Matematički fakultet
Univerzitet u Beogradu

Master rad

Izometrijske transformacije 3-dimenzionalnog euklidskog prostora

Student: Elma Osmanović 1108/2015
Mentor: prof. dr Zoran Lučić

Beograd,
2017.

1 Predgovor

Tema rada su *izometrijske transformacije euklidskog prostora.*

Izometrije su u osnovi ideje o podudarnosti. Odgovor na pitanje kako se podudarnost figura definisala pre poznavanja pojma izometrije, a kako uvođenjem tog pojma, dat je u uvodu. Pre poznavanja pojma izometrije, podudarne figure su opisivane kao jednake figure koje se mogu ,,položiti jedna na drugu". Uvođenjem tog pojma podudarnost figura se definiše na drugi način koji je poznat i danas; dve figure su podudarne ako i samo ako jedna, može biti transformisana na drugu izometrijom.

Budući da se rad odnosi na izometrije u euklidskom prostoru, u prvom odeljku će biti reči o Euklidu, o njegovom najpoznatijem delu *Elementi* i o *euklidskoj geometriji.* U euklidskoj geometriji pored prve četiri grupe aksioma, i tzv. Plejferove aksiome važi i njen ekvivalent, peti Euklidov postulat. Navedeni su i Plejferova aksioma i peti Euklidov postulat.

U drugom odeljku je uveden pojam izometrije prostora E^n $(n = 1, 2, 3)$ i navedena su osnovna svojstva izometrija tog prostora. Dokazano je da je kompozicija dveju izometrija prostora E^n $(n = 1, 2, 3)$, takođe, izometrija, da je inverzna izometrija J^{-1} prostora E^n $(n = 1, 2, 3)$, takođe, izometrija tog prostora, i na osnovu ta dva svojstva, dokazano je treće svojstvo, a to je, da je skup svih izometrija tog prostora grupa, u odnosu na proizvod transformacija.

U trećem odeljku je, najpre, navedena teorema prema kojoj neke izometrije ne menjaju orijentaciju prostora, a neke izometrije menjaju orijentaciju. Izometrije koje ne menjaju orijentaciju prostora su *direktne*, a one koje menjaju orijentaciju prostora su *indirektne.* Zatim je, uvedena jedna od izometrija prostora koja se naziva *ravanska refleksija.* Dokazana su njena bitna svojstva. Dokazano je, takođe, i najbitnije svojstvo izometrija prostora E^3 a to je, da se svaka izometrija prostora može predstaviti kao kompozicija najviše četiriju ravanskih refleksija. Na osnovu tog svojstva uvodimo i sve ostale izometrije prostora E^3. Biće reči i o pojmovima *koaksijalnih i paralelnih pramenova ravni*, koji će se koristiti pri dokazivanju nekih svojstava izometrija. Potom će biti uvedene i neke druge izometrije prostora E^3. Dokazana su njihova svojstva, od kojih su najbitnija: involutivnost, transmutacija i komutativnost. Na kraju odeljaka o izometrijama, su primeri, koji ilustruju do tada izučavanu teoriju.

U petom odeljku je izvršena klasifikacija izometrija prostora E^3. Postoji sedam izometrija prostora E^3 i to su: *koincidencija, ravanska refleksija, osna rotacija, rotaciona refleksija, translacija, klizajuća refleksija i zavojno kretanje.* Izometrije se, takođe, klasifikuju na direktne i indirektne.

U šestom je uveden pojam *sličnosti.* Izometrije su zapravo specijalan slučaj sličnosti sa koeficijentom proporcionalnosti $k = 1$. Pored sličnosti, definisane su i: *dilatacija* kao najprostiji oblik sličnosti, potom *centralna dilatacija* kao dilatacija koja nije translacija, i pojam *dilativne rotacije prostora* E^3, koja je kompozicija osne rotacija, sa osom l, i centralne dilatacije $O(k)$, čiji centar O pripada pravoj l.

U poslednjem odeljku, biće reči o pojmu *simetrije prostora* E^3. Simetrije su izometrije, koje ostavljaju neki lik invarijantim. Dokazana je teorema o broju simetrija pravilnih poliedara. Ova teorema je, takođe, dokazana uz pomoć *elementarnih tetraedara.* Uveden je pojam punktualne grupe simetrija; to su grupe u kojima sve simetrije raspolažu najmanje jednom zajedničkom invarijantnom tačkom. Punktualne grupe, koje se sastoje isključivo iz direktnih simetrija se nazivaju *grupe rotacija.* Potom će biti reči i o rotacijama pravilnih poliedara. Svaki pravilni poliedar ima dva svojstva, koja su potreban i dovoljan uslov, da budu pravilni, i to će biti detaljno pojašnjeno. Određeni su red grupa simetrija, i red grupa rotacija pet postojećih pravilnih poliedara. Na kraju su navedene sve simetrije, koje imaju pravilan tetraedar i pravilan heksaedar.

Sadržaj

2 Uvod

Izometrija[1] — bijekcija koja čuva rastojanje — je u osnovi poznate ideje o podudarnosti. U antičkoj matematici pojam izometrija nije postojao. Kada se govorilo o podudarnosti figura nije se upotrebljavao pojam izometrija, već su podudarne figure opisivane kao jednake figure koje se mogu ,,položiti jedna na drugu". Na taj način podudarnost figura opisuje Euklid u svojim *Elementima*.

I pre Euklida se podudarnost opisivala na sličan način; Tales govori o podudarnim trouglovima, a Proklo, koji nas obaveštava o ovome Talesovom stavu, podudarne trouglove opisuje kao jednake trouglove, koji se mogu ,,položiti jedan na drugi". Uvođenjem pojma izometrije u geometriji, podudarnost figura se definiše na drugi način, koji je poznat i danas; dve figure su podudarne ako i samo ako jedna, može biti transformisana na drugu izometrijom.

3 O Euklidu, Elementima i euklidskoj geometriji

Euklid je napisao *Elemente* oko 300. godine stare ere. Pretpostavlja se da je bio učenik Platonove Akademije i osnivač geometrijske škole u Aleksandriji (oko – 365 do – 275). Više od dva milenijuma, *Elementi* su bili osnov svakog obrazovanja. Nijedan od udždbenika geometrije napisanih pre njega, nije mogao da se održi, a posle njega vekovima, niko nije pokušavao da geometriju drugačije utemelji. Zahvaljujući *Elementima* geometrija je vekovima doživljavana kao savršenstvo i prema njoj se ravnalo svako drugo sistematisano znanje.

Euklidovi *Elementi* se sastoje iz 13 knjiga. Prvih šest knjiga se odnosi na planimetriju, naredne četiri na geometrijsku teoriju brojeva, a poslednje tri na stereometriju. U *Elementima* Euklid elementarne geometrijske pojmove ne definiše, već samo kratko objašnjava. On takođe, ne dokazuje sve stavove, već, bez provere, pretpostavlja, da važe neki iskazi, koje on naziva aksiomama i postulatima.

Geometrija Euklidovih *Elementata* u kojoj je bitna pretpostavka peti Euklidov postulat naziva se *euklidskom geometrijom*. U njoj važe aksiome prve četiri grupe (aksiome veze, rasporeda, podudarnosti i aksiome paralelnosti), kao i tzv. Plejferova aksioma paralelnosti koja je jedan od ekvivalenata petog postulata. Više od dve hiljade godina euklidska geometrija je smatrana jedinom mogućom geometrijom. Kada je prostor shvatan kao ,,čista forma

[1] grčki (isos) : jednak, isti i (metron): mera

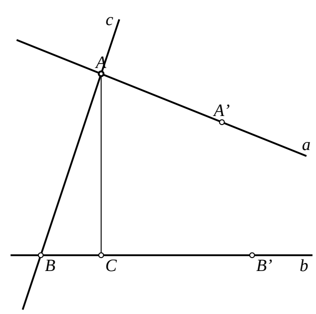
svega čulnog” kako je to činio Kant u svojoj Kritici čistog uma, onda je geometrija tog prostora mogla biti samo euklidska.

Euklidov autoritet je više od dva milenijuma bio toliki, da se nije moglo pretpostaviti da bi geometrija opažajnog prostora mogla biti koja druga do euklidska. U izvesnom smislu ovo mišljenje je opravdano, budući da se geometrija Euklidovih *Elemenata* dobro slaže sa svojstvima čvrstih tela. Empirijski je utvrđeno da se prostor veličine molekula ponaša kao euklidski. Međutim, geometrija prostora unutar atoma, kako je poznato, nije euklidska. Takođe, za izražavanje prostornih odnosa tela u kosmičkom prostoru pogodnije je koristiti geometriju sa promenljivom zakrivljenošću, koja nije euklidska [1].

Novodimo Plejferovu aksiomu, kao i njen ekvivalent peti Euklidov postulat.

Plejferova aksioma paralelnosti. Postoje tačka B i prava a koja je ne sadrži takve da u njima određenoj ravni ne postoji više od jedne prave, koja sadrži tačku B, a sa pravom a nema zajedničkih tačaka.

Peti Euklidov postulat. Ako jedna prava u preseku sa drugim dvema pravama obrazuje sa iste svoje strane dva ugla, čiji je zbir manji od zbira dvaju pravih uglova, te dve prave se seku sa one strane zadate prave sa koje su ti uglovi.



Slika 1: Peti Euklidov postulat

4 Uvođenje pojma izometrije

Izometrija. Svaku bijekciju J prave, ravni ili prostora na sebe nazivamo *izometrijskom transformacijom* ili, kratko, *izometrijom* ako je slika svakog para (P, Q) tačaka njemu podudaran par tačaka $(J(P), J(Q))$. Iz ove definicije neposredno sledi da je *identičnost* I koju zovemo i *koincidencijom* i kojom se svaka tačka prostora preslikava na sebe, takođe, izometrija. Izometriju koja nije identičnost, zvaćemo *neidentičkom* ili *pravom* izometrijom. Za lik koji se nekom izometrijom preslikava na sebe reći ćemo da je *invarijantan* u toj izometriji [1, str. 79]. Rezultat primenjivanja nekoliko transformacija uspešno, naziva se njihovim proizvodom ili kompozicijom.

Narednim teoremama će biti dokazana osnovna svojstva izometrija prostora E^n $(n = 1, 2, 3)$.

Teorema 1. *Kompozicija dveju izometrija prostora E^n je takođe izometrija tog prostora.*

Dokaz. Neka su J_1 i J_2 bilo koje dve izometrije prostora E^n. Ako obeležimo sa X i Y proizvoljne tačke tog prostora, sa X_1 i Y_1 tačke koje u izometriji J odgovaraju tačkama X i Y, a sa X_2 i Y_2 tačke koje u izometriji J_2 odgovaraju tačkama X_1 i Y_1, tada u kompoziciji $J_2 \cdot J_1$ tačkama X i Y odgovaraju tačke X_2 i Y_2. Pri tome je $(X, Y) \cong (X_1, Y_1)$ i $(X_1, Y_1) \cong (X_2, Y_2)$, pa je $(X, Y) \cong (X_2, Y_2)$. Stoga je kompozicija $J_2 \cdot J_1$, takođe, izometrija prostora E^n. □

Teorema 2. *Inverzna transformacija izometrije prostora E^n je takođe izometrija tog prostora.*

Dokaz. Neka je J bilo koja izometrija prostora E^n. Ako obeležimo sa X i Y proizvoljne tačke tog prostora a sa X' i Y' tačke koje u izometriji J odgovaraju tačkama X i Y, biće $(X, Y) \cong (X', Y')$. S obzirom na to da je relacija podudarnosti parova tačaka simetrična, biće $(X', Y') \cong (X, Y)$, pa je inverzna transformacija J^{-1} takođe izometrija. □

Teorema 3. *Skup svih izometrija prostora E^n $(n = 1, 2, 3)$ je grupa u odnosu na proizvod transformacija.*

Dokaz. Na osnovu teoreme 1 kompozicija svake dve izometrije J_1 i J_2 prostora E^n je, takođe, izometrija tog prostora, a na osnovu teoreme 2 inverzna izometrija J^{-1} izometrije J prostora E^n je, takođe, izometrija tog prostora. Budući da su izometrije prostora E^n elementi grupe svih bijektivnih transformacija tog prostora, iz navedenih dveju osobina sleduje da je skup svih izometrija prostora E^n podgrupa pomenute grupe. □

Ovu grupu nazivamo *grupa izometrija prostora* E^n i obeležavamo je sa $G(J)$.

Takođe, za izometrijsku transformaciju J važe sledeća bitna svojstva.

Teorema 4. *Izometrijom J prava se preslikava na pravu, poluprava sa temenom O se preslikava na polupravu sa temenom $J(O)$, a duž AB se preslikava na duž $A'B'$ takvu da je $J(A) = A'$ i $J(B) = B'$.*

Teorema 5. *Izometrijom J ravan se preslikava na ravan, poluravan sa ivicom s se preslikava na poluravan sa ivicom $J(s)$, a konveksan ugao pq se preslikava na konveksan ugao $p'q'$, gde je $p' = J(p)$ i $q' = J(q)$.*

Iz prethodnih dveju teorema sledi, da se izometrijom poligonska linija preslikava na poligonsku liniju, oblast na oblast, konveksan lik na konveksan lik, poligon na poligon, poligonska površ na poligonsku površ, rogljasta površ na rogljastu površ, rogalj na rogalj, poliedarska površ na poliedarsku površ i poliedar na poliedar.

5 Izometrije prostora E^3

5.1 Direktne i indirektne izometrije prostora E^3

Teorema 6. *Izometrijom prostora istosmerni tetraedri se preslikavaju na istosmerne tetraedre, a suprotnosmerni tetraedri na suprotnosmerne tetraedre.*

Dokaz ove teoreme, zbog složenosti, neće biti izveden.

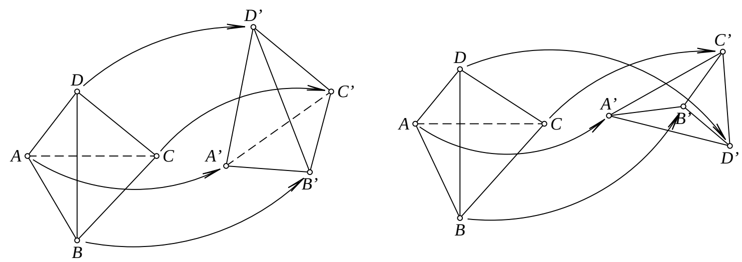
Iz nje neposredno sleduje, da izometrije prostora E^3 mogu biti: direktne izometrije, koje ne menjaju orijentaciju prostora E^3, i indirektne izometrije, koje menjaju orijentaciju prostora. Da bi se odredilo da li je neka izometrija prostora direktna ili indirektna, dovoljno je ustanoviti da li neke dve odgovarajuće četvorke nekomplanarnih tačaka određuju istosmerne ili suprotnosmerne tetraedre.

Na slici 2a istosmerni podudarni tetraedri $ABCD$ i $A'B'C'D'$ određuju direktnu izometriju, a na slici 2b suprotnosmerni podudarni tetraedri $ABCD$ i $A'B'C'D'$ određuju indirektnu izometriju prostora E^3.

U sledećoj teoremi dati su uslovi pod kojima je izometrija prostora jednoznačno određena. Ona ima izuzetan značaj u izgradnji teorije izometrija.

Teorema 7. *Ako su A, B, C, D četiri nekomplanarne tačke prostora E^3 i A', B', C', D' tačke tog prostora takve da je $(A, B, C, D) \cong (A', B', C', D')$, tada postoji jedinstvena izometrija $J\colon E^3 \to E^3$ takva da je:*

$$J(A) = A', \quad J(B) = B', \quad J(C) = C', \quad J(D) = D'.$$



(a) Istosmerni podudarni tetraedri

(b) Suprotnosmerni podudarni tetraedri

Slika 2: Istosmerni i suprotnosmerni tetraedri

Posledica 1. *Ako izometrija* $J\colon E^3 \to E^3$ *poseduje četiri nekomplanarne invarijantne tačke, ona je koincidencija.*

Iz ove teoreme se neposredno zaključuje da je direktna (indirektna) izometrija prostora E^3 jednoznačno određena ako su zadata tri para odgovarajućih nekolinearnih tačaka. Kao specijalan slučaj ovog tvrđenja nalazimo da je direktna izometrija prostora E^3 sa tri nekolinearne invarijantne tačke uvek koincidencija. Jasno je da je identička transformacija prostora E^3 direktna izometrija.

Kompozicija izometrija. Kompozicija ili proizvod direktnih i indirektnih izometrijskih transformacija se slaže kao proizvod pozitivnih i negativnih brojeva; proizvod dve indirektne ili dve direktne izometrije je direktna izometrija, a proizvod direktne i indirektne izometrije je indirektna izometrija.

Navodimo, bez dokaza, dve teoreme.

Teorema 8. *Dva tetraedra* $ABCD$ *i* $A'B'C'D'$ *prostora* E^3 *su podudarna, ako postoji jedinstvena izometrija koja tetraedar* $ABCD$ *preslikava na tetraedar* $A'B'C'D'$.

Teorema 9. *Ako su* ABC *i* $A'B'C'$ *podudarni trouglovi, tada postoje tačno dve izometrijske transformacije prostora koje trougao* ABC *preslikavaju na trougao* $A'B'C'$*; jedna je direktna i jedna indirektna.*

5.2 Ravanska refleksija prostora E^3

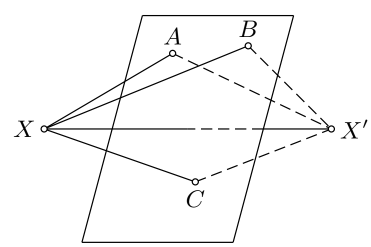
Prva izometrija koja će biti izučavana je *ravanska refleksija prostora* E^3. Pomoću nje se mogu predstaviti i sve ostale izometrije, što će u daljem radu i biti pokazano.

Budući da je izometrija, koja poseduje četiri nekomplanarne invarijantne tačke koincidencija (posledica 1), otuda, ravanska refleksija prostora E^3, koja sadrži tri nekolinearne invarijantne tačke je neidentička izometrija. S obzirom na to da poseduje tri nekolinearne invarijantne tačke, ravanska refleksija poseduje i čitavu ravan invarijantnih tačaka. Tu ravan nazivamo *osnovom* ravanske refleksije prostora E^3 ili *ogledalo*. Van osnove ravanska refleksija nema invarijantnih tačaka, što sledi na osnovu definicije ravanske refleksije i teoreme 7.

Ravansku refleksiju obeležavamo sa S_π, gde je π osnova ravanske refleksije. Ako nekoj tački X u ravanskoj refleksiji odgovara tačka X', tada je ravan π medijalna ravan duži XX'.

Pre nego što dokažemo to tvrđenje, navodimo sledeće tvrđenje:

Teorema 10. *Tačka A pripada medijalnoj ravni π duži XX' ako i samo ako je $AX \cong AX'$.*



Slika 3: Medijalna ravan duži XX'

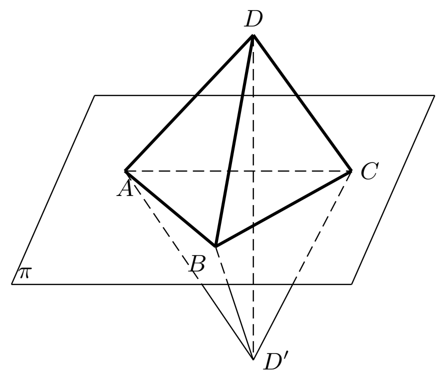
Ako sa A, B, C obeležimo tri nekolinearne tačke ravni π, imamo relacije:

$$AX \cong AX', \quad BX \cong BX', \quad CX \cong CX',$$

pa je svaka od tačaka A, B, C u medijalnoj ravni π' duži XX'. Budući da su tačke A, B, C nekolinearne, one određuju samo jednu ravan, pa je $\pi = \pi'$.

Ravanska refleksija prostora E^3 je indirektna izometrija, pa će to biti i dokazano. Izometrija prostora E^3 je određena efektom na tetraedar, pa se na primeru dva tetraedra $ABCD$ i $A'B'C'D'$ može pokazati da je ravanska refleksija prostora E^3 indirektna izometrija.

Teorema 11. *Ravanska refleksija S_π prostora E^3 je indirektna izometrija.*



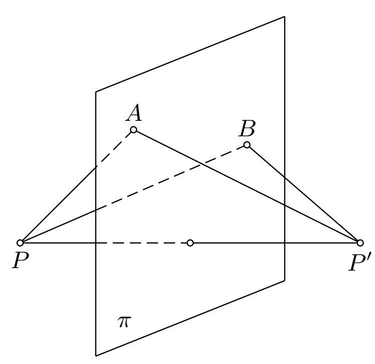
Slika 4: Ravanaska refleksija S_π je indirektna izometrija

Dokaz. Ako obeležimo sa A, B, C tri nekolinearne tačke ravni π, sa D bilo koju tačku van ravni π i sa D' tačku takvu da je $D' = S_\pi(D)$, biće $D \neq D'$ i π medijalna ravan duži DD' (Slika 4).

Stoga su tačke D i D' s raznih strana ravni π, te su odgovarajući tetraedri $ABCD$ i $ABCD'$ suprotnosmerni i, prema tome, ravanska refleksija S_π indirektna transformacija.

□

Teorema 12. *Ako indirektna izometrija J prostora E^3 poseduje dve razne invarijantne tačke A i B, ona je neka ravanska refleksija S_π prostora E^3 kojoj osnova π sadrži obe tačke A i B.*



Slika 5: Indirektna izometrija J sa dve invarijantne tačke A i B je S_π

Dokaz. S obzirom na to da je J indirektna i ε direktna izometrija, biće $J \neq \varepsilon$. Stoga u prostoru E^3 postoji tačka P takva da je $J(P) = P'$ i $P \neq P'$. Pri tome je $(P, A) \cong (P', A)$ i $(P, B) \cong (P', B)$, pa se svaka od tačaka A i B nalazi u medijalnoj ravni π duži PP' (Slika 5).

Budući da su S_π i J indirektne izometrije, kompozicija $S_\pi \cdot J$ je direktna izometrija prostora E^3. Ta transformacija poseduje tri invarijantne nekolinearne tačke A, B, P, te prema ranije rečenom, ona je koincidencija. Stoga $S_\pi \cdot J = \varepsilon$ i, prema tome, $J = S_\pi$.

□

Ravanska refleksija prostora E^3 poseduje jedno bitno svojstvo izometrija, svojstvo involutivnosti.

Involutivnost. Involuciona transformacija je svaka neidentička transformacija f kojoj je kvadrat koincidencija, tj. $f^2 = \varepsilon$. Reč involucija je latinskog porekla i znači izdanak ili pupoljak. U geometriju ga je uveo francuski matematičar i inženjer Žirar Dezarg (1593 – 1662).

Teorema 13. *Ravanska refleksija S_π prostora E^3 je involuciona transformacija.*

Dokaz. Obeležimo sa X proizvoljnu tačku prostora E^3 i sa X' i X'' tačke takve da je:

$$S_\pi(X) = X' \quad \text{i} \quad S_\pi(X') = X''.$$

Ako je $X \in \pi$, tada je $X = X'$ i $X' = X''$, pa je $X = X''$. Ako je $X \notin \pi$, tada je $X \neq X'$ i $X' \neq X''$, pa je osnova π ravanske refleksije S_π medijalna ravan svake od duži XX' i $X'X''$, pa je $X = X''$. Ovim je dokazano da u svakom slučaju važi relacija $S_\pi^2 = \varepsilon$, pa je ravanska refleksija S_π involuciona transformacija. □

Teorema 14. *Ako su S_α i S_β dve ravanske refleksije prostora E^3 sa raznim osnovama α i β, a X tačka tog istog prostora, tada je:*

$$S_\beta \cdot S_\alpha(X) = X \Leftrightarrow X \in \alpha \cap \beta.$$

Dokaz. Pretpostavimo najpre da je u kompoziciji $S_\beta \cdot S_\alpha(X)$ tačka X invarijantna. Ako obeležimo sa X' tačku takvu da je $S_\alpha(X) = X'$, biće i $S_\beta(X') = X$. Dokažimo da je $X = X'$.

Ako bi važila relacija $X \neq X'$, tada bi postojale dve razne medijalne ravni α i β duži XX', što je nemoguće. Stoga je $X = X'$, pa je $S_\alpha(X) = X$ i $S_\beta(X) = X$. Iz ovih jednakosti sledi da je $X \in \alpha$ i $X \in \beta$, pa je $X \in \alpha \cap \beta$.

Obratno, pretpostavimo da je zadovoljena relacija $X \in \alpha \cap \beta$, tada je $X \in \alpha$ i $X \in \beta$, pa je $X_\alpha(X) = X$ i $X_\beta(X) = X$, i prema tome $S_\beta \cdot S_\alpha(X) = X$. □

Bitan zakon za izometrije je zakon transmutacije, i sada će biti definisan.

Transmutacija. *Transmutacijom* ili preobražavanjem neke transformacije f nekom transformacijom g nazivamo kompoziciju $f' = g \cdot f \cdot g^{-1}$.

Teorema 15. *Ako je S_π ravanska refleksija euklidskog prostora E^3 i J bilo koja izometrija tog istog prostora i ako je $J(\pi) = \pi'$, tada važi relacija:*

$$J \cdot S_\pi \cdot J^{-1} = S_{\pi'}$$

Dokaz. Budući da svakoj tački ravni π' odgovara tačka ravni π, sledi da je :

$$S_\pi \cdot J^{-1}(P') = J^{-1}(P').$$

Ako obe ove jednakosti pomnožimo sleva izometrijom J, dobijamo da je:

$$J \cdot S_\pi \cdot J^{-1}(P') = J \cdot J^{-1}(P') = \varepsilon(P') = P'.$$

S obzirom na to da je ta kompozicija indirektna izometrija prostora E^3, kojoj je svaka tačka ravni π' invarijantna, ona je ravanska refleksija $S_{\pi'}$, naime biće:

$$J \cdot S_\pi \cdot J^{-1} = S_{\pi'}.$$

□

Teorema 16. *Dve ravanske refleksije S_α i S_β euklidskog prostora E^3, su komutativne transformacije ako i samo ako su im osnove istovetne ili međusobno upravne.*

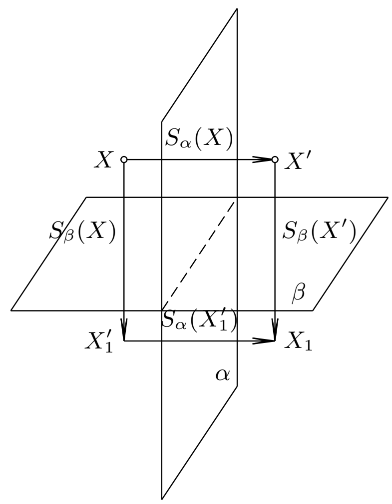
Dokaz. Pretpostavimo najpre da je

$$S_\beta \cdot S_\alpha = S_\alpha \cdot S_\beta, \quad \text{tj.} \quad S_\beta \cdot S_\alpha \cdot S_\beta = S_\alpha \qquad (*)$$

Ako obeležimo sa α' ravan određenu relacijom $S_\beta(\alpha) = \alpha'$, prema zakonu transmutacije ravanske refleksije S_α ravanskom refleksijom S_β, nalazimo da je:

$$S_\beta \cdot S_\alpha \cdot S_\beta = S_{\alpha'} \qquad (**)$$

Iz jednakosti (*) i (**) sledi da je $S_\alpha = S_{\alpha'}$, pa je $\alpha = \alpha'$, tj. $\alpha = S_\beta(\alpha)$. Ako je $\alpha \neq \beta$ onda je $\alpha \perp \beta$.



Slika 6: $S_\beta \cdot S_\alpha(X) = X_1 \quad \text{i} \quad S_\alpha \cdot S_\beta(X) = X_1$

Obratno, pretpostavimo da su ravni α i β istovetne ili da su međusobno upravne. Otuda sledi da je $S_\beta(\alpha) = \alpha$, te prema zakonu transmutacije ravanske refleksije S_α ravanskom refleksijom S_β, nalazimo da je:

$$S_\beta \cdot S_\alpha \cdot S_\beta = S_\alpha, \quad \text{tj.} \quad S_\beta \cdot S_\alpha = S_\alpha \cdot S_\beta.$$

□

Primer 1. *Ako su S_π, S_μ, S_v ravanske refleksije prostora E^3, dokazati da je:*

$$S_\pi \cdot S_\mu \cdot S_\pi = S_v \Leftrightarrow S_\pi(\mu) = v.$$

Dokaz. ($\Rightarrow$:) Pretpostavimo najpre da je

$$S_\pi \cdot S_\mu \cdot S_\pi = S_v. \tag{$*$}$$

Neka je μ' ravan prostora E^3 određena relacijom $S_\pi(\mu) = \mu'$, prema zakonu transmutacije ravanske refleksije S_μ ravanskom refleksijom S_π, imamo da je:

$$S_\pi \cdot S_\mu \cdot S_\pi = S_{\mu'}. \tag{$**$}$$

Iz jednakosti ($*$) i ($**$) sledi da je $S_{\mu'} = S_v$, pa je $\mu' = v$, tj. $S_\pi(\mu) = v$.

($\Leftarrow$:) Pretpostavimo da je $S_\pi(\mu) = v$, te prema zakonu transmutacije ravanske refleksije S_μ ravanskom refleksijom S_π, nalazimo da je:

$$S_\pi \cdot S_\mu \cdot S_\pi = S_v,$$

što je i trebalo dokazati.

$\square$

Primer 2. *Ako prava p ne pripada ravni π ravanske refleksije S_π prostora E^3, dokazati da je:*

$$S_\pi(p) = p \Leftrightarrow p \perp \pi.$$

Dokaz. Ako je $S_\pi(p) = p$, tada je $\pi \cap p \neq \emptyset$. Ako bi važila relacija $\pi \cap p = \emptyset$, tada bi istovetne prave p i $S_\pi(p)$ bile s raznih strana ravni π, što je nemoguće. Stoga je $\pi \cap p \neq \emptyset$. Iz te relacije i relacije $p \notin \pi$ sledi da prava p prodire ravan π u nekoj tački O.

Ako je P tačka prave p različita od O i P' njena odgovarajuća tačka u ravanskoj refleksiji S_π, imamo da je $P \neq P'$ i $P' \in p$, pa je π medijalna ravan duži PP' i, prema tome, $p \perp \pi$.

Obratno, ako je $p \perp \pi$ u nekoj tački O, tada je $S_\pi(p) = p$. Zaista, ako je P tačka prave p različita od O i P' njena odgovarajuća tačka u ravanskoj refleksiji S_π, imamo da je $P \neq P'$, pa je π medijalna ravan duži PP' te je $PP' \perp \pi$. Stoga je $PP' \subset p$, dakle i $S_\pi(p) = p$. $\square$

Predstavljanje izometrija prostora E^3 pomoću ravanskih refleksija. Pomenuto je, ranije, da je ravanska refleksija izometrija pomoću koje se mogu predstaviti sve ostale izometrije, a sada ćemo i dokazati to tvrđenje. Ovo svojstvo izometrija nam omogućuje da pomoću ravanskih refleksija izgradimo celu teoriju izometrija prostora E^3.

Teorema 17. *Svaka izometrija prostora može se predstaviti kao kompozicija najviše četiriju ravanskih refleksija.*

Dokaz. Neka je J proizvoljna izometrija prostora E^3 i A, B, C, D četiri nekomplanarane tačke tog prostora, a A_1, B_1, C_1, D_1, redom, slike tih tačaka u izometriji J.

Ako je $A = A_1, B = B_1, C = C_1, D = D_1$, J je koincidencija (posledica 1), pa ako je π proizvoljna ravan, biće $J = S_\pi \cdot S_\pi$, jer je $S_\pi \cdot S_\pi = \varepsilon$. Pretpostavimo da nisu sve tačke A, B, C, D invarijantne u izometriji J već da se bar jedna od njih, na primer tačka A, tom izometrijom preslikava u tačku koja je od nje različita, tj. da je $A \neq A_1$. Ako je S_1 refleksija kojom se tačke A i A_1 preslikavaju jedna na drugu, u kompoziciji $S_1 \cdot J$ će tačka A

biti invarijantna. Ako su u toj kompoziciji B, C, D invarijantne tačke, biće $S_1 \cdot J = \varepsilon$ a odatle $J = S_1$.

Pretpostavimo sada da u izomteriji $S_1 \cdot J$ bar jedna od tačaka, na primer tačka B, nije invarijantna već da se preslikava na B_2, a C i D redom na C_2 i D_2 i sa S_2 obeležimo refleksiju kojom se B i B_2 preslikavaju jedna na drugu. Tada je

$$(A, B) \cong (A_1, B_1) \cong (A, B_2),$$

pa tačka A pripada osnovi π_2 refleksije S_2. Stoga su u kompoziciji $S_2 \cdot S_1 \cdot J$ tačke A i B invarijantne. Ako su invarijantne i tačke C i D, ta kompozicija je koincidencija, tj. važi $S_2 \cdot S_1 \cdot J = \varepsilon$ a odatle sledi $J = S_1 \cdot S_2$. Pretpostavimo da u izometriji $S_2 \cdot S_1 \cdot J$ tačka C nije invarijantna već da se preslikava na C_3, a D na D_3, i sa S_3 obeležimo refleksiju kojom se C i C_3 preslikavaju jedna na drugu. Tada je

$$(A, C) \cong (A_1, C_1) \cong (A, C_2) \cong (A, C_3)$$

i

$$(B, C) \cong (B_1, C_1) \cong (B_2, C_2) \cong (B, C_3),$$

pa tačke A i B pripadaju osnovi π_3 refleksije S_3. Stoga su tačke A, B, C invarijantne u kompoziciji $S_3 \cdot S_2 \cdot S_1 \cdot J$. Ako je invarijantna i tačka D, ta kompozicija je koincidencija, tj. važi $S_3 \cdot S_2 \cdot S_1 \cdot J = \varepsilon$, pa je tada $J = S_1 \cdot S_2 \cdot S_3$. Pretpostavimo da u izometriji $S_3 \cdot S_2 \cdot S_1 \cdot J$ tačka D nije invarijantna već da se preslikava na D_4, i sa S_4 obeležimo refleksiju kojom se D i D_4 preslikavaju jedna na drugu. Tada je

$$(A, D) \cong (A_1, D_1) \cong (A, D_2) \cong (A, D_3) \cong (A, D_4),$$

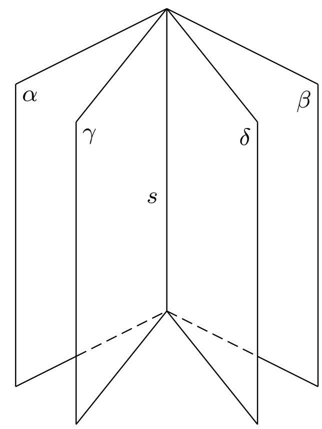
$$(B, D) \cong (B_1, D_1) \cong (B_2, D_2) \cong (B, D_3) \cong (B, D_4),$$

$$(C, D) \cong (C_1, D_1) \cong (C_2, D_2) \cong (C_3, D_3) \cong (C, D_4),$$

pa tačke A, B, C pripadaju osnovi π_4 refleksije S_4. Stoga su tačke S, A, B, C, D invarijantne u kompoziciji $S_4 \cdot S_3 \cdot S_2 \cdot S_1 \cdot J$. Dakle, ta kompozicija je koincidencija, tj. važi $S_4 \cdot S_3 \cdot S_2 \cdot S_1 \cdot J = \varepsilon$, pa je tada $J = S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 \cdot S_4$. $\square$

5.3 Pramenovi ravni

Skup χ svih ravni prostora E^3 koje se seku po jednoj pravoj s nazivaju se *pramenom koaksijalnih ravni* sa osom s i simbolički obeležavaju sa χ_s. Skup χ svih ravni prostora E^3 koje su paralelne s nekom ravni σ, nazivaju se *pramenom paralelnih ravni* i obeležavaju sa χ_σ [2].



Slika 7: Pramen koaksijalnih ravni χ_s

Teorema 18. *Ako tri ravni prostora E^3, α, β, γ, pripadaju nekom pramenu χ, tada je kompozicija $S_\gamma \cdot S_\beta \cdot S_\alpha$ neka ravanska refleksija S_δ kojoj osnova δ pripada pramenu χ.*

Dokaz. Pretpostavimo najpre da je χ pramen koaksijalnih ravni; neka je s njegova osa (Slika 7).

S obzirom na to da prava s pripada svakoj od ravni α, β, γ, svaka tačka prave s invarijantna je u kompoziciji $S_\gamma \cdot S_\beta \cdot S_\alpha$. Na taj način indirektna izometrija $S_\gamma \cdot S_\beta \cdot S_\alpha$ poseduje dve razne invarijantne tačke te prema teoremi 12 je neka ravanska refleksija S_δ. Pri tome je $s \subset \delta$, i prema tome, $\delta \in \chi$.

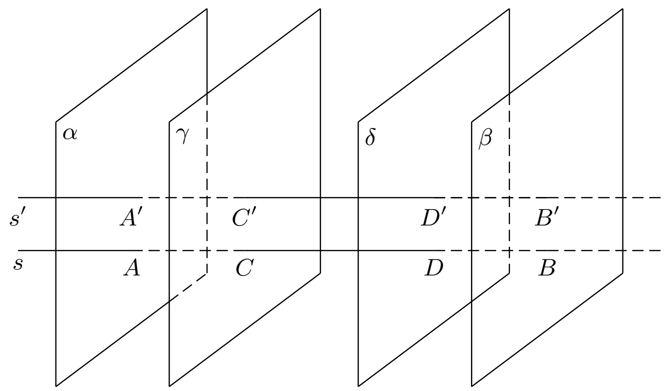
Pretpostavimo sad da je χ pramen paralelnih ravni (Slika 8).

Neka su s i s' dve razne prave upravne na ravnima α, β, γ.

Pošto svaka od ravanskih refleksija $S_{\alpha'}, S_{\beta'}, S_{\gamma'}$ prevodi svaku od pravih s i s' u tu istu pravu, menjajući njenu orijentaciju, i kompozicija $S_\gamma \cdot S_\beta \cdot S_\alpha$ takođe prevodi svaku od pravih s i s' u tu istu pravu menjajući njenu orijentaciju. Stoga kompozicija $S_\gamma \cdot S_\beta \cdot S_\alpha$ poseduje na svakoj od pravih s i s' po jednu invarijantnu tačku. Budući da je ta kompozicija indirektna izometrija prostora E^3 sa dve razne invarijantne tačke, prema teoremi 12, ona je neka ravanska refleksija S_δ. Pri tome je $\delta \perp s$ i, prema tome $\delta \in \chi$.

$\square$

Teorema 19. *Ako je kompozicija $S_\gamma \cdot S_\beta \cdot S_\alpha$ sastavljena iz triju ravanskih refleksija prostora E^3 neka ravanska refleksija S_δ, tada osnove $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tih ravanskih refleksija pripadaju jednom pramenu.*



Slika 8: Pramen paralelnih ravni χ_σ

Dokaz. Pretpostavimo najpre da se ravni α i β seku po nekoj pravoj s. U kompoziciji $S_\beta \cdot S_\alpha$ svaka tačka prave s je invarijantna. Budući da je $S_\gamma \cdot S_\beta \cdot S_\alpha = S_\delta$, tj. $S_\beta \cdot S_\alpha = S_\gamma \cdot S_\delta$, i u kompoziciji $S_\gamma \cdot S_\delta$ biće svaka tačka prave s invarijantna. Stoga se i ravni γ i δ seku po pravoj s, te sve ravni $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ pripadaju jednom pramenu.

Pretpostavimo sad da je $\alpha \parallel \beta$. Ako obeležimo sa s neku pravu upravnu na ravnima α i β, imamo da je $S_\beta \cdot S_\alpha(s) = s$. Budući da je $S_\gamma \cdot S_\beta \cdot S_\alpha = S_\delta$, tj. $S_\beta \cdot S_\alpha = S_\gamma \cdot S_\delta$, biće i $S_\gamma \cdot S_\delta(s) = s$. Stoga je $\gamma, \delta \perp s$, te sve ravni $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ pripadaju jednom pramenu. □

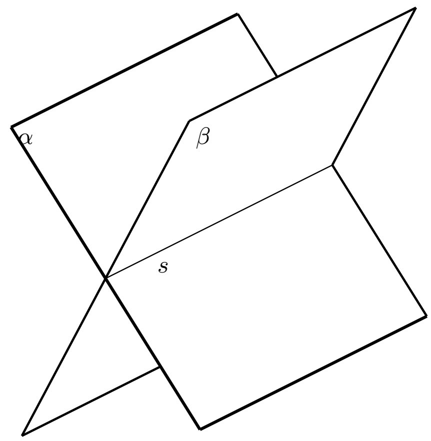
5.4 Osna rotacija prostora E^3

U teoremi 17 je dokazano da se svaka izometrija prostora E^3 može predstaviti kao kompozicija najviše četiriju ravanskih refleksija. Vodeći se tim tvrđenjem najpre će biti izučena izometrija prostora E^3, koja je kompozicija dveju ravanskih refleksija $J = S_\beta \cdot S_\alpha$. Ukoliko se osnove α i β seku duž prave, obeležimo je sa s, kompozicija ravanskih refleksija S_α i S_β je *osna rotacija prostora* E^3 u oznaci $R_{s,w}$.

Prava s se naziva *osom rotacije*, a w je ugao dvostrukog orijantisanog diedra koji, redom, obrazuju ravni α i β i naziva se *uglom rotacije* $R_{s,w}$.

Budući da su ravanske refleksije indirektne izometrije, kompozicija dveju refleksija je direktna izometrija, odnosno, osna rotacija prostora E^3 je direktna izometrija.

Teorema 20. *Svaka direktna izometrija J prostora E^3, koja poseduje najmanje jednu invarijantnu tačku O je koincidencija ili neka osna rotacija*



Slika 9: Osna rotacija prostora E^3

$R_{s,w}$ kojoj osa s sadrži tačku O.

Dokaz. Ako je $J = \varepsilon$, tvrđenje sleduje neposredno.

Razmotrimo sada slučaj kada je $J \neq \varepsilon$. U tom slučaju postoji tačka P prostora E^3 čija je slika u izometriji J tačka P' prostora E^3, tj. važi $J(P) = P'$.

Neka je π_1 medijalna ravan duži PP'. S obzirom na to da u izometriji J tačkama O i P odgovaraju respektivno tačke O i P', važi relacija $OP \cong OP'$, pa je tačka O u medijalnoj ravni π_1 duži PP'. Stoga kompozicija $S_{\pi_1} \cdot J$ poseduje dve razne invarijantne tačke O i P. Budući da je J direktna, a ravanska refleksija S_{π_1} indirektna, kompozicija $S_{\pi_1} \cdot J$ je indirektna izometrija. Na taj način, indirektna izometrija $S_{\pi_1} \cdot J$ poseduje dve razne tačke O i P, te je na osnovu teoreme 12 neka ravanska refleksija S_{π_2}, kojoj osnova π_2 sadrži tačke O i P. Stoga je $S_{\pi_1} \cdot J = S_{\pi_2}$ i, prema tome, $J = S_{\pi_1} \cdot S_{\pi_2}$.

Iz relacija $P \notin \pi_1$ i $P \in \pi_2$ sledi da je $\pi_1 \neq \pi_2$. S obzirom na to da dve razne ravni π_1 i π_2 imaju zajedničku tačku O, one se seku po nekoj pravoj s koja sadrži tačku O. Stoga je kompozicija $S_{\pi_1} \cdot S_{\pi_2}$, tj. izometrija J neka osna rotacija $R_{s,w}$ prostora E^3.

$\square$

Dokazaćemo par bitnih svojstava osne rotacije prostora.

Teorema 21. *Ako je $R_{s,w}$ osna rotacija i J bilo koja izometrija prostora*

E^3 *i ako važi* $J(s) = s'$ *i* $J(w) = w'$, *tada je:*

$$J \cdot R_{s,w} \cdot J^{-1} = R_{s',w'}.$$

Dokaz. Ako obeležimo sa μ i v ravni prostora E^3 takve da je $R_{s,w} = S_v \cdot S_\mu$, tada se ravni μ i v seku po pravoj s pod uglom $\frac{w}{2}$. Ako zatim obeležimo sa μ' i v' ravni koje u izometriji J odgovaraju respektivno ravnima μ i v, tada se ravni μ' i v' seku po pravoj s' pod uglom $\frac{w'}{2}$, te primenom teoreme 15, nalazimo da je:

$$\begin{aligned}
J \cdot R_{s,w} \cdot J^{-1} &= J \cdot (S_v \cdot S_\mu) \cdot J^{-1} \\
&= J \cdot (S_v \cdot J^{-1} \cdot J \cdot S_\mu) \cdot J^{-1} \\
&= (J \cdot S_v \cdot J^{-1}) \cdot (J \cdot S_\mu \cdot J^{-1}) \\
&= S_{v'} \cdot S_{\mu'} \\
&= R_{s',w'}.
\end{aligned}$$

□

Uslov komutativnosti osne rotacije i ravanske refleksije dat je narednom teoremom.

Teorema 22. *Osna rotacija* $R_{s,w}$ *i ravanska refleksija* S_π *prostora* E^3 *su dve komutativne transformacije ako i samo ako je osa* s *osne rotacije* $R_{s,w}$ *upravna na osnovu* π *ravanske refleksije* S_π.

Dokaz. Pretpostavimo najpre da važi:

$$S_\pi \cdot R_{s,w} = R_{s,w} \cdot S_\pi, \quad \text{tj.} \quad S_\pi \cdot R_{s,w} \cdot S_\pi = R_{s,w}. \tag{$*$}$$

Ako obeležimo sa s' pravu određenu relacijom $S_\pi(s) = s'$, i sa w' ugao određen relacijom $J(w) = w'$, primenom prethodne teoreme, nalazimo da je:

$$S_\pi \cdot R_{s,w} \cdot S_\pi = R_{s',w'}. \tag{$**$}$$

Iz (*) i (**) sledi da je $R_{s,w} = R_{s',w'}$. Stoga su ose s i s' istovetne a orijentisani uglovi w i w' podudarni i istosmerni, što je moguće samo u slučaju ako je $s \perp \pi$.

Obratno, pretpostavimo da je $s \perp \pi$. Ako obeležimo sa s' pravu određenu relacijom $S_\pi(s) = s'$ i sa w' ugao određen relacijom $J(w) = w'$, biće prave s

i s' istovetne, a uglovi orijentisani uglovi w i w' podudarni i istosmerni, pa je $R_{s,w} = R_{s',w'}$. Stoga, primenom prethodne teoreme, nalazimo da je:

$$\begin{aligned} S_\pi \cdot R_{s,w} &= S_\pi \cdot R_{s,w} \cdot S_\pi \cdot S_\pi \\ &= R_{s',w'} \cdot S_\pi \\ &= R_{s,w} \cdot S_\pi. \end{aligned}$$

□

Uslov komutativnosti dveju osnih rotacija, kojima uglovi rotacije nisu opruženi dat je narednom teoremom.

Teorema 23. *Dve osne rotacije $R_{a,\alpha}$ i $R_{b,\beta}$ prostora E^3, kojima uglovi α i β nisu opruženi, su komutativne transformacije ako i samo ako se ose tih rotacija poklapaju.*

Dokaz. Pretpostavimo najpre da je:

$$R_{b,\beta} \cdot R_{a,\alpha} = R_{a,\alpha} \cdot R_{b,\beta}, \quad \text{tj.} \quad R_{b,\beta} \cdot R_{a,\alpha} \cdot R_{b,\beta}^{-1} = R_{a,\alpha}. \qquad (*)$$

Ako važi $R_{b,\beta}(a) = a'$ i $R_{b,\beta}(\alpha) = \alpha'$ prema zakonu transmutacije osne rotacije $R_{a,\alpha}$ osnom rotacijom $R_{b,\beta}$, imamo da je:

$$R_{b,\beta} \cdot R_{a,\alpha} \cdot R_{b,\beta}^{-1} = R_{a',\alpha'}. \qquad (**)$$

Iz (*) i (**) sledi da je $R_{a,\alpha} = R_{a',\alpha'}$. Stoga su prave a i a' istovetne, a uglovi α i α' podudarni i istosmerni, što je moguće samo u slučaju kada je $a = b$.

Obratno, pretpostavimo da je $a = b$. Ako važi $R_{b,\beta}(a) = a'$ i $R_{b,\beta}(\alpha) = \alpha'$ biće prave a i a' istovetne a uglovi α i α' podudarni i istosmerni, pa je $R_{a,\alpha} = R_{a',\alpha'}$. Stoga prema zakonu transmutacije osne rotacije $R_{a,\alpha}$ osnom rotacijom $R_{b,\beta}$ važi:

$$R_{b,\beta} \cdot R_{a,\alpha} \cdot R_{b,\beta}^{-1} = R_{a,\alpha}, \quad \text{tj.} \quad R_{b,\beta} \cdot R_{a,\alpha} = R_{a,\alpha} \cdot R_{b,\beta}.$$

□

Teorema 24. *Skup R_s koji se sastoji iz koincidencije i svih osnih rotacija prostora E^3, koje imaju zajedničku osu s, je grupa u odnosu na proizvod transformacija.*

Dokaz. Obeležimo sa $R_{s,\alpha}$ i $R_{s,\beta}$ bilo koje dve osne rotacije iz skupa R_s, sa π proizvoljnu ravan koja sadrži pravu s i sa μ, v ravni određene relacijama:

$$R_{s,\alpha} = S_\pi \cdot S_\mu \quad \text{i} \quad R_{s,\beta} = S_v \cdot S_\pi.$$

Koristeći ove jednakosti, nalazimo da je:

$$R_{s,\beta} \cdot R_{s,\alpha} = S_v \cdot S_\pi \cdot S_\pi \cdot S_\mu = S_v \cdot S_\mu.$$

Budući da ravni μ i v seku ravan π po pravoj s, ravni μ i v imaju zajedničku pravu s, prema tome one su istovetne ili se seku po toj pravoj s. Ako su istovetne, odnosno, ako je $\mu = v$, tada je $S_v \cdot S_\mu = \varepsilon$; ako je $\mu \cap v = s$, kompozicija $S_v \cdot S_\mu$ je neka osna rotacija $R_{s,\gamma}$. Dokazali smo da u svakom slučaju važi relacija $R_{s,\beta} \cdot R_{s,\alpha} \in R_s$.

Ako obeležimo sa $R_{s,w}$ bilo koju osnu rotaciju iz skupa R_s i sa μ, v ravni prostora E^3 takve da je $R_{s,w} = S_v \cdot S_\mu$, biće:

$$R_{s,w}^{-1} = (S_v \cdot S_\mu)^{-1} = S_\mu \cdot S_v = R_{s,-w} \in R_s.$$

Dakle i inverzna transformacija transformacije $R_{s,w}$ pripada skupu R_s.

Na osnovu teoreme 3 skup R_s predstavlja elemente grupe $G(J)$ svih izometrija prostora E^3, pa iz dokazanih svojstava sledi da je skup R_s takođe grupa. □

Ovu grupu nazivamo *grupa osnih rotacija prostora* E^3 *oko prave* s i obeležavamo sa $G(R_s)$.

Teorema 25. *Grupa* $G(R_s)$ *osnih rotacija prostora* E^3 *oko prave* s *je komutativna.*

Dokaz. Obeležimo sa π proizvoljnu ravan koja sadrži pravu s i sa μ, v ravni takve da je:

$$R_{s,\alpha} = S_\pi \cdot S_\mu \quad \text{i} \quad R_{s,\beta} = S_v \cdot S_\pi.$$

Koristeći ove jednakosti, nalazimo da je:

$$R_{s,\beta} \cdot R_{s,\alpha} = S_v \cdot S_\pi \cdot S_\pi \cdot S_\mu = S_v \cdot S_\mu,$$

$$R_{s,\alpha} \cdot R_{s,\beta} = S_\pi \cdot S_\mu \cdot S_v \cdot S_\pi.$$

Budući da ravni μ i v seku ravan π po istoj pravoj s, ravni π, μ, v pripadaju koaksijalnom pramenu ravni χ_s, te kompozicija S_π, S_μ, S_v je neka ravanska refleksija, dakle involuciona transformacija prostora E^3. Stoga je kvadrat te kompozicije koincidencija, naime biće:

$$S_\pi \cdot S_\mu \cdot S_v \cdot S_\pi \cdot S_\mu \cdot S_v = \varepsilon,$$

tj.:

$$S_\pi \cdot S_\mu \cdot S_v \cdot S_\pi = S_v \cdot S_\mu.$$

Iz ove i prethodnih jednakosti nalazimo da je:

$$R_{s,\beta} \cdot R_{s,\alpha} = R_{s,\alpha} \cdot R_{s,\beta}.$$

□

Primer 3. *Dokazaćemo da je kompozicija dveju osnih rotacija euklidskog prostora E^3, kojima se ose seku u nekoj tački O, osna rotacija kojoj osa sadrži tačku O.*

Dokaz. Neka su $R_{a,\alpha}$ i $R_{b,\beta}$ osne rotacije prostora E^3, kojima se ose a i b seku u tački O. Ako obeležimo sa π ravan određenu pravama a i b, a sa μ i v ravni takve da je:

$$R_{a,\alpha} = S_\pi \cdot S_\mu \quad \text{i} \quad R_{b,\beta} = S_v \cdot S_\pi$$

tada kompoziciju datih osnih rotacija $R_{a,\alpha}$ i $R_{b,\beta}$ možemo napisati u obliku:

$$R_{b,\beta} \cdot R_{a,\alpha} = S_v \cdot S_\pi \cdot S_\pi \cdot S_\mu = S_v \cdot S_\mu.$$

S obzirom na to da ravni μ i v seku ravan π po dvema raznim pravama a i b, imamo da je $\mu \neq v$. Dve razne ravni μ i v imaju zajedničku tačku O, prema tome one se seku po nekoj pravoj c. Stoga kompozicija $S_v \cdot S_\mu$ je neka osna rotacija $R_{c,\gamma}$, pa je i:

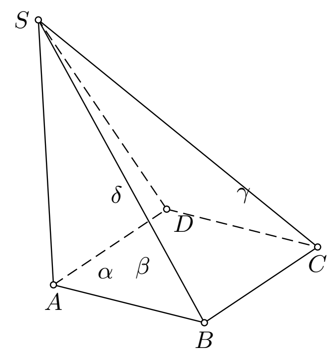
$$R_{b,\beta} \cdot R_{a,\alpha} = R_{c,\gamma}.$$

□

Primer 4. *Dokazati da je kompozicija sastavljena iz četiriju ravanskih refleksija prostora E^3, kojima su osnove određene bočnim pljosnima četvorostrane piramide, osna rotacija tog prostora. Konstruisati osu te osne rotacije.*

Dokaz. Označimo sa α, β, γ i δ ravni određene temenima A, B, S; B, C, S; C, D, S i D, A, S četvorostrane piramide $SABCD$ čija je osnova četvorougao $ABCD$. Potrebno je dokazati da je kompozicija $S_\delta \cdot S_\gamma \cdot S_\beta \cdot S_\alpha$ osna rotacija.

Neka je π ravan određena tačkama B, D i S. Kompozicija $S_\beta \cdot S_\alpha$ je osna rotacija (jer ravni α i β imaju zajedničku pravu BS) i ona može biti



Slika 10: Kompozicija $S_\delta \cdot S_\gamma \cdot S_\beta \cdot S_\alpha$ je osna rotacija

predstavljena kao kompozicija $S_\pi \cdot S_\phi$, gde je ϕ ravan koja sadrži pravu BS i usmereni ugao, koji zahvataju ravni ϕ i π podudaran je usmerenom uglu μ_1 koji zahvataju ravni α i β (jer je $S_\beta \cdot S_\alpha = R_{BS,2\mu_1} = S_\pi \cdot S_\phi$).

Kompozicija $S_\delta \cdot S_\gamma$ je osna rotacija (jer ravni γ i δ imaju zajedničku pravu DS) i ona može biti predstavljena kao kompozicija $S_\psi \cdot S_\pi$, gde je ψ ravan koja sadrži pravu DS i usmeren ugao μ_2 koji zahvataju ravni π i ψ podudaran je usmerenom uglu koji zahvataju ravni γ i δ. Dakle,

$$S_\delta \cdot S_\gamma \cdot S_\beta \cdot S_\alpha = S_\psi \cdot S_\pi \cdot S_\pi \cdot S_\phi = S_\psi \cdot S_\phi.$$

Ravni ϕ i ψ su različite (jer bi u protivnom obe sadržale prave BS i DS, pa bi bile identične sa ravni π) i obe sadrže tačku S, odakle sledi da imaju neku zajedničku pravu s koja sadrži tačku S. Data kompozicija je, dakle, osna rotacija $S_\psi \cdot S_\phi$ čija je osa prava s, a ugao rotacije jednak je dvostrukom uglu između ravni ϕ i ψ.

□

5.5 Osna simetrija prostora E^3

Kada su kod osne rotacije $R_{s,w} = S_\beta \cdot S_\alpha$ osnove α i β, dveju ravanskih refleksija S_β i S_α međusobno upravne, takva izometrija prostora E^3 se naziva *osna simetrija prostora* E^3 i obeležavamo je sa S_s. Kao i osna rotacija, osna simetrija je direktna izometrija, kao kompozicija dveju ravanskih refleksija, koje su indirektne izometrije prostora E^3. Jedine invarijantne tačke su tačke ose s a invarijantne su i ravni koje sadrže osu s i ravni koje su upravne na osu s.

Zbog upravnosti osnova α i β važi zakon komutativnosti ravanskih refleksija S_α i S_β u osnoj simetriji (teorema 16), tj. važi:

$$S_s = S_\beta \cdot S_\alpha = S_\alpha \cdot S_\beta.$$

Dokazaćemo par bitnih svojstava osnih simetrija prostora E^3.

Za razliku od osnih rotacija, osne simetrije su involucione transformacije. Zbog svoje involutivnosti one poseduju niz specifičnih svojstava, koja će biti dokazana.

Teorema 26. *Osna simetrija S_s prostora E^3 je involuciona transformacija.*

Dokaz. Ako obeležimo sa α i β dve ravni prostora E^3 koje su upravne međusobno, biće $S_s = S_\beta \cdot S_\alpha$. Na osnovu svojstva komutativnosti i involutivnosti ravanskih refleksija, sledi da je:

$$S_s^2 = (S_\beta \cdot S_\alpha) \cdot (S_\beta \cdot S_\alpha) = (S_\beta \cdot S_\beta) \cdot (S_\alpha \cdot S_\alpha) = \varepsilon.$$

□

Teorema 27. *Ravanska refleksija S_π i osna simetrija S_p prostora E^3, kojima osa p ne pripada osnovi π, su dve komutativne transformacije ako i samo ako je prava p upravna na ravan π.*

Dokaz. Pretpostavimo najpre da je:

$$S_\pi \cdot S_p = S_p \cdot S_\pi, \quad \text{tj.} \quad S_\pi \cdot S_p \cdot S_\pi = S_p. \tag{$*$}$$

Ako obeležimo sa p' pravu određenu relacijom $S_\pi(p) = p'$, prema zakonu za transmutaciju osne simetrije S_p ravanskom refleksijom S_π, imamo da je:

$$S_\pi \cdot S_p \cdot S_\pi = S_{p'}. \tag{$**$}$$

Iz jednakosti (*) i (**) sledi da je $S_p = S_{p'}$ i, prema tome, da je $p = p'$. S obzirom na to da prava ne pripada ravni, jednakost $p = p'$ važi samo u slučaju kada je $p \perp \pi$.

Obratno, pretpostavimo sad da je $p \perp \pi$. Iz te relacije sledi da je $S_\pi(p) = p$, te prema zakonu za transmutaciju osne simetrije S_p ravanskom refleksijom S_π nalazimo da je:

$$S_\pi \cdot S_p \cdot S_\pi = S_p, \quad \text{tj.} \quad S_\pi \cdot S_p = S_p \cdot S_\pi.$$

□

Primer 5. *Ako su p, q i r tri prave prostora E^3 međusobno upravne u tački O, dokazati da je:*

$$S_r \cdot S_q \cdot S_p = \varepsilon.$$

Dokaz. Neka su p, q i r tri prave koje su međusobno upravne i koje se seku u tački O. Ako je π ravan određena pravama p i q, ravan μ pravama r i q a ravan v pravama r i p, ove tri ravni su, takođe, međusobno upravne. Obeležimo sa

$$p = v \cap \pi, \quad q = \pi \cap \mu \quad \text{i} \quad r = \mu \cap v$$

odgovarajuće prave. Tada imamo da je:

$$S_r = S_\mu \cdot S_v, \quad S_q = S_\mu \cdot S_\pi \quad \text{i} \quad S_p = S_\pi \cdot S_v$$

gde su S_p, S_q i S_r osne simetrije. Odatle je

$$S_r \cdot S_q \cdot S_p = S_\mu \cdot S_v \cdot S_\mu \cdot S_\pi \cdot S_\pi \cdot S_v.$$

Kako su ravni π, μ i v međusobno upravne, važe komutativnost i involutivnost ravanskih refleksija, pa je:

$$\begin{aligned} S_r \cdot S_q \cdot S_p &= S_\mu \cdot S_v \cdot S_\mu \cdot S_v \\ &= (S_\mu \cdot S_\mu) \cdot (S_v \cdot S_v) = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Primer 6. *Dokazati da je kompozicija dveju osnih simetrija S_p i S_q prostora E^3, kojima se ose p i q seku u nekoj tački O, osna rotacija tog prostora.*

Dokaz. Neka su S_p i S_q osne simetrije prostora E^3, kojima se ose p i q seku u tački O. Ako obeležimo sa π ravan određenu pravama a i b, a sa μ i v ravni koje su upravne na ravan π i čiji su preseci sa ravni π prave a i b, redom, imamo da važi:

$$S_p = S_\pi \cdot S_\mu \quad \text{i} \quad S_q = S_v \cdot S_\pi.$$

Tada važi

$$S_q \cdot S_p = S_v \cdot S_\pi \cdot S_\pi \cdot S_\mu = S_v \cdot S_\mu.$$

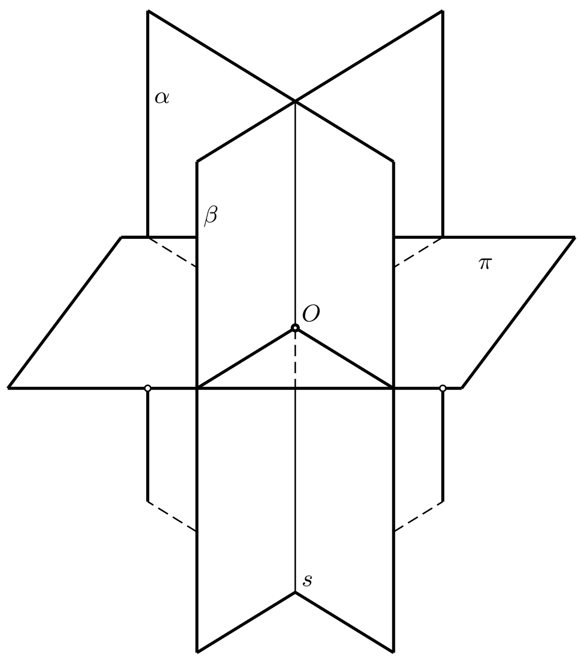
S obzirom na to da ravni μ i v seku ravan π po dvema raznim pravama p i q, imamo da je $\mu \neq v$. Na taj način, dve razne ravni μ i v imaju zajedničku tačku O, prema tome one se seku po nekoj pravoj r. Stoga je kompozicija $S_v \cdot S_\mu$ neka osna rotacija $R_{r,\gamma}$, pa je i

$$S_q \cdot S_p = R_{r,\gamma}.$$

□

5.6 Osnorotaciona refleksija prostora E^3

Ako je izometrija J prostora E^3 kompozicija triju ravanskih refleksija $J = S_\pi \cdot S_\beta \cdot S_\alpha$, pri čemu se ravni α i β seku duž neke prave s koja je upravna na ravni π, izometrija J je *rotaciona refleksija*, u oznaci $R_{\pi;s,w}$.



Slika 11: Rotaciona refleksija prostora E^3

Ravan π nazivamo *osnovom*, pravu s *osom rotacione refleksije* $R_{\pi;s,w}$, tačku $\{O\} = s \cap \pi$ nazivamo *središtem* ili *centrom osnorotacione refleksije* $R_{\pi;s,w}$, a w je ugao dvostrukog orijentisanog diedra koji, redom, obrazuju ravni α i β, i njega zovemo *uglom rotacione refleksije* $R_{\pi;s,w}$.

Budući da se ravni α i β seku duž prave s, kompozicija $S_\beta \cdot S_\alpha$ je osna rotacija $R_{s,w}$ prostora E^3. Odatle sledi da je osnorotaciona refleksija $R_{\pi;s,w}$ kompozicija osne rotacije $R_{s,w}$ i ravanske refleksije, pri čemu je osa s upravna na ravan π. Iz te upravnosti, na osnovu teoreme 22, sledi da su u rotacionoj refleksiji osna rotacija i ravanska refleksija komutativne izometrije. Dakle, imamo da važi:

$$R_{\pi;s,w} = S_\pi \cdot R_{s,w} = R_{s,w} \cdot S_\pi.$$

S obzirom na to da je osna rotacija direktna izometrija, a ravanska refleksija indirektna, njihova kompozicija, prema tome i osnorotaciona refleksija prostora E^3 je indirektna izometrija.

Zaključujemo na osnovu rečenog, da je osnorotaciona refleksija $R_{\pi;s,w}$ prostora E^3 jednoznačno određena osnovom π, osom s i orijentisanim uglom w.

Osnorotaciona refleksija ima samo jednu invarijantnu tačku, to je tačka $\{O\} = \pi \cap s$. Ako ugao w nije opružen, ona poseduje jedinstvenu invarijantnu pravu s, i jedinstvenu invarijantnu ravan π.

Teorema 28. *Svaka indirektna izometrija J prostora E^3 koja ima jedinstvenu invarijantnu tačku O je osnorotaciona refleksija sa središtem O.*

Dokaz. Neka je X tačka prostora E^3 takva da je $J(X) = X'$ i $X \neq X'$. Iz relacije $(O,X) \cong (O,X')$ sledi da tačka O pripada medijalnoj ravni π_1 duži XX'. Kompozicija $S_{\pi_1} \cdot J$ je direktna izometrija prostora E^3 sa dvema raznim invarijantnim tačkama O i X, te prema teoremi 20 je koincidencija ili neka osna rotacija $R_{s,w}$ kojoj osa s sadrži tačke O i X.

Ne može predstavljati koincidenciju, jer bi u tom slučaju iz relacije $S_{\pi_1} \cdot J = \varepsilon$ sledila relacija $J = S_{\pi_1}$, te bi transformacija J sem tačke O imala još invarijantnih tačaka, što je suprotno pretpostavci. Stoga $S_{\pi_1} \cdot J = R_{s,w}$ i, prema tome, $J = S_{\pi_1} \cdot R_{s,w}$.

S obzirom na to da prava s sadrži tačku O koja se nalazi u ravni π_1 i tačku X koja se nalazi van ravni π_1, prava s prodire ravan π_1 u tački O. Ako je $s \perp \pi_1$, transformacija J je po definiciji osnorotaciona refleksija. Ako nije $s \perp \pi_1$, obeležimo sa π_2 ravan koja sadrži pravu s a upravna je na ravan π_1 i sa π_3 ravan takvu da je $R_{s,w} = S_{\pi_s} \cdot S_{\pi_3}$. S obzirom na to da su ravni π_1 i π_2 upravne među sobom, one se seku po nekoj pravoj s_1. Ako je σ_1 ravan koja sadrži pravu s a upravna je na ravan π_3, zatim σ_2 ravan takva da je $S_{\pi_1} \cdot S_{\pi_2} = S_{\sigma_1} \cdot S_{\sigma_2}$, kompozicija $S_{\sigma_2} \cdot S_{\sigma_3}$ je neka osna rotacija $R_{t,\sigma}$ kojoj je osa t upravna na ravan σ, pa je:

$$J = S_{\pi_1} \cdot S_{\pi_2} \cdot S_{\pi_3} = S_{\sigma_1} \cdot S_{\sigma_2} \cdot S_{\sigma_3} = S_{\sigma_1} \cdot R_{t,\sigma} = R_{\sigma_1;t,\sigma}.$$

□

Teorema 29. *Svaka direktna izometrija prostora E^3 se može predstaviti kao kompozicija dveju osnih simetrija.*

Dokaz. Ako je direktna izometrija J prostora E^3 koincidencija, ona se može izraziti kao kompozicija dveju osnih simetrija $S_s \cdot S_s$ gde je s bilo koja prava.

Ako izometrija J nije koincidencija, tada u prostoru E^3 postoji tačka P takva da je njena slika u transformaciji J tačka P', tako da važi $P \neq P'$. Neka je π medijalna ravan duži PP'. Tada je kompozicija $S_\pi \cdot J$ indirektna izometrija sa invarijantnom tačkom P, pa je ona na osnovu teorema 28 i 12 ili ravanska refleksija, ili rotaciona refleksija.

Ako je $S_\pi \cdot J = S_w$, α ravan upravna i na π i na w, a s i m presečne prave ravni α sa ravnima π i w, tada je

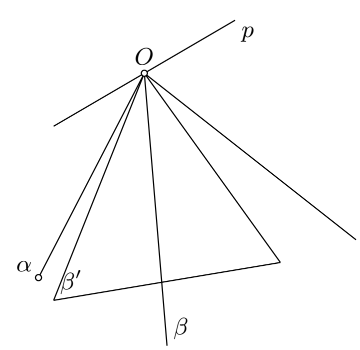
$$J = S_\pi \cdot S_w = S_\pi \cdot S_\alpha \cdot S_\alpha \cdot S_w = S_s \cdot S_m.$$

Ako je $S_\pi \cdot J = R_{\delta;s,w}$, ako je β ravan koja sadrži s i upravna je na π, γ ravan takva da je $R_{s,w} = S_\beta \cdot S_\gamma$, a p i q presečne prave, redom parova ravni π i β, γ i δ, tada je

$$J = S_\pi \cdot R_{\delta;s,w} = S_\pi \cdot S_\beta \cdot S_\gamma \cdot S_\delta = S_p \cdot S_q.$$

□

Primer 7. *Dokazati da je kompozicija sastavljena iz triju ravanskih refleksija, kojima su osnove α, β, γ određene pljosnima nekog triedra $O\ a, b, c$ u prostoru E^3, osnorotaciona refleksija; konstruisati osnovu i osu te osnorotacione refleksije.*



Slika 12: Kompozicija $S_\gamma \cdot S_\beta \cdot S_\alpha$ je osnorotaciona refleksija

Dokaz. Neka su a, b i c presečne prave ravni γ i α, α i β, β i γ. Neka su ravni α' i β' ravni koje sadrže pravu b (presečnu pravu ravni α i β) takve da je $\beta' \perp \gamma$ i da je usmereni ugao između ravni α' i β' jednak usmerenom uglu ϕ između ravni α i β. Tada je $S_\beta \cdot S_\alpha = R_{b,2\phi} = S_{\beta'} \cdot S_{\alpha'}$, pa sledi

$$I = S_\gamma \cdot S_\beta \cdot S_\alpha = S_\gamma \cdot S_{\beta'} \cdot S_{\alpha'}.$$

Neka su ravni β'' i γ' ravni koje sadrže presečnu pravu c' ravni β' i γ i takve da je $\beta'' \perp \alpha'$ i $\beta'' \perp \gamma'$. Tada važi $S_\gamma \cdot S_{\beta'} = S_{c'} = S_{\gamma'} \cdot S_{\beta''}$, odakle sledi:

$$I = S_{\gamma'} \cdot S_{\beta''} \cdot S_{\alpha'}.$$

Neka je p presečna prava ravni α' i γ' i neka je ϕ dvostruki usmereni ugao između ravni α' i γ'. Ravni β'' i γ' su normalne, pa ravanske refleksije $S_{\beta''}$ i $S_{\gamma'}$ mogu da komutiraju, odakle sledi

$$I = S_{\beta''} \cdot S_{\gamma'} \cdot S_{\alpha'} = S_{\beta''} \cdot R_{p,\psi}.$$

Kompozicija I je, dakle, osnorotaciona refleksija sa osnovom β'', osom p i za ugao ψ.

□

5.7 Centralna simetrija prostora E^3

Ukoliko su osnove α i β ravanskih refleksija S_α i S_β upravne međusobno, njihova kompozicija $S_\beta \cdot S_\alpha$ je osna simetrija prostora E^3, pa se osnorotaciona refleksija $R_{\pi;s,w}$ prostora E^3 svodi na *centralnu simetriju* tog prostora. Tačku u kojoj je prava s upravna na ravan π obeležavamo sa O i nazivamo je *središte centralne simetrije*, a samu centralnu simetriju ćemo obeležavati sa S_O. Kao i rotaciona refleksija i centralna simetrija S_O je indirektna izometrija, kao kompozicija indirektne izometrije S_π i direktne izometrije S_s.

Budući da su ravni π, α i β međusobno upravne, osna simetrija S_s i ravanska refleksija S_π su komutativne transformacije u centralnoj simetriji S_O (Teorema 22), tj. važi:

$$S_O = S_\pi \cdot S_s = S_s \cdot S_\pi.$$

Ukoliko za ove osnove α, β i γ uzmemo koordinatne ravni $x = 0, y = 0, z = 0$, vidimo da centralna simetrija u osnovi preslikava svaku tačku (x, y, z) u tačku $(-x, -y, -z)$.

U većini slučajeva centralna simetrija ima isto značenje u trećoj dimenziji kao poluobrtaj u drugoj. Ali kako je 3 neparan broj, centralna simetrija kao kompozicija triju ravanskih refleksija je indirektna, dok je poluobrtaj kao kompozicija dveju osnih refleksija, direktna izometrija. U prostoru, poluobrtaj je rotacija za ugao π oko linije, ili „refleksija u odnosu na liniju", koja je je direktna izometrija.

Centralna simetrija S_O ima samo jednu invarijantnu tačku, to je središte O. Svakoj drugoj tački X prostora E^3 odgovara tačka X' prostora E^3, takva da je O središte duži XX'.

Za razliku od rotacione refleksije, koja nije involuciona transformacija, centralna simetrija je involuciona transformacija. Zbog svoje involutivnosti sadrži niz specifičnih svojstava, koja će biti dokazana.

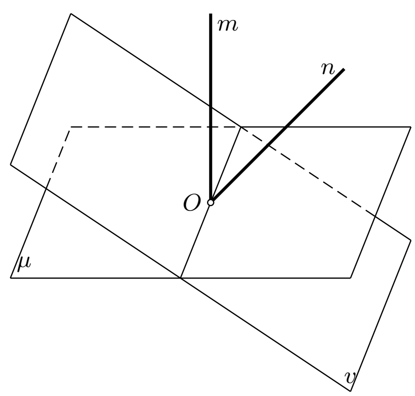
Teorema 30. *Centralna simetrija S_O prostora E^3 je involuciona transformacija.*

Dokaz. Ako obeležimo sa π bilo koju ravan koja sadrži tačku O i sa s pravu koja je u tački O upravna na ravan π, biće $S_O = S_\pi \cdot S_s$, pa na osnovu involutivnosti ravanske refleksije S_π, involutivnosti osne simetrije S_s i komutativnosti ravanske refleksije i osne simetrije je:

$$S_O^2 = (S_\pi \cdot S_s) \cdot (S_\pi \cdot S_s) = (S_\pi \cdot S_\pi) \cdot (S_s \cdot S_s) = \varepsilon.$$

□

Teorema 31. *Centralna simetrija S_O prostora E^3 jednoznačno je određena svojim središtem O.*



Slika 13: S_O je jednoznačno određena svojim središtem O

Dokaz. Da bismo izveli dokaz ovog tvrđenja, dovoljno je dokazati da za svake dve prave m i n koje se seku u tački O i ravni μ i v koje su u tački O upravne na pravama m i n važi relacija $S_\mu \cdot S_m = S_v \cdot S_n$.

Obeležimo sa π ravan određenu pravama m i n, a sa s pravu po kojoj se seku ravni μ i v, biće $s \perp \pi$. Ako zatim, obeležimo sa μ' i v' ravni određene parovima pravih m, s i n, s, imamo da je:

$$S_\mu \cdot S_m = S_\mu \cdot S_{\mu'} \cdot S_\pi = S_s \cdot S_\pi$$

$$= S_v \cdot S_{v'} \cdot S_\pi = S_v \cdot S_n.$$

□

Teorema 32. *U centralnoj simetriji S_O prostora E^3 pravoj x koja sadrži tačku O odgovara ta ista prava, pravoj x koja ne sadrži tačku O odgovara prava x' takva da je $x \parallel x'$ i $x \cap x' = \emptyset$.*

Dokaz. Pretpostavimo najpre da je $O \in x$. Ako obeležimo sa π ravan koja je u tački O upravna na pravoj x, imamo da je $S_O = S_\pi \cdot S_x$, pa je:

$$S_O(x) = S_\pi \cdot S_x(x) = S_\pi(x) = x.$$

Pretpostavimo sada da je $O \notin x$. Ako obeležimo sa π ravan određenu relacijama $O \in \pi$ i $\pi \perp x$, i sa p pravu koja je u tački O upravna na ravni π, biće

$$S_O(x) = S_p \cdot S_\pi(x) = S_p(x) = x'.$$

Budući da u osnoj refleksiji S_p pravoj x koja zadovoljava relacje $x \parallel p$ i $x \cap p = \emptyset$ odgovara druga prava x' koja zadovoljava relacije $x' \parallel p$ i $x' \cap p = \emptyset$, imamo da je $x \parallel x'$ i $x \cap x' = \emptyset$. □

Teorema 33. *U centralnoj simetriji S_O prostora E^3 ravni π koja sadrži tačku O odgovara ta ista ravan, ravni π koja ne sadrži tačku O odgovara ravan π' takva da je $\pi \parallel \pi'$ i $\pi \cap \pi' = \emptyset$.*

Dokaz. Pretpostavimo najpre da je $O \in \pi$. Ako obeležimo sa p pravu koja je u tački O upravna na ravni π, biće $S_O = S_p \cdot S_\pi$, pa je:

$$S_O(\pi) = S_p \cdot S_\pi(\pi) = S_p(\pi) = \pi_0.$$

Pretpostavimo sad da je $O \notin \pi$. Ako obeležimo sa p pravu određenu relacijama $O \in p$ i $p \perp \pi$ i sa σ ravan koja je u tački O upravna na ravan π, biće:

$$S_O(\pi) = S_\sigma \cdot S_p(\pi) = S_\sigma(\pi) = \pi'.$$

Iz relacije $S_\sigma(\pi) = \pi'$ i $\pi \cap \sigma = \emptyset$ sledi da su ravni π i π' s raznih strana ravni σ, pa je $\pi \parallel \pi'$ i $\pi \cap \pi' = \emptyset$. □

Teorema 34. *Ako je S_O centralna simetrija J bilo koja izometrija prostora E^3, zatim O' tačka takva da je: $J(O) = O'$, tada je*

$$J \cdot S_O \cdot J^{-1} = S_{O'}.$$

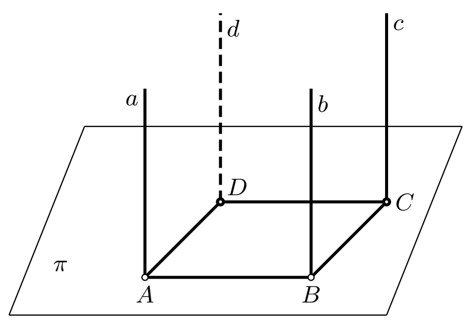
Dokaz. Obeležimo sa p proizvoljnu pravu koja sadrži tačku O i sa π ravan koja je u tački O upravna na pravoj p. Ako u transformaciji J pravoj p odgovara prava p', a ravni π odgovara ravan π', biće $p' \perp \pi'$ u nekoj tački O'. Stoga je:

$$\begin{aligned} J \cdot S_O \cdot J^{-1} &= J \cdot S_\pi \cdot S_p \cdot J^{-1} \\ &= (J \cdot S_\pi \cdot J^{-1}) \cdot (J \cdot S_p \cdot J^{-1}) \\ &= S_{\pi'} \cdot S'_p \\ &= S_{O'}. \end{aligned}$$

□

Teorema 35. *Kompozicija triju centralnih simetrija prostora E^3 je takođe centralna simetrija tog prostora.*

Dokaz. Neka su date tri centralne refleksije S_A, S_B, S_C prostora E^3. Ako



Slika 14: Kompozicija $S_C \cdot S_B \cdot S_A$ je centralna simetrija S_D

je pri tome $A = B$ ili $B = C$, tada neposredno sleduje da je kompozicija $S_C \cdot S_B \cdot S_A$ takođe centralna refleksija.

Razmotrimo slučaj kada je $A \neq B$ i $B \neq C$ (Slika 14). Ako obeležimo sa π ravan koja sadrži tačke A, B, C i s a, b, c prave koje su u tim tačkama upravne i na ravan π, nalazimo da je:

$$S_C \cdot S_B \cdot S_A = (S_\pi \cdot S_c) \cdot (S_b \cdot S_\pi) \cdot (S\pi \cdot S_a) = S_\pi \cdot (S_c \cdot S_b \cdot S_a).$$

S obzirom na to da su prave a, b, c upravne na ravan π, kompozicija $S_c \cdot S_b \cdot S_a$ je neka osna simetrija S_d kojoj je osa d upravna na ravan π. Ako prodornu tačku te ose sa ravni π obeležimo sa D, biće:

$$S_C \cdot S_B \cdot S_A = S\pi \cdot (S_c \cdot S_b \cdot S_a) = S_\pi \cdot S_d = S_D.$$

$\square$

Uslov da centralna simetrija i ravanska refleksija budu komutativne transformacije dat je sledećom teoremom.

Teorema 36. *Centralna simetrija S_O i ravanska refleksija S_π prostora E^3 su dve komutativne transformacije ako i samo ako tačka O pripada ravni π.*

Dokaz. Pretpostavimo najpre da je:

$$S_\pi \cdot S_O = S_O \cdot S_\pi, \quad \text{tj.} \quad S_\pi \cdot S_O \cdot S_\pi = S_O. \tag{$*$}$$

Ako obeležimo sa O' tačku određenu relacijom $S_\pi(O) = O'$, prema zakonu transmutacije centralne simetrije S_O ravanskom refleksijom S_π imamo da je:

$$S_\pi \cdot S_O \cdot S_\pi = S_{O'}. \tag{$**$}$$

Iz jednakosti (*) i (**) sledi da je $S_O = S_{O'}$ i prema tome, da je $O = O'$, što je moguće samo u slučaju kada se tačka O nalazi u ravni π.

Obratno, pretpostavimo sad da je $O \in \pi$. Iz ove relacije sledi da je $S_\pi(O) = O$, te prema zakonu za transmutaciju centralne simetrije S_O ravanskom refleksijom S_π, nalazimo da je:

$$S_\pi \cdot S_O \cdot S_\pi = S_O, \quad \text{tj.} \quad S_\pi \cdot S_O = S_O \cdot S_\pi.$$

$\square$

Uslov da centralna simetrija i osna simetrija budu komutativne dat je teoremom:

Teorema 37. *Centralna simetrija S_O i osna simetrija S_p prostora E^3 su dve komutativne transformacije ako i samo ako tačka O pripada pravoj p.*

Dokaz. Pretpostavimo najpre da je

$$S_p \cdot S_O = S_O \cdot S_p, \quad \text{tj.} \quad S_p \cdot S_O \cdot S_p = S_O. \tag{$*$}$$

Ako obeležimo sa O' tačku određenu relacijom $S_p(O) = O'$, prema zakonu transmutacije centralne simetrije S_O osnom simetrijom S_p, imamo da je:

$$S_p \cdot S_O \cdot S_p = S_{O'}. \tag{$**$}$$

Iz jednakosti (*) i (**) sledi da je $S_O = S_{O'}$ i, prema tome, da je $O = O'$, što je moguće samo u slučaju kada se tačka O nalazi na pravoj p.

Obratno, pretpostavimo sad da je $O \in p$. Iz ove relacije sledi da je $S_p(O) = O$, te prema zakonu transmutacije centralne simetrije S_O osnom simetrijom S_p, nalazimo da je:

$$S_p \cdot S_O \cdot S_p = S_O \quad \text{tj.} \quad S_p \cdot S_O = S_O \cdot S_p.$$

□

Primer 8. *Ako su S_N i S_M centralne simetrije prostora E^3, dokazati da je:*

$$S_N = S_M \Leftrightarrow M = N.$$

Dokaz. ($\Rightarrow$:) Pretpostavimo da važi $S_M = S_N$. Neka su M i N dve razne tačke ravni π prostora E^3 i neka su a i b prave upravne na ravan π u tačkama M i N. Tada imamo da je:

$$S_M = S_\pi \cdot S_a \quad \text{i} \quad S_N = S_\pi \cdot S_b.$$

Iz $S_M = S_N$ sledi da je

$$S_\pi \cdot S_a = S_\pi \cdot S_B / \cdot S_\pi$$

a odavde

$$S_a = S_b.$$

Iz ove jednakosti sledi da su ose osnih ravanskih refleksije S_a i S_b istovetne, odnosno da je $a = b$. Kako je prava a normalna na ravan π u jednoj tački, važi da je $M = N$.

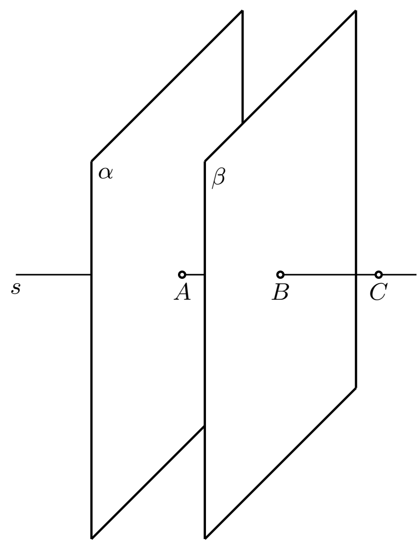
($\Leftarrow$:) Pretpostavimo da važi $M = N$. Odavde neposredno sledi da je $S_N = S_M$. Ako bi važilo $S_N \neq S_M$, tada bi prave a i b bile upravne na ravan π u dvema raznim tačkama M i N, a to je suprotno pretpostavci da je $M = N$. □

5.8 Translacija prostora E^3

Izometrija prostora E^3 koja se može predstaviti kao kompozicija dveju ravanskih refleksija $S_\beta \cdot S_\alpha$, tako da su ravni α i β, redom, upravne u tačkama A i B na nekoj pravoj s i $S_\beta(A) = C$, naziva se *translacija prostora E^3* i obeležavamo je sa $T_{\overrightarrow{AC}}$.

Orijentisanu duž AC nazivamo *vektorom translacije* $T_{\overrightarrow{AC}}$. Reći ćemo da je $T_{\overrightarrow{AC}}$ translacija prostora duž prave AC za vektor AC.

S obzirom na to da su ravni α i β paralelne, važi $\alpha \cap \beta = \emptyset$, pa kompozicija $S_\beta \cdot S_\alpha$, prema tome i translacija $T_{\overrightarrow{AB}}$, nema invarijantnih tačaka. Budući



Slika 15: Translacija prostora E^3

da su ravanske refleksije indirektne izometrije, translacija kao kompozicija dveju ravanskih refleksija jeste direktna izometrija prostora E^3.

Translacija prostora E^3 prevodi svaku pravu $x \parallel AC$ u tu istu pravu, ne menjajući njenu orijentaciju.

Teorema 38. *Izometrijska transformacija J prostora E^3 je translacija tog prostora ako i samo ako se može predstaviti kao kompozicija dveju raznih centralnih simetrija tog istog prostora.*

Dokaz. Pretpostavimo najpre da je izometrijska transformacija prostora E^3 neka translacija $T_{\overrightarrow{PP'}}$ tog prostora. Ako obeležimo sa Q središte duži PP', sa s pravu određenu tačkama P i P', a sa α i β ravni upravne na pravoj s u tačkama P i Q, primenom svojstva involutivnosti osnih simetrija, nalazimo da je:

$$T_{\overrightarrow{PP'}} = S_\beta \cdot S_\alpha = (S_\beta \cdot S_s) \cdot (S_s \cdot S_\alpha) = S_Q \cdot S_P.$$

Obratno, pretpostavimo sada da je izometrija J prostora E^3 kompozicija dveju raznih centralnih simetrija; neka je npr. $S_Q \cdot S_P$. Ako obeležimo sa s pravu određenu tačkama P i Q, sa α i β ravni koje su u tačkama P i Q upravne na pravoj s i sa P' tačku takvu da je $S_\beta(P) = P'$, pa na osnovu svojstva involutivnosti osnih simetrija, nalazimo da je:

$$S_Q \cdot S_P = (S_\beta \cdot S_s) \cdot (S_s \cdot S_\alpha) = S_\beta \cdot S_\alpha = T_{\overrightarrow{PP'}}.$$

□

Dokazaćemo neka bitna svojstva translacija prostora E^3.

Teorema 39. *Ako je $T_{\overrightarrow{MN}}$ translacija i J bilo koja izometrija prostora E^3, zatim M' i N' tačke takve da važi $J(M) = M'$ i $J(N) = N'$, tada važi relacija:*

$$J \cdot T_{\overrightarrow{MN}} \cdot J^{-1} = T_{\overrightarrow{M'N'}}.$$

Dokaz. Ako obeležimo sa μ ravan koja je u tački M upravna na pravoj MN i sa v medijalnu ravan duži MN, biće $T_{\overrightarrow{MN}} = S_v \cdot S_\mu$. Ako zatim obeležimo sa u', v' ravni takve da važi $J(\mu) = \mu'$ i $J(v) = v'$, biće ravan μ' u tački M' upravna na pravoj $M'N'$ a ravan v' medijalna ravan duži $M'N'$, pa je na osnovu zakona transmutacije ravanske refleksije nekom izometrijom:

$$\begin{aligned} J \cdot T_{\overrightarrow{MN}} \cdot J^{-1} &= J \cdot (S_v \cdot S_\mu) \cdot J^{-1} \\ &= J \cdot (S_v \cdot J^{-1} \cdot J \cdot S_\mu) \cdot J^{-1} \\ &= (J \cdot S_v \cdot J^{-1}) \cdot (J \cdot S_\mu \cdot J^{-1}) \\ &= S_{v'} \cdot S_{\mu'} \\ &= T_{\overrightarrow{M'N'}} \end{aligned}$$

□

Uslov da su translacija i ravanska refleksija prostora E^3 komutativne transformacije, dat je sledećom teoremom.

Teorema 40. *Translacija $T_{\overrightarrow{MN}}$ i ravanska refleksija S_π prostora E^3 su dve komutativne transformacije ako i samo ako je prava MN paralelna sa ravni π.*

Dokaz. Pretpostavimo najpre da je:

$$S_\pi \cdot T_{\overrightarrow{MN}} = T_{\overrightarrow{MN}} \cdot S_\pi, \quad \text{tj.} \quad S_\pi \cdot T_{\overrightarrow{MN}} \cdot S_\pi = T_{\overrightarrow{MN}}. \tag{$*$}$$

Ako obeležimo sa M' i N' tačke takve da važi $S_\pi(M) = M'$ i $S_\pi(N) = N'$, prema prethodnoj teoremi imamo da je:

$$S_\pi \cdot T_{\overrightarrow{MN}} \cdot S_\pi = T_{\overrightarrow{M'N'}}. \tag{$**$}$$

Na osnovu (*) i (**) sledi da je $T_{\overrightarrow{MN}} = T_{\overrightarrow{M'N'}}$, pa je i $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$, što je moguće samo u slučaju kada je $MN \parallel \pi$.

Obratno, pretpostavimo da je $MN \parallel \pi$. Ako obeležavamo sa M' i N' tačke takve da važi $S_\pi(M) = M'$ i $S_\pi(N) = N'$, biće orijentisane duži $\overrightarrow{MN}$ i $\overrightarrow{M'N'}$ podudarne i istosmerne, pa je $T_{\overrightarrow{MN}} = T_{\overrightarrow{M'N'}}$. Stoga, primenom prethodne teoreme, nalazimo da je:

$$\begin{aligned} S_\pi \cdot T_{\overrightarrow{MN}} &= S_\pi \cdot T_{\overrightarrow{MN}} \cdot S_\pi \cdot S_\pi \\ &= T_{\overrightarrow{M'N'}} \cdot S_\pi \\ &= T_{\overrightarrow{MN}} \cdot S_\pi. \end{aligned}$$

□

Uslov da su translacija i osna rotacija prostora E^3 komutativne transformacije, dat je sledećom teoremom.

Teorema 41. *Translacija $T_{\overrightarrow{MN}}$ i osna rotacija $R_{s,w}$ prostora E^3 su dve komutativne transformacije ako i samo ako su prave s i MN među sobom paralelne.*

Dokaz. Pretpostavimo najpre da je:

$$R_{s,w} \cdot T_{\overrightarrow{MN}} = T_{\overrightarrow{MN}} \cdot R_{s,w} \quad \text{tj.} \quad R_{s,w} \cdot T_{\overrightarrow{MN}} \cdot R_{s,w}^{-1} = T_{\overrightarrow{MN}}.$$

Ako obeležimo sa M' i N' tačke takve da važi $R_{s,w}(M) = M'$ i $R_{s,w}(N) = N'$, prema zakonu transmutacije translacije nekom izometrijom, imamo da je:

$$R_{s,w} \cdot T_{\overrightarrow{MN}} \cdot R_{s,w}^{-1} = T_{\overrightarrow{M'N'}}.$$

Iz ove i prethodne jednakosti važi $T_{\overrightarrow{MN}} = T_{\overrightarrow{M'N'}}$, pa su orijentisane duži $\overrightarrow{MN}$ i $\overrightarrow{M'N'}$ jednake i istovetne, što je moguće ako i samo ako je $MN \parallel s$.

Obratno, pretpostavimo sad da je $MN \parallel s$.Ako obeležimo sa M' i N' tačke takve da važi $R_{s,w}(M) = M'$ i $R_{s,w}(N) = N'$, biće orijentisane duži $\overrightarrow{MN}$ i $\overrightarrow{M'N'}$ među sobom podudarne i istosmerne, pa je $T_{\overrightarrow{MN}} = T_{\overrightarrow{M'N'}}$. Stoga, teoreme zakonu transmutacije translacije nekom izometrijom, nalazimo da je:

$$\begin{aligned} R_{s,w} \cdot T_{\overrightarrow{MN}} &= R_{s,w} \cdot T_{\overrightarrow{MN}} \cdot R_{s,w}^{-1} \cdot R_{s,w} \\ &= T_{\overrightarrow{M'N'}} \cdot R_{s,w} \\ &= T_{\overrightarrow{MN}} \cdot R_{s,w}. \end{aligned}$$

□

Teorema 42. *Skup T koji se sastoji iz koincidencije i svih translacija prostora E^3 je podgrupa grupe $G(J^+)$ svih direktnih izometrija tog istog prostora.*

Dokaz. Obeležimo sa $T_{\overrightarrow{AB}}$ i $T_{\overrightarrow{CD}}$ bilo koje dve translacije iz skupa T. Ako važi $T_{\overrightarrow{CD}}(B) = E$, imamo da je $T_{\overrightarrow{CD}} = T_{\overrightarrow{BE}}$. Ako su M i N stedišta duži AB i BE, a M' tačka simetrična tački N, biće:

$$T_{\overrightarrow{CD}} \cdot T_{\overrightarrow{AB}} = T_{\overrightarrow{BE}} \cdot T_{\overrightarrow{AB}} = S_N \cdot S_B \cdot S_B \cdot S_M = S_N \cdot S_M = T_{\overrightarrow{MM'}} \in T.$$

Na taj način kompozicija svake dve transformacije iz skupa T je takođe transformacija iz skupa T. Ako je $T_{\overrightarrow{PQ}}$ proizvoljna transformacija iz skupa T i R središte duži PQ, imamo da je:

$$T^{-1}_{\overrightarrow{PQ}} = (S_Q \cdot S_R)^{-1} = S_R \cdot S_Q = T_{\overrightarrow{QP}} \in T.$$

Stoga je inverzna transformacija bilo koje transformacije iz skupa T takođe transformaciju iz skupa T.

S obzirom na to da transformacije iz skupa T su elementi iz grupe $G(J^+)$ (Teorema 3), iz dokazanih svojstava sleduje da je skup T podgrupa te grupe. □

Ovu grupu nazivamo *grupa translacija prostora* E^3 i obeležavamo je sa $G(T)$.

Teorema 43. *Grupa translacija $G(T)$ prostora E^3 je komutativna.*

Dokaz. Obeležimo sa E tačku takvu da važi $T_{\overrightarrow{CD}}(B) = E$. Imamo da je $T_{\overrightarrow{CD}} = T_{\overrightarrow{BE}}$. Ako obeležimo sa M i N središta duži AB i BE, primenom svojstva involutivnosti centralnih simetrija, nalazimo da je:

$$T_{\overrightarrow{CD}} \cdot T_{\overrightarrow{AB}} = T_{\overrightarrow{BE}} \cdot T_{\overrightarrow{AB}} = S_N \cdot S_B \cdot S_B \cdot S_M = S_N \cdot S_M,$$
$$T_{\overrightarrow{AB}} \cdot T_{\overrightarrow{CD}} = T_{\overrightarrow{AB}} \cdot T_{\overrightarrow{BE}} = S_B \cdot S_M \cdot S_N \cdot S_B.$$

Prema teoremi 35, kompozicija $S_B \cdot S_M \cdot S_N$ je centralna simetrija ravni E^2, dakle involuciona transformacija. Stoga kvadrat te kompozicije je koincidencija, naime biće:

$$S_B \cdot S_M \cdot S_N \cdot S_B \cdot S_M \cdot S_N = \varepsilon, \quad \text{tj.} \quad S_B \cdot S_M \cdot S_N \cdot S_B = S_N \cdot S_M.$$

Iz ove i prethodnih dveju jednakosti sledi da je:

$$T_{\overrightarrow{CD}} \cdot T_{\overrightarrow{AB}} = T_{\overrightarrow{AB}} \cdot T_{\overrightarrow{CD}}.$$

□

Primer 9. *Ako su A i B dve razne tačke prostora E^3, dokazati da važe sledeće relacije:*

$$a)(T_{\overrightarrow{AB}})^{-1} = T_{\overrightarrow{BA}}; \quad b)T_{\overrightarrow{AB}} \cdot T_{\overrightarrow{BA}} = \varepsilon.$$

Dokaz. a) Na osnovu teoreme 38 translacija $T_{\overrightarrow{AB}}$ se može predstaviti kao kompozicija dveju centralnih simetrija. Neka je Q središte usmerene duži $\overrightarrow{AB}$. Tada važi:

$$T_{\overrightarrow{AB}} = S_Q \cdot S_A,$$

a odatle

$$T^{-1}_{\overrightarrow{AB}} = (S_Q \cdot S_A)^{-1} = S_A \cdot S_Q = T_{\overrightarrow{BA}},$$

što je i trebalo dokazati.

b) Na osnovu prethodnog primera važi:

$$T_{\overrightarrow{AB}} = S_Q \cdot S_A \quad \text{i} \quad T_{\overrightarrow{BA}} = S_A \cdot S_Q.$$

Sada imamo da je:

$$T_{\overrightarrow{AB}} \cdot T_{\overrightarrow{BA}} = (S_Q \cdot S_A) \cdot (S_A \cdot SQ) = S_Q \cdot (S_A \cdot S_A) \cdot S_Q = S_Q \cdot S_Q = \varepsilon.$$

Ovo važi na osnovu svojstva involutivnosti centralne simetrije.

□

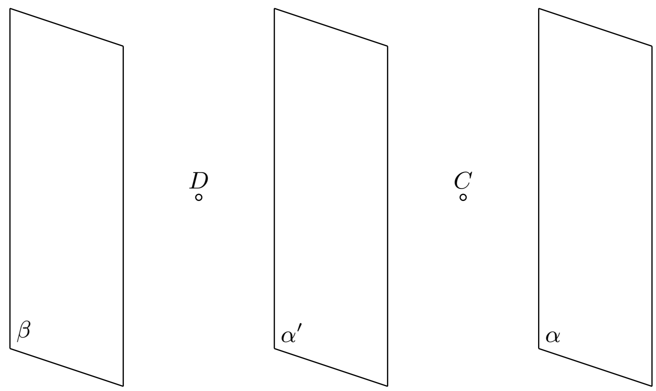
Primer 10. *Ako su S_α i S_β ravanske refleksije i S_C centralna simetrija prostora E^3, dokazati da je kompozicija $S_\beta \cdot S_C \cdot S_\alpha$ neka centralna simetrija S_O ako i samo ako su ravni α i β među sobom paralelne, naime biće:*

$$S_\beta \cdot S_C \cdot S_\alpha = S_O \Leftrightarrow \alpha \parallel \beta.$$

Dokaz. Najpre dokažimo sledeću lemu:

Lema 1. *Ako tačka O ne pripada ravni ϕ, onda se u centralnoj simetriji S_O prostora ravan ϕ preslikava na ravan ψ sa kojom nema zajedničkih tačaka.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da se ravni ϕ i ψ seku u nekoj tački X. Tačka O ne pripada ravni ϕ, pa su tačke X i O različite. Tačka X se u centralnoj simetriji S_O preslikava u tačku X'. Tačke X i O su različite, pa su različite i tačke X i X'. Ravan ϕ se u centralnoj simetriji S_O preslikava na ravan ψ i obratno (jer je centralna simetrija prostora involucija), pa slika tačke X, tačka X', pripada ravni ϕ. Dakle, ravan ϕ sadrži tačke X i X', pa sadrži i središte duži XX', tačku O, što je kontradikcija. Dakle, ravni ϕ i ψ nemaju zajedničkih tačaka. □



Slika 16: $S_\beta \cdot S_C \cdot S_\alpha = S_O \Leftrightarrow \alpha \parallel \beta$.

($\Rightarrow$:) Pretpostavimo da važi $S_\beta \cdot S_C \cdot S_\alpha = S_D$. Iz $S_\beta \cdot S_C \cdot S_\alpha \cdot S_C = S_D \cdot S_C$, na osnovu teoreme o transmutaciji, sledi $S_\beta \cdot S_{\alpha'} = S_D \cdot S_C = T_{2\overrightarrow{CD}}$ gde je $\alpha' = S_C(\alpha)$. Na osnovu leme, ravni α i α' su paralelne. Izometrija $S_\beta \cdot S_{\alpha'}$ je, dakle, translacija, pa nema invarijantnih tačaka, odakle sledi $\beta \parallel \alpha'$. Kako je, na osnovu leme i $\alpha \parallel \alpha'$, sledi $\alpha \parallel \beta$, što je i trebalo dokazati.

($\Leftarrow$:) Pretpostavimo da važi $\alpha \parallel \beta$. Neka je $S_\beta \cdot S_C \cdot S_\alpha = I$. Iz $S_\beta \cdot S_C \cdot S_\alpha \cdot S_C = I \cdot S_C$, na osnovu teoreme o transmutaciji, sledi $S_\beta \cdot S_{\alpha'} = I \cdot S_C$ gde je $\alpha' = S_C(\alpha)$. Važi $\alpha \parallel \beta$ i, na osnovu leme, $\alpha \parallel \alpha'$, pa važi $\alpha' \parallel \beta$. Dakle, izometrija $S_\beta \cdot S_{\alpha'} = I \cdot S_C$ je neka translacija $T_{\overrightarrow{XY}}$, tj. $I \cdot S_C = T_{\overrightarrow{XY}}$, odakle je $I = T_{\overrightarrow{XY}} \cdot S_C = T_{\overrightarrow{CC'}} \cdot S_C$ (gde je $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{XY}$). Ako je D središte duži CC' tada je $T_{\overrightarrow{CC'}} = S_D \cdot S_C$ i $I = S_D \cdot S_C \cdot S_C = S_D$, što je i trebalo dokazati.

□

Primer 11. *Dokazati da je kompozicija parnog broja osnih refleksija euklidskog prostora kojima su ose upravne na nekoj ravni π translacija ili koincidencija.*

Dokaz. Dokažimo najpre sledeću lemu:

Lema 2. *Kompozicija dveju osnih refleksije S_a i S_b kojima su ose upravne na nekoj ravni π je translacija ili koincidencija.*

Dokaz. Ako su a i b identične, kompozicija $S_b \cdot S_a$ je koincidencija. Ako prave a i b nisu identične, neka su A i B presečne tačke tih pravih i ravni π. Postoji ravan (označimo je sa γ) koja sadrži prave a i b (kao prave upravne na ravni π). Ravan γ sadrži tačke A i B, pa sadrži i pravu c. Neka su α i β ravni upravne na pravoj c u tačkama A i B redom. Prave a i b su upravne na pravoj c, pa prava a pripada ravni α i prava b pripada ravni β. Prava c je normalna na ravnima α i β i pripada ravni γ, pa sledi da su međusobno upravne ravni α i γ i ravni β i γ. Dakle, ravni α i γ su međusobno normalne i obe sadrže pravu a, pa važi $S_a = S_\gamma \cdot S_\alpha$. Analogno važi i $S_b = S_\beta \cdot S_\gamma$. Dakle, važi

$$S_b \cdot S_a = S_\beta \cdot S_\gamma \cdot S_\gamma \cdot S_\alpha = S_\beta \cdot S_\alpha.$$

Ravni α i β su upravne na pravoj c, pa je kompozicija $S_\beta \cdot S_\alpha$ translacija prostora. $\square$

Dokažimo tvrđenje zadatka primenom matematičke indukcije. Na osnovu leme, tvrđenje važi za $2 \cdot 1$ pravih. Pretpostavimo da tvrđenje važi za $2n$ pravih, tj. pretpostavimo da je kompozicija $2n$ osnih refleksija kojima su ose upravne na nekoj ravni π, translacija ili koincidencija. Neka je I kompozicija $2(n+1)$ osnih refleksija kojima su ose upravne na nekoj ravni π:

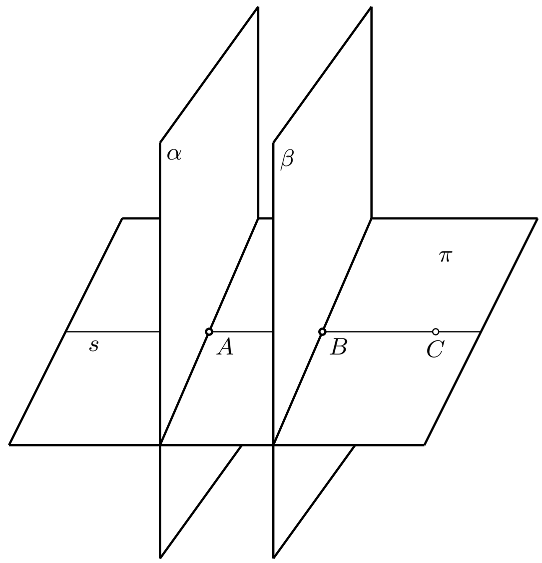
$$I = \underbrace{S_{a_1} \cdot ... \cdot S_{a_{2n}}}_{I_2} \cdot \underbrace{S_{a_{2n+1}} \cdot S_{a_{2(n+1)}}}_{I_1}.$$

Na osnovu induktivne pretpostavke, I_2 je translacija ili koincidencija, a na osnovu leme, I_1 je koincidencija ili translacija. Kako je kompozicija dveju translacija, translacije i koincidencije, koincidencije i translacije ili dveju koincidencija, translacija ili koincidencija, sledi da je izometrija $I = I_2 \cdot I_1$ translacija ili koincidencija, što je i trebalo dokazati. $\square$

5.9 Klizajuća refleksija prostora E^3

Neka je izometrija J prostora E^3 proizvod triju ravanskih refleksija, $J = S_\pi \cdot S_\beta \cdot S_\alpha$, pri čemu su α i β dve ravni koje su u tačkama A i B, redom, upravne na nekoj pravoj s ravni π i ako je $S_\beta(A) = C$, transformacija J je *klizajuća refleksija prostora* E^3, u oznaci $G_{\pi;\overrightarrow{AC}}$. Ravan π nazivamo *osnovom*, pravu s *osom*, a orijentisanu duž AC *vektorom klizajuće refleksije* $G_{\pi;\overrightarrow{AC}}$.

Iz navedenog je očigledno je da je kompozicija $S_\beta \cdot S_\alpha$ translacija $T_{\overrightarrow{AC}}$ prostora E^3, pa je klizajuća refleksija kompozicija ravanske refleksije S_π i translacije $T_{\overrightarrow{AC}}$ tog prostora. Budući da su translacija i ravanska refleksija komutativne transformacije ako i samo ako je prava AC paralelna ravni π (Teorema 40), sledi da su translacija i ravanska refleksija u klizajućoj refleksiji komutativne transformacije.



Slika 17: Klizajuća refleksija prostora E^3

S obzirom na to da je translacija direktna izometrija, refleksija indirektna, klizajuća refleksija je kao njihova kompozicija indirektna izometrija prostora E^3.

Klizajuća refleksija $G_{\pi;\overrightarrow{AC}}$. prostora E^3 jednoznačno je određena ako su zadate osnova π i translaciona duž AC.

Klizajuća refleksija nema invarijantnih tačaka. Međutim, ona poseduje beskonačno mnogo invarijantnih pravih koje pripadaju ravni π a paralelne su sa osom AC, i dve invarijantne ravni, osnovu π i tzv. protivosnovu koja sadrži pravu AC a upravna je na ravan π.

Teorema 44. *Ako indirektna izometrija J prostora E^3 nema invarijantnih tačaka, ona je klizajuća refleksija.*

Dokaz. Neka je X proizvoljna tačka prostora E^3 i X' tačka koja u izometriji J odgovara tački X, odnosno $X' = J(X)$. Ako obeležimo sa π_1 medijalnu ravan duži XX', tada je kompozicija $S_{\pi_1} \cdot J$ direktna izometrija sa invarijantnom tačkom X. Prema teoremi 20 takva izometrija je koincidencija ili osna rotacija $R_{s,w}$ kojoj osa s sadrži tačku X. Ne može biti koincidencija, jer bi iz relacije $S_{\pi_1} \cdot J = \varepsilon$ sledila relacija $J = S_{\pi_1}$ te bi izometrija J imala invarijantnih tačaka, što je suprotno pretpostavci. Stoga je $S_{\pi_1} \cdot J = R_{s,w}$ i, prema tome $J = S_{\pi_1} \cdot R_{s,w}$. Pri tome je $s \cap \pi_1 = \emptyset$, jer bi u protivnom izometrija J posedovala invarijantnih tačaka, što je pretpostavkom isključeno.

Obeležimo sa π_2 i π_3 ravni određene relacijama $R_{s,w} = S_{\pi_2} \cdot S_{\pi_3}$ i $\pi_2 \perp \pi_1$, a $\pi_1' \perp \pi_2'$ ravni određene relacijama $S_{\pi_1} \cdot S_{\pi_2} = S_{\pi_1'} \cdot S_{\pi_2'}$ i $\pi_1' \perp \pi_3$. Odatle sledi da je $\pi_2', \pi_3 \perp \pi_1'$ i $\pi_2' \cap \pi_3 = \emptyset$, te je kompozicija $S_{\pi_2'} \cdot S_{\pi_3}$ neka translacija $T_{\overrightarrow{PP'}}$, pri čemu je vektor translacije PP' paralelan sa ravni π_1'. Stoga je:

$$\begin{aligned} J &= S_{\pi_1} \cdot R_{s,w} = S_{\pi_1} \cdot S_{\pi_2} \cdot S_{\pi_3} = S_{\pi_1'} \cdot S_{\pi_2'} \cdot S_{\pi_3} \\ &= S_{\pi_1'} \cdot T_{\overrightarrow{PP'}} = G_{\pi_1'; \overrightarrow{PP'}}. \end{aligned}$$

$\square$

Teorema 45. *Ako je $G_{\pi;\overrightarrow{PP'}}$, klizajuća refleksija prostora E^3 i q prava koja je u središtu Q duži PP' upravna na ravni π, tada je:*

$$G_{\pi;\overrightarrow{PP'}} = S_q \cdot S_P = S_{P'} \cdot S_q.$$

Dokaz. Iz definicije klizajuće refleksije prostora E^3, sledi:

$$\begin{aligned} G_{\pi;\overrightarrow{PP'}} &= S_\pi \cdot T_{\overrightarrow{PP'}} = S_\pi \cdot S_Q \cdot S_P \\ &= S_\pi \cdot (S_\pi \cdot S_q) \cdot S_P = S_q \cdot S_P; \\ G_{\pi;\overrightarrow{PP'}} &= T_{\overrightarrow{PP'}} \cdot S_\pi = S_{P'} \cdot S_Q \cdot S_\pi = S_{P'} \cdot (S_\pi \cdot S_q) \cdot S_\pi \\ &= S_{P'} \cdot S_q \cdot S_\pi \cdot S_\pi = S_{P'} \cdot S_q. \end{aligned}$$

U dokazu je korišćen zakon involutivnosti ravanskih refleksija, kao i zakon komutativnosti ravanske refleksije S_π i osne simetrije S_q, a koji sledi na osnovu upravnosti prave q i ravni π (Teorema 27). $\square$

Primer 12. *Ako su A i B dve razne tačke neke ravni π koja se nalazi u prostoru E^3, dokazati da je:*

a) $(G_{\pi;\overrightarrow{AB}})^{-1} = G_{\pi;\overrightarrow{BA}}$;

b) $G_{\pi;\overrightarrow{AB}} \cdot G_{\pi;\overrightarrow{BA}} = \varepsilon$.

Dokaz. a) Kako je

$$G_{\pi;\overrightarrow{AB}} = S_\pi \cdot T_{\overrightarrow{AB}}$$

imamo da je

$$(G_{\pi;\overrightarrow{AB}})^{-1} = (S_\pi \cdot T_{\overrightarrow{AB}})^{-1} = (T_{\overrightarrow{AB}})^{-1} \cdot S_\pi = T_{\overrightarrow{BA}} \cdot S_\pi = G_{\pi;\overrightarrow{BA}}.$$

Ovde smo koristili tačku a) primera 9 u kojoj smo dokazali da je $(T_{\overrightarrow{AB}})^{-1} = T_{\overrightarrow{BA}}$, involutivnost ravanske refleksije S_π kao i svojstvo da u klizajućoj refleksiji $G_{\pi;\overrightarrow{AB}}$ nije bitan redosled primene translacije i ravanske refleksije.

b) Na osnovu prethodnog slučaja imamo da važi:

$$G_{\pi;\overrightarrow{AB}} = S_\pi \cdot T_{\overrightarrow{AB}} \quad \text{i} \quad G_{\pi;\overrightarrow{BA}} = S_\pi \cdot T_{\overrightarrow{BA}},$$

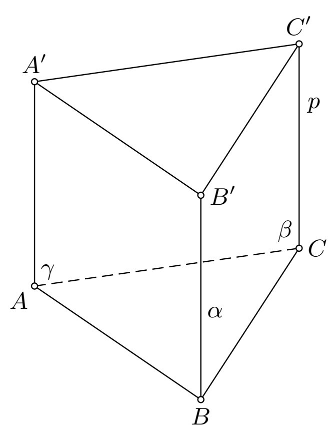
sada imamo

$$\begin{aligned} G_{\pi;\overrightarrow{AB}} \cdot G_{\pi;\overrightarrow{BA}} &= (S_\pi \cdot T_{\overrightarrow{AB}}) \cdot (S_\pi \cdot T_{\overrightarrow{BA}}) \\ &= T_{\overrightarrow{AB}} \cdot (S_\pi \cdot S_\pi) \cdot T_{\overrightarrow{BA}} = T_{\overrightarrow{AB}} \cdot T_{\overrightarrow{BA}} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ovde smo koristili svojstvo da u klizajućoj refleksiji $G_{\pi;\overrightarrow{AB}}$ nije bitan redosled primene translacije i ravanske refleksije, involutivnost ravanske refleksije S_π i tačku b) primera 9 na osnovu koje važi jednakost $T_{\overrightarrow{AB}} \cdot T_{\overrightarrow{BA}} = \varepsilon$.

□

Primer 13. *Dokazati da je kompozicija sastavljena iz triju ravanskih refleksija kojima su osnove određene bočnim pljosnima bilo koje trostrane prizme $ABCA'B'C'$ zadate u prostoru E^3 klizajuća refleksija tog prostora.*



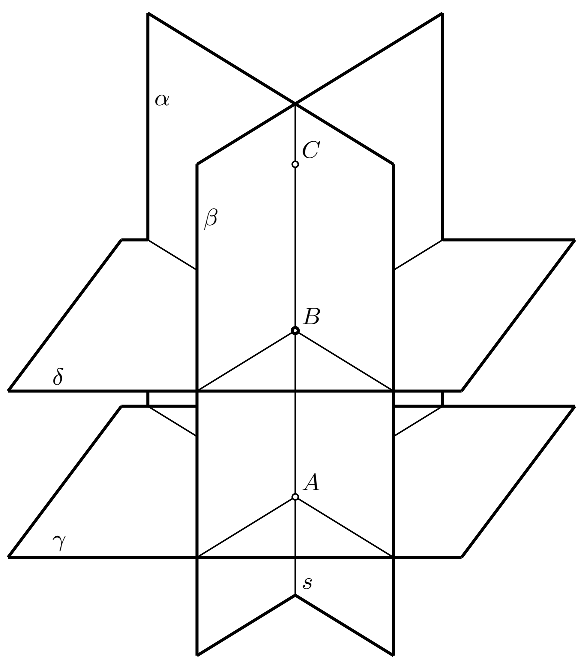
Slika 18: Kompozicija $S_\gamma \cdot S_\beta \cdot S_\alpha$ je klizajuća refleksija

Dokaz. Neka su α, β i γ ravni određene bočnim pljosnima prizme i neka je P presečna prava ravni α i β (prava p i ravan γ se ne seku; u protivnom bi sve tri ravni α i β imale zajedničku tačku). Dokažimo da je izometrija $I = S_\gamma \cdot S_\beta \cdot S_\alpha$ klizajuća refleksija.

Neka su π_1 i δ ravni koje sadrže pravu p takve da je $\delta \perp \gamma$ i da je usmereni ugao ϕ između ravni α i β jednak usmerenom uglu između ravni π_1 i δ. Tada je $S_\beta \cdot S_\alpha = R_{p,2\phi} = S_\delta \cdot S_{\pi_1}$, pa sledi $I = S_\gamma \cdot S_\delta \cdot S_{\pi_1}$. Ako je q presečna prava ravni γ i δ, onda važi $S_\gamma \cdot S_\delta = S_q$, pa važi $I = S_q \cdot S_{\pi_1}$. Ako su π_2 i π_3 ravni koje sadrže pravu q, takve da su međusobno upravne i da je $\pi_2 \parallel \pi_1$ (odakle sledi $\pi_3 \perp \pi_1$), onda važi $I = S_{\pi_3} \cdot S_{\pi_2} \cdot S_{\pi_1}$. Kako su ravni π_1 i π_2 međusobno paralelne i ravan π_3 je upravna na svakoj od njih, izometrija I je klizajuća refleksija, što je i trebalo dokazati. $\square$

5.10 Zavojno kretanje prostora E^3

Ukoliko je izometrija J prostora E^3 kompozicija četiriju ravanskih refleksija $J = S_\delta \cdot S_\gamma \cdot S_\beta \cdot S_\alpha$, pri čemu se ravni α i β seku duž neke prave s, a ravni γ i δ su u tačkama A i B upravne na s i $S_\delta(A) = C$, transformaciju J nazivamo *zavojnim kretanjem prostora* E^3 i označavamo sa $Z_{\overrightarrow{AC},w}$.



Slika 19: Zavojno kretanje prostora E^3

Pravu s nazivamo *osom*, orijentisanu duž AC *vektorom*, a ugao w je ugao dvostrukog orijentisanog diedra koji, redom, obrazuju ravni α i β i nazivamo ga *uglom zavojnog kretanja* $Z_{\overrightarrow{AC},w}$.

Ako su ravni α i β međusobno upravne, zavojno kretanje nazivamo zavojnim poluobrtanjem i obeležavamo sa $Z_{\overrightarrow{AC}}$. Iz definicije zavojnog kretanja $Z_{\overrightarrow{AC},w}$ sledi da je kompozicija $S_\beta \cdot S_\alpha$ osna rotacija $R_{s,w}$, a kompozicija $S_\delta \cdot S_\gamma$ translacija $T_{\overrightarrow{AC}}$ prostora E^3. Budući da translacija i osna rotacija zadovoljavaju uslov komutativnosti, da su prave s i AC paralelne (Teorema 41), kažemo da su one komutativne izometrije u zavojnom kretanju $Z_{\overrightarrow{AC},w}$, tj važi:

$$Z_{\overrightarrow{AC},w} = T_{\overrightarrow{AC}} \cdot R_{s,w} = R_{s,w} \cdot T_{\overrightarrow{AC}}.$$

Zavojno kretanje $Z_{\overrightarrow{AC},w}$ prostora E^3 je jednoznačno određeno translacionom duži AC i uglom w.

Zavojno kretanje je direktna izometrija, kao kompozicija translacije i osne rotacije koje su direktne izometrije prostora E^3.

Dokazaćemo par bitnih svojstava zavojnog kretanja prostora E^3.

Teorema 46. *Zavojno kretanje $Z_{\overrightarrow{PP'},w}$ prostora E^3 može se predstaviti kao kompozicija dveju osnih simetrija tog prostora; ose tih simetrija među sobom su mimoilazne.*

Dokaz. Ako obeležimo sa s pravu određenu tačkama P i P', a sa π_1, π_2 i σ_1, σ_2 ravni takve da je:

$$T_{\overrightarrow{PP'}} = S_{\pi_2} \cdot S_{\pi_1} \quad \text{i} \quad R_{s,w} = S_{\sigma_2} \cdot S_{\sigma_1},$$

biće:

$$\pi_1, \pi_2 \perp s \quad \text{i} \quad \sigma_1 \cap \sigma_2 = s,$$

pa je:

$$\sigma_1 \perp \pi_1 \quad \text{i} \quad \sigma_2 \perp \pi_2. \tag{$*$}$$

Stavimo li da je:

$$\sigma_1 \cap \pi_1 = s_1 \quad \text{i} \quad \sigma_2 \cap \pi_2 = s_2,$$

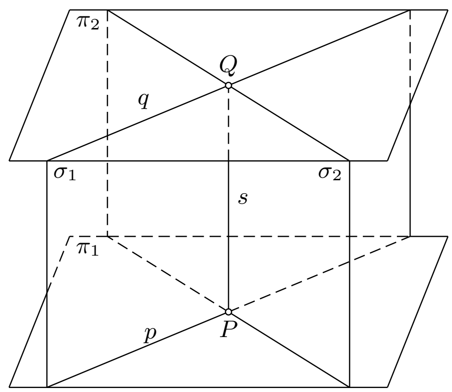
nalazimo da je:

$$\begin{aligned} Z_{\overrightarrow{PP'},w} = T_{\overrightarrow{PP'}} \cdot R_{s,w} &= S_{\pi_2} \cdot S_{\pi_1} \cdot S_{\sigma_2} \cdot S_{\sigma_1} \\ &= S_{\pi_2} \cdot S_{\sigma_2} \cdot S_{\pi_1} \cdot S_{\sigma_1} = S_{s_2} \cdot S_{s_1}. \end{aligned}$$

Ovde je korišćeno svojstvo komutativnosti ravanskih refleksija, koje sledi iz $(*)$. □

Teorema 47. *Kompozicija J sastavljena iz dveju osnih simetrija S_p i S_q prostora E^3, kojima su ose p i q mimoilazne, jeste zavojno kretanje.*

Dokaz. S obzirom na to da su prave p i q mimoilazne, postoji jedinstvena prava s koja ih seče pod pravim uglovima. Neka je $P = p \cap s$ i $Q = q \cap s$.



Slika 20: $S_q \cdot S_p$ gde su p i q mimoilazne je zavojno kretanje

Ako obeležimo sa π_1 i π_2 ravni upravne na pravoj s u tačkama P i Q, a sa σ_1 i σ_2 ravni od kojih je prva određena pravama p i s, a druge je određena pravama q i s, imamo da je

$$\sigma_1 \cap \pi_1 = p, \quad \sigma_2 \cap \pi_2 = q, \quad \sigma_1 \cap \sigma_2 = s$$

i

$$\sigma_1, \sigma_2 \perp \pi_1, \pi_2. \tag{$*$}$$

Sledi da je:

$$J = S_q \cdot S_p = S_{\sigma_2} \cdot S_{\pi_2} \cdot S_{\sigma_1} \cdot S_{\pi_1} = S_{\sigma_2} \cdot S_{\sigma_1} \cdot S_{\pi_2} \cdot S_{\pi_1}.$$

Ovde je korišćeno svojstvo komutativnosti ravanskih refleksija, koje sledi iz $(*)$.

Budući da su ravni π_1 i π_2 upravne na pravoj s u dvema raznim tačkama P i Q kompozicija $S_{\pi_2} \cdot S_{\pi_1}$ je translacija $T_{\overrightarrow{PP'}}$, gde je $P' = S_{\pi_2}(P)$. Kako je $\sigma_2 \cap \sigma_1 = s$, imamo da je $S_{\sigma_2} \cdot S_{\sigma_1} = R_{s,w}$, gde je w orijentisani ugao određen ravnima σ_1 i σ_2. Pri tome se osa translacije $T_{\overrightarrow{PP'}}$ poklapa sa osom osne rotacije $R_{s,w}$, pa je:

$$J = R_{s,w} \cdot T_{\overrightarrow{PP'}} = Z_{\overrightarrow{PP'},w}.$$

$\square$

6 Klasifikacija izometrija prostora E^3

Do sada smo ispitali sedam izometrija euklidskog prostora, i to su: *koincidencija, ravanska refleksija, osna rotacija, rotaciona refleksija, translacija, klizajuća refleksija i zavojno kretanje.* Svaka od njih je ili direktna, ili indirektna. Sada ćemo izvršiti klasifikaciju izometrija euklidskog prostora. Biće dokazano da su ispitane sve izometrije tog prostora, njih sedam ukupno i da su one ili direktne ili indirektne izometrije.

Teorema 48. *Ako nije koincidencija, direktna izometrija prostora E^3 je ili rotacija, ili translacija, ili je zavojno kretanje. Ako nije ravanska refleksija, indirektna izometrija prostora E^3 je ili rotaciona refleksija ili klizajuća refleksija.*

Dokaz. Znamo da se svaka direktna izometrija J, prostora E^3 može izraziti kao kompoziciju dveju osnih simetrija prostora E^3, $J = S_n \cdot S_m$ (Teorema 29), pa ćemo u zavisnosti od osa m i n razlikovati sledeće slučajeve:

a) Ako su komplanarne, obeležimo sa π ravan koja sadrži ose m i n, a sa μ i v ravni koje ih sadrže i upravne su na ravan π, tada važi:

$$S_n \cdot S_m = S_v \cdot S_\pi \cdot S_\pi \cdot S_\mu = S_v \cdot S_\mu,$$

pa važi:

1) Ako su ose m i n istovetne, i ravni μ i v će biti istovetne, pa s obzirom na involutivnost ravanske refleksije, direktna izometrija $J = S_n \cdot S_m$ će biti koincidencija.
2) Ako se ose m i n seku, tada će se seći i ravni μ i v duž prave koja je u njihovoj presečnoj tački upravna na π, pa sledi da je direktna izometrija J rotacija.
3) Ako su ose m i n međusobno paralelne, tada će i ravni μ i v biti paralelne, pa sledi da je izometrija J translacija.

b) Ako su m i n mimoilazne prave, tada postoji prava s koja ih seče u tačkama M i N i na obema je upravna. Obeležimo sa μ i v ravni koje sadrže pravu s i, redom, prave m i n, a sa μ' i v' ravni upravne na pravoj s u tačkama M i N. Na osnovu teoreme 47, važi:

$$S_n \cdot S_m = S_{v'} \cdot S_v \cdot S_\mu \cdot S_{\mu'} = S_v \cdot S_\mu \cdot S_{v'} \cdot S_{u'}.$$

Tj. važi:

4) Ako su m i n mimoilazne prave, izometrija J je zavojno kretanje.

Neka je sada J indirektna izometrija prostora E^3. Tada postoji tačka P takva da je $J(P) = P'$, $P \neq P'$. Neka je π medijalna ravan duži PP'. U kompoziciji $S_\pi \cdot J$ tačka P je invarijantna, a kako je $S_\pi \cdot J$ direktna izometrija prostora E^3, tada će na osnovu teoreme 20 J biti ili koincidencija, ili osna rotacija. Ako važi $S_\pi \cdot J = \varepsilon$, tada je $J = S_\pi$.

Ako je $S_\pi \cdot J = R_{s,w}$, prava s je van ravni π, jer bi ,u suprotnom, J bila ravanska refleksija.

Obeležimo sa μ ravan koja sadrži pravu s i upravna je na ravan π, a sa v ravan takvu da je $R_{s,w} = S_\mu \cdot S_v$. Tada je

$$S_\pi \cdot S_\mu \cdot S_v = S_p \cdot S_v,$$

gde je p presek međusobno upravnih ravni π i μ. Prava p ne pripada ravni v, jer bi, u suprotnom, J bila refleksija. Ako sa γ obeležimo ravan koja sadrži p i upravna je na v, a sa δ ravan koja sadrži p i upravna je na γ, imamo da je:

$$J = S_p \cdot S_v = S_\delta \cdot S_\gamma \cdot S_v = S_\gamma \cdot S_\delta \cdot S_v.$$

S obzirom na međusobni položaj ravni v i δ upravnih na γ, razlikujemo sledeće mogućnosti:

1) Ako se ravni v i δ seku, indirektna izometrija J je rotaciona refleksija.

2) Ako su v i δ međusobno paralelne ravni prostora E^3, indirektna izometrija J je klizajuća refleksija.

$\square$

7 Sličnost, dilatacija i dilativna rotacija

Budući da su izometrije specijalan slučaj sličnosti, uvešćemo pojam sličnosti. Dilatacije u specijalnom slučaju mogu biti translacije, i centralne simetrije, a dilativna rotacija je kompozicija osne rotacije i dilatacije.

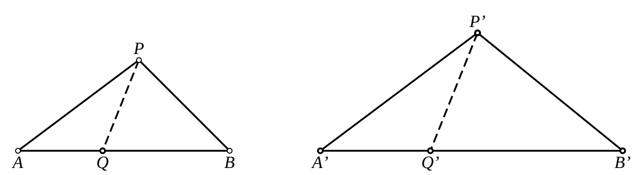
Sličnost. Pored izometrijskih transformacija koje su do sada izučavane, postoje i transformacije koje preslikavaju svaku figuru na njoj sličnu figuru i one se nazivaju *sličnosti.* Takve transformacije čuvaju odnose proporcionalnosti; sva rastojanja se uvećavaju ili umanjuju za isti koeficijent k, koji se naziva *koeficijent proporcionalnosti.*

Sličnošću nazivamo svaku transformaciju koja duž AB preslikava na duž $A'B'$ tako da važi $A'B' = kAB$. Koeficijent k može biti veći, jednak ili manji od 1.

Sličnosti uključuju kao specijalan slučaj, izometrije, za vrednost koeficijenta $k = 1$.

Dilatacija prostora E^3. Najprostiji oblik sličnosti su *dilatacije*, koje preslikavaju svaku pravu na njoj paralelnu pravu.

Teorema 49. *Za svake dve paralelne duži AB i $A'B'$ prostora E^3 postoji jedinstvena dilatacija, koja duž AB preslikava na duž $A'B'$, u oznaci $AB \to A'B'$.*



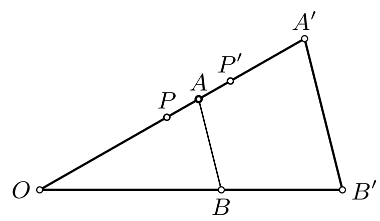
Slika 21: Dilatacija

Dilatacijom se svaka tačka P, izvan prave AB, preslikava na tačku P' u kojoj se seku prava kroz tačku A', paralelna sa AB sa pravom kroz tačku B', koja je paralelna sa BP; tačka Q na pravoj AB se preslikava na tačku Q' u kojoj se seku prava $A'B'$ i prava kroz tačku P' paralelna sa PQ (Slika 21).

Dilatacija je potpuno određena efektom na dve date tačke.

Inverziju dilatacije $AB \to A'B'$ obeležavamo sa $A'B' \to AB$, koincidencija se obeležava sa $AB \to AB$, a $AB \to BA$ je centralna simetrija (čiji je centar središte duži AB). Ako je četvorougao $ABA'B'$ paralelogram, tada je dilatacija $AB \to A'B'$ translacija.

U svakoj dilataciji možemo izabrati tačke A i B tako da tačka A nije invarijantna i prava AB nije invarijantna. Takva dilatacija $AB \to A'B'$ svaku tačku P na pravoj AA' preslikava na tačku P' na pravoj paralelnoj



Slika 22: Dilatacija $AB \to A'B'$

kroz tačku A', koja je sama prava AA'. Slično, dilatacija $AB \to A'B'$ svaku tačku Q na pravoj BB' preslikava na tačku Q', koja takođe leži na pravoj BB'. Prave AA' i BB' koje nisu paralelne seku se u invarijantnoj tački O i ta tačka je jedinstvena. Dilatacija sa dve invarijantne tačke može biti samo koincidencija [4].

Dilatacija svaku tačku P preslikava na tačku P' na pravoj OP, tako da važi $OP' = kOP$ (Slika 22), gde je k pozitivno ili negativno u zavisnosti od toga da li su tačke P i P' sa istih, ili sa raznih strana tačke O. Konstanta k ne zavisi od položaja tačke P. Svaka duž PQ je preslikana na $|k|$ puta dužu duž, koja je suprotno usmerena ako je $k < 0$.

Centralna dilatacija.

Teorema 50. *Svaka dilatacija koja nije translacija ima invarijantnu tačku.*

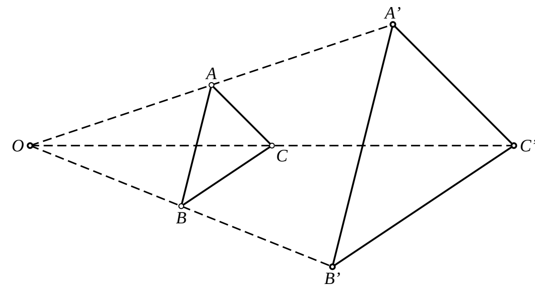
Takva dilatacija se naziva *centralna dilatacija*, kod koje su sve prave koje spajaju odgovarajuće tačke neke figure i njene slike, konkurentne (koje se seku u jednoj tački).

Na slikama 23 i 24 duži AB i $A'B'$, koje leže na paralelnim pravama, zadovoljavaju vektorsku jednakost: $\overrightarrow{A'B'} = \pm k\overrightarrow{AB}$. Za svaku tačku C koja formira trougao sa A i B, njena slika C' nalazi se u preseku prave kroz tačku A', koja je paralelna sa AC i prave kroz tačku B', koja je paralelna sa BC. Ako je dilatacija centralna dilatacija, prave AA' i BB' nisu paralelne, ali se seku u tački O, tako da važi

$$\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA} \quad \text{i} \quad \overrightarrow{OB'} = k\overrightarrow{OB},$$

kao na slici 23, ili

$$\overrightarrow{OA'} = -k\overrightarrow{OA} \quad \text{i} \quad \overrightarrow{OB'} = -k\overrightarrow{OB},$$

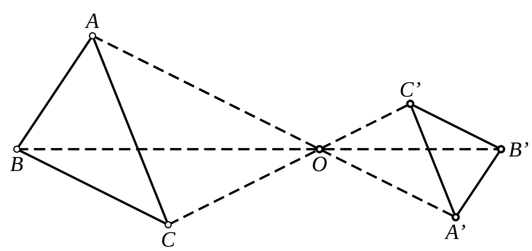


Slika 23: Centralna dilatacija $O(k)$, $k > 0$

kao na slici 24.

Budući da paralelne prave seku transverzale na proporcionalne duži, zaključujemo da C' leži na pravoj OC; zapravo važi $\overrightarrow{OC'} = \pm k\overrightarrow{OC}$.

Kada bi u figuri na slici 24 tačku O pomerili ulevo, uočili bi da translacija nastaje kao ograničena forma centralne dilatacije $\overrightarrow{A'B'} = \pm k\overrightarrow{AB}$, kada k teži jedinici. Takođe, u figuri na slici 24 možemo pomeriti tačku O tako da bude središte duži AA'; tada centralna dilatacija $\overrightarrow{A'B'} = -k\overrightarrow{AB}$ uključuje kao specijalan slučaj centralnu simetriju $\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{AB}$, gde je $ABA'B'$ paralelogram sa centrom O [5].



Slika 24: Centralna dilatacija $O(k)$, $k < 0$

Sa $O(k)$ obeležavaćemo dilataciju sa centrom u O i koeficijentom k. Naročito, sa $O(1)$ obeležavaćemo identitet, $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$, sa $O(-1)$ centralnu simetriju, $\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{AB}$ (sa centrom u središtu duži AB). Za translacije se ne upotrebljava simbol $O(k)$.

Dilativna rotacija prostora E^3. *Dilativna rotacija* je kompozicija osne rotacije, sa osom l, i dilatacije čiji centar O leži na osi l. Ravan koja prolazi kroz centar O i koja je upravna na osu l je invarijantna. U specijalnom slučaju kada je osna rotacija poluobrtaj, postoji beskonačno mnogo invarijantnih ravni, naime sve ravni kroz l.

Pretpostavimo da je dilativna rotacija kompozicija rotacije za ugao α i dilatacije $O(k)$. Sledeće vrednosti za α i k donose specijalne slučajeve od kojih su najpoznatiji:

α	k	Sličnost
0	1	Koincidencija
π	1	Poluobrtaj
α	1	Rotacija
π	-1	Refleksija
0	-1	Centralna simetrija
α	-1	Rotaciona refleksija
0	λ	Dilatacija

Uočimo da ova tabela uključuje sve vrste izometrija, izuzev translacije, zavojnog kretanja i klizajuće refleksije (koje nemaju invarijantnih tačaka).

Važi sledeće tvrđenje:

Teorema 51. *Svaka sličnost je ili izometrija ili dilativna rotacija.*

Drugim rečima, svaka sličnost je ili translacija, zavojno kretanje, klizajuća refleksija, ili dilativna rotacija.

Navodim još dve teoreme, koje su uopštenje teorema 8 i 9.

Teorema 52. *Ako su $ABCD$ i $A'B'C'D'$ slični tetraedri, tada postoji jedinstvena transformacija sličnosti prostora koja tetraedar $ABCD$ preslikava na tetraedar $ABCD$.*

Drugim rečima, sličnost je kompletno određena njenim uticajem na svaku od četiri date nekomplanarne tačke.

Teorema 53. *Ako su ABC i $A'B'C'$ slični trouglovi, tada postoje tačno dve transformacije sličnosti prostora koje trougao ABC preslikavaju na trougao $A'B'C'$; jedna je direkna i jedna indirektna.*

8 Simetrije

U antičkom periodu pojam *simetrije*, u svakodnevnom jeziku, imao je značenje proporcionalnosti ili skladnosti proporcija. Za Euklida, simetrija je bila sinonim za samerljivost.

Kada Platon u *Timaju* opisuje ,,najlepše kamenje", koje je zbog svojih jednakih i sličnih delova prozirno, on misli na delove, koji su međusobno podudarni. Taj pojam jednakih i sličnih delova zapravo je zametak pojma simetrije, jer pitanje o broju jednakih i sličnih delova, pod određenim pretpostavkama može biti istovetno sa pitanjem o broju simetrija toga lika.

8.1 Simetrije likova u prostoru E^3

Izometrije J koje ostavljaju invarijantnim neki ravanski ili prostoran lik ϕ, tj. ako važi $J(\phi) = \phi$, nazivamo *simetrijama* lika ϕ.

Ako sa J_1 i J_2 obeležimo simetrije lika ϕ, neposredno se dokazuje da je kompozicija $J_2^{-1} \cdot J_1$ takođe simetrija toga lika. Odatle sledi da je skup svih simetrija lika ϕ grupa, koja se naziva *grupom simetrija lika* ϕ i obeležavaćemo je sa $G(J_\phi)$. Ta grupa je podgrupa grupe svih izometrija, koju smo ranije obeležili sa $G(J)$. Ukoliko je red grupe simetrija lika ϕ veći od jedan, za lik ϕ ćemo reći da je *simetričan*. U protivnom za lik ϕ kažemo da je *asimetričan* [1].

Budući da razlikujemo sedam izometrija prostora E^3, shodno tome razlikujemo i sedam simetrija u tom prostoru, a to su: koincidencija, ravanska simetrija, osna simetrija reda n, osnorotaciona simetrija reda n, translaciona simetrija, klizajuća simetrija, zavojna simetrija. Koincidencija je simetrija svakog lika ϕ.

Takođe, klasifikacija izometrija na direktne i indirektne važi i za simetrije; direktne simetrije koje ne menjaju orijentaciju lika ϕ i indirektne koje menjaju orijentaciju tog lika. Skup direktnih simetrija nekog lika ϕ je podgrupa grupe $G(J_\phi)$; tu podgrupu nazivamo grupom direktnih simetrija lika ϕ i simbolički obeležavamo sa $G(J_\phi^+)$.

8.2 Grupe rotacija

Za geometriju prostora E^3 bitne su *punktualne grupe simetrija*; to su grupe u kojima sve simetrije raspolažu najmanje jednom zajedničkom invarijantnom tačkom, i one se najpre proučavaju. Punktualne grupe koje se sastoje isključivo iz direktnih simetrija raspolažu jedino koincidencijom i osnim simetrijama; one se nazivaju *grupama rotacija*.

Teorema 54. *Ukupan broj svih simetrija pravilnog poliedra ϕ u prostoru E^3 jednak je dvostrukom broju njegovih ivičnih uglova, odnosno četvorostrukom broju njegovih ivica. Jednu polovinu tih simetrija čine direktne, a drugu polovinu čine indirektne izometrije.*

Dokaz. Ako obeležimo sa A, B, C i A', B', C' dve trojke uzastopnih temena jedne iste ili dveju raznih pljosni poliedra ϕ i sa O središte tog poliedra, biće četvorke tačaka O, A, B, C i O, A', B', C' nekomplanarne. Važe sledeće relacije:

$$(O, A, B, C,) \cong (O, A', B', C') \quad \text{i} \quad (O, A, B, C) \cong (O, C', B', A').$$

Postoje dve izometrije prostora E^3, obeležimo ih sa J_1 i J_2, od kojih prva prevodi tačke O, A, B, C respektivno u tačke O, A', B', C', a druga prevodi tačke O, A', B', C' u tačke O, C', B', A'. S obzirom na to da su tetraedri $OA'B'C'$ i $OC'B'A'$ suprotno orijentisani, jedna od izometrija J_1 i J_2 je direktna a druga je indirektna. Svaka od izometrija J_1 i J_2 je simetrija poliedra ϕ, tj. važi:

$$J_1(\phi) = \phi \quad \text{i} \quad J_2(\phi) = \phi.$$

U transformaciji J_1 pljosni $(ABC...H)$ odgovara pljosan $(A'B'C'...H')$. Iz podudarnosti svih diedara i pljosni poliedra ϕ sleduje da u transformaciji J_1 pljosnima susednim sa $(A, B, C...H)$ odgovaraju pljosni susedne sa $(A', B', C'...H')$. Slično, u izometriji J_1 narednim susednim pljosnima odgovaraju naredne susedne pljosni. Nastavljajući ovaj postupak, nalazimo da je $J_1(\phi) = \phi$. Na isti način dobijamo da je $J_2(\phi) = \phi$.

Dokazano je da svakom ivičnom uglu poliedra ϕ odgovaraju dve razne simetrije tog poliedra od kojih je jedna direktna a druga indirektna. Stoga je ukupan broj svih simetrija poliedra ϕ jednak dvostrukom broju njegovih ivičnih uglova, odnosno četvorostrukom broju njegovih ivica. Jednu polovinu tih simetrija čine direktne, a drugu polovinu čine indirektne izometrije.

□

Najpre će biti razmatrane rotacije pravilnih poliedara, a potom i grupe rotacija pravilnih poliedara.

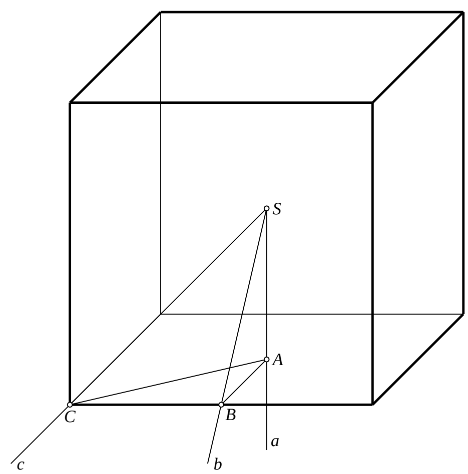
8.2.1 Rotacije pravilnih poliedara

Pravilni poliedri $\{p, q\}$ imaju sledeća dva svojstva:

1. za svaku njegovu pljosan postoji osna rotacija, koja ciklično permutuje temena te pljosni, ostavljajući poliedar invarijantnim.

2. za svako njegovo teme postoji osna rotacija, koja ostavlja poliedar invarijantnim, a ciklično permutuje pljosni poliedra oko tog temena.

Neka je taj pravilni poliedar pravilni heksaedar (kocka). Sa S je obeleženo središte pravilnog heksaedra, a sa A središte jedne njegove pljosni, sa B



Slika 25: Rotacije pravilnog heksaedra

središte jedne ivice te pljosni i sa C jedno teme te ivice, a sa a, b i c prave SA, SB i SC.

Osa rotacije koja ciklično permutuje temena neke pljosni pravilnog poliedra $\{p, q\}$ jeste prava, koja sadrži središte poliedra i središte te pljosni, a to je prava a. Osa rotacije koja ciklično permutuje pljosni oko nekog temena tog poliedra jeste prava, koja sadrži središte poliedra i to teme, a to je prava c.

Obeležimo ove rotacije sa

$$R^k_{a,2\pi/p}, \quad k = 1, 2, ..., p, \tag{$*$}$$

i

$$R^k_{c,2\pi/q}, \quad k = 1, 2, ..., q. \tag{$**$}$$

Prva će ciklično permutovati temena pljosni, čije je središte tačka A ostavljajući taj poliedar invarijantnim, a druga će ciklično permutovati pljosni oko temena C preslikavajući $\{p, q\}$ na sebe.

Ova dva svojstva karakterišu svaki pravilni poliedar, odnosno, ova dva svojstva su potreban i dovoljan uslov, da neki poliedar bude pravilan, pa ćemo to i dokazati.

Ako postoji rotacija, koja ciklično permutuje temena jedne pljosni nekog poliedra, ta pljosan će biti pravilna, a ako postoji rotacija, koja ciklično permutuje pljosni sa zajedničkim temenom tog poliedra, te pljosni će pripadati stranama pravilnog roglja. Stoga će sve pljosni tog poliedra biti pravilne i svi rogljevi tog poliedra biće pravilni. Budući da ove rotacije taj poliedar ostavljaju invarijantnim, pljosni tog poliedra raspoređene oko jednog temena biće i međusobno podudarne, jer njihovi unutrašnji uglovi pripadaju pljosnima pravilnog roglja, pa su međusobno podudarni. I rogljevi kod temena jedne pljosni biće međusobno podudarni, jer rotacija koja ostavlja poliedar invarijantnim, a ciklično permutuje temena jedne pljosni, permutuje i rogljeve tog poliedra kod tih temena. S obzirom na to da za svaku pljosan postoji rotacija koja ostavlja poliedar invarijantnim i ciklično permutuje njena temena, a i za svaki rogalj postoji rotacija koja ciklično permutuje njegove pljosni ostavljajući poliedar invarijantnim, sve pljosni tog poliedra biće međusobno podudarne, a i svi rogljevi će biti međusobno podudarni. Kako su mu sve pljosni i svi rogljevi pravilni i međusobno podudarni, zaključuje se da će poliedar biti pravilan [3].

Rotacija koja poliedar $\{p, q\}$ ostavlja invarijantnim jeste osna simetrija prostora R_b. Ako rotacije date sa $(*)$ i $(**)$ obeležimo sa R_a i R_c, na osnovu primera 3, kompozicija $R_c \cdot R_a$ ovih dveju rotacija biće ponovo rotacija. U kompoziciji $R_c \cdot R_a$ možemo izabrati smer ovih dveju rotacija tako, da tačka B bude invarijantna, pa je osa ove rotacije prava b.

Ako sa α, β i γ obeležimo ravni bc, ca i ab, biće

$$R_a = S_\beta S_\gamma, \quad \text{i} \quad R_c = S_\alpha S_\beta,$$

pa je

$$R_c R_a = S_\alpha S_\beta S_\beta S_\gamma = S_\alpha S_\gamma = R_b.$$

Ravan α sadrži pravu BC koja je upravna na ravni $SAB = \gamma$, pa su α i γ dve međusobno upravne ravni. Odatle sledi da je ugao rotacije R_b opružen. Važi sledeća relacija:

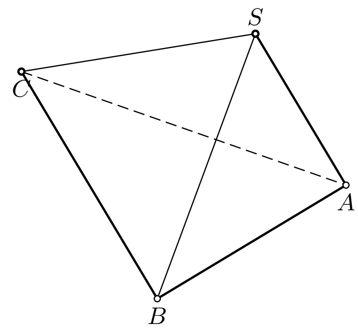
$$R_a^p = R_c^q = R_b^2 = I.$$

8.2.2 Elementarni tetraedri

Dokaz teoreme 54 možemo izvesti i pomoću tzv. *elementarnih tetraedara* pravilnog poliedra $\{p, q\}$, o kojima će sada biti reči.

Najpre ćemo uvesti pojam ortosheme, tetraedra sa zanimljivim metričkim osobinama.

Ortoshema. Tetraedar $SABC$ (Slika 26), čije ivice SA, AB i BC su međusobno upravne, pa su i nagibni uglovi njegovih pljosni kod ivica SB, BA, AC, pravi, naziva se *ortoshema.* Nagibni uglovi kod ivica SA i SC ove ortosheme



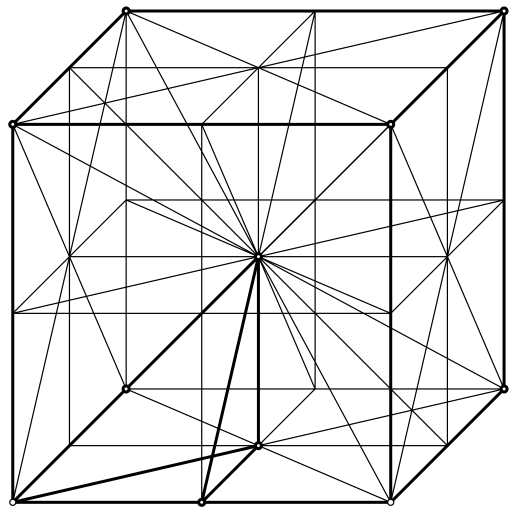
Slika 26: Ortoshema $SABC$

pravilnog poliedra $\{p, q\}$, redom su π/p i π/q, a nagibni ugao kod ivice BC zavisiće od nagibnog ugla susednih pljosni tog poliedra.

Elementarni tetraedri. Za svaku pljosan pravilnog poliedra $\{p, q\}$ važi da njegovo središte, središte bilo koje njegove ivice i njeno teme će biti temena ortosheme $SABC$ sa uvek istim metričkim osobinama. Sve ove ortosheme biće međusobno podudarne, a njihove pljosni sa zajedničkim temenom S, će razložiti ovaj poliedar na međusobno podudarne ortosheme, koje ćemo zvati *elementarnim tetraedrima* tog poliedra.

Svaka simetrija pravilnog poliedra preslikaće elementarni tetraedar tog poliedra opet na elementarni tetraedar. Svaka izometrija koja pravilni poliedar preslikava na sebe, teme tog poliedra, preslikaće opet na neko od temena istog poliedra, središte bilo koje ivice preslikaće ponovo na središte neke od ivica, središte bilo koje pljosni opet na središte neke pljosni, a središte tog poliedra preslikaće se izometrijom na sebe. Odnosno, te izometrije će temena jednog elementarnog tetraedra poliedra $\{p, q\}$ preslikati na temena susednog elementarnog tetraedra tog poliedra.
Slično se pokazuje da važi i obratno, tj. da svaka izometrija koja elementarni tetraedar preslikava na jedan od elementarnih tetraedara pravilnog poliedra $\{p, q\}$, preslikava poliedar na sebe.

Odatle sledi da je ukupan broj izometrija koje $\{p, q\}$ preslikavaju na sebe jednak broju elementarnih tetraedara tog poliedra. Budući da je polovina ovih tetraedara iste orijentacije, a druga polovina njima suprotne orijentacije, polovina simetrija pravilnog poliedra biće direktne, a druga polovina indirektne. A kako je svaka ivica pravilnog poliedra podeljena svojim



Slika 27: Elementarni tetraedri kocke

središtem na dve duži koje su ivice nekog elementarnog tetraedra tog poliedra, a svaka od ovih ivica je zajednička ivica za dva elementarna tetraedra, ukupan broj simetrija pravilnog poliedra biće jednak četvorostrukom broju njegovih ivica [3].

8.2.3 Kombinatorne osobine pravilnih poliedara

Prethodno smo ustanovili da je broj simetrija pravilnih poliedara $\{p, q\}$ u prostoru E^3 jednak četvorostrukom broju njegovih ivica, a broj direktnih simetrija pravilnih poliedara, odnosno, broj rotacija pravilnih poliedara dvostrukom broju njegovih ivica. Na osnovu tih podataka i podataka koji slede možemo izračunati red grupa simetrija i red grupa rotacija pet postojećih pravilnih poliedara.

Red grupe svih simetrija pravilnog poliedra $\{p, q\}$ jednak je četvorostrukom broju njegovih ivica. Ako obeležimo sa I broj ivica pravilnog poliedra, biće

$$|G_{\{p,q\}}| = 4I.$$

Budući da direktnih simetrija pravilnog poliedra $\{p, q\}$ ima upola manje, red grupe rotacija pravilnog poliedra biće jednak dvostrukom broju njegovih ivica, tj.

$$|G^+_{\{p,q\}}| = 2I.$$

Svaku pljosan, pored identičnosti, ostavljaće invarijantnim i $p-1$ osnih rotacija prostora, svaki rogalj će ostavljati invarijantnim $q-1$ rotacija, a svaku ivicu, pored identičnosti, još jedna rotacija. Međutim, osa rotacije pljosni biće i osa rotacije njoj naspramne pljosni ili roglja, a osa rotacije ivice biće i osa rotacije njoj naspramne ivice [3].

Označimo sa P broj pljosni, sa I broj ivica, a sa T broj temena pravilnog poliedra $\{p,q\}$. Ukupan broj njegovih rotacija će biti

$$\frac{1}{2}(p-1)P + \frac{1}{2}(q-1)T + \frac{1}{2}I. \qquad (*)$$

S obzirom na to da svaka ivica pravilnog poliedra pripada dvema pljosnima i povezuje dva temena sledi da je

$$pP = 2I = qT.$$

Ako iz prethodnih jednakosti izrazimo P i T, dobijamo da je

$$P = \frac{2I}{p} \quad \text{i} \quad T = \frac{2I}{q},$$

pa zamenom ovih vrednosti u $(*)$ i iz $|G^+_{\{p,q\}}| = 2I$ sledi

$$\frac{p-1}{p}I + \frac{q-1}{q}I + \frac{1}{2}I + 1 = 2I.$$

Iz prethodne jednakosti imamo da je

$$\frac{1}{I} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2},$$

pa je

$$I = \frac{2pq}{4-(p-2)(q-2)}.$$

Iz $|G^+_{\{p,q\}}| = 2I$ sledi

$$|G^+_{\{p,q\}}| = \frac{4pq}{4-(p-2)(q-2)},$$

a iz $|G_{\{p,q\}}| = 4I$ da je

$$|G_{\{p,q\}}| = \frac{8pq}{4-(p-2)(q-2)}.$$

Pored broja I biće izraženi i brojevi P i T u funkciji p i q.

Imamo da je

$$T = \frac{4p}{4-(p-2)(q-2)},$$

i

$$P = \frac{4q}{4-(p-2)(q-2)}.$$

Sada kada su izraženi brojevi I, T i P preko p i q, mogu se predstaviti kombinatorne osobine pet pravilnih poliedara sledećom tabelom:

$\{p,q\}$	T	I	P	$\lvert G_{\{p,q\}}\rvert$	$\lvert G^+_{\{p,q\}}\rvert$	naziv poliedra
$\{3,3\}$	4	6	4	24	12	pravilni tetraedar
$\{3,4\}$	6	12	8	48	24	pravilni oktaedar
$\{4,3\}$	8	12	6	48	24	kocka
$\{3,5\}$	12	30	20	120	60	pravilni ikosaedar
$\{5,3\}$	20	30	12	120	60	pravilni dodekaedar

Pošto je

$$|G^+_{\{p,q\}}| = 2I = pP = qT,$$

sledi da je

$$P = \frac{|G^+_{\{p,q\}}|}{p}, I = \frac{|G^+_{\{p,q\}}|}{2}, T = \frac{|G^+_{\{p,q\}}|}{q}.$$

Iz

$$\frac{1}{I} = \frac{2}{|G^+_{\{p,q\}}|},$$

zaključujemo da je tvrđenje

$$\frac{1}{I} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2},$$

ekvivalentno Ojlerovoj teoremi (za pravilne poliedre) prema kojoj je

$$P - I + T = 2.$$

Određen je red grupa simetrija i red grupa rotacija pravilnih poliedara, ali nije ustanovljeno koje simetrije imaju ti poliedri. Sada ćemo navesti, bez dokaza, simetrije koje imaju dva pravilna poliedra: pravilan tetraedar i pravilan heksaedar (kocka) [2].

Pravilan tetraedar ima:

- 8 osnih simetrija reda tri koje su definisane u oba smera u odnosu na prave određene visinama tog tetraedra;
- 3 osne simetrije reda dva koje su definisane u odnosu na prave određene središtima naspramnih ivica;
- 1 koincidencija;
- 6 ravanskih simetrija definisanih u odnosu na simetralne ravni unutrašnjih diedara;
- 6 osnorotacionih simetrija reda četiri definisanih u oba smera u odnosu na prave određene središtima naspramnih ivica.

Pravilan heksaedar (kocka) ima:

- 6 osnih simetrija reda četiri definisanih u oba smera u odnosu na prave određene središtima naspramnih pljosni;
- 3 osne simetrije reda dva definisane u odnosu na prave određene središtima naspramnih pljosni;
- 8 osnih simetrija reda tri definisanih u oba smera u odnosu na prave određene naspramnim temenima;
- 1 koincidencija;
- 6 ravanskih simetrija definisanih u odnosu na simetrale ravni unutrašnjih diedara;
- 3 ravanske simetrije definisane u odnosu na medijalne ravni ivica;
- 6 osnorotacionih simetrija reda četiri, definisanih u odnosu na prave određene središtima naspramnih pljosni;
- 8 osnorotacionih simetrija reda šest definisanih u oba smera u odnosu na prave određene naspramnim temenima;
- 1 centralna simetrija.

Literatura

[1] Lučić Zoran, Euklidska i hiperbolička geometrija, Drugo izdanje, Matematički fakultet, Beograd, 1997.

[2] Lopadnić Dragomir, Geometrija, Prvo izdanje, Beograd, 2011.

[3] Lučić Zoran, Ogledi iz istorije antičke geometrije, Matematički fakultet, Beograd, 2008.

[4] H.S.M. Coxeter, Introduction to Geometry, John Wiley Sons, Inc. 1969.

[5] H.S.M Coxeter, S.L. Greitzer, Geometry Revisited, Random House, New York, 1967.

[6] Janičić Predrag, Zbirka zadataka iz geometrije, Sedmo izdanje, Matematički fakultet, Beograd, 2007.

[7] A.I. FETISOV, O euklidskoj i neeuklidskim geometrijama, Školska knjiga, Zagreb, 1981.