ako tačka C pripada pravoj određenoj tačkama A i B i važi

$$\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \neq 0,$$

kažemo da tačka C deli duž AB u odnosu λ.
Ako imamo koordinate tačaka A i B (a i b) i realni broj λ, tada koordinatu tačke C (c) možemo odrediti na sledeći način:

$$\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$$

$$\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}).$$

Zapišimo sada ovo preko kompleksne notacije

$$c - a = \lambda(b - c)$$

dakle koordinatu tačke C dobijamo po formuli

$$c = \frac{a + \lambda b}{1 + \lambda}.$$

Ovime smo dokazali teoremu:

Teorema 5. *Ako tačka C deli duž određenu kompleksnim brojevima a i b u odnosu $\lambda \neq 0$ onda tačka C ima koordinatu*

$$c = \frac{a + \lambda b}{1 + \lambda}.$$

5.2 Središte duži

Odrediti središte duži određene kompleksnim brojevima a i b znači odrediti koordinatu tačke C koja ovu duž deli u odnosu $1 : 1$. Tj. u jednačini za podelu duži u datom odnosu treba uvrstiti da je $\lambda = 1$. Koordinata tačke C je tada

$$c = \frac{a + b}{2}.$$

Teorema 6. *Težišne duži trougla seku u tački T koja svaku od njih deli u odnosu* $2 : 1$ *(gledajući od odgovarajućeg temena).*

Dokaz. Neka je ABC dati trougao i a, b i c kompleksne koordinate njegovih temena, označimo sa A_1, B_1 i C_1 redom središta duži BC, AC, AB. Tada su:

$$a_1 = \frac{b+c}{2}, \qquad b_1 = \frac{a+c}{2}, \qquad c_1 = \frac{a+b}{2}$$

kompleksne koordinate tačaka A_1, B_1 i C_1.
Neka je T tačka za koju je $\overrightarrow{AT} : \overrightarrow{TA_1} = 2 : 1$, tada je

$$t = \frac{a + 2a_1}{1+2} = \frac{a+2a_1}{3} = \frac{a + 2 \cdot \frac{b+c}{2}}{3} = \frac{a+b+c}{3},$$

gde je t kompleksni broj prikazan tačkom T.
Proveravamo da li je $\overrightarrow{BT} : \overrightarrow{TB_1} = 2 : 1$ i $\overrightarrow{CT} : \overrightarrow{TC_1} = 2 : 1$.

$$\overrightarrow{BT} : \overrightarrow{TB_1} = (t-b) : (b_1 - t) = \left(\frac{a+b+c}{3} - b\right) : \left(\frac{a+c}{2} - \frac{a+b+c}{3}\right) =$$

$$= \left(\frac{a+b+c}{3} - \frac{3b}{3}\right) : \left(\frac{3a+3c}{6} - \frac{2a+2b+2c}{6}\right) = \frac{a+c-2b}{3} : \frac{a+c-2b}{6} = 2 : 1$$

Analogno dobijamo i da je $\overrightarrow{CT} : \overrightarrow{TC_1} = 2 : 1$. △

Primer 1. *Neka je dat četvorougao $ABCD$ i neka su T_a, T_b, T_c, T_d težišta trouglova BCD, ACD, ABD, ABC, redom. Dokazati da se duži AT_a, BT_b, CT_c, DT_d seku u jednoj tački T koja svaku od njih deli u odnosu $3 : 1$ gledajući od temena četvorougla.*

Rešenje. Kako su T_a, T_b, T_c, T_d težista odgovarajućih trouglova imamo da je

$$t_a = \frac{b+c+d}{3}, \quad t_b = \frac{a+c+d}{3}, \quad t_c = \frac{a+b+d}{3}, \quad t_d = \frac{a+b+c}{3}.$$

Neka je T tačka koja deli duž AT_a u odnosu $3 : 1$ gledajući od temena A ($\overrightarrow{AT} : \overrightarrow{TT_a} = 3 : 1$) pa je:

$$t = \frac{a + 3t_a}{1+3} = \frac{a + 3 \cdot \frac{b+c+d}{3}}{4} = \frac{a+b+c+d}{4}.$$

Potrebno je pokazati da tada tačka T deli i ostale duži u odnosu $3 : 1$.

$$\overrightarrow{BT} = t - b = \frac{a+b+c+d}{4} - \frac{4b}{4} = \frac{a+b+c-3b}{4},$$

$$\overrightarrow{TT_b} = t_b - t = \frac{a+c+d}{3} - \frac{a+b+c+d}{4} = \frac{a+b+c-3b}{12}.$$

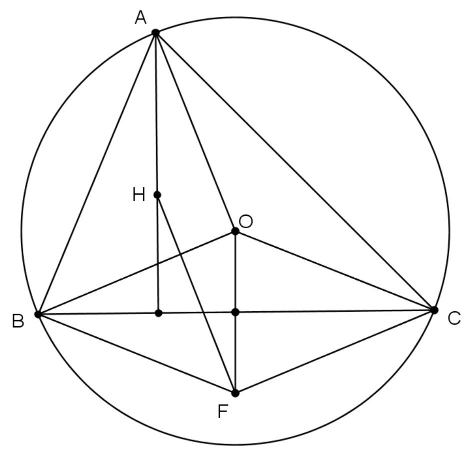
Dakle $\overrightarrow{BT} : \overrightarrow{TT_b} = 3 : 1$. Analogno se pokazuje da je i $\overrightarrow{CT} : \overrightarrow{TT_c} = 3 : 1$ i $\overrightarrow{DT} : \overrightarrow{TT_d} = 3 : 1$. △

Tačku T nazivamo težištem četvorougla $ABCD$.

Ako su temena petougla data sa $A(a), B(b), C(c), D(d), E(e)$ koordinata njegovog težišta biće data sa $t = \dfrac{a+b+c+d+e}{5}$. Na sličan način se definiše težište bilo kog $n-$tougla.

5.3 Ojlerova kružnica, Ojlerova prava

Teorema 7. *Neka je ABC trougao čiji je centar opisane kružnice koordinatni početak, ako je $A(a), B(b), C(c)$ tada je $H(h)$, gde je $h = a + b + c$, ortocentar trougla ABC.*



Slika 26: Ortocentar trougla ABC

Dokaz. Centar opisanog kruga je koordinatni početak, pa je $|a| = |b| = |c| = R$. Neka je $F(f)$ tačka, takva da je $f = b + c$, tada je četvorougao $COBF$ romb. Kako nam je poznato da su dijagonale romba međusobno normalne imamo da je $OF \perp BC$. Ako je $H(h)$ tačka, takva da je $h = a + (b + c)$, četvorougao $AOFH$ je paralelogram sa stranicama OA i OF, pa je otuda $AH||OF$.

Kako je $OF \perp BC$ onda je i $AH \perp BC$. Na sličan način pokazujemo da je $BH \perp AC$ i $CH \perp AB$, dakle tačka H jeste ortocentar trougla ABC. △

Teorema 8. *Neka je data prava $l = bz + \overline{bz} + c = 0$, $b \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $c \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i tačka $M_0(z_0)$. Podnožje normale n iz tačke M_0 na pravu l ima kompleksnu koordinatu $z = \dfrac{bz_0 - \overline{bz_0} - c}{2b}$.*

Dokaz. Neka je tačka M podnožje normale n iz tačke M_0 na pravu l, njena kompleksna koordinate z je rešenje sistema:

$$bz + \overline{bz} + c = 0$$

$$b(z - z_0) = \bar{b}(\bar{z} - \bar{z_o}).$$

Kompleksna koordinata z zadovoljava prvu jednačinu jer tačka M pripada pravoj l, a zadovoljava i drugu jednačinu jer je prava određena kompleksnim brojevima z i z_o normalna na pravu l, tj. važi da je proizvod koeficijenata pravaca ove dve prave jednak -1, tj.

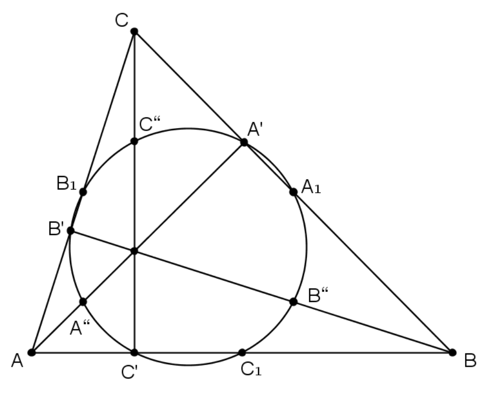
$$\frac{z - z_o}{\bar{z} - \bar{z}_o} = \frac{-1}{-\frac{b}{\bar{b}}} = \frac{\bar{b}}{b}.$$

Iz prve jednačine imamo da je $\bar{z} = \dfrac{-bz - c}{\bar{b}}$, pa zamenomu u drugu jednačinu dobijamo $z = \dfrac{bz_0 - \overline{bz_0} - c}{2b}$.

$\triangle$

Neka je ABC trougao zadat sa $A(a), B(b), C(c)$, neka su A_1, B_1 i C_1, središta duži BC, AC, AB, redom, A', B', C' podnožja visina iz A, B, C na stranice BC, AC, AB, redom i neka su A'', B'', C'' središta duži AH, BH, CH, redom, pri čemu je H ortocentar trougla ABC.

Teorema 9. *U trouglu ABC tačke $A_1, B_1, C_1, A', B', C', A'', B'', C''$ pripadaju jednoj kružnici čiji je centar E središte duži OH, gde je O centar opisanog kruga, H ortocentar, a poluprečnik joj je jednak polovini poluprečnika opisane kružnice trougla ABC. (Ovaj krug naziva se Ojlerovim krugom 9 tačaka.)*



Slika 27: Ojlerov krug 9 tačaka

Dokaz. Neka je koordinatni sistem postavljen tako da je centar opisanog kruga koordinatni početak, tada je na osnovu prethodne teoreme koordinata ortocentra data sa $h = a + b + c$. Znamo još i da je:

$$a_1 = \frac{b+c}{2}, \quad b_1 = \frac{a+c}{2}, \quad c_1 = \frac{b+a}{2}, \quad e = \frac{h}{2} = \frac{a+b+c}{2}$$

$$a'' = \frac{a+h}{2} = a + \frac{b+c}{2}, \quad b'' = b + \frac{a+c}{2}, \quad c'' = c + \frac{a+b}{2}.$$

Sada je

$$EA_1 = |e - a_1| = \left| \frac{a+b+c}{2} - \frac{b+c}{2} \right| = \frac{|a|}{2} = \frac{R}{2},$$

slično dobijamo i

$$EB_1 = \frac{|b|}{2} = \frac{R}{2}, \qquad EC_1 = \frac{|c|}{2} = \frac{R}{2}.$$

Važi još i

$$EA'' = |e - a''| = \left| \frac{a+b+c}{2} - \left(a + \frac{b+c}{2} \right) \right| = \frac{|-a|}{2} = \frac{R}{2},$$

slično

$$EB'' = |e - b''| = \frac{R}{2} \qquad EC'' = |e - c''| = \frac{R}{2}.$$

Ovim smo pokazali da tačke $A_1, B_1, C_1, A'', B'', C''$ pripadaju kružnici k čiji je centar u tački E, poluprečnika $\frac{R}{2}$.

Da bismo našli koordinate podnožja visina iz tačaka A, B, i C na stranice BC, AC i AB redom postavićemo jednačine pravih BC, AC i AB:

$$BC : \frac{z-b}{c-b} = \frac{\bar{z}-\bar{b}}{\bar{c}-\bar{b}} \Leftrightarrow z(\bar{c}-\bar{b}) - \bar{z}(c-b) + \bar{b}c - \bar{c}b = 0$$

$$CA : \frac{z-c}{a-c} = \frac{\bar{z}-\bar{c}}{\bar{a}-\bar{c}} \Leftrightarrow z(\bar{a}-\bar{c}) - \bar{z}(a-c) + \bar{c}a - \bar{a}c = 0$$

$$AB : \frac{z-a}{b-a} = \frac{\bar{z}-\bar{a}}{\bar{b}-\bar{a}} \Leftrightarrow z(\bar{b}-\bar{a}) - \bar{z}(b-a) + \bar{a}b - \bar{b}a = 0$$

Da bismo koristili formulu za koordinatu podnožja normale iz date tečke na datu pravu, potrebno je prethodne jednačine prave pomnožiti sa i jer $\bar{b}c - \bar{c}b, \bar{c}a - \bar{a}c, \bar{a}b - \bar{b}a \in i\mathbb{R}$ jer se u pomenutoj formuli koristi jednačina prave u kojoj je slobodan član realan broj. Prema tome dobijamo:

$$BC : zi(\bar{c}-\bar{b}) - \bar{z}i(c-b) + i(\bar{b}c - \bar{c}b) = 0$$

$$CA : zi(\bar{a}-\bar{c}) - \bar{z}i(a-c) + i(\bar{c}a - \bar{a}c) = 0$$

$$AB : zi(\bar{b}-\bar{a}) - \bar{z}i(b-a) + i(\bar{a}b - \bar{b}a) = 0$$

pa po formuli dobijamo:

$$a' = \frac{i(\bar{c}-\bar{b})a - (-i(c-b))\bar{a} - i(\bar{b}c - \bar{c}b)}{2i(\bar{c}-\bar{b})}, \qquad a' = \frac{a}{2} + \frac{1}{2}\frac{c-b}{(\bar{c}-\bar{b})}\bar{a} - \frac{1}{2}\frac{\bar{b}c - \bar{c}b}{\bar{c}-\bar{b}}.$$

Pošto je $a\bar{a} = b\bar{b} = c\bar{c} = R^2$ dobijamo

$$a' = \frac{a}{2} + \frac{1}{2}\frac{c-b}{\frac{R^2}{c} - \frac{R^2}{b}}\frac{R^2}{a} - \frac{1}{2}\frac{\frac{R^2}{b}c - \frac{R^2}{c}b}{\frac{R^2}{c} - \frac{R^2}{b}} = \frac{1}{2}\left(a + b + c - \frac{bc}{a}\right).$$

Na sličan način je i $b' = \frac{1}{2}\left(a+b+c-\frac{ac}{b}\right)$ i $c' = \frac{1}{2}\left(a+b+c-\frac{ab}{c}\right)$. Sada dobijamo da je

$$EA' = |e-a'| = \left|\frac{a+b+c}{a} - \left(\frac{a+b+c}{2} - \frac{bc}{2a}\right)\right| = \frac{|bc|}{2|a|} = \frac{R}{2}.$$

Analogno je i $EB' = EC' = \frac{R}{2}$ čime smo pokazali da i tačke A', B', C' pripadaju kružnici k. △

Teorema 10. *U trouglu ABC ortocentar H, težiste T i centar opisane kružnice su kolinearne tačke pri čemu je $H-T-O$ i $HT = 2TO$. (Prava kojoj pripadaju tačke H, T, O, E naziva se Ojlerovom pravom.)*

Dokaz. Već smo pokazali da je koordinata težišta T trougla ABC data sa $t = \dfrac{a+b+c}{3}$ i koordinata ortocentra H kada je centar opisanog kruga u koordinatnom početku, data sa $h = a+b+c$. Osim toga pokazali smo da je koordinata centra Ojlerovog kruga data sa $e = \dfrac{a+b+c}{2}$. Dakle primećujemo da su tačke O, T, E, H kolinearne, a osim toga važi i $HT = 2TO$ i $OH = 3OT$ △

6 Modeli hiperboličke geometrije

6.1 Hiperbolička geometrija

U trećoj deceniji devetnaestog veka Nikolaj Lobačevski i Janoš Boljaj, nezavisno jedan od drugoga, predlažu da se teorija paralelnih pravi utemelji na aksiomi koja negira peti Euklidov postulat. Nemajući pred sobom očiglednu sliku koja bi poduprla njihov pogled na osnove geometrije, oni su uspeli da izgrade teoriju koja je, kako je kasnije pokazano, isto onoliko logički valjana koliko i euklidska geometrija. Oni su, kako mladi Janoš Boljaj ističe u jednom pismu svom ocu, ni iz čega stvorili jedan sasvim novi svet. Prvi put je zasnovana jedna teorija u kojoj se ne može pozvati na očiglednost, zasnovana je geometrija u kojoj postoje tačka B i prava a koja je ne sadrži, takve da u njima određenoj ravni postoji više od jedne prave koja sadrži B, a sa pravom a nema zajedničkih tačaka.
Iz geometrijskog sveta u kome se u potpunosti moglo osloniti na intuiciju zasnovanu na predstavama koje stvaraju čula, zakoračilo se u svet koji postoji izvan dohvata našeg iskustva. Nije stoga iznenađujuće što njihove zamisli nisu za njihova života doživele priznanje koje im pripada.
Samo je Gaus razumeo dubinu i dalekosežnost njihovih ideja, budući da su se, prema njegovim rečima, one podudarale sa njegovim zamislima od kojih je neke snivao više od trideset godina.
Zanimljivo, Gaus je znao za zamisli obojice zasnivača hiperboličke geometrije, no nije upoznao ni jednog od njih sa rezultatima drugog. Do Boljaja je dospela jedna rasprava na nemačkom jeziku Nikolaja Lobačevskog, dok Lobačevski nikada nije saznao za rad Janoša Boljaja.

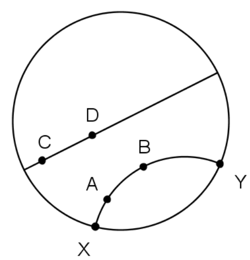
6.2 Poenkareov disk model

Poenkareov disk model P se izgrađuje polazeći od jediničnog kruga u kompleksnoj ravni, tj. od njegove unutrašnjosti. Jedinični krug nazivamo apsolutom, njegovu unutrašnjost nazivamo h-ravni, a svaku tačku h-ravni nazivamo h-tačkom. Prave tog modela su lukovi krugova normalnih na apsolutu i prečnici apsolute. Svaki segment kruga (ili duž prave) koji je upravan na apsoluti, čija temena pripadaju h-ravni nazivamo h-duž, a segment toga kruga čije je jedno teme na apsoluti, a drugo pripada h-ravni nazivamo h-polupravom. Prvo od tih temena zvaćemo krajem, a drugo temenom h-poluprave. Slično kao u euklidskoj geometriji mogu se definisati i h-ugao, h-trougao, h-poligonska linija, h-poligon i h-poligonska površ.

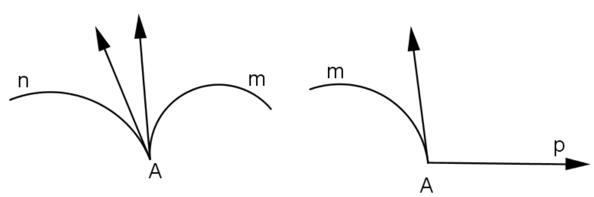
Skup h-tačke i dve h-poluprave koje proizilaze iz te tačke je h-ugao. Dakle, ako se dva luka m i n seku u tački A, ugao koji oni obrazuju je ugao između njihovih tangenti u tački A, odnosno, ugao između luka m i prave p sa početkom u tački A je zapravo ugao između prave p i tangente na luk m u tački A.

Ako su A, B i C tri h-tačke koje ne pripadaju jednoj h-pravoj,tada skup koji se sastoji iz tačaka h-duži AB, BC i CA nazivamo h-trouglom. Pojmovi h-poligonske linije i h-poligona mogu se uvesti u analogiji sa odgovarajućim pojmovima euklidske geometrije.

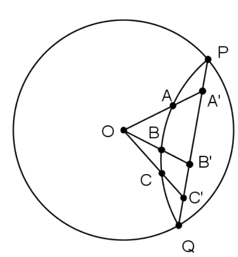
Definicija 2. *Neka su A, B i C tri h-tačke, koje pripadaju istoj h-pravoj. Ako je ta h-prava prečnik apsolute k, kažemo da je B h-između tačaka A i C ako je između u euklidskom smislu. Ako je, pak, h-prava lik kružnice a, obeležimo sa O središte apsolute, a sa P i Q tačke u kojima apsoluta seče kružnicu a i posmatrajmo onaj luk kružnice a, koji pripada unutrašnjosti apsolute. Obeležimo sa A', B' i C' tačke u kojima euklidske prave OA, OB i OC seku euklidsku tetivu PQ. h-tačka B je h-između tačaka A i C , ako je tačka B' između tačaka A' i C' u euklidskom smislu i to označavamo sa: $\mathcal{B}_h(A, B, C)$.*



Slika 28: Osnovni elementi Poenkareovog disk modela, h-tačke, h-prave, h-duž



Slika 29: h- ugao



Slika 30: Raspoded h-tačaka $\mathcal{B}_h(A, B, C)$

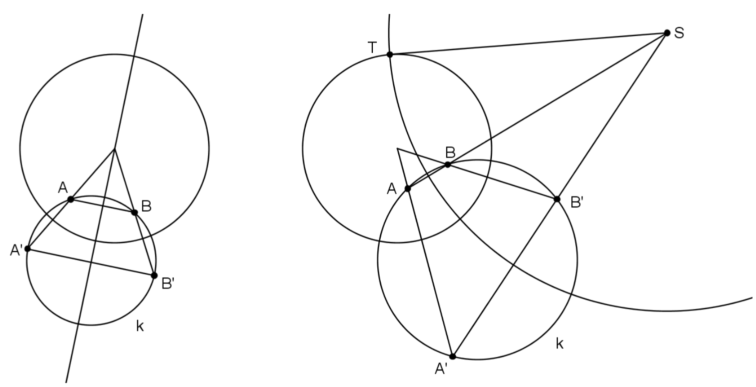
Razmotrimo inverziju u odnosu na krug upravan na apsolutu ili refleksiju u odnosu na pravu normalnu na apsolutu. Tom inverzijom, odnosno refleksijom, h-ravan se preslikava sama na sebe. To je motivacija za definisanje h-refleksije kao restrikcije te inverzije, odnosno refleksije, na h-ravan. Ova definicija omogućava definisanje i simetrale h-duži kao h-prave ortogonalne na datu h-duž kojom je definisana h-refleksija koja preslikava jedno teme date h-duži u drugo.

Teorema 11. *Za dve razne h-tačke A i B postoji jedinstvena h-refleksija kojom se te dve tačke preslikavaju jedna u drugu.*

Dokaz. Neka su A' i B' inverzne tačke tačkama A i B u odnosu na apsolutu. Postoji jedinstven krug (ili prava) k koji sadrži tačke A, B, A', B', pa stoga postoji jedinstvena h-prava koja sadrži tačke A i B.

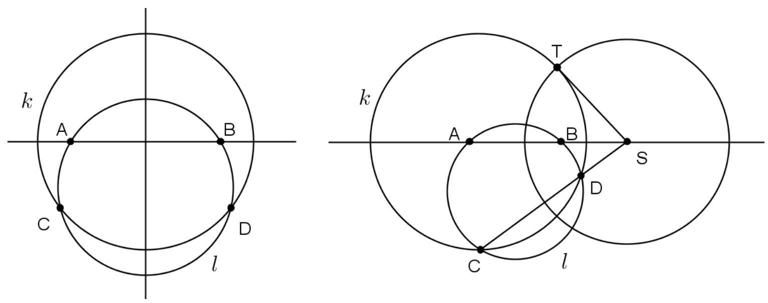
Ako sa O označimo centar jedinične kružnice, a sa r njen poluprečnik, kako smo tačke A' i B' dobili inverzijom u odnosu na jediničnu kružnicu imamo da je: $OA \cdot OA' = r^2$ i $OB \cdot OB' = r^2$ tj. $OA \cdot OA' = OB \cdot OB'$ odakle sledi da postoji krug koji sadrži tačke A, B, A', B' jer jednakost $OA \cdot OA' = OB \cdot OB'$ predstavlja potenciju tačke O u odnosu na krug koji sadrži tačke A, B, A', B'.

Ako su prave AB i $A'B'$ paralelne, h-prava koja pripada medijatrisi duži AB odnosno duži $A'B'$, biće osa h-refleksije kojom se h-tačke A i B preslikavaju jedna na drugu. Ako se prave AB i $A'B'$ seku, osa h-refleksije kojom se tačke A i B preslikavaju jedna na drugu biće h-prava koja pripada krugu upravnom na apsolutu i na krug k. Središte S kruga koji sadrži pomenutu h-pravu pripadaće pravoj AB i radikalnoj osi apsolute i kruga k, a poluprečnik tog kruga biće duž ST, gde je T dodirna tačka apsolute i njene tangente iz tačke S.



Slika 31: h-refleksija h-tačke A u h-tačku B, AB ne pripada prečniku apsolute

Razmotrimo sada slučaj ako duž AB pripada prečniku apsolute. Tada postoji krug l koji sadrži tačke A i B, a seče apsolutu u tačkama C i D. Analogno kao malopre, posmatramo slučajeve. Ako su prave AB i CD paralelne, središte apsolute biće i središte duži AB, pa je tada prečnik apsolute, koji je upravan na AB, osa h-refleksije kojom se tačke A i B preslikavaju jedna na drugu. Ako se, pak, prave AB i CD seku u nekoj tački S , osa h-refleksije kojom se tačke A i B preslikavaju jedna na drugu biće h-prava koja pripada krugu upravnom na apsoluti i krugu l. Središte toga kruga biće tačka S koja pripada pravoj AB i radikalnoj osi apsolute i kruga l, a poluprečnik toga kruga biće duž ST gde je T dodirna tačka apsolute i njene tangente koja sadrži tačku S.



Slika 32: h-refleksija h-tačke A u h-tačku B, h-duž AB pripada prečniku apsolute

△

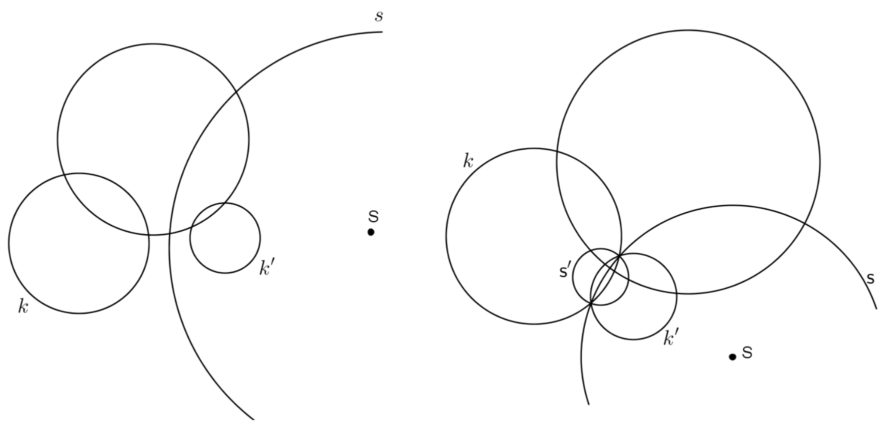
Teorema 12. *Ako se dve h-prave seku, tada postoje dve h-refleksije kojima se one preslikavaju jedna na drugu, a ako su disjunktne, tada postoji jedinstvena h-refleksija kojom se one preslikavaju jedna na drugu.*

Dokaz. Neka su k i k' krugovi koji sadrže zadate h-prave. Ako su one disjunktne, i krugovi koji ih sadrže su disjunktni ili se dodiruju u tački koja pripada apsoluti, pa stoga postoji jedinstvena inverzija kojom se ti krugovi preslikavaju jedan na drugi. Kako krug te inverzije pripada pramenu kojem pripadaju i k i k', on će biti upravan na apsolutu. Dakle, postoji jedinstvena h-refleksija kojom se zadate prave preslikavaju jedna na drugu. Osa te h-refleksije pripada krugu s upravnom na apsolutu, čije je središte presek zajedničkih spoljašnjih tangenti krugova k i k'.

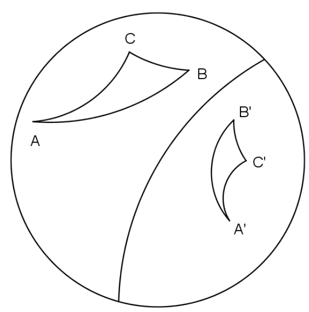
Ako se krugovi k i k' seku, tada postoje dve inverzije kojima se ti krugovi preslikavaju jedan na drugi pa će postojati dve h-refleksije kojima se zadate prave preslikavaju jedna na drugu. Osa jedne od tih dveju h-refleksija pripada krugu s upravnom na apsoluti, čije je središte presek zajedničkih tangenti krugova k i k', a osa druge h-refleksije pripada krugu s' koji sadrži presečne tačke krugova k i k' i upravan je na krug s. △

Definisanje h-refleksije omogućava definisanje i podudarnosti u hiperboličkom smislu: neka su dati parovi h-tačaka (A, B) i (C, D); reći ćemo da su ti parovi h-podudarni ako postoji niz h-refleksija koji preslikava par (A, B) u par (C, D). Proizvod tih h-refleksija zvaćemo h-izometrijom.

Među svim izometrijama izdvajaju se h-translacija i h-rotacija: h-translacija za datu h-duž je kompozicija dve h-refleksije, prve u odnosu na h-pravu ortog-



Slika 33: h-refleksija h-pravih



Slika 34: h-refleksija h- trougla

onalnu na datu h-duž u početnoj h-tački i druge u odnosu na simetralu date h-duži; h-rotacija oko date h-tačke za dati h-ugao α je kompozicija dve h-refleksije definisane dvema h-pravama koje sadrže datu h-tačku i zahvataju h- ugao $\frac{\alpha}{2}$, pri čemu je orijentacija h-ugla koje zahvataju te h - prave jednaka orijentaciji datog h-ugla.

U Poenkarevom disk modelu se može prirodno uvesti metrika preko inverzivnog rastojanja, što je inspirisano definicijom h-izometrije kao kompozicije h-refleksija (koje su predstavljene pomoću inverzije u odnosu na krug, odnosno refleksije u odnosu na pravu). To međutim nije jedini način da se uvede metrika u Poenkareov model hiperboličke ravni.

Ako su A, B, C, D četiri razne tačke afine prave p, njihova dvorazmera je realan broj

$$[A, B; C, D] := \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} : \frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DB}}.$$

Primetimo da je dvorazmera odnos dve razmere, po čemu je i dobila ime.

Uvedemo li sada koordinate na pravoj p, biće $A(a), B(b), C(c), D(d)$, a dvorazmera će biti:

$$[A,B;C,D] = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}.$$

Pokazaćemo da dvorazmera ima sledeće osobine:

- $[A,B;C,D] = [C,D;A,B]$;
- $[A,B;C,D] = [B,A;C,D]^{-1}$;
- $[A,B;C,D] = 1 - [A,C;B,D]$.

Kako za zadate tačke A, B, C, D važi

$$[A,B;C,D] = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}$$

dobijamo da je

$$[A,B;C,D] = \frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)},$$

pa analogno dobijamo da je

$$[C,D;A,B] = \frac{(a-c)(b-d)}{(b-c)(a-d)}$$

što se dobija kada svaku zagradu prethodne jednakosti pomnožimo sa -1.
Na sličan način dobijamo da važe i preostale dve jednakosti.

Za tačke A, B, C, D za koje važi $[A,B;C,D] = -1$, kažemo da su harmonijski konjugovane i pišemo $\mathcal{H}(A,B;C,D)$.
Afina prava nije najbolji domen za dvorazmeru. Naime, ako su $A(a), B(b)$ različite tačke i $C(\frac{a+b}{2})$ središte duži AB, tada je uslov $\mathcal{H}(A,B;C,D)$ ekvivalentan sa:

$$-1 = \frac{\frac{a+b}{2} - a}{\frac{a+b}{2} - b} = -\frac{d-a}{d-b}.$$

Odakle sledi da je $a = b$, što je kontradikcija, pa tačka D takva da je $\mathcal{H}(A,B;C,D)$ ne postoji.

Ako tačke $A, B \in P$ pripadaju h-pravoj, odnosno luku $\widehat{XY}$, gde su X, Y tačke sa apsolute, tada rastojanje u Poenkareovom disk modelu definišemo sa

$$\rho_P(A,B) = |\ln [A,B;X,Y]| = \left| \ln \left(\frac{X-A}{X-B} : \frac{Y-A}{Y-B} \right) \right|,$$

gde su sa A, B, X, Y označene i tačke i njihove kompleksne koordinate, a $[A,B;X,Y]$ kompleksna dvorazmera.

Kompleksna dvorazmera je realan broj na osnovu sledeće teoreme:

Teorema 13. *Dvorazmera četiri kompleksne tačke $[z_1, z_2; z_3, z_4]$ je realan broj ako i samo ako one pripadaju krugu ili pravoj.*

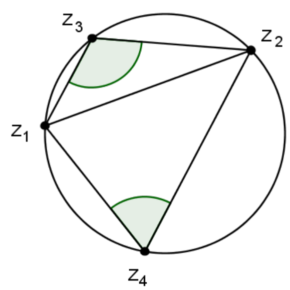
Dokaz. Za bilo koje tri tačke z_i, z_j, z_k važi:

$$\angle z_i z_k z_j = \angle(z_i - z_k, z_j - z_k) = \arg(z_i - z_k) - \arg(z_j - z_k) = \arg\left(\frac{z_i - z_k}{z_j - z_k}\right).$$

Zbog toga je:

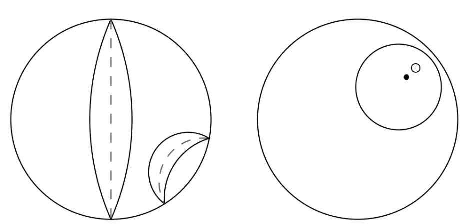
$$[z_1, z_2; z_3, z_4] = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} = \frac{|z_3 - z_1|}{|z_3 - z_2|} : \frac{|z_4 - z_1|}{|z_4 - z_2|} e^{i(\angle z_1 z_3 z_2 - \angle z_1 z_4 z_2)}.$$

Ovaj broj je realan ako i samo ako je ugao $\angle z_1 z_3 z_2 - \angle z_1 z_4 z_2 = 0 \pmod{\pi}$, a to je slučaj ako i samo ako tačke z_3 i z_4 pripadaju istom krugu sa tetivom $z_1 z_2$ ili sve četiri tačke pripadaju istoj pravoj. △



Slika 35: Kompleksna dvorazmera

Definicija rastojanja omogućava definisanje h-kruga kao skupa svih h-tačaka podjednako udaljenih od date h-tačke. U Poenkarevom modelu je h-krug i u euklidskom smislu krug, međutim euklidski i hiperbolički centar kruga ne moraju nužno biti jednaki. Pomoću metrike može se definisati i h-cilindar kao skup h-tačaka podjednako udaljenih od date h-prave, koju nazivamo osom h-cilindra. U Poenkareovom disk modelu h-cilindar je unija dva kružna luka ili kružnog luka i duži.



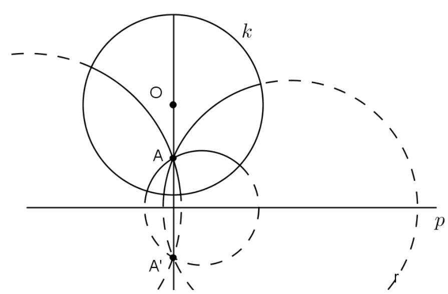
Slika 36: h-cilindar i h-krug

Važna osobina Poenkareovog disk modela je njegova konformnost, tj. važi da model čuva uglove. Drugim rečima, mera h-ugla između dve h-prave jednaka je euklidskoj meri ugla između dva kruga (ili kruga i prave ili dve prave) koji sadrže date h-prave.To čini Poenkareov model intuitivnijim u odnosu na neke druge modele gde je mera h-ugla komplikovanija. S druge strane, Poenkareov model nije projektivan model, tj. u modelu se ne mogu direktno koristiti projektivne koordinate i matrice transformacije, koje značajno pojednostavljuju i ubrzavaju operacije sa modelom.

6.3 Epicikli u Poenkareovom disk modelu

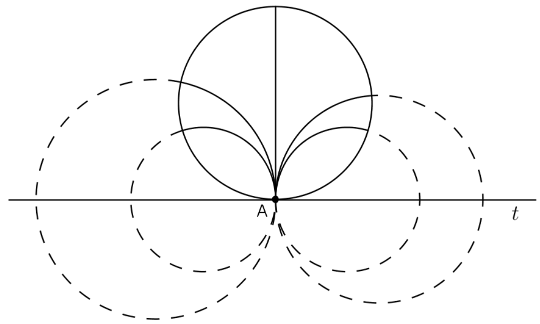
U ravni Lobačevskog razlikovaćemo pramenove pravih u zavisnosti od toga da li je pramen konkurentnih (eliptički), paralelnih (parabolički) ili pravih upravnih na neku datu pravu (hiperbolički). Trajektorije ovih pramenova nazivaju se cikl (krug), oricikl i ekvidistanta (hipercikl), redom. Sada ćemo pokazati čime je u Poenkareovom disk modelu reprezentovan eliptički, parabolički i hiperbolički pramen pravih.

Eliptički pramen h-pravih će biti skup svih h-pravih koje prolaze kroz neku h-tačku A. U euklidskom smislu to su lukovi kružnica koje prolaze kroz tačku A, normalne su na kružnicu k i pripadaju unutrašnjosti kružnice k. Međutim, sve kružnice koje su normalne na kružnicu k i prolaze kroz tačku A, prolaze i kroz tačku A', koja je inverzna tački A u odnosu na kružnicu k. Otuda one obrazuju eliptičan pramen kružnica sa karakterističnim tačkama A i A'. Prema tome eliptični pramen h-pravih, sa h-centrom u h-tački A, predstavljen je lukovima kružnica eliptičnog pramena A, A' koji pripadaju unutrašnjosti apsolute k, uključujući i prečnik apsolute koji prolazi kroz tačku A.

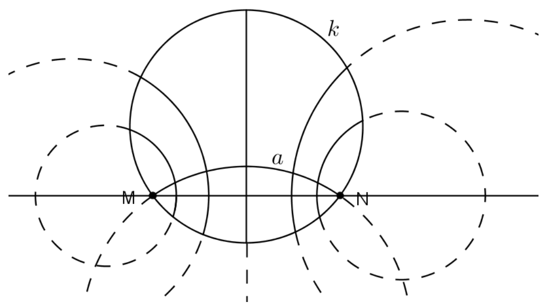


Slika 37: Eliptički pramen h-pravih

Parabolički pramen h-pravih će biti skup svih h-pravih sa zajedničkim krajem koje su predstavljene lukovima kružnica koje su normalne na apsolutu i sve prolaze kroz istu tačku A apsolute. Budući da središta krugova koji sadrže h-prave jednog paraboličkog pramena pripadaju tangenti apsolute u zajedničkom kraju A zadatog pramena h-pravih, h-prave nekog paraboličkog pramena pripadaju krugovima nekog paraboličkog pramena krugova.



Slika 38: Parabolički pramen h-pravih

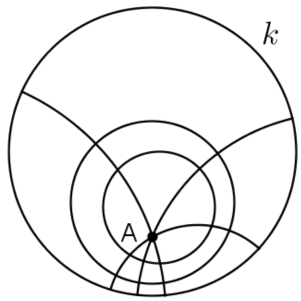


Slika 39: Hiperbolički pramen h-pravih

Hiperbolički pramen h-pravih predstavlja skup svih h-pravih normalnih na apsolutu k. Neka luk kružnice a reprezentuje baz̆ičnu pravu pramena i neka su M i N tačke preseka kružnica k i a. Elementi hiperboličnog pramena pravih, sa bazičnom pravom a, su reprezentovani lukovima kružnica koje su normalne i na kružnicu k i na kružnicu a. Oni dakle obrazuju pramen konjugovan pramenu $\{k, a\}$. Kako je $\{k, a\}$ eliptičan, njemu konjugovan pramen je hiperbolički pramen. Linija centara toga pramena je prava MN.

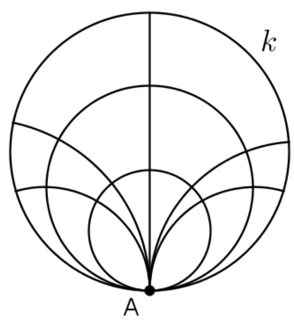
Budući da je skup svih slika proizvoljne tačke ravni u inverzijama u odnosu na krugove nekog pramena, krug koji je upravan na svim krugovima zadatog pramena krugova, h-epicikl će biti (euklidski) krug ili deo tog kruga. On ne će biti upravan na apsoluti osim u slučaju kada je taj h-epicikl osnova neke h-ekvidistante.

Ako je zadat pramen konkurentnih h-pravih, njemu odgovarajući **h-krug** će biti (euklidski) krug koji pripada h-ravni, čiji centar, specijalno, ne mora biti centar euklidskog kruga. Kako je **h-oricikl** upravan na paraboličkom pramenu h-pravih, on će biti (euklidski) krug kome nedostaje zajednički kraj h-pravih zadatog paraboličkog pramena. Ako je zadat hiperbolički pramen h-pravih, sa bazičnom pravom s, njemu odgovarajuća **h-ekvidistanta** je deo (euklidskog)

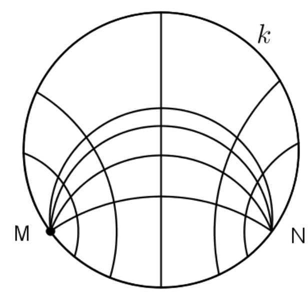


Slika 40: Cikl (krug)

kruga koji je upravan na zadatom pramenu krugova. Ekvidistantu takođe predstavlja još jedna grana koja se dobija h-simetrijom u odnosu na h-pravu s. Ukoliko je, kao na slici, h-prava s deo kružnice h-simetrija je inverzija u odnosu na tu kružnicu, dok, ukoliko je h-prava s prečnik apsolute tada je h-simetrija osna simetrija u odnosu na pravu s.



Slika 41: Oricikl



Slika 42: Ekvidistanta

6.4 Poluravanski model

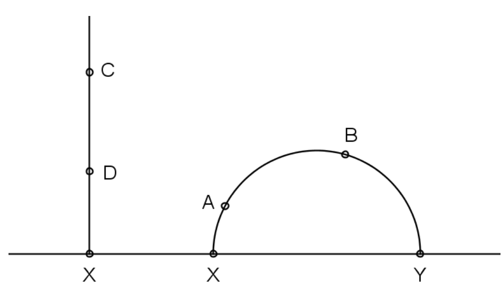
Bilinearnim preslikavanjem

$$\omega = f(z) = i\frac{1+z}{1-z}$$

unutrašnjost jediničnog diska $P \subset \mathbb{C}$ preslikava se na gornju poluravan. Preslikavanje f je bijekcija jediničnog diska i gornje poluravni.
Smatrajući preslikavanje f izometrijom, od Poenkareovog disk modela dobijamo model u gornjoj poluravni, koji zovemo **poluravanski model** i označavamo ga sa H.

Bilinearno preslikavanje f krugove i prave normalne na jedinični krug preslikava u krugove i prave normalne na $x-$osu. Zbog toga su prave u poluravanskom modelu poluprave upravne na $x-$osu i polukrugovi sa centrom na $x-$osi.

Osu x koja sadrži centar polukruga i podnožje prave upravne na nju zvaćemo apsolutom neeuklidske ravni (h-ravni). Duž CD h-prave upravne na x-osu predstavljaće h-duž kao i deo luka XY od tačke A do tačke B.



Slika 43: Poluravanski model

Bilinearno preslikavanje čuva dvorazmeru kompleksnih brojeva, pa je rastojanje između tačaka A i B u poluravanskom modelu zadato na isti način kao i rastojanje u Poenkareovom disk modelu, tj. formulom

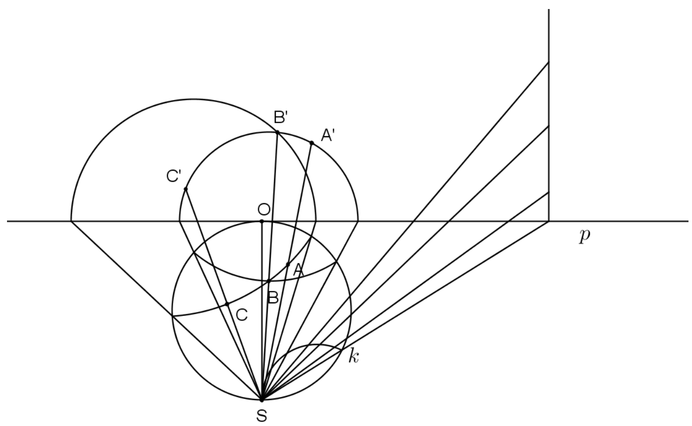
$$\rho_H(A,B) = |\ln[A,B;X,Y]| = \left|\ln\left(\frac{X-A}{X-B} : \frac{Y-A}{Y-B}\right)\right|,$$

pri čemu je XY prečnik kruga na kome se nalaze tačke A i B.
U slučaju kada je prava AB poluprava normalna na $x-$osu u tački X, tačka Y je beskonačno daleko, pa u tom graničnom slučaju imamo da je

$$\rho_H(A,B) = \left|\ln\frac{X-A}{X-B}\right|.$$

6.4.1 Geometrijska interpretacija izometrije između Poenkareovog disk modela i poluravanskog modela

Neka su zadati krug k i prava p koja krug k dodiruje u nekoj tački O. Ako je S tačka kruga k dijametralno suprotna tački O, inverzijom ψ u odnosu na krug sa centrom u S i poluprečnikom SO, krug k se preslikava na pravu p, a unutrašnjost σ toga kruga na otvorenu poluravan π sa rubom p. Poluravan π je h-ravan a svaka njena tačka je h-tačka. Kako inverzija čuva uglove, h-prave unutrašnjosti σ kruga k se preslikavaju na polukrugove i poluprave poluravni π upravne na rub (apsolutu) te poluravni.

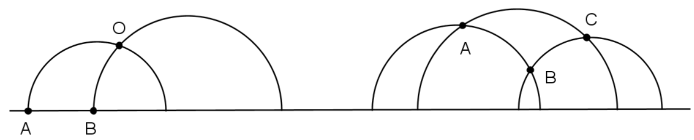


Slika 44: Inverzija Poenkareovog disk modela u poluravanski model

Ako je tačka B h-ravni σ h-između tačaka A i C, tada ćemo za sliku B' tačke B (koja pripada h-ravni π) reći da je h-između A' i C', slika tačaka A i C (koje takođe pripadaju h-ravni π) u inverziji ψ i pisaćemo $\mathcal{B}_h(A', B', C')$.

Ako postoji niz inverzija u odnosu na krugove upravne na k takvih da se proizvodom tih inverzija par tačaka (A, B) h-ravni σ preslikava na par (C, D) iste h-ravni, postojaće i niz inverzija u odnosu na slike tih krugova u inverziji ψ takvih da se proizvodom tih inverzija par tačaka $(A', B') = \psi(A, B)$ h-ravni π preslikava na par $(C', D') = \psi(C, D)$ iste h-ravni. Kako su (A, B) i (C, D) h-podudarni parovi tačaka h-ravni σ, za parove (A', B') i (C', D') ćemo reći da su h-podudarni parovi tačaka h-ravni π i pisaćemo $(A', B') \cong^h (C', D')$.

I u Poenkareovom poluravanskom modelu možemo uvesti pojmove h-ugla i h-trougla zadate na (slici45)



Slika 45: h-ugao i h-trougao poluravanskog modela

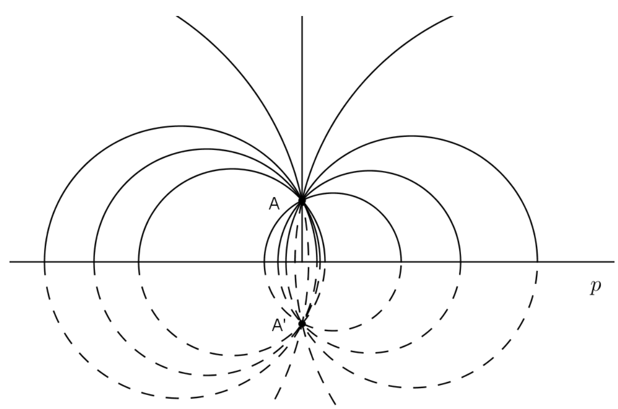
6.5 Epicikli u Poenkareovom poluravanskom modelu

Invezijom ψ eliptički, parabolički i hiperbolički pramenovi h-pravih h-ravni σ preslikavaju se, redom, na eliptičke, paraboličke i hiperboličke pramenove h-pravih h-ravni π.

- Eliptički pramen pravih u Poenkareovom poluravanskom modelu

  Posmatrajmo sve h-prave koje prolaze kroz tačku A. To su u euklidskom smislu polukružnice čiji centri pripadaju pravoj p i koje prolaze kroz tačku A, tom skupu pripada i normala na pravu p koja prolazi kroz tačku A. Odgovarajuće kružnice, nosači uočenih polukružnica, prolaze i kroz tačku A' koja je simetrična tački A u odnosu na apsolutu p. Tako one obrazuju eliptičan pramen sa karakterističnim tačkama A i A'.

  Prema tome, eliptički pramen pravih u Poenkareovom poluravanskom modelu predstavljen je delovima elemenata eliptičkog pramena kružnica, koji se nalaze sa uočene strane apsolute p, uključujući i odgovarajući deo potencijalne ose tog pramena. Linija centara toga pramena kružnica je apsoluta p a karakteristična tačka pramena koja pripada h-ravni je h-centar eliptičkog pramena h-pravih.

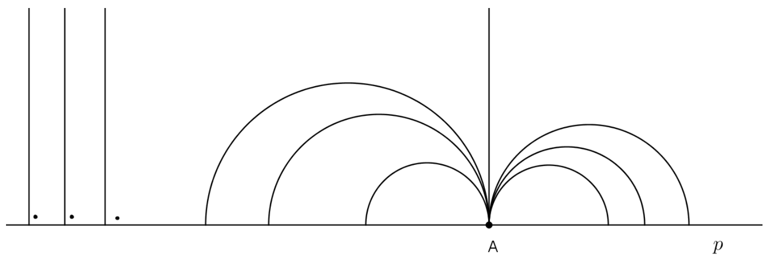


Slika 46: Eliptički pramen h-pavih poluravanskog modela

- Parabolički pramen pravih u Poenkareovom poluravanskom modelu

  Parabolički pramen pravih čini skup svih polukružnica sa centrima na apsoluti p koje imaju jednu zajedničku tačku na apsoluti, uključujući i polupravu koja je u toj tački normalna na apsolutu. Tako je parabolički pramen h-pravih reprezentovan delom paraboličkog pramena kružnica koje pripadaju h-ravni.

  Parabolički pramen h-pravih je takođe reprezentovan i skupom svih polupravih sa početnom tačkom na apsoluti, a koje su normalne na apsolutu.

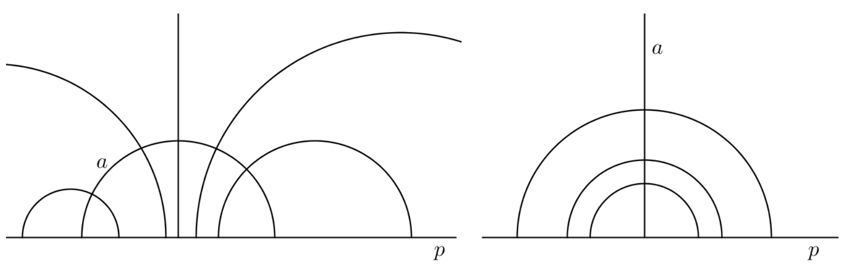


Slika 47: Parabolički pramen h-pavih poluravanskog modela

- Hiperbolički pramen pravih u Poenkareovom poluravanskom modelu

  U slučaju da je bazična h-prava pramena euklidska polukružnica a. Prave hiperboličkog pramena pravih reprezentovane su polukružnicama sa centrima na apsoluti koje su normalne na kružnicu a.

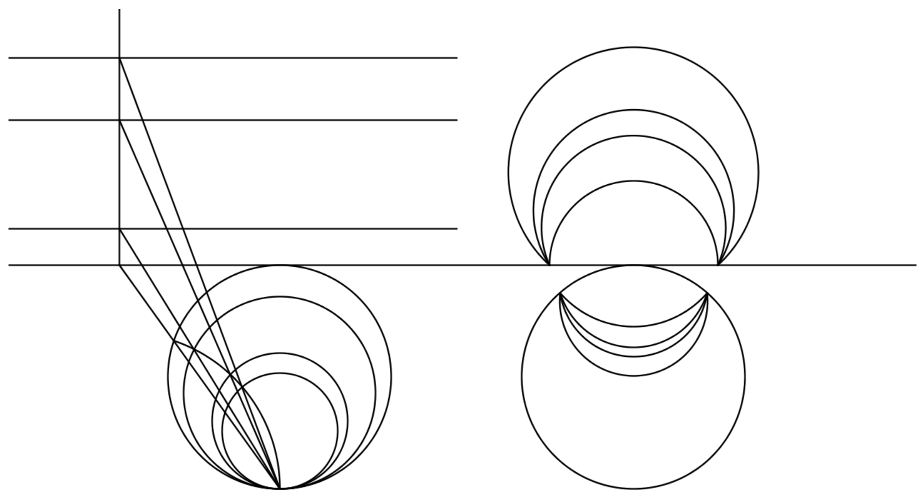
  Ako je bazična prava poluprava a upravna na apsolutu u tački A, tada je hiperbolički pramen reprezentovan sistemom koncentričnih polukružnica sa zajedničkim centrom A.



Slika 48: Hiperbolički pramen h-pavih poluravanskog modela

Inverzijom ψ h-krugovi h-ravni σ se preslikavaju na euklidske krugove h-ravni π, koji predstavljaju h-krugove h-ravni π. Tom inverzijom h-oricikli h-ravni σ koji sadrže središte S date inverzije, preslikavaju se na euklidske prave h-ravni π koje su euklidski paralelne rubu p poluravni π, a ostali h-oricikli se preslikavaju na euklidske krugove poluravni π koji dodiruju pravu p. Stoga se skup h-oricikala h-ravni π sastoji iz euklidskih pravih poluravni π koje su paralelne pravoj p i krugova te poluravni koji dodiruju p.

Inverzijom ψ h-ekvidistante h-ravni σ koje sadrže središte S te inverzije, preslikavaju se na euklidske poluprave sa temenima na pravoj p, a ostale h-ekvidistante na lukove krugova čija temena pripadaju pravoj p. Stoga se skup h-ekvidistanti h-ravni π sastoji iz euklidskih h-polupravih kojima su temena na rubu p poluravni π i lukova krugova čija temena pripadaju pravoj p.



Slika 49: h-oricikli i h-ekidistante

Literatura

[1] Ivica Gusić, Hrvatski matematički elektronski časopis: Zašto su uvedeni kompleksni brojevi.

[2] Aleksandra Arsić, Master rad: Interaktivni kurs više matematike korišćenjem programskog paketa geogebra, Matematički fakultet u Beogradu, 2014

[3] Jelena Janović, On-line učionica, Trigonometrijski oblik kompleksnog broja, februar 2014,

[4] Milan Božić: Pregled istorije i filozofije matematike,

[5] Marek Svetlik: Beleške sa vežbi kursa Odabrana poglavlja kompleksne analize

[6] Zoran Lučić: Euklidska i hiperbolička geometrija, Beograd 1997

[7] Srđan Vukmirović: Modeli geometrije Lobačevskog, jun 2015

[8] Boris Ajdin: Rejtrejsing u Poenkareovom sfernom modelu hiperboličkog prostora

[9] Z. Kadelburg, V. Mićić, S. Ognjanović, Analiza sa algebrom 2 – udžbenik sa zbirkom zadataka za drugi razred Matematičke gimnazije, Krug, Beograd 1997.

[10] Z. Kadelburg, V. Mićić, S. Ognjanović, Analiza sa algebrom 3 – udžbenik sa zbirkom zadataka za treći razred Matematičke gimnazije, Krug, Beograd 2000.

[11] M. Mateljević, Kompleksne funkcije 1 i 2, Društvo matematičara Srbije, 2006.

[12] M. Mateljević, O kompleksnim brojevima i osnovnom stavu algebre, Nastava matematike, XLVII 3-4 (2002).

[13] M. Mateljević, Kompleksna analiza 2, Zavod za udžbenike, Beograd 2012.

[14] D. S. Mitrinović (saradnik J.D. Kečkić), Kompleksna analiza – zbornik zadataka i problema, Naučna knjiga, Beograd 1972.