Универзитет у Београду

Математички факултет

Мастер рад

Историја математике као извор школских примера и задатака

Студент: **Милош Злокас**

Ментор: **др Небојша Икодиновић**

Београд, 2017.

Студент: **Милош Злокас**

Ментор: **др Небојша Икодиновић**

Математички факултет у Београду

Чланови комисије: **др Драгана Тодорић**

Математички факултет у Београду

проф. др Милан Божић

Математички факултет у Београду

Садржај

Увод

Уобичајна је пракса да се на часовима математике ученицима дају само кратке информације из историје математике у форми занимљивог додатка, који углавном није од значаја за текуће наставне садржаје. Историја математике обилује питањима, примерима и проблемима који се могу прилагодити савременој настави и постати директна и експлицитна подршка садржајима које треба обрадити, провежбати, продубити. Вешто састављени историјски примери и задаци могу имати велики значај и у математичком и у методичком смислу. Поред тога што омогућавају да се квалитетније усвоји предвиђено градиво, поменути задаци могу да подстакну ученике на размишљање, да их заинтересују и мотивишу.

Историја математике није укључена у наставни процес, иако математика има занимљиву историју. Бројеви, математичке формуле и модели нису настали сами од себе. Створило их је време, друштвени односи, потребе, и пре свега, људи. Готово да нема младог човека који се није запитао када, како и зашто. За ученике може бити корисно поређење модерне математике са својим облицима у прошлости (поређење нотације, терминологије, метода доказивања и рачунања). Такође модерна математика се данас углавном посматра као производ западне културе (од Старе Грчке до нововековне Европе). Изучавајући историју математике, ученици и наставници имају прилику да примете и друге, мање познате приступе одређеним математичким проблемима, који су се појавили у другим културама, као и да виде њихову улогу у тим културама.

Овај рад је замишљен као збирка примера и задатака заснованих на причама из историје математике које су блиске појединим наставним темама у основним и средњим школама. Изабране историјске приче прате примери и задаци потпуно прилагођени редовној и додатној настави, при чему је јасно истакнуто за које наставне теме (у складу са актуелним програмима) су погодни предложени задаци. Након редног броја задатка, у заградама је дата препорука у ком разреду и оквиру које наставне теме, би могао да се реализује.

1. Историја математике у настави

Великани историје математичких наука били су по правилу, великани духа, самопрекора, револуционари, истрајни борци за своју истину. Нова сазнања су се наметала у сукобу са старим, али су често и настајала из старог, надоградњом постигнутог. Изразитије него у другим човековим стваралачким делатностима (друштвене науке, природне науке, уметност, књижевност) у математичким наукама је старо и ново условљено једно другим.

Док се већина осталих предмета сазнају и предају уз стално присуство њихове историје, у математичкој настави ова компонента је неоправдано изостављена. Иако математика има значајну, па чак и веома занимљиву историју. Како би изгледало говорити о Андрићевим делима, а не поменути Андрића? Говорити о Моцартовим делима, а не поменути Моцарта? Говорити о магнетном флуксу или магнетској индукцији, а не поменути Теслу? Бројеви, математичке формуле и модели, нису настали сами од себе. Стварали су их време, друштвени односи, потребе, и пре свега људи.

1.1. Зашто је историја математике потребна у настави математике?

Интегрисање историје математике у наставу заговара се у разним земљама Европе и света још од почетка прошлог века (Поенкаре 1908, Клајн 1914, Британско министарство просвете 1958, Де Морган 1958). Године 1969, US NCTM (National Council for the Teaching of Mathematics) посветио је свој 31. годишњак историји математике као наставном средству.

Приговори увођењу историје математике у наставу могу се поделити у две групе, на основу извора потешкоћа, то су приговори засновани на филозофском извору и приговори засновани на практичном извору. Приговори засновани на филозофским проблемима, су: историја није математика, историја може бити збуњујућа, ученици могу имати погрешно виђење прошлости (условљено недовољним познавањем опште историје), многи ученици не воле историју, историја може бити одговорна за изазивање културног шовинизма. Приговори засновани на практичном извору су: недостатак времена (недовољан број часова математике), недостатак ресурса (недостатак уџбеника и наставних средстава из ове области), недостатак стручности (недостатак историјског знања код наставника математике), тешкоће у оцењивању историјске компоненте у математици.

Интегрисањем историје математике у наставни процес, настава би била побољшана и обогаћена у следећих пет сегмената:

1) Учење математике

Математика се у школама најчеће предаје дедуктивно. Међутим историјски развој математике показује да је таква организација научних дисциплина настала тек након што су оне досегле одређену зрелост. Холандски математичар, Ханс Фројдентал (1905-1990), ово описује: ,,Ниједна математичка идеја никада није објављена на начин на који је откривена. Развијани су поступци који се користе да, када је проблем решен, ток решења проблема окрену наопако... На тај начин се ватрени проналазак претвори у ледену лепоту.“ Правилна интеграција историје математике у образовању може да открије како су ,,наши математички појмови, структуре и идеје откривани као алатке за организовање феномена физичког, социјалног и менталног света.“ (Фројдентал). Историја математике може на најбољи могући начин да представи природан ток догађаја и да задржи минимум логичких празнина. Ово је било признато и заговарано од стране многих (Клајн 1926, Поља 1954, итд.)

Историја математика може бити извор школских примера, задатака и објашњења. Ако би се проблеми из историје математике уврстили у наставу, свакако би обогатили наставни садржај у коме доминирају вежбе и проблеми који изгледају вештачки осмишљени (нпр. дешифровање бројева и рачунских операција неке старе цивилизације уместо уобичајног дешифровања измишљених рачунских операција и бројева састављених од слова, звездица итд.) Такође упознавање ученика са историјом математике открило би им везу између математике и других предмета.

2) Развој мишљења о природи математичких активности

Упознавањем са историјом математике ученици постају способнији да разумеју зашто претпоставке и докази, које је неко изнео у прошлости, обезбеђују задовољавајуће или незадовољавајуће одговоре на постојеће проблеме. И сами бивају охрабрени да постављају своја питања, износе своје претпоставке и баве се њима. Историја помаже ученицима и да схвате предности или мане савремене математичке нотације (нпр. Диофантова алгебарска нотација или Њутнова нотација у диференцијалном рачуну.)

3) Дидактичка подлога наставницима

Проучавајући историју математике, наставници могу да постану свесни потешкоћа, које су се појавиле у прошлости а могу се поново појавити код ученика. Могу да постану свесни креативног процеса у „настанку“ математике и да се укључе у њега. Као и да се упознају са математичким резултатима који се разликују од савремених, а тиме могу да развију толерацију и поштовање према неуобичјним начинима ученика да изразе идеје и реше проблеме.

4) Развој емотивне наклоности према математици

Из историје математике може се научити да математика није само скуп крутих истина, већ једна хуманистичка делатност. Велике математичаре је красила упорност у покушајима да пронађу пут у својим идејама, да се изборе за своју истину, па ни ученици не треба да се обесхрабре неуспесима, неспоразумима, грешкама и недоумицима, будући да су такве ствари пратиле радове најистакнутијих математичара.

5) Уважавање математике као културне делатности

Проучавањем историјских примера, ученици се сусрећу са чињеницом да се математика развијала и сама за себе, вођена естетским критеријумима, радозналошћу али и рекреацијом. Математика, у савременом облику, углавном се посматра као производ западне културе. Изучавањем историје, наставници и ученици имају прилике да се упознају са другим, мање познатим приступима одређеним проблемима, који се појављују у другим културама, као и да виде њихов утицај на западну културу и модерну математику.

1.2. На који начин укључити историју математике у наставу?

На који начин историја математике може бити укључена у наставу? Размотрићемо три начина:

а) Учење историје помоћу директне историјске информације

Под овим начином подразумевамо упознавање са изолованим историјским чињеницама, именима, датумима, догађајима као и свеобухватним историјским развојем.

б) Настава математике инспирисана историјом

Основна теза овог приступа је да учење мора да се одвија у ,,право" време за ментални развој ученика, да начин предавања не треба да буде ни строго дедуктиван ни строго историјски, већ избалансиран. Наставник би требало да познаје историју предмета, да препознаје кључне кораке историјске еволуције, као и кључне идеје и проблеме који су отворили нове перспективе у истраживањима. Историја се у наставу математике може увести експлицитно или имплицитно. Под експлицитном увођењу историје подразумева се настојање да се прикаже напредак математике кроз различите историјске периоде. У имплицитном увођењу историје прво се заврши са математичким садржајем, па се тек онда уводи историјски контекст. Оба ова приступа требала би да буду равноправна, и наставник би требало да их бира у зависности од ситуације. За ученике може бити корисно поређење савремене математике са својим облицима у прошлости. Ученици се упознају са различитим приступима познатим проблемима. Такође ученик повезује разне области математике са различитим нематематичким дисциплинама.

в) Развијање дубље свести о математици

Историја нуди занимљиве могућности, од свести о математици као науци која непрекидно напредује у садржају и форми, до општег оквира у коме су обједињени мотивација, питања и проблеми, који су довели до развоја различитих математичких области. Савремена настава математике, лишена историје, потпуно одбија наклоност и везу са културом и друштвеним наукама. Међутим математика као дисциплина се може посматрати у блиском односу са уметношћу (музика, архитектура), филозофским питањима и другим наукама. Математика је препознатљив саставни део културне баштине разних цивилизација, нација и етничких група.

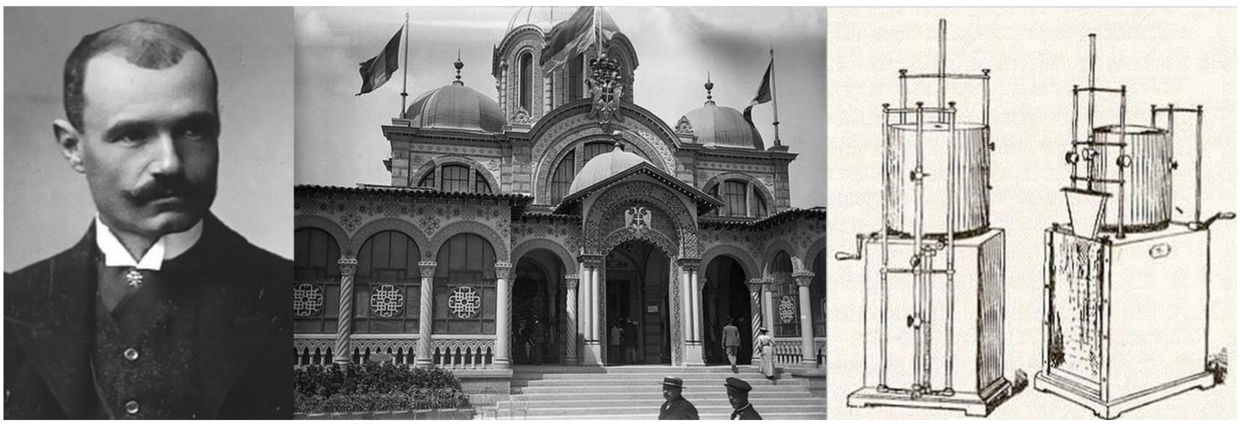
1.3. Како осмислити интегрисање историје математике у наставни процес?

Стручне службе (Друштво математичара Србије, Институт за педагошка истраживања Србије) требало би да повремено организују дуже или краће семинаре за наставнике математике, чија би тема била историја математике. Математички часописи који су намењени ученицима (Математички лист, Архимедес, Тангента) требало би да негују објављивање чланака везаних за историју математике, посебно користити разне јубилеје везане за познате математичаре. Уџбеници из историје математике, као помоћно наставно средство, који већ постоје у неким земљама, као што су Русија, Француска и Румунија, требало би да се уведу и у наш образовни систем.

Поред семинара, часописа и уџбеника, као један од начина за интеграцију историје математике могу да буди истраживачки пројекти засновани на историјским текстовима. На мастер студијама на Универзитету Роскилде у Данској, израда пројекта заузима централно место. Студенти треба да направе три пројекта, од којих један мора да се осврне на филозофска питања повезана са математиком, историјски развој или социјалну улогу математике. Дипломирани математичари, без обзира на будућу професионалну оријентацију, треба да стекну утисак о улози математике као сегмента људске културе и друштва, као дисциплини која има своју историју и која је повезана са другим дисциплинама. Иако се ради о примеру са факултета, пример је примењив и на нивоу основне или средње школе (где би се ученици упознавали са историјом математике кроз семинарске радове који би се радили појединачно или у групама).

Један од предлога за упознавање ученика са историјом математике је и оснивање математичке историјске лабораторије, где би се чувале реплике математичких инструмената, апарата, справа и играчака. Свакако би се ту нашао и хидроинтегратор Михаила Петровића Аласа (1868-1943), којим се наш математичар прославио. Овај данас неоправдано заборављен проналазак, може да послужи ученицима да лакше разумеју идеју интеграције, али и да се упознају са примером аналогне рачунарске машине.

Аласов хидроинтегратор је механичка справа која ради на воду и „рачуна“ интеграле одређених класа функција. Прву белешку о њему Петровић је објавио у Паризу 1898. године, а нешто касније и на српском језику са више детаља. Хидроинтегратор је био изложен у павиљону Краљевине Србије на Светској изложби у Паризу 1900. године, где је награђен златном медаљом изложбе. За овај проналазак Петровић је 1907. године био награђен и дипломом Друштва математичара у Лондону. Др Драган Трифуновић је 1980. године извршио реконструкцију Петровићевог хидроинтегратора. Тај реконструисани хидроинтегратор се налази у Кабинету за математику Шумарског факултета у Београду.



Михаило Петровић Алас (лево), павиљон Србије на Светској изложби у Паризу 1900. године (у средини) и скица Аласовог хидроинтегратора (десно)

За разлику од стања у предметима друштвених наука и уметности, у Србији је мало тога урађено на пољу историје у настави математике. Ретке су публикације које су посвећене општој или националној историји за потребе наставног процеса. Наш познати математичар, климатолог и астроном, Милутин Миланковић (1879-1958), истиче да је историја примењене математике (небеска механика и општа астрономија) „једна од најсветлијих страна историје човечанства“ и каже да нам математика „показује висину до које се људски ум попео“, а да њена историја представља „оне степенице преко којих се пењао“. Миланковић даље наставља: „Свака појединa наука може се у потпуности схватити и прозрети кроз наставни процес тек када се упозна како је постала и развила се у току векова.“

2. Нумерички системи старих цивилизација

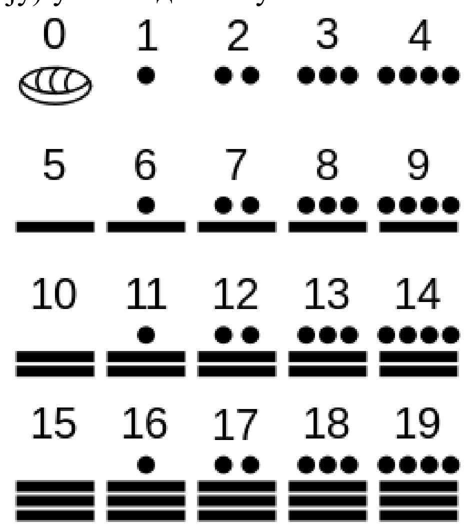
Прва математичка знања морала су бити повезана са бројањем. Вештину бројања имају и напредније животиње (мајмуни, неке птице итд.), па зашто је не би имао и човек. Људи су прво за бројање користили прсте, а када прсти нису били довољни онда би на дрвету, камену или костима урезивали знакове у групама од по 5 или 10 знакова (што симболично представља прсте једне односно обе шаке).

У Чешкој је откривена вучија кост стара 30 000 година са 55 дубоких уреза. Урези су подељени у групе од по 5. Деца сличан начин рачунања користе приликом различитих игара, четири вертикалне цртице преко којих се повуче пета, која је хоризонтална или коса. Кости бабуна са сличним урезима, приближно из истог периода, пронађене су и у Африци.

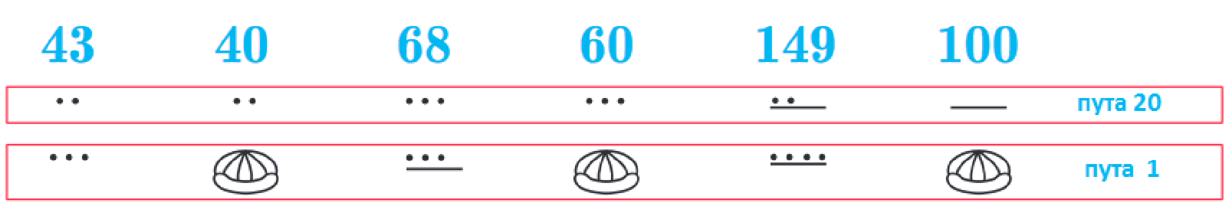
Када је требало забележити неки већи број, на пример 100, било је сувише напорно урезивати толико цртица. Тако су људи постепено дошли до тога да бројеве означавају цифрама. Различити народи су користили различите знакове за цифре. Углавном су, независно једни од других, стари народи користили десетични бројни систем, односно систем који у основи има десет. Од великих цивилизација изузетак је једино Месопотамија, где се развио шездесетични бројни систем.

2.1. Бројевни систем Маја цивилизације

Народ Маја, из прашума Гватемале и јужног Мексика, имао је пре 2000 година бројни систем који се састојао од двадесет различитих знакова (тачке и цртице у различитим варијантама). Бројеви од један до четири су изражавани одговарајућим бројем тачкица. Маје би повукле једну хоризонталну црту за једну шаку (5 прстију) уместо да пишу пет тачака. Две хоризонталне црте су две шаке (5 + 5 = 10 прстију) а три црте представљале су три шаке (5+ 5 + 5 = 15). Последња цифра (20) писала се као сунчев зрак, слично се писала и нула. У цивилизацији Маја Сунце се обожавало као божанство. Већи бројеви су стајали у паровима једни изнад других, и на тај начин су чинили две колоне одозго надоле. Овакав начин записивања бројева, сличан римском, био је неподесан за рачунање, посебно за множење и дељење. Није познато на који начин су Маје рачунали производ два броја, јер за праксу рачунања недостају подаци, пошто оно мало сачуваног материјала приказује само резултате.

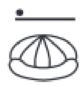
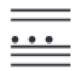
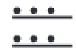
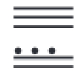
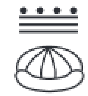


Бројеви већи од 20 записивани су на следећи начин:



Дакле, сваки број је заправо пар две „цифре“, горња се множи са 20 а доња се множи са јединицом, односно само се сабере на први резултат. Тако нпр. број 43 се записивао помоћу два симбола, симболом за 2 и испод њега симболом за 3, јер је $43 = 2\cdot 20 + 3$. Даље број 100 записиван са 5 горе и 0 доле, јер је $100 = 5\cdot 20 + 0$. Или рецимо број 149 је записиван са 7 горе и 9 доле, јер је $149 = 7\cdot 20 + 9$.

Задатак 2.1.1. (Четврти разред, Скуп природних бројева) Следеће симболе Маја цивилизације преведи у савремене индијско-арапске бројеве:

а)  б)  в)  г)  д)  ђ) 

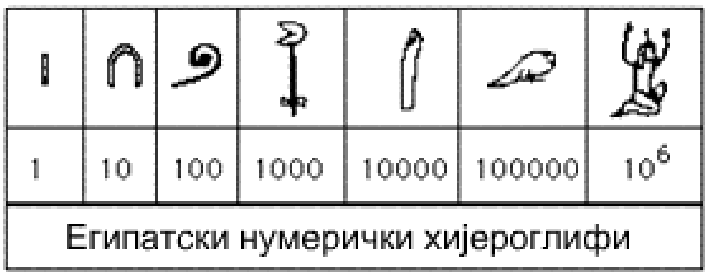
Решење задатка 2.1.1. а) 14 б) 120 јер је $6 \cdot 20 + 0 = 120$

в) 218 јер је $10 \cdot 20 + 18 = 200 + 18 = 218$ г) 168 јер је $8 \cdot 20 + 8 = 160 + 8 = 168$

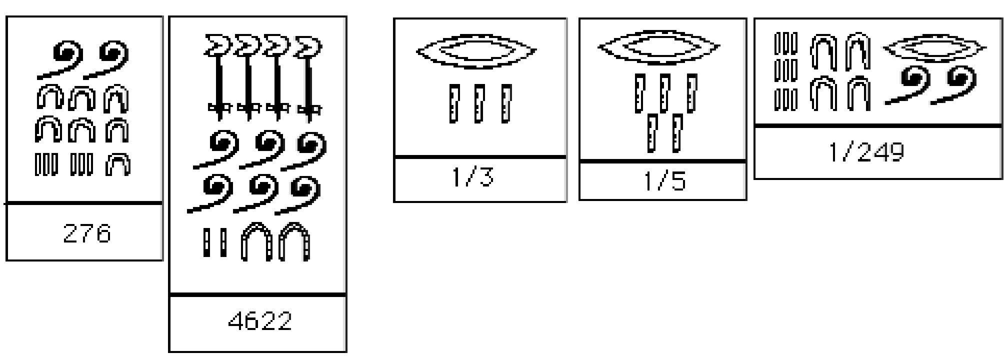
д) 313 јер је $15 \cdot 20 + 13 = 300 + 13 = 313$ ђ) 380 јер је $19 \cdot 20 + 0 = 380 + 0 = 380$

2.2. Египатски бројевни систем

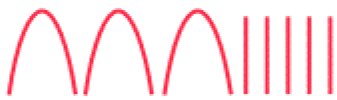
У долини Нила негде око 3000. године пре н.е. настала је египатска цивилизација. У то време настаје њихово пиктографско, хијероглифско писмо, којим се свака реч представљала упрошћеним цртежом. Паралелно са настанком писма развио се и веома неспретан систем нумерације, означавања бројева. Египћани су користили симбол за штапић као ознаку за 1, симбол ватре за 10, свитак за 100, лотосов цвет за 1000, криви штап за 10000, риба је представљала 100000, а симбол који представља запањеног човека коришћен је за број милион.



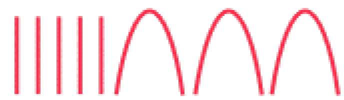
Египатски бројевни систем је адитивни („римски“) декадни систем за разлику од позиционог какав данас користимо. Стога су поступци за разне математичке операције били веома сложени. Ипак и поред тога, на основу сачуваних извора, знамо да су Египћани множили и делили, као и да су им били познати разломци (и њих су наравно записивали адитивним системом, нпр. разломак 3/5 су записивали тако што би три пута написали разломак 1/5). Збир два броја је добијан сакупљањем сличних симбола и претварањем сваких 10 таквих у 1 следећи већи. Одузимање је у суштини одстрањивање захтеваног броја појединих симбола. Међутим, настајале би компликације када треба одузети више симбола од датих.



У овом бројевном систему није постојао тачно утврђен поредак по коме су се писале јединице, десетице, стотине, хиљаде итд. Могле су да се пишу слева надесно, здесна налево, одозго надоле или одоздо нагоре. Па је тако нпр. број 35 могао да се напише:



или



Стари Египћани су познавали удвостручење резултата и множење са 10. Имали су посебне симболе за степене броја 10 од 0 до 6. И управо су свако множење сводили на множење са 2 и 10. Ево неколико примера:

$2 \cdot 23 = 23 + 23 = 46$

$4 \cdot 23 = 2 \cdot 23 + 2 \cdot 23 = 46 + 46 = 92$

$7 \cdot 23 = 2 \cdot 23 + 2 \cdot 23 + 2 \cdot 23 + 1 \cdot 23 = 46 + 46 + 46 + 23 = 161$

$23 \cdot 10$ = две десетице постају две стотине а три јединице постају три десетице, дакле добијени резултат је 230

$234 \cdot 10$ = две стотине постају две хиљаде, три десетице постају три стотине а четири јединице постају четири десетице, дакле добијени резултат 2 340

Ми данас у позиционом нумеричком систему лако множимо са 10 дописивањем нуле на крају. Египатски адитивни систем то није дозвољавало. Множење је било дуготрајан и компликован поступак. Док су се два броја делила тако што су сабиране двоструке и једноструке вредности делиоца све док се не добије дељеник. Ако то није било довољно коришћени су разломци (додавана је половина делиоца, петина делиоца, десетина делиоца итд.)

Задатак 2.2.1. (Други разред, Множење) Израчунај на ,,египатски начин" :

а) 5 · 34 = б) 6 · 52 = в) 8 · 24 =

Решење задатка 2.2.1.

а) 5 · 34 = (2+2+1) · 34 = 2·34 + 2·34 + 1·34 = 68 + 68 + 34 = 170

б) 6 · 52 = (2+2+2) · 52 = 2·52 + 2·52 + 2·52 = 104 + 104 + 104 = 312

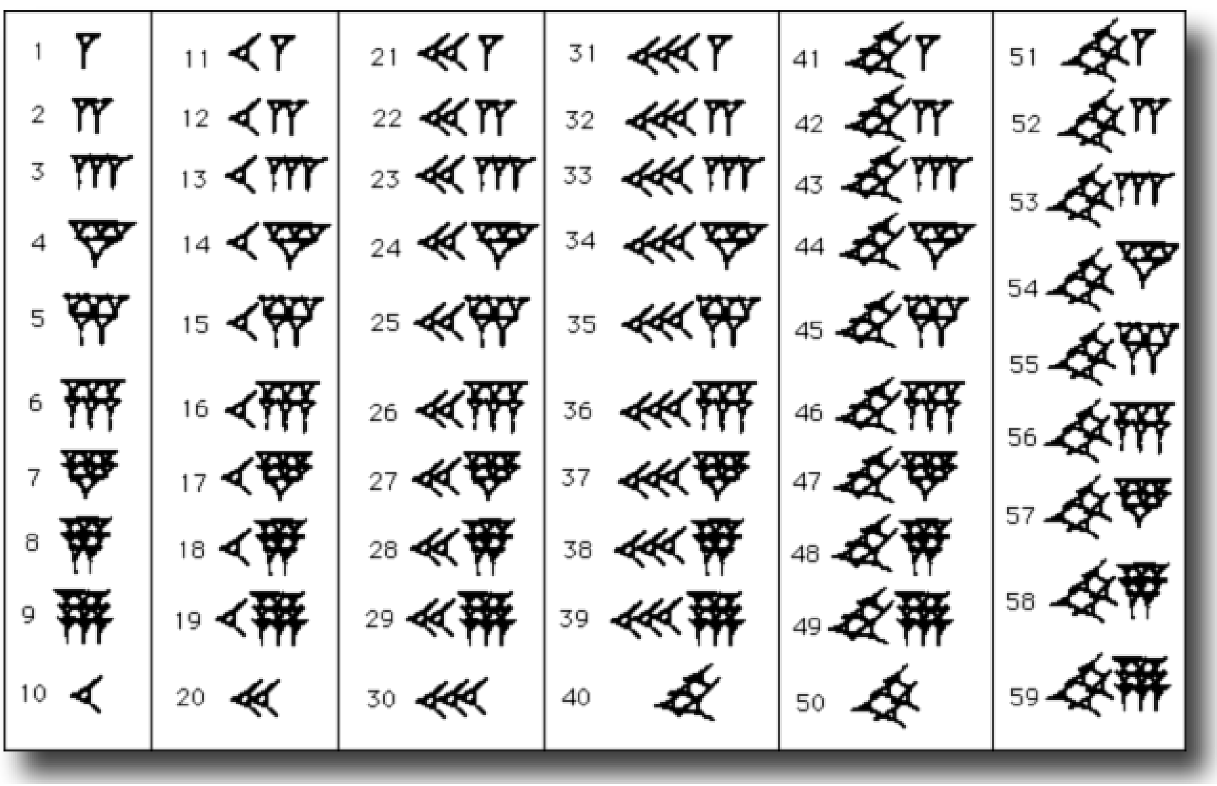
в) 8 · 24 = (2+2+2+2) · 24 = 2·24 + 2·24 + 2·24 + 2·24 = 48 + 48 + 48 + 48 = 192

Задатак 2.2.2. (Четврти разред, Скуп природних бројева) Који број у египатском бројевном систему представљају следећи симболи:

Решење задатка 2.2.2. То је број 31427 јер је 3·10000 + 1·1000 + 4·100 + 2·10 + 7 = 31427

2.3. Бројевни систем у Месопотамији

У Месопотамији, која се налазила на тлу данашњег Ирака, око 4 000 година пре н.е. настају први градови, а око 3 000 година пре н.е. долази до проналаска писма. Народи Месопотамије су писали помоћу клинова које су уклесивали у глинене таблице. Због тога се њихово писмо назива клинасто писмо. Са развојем писма развија се и математика. Иако настају и развијају се готово истовремено, математика забележена на глиненим плочицама показује далеко виши ниво од египатске математике. Док је у Египту математика била само практични алат, у Месопотамији су математичари (заправо образовани писари и чиновници) били убеђени да је математика вредна изучавања сама по себи. Захваљујући еластичном позиционом систему развили су сложене методе рачунања. Умели су да решавају линеарне и квадртане једначине и проблеме на начин сличан ономе који се користи у средњошколској алгебри.



Док су се све остале цивилизације углавном определјивале за десетични бројни систем (вероватно због 10 прстију на рукама), народи Месопотамије су користили шездесетични бројни систем. Уместо 10, користили су 60 цифара за записивање свих бројева. Тачније 59 цифара све до 3. века пре н.е. када је уведен симбол за упражњено место у запису броја (односно симбол за нулу), али је његова функција до данас остала нејасна. Број 60 се писао истим симболом као број 1. Такође се број $60 \cdot 60 = 3\,600$ писао истим симболом, као и $60 \cdot 60 \cdot 60 = 216\,000$ и тако даље. Сви ови степени броја 60 су писани уз помоћ једног усправног клина, а на који се мисли показивао је контекст. Два усправна клина су представљала број 2. Три клина број 3 итд. Број 10 се писао уз помоћ два спојена коса клина.

Цивилизација, која се развијала између Тигра и Еуфрата, је главни ,,кривац“ што и данас пун круг делимо на 360 степени, степен на 60 минута и минут на 60 секунди. Такође, народи Месопотамије су ,,кривци“ што дан делимо на 24 сата, сат на 60 минута и минут на 60 секунди. Та подела делује необично у десетичном бројевном систему, али је сасвим природна у њиховом шездесетичном. На пример 3 сата и 20 минута у десетичном систему је 3,33333... сата, док је у шездесетичном једноставно 3,20 сати.

Овај шездесетични систем је позициони систем (слично као и у нашем десетичном систему, са десна на лево су се писале јединице, десетице, хиљаде итд.) Та особина га чини напреднијим и погоднијим за рачунање од адитивних система (какви су били рецимо египатски и римски). Иако делује гломазан, са својих 60 цифара, овај систем је у неким аспектима напреднији од нашег десетичног, заснованог на основи 10. Јер, 10 има два права делиоца, то су 2 и 5. Док их број 60 има чак десет – 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20 и 30. Због тога ,,много више“ бројева има коначну репрезентацију него у десетичном систему, те је рад са разломцима у многоме олакшан.

У Месопотамији се множење сводило на сабирање и множење потпуних квадрата бројева. Користећи формулу:

$$\mathbf{a \cdot b = \frac{((a+b)^2 - a^2 - b^2)}{2}}$$

Пронађене су таблице старе 4000 година, које садрже квадрате бројева од 1 до 59, односно квадрате свих ,,цифара“ у шездесетичном систему. Дељење је било нешто сложеније. Вавилоњани су дељење претварали у множење реципрочном вредношћу ($\mathbf{a{:}b = a \cdot \frac{1}{b}}$). Откривене су и таблице са реципрочним вредностима бројева, које су коришћене за поступак дељења.

Главни хендикеп месопотамског бројевног система било је одсуство нуле (користи се тек од 3. века пре н.е.) Такође, као што је речено, сви степени броја 60 су се писали исто, односно означавао их је један усправан клин. И ако се из контекста није могло закључити, остајало би нејасно да ли симбол означава 1 или 60 или 3600 итд.

Задатак 2.3.1. (Седми разред, Рационални бројеви) Израчунај на „месопотамски начин”:

а) $12 \cdot 27 =$ б) $7 \cdot 31 =$

Решење задатка 2.3.1.

а) $12 \cdot 27 = ((12+27)^2 - 12^2 - 27^2) : 2 = (39^2 - 144 - 729) : 2 =$

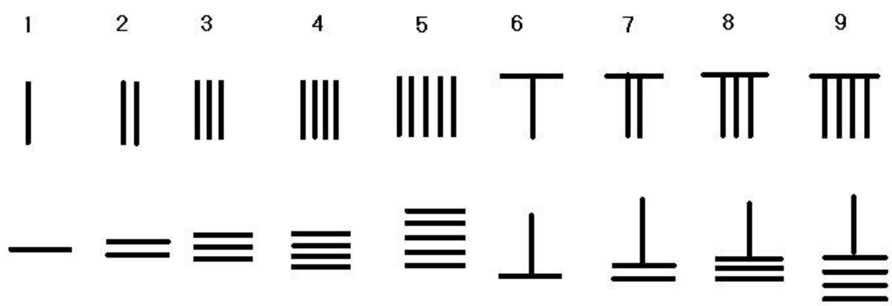
$= (1521 - 144 - 729) : 2 = 648 : 2 = 324$

б) $7 \cdot 31 = ((7+31)^2 - 7^2 - 31^2) : 2 = (38^2 - 7^2 - 31^2) : 2 = (1444 - 49 - 961) : 2 =$

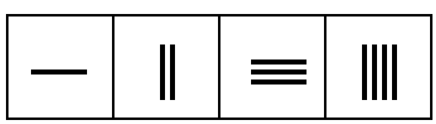
$= 434 : 2 = 217$

2.4. Кинеско-јапански бројевни системи

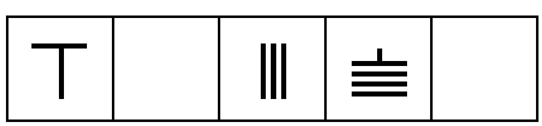
Пре више од 2000 година у Кини се појавила варијанта бројевног система познатог као „бројање штапића“. По свој прилици да је овај систем коришћен још у 3. веку пре нове ере, а могуће и раније. Све цифре и бројеви су се по утврђеном правилу добијали помоћу штапића чија је дужина била од 3cm до 14cm. Вековима су га математичари користили за рачунање. Осим у Кини, користио се и у Јапану, Кореји и Вијетнаму. Две основне варијанте су приказане на слици:



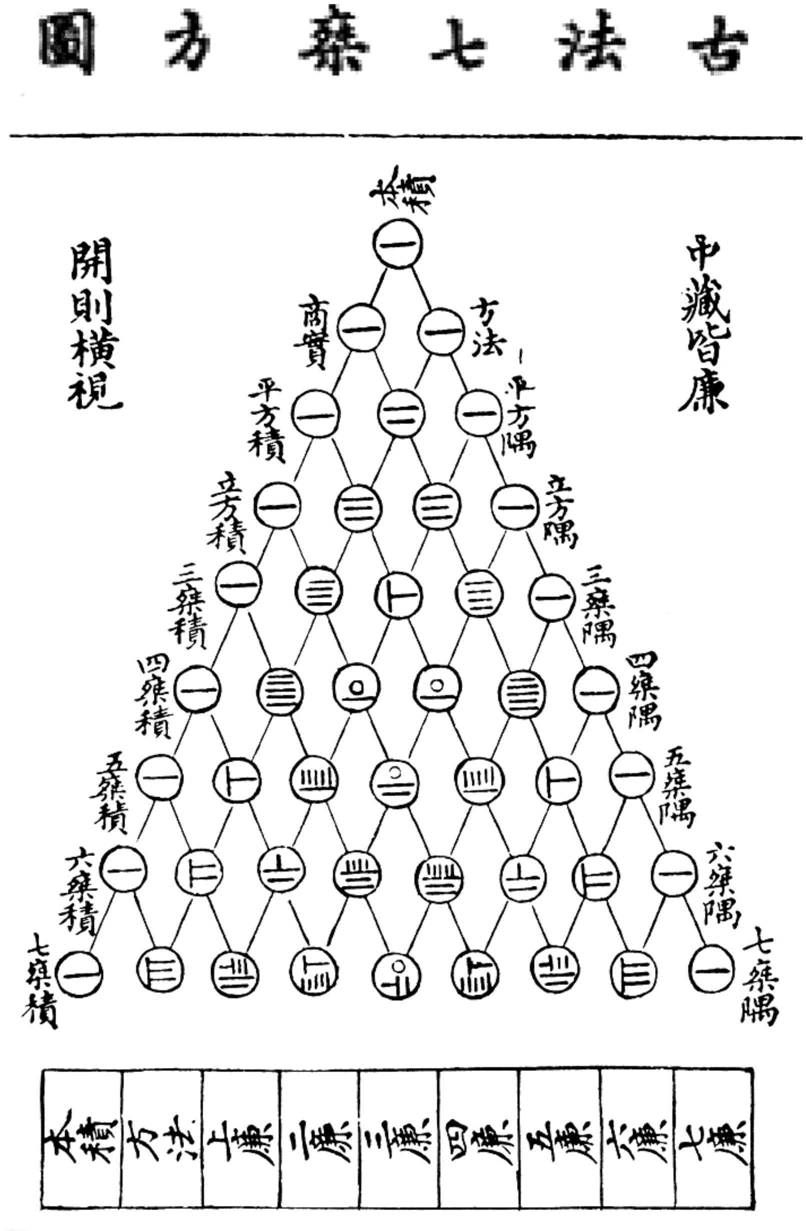
Зашто свака цифра има два симбола у овом позиционом декадном систему? Док су се штапићи слагали ради рачунања, једна врста симбола је била довољна. Међутим када су Кинези почели да записују бројеве јавио се проблем, јер су три усправне црте III могле да означавају и број 3, и број 12 и број 21. Да би ово превазишли, наизменично су користили бројеве из горње и доње колоне. Број 1234 се записује:



Касније је уведено и празно место за нулу. Па је број 60390 записиван на следећи начин:

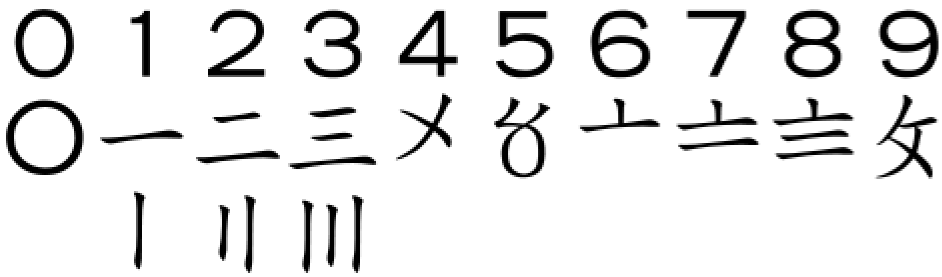


У Јапану су прављене плочице на којима су цртице (цифре) биле утиснуте или нацртане, те се слагањем и премештањем тих плочица рачунало.



Троугао Јанг Хуиа (Пасклаов троугао) у раду математичара Џу Шиџеа из 1303. године

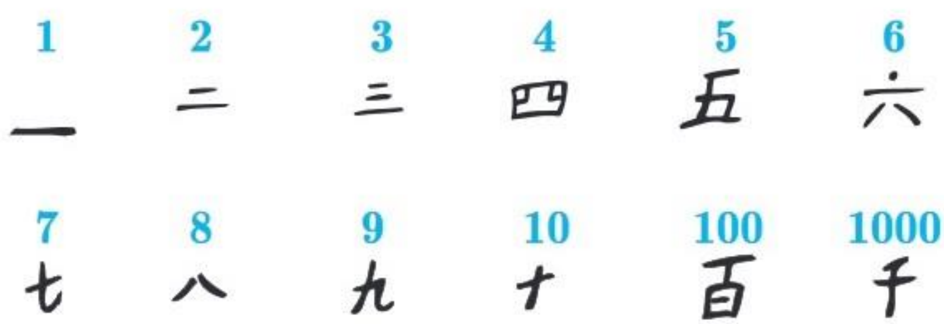
До усавршавања овог бројевног система долази у Кини за време династије Сунг. Ова династија је 300 година владала Кином, од 10. до 13. века. Разликују се два периода, Северно Сунг Царство (960-1127) и Јужно Сунг Царство (1127-1279). За то време, династија је успела да поново уједини земљу, да развије велике градове и да од Кине направи највећу светску економску силу. Развој економије и трговине, условио је и настанак новог бројевног система. У Јужном Сунг Царству јавља се тај нови бројевни систем познат као суџоу или хуама систем.



Суџоу или хуама бројеви

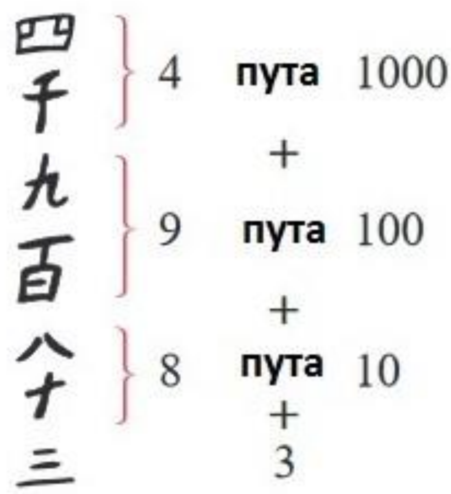
Различите варијанте суџоу или хуама бројевног система у наредним вековима постају популарне у области трговине, у рачуноводству и књиговодству. Док су се на кинеским пијацама, посебно у Хонг Конгу, задржали до краја 20. века..

Паралелно са поменутим бројевним система, у Кини се развијао и бројевни систем заснован на кинеском писму. Сличан систем развијан је и у Јапану. Кинеско писмо је састављено од симбола , тако да сваки симбол представља једну једносложну реч кинеског језика. Па тако и за сваку реч која представља број постоји тачно одређени симбол кинеског писма. Неки симболи кинеског писма коришћени су још у време династије Шанг око 1500. п.н.е. Док је процес формирања кинеског писма заокружен под династијом Ћин у 3. в.н.е.



Симболи кинеског писма за бројеве

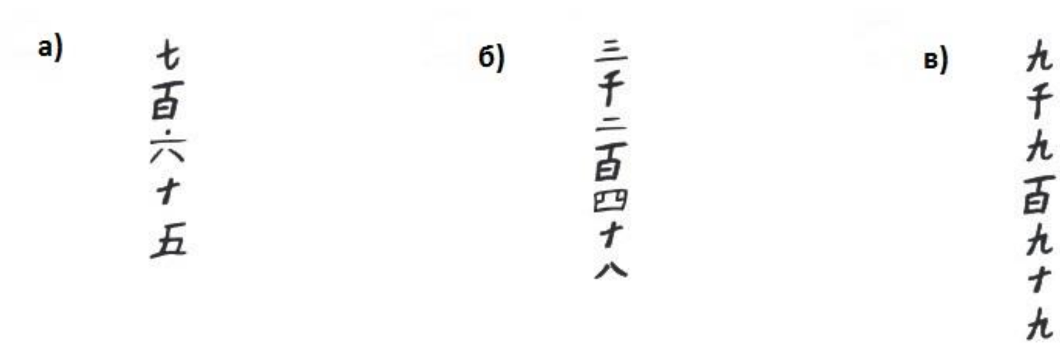
Касније је настало правило на основу којег сваки број могао да се напише уз помоћ симбола за једноцифрене бројеве и декадне јединице. Па се на кинеском број 4983 записује на следећи начин:



Дакле, у вертикалном низу се пишу „цифре“, тако што се прво напише број хиљада (односно највеће декадне јединице), па затим симбол за хиљаду, па испод број стотина, па симбол за сто, па број десетица, па симбол за десет, и на крају број јединица.

Владе НР Кине и Тајвана су развиле стандарде за овај систем бројева, тако да је њим могуће, додавањем одређених префикса, записивати и разломке, степене бројева итд. И поред тога, овај систем је данас у највећој мери напуштен. Користи се још у финансијама (нпр. за писање чекова).

Задатак 2.4.1. (Четврти разред, Додатна настава-дешифровање бројева и рачунских операција) Које бројеве представљају следећи симболи:



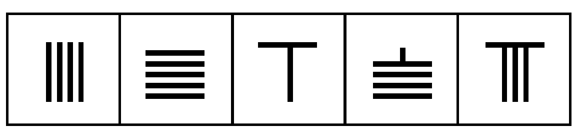
Решење задатка 2.4.2.

а) 765 јер је 7·100 + 6·10 + 5 = 765

б) 3248 јер је 3·1000 + 2·100 + 4·10 + 8 = 3248

в) 9999 јер је 9·1000 + 9·100 + 9·10 + 9 = 9999

Задатак 2.4.2. (Трећи разред, Додатна настава-дешифровање бројева и рачунских операција) Који број је представљен цртицама у старом кинеском бројевном систему:



Решење задатка 2.4.2. То је број 45698.

2.5. Бројевни системи Старе Грчке

Стара Грчка је несумњиво колевка европске цивилизације, која је опет у последњих неколико векова постала глобална цивилизација. Савремена математика, као и многе друге науке, почива на њиховом наслеђу. Ипак за разлику од геометрије, Грци нису превише развијали аритметику. Самим тим ни грчки бројевни систем није био на нивоу какав се очекује од цивилизације која је по много чему била вековима испред свог времена.

I	1
II	2
III	3
IIII	4
Г	5
ГI	6
ГII	7
ГIII	8
ГIIII	9
Δ	10
ΔГ	15
ΔΔ	20
Г$^{\Delta}$	50
Н	100
Х	1000
М	10 000

Најстарији грчки бројевни систем је био атички бројевни систем. Био је у употреби од 7. века пре н.е, могуће и раније, па све. до 4. века пре н.е. Користио је слова као цифре. И данас се у Грчкој ови бројеви користе за писање редних бројева, слично као што се римски бројеви користе у исту сврху. Римски бројевни систем је управо настао корекцијом атичког. Главна разлика у начину записивања бројева између атичког и римског система је било што се у првом број 4 писао IIII а у другом IV, слично је било и са 9, 40, 90 итд. Атички бројевни систем имао је ознаке и за разломке, али без неког посебног правила (на пример једна половина се означавала са C, једна четвртина сличним симболом само заротираним за 180°)

Алфабетски бројевни систем је настао најкасније у 5. веку пре н.е. али је у целом грчком свету постао доминантан тек у 3. века пре н.е. У литератури алфабетски бројевни систем се често назива и милетски, јонски или александријски бројевни систем. Свакој јединици, десетици и стотини било је додељено по једно слово грчког алфабета. Пошто је то захтевало 27 слова, грчки 24-словни алфабет проширен је са три застарела слова. Да би се бројеви разликовали од слова, додавана им је кераиа (симбол сличан апострофу ʽ). Да би се представљали бројеви од 1 до 999 та квачица, односно кераиа, дописивана је са десне стране а за бројеве од 1000 до 999 999 са леве стране.

α	β	γ	δ	ε	ϝ	ζ	η	θ
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ϙ
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ϡ
100	200	300	400	500	600	700	800	900

За писање великих бројева у алфабетском систему, коришњен је симбол **M** из старог атичког система, који означава 10 000, или на старогрчком „миријада”. Број миријади се писао изнад, ако би изнад **M** писало **β** (односно 2) то би онда био број 2 • 10 000 = 20 000. Или ако би изнад **M** писало **ω** (800) то би онда било 800 • 10 000 = 8 000 000. Ево примера једног броја написаног алфабетским бројевима:

$$\overset{,\delta\phi\pi\beta}{\mathrm{M}}\,\psi\theta' = 4582 \times 10.000 + 709 = 45.820.709.$$

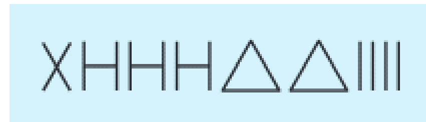
Писањем великих бројева бавио се и чувени Архимед у 3. веку пре н.е. У свом делу „Бројач песка”, развио је нову бројевну шему за писење великих бројева, која је имала много већи опсег од до тада постојеће.

Након што је Александар Велики, својим освајачким походима, стигао до Инда, Грци долазе у посед великих библиотека пре свега у Месопотамији, мање у Египту. Под утицајем вавилонских бројева, Грци у 3. веку пре н.е. свој адитивни алфабетски бројевни систем делимично претварају у неку врсту позиционог система, ограничавањем сваке позиције на највише 59, након чега се прелази на наредну позицију. Ипак овој систем није коришћен само за природне бројева, већ и за писање разломака и рачунске операције са њима (нешто слично као што се степен или сат деле на 60 минута, а минут на 60 секунди). Као што је већ поменуто, вероватно негде у 3. веку пре н.е., грчки математичари „откривају“ нулу, међутим то велико откриће нису у потпуности искористили да до краја преведу свој адитивни алфабетски систем у позициони. Симбол за нулу се током времена мењао. У 2. веку пре н.е. у Александрији је било уобичајно да се нула означава као кружић надвучен цртом од неколико његових пречника. Касније се ова надвлака скратила на један пречник (слово макрон „ō”). У византијским рукописима надвлака је изостављена, тако да је остало само „**o**” (омикрон), симбол којим и данас означавамо нулу.

Задатак 2.5.1. (Четврти разред, Скуп природних бројева) Следеће бројеве преведи из грчког атичком система у савремени индијско-арапски бројевни систем:

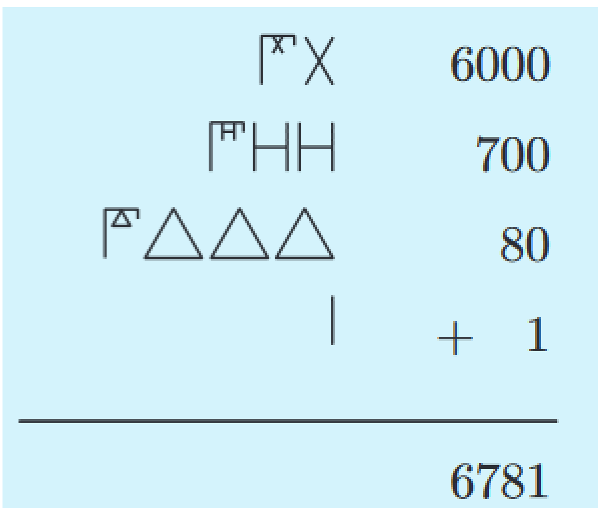
а)

б)

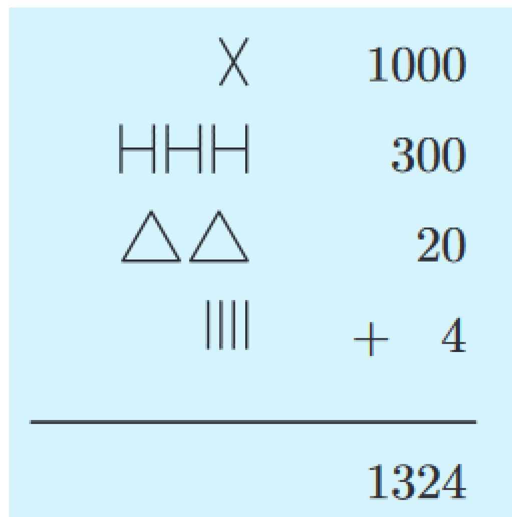


Решење задатка 2.5.1.

а)



б)



2.6. Римски бројеви

По угледу на атичке бројеве настају римски бројеви, који се и данас понекад користе за писање редних бројева. И атички и римски бројевни системи били су у основи адитивни. Самим тим имали су све ,,хендикепе” адитивних бројевних система: били су компликовани за одузимање са прелазом, а за множење и дељење готово неупотребљиви.

РИМСКИ БРОЈЕВИ

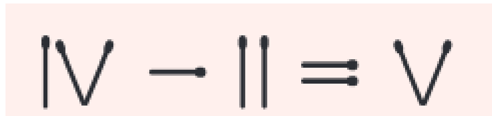
1	**I**	10	**X**	100	**C**
2	**II**	20	**XX**	200	**CC**
3	**III**	30	**XXX**	300	**CCC**
4	**IV**	40	**XL**	400	**CD**
5	**V**	50	**L**	500	**D**
6	**VI**	60	**LX**	600	**DC**
7	**VII**	70	**LXX**	700	**DCC**
8	**VIII**	80	**LXXX**	800	**DCCC**
9	**IX**	90	**XC**	900	**CM**
10	**X**	100	**C**	1000	**M**

Велики бројеви су се писали тако што се изнад постојећих симбола писала хоризонтална цртица. Она је увећала вредност броја 1000 пута.

5000	10 000	50 000	100 000	500 000	1 000 000
$\overline{\mathrm{V}}$	$\overline{\mathrm{X}}$	$\overline{\mathrm{L}}$	$\overline{\mathrm{C}}$	$\overline{\mathrm{D}}$	$\overline{\mathrm{M}}$

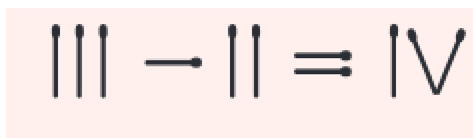
Римљани нису уопште развијали математику, и бројеве су углавном користили за писање година, рачуна, новчаних износа и слично. Римска цивилизација није изнедрила ниједног великог математичара, а слично је и са већином других природних наука. Ипак римски бројеви су дуго остали у употреби захваљујући утицају латинског језика (и данас службени језик Католичке цркве, те је вековима био и језик на коме су се у Европи писала научна дела, коришћен је на првим универзитетима итд.)

Задатак 2.6.1. (Трећи разред, Природни бројеви до 1000) Помери само једну шибицу тако да једнакост постане тачна:



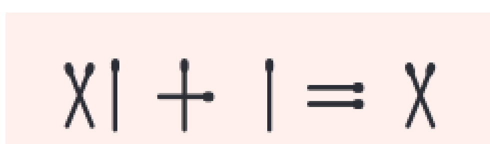
Решење задатка 2.6.1. $\mathrm{IV}+\mathrm{I}=\mathrm{V}$

Задатак 2.6.2. (Трећи разред, Природни бројеви до 1000) Помери једну шибицу тако да једнакост постане тачна:



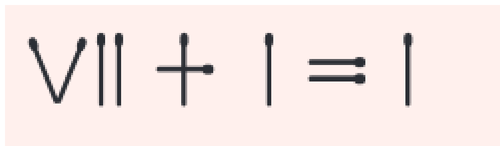
Решење задатка 2.6.2. $\mathrm{II}+\mathrm{II}=\mathrm{IV}$ или $\mathrm{III}+\mathrm{I}=\mathrm{IV}$

Задатак 2.6.3. (Трећи разред, Природни бројеви до 1000) Помери само једну шибицу тако да једнакост постане тачна:



Решење задатка 2.6.3. $\mathrm{IX}+\mathrm{I}=\mathrm{X}$ или $\mathrm{X}+\mathrm{I}=\mathrm{XI}$

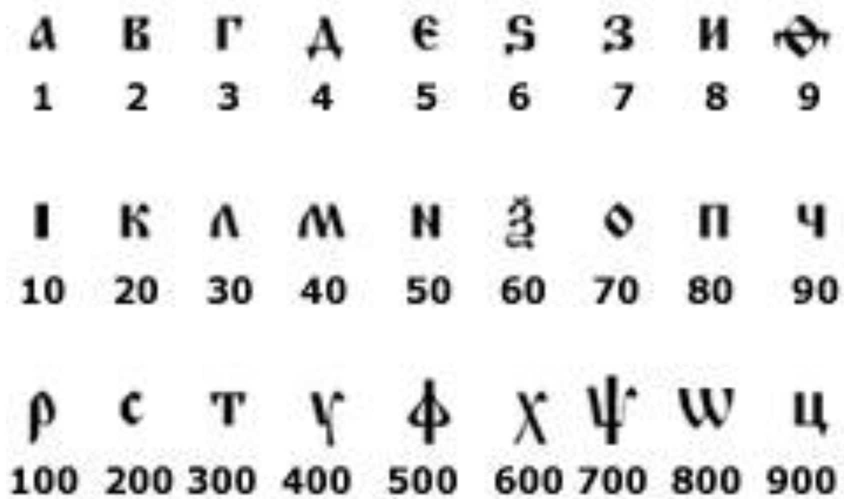
Задатак 2.6.4. (Трећи разред, Природни бројеви до 1000) Уклони три шибице тако да једнакост постане тачна:



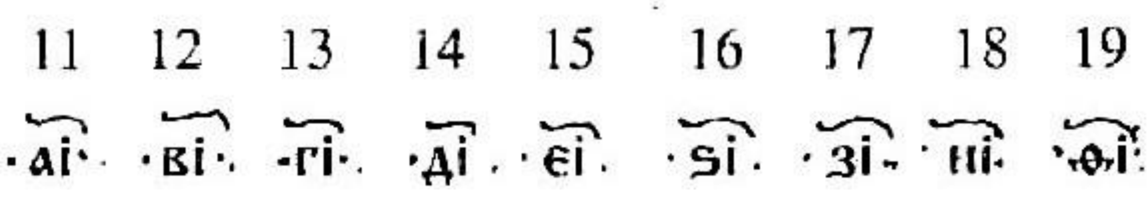
Решење задатка 2.6.4. **II – I = I**

2.7. Ћирилични бројевни систем

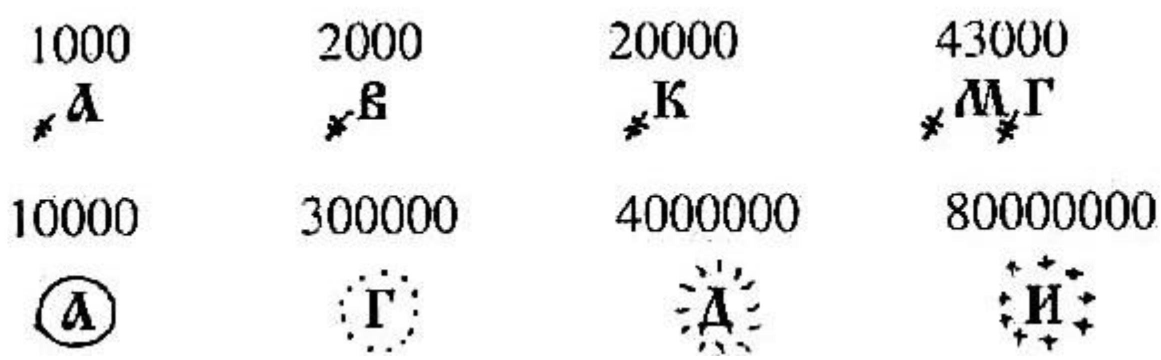
И док су грчки атички бројеви послужили као узор за настанак римских бројева, други бројевни систем Старих Грка, алфабатски, послужио као узор за настанак ћириличног бројевног система. Адитивни ћирилични систем коришћен је у средњевековним словенским земљама у којима се писало ћирилицом (пре свега Србија, Бугарска и Русија, али и Македонија, Црна Гора, Украјина и Белорусија).



Јединицама је додељено 9 слова, десетицама следећих 9, и стотинама још 9. Понекад је, као и у алфабетском систему, уз бројеве дописиван „апостроф” кераиа, да би се бројеви разликовали од слова. Бројеви од 11 до 19 су се читали и писали здесна на лево, а остали слева на десно.



Број хиљаду се означавао одговарајућим знаком „҂” испред слова. На пример, са „҂П” означавао се број 1000 • 80 = 80 000. Повремено су коришћени и посебни симболи који су број увећавали 10 000 пута, 100 000 пута итд.



У Русији је овај систем остао у употреби до реформи Петра Великог почетком 18. века. И данас се у Русији ови бројеви могу видети на великим сатовима који красе торњеве цркава и куле тврђава грађених пре 18. века.

Сат из 17. века на кули у граду Суздаљ (лево) и закон о бакарном новцу са почетка 18. века (десно)

Задатак 2.7.1. (Трећи разред, Додатна настава-дешифровање бројева и рачунских операција) Следеће бројеве преведи из ћириличног у савремени индијско-арапски бројевни систем:

а) ·СК҃В·

б) ·ТѲ҃І·

в) ·ѴЛ҃А·

г) ·ЦП҃И·

Решење задатка 2.7.1. а) 222 б) 319 в) 431 г) 988

2.8. Бројевни систем Етиопије

Етиопија је земља на истоку Африке, која у континуитету постоји хиљадама година. Почеци Етиопског Царства сежу још у стари век, када су етиопски цареви господарили трговином на Црвеном мору и када су им на рудницима злата завидели и египатски фараони. Тај „златни“ период, познат као Аксумско Царство, завршава се када ислам осваја обале Црвеног мора. Наредне векове Етиопија проводи у изолацији од остатка света, на својој висоравни, све док је поново нису откриле европске колонијалне силе. Та изолованост, уз богато наслеђе, допринела је да се и данас у овој земљи може видети много тога необичног. Па тако у Етиопији годину деле на 13 месеци. Нови дан не почиње у поноћ као у остатку света, већ је „наших“ 6 часова преподне заправо етиопских 12 сати ноћу. Оно што би требало да је 7 ујутру је 1 сат. Док тачно у подне часовна казаљка у Етиопији показује на 6 а не на 12. Два круга од по 12 сати не деле се на преподневне и послеподневне часове, већ на дневне и ноћне. Па је тако поноћ у Етиопији 6 ноћних часова.

Древна игра бројања (тј. манкала или гебета) на каменој плочи из 700. године пре нове ере пронађеној у Етиопији (лево) и савремена верзија игре (десно)

Бројевни систем који је коришћен у Етиопији, заснован је на грчком алфабетском бројевном систему. У поменутом Аксумском Царству говорило се гиз (гез) језиком и писало се гиз алфабетом. Најстарији сачувани трагови етиопске писмености датирају из 9. века пре нове ере, док су најстарији сачувани натписи на гиз алфабету из 7. века пре нове ере.

Сваком слову гиз алфабета додељивани су редом једноцифрени бројеви, а затим и „округли“ двоцифрени бројеви (од 10 до 90) и на крају једно слово за број 100. И ту стајемо, искоришћено је свега 19 од укупно чак 231 слова гиз алфабета. Практично ту се и завршава сличност са грчким алфабетским системом, али и са свим другим системима касније проистеклим из њега (а то су јеврејски, египатско-коптски, абјад-арапски и ћирилични бројевни систем). Док су остали системи додељивали слова и стотинама (од 200 до 900), етиопски гиз бројевни систем те бројеве записује на следећи начин ፪፻ (један поред другог симболима за 2 и 100, односно 2·100 = 200) и тако редом. Даље, број 1000 је записиван као ፲፻ (10*100=1000). Затим 10000 је записивано двоструким симболом за 100 , ፻፻ (100*100=1000). За запис броја 100000 коришћена су три симбола ፲፻፻ (10*100*100=100000).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
× 1	፩	፪	፫	፬	፭	፮	፯	፰	፱
× 10	፲	፳	፴	፵	፶	፷	፸	፹	፺
× 100	፻								
× 10.000	፼								

Гиз језик се данас користи само као литургијски језик православних цркава у Етиопији и Еритреји. Док је службени језик у Етиопији од 12. века до данас амхарски језик. Преласком са гиз језика на амхарски, задржан је гиз алфабет али и гиз бројевни систем. Временом јавиле су се новине у записивању, углавном под утицајема из Европе. Па је тако уведен нови симбол `ሺ' што је заправо скраћеница за 1000 на амхарском језику (оносно слово које означава први слог речи хиљаду). Затим је уведен и симбол за нулу. Те данас постоји предлог да се гиз цифре комбинују са савременим идијско-арапским позиционим системом (заправо тај хибридни бројевни систем се већ повремено користи, али није стандардизован у овој великој али сиромашној земљи).

Задатак 2.8.1. (Четврти разред, Додатна настава-дешифровање бројева и рачунских операција) Које бројеве представљају следећи симболи у етиопском гиз бројевном систему:

а) ፲፩ б) ፲፮ в) ፳፪ г) ፸፭

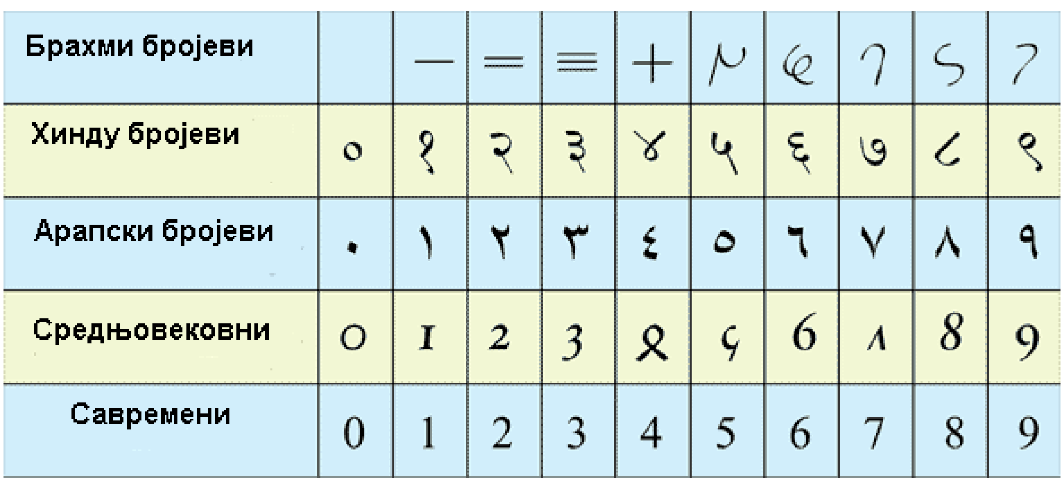
Решење задатка 1.8.1. а) 11 б) 16 в) 22 г) 75

Задатак 2.8.2. (Четврти разред, Додатна настава-дешифровање бројева и рачунских операција) Погледај сат и израчунај које време у Етиопији он показује. Нови дан у тој земљи почиње да се рачуна од 6 сати преподне по нашем начину мерења времена.

Решење задатка 2.8.2. Ако је у питању дневних 10 часова и 10 минута онда је то заправо 16 часова и 10 минута по ,,нашем" начину мерења времена. Ако се ради ноћних 10 часова и 10 минута, онда је то 4 и 10 рано ујутру.

2.9. Индијско-арапски бројеви

На крају долазимо до нашег савременог позиционог система са 10 цифара (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0). Обично кажемо да користимо арапске цифре, али оне заправо потичу из Индије. Овај декадни систем са нулом настаје крајем 7. века нове ере и потискује старе индијске брахми бројеве који су били у употреби од 3. века нове ере. По неким историчарима математике „арапски” бројевни систем се прво појавио у Индокини (Камбоџа) и Индонезији, а затим у Индији. Било како било, ови бројеви су се уз незнатне промене ширили од истока ка западу. Након истока Индијског потконтинента, шире се на запад потконтинента, затим их прихвата Персија, преко Арапа стижу у Европу, одакле су се раширили по европским колонијама широм света.



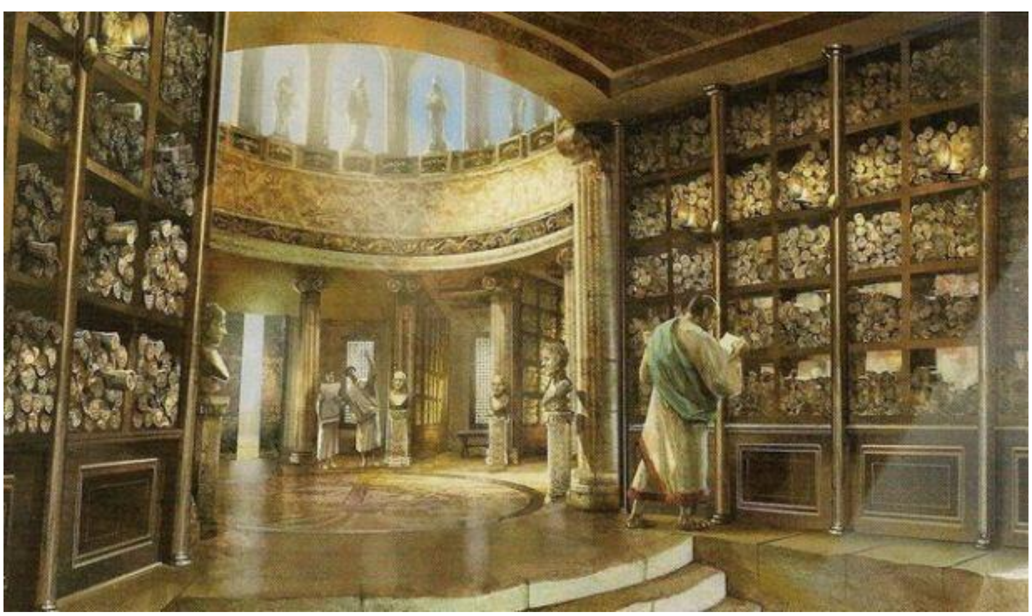
Муслимански свет се упознаје са овим бројевима у 9. веку нове ере, када се у Багдаду преводи индијско астрономско дело „Синдхинд" које уводи индијску аритметику са њеним нумеричким системом. За даље ширење „арапских" бројева заслужан је велики математичар и астроном из 9. века, Мухамед ибн Муса ел Хорезми. Рођен је у Хорезму (данас Узбекистан) а живео и радио у Багдаду (и Хорезм и Багдад су тада делови Персије). Као члан багдадске Академије наука написао је дело „Рачун са Хинду бројевима" . Касније је ова књига преведена на латински под насловом „*Algoritmi de numero indorum*", што је био лош превод наслова „Ал Хорезми о индијским бројевима". Убрзо се реч алгоритам одомаћила за начин рачунања са новим бројевима, сада већ названих арапским, а не индијским. Хорезми је саставио и надалеко познате астрономске таблице у којима је објединио грчки и индијски астрономски систем. Ипак, арапски математичари и астрономи споро су прихватали индијске цифре. Неки од њих у 11. веку бројеве пишу словима. Како су се арапска математика и астрономија развијале углавном на грчком наслеђу, све време је у употреби и грчки алфабетски бројевни систем. И то не само у преводима грчких астронома и математичара, већ и у новим делима.

Европљани се у средњем веку сусрећу са „арапским бројевима", прво у Шпанији која вековима била под арапском влашћу, а затим и у Италији, Француској итд. Међутим, озбиљнија употреба ових бројева почиње од 15. века када се и европска математика буди из дугог средњевековног зимског сна.

3. Ератостен и рачунање обима Земље

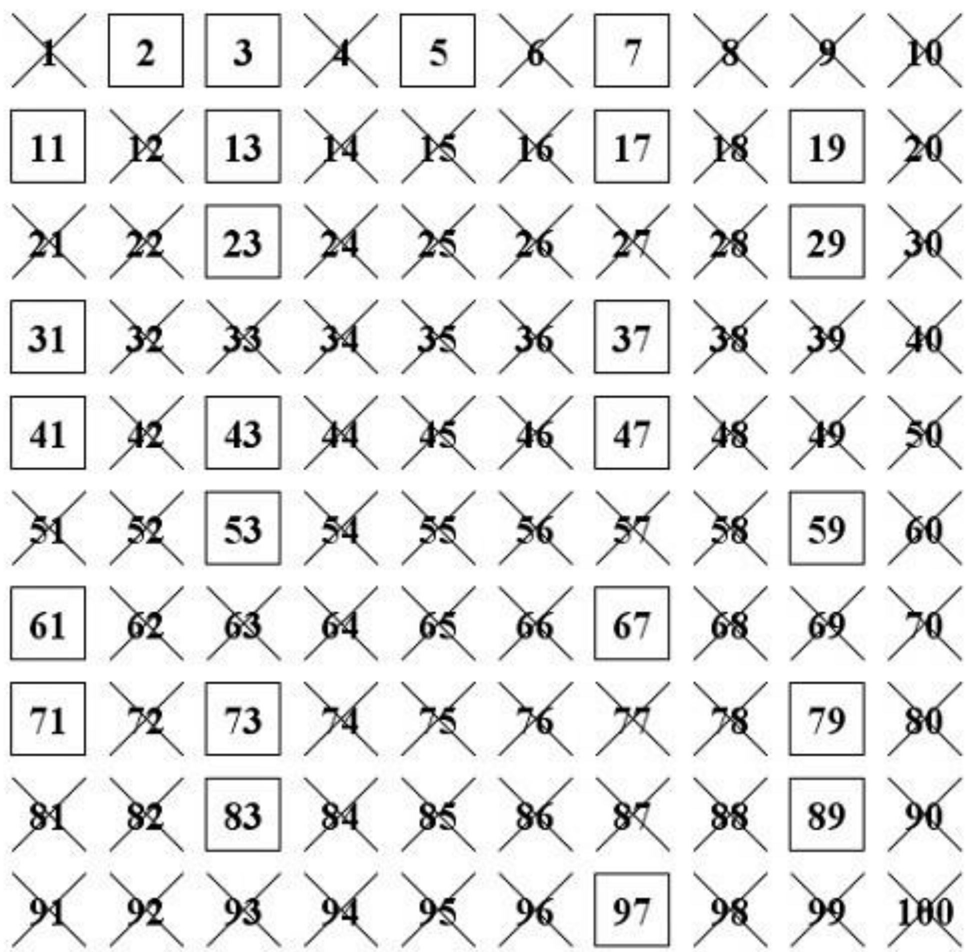
Ератостен из Кирене био је грчки математичар, али и астроном, географ, песник и атлетичар. Био је познат под надимком „Бета“ (што је друго слово грчког алфабета и ознака за број два у алфабетском бројевном систему). Надимак је добио јер се у многим областима којима се бавио, сматрао другим човеком у тадашњем грчком свету. Рођен је 276. п. н. е. у Кирени, једној од пет грчких колонија на територији данашње Либије. Школовао се најпре у Александрији, затим у Атини. Велика почаст му је указана када га је Птоломеј Еуергет, владар Птоломејског Египта, поставио за управника Александријске библиотеке, најзначајније научне и образовне институције тог времена. У дубокој старости је ослепео, умро је у Александрији 194. године пре нове ере.

Њему се приписује систем земаљских координата задатих помоћу два угла (географска ширина и географска дужина). Израдио прву мапу тада познатог света (Европа, Азија и Африка) на којој је користио паралеле и меридијане.

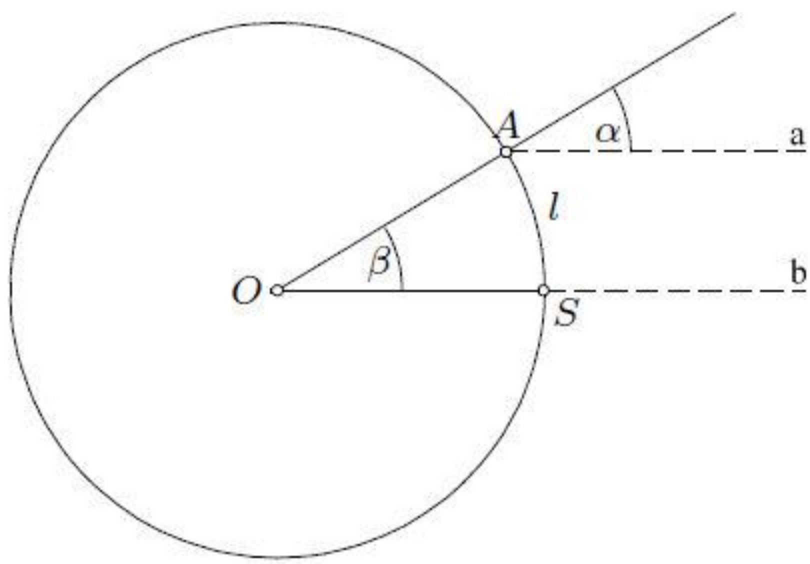


Александријска библиотека, савремена илустрација

У математици је најпознатији по Ератостеновом ситу, методи за раздвајање простих од сложених бројева. Поступак се састоји у следећем: испишу се сви бројеви од 2 до n, почевши од првог броја на списку, број два, прецртају се са списка сви бројеви са два и упише се (заокружи се) двојка као прост број. Затим се понавља поступак са следећим непрецртаним бројем m. Дакле, прецртавају се сви бројеви дељиви са m, а он сам се обележи као прост. Поред овог постоји и ефикаснији алгоритам за проверу да ли је одређен број прост. Из разматрања можемо избацити парне бројеве веће од 2 јер су сви они сложени. Тако је први број чије садржаоце тражимо 3, а не 2. Поступак прецртавања бројева почињемо од m^2 јер су сви бројеви мањи од m^2 већ избрисани. Чим нађемо прост број m такав да је $m^2>n$ немамо потребу за даљим брисањем. Сви преостали бројеви су прости (у Додатку ће бити више речи о овоме).



Између осталог, Ератостен је, на веома довитљив начин, измерио обим Земље године 212. п.н.е. Била му је позната чињеница да 21. јуна сунчеви зраци падају под правим углом у граду Сијена (данас Асуан) на југу Египта. Истог дана у граду Александрији, на северу Египта, сунчеви зраци падају под углом од **7º12’**. Такође било му је познато растојање између ова два града и оно је било **5000** стадиа (негде око **800 km**). У Старој Грчкој дужина се изражавала у стадиама, једна стадиа је представљала дужину олимпијског стадиона. Како су се стадиони разликовали од града до града, и ова јединица није била сасвим универзална. Стари Грци су имали доста прецизне податке о удаљеностима између појединих градова. Добар део војне обуке у Старој Грчкој састојао се у вежби марширања у оквиру фаланге. Хоплити су били увежбани да сви исто корачају,.... Па да видимо како је Ератостен искористио те податке да одреди обим Земље.



Слика бр. 1

На слици бр. 1 обележили смо са **O** центар Земље, са **A** град Александрију, а са **S** град Сијену. Са **a** праву која представља сунчев зрак који долази у Александрију, **b** је права која представља сунчев зрак који под правим углом долази у Сијену. Због велике удаљености Сунца од Земље, може се претпоставити да су зраци паралелни, те важи да је **a** паралелно са **b**. Угао **α** је угао под којим сунчеви зраци падају у Александрији 21. јуна, као што смо рекли на почетку његова мера је **7º12’**. Са **β** смо обележили угао чији су краци праве **OA** и **OS**. Са **l** смо обележили лук **AS**, односно растојање између Александрије и Сијене.

Прво ћемо да уочимо да су углови **α** и **β** подударни јер су углови са паралелним крацима (по један крак им се налази на правој **OA**, а други пар одговарајућих кракова представља сунчеве зраке који су паралелни међусобно). Па имамо да је **α = β = 7º12’.**

Растојање од Александрије до Сијене нам је познато $\mathbf{l = 5000}$ стадиа. Угао $\boldsymbol{\beta}$ је централни угао над луком $\mathbf{l}$. Јасно је да ће лук $\mathbf{l}$ према обиму Земље односити исто као угао $\boldsymbol{\beta}$ према пуном углу (углу од $\mathbf{360^o}$). Односно:

$$\frac{\mathbf{l}}{\text{обимЗемље}} = \frac{\mathbf{7°12'}}{\mathbf{360°}}$$

Када одавде изразимо обимЗемље, добијамо:

$$\textbf{обимЗемље} = \frac{\mathbf{360°}}{\mathbf{7°12'}} \cdot \mathrm{l}$$

Како нам је $\mathbf{l}$ познато, заменимо га у једнакост:

$$\textbf{обимЗемље} = \frac{\mathbf{360°}}{\mathbf{7°12'}} \cdot \mathbf{5000}\ \text{стадиа}$$

$$\textbf{обимЗемље} = \mathbf{50 \cdot 5000}\ \text{стадиа}$$

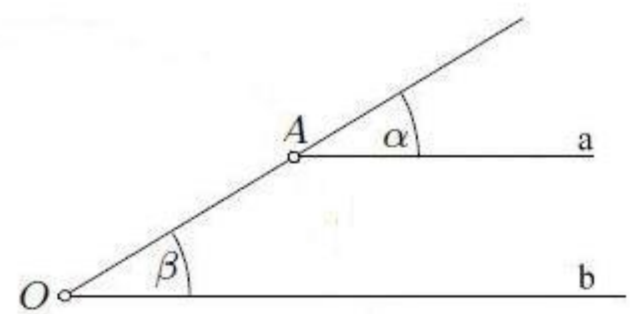
$$\textbf{обимЗемље} = \mathbf{250\ 000}\ \text{стадиа}$$

Дакле, добили смо да обим Земље износи **250 000** стадиа. Као што је било речи, стадиа није била сасвим универзална јединица, јер се дужина стадиона у грчким градовима разликовала. Сваки стадион је био дугачак **600** стопа, међутим стопе су се разликовале. Па је тако стопа у грчким полисима узимала вредност од **262 mm** до **308 mm**, вавилонско-персијска је имала **327 mm**, а феничанско-египатска чак **349 mm**. Претпоставља се да је Ератостен користио или александријску стадиу (**157 m**) јер је живео и радио у Александрији, или атичку стадиу (**185 m**) јер је атичка стопа (**308 mm**) била убедљиво најраспрострањенија међу Грцима. Иако је стадион у Олимпији био најпознатији у античко време, мало је вероватно да су Ератостен и Грци у Египту користили олимпијску стадиу (**175 m**). Такође готово потпуно може да се искључи да је Ератостен користио египатско-феничански систем мера по коме је стопа износила **349 mm** а самим тим стадиа би имала приближно **209 m**. Ако је коришћена александријска стадиа (**157 m**) тада обим Земље износи **250 000** стадиа, односно **39 690 km**, што представља грешку од само **-2 %** .

У сваком случају невероватна је прецизност добијеног резултата. Међутим и поред тога овај Ератостенов резултат није опште прихваћен међу старо-грчким географима и образованим људима тог времена. Једноставно сматрали су да је Ератостен претерао, и да је Земља мања. Грцима су у то време били познати велики делови Европе, Азије и Африке, а опет то је било мање од **15%** површине Земље коју је Ератостен израчунао.

Неких 150 година после Ератостена, један други грчки географ је поновио исти експеримент. То је био Посејдонис са Родоса (135 п.н.е.-51 п.н.е.), негде у литератури је помињан и као Псејдонис из Апамеје (антички грчки град на територији данашње Сирије). Он је пошао од чињенице да је удаљеност између острва Родоса и Александрије **3750** стадиа. Затим је извео исти прорачун као што је Ератостен за лук од Александрије до Сијене. Посејдонис је добио да је обим Земље **180 000** стадиа, што је био много непрецизнији резултат, али је био опште прихваћен. И дуго је овај а не Ератостенов резултат сматран као тачан. Један од главних криваца за то је грчки географ и астроном Клаудије Птоломеј који је у својој "Географији" фаворизовао Посејдониса у односу на Ератостена. Географска и астрономска дела Клаудије Птоломеја била су опште прихваћена и касније у арапској средњевековној култури, а у време ренесансе стигла су и до Европе. Занимљиво је да је Кристофер Колумбо кренуо у Индију ношен прорачуном да се Индија налази са друге стране Атлантика. Тај прорачун је био заснован на Посејдонисовом погрешном резултату да је обим Земље **180 000** стадиа, што је готово **30%** мање од праве вредности.

Задатак 3.1. (Пети разред, Угао) Ако је $a \parallel b$, и ако је угао $\alpha = 15^{\circ}30'$, одредити меру непознатог угла β са слике



Решење задатка 3.1. Угао β је такође једнак $15^{\circ}30'$ јер су углови α и β углови са паралелним крацима (и оба су оштра).

Задатак 3.2. (Седми разред, Круг) Град Рума се налази на 45^{o} северне географске ширине. Ако је познато да је обим Земље $40\ 075\ \mathrm{km}$, одреди:

а) растојање од града Руме до Северног пола (90^{o} северне географске ширине)

б) растојање од града Руме до Јужног пола (90^{o} јужне географске ширине)

Решење задатка 3.2. а) Угао $\alpha = 45^{o}$, треба нам растојање града Руме од Северног пола, означићемо га са l. Добијамо следећу једнкаост:

$$\frac{l}{\text{обимЗемље}} = \frac{45°}{360°}$$

$$l = \text{обимЗемље} \cdot \frac{45°}{360°}$$

$$l = \text{обимЗемље} \cdot \frac{1}{8}$$

$$l = 40\ 075\ \mathrm{km} \cdot \frac{1}{8}$$

$$l = 5\ 009{,}375\ \ \mathrm{km}$$

б) Угао $\alpha = 45° + 90° = 135°$, треба нам растојање од Руме до Јужног пола, означићемо га са l. Слично као у претходном примеру добијамо једнакост:

$$\frac{l}{\text{обимЗемље}} = \frac{135°}{360°}$$

$$l = \text{обимЗемље} \cdot \frac{135°}{360°}$$

$$l = \text{обимЗемље} \cdot \frac{3}{8}$$

$$l = 40\ 075\ \mathrm{km} \cdot \frac{3}{8}$$

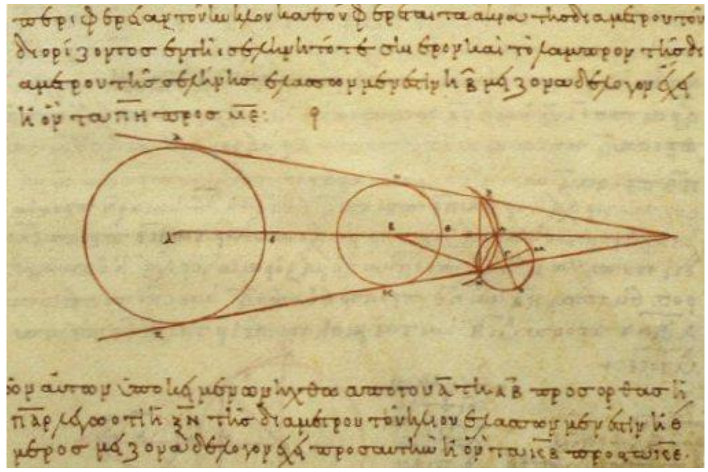
$$l = 15\ 028{,}125\ \ \mathrm{km}$$

4. Аристарх и рачунање величина и удаљености Сунца и Месеца

Аристарх са Самоса (310. п.н.е. – 230. п.н.е.) је био грчки математичар и астроном. Био је ученик Стратона из Лампсака, управника Аристотеловог Лицеја у Атини. Међутим сматра се да се Аристарх није образовао у Атини, већ у Александрији у коју се Стратон преселио и 287. п.н.е. постао управник тамошњег Лицеја. Касније је Аристрах стварао у кругу Александријске библиотеке. Од његових радова није много тога сачувано, али и посредно можемо наслутити да се радило о великом математичару и астроному. Витрувије, славни римски архитекта, убраја Аристарха међу велике математичаре и проналазаче, раме уз раме са Ератостеном и Архимедом. Један од великих Аристархових проналазака, које помиње Витрувије, је сунчани сат у облику полулопте о коме се данас ништа не зна.

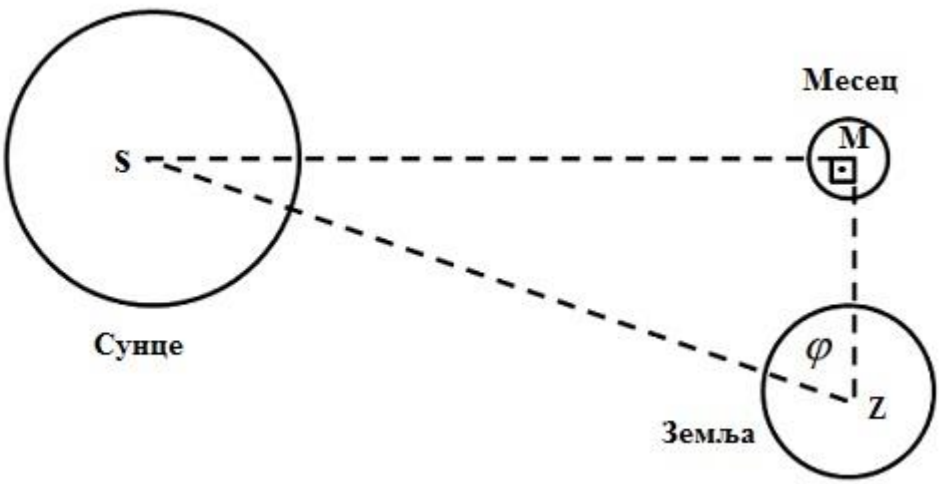
Премда је и пре њега било Грка који су заговарали хелиоцентрични модел Сунчевог система, Аристарх је остао упамћен као први човек који је изнео јаке аргументе који иду у прилог овом моделу. Ставио је Сунце у центар, и око њега правилно распоредио планете. Аристархов хелиоцентрични модел поново је након скоро 1800 година оживео пољски астроном Никола Коперник, а разрадио и проширио немачки математичар и астроном Јохан Кеплер.

Једино Аристархово дело које је у целости сачувано носи назив „О величинама и удаљеностима“, у коме је израчунао димензије Сунца и Месеца, као и њихову удаљеност од Земље. Касније су дело преписивали и умножавали Арапи. Док су се Европљани упознали са њим 1488. када га је на латински превео италијански математичар Ђорђио Вала.



Аристархов рад из 3. века п.н.е. на копији из 10. века

Аристарх је посматрао три специфична распореда Земље, Сунца и Месеца представљена на сликама означеним бројевима 1, 2 и 3. Земљу смо обележили са **Z**, Месец са **M** и Сунце са **S**.



Слика бр. 1

Први распоред небеских тела (Прва година средње школе, Тригонометрија правоуглог троугла): На слици бр. 1 представљен је распоред ових небеских тела када је тачно пола месечевог диска осветљено. Тада уочавамо правоугли троугао **SZM** , прав угао је код темена **M**. Угао код темена **Z** ћемо обележити са φ . Угао φ је угао који заклапају зраци повучени од посматрача према Сунцу, односно Месецу. Аристарх је измерио да је $\varphi = 87^{\circ}$, што није било потпуно тачно. Данас знамо да је $\varphi = 89^{\circ}51'$. Сада можемо да напишемо једнакост:

$$\frac{MZ}{SZ} = \cos\varphi$$

Косинус оштрог угла у правоуглом троуглу једнак је количнику ближе катете и хипотенузе .

Како нам је $\boldsymbol{\varphi}$ познато имамо да је:

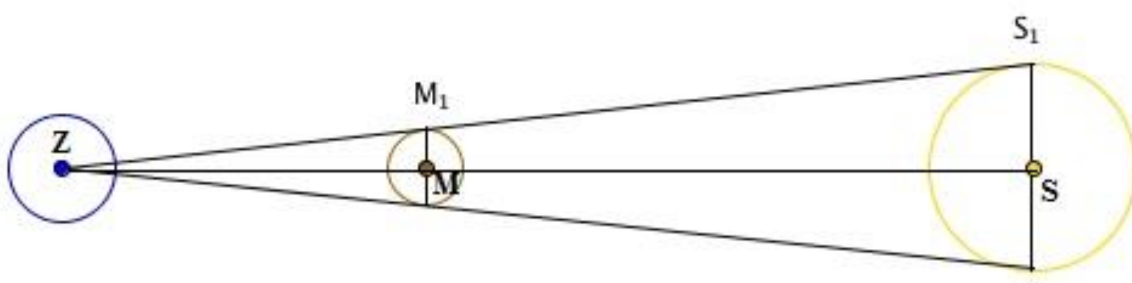
$$\frac{\mathbf{MZ}}{\mathbf{SZ}} = \cos 87^{o} \text{ (односно ако убацимо тачну вредност } \frac{\mathbf{MZ}}{\mathbf{SZ}} = \cos 89^{o}51' \text{)}$$

$$\frac{\mathbf{MZ}}{\mathbf{SZ}} = \frac{1}{19} \text{ (односно тачна вредност би била } \frac{\mathbf{MZ}}{\mathbf{SZ}} = \frac{1}{400}\text{)}$$

Дакле, Аристарх је добио да је **MZ** (удаљеност Месеца од Земље) 19 пута мања од **SZ** (удаљеност Сунца од Земље). Прави однос те две дужине је 400, који није добијен због погрешно израчунатог угла $\boldsymbol{\varphi}$. Ипак, као што ћемо касније видети, ова погрешна вредност није превише утицала на крајњи резултат.

Овде треба нагласити да Аристарх није познавао тригонометрију. Оцем тригонометрије сматра се Хипарх са Родоса (190. п.н.е. - 120. п.н.е.) који је направио прве тригонометријске таблице. Дакле, Аристарху нису били познати ни синус и косинус. Међутим, ми овде користимо тригонометрију због очигледности јер је нама ближи такав приступ.

Други распоред небеских тела (Прва година средње школе, Сличност): На слици бр. 2 приказан је распоред Месеца, Земље и Сунца приликом потпуног помрачења Сунца. Полупречник Сунца $\mathbf{SS_1}$ даље ћемо означавати са $\mathbf{R(S)}$, док полупречник Месеца $\mathbf{MM_1}$ са $\mathbf{R(M)}$.



Слика бр. 2

Уочимо правоугле троуглове SS_1Z и MM_1Z. Они су слични јер су углови S_1SZ и M_1MZ прави. Затим имају заједнички угао код темена Z, угао SZS_1 односно угао MZM_1. Чим су два пара одговарајућих углова у троугловима подударни, и трећи пар углова ће бити подударан. Из сличности ова два троугла следе једнакости:

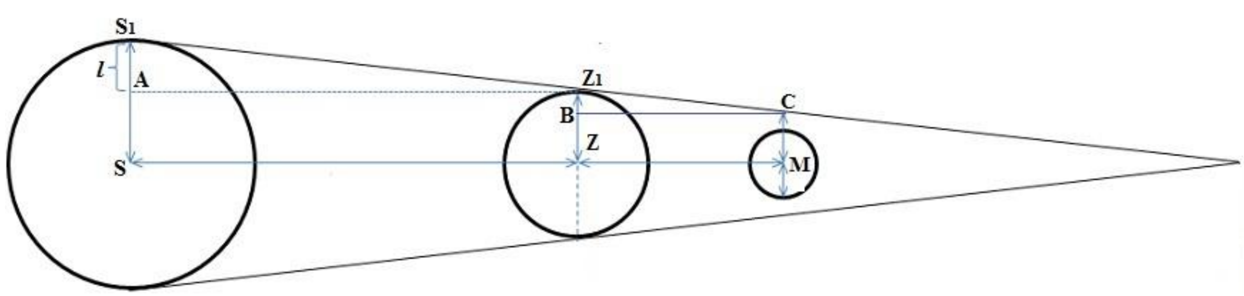
$$\frac{R(M)}{MZ} = \frac{R(S)}{SZ}$$

односно

$$\frac{R(M)}{R(S)} = \frac{MZ}{SZ}$$

Односно полупречник Месеца и полупречник Сунца се односе исто као удаљеност Месеца од Земље и удаљеност Сунца од Земље. То је разлог због чега су, гледано са Земље, Месечев и Сунчев диск једнаки. Аристарх је израчунао да је угао под којим се види Сунчев односно Месечев диск негде око пола степена (тачна вредност је $32'$). Међутим тај податак нам је вишак, и није нам неопходан у даљем раду.

Трећи распоред небеских тела (Прва година средње школе, Сличност): Слика бр.3 представља распоред Месеца, Земље и Сунца приликом помрачења Месеца. Овде је битно нагласити да је Аристарх посматрајући помрачење Месеца закључио да сенка коју Земља баца на Месечев диск приликом помрачења има два пута већи полупречник од Месеца (тачнија вредност би била око два и по пута). То је закључио тако што је мерио време које прође од почетка помрачења Месеца до тренутка док Месец потпуно не зађе у Земљину сенку. Закључио је да је то време приближно једнако времену које Месец проведе у Земљиној сенци (од тренутка потпуног помрачења до тренутка када Месец почне да излази из Земљине сенке).



Слика бр. 3

Са $l = S_1A$ смо обележили разлику полупречника Сунца и полупречника Земље, односно:

$$l = S_1A = R(S) - R(Z)$$

Дуж **MC** је полупречник Земљине сенке, и видели смо да је он приближно два пута већи од полупречника Месеца, односно $MC = 2R(M)$. Дуж BZ_1 представља разлику полупречника Земље и полупречника Земљине сенке, односно:

$$BZ_1 = R(Z) - MC = R(Z) - 2R(M)$$

Даље уочимо правоугаоник SAZ_1Z при чему је $AZ_1 = SZ$. Исто тако и у правоугаонику **BZMC** биће $BC = MZ$.

Затим уочимо троуглове AS_1Z_1 и BZ_1C. Они су слични јер су углови код темена **A** односно **B** прави, а углови AZ_1S_1 и Z_1CB су углови са паралелним крацима. Из сличности за ова два троугла следи:

$$\frac{AS1}{BZ1} = \frac{AB}{BC}.$$

Као што смо видели **AB** и **BC** су заправо удаљеност Сунца (**SZ**) односно Месеца (**MZ**) од Земље, па ћемо да их заменимо у једнакост:

$$\frac{AS1}{BZ1} = \frac{SZ}{MZ}.$$

Дужи AS_1 и BZ_1 смо већ изразили преко полупречника Сунца, Земље и Месеца, па добијамо:

$$\frac{R(S)-R(Z)}{R(Z)-2R(M)} = \frac{SZ}{MZ}.$$

Већ је речено да се удаљености Сунца и Месеца од Земље односе исто као њихови полупречници, па ће једнакост да гласи:

$$\frac{R(S)-R(Z)}{R(Z)-2R(M)} = \frac{R(S)}{R(M)}.$$

Анализирајући слику бр. 1 видели смо да је гледано са Земље Сунце 19 пута даље него Месец. А на основу онога што је показано приликом распореда небеских тела као на слици бр. 2 следи да је и полупречник Сунца 19 пута већи од полупречника Месеца.

$$\frac{\mathbf{19R(M) - R(Z)}}{\mathbf{R(Z) - 2R(M)}} = \mathbf{19}$$

$$\mathbf{19R(M) - R(Z) = 19R(Z) - 38R(M)}$$

$$\mathbf{20\ R(Z) = 57R(M)}$$

$$\mathbf{R(Z) \approx 3R(M)}$$

Дакле, добили смо да је Земљин полупречник приближно три пута већи од Месечевог. То је доста близу истини, јер је Земљин полупречник заиста скоро троструко већи од Месечевог. Интересантно је да би се готово исти резултат добио да смо у израз уврстили тачну вредност за однос удаљености Сунца и Месеца. Односно да смо уместо 19 у израз уврстили 400, опет бисмо добили резултат да је Земљин полупречник око три пута већи од Месечевог.

$$\frac{\mathbf{400R(M) - R(Z)}}{\mathbf{R(Z) - 2R(M)}} = \mathbf{400}$$

$$\mathbf{400R(M) - R(Z) = 400R(Z) - 800R(M)}$$

$$\mathbf{1200\ R(Z) = 401R(M)}$$

$$\mathbf{R(Z) \approx 3R(M)}$$

Пошто смо изразили Месечев полупречник преко полупречника Земље, јасно је да на основу правоуглих троуглова, приказаних на слици бр.3, можемо изразити остале странице преко земљиног полупречника. У правоуглом троуглу $\mathbf{MM_1Z}$ познати су нам катета $\mathbf{MM_1 = R(M) = \frac{1}{3}\,R(Z)}$ и угао $\mathbf{MZM_1 = \frac{1}{2}\,\beta}$ (угао $\boldsymbol{\beta}$ је угао под којим се види сунчев односно месечев диск и износи негде око пола степена). Такође нам је познат коефицијент сличности троуглова $\mathbf{ZSS_1}$ и $\mathbf{ZMM_1}$ и он износи 19 (тачна вредност 400).

Аристарх је тако преко полупречника Земље изразио следеће 4 величине: полупречник Месеца, полупречник Сунца, удаљеност Месеца од Земље и удаљеност Сунца од Земље. Да је полупречник Земље око **6000 km**, сазнало се 212. године п.н.е. захваљујући Ератостену. Аристарх је умро нешто раније, 230. п.н.е. и није му био познат овај податак. Међутим ако бисмо га искористили и уврстили у оно што је Аристарх израчунао добили бисмо да је полупречник Месеца **R(M) = 2000 km**, а удаљеност Месеца од Земље **230 000 km**. Наравно, као што је већ било речи, увек постоје резерве када се стадие претворе у километре, због универзалности стадие. Већ касније ова бројка ће бити поправљена.

Хипарх (190. п.н.е. – 120.п.н.е.), највећи астроном Старе Грчке, наставио је и поправио Аристархов рад. У литератури је познат или по месту рођења као Хипарх из Никеје (антички град на северозападу Мале Азије), или по месту смрти као Хипарх са Родоса. Поред одређивања удаљености Аристарховом методом, Хипарх је удаљеност од Месеца до Земље одредио и методом паралаксе. Добио је да та удаљеност износи 60 полупречника Земље ($\mathbf{MZ = 60R(Z)}$), што са Ератостеновим бројем $\mathbf{R(Z) = 6000\ km}$, даје задивљујуће тачних $\mathbf{360\ 000\ km}$. Ова вредност није поправљена скоро два миленијума. Тек крајем XVIII века два француска академика, Лаканд и Лаланд, добили су резултат који је веома близак правој вредности од $\mathbf{384\,000\ km}$, колико је заиста Месец удаљен од Земље.

Што се тиче удаљености Сунца ту се јавила велика грешка због погрешно израчунатог угла $\boldsymbol{\varphi}$ са слике бр.1. Па је по Аристарху, гледано са Земље, Сунце било 19 пута даље од Месеца, уместо 400 пута (исти однос важи и за полупречнике Сунца и Месеца). Тај резултат је био довољан да се закључи да је Сунце много веће од Земље $\mathbf{(R(S) = 19R(M),\ R(Z) = 3R(M))}$. То је навело Аристарха да постане заговорник хелиоцентричног система. Иако је било Старих Грка који су и пре Аристарха заговарали хелиоцентрични систем, он је први који је изнео јаке аргументе за то. Ипак хелиоцентрични систем није био опште прихваћен, ни код Старих Грка, а ни много касније. Један од главних криваца за то је већ поменути Клаудије Птоломеј (100. н.е. - 170. н.е.) Исто као што је у својој „Географији" неоправдано фаворизовао Посејдонисов обим Земље у односу на Ератостенов, тако је у свом „Великом зборнику астрономије" неоправдано фаворизовао геоцентрични систем. Дела Клаудија Птоломеја имала су велики утицај на средњевековну арапску астрономију и географију, а касније у време ренесансе и на европске ауторе. Други кривац за доминацију геоцентричног система је велики Аристотел (384. п.н.е. - 322. п.н.е.), „Сунце науке" како су га звали, пуна два миленијума неприкосновени ауторитет у различитим научним областима.

Аристотел је дао велики допринос астрономској науци тиме што је изнео доказе да је Земља округла и изнео податак о величини земљине лопте (Аристотел помиње да је обим Земљине лопте 400 000 стадиа што је доста непрецизније од Ератостенових 250 000 стадиа, али нам говори да су Стари Грци и пре Ератостена вршили сличне прорачуне, а Аристотел је први у историји изнео представу о величини наше планете која је блиска стварној). Међутим, Аристотел је био заговорник геоцентричног система, а за то су постојали наизглед јаки аргументи. Неки од њих су да сва тела теже ка центру универзума, односно центру Земље; затим постојање звезда некретница; затим ако би се Земља кретала (око своје осе на пример) онда човек који би скочио у вис не би доскочио на исто место или камен бачен са одређене висине не би пао тачно испод места где је бачен итд. Хелиоцентрични систем је поново оживљен 1543. године када је пољски астроном Никола Коперник, непосредно пред смрт, објавио своје дело „О кружењу небеских тела". Инспирацију за свој рад али и евентуалну заштиту од злогласне католичке инквизиције, Коперник је нашао управо у Аристарховом делу.

5. Кеплерове методе за одређивање запремине бачви

Јохан Кеплер је био немачки математичар, астроном и астролог. Представљао је једну од кључних фигура у научној револуцији 17. века. Чувен је по својим законима кретања планета. Рођен је 1571. године у немачком градићу Вајл дер Штату, који је у то време имао мање од 200 становника. Јоханов отац је био професионални војник. Када је Јохану било три године, отац му је отишао у рат у Холандију. Следеће године и Јоханова мајка се придружила мужу на ратишту, оставивши децу баки. Након две године родитељи су се вратили и купили кућу у граду Леонбергу. Убрзо су продали и купили крчму. Међутим посао са крчмом није ишао. Отац је наставио да иде по ратиштима, углавном далеко од куће, да би 1588. напустио породицу заувек. Јоханова мајка је остала сама са седморо деце, од којих је троје рано умрло док је један син био епилептичар.

Упркос тешком детињству, које му није обећавало светлу бутућност, Јохан Кеплер је имао једну срећну околност да се роди у Немачкој захваћеној реформацијом. Док су католичке школе биле углавном резервисане за богату феудалну елиту, протестанске школе су биле отворене и за сиромашну али надарену децу. У једну такву протестантску школу примљен је и Јохан Кеплер, као надарени дечак из сиромашне протестантске породице. Након основне школе, завршио је и протестантску богословију, да би са 17 година почео студије филозофије и теологије у Тибингену. Ту се млади Кеплер истакао јавно бранећи хелиоцентрични модел Николе Коперника, пољског астронома и математичара. Након четири године студија, управо када је био пред завршним испитом, понуђено му је место професора математике на Протестантском универзитету у Грацу. Прихватио је тај позив, јер иако је био веома религиозан, није видео себе као свештеника.

Као професор математике Кеплер је у Грацу доживео велико разочарење. Прве године је имао мало студената, а друге ниједног. Био је неприлагођен педагогији, емотивно је реаговао, те је имао бујну машту коју обични студенти нису могли да прате. Ипак у Грацу је започео сарадњу са принцем Ханс Улрихом вон Егенбергом. Касније је постао асистент данског астронома Тихо Брахеа настањеног у Чешкој. Након смрти Брахеа 1601. Клепер и даље остаје у Прагу као царски математичар и астролог немачког цара Рудолфа II. Био је и наставник математике у Линцу као и астролошки саветник генерала Валенштајна. У граду Улму је довршио Рудолфове таблице о кретању планета које су биле основа за прављење хороскопа. Пред крај живота имао је две понуде које није прихватио, са Универзитета у Болоњи и из Енглеске.

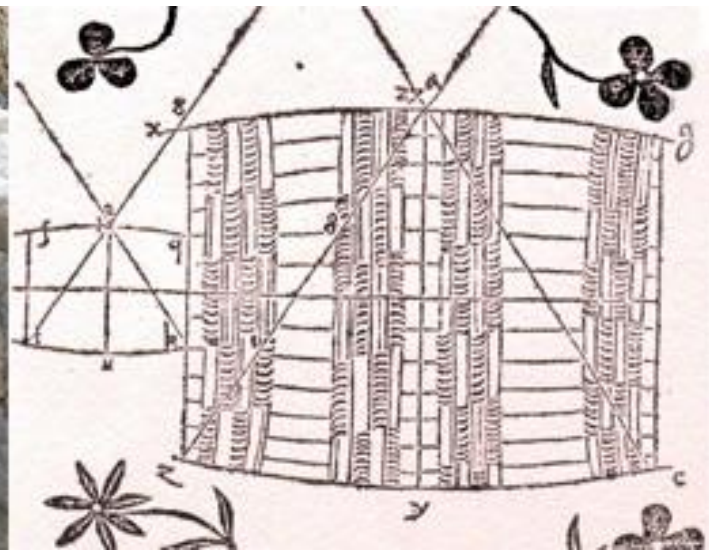
Кућа у Прагу у којој је живео Кеплер

Кеплер никада није напустио тадашњу Немачку (тачније Свето Римско Царство како је вековима био назив лабавог савеза кнежевина и градова на територији Немачке, Чешке, Аустрије...) Ипак често је мењао место боравка, што због нестабилности и сталних сукоба католика и протестаната, што због изневерених очекивања. Само немачки цар му је остао дужан 12 000 флорина. Јохан Кеплер је умро 1630. у Регензбургу у педесетој години, заборављен и напуштен од свих.

Кеплер је био фасциниран правилним полиедрима. Године 1596. написао је детаљну студију о правилним телима. Покушао је да редукује планете Сунчевог система на метричке особине Платонових тела. Касније је та његова теорија одбачена. Ипак као резултат његових истраживања имамо откриће да орбите планета нису кружне већ елиптичне. Тако су три Кеплерова закона о кретању планета постали темељ нове астрономије.

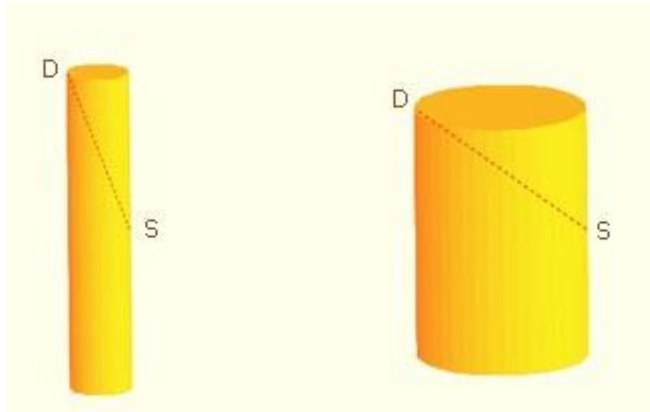
Рачунање запремине буради (односно неправилних геометријских тела) био је проблем којим су се математичари бавили још од античких времена. Стари Египћани су рачунали запремину зарубљене пирамиде, као разлику велике и недостајуће мале пирамиде на врху. Грчки математичари Еудокс са Книда (408.п.н.е.-355.п.н.е) и Архимед из Сиракузе (287.п.н.е.-212.п.н.е.) користили су методу исцрпљивања којом се површина неког неправилног облика израчунава тако што су га делили на многоуглове чије површине конвергирају према површини целог облика (исто важи и за запремину). Европски математичари 17. века приступали су овом проблему инспирисани Архимедовим радовима.

За време свог боравка у Линцу 1615. године Јохан Кеплер је објавио дело „Нова стереометрија винских буради“ у коме је решио овај тежак проблем. Тај проблем је успео да реши захваљујући томе што је буре посматрао као да је састављено од недељивих танких листова, односно његову запремину је рачунао као суму тих недељивих делова. Сличан став заступао је и италијански математичар Галилео Галилеј (1564.-1642.) као и његов ученик Бонавентура Кавалиери (1598.-1647.) који је 1635. објавио дело које се сматра претечом математичке анализе (диференцијалног и интегралног рачуна). Док су темеље математичке анализе, онакве какву је данас познајемо, ударили крајем 17. века немачки математичар Готфрид Вилхелм Лајбниц и енглески математичар Исак Њутн.



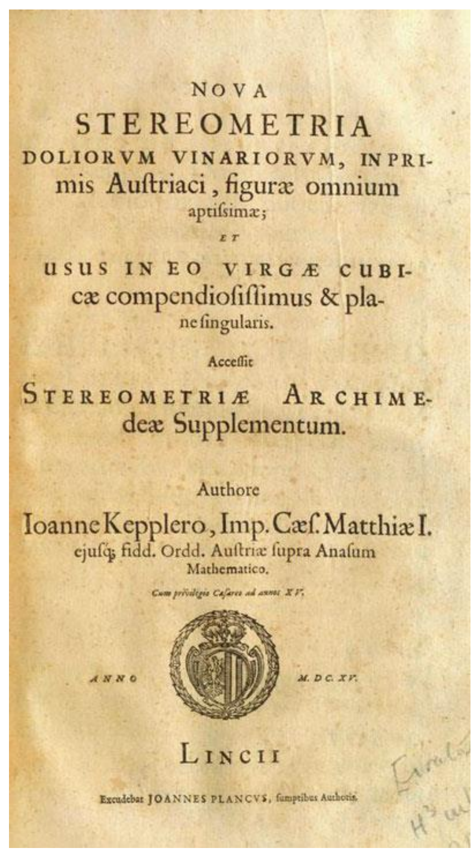
Ипак треба истаћи да сва заслуга не припада само европским математичарима 18. века. Историјску празнину од скоро 2000 година, од Еудокса и Архимеда до Кеплера и Кавалијерија, попуњавају данас скрајнути азијски математичари. Па тако Кинез Луи Хуи у 3. веку користи Архимедову методу да би израчунао површину круга. У 5. веку Чу Чункџи за рачунање запремине лопте користи методу која ће касније бити названа Кавалијеријев принцип. Године 499. индијски математичар Ариабхата користи диференцијалну једначину да би записао астрономски проблем. На основу те једначине Бхаскара је у 12. веку развио неку врсту извода. Око 1000. године Ибн ал Хаитам је почео да ради на повезивању алгебре и геометрије и тиме припремио пут за интегрални рачун. Значајан допринос развоју математичке анализе, дали су и Шараф ал Дин персијски математичар из 12. века као и Шинсуке Секи Кова јапански математичар из 17. века. Нема сумње да су нека од ових сазнања стигла и до европских математичара јер су европске колонијалне силе у 17. веку већ увелико одржавале поморске везе са Индијом и оснивале прве колоније у њеном приобаљу.

Јохан Кеплер се заинтересовао за мерење површина и запремина након једног инцидента који је обележио његово друго венчање. Кеплер је купио буре вина од локалног трговца вином, међутим начин на који му је трговац измерио количину вина у бурету, веома га је наљутило. Мерење се вршило на следећи: трговац би отчепио рупу на средини бурета, а затим помоћу штапа измерио колико је та рупа удаљена од



најудаљеније тачке на поклопцу. На слици је рупа означена са таком $\mathbf{S}$, док је тачка на поклопцу означена $\mathbf{D}$. Дужина дужи $\mathbf{SD = d}$ одређивала је цену вина у бурету. Кеплер је одмах уочио да високо а узано буре може да има исту дужину дужи $\mathbf{SD}$ као ниже а шире буре, док су код такве буради запремине очигледно различите (запремина издуженог је знатно мања). Након тога почео да размишља о начину како да прецизно измери запремину буради различитих облика. Књига, коју је написо на ту тему, била је његов допринос развоју интегралног рачуна, и математичке анализе уопште.

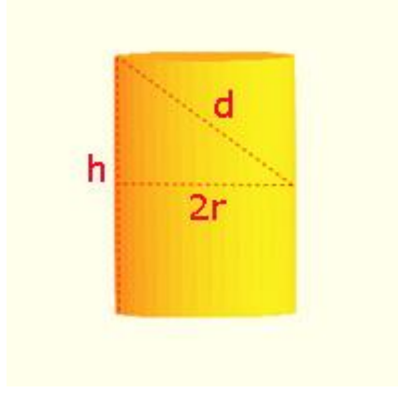
Проучавајући Архимедове радове, Кеплер је написао и 1615. године објавио књигу "Nova Stereometria doliorum vinariorum", и преводу ,,Нова стереометрија винских буради“. Разрадио је поступак како да се, тачно или апроксимативно, израчуна запремина преко деведесет различитих тела. Данас се ова врста проблема решава уз помоћ интеграла. Као што је речено, Кеплер је о томе почео да размишља на дан своје свадбе, када је правилно уочио да је начин на који трговац вином мери запремину вина у бурету, најобичнија превара. Превара се састојала у томе да је поменутим систем мерења запремине буради, који се заснивао на дужини дужи $\mathbf{SD =}$ $\mathbf{d}$, заправо био направљен за бурад у Аустрији која су била ниска и широка. И за такву бурад давао је релативно тачне резултате. Међутим за бурад из Рајнске области, која су била издужена, давао је нетачне резултате. Трговац је то вешто злоупотребио, тако што је запремину издуженог бурета мерио скалом која је направљена за ,,здепасту“ бурад. На тај начин добио је да је запремина бурета већа него што јесте, па је количина вина коју је хтео да наплати била већа од количине вина која је заиста била у бурету.


NOVA
STEREOMETRIA
DOLIORVM VINARIORVM, INPRI-
mis Auſtriaci, figuræ omnium
aptiſsimæ;
ET
USUS IN EO VIRGÆ CUBI-
cæ compendioſiſſimus & pla-
ne ſingularis.
Acceſſit
STEREOMETRIÆ ARCHIME-
deæ Supplementum.
Authore
Ioanne Kepplero, Imp. Cæſ. Matthiæ I.
ejuſq; fidd. Ordd. Auſtriæ ſupra Anaſum
Mathematico.
ANNO M. DC. XV.
LINCII
Excudebat JOANNES PLANCVS, ſumptibus Authoris.

Задатак 5.1. (Осми разред, Ваљак) За везу између полупречника попречног пресека бурета $\mathbf{r}$, висине бурета $\mathbf{h}$ и ,,трговачке“ дужине $\mathbf{d}$, Кеплер је искористио Питагорину теорему. Користећи исту теорему изрази запремину бурета само преко висине бурета и ,,трговачке дужине“.

Решење задатка 5.1. У датом правоуглом троуглу (погледати слику испод), једна катета износи $\frac{\mathbf{h}}{\mathbf{2}}$, друга катета је једнака $\mathbf{2r}$ и хипотенуза овог правоуглог троугла је ,,трговачка“ дужина **d.** Добијамо следећу једнакост:

$$\mathbf{d}^2 = \left(\frac{\mathbf{h}}{\mathbf{2}}\right)^2 + (\mathbf{2r})^2$$



Даље добијамо:

$$4r^2 = d^2 - \frac{h^2}{4}$$

$$r^2 = \frac{d^2}{4} - \frac{h^2}{16}$$

Ако сада добијени резутат убацимо у формулу за запремину ваљака:

$$V = \pi r^2 h$$

Добијамо:

$$V = h\pi\left(\frac{d^2}{4} - \frac{h^2}{16}\right) = \pi\frac{d^2 h}{4} - \frac{\pi}{16}h^3$$

Дакле, запремину бурета смо изразили преко висине бурета и „трговачке дужине“.

Задатак 5.2. (Осми разред, Ваљак) Једно буре има полупречник попречног пресека $\mathbf{r_1 = 20\ cm}$ и „трговачку“ дужину $\mathbf{d = 50\ cm}$. Друго буре има висину $\mathbf{r_2 = 15\ cm}$, док и код њега „трговачка“ висина иста као код првог, дакле $\mathbf{d = 50\ cm}$. Израчунај и упореди запремине оба бурета. Приликом рачунања запремине занемари закривљеност буради, и посматрај их као ваљак.

Решење задатка 5.2. Из једнакости

$$\mathbf{d^2 = (\frac{h}{2})^2 + (2r)^2}$$

добијамо да је висина првог бурета $\mathbf{h_1 = 60\ cm}$, док је висина другог бурета $\mathbf{h_2 = 80\ cm}$. Помоћу формуле за запремину ваљка добијамо да је запремина првог бурета $\mathbf{V_1 = 2400\pi cm^2}$ док је запремина другог бурета $\mathbf{V_2 = 1800\pi\ cm^2}$. Дакле прво буре има за четвртину већу запремину од другог бурета, иако имају једнаке „трговачке“ дужине.

Задатак 5.3. (Четврта година, График функције) У ком односу треба да буду висина бурета и ,,трговачка дужина" да би запремина бурета била максимална? Користимо формулу за запремину бурета коју смо претходно добили:

$$V = h\pi\left(\frac{d^2}{4} - \frac{h^2}{16}\right) = \pi\frac{d^2h}{4} - \frac{\pi}{16}h^3$$

Напомена: ,,Трговачку дужину" **d** посматрај као константу, а висину бурета **h** посматрај као променљиву.

Решење задатка 5.3. Треба нам први извод функције **V**.

$$V'(h) = \pi\frac{d^2}{4} - 3\frac{\pi}{16}h^2$$

Фунција ће имати максимум када је први извод једнак нули, па добијамо:

$$\frac{3\pi}{16}h^2 = \frac{\pi d^2}{4}$$

Затим изразимо **h** преко **d** и добијамо следеће:

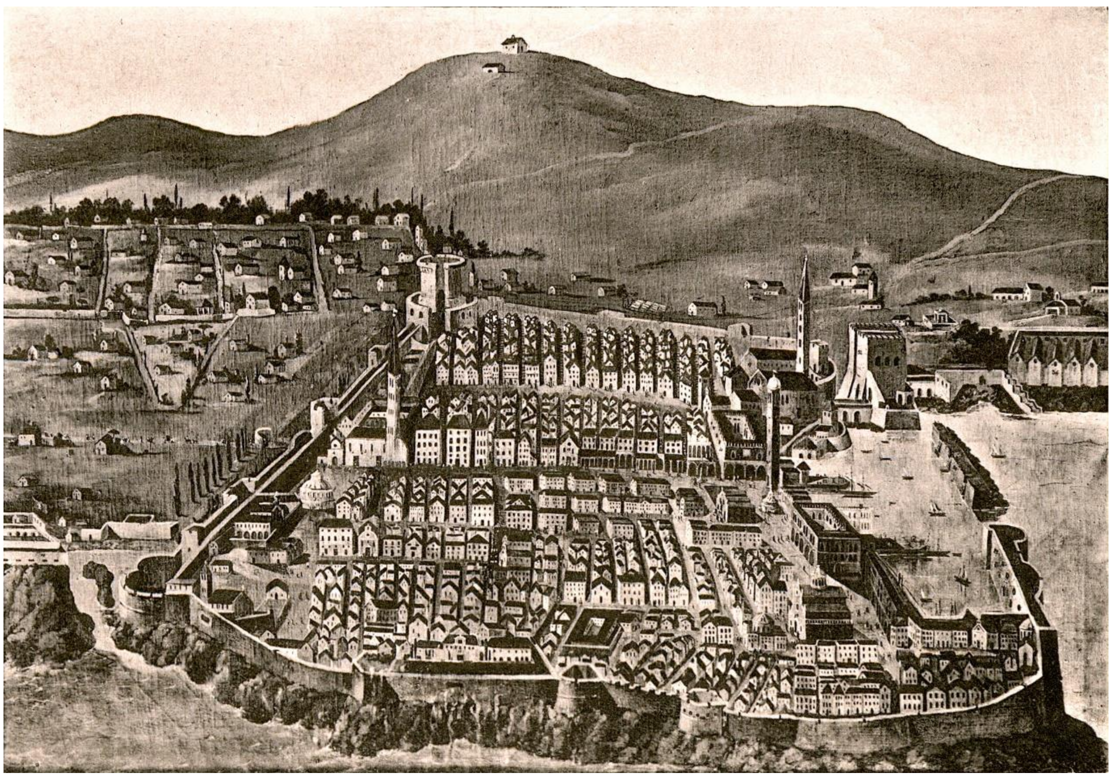
$$3h^2 = 4d^2$$

$$h = \frac{2}{\sqrt{3}}d$$

Па је тражени однос $\mathbf{h : d = 2 : \sqrt{3}}$.

6. Петар Дамјан и рачунање запремине брода

Петар Дамјан Охмућевић је био дубровачки математичар из 17. века. Рођен је у месту Слано у Дубровачкој Републици. Није позната тачна година рођења али се зна да се 1644. преселио из Сланог у Дубровник и ступио у службу као учитељ аритметике. Након 12 година службе 1656. године напушта Дубровачку Републику и одлази у Напуљ.



Дубровник 1667. године

Породица Охмућевић из које потиче Петар Дамјан била је на далеко чувена. Родоначелник породице је према предању био кнез Радивој Гргурић Владисављевић, који је у 12. веку имао наследни посед негде у источној Босни. После пада Краљевине Босне 1463. и Херцеговине 1483. под Османлијску власт, одређени број племићких породица нашао је уточиште у суседној Дубровачкој Републици. Међу њима су били и Охмућевићи који су се настанили у Сланом где су од раније имали свој посед. По свој прилици да су Омхуљевићи били власници тог имања и пре 1399. године. Наиме те године место Слано улази у састав Дубровачке Републике, након два века проведена у Немањићкој Србији и неколико деценија нестабилности које је пратио распад Српског Царства.

Нагли успон породице је почео у првој половини 16. века када је Ивеља Охмућевић тргујући житом и сољу стекао значајан иметак, укључујући и своју трговачку флоту. Имао је пет синова. Свих пет су ступили у шпанску службу. Ђуро је страдао приликом превоза војника из Шпаније у Италију, Никола и Антун су погинули у поморским биткама, док је Марко умро у дубокој старости у Шпанији. Најпознатији од петорице браће био је Петар Охмућевић.

Морепловац Петар Охмућевић је у служби шпанског краља пропутовао скоро цео тада познати свет од Португала до Индије. Као поморац и ратник прославио се у бици код Лепанта 1571. када је турска ратна флота заустављена у походу на западну Европу. Остало је забележено да је 1588. Дон Педро, како су га у Шпанији касније звали, као адмирал предводио дванаест ратних бродова у неуспелом походу на Краљевину Енглеску. Тих дванаест великих бродова су заправо били трговачки бродови који су припадали породици Охмућевић и њиховим пријатељима и родбини из Сланог. На њима се налазило више од 3000 чланова посаде. За њихову адаптацију у ратне бродове, у опрему и оружје, породица Охмућевић је издвојила чак 150 000 дуката. Од тих 12 бродова неуспели поход на Енглеску преживела су само два. Све ово није било довољно да би Петар до краја напредовао у служби. У феудалној Шпанији напредовање у служби подразумевало је писане доказе који потврђују аристократско порекло.

Да би постао племић, Петар Охмућевић је шпанском краљу и племству морао да сервира причу о породичној вези с велможом цара Душана и јунаком епских народних песама Хрељом Охмућевићем (у песмама Реља Крилатица). Након неколико фалсификованих повеља којима је повезао своју породицу са династијама Котроманић и Немањић, Петар Охмућевић се латио амбициозног подухвата, прављење маштовитог грбовника са 150 грбова постојећих и непостојећих јужнословенских земаља, владара и племића. Ту је наравно и грб Душановог витеза Хреље Охмућевића, по свој прилици измишљен. Централно место у Охмућевићевом грбовнику заузима грб Цара Душана Силног, који заправо представља прерађени грб Светог Римског Царства на коме су грбови немачких кнежевина замењени правим али и измишљеним грбовима балканских земаља.

Сам грбовник је наводно нађен на Светој гори и према подацима у њему направио га је 1340. лични хералд цара Душана, извесни „бан од цимерије Станислав Рупчић“. Превару је подржао и папа Клемент Други, коме је грбовник дао идеју да мобилише и мотивише становништво поробљених јужнословенских земаља за рат против Османлијског Царства. Након прибављених повеља и грбовника, морепловац Петар Охмућевић добија 1594. године од вицекраља у Напуљу дуго жељену потврду племства, и постаје дон Педро Охмућевић. Умро је у Лисабону 1599. оставивши иза себе једну ћерку.

По угледу на њега убрзо су и друге дубровачке породице почеле да праве своје грбовнике који ће их повезати са славним личностима из српске средњовековне историје. Педров грбовник и његове фалсификоване повеље су у наредним вековима цитирали надахнути историчари у Дубровнику али и у Сремским Карловцима, призивајући неко ново Душаново Царство које ће објединити све тада поробљење јужнословенске земље. Карађорђеви устаници су 1804. на своје заставе стављали грбове из Охмућићевог грбовника, углавном историјски неутемељене. Најновији пример је грб Републике Македоније заснован на фалсификату дон Педра Охмућевића.

И док је адмирал Петар Охмућевић незаобилазна тема у свакој расправи о хералдици како на Балкану тако и шире, математичар Петар Охмућевић је скрајнут и готово заборављен. Овај пионир математике на овим просторима је неоправдано запостављен чак и у Хрватској која данас баштини наслеђе Дубровачке Републике.

Петар Дамјан Охмућевић је написао на италијанском два дела из области математике, која су остала у рукопису, а данас се чувају у Толеду у Шпанији. Прво дело би у преводу гласило „Кратак разговор о практичној геометрији“. Док би превод другог дела гласио „Општа расправа о разломцима и о начину вађења другог и трећег корена с исправним правилом за прорачунавање и мерење бродова“. Прво дело односило се на практичну геометрију, а друго се бавило разломцима и вађењем другог и трећег корена. Друго дело садржи и поморску проблематику која је била јако повезана са математиком, односно још једно правило за израчунавање заремине брода. Тај део везан за рачунање запремине брода постоји сачуван и у дубровачком Историјском архиву под насловом „О начину мерења или рачунању запремине брода било које врсте и облика, и о одређивању тачног износа у колима од по 36 томола на темељу овог рачунања запремине“. Тај проблем се није случајно нашао у склопу тог аритметичког дела будући да се често доводио у везу са вађењем трећег корена, посебно у неким старијим поступцима које Петар Дамјан Охмућевић описује. То дело је највероватније започето још за време Охмућићевог боравка у Дубровнику, где је годинама радио као наставник математике, а довршио га је у Напуљу 1661. године.

Одређивање запремине брода у бродоградњи од давнина је био тежак проблем. Математички исправно није га нико ни покушао решити будући да је бродска грађа закривљена, а код различитих типова бродова и различитог облика. Постојале су различите апроксимације за израчунавање запремине бродова, али најчешће су биле јако непрецизне. Управо те старе поступке Охмућевић описује на почетку наведеног поглавља. Тим поступцима није био задовољан. Закључује да су те старе апроксимације неподесне за бродове који се користе у 17. веку, јер су направљене за рачунање запремине неких много старијих бродова који су имали сасвим другачији облик. У својој расправи Охмућевић наводи два постојећа начина рачунања запремине брода.

Први је поступак, како каже он, био: „Помножи се најпре дужина са ширином, а затим тај производ са висином. Од резултата се одузме једна трећина и добија се стварна запремина брода. Од тога се опет одузме пет посто због неискоришћености простора на прамцу и крми.“ Говорећи о том поступку, Охмућевић даље наводи: „Тим начином се служи Арсенал у Венецији, цели Јадрански залив и Левант, као и Медитеран све до Барселоне. Тај начин рачунања се темељи на „трећем степену“ (производу три величине) и на практичном запажању. Могли бисмо рећи да би то био прави начин за мерење запремине брода и савршено исправно правило када би се бродови градили на старински начин. Али с обзиром да се временом не мењају само стари узори у изградњи галија, него и све остало, једрењаци се све више усавршавају у својој лепоти, складу и брзини, правило наведеног мерења постаје нетачно и све се више удаљава од правилног.“ У наставку похваљује проналазача тог правила, јер је оно било доста добро за време у коме је настало и за бродове какви су тада били. Али за рачунање запремина нових једрењака који су сасвим променили облик постаје сасвим непрецизно.

Други начин састојао се у томе да се најпре дужина и ширина брода саберу и онда се тај збир помножи са висином. Охмућевић се исправно пита: „ Доста је замислити колику то везу има са кубом?“ Јер је у питању производ две а не три величине. Па даље наставља: „Други начин мерења се употребљава у Напуљској Краљевини. За њих без замерки морамо приметити да нису вешти ни у поморском знању ни у умећу мерења бродова. То мерење они врше без основе у неком геометријском правилу, осим ако није напипано у ваздуху, јер не воде рачуна о чињеници да је запремина тела пропорционална колико са дужином и ширином, толико и са висином тела.“

Петар Дамјан Охмућевић у својим делима користи метричке јединице из 17. века које нису свуда биле јединствене. Као меру за даљину користи стопу, која је у Венецији износила **0,347735 m** док је у Дубровнику била нешто мања и износила **0,3423 m**. Уводи и кубну стопу. Салма је била мера за запремину жита, а употребљавала се и за израчунавање запремине брода. У медитеранским земљама за запремину бродова користила се јединица под именом кола. Педаљ је била стара мера за дужину која се користила приликом изградње бродова. Напуљски педаљ је износио **0,264 m**, дубровачки нешто мање **0,256 m**.

Из критичке примедбе на постојеће методе за рачунање запремине брода, јасно је да је Петар Дамјан имао исправан став о начину на који треба да се рачуна запремина. У наставку он каже да је у свакој науци и умећу потребна и пракса да би се дошло до добрих резултата. На основу свог познавања геометрије али и 12 година праксе мерења запремине бродова коју је имао у Дубровачкој Републици, Охмућевић је уверен да је нашао прецизан начин за одређивање запремине брода. Како се бродови међусобно разликују по облику, он предлаже да се брод подели вертикално по спојници прамца и крме на неколико делова, рецимо три, али по могућности да се узме и више делова. Затим за сваки од тих делова мери дужину, ширину и висину на почетку и на крају сваког одсечка. За сваки одсечак рачуна се аритметичка средина за сваку од три димензије. Тако да сваки део добије средњу дужину, ширину и висину. Затим се за сваки део израчуна запремина, па се добијене запремине саберу. Па се од збирно добијене запремине одузме једна трећина због закривљености брода. На крају Петар Дамјан још једном наглашава да ће поступак бити тачнији ако се брод подели на што више делова. Он је свој поступак приказао на броду галијун који се у 16. и 17. веку градио у Дубровачкој Републици, и могао се користити и за океанску пловидбу.

Макета дубровачког галијуна

Поступак за рачунање запремине брода који је Охмућевић осмислио био је знатно бољи од два старија поступка. Шта више његов поступак није много заостајао за радовима неких, касније светски познатих, математичара 17. века о којима је било речи у претходном поглављу.

Задатак 6.1. (Осми разред, Пирамида) Брод је подељен замишљеним вертикалним равнима на три дела: крму, средњи део и прамац. Затим је за сваки од тих делова измерена дужина, ширина и висина на почетку и на крају сваког одсечка. Мерењем су добијени следећи резултати: дужина крме ($\mathbf{ak_1 = 4m}$ и $\mathbf{ak_2 = 3m}$), ширина крме ($\mathbf{bk_1 = 3,8m}$ и $\mathbf{bk_2 = 4,5m}$), висина крме ($\mathbf{hk_1 = 3m}$ и $\mathbf{hk_2 = 3,5m}$), дужина средњег дела ($\mathbf{as_1 = 4m}$ и $\mathbf{as_2 = 4m}$), ширина средњег дела ($\mathbf{bs_1 = 4,5m}$ и $\mathbf{bs_2 = 4,5m}$), висина средњег дела ($\mathbf{hs_1 = 3,5m}$ и $\mathbf{hs_2 = 4m}$), дужина прамца ($\mathbf{ap_1 = 4m}$ и $\mathbf{ap_2 = 2,5m}$), ширина прамца ($\mathbf{bp_1 = 4,5m}$ и $\mathbf{bp_2 = 3,1m}$) и висина прамца ($\mathbf{hp_1 = 4m}$ и $\mathbf{hp_2 = 3,3m}$). Користећи Охмућевићеву методу израчунај запремину овог брода.

Решење задатка 6.1. За сваки одсечак ћемо да израчунамо аритметичку средину за сваку од три димензије. Дужину крме $\mathbf{ak}$ добијемо као аритметичку средину две измерене вредности $\mathbf{ak = (ak_1 + ak_2) : 2 = (4m + 3m) : 2 = 3{,}5m}$. На исти начин добијемо остале величине: $\mathbf{bk = 4{,}15m}$; $\mathbf{hk = 3{,}25m}$; $\mathbf{as = 4m}$; $\mathbf{bs = 4{,}5m}$; $\mathbf{hs = 3{,}75m}$; $\mathbf{ap = 3{,}25m}$; $\mathbf{bp = 3{,}8m}$; $\mathbf{hp = 3{,}65m}$. Запремина крме је $\mathbf{V_k = \frac{2}{3} \cdot ak \cdot bk \cdot hk = 31\frac{113}{240}\,m^3}$, слично добијемо да је запремина средњег дела $\mathbf{V_s = \frac{2}{3} \cdot as \cdot bs \cdot hs = 45m^3}$ и запремина прамца $\mathbf{V_p = \frac{2}{3} \cdot ap \cdot bp \cdot hp = 22\frac{43}{300}\,m^3}$. Запремина брода је $\mathbf{V = V_k + V_s + V_p = 98\frac{279}{400}\,m^3}$.

7. Паскалови и Фермаови проблеми из вероватноће

Почетак развоја „емпиријске" теорије вероватноће везује се за 17. век и за имена два француска математичара, то су Пјер де Ферма и Блез Паскал. Њихова студија из 1654. године бави се проблемом везаним за једну коцкарску игру. Уз Рене Декарта, Паскал и Ферма су најзначајнији француски математичари 17. века.

Блез Паскал је рођен 1623. године у граду Клермон-Феран. Године 1631. породица Паскал се сели у Париз, а осам година касније у Руан. Од малих ногу, Блез је показивао интересовање за науку, посебно за математику. Његов отац, који био члан Мерсенове академије, и сам се занимао за науку и математику. Радио је као државни службеник задужен за финансије и пореске приходе. Млади Блез је са 12 година почео да изучава геометрију. Са 16 година је објавио први рад из области пројективне геометрије.

Године 1642. са свега 19 година, почео је да ради на конструкцији математичке машине, механичког калкулатора, да би помогао оцу на послу. Први прототип је завршен 1645. године, а до 1652. направио је 50 примерака ове машине која је могла да сабира и одузима. Међутим продаја Паскалине, како је касније названа, ишла је слабо због високе цене, компликоване израде и чињенице да је једини Блез могао да их сервисира и ради поправке. Такође Паскалина је била децимална машина, а то није било нарочито погодно, јер се у Француској појавио нови валутни систем, сличан фунтама, шилинзима и пенијима, који су се користили у Великој Британији све до седамдесетих година 20. века, и као такав није био децималан. Француска је 1799. године прешла на децимални валутни систем. Упркос свему Паскалина је први велики корак ка стварању механичког рачунара још од времена Старе Грчке и још увек потпуно неистраженог Антикитера механизама за бродску навигацију и астрономске прорачуне. Паскалов подухват инспирисао је и друге математичаре да конструишу своје „машине за рачунање". Па је тако Готфрид Вилхелм Лајбниц, изумео 1672. године справу која се заснивала на другом моделу, узастопном сабирању, која је могла да обавља сабирање, одузимање, множење и дељење и да рачуна квадратни корен.

Године 1646. Блезов отац је повредио ногу, и морао је да се опоравља код куће, где су о њему бринула његова млађа браћа. Како су Блезови стричеви били у религиозном покрету из Руана, под њиховим утицајем и он сам постаје веома религиозан. Поред религије, сфера интересовања постаје му руски рулет и остале игре на срећу. Као резултат тог интересовања 1653. настаје његово дело: „Теза о аритметичком троуглу“, износећи у њему опис табеларног приказа за биномне коефицијенте који се данас зове Паскалов троугао. Следеће године, заједно са Фермаом, објавило је поменуту студију која се бави коцкарским проблемом. У наредним годинама све више се посвећује религији и филозофији, да би пред крај живота потпуно напустио математику и физику. Умро је у Паризу 1662. године. Као веома млад имао је срећу да упозна великане математике, Галилеја и Декарта, као и да нешто касније са Фермаом створи темеље рачунања вероватноће.

Пјер де Ферма је рођен 1601. у граду Бомон де Ломањ, на југу Француске. Студирао је право на универзитетима у Тулузу, Орлеану и Бордоу. За време студија показивао је велики таленат за математику. Док је био на Универзитету у Бордоу, 1629. истакао се када је једном тамошњем математичару представио своју рестаурирану верзију античког дела ,,Значајне тачке у равни“, старогрчког математичара Аполинија из Пергама. У то време је у Бордоу стварао мали круг математичара, који су поседовали личне колекције копија дела старогрчких математичара, које су биле написане на различитим језицима. Ретки су били оригинали на грчком, најчеће су то били арапски преводи, који су најпре стизали у Италију и Шпанију, а затим се ширили даље по Европи. Тај круг математичара, као и сам Ферма, доста добро су познавали грчки, латински, италијански и шпански, те су се бавили превођењем и поновном публикацијом тих античких дела. Такође у својим колекцијама имали су неке, тада још необјављене рукописе и копије, француског математичара Франсоа Вијета.

Након завршених студија права, захваљујући племићком пореклу своје мајке, добио је 1631. године посао на Високом суду у Тулузу, где је остао до краја живота. Касније је дао допринос аналитичкој геометрији, са Паскалом је поставио основе вероватноће, а сматра се и једним од зачетника диференцијалног рачуна. Ипак за математику су најзначајнија његова истраживања у теорији бројева. Поставио је хипотезу да су сви такозвани Фермаови бројеви, прости. Касније је контра пример за ову хипотезу нашао Ојлер. Мала Фермаова теорема се бави дељивошћу бројева. А посебно је занимљива Велика Фермаова теорема, која је нераскидиво везана за историју математике и додирује многе битне теме везане за теорију бројева. Теорему је Ферма објавио 1637. године, али њени корени сежу још у Стару Грчку, од Питагорине теореме и Питагорених тројки бројева. Након Фермаове смрти, на маргини његовог примерка Аритметике, дела старогрчког математичара Диофанта, пронађен је запис у коме француски математичар трвди да има елегантан доказ за ову теорему, али да су маргине књиге сувише мале да би га ту написао. Данас се озбиљно сумња да је Ферма заиста знао да докаже најпознатију од неколико теорема које су назване по њему. Али тај његов запис је инспирисао математичаре да наредних 350 година пробају да докажу то тврђење. Велики математичари наредних епоха су покушавајући да докажу Фермаову Велику теорему, долазили до других открића значајних за математику. Британски математичар Ендру Вајлс је коначно успео, након неколико деценија рада, да докаже теорему 1993. године.

Поменути коцкарски проблем из 17. века, поставио је један полупрофесионални коцкар, и гласи: Два коцкара **А** и **Б** бацају новчић, при чему један од њих, рецимо **А**, игра на „писмо“, а други на „главу“. Број појава „писма“ („главе“) представља број поена за играча **А** (играча **Б**). Победио је онај који први дође до унапред утврђене суме. Међутим, због неких објективних разлога игра је прекинута. Поставља се питање како поделити улог знајући да су у моменту прекида коцкару **А** била потребна **2** поена до добитне суме, а коцкару **Б** још **3** поена.

Године 1654. Паскал и Ферма су анализирали и решили овај проблем. Очигледно, не више од четири бацања новчића је довољно да се игра оконча. Нека **a** означава бацање новчића у ком **A** побеђује (појава „писма“), а **b** бацање новчића у коме **B** побеђује (појава „главе“). Та потребна **4** бацања могу да се реализују на **16** различитих начина, као што је приказано на доњој табели.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
a	a	a	a	b	a	a	b	a	b	b	b	b	b	a	b
a	a	a	b	a	a	b	a	b	a	b	b	b	a	b	b
a	a	b	a	a	b	a	a	b	b	a	b	a	b	b	b
a	b	a	a	a	b	b	b	a	a	a	a	b	b	b	b

Од **16** могућих случајева, **11** је повољно за играча **A** (то су случајеви од **1** до **11**, где се **a** јавља **2** или више пута), док је **5** повољно за **B** (случајеви од **12** до **16**, где се **b** јавља **3** или више пута). Према томе, коцкар **A** добија у **11** од могућих **16** случајева, па је $\frac{11}{16}$ вероватноћа добитка за коцкара **A**. Исто тако, пошто **5** од могућих **16** случајева повољно за коцкара **B**, вероватноћа добитка је $\frac{5}{16}$ за коцкара **B**. Коцкари би требали да поделе улог пропорционално вероватноћама добитка, дакле у односу **11:5**.

Задатак 7.1. (Пети разред, Скуп природних бројева) Колико има четвороцифрених бројева који могу да се напишу само уз помоћ цифара $\mathbf{1}$ и $\mathbf{2}$. Цифре могу да се понављају.

Решење задатка 7.1. Има их укупно $\mathbf{16}$. То су: $\mathbf{1111}$, $\mathbf{1112}$, $\mathbf{1121}$, $\mathbf{1211}$, $\mathbf{2111}$, $\mathbf{2211}$, $\mathbf{2121}$, $\mathbf{2112}$, $\mathbf{1212}$, $\mathbf{1221}$, $\mathbf{1122}$, $\mathbf{2221}$, $\mathbf{2212}$, $\mathbf{2122}$, $\mathbf{1222}$, $\mathbf{2222}$.

Задатак 7.2. (Четврта година средње школе, Вероватноћа и статистика) Новчић се баца четири пута. Колика је вероватноћа да сва четири пута буде „писмо“ ?

Решење задатка 7.2. Означићемо са $\mathbf{P}$ „писмо“ а са $\mathbf{G}$ „главу“. Укупно имамо $\mathbf{16}$ случајева: $\mathbf{PPPP}$, $\mathbf{PPPG}$, $\mathbf{PPGP}$, $\mathbf{PGPP}$, $\mathbf{GPPP}$, $\mathbf{GGPP}$, $\mathbf{GPGP}$, $\mathbf{GPPG}$, $\mathbf{PGPG}$, $\mathbf{PPGG}$, $\mathbf{PGGP}$, $\mathbf{GGGP}$, $\mathbf{GGPG}$, $\mathbf{GPGG}$, $\mathbf{PGGG}$, $\mathbf{GGGG}$. Од тих $\mathbf{16}$ случајева само је један са сва четири писма, па је вероватноћа да се то деси $\mathbf{\frac{1}{16} = 0{,}0625}$.

Задатак 7.3. (Четврта година средње школе, Вероватноћа и статистика) Коцка за игру се баца два пута узастопно. Колика је вероватноћа да се оба пута појави страна са шест тачака?

Решење задатка 7.3. Укупно има $\mathbf{6 \cdot 6 = 36}$ исхода $\mathbf{(11, 12, 13, 14{,}15, 16, 21, 22, 23, 24\,, \ldots, 54, 55, 56, 61, 62, 63, 64, 65, 66)}$. А само један од тих $\mathbf{36}$ исхода је онај када су обе шестице, дакле вероватноћа да се то деси је $\mathbf{\frac{1}{36} \approx 0{,}0278}$.

8. Проблем кенингсбершких мостова

Леонард Ојлер се сматра најистакнутијим математичарем 18. века. Рођен је у Базелу у Швајцарској 1707. године. Отац му је био Паул, протестански свештеник који се школовао на Универзитету у Базелу, где му је часове математике држао Јакоб Бернули. Личне везе Паула Ојлера са породицом Бернули, која је дала неколико врсних математичара, вероватно је утицала и на младог Леонарда да се рано заинтересује за математику. Са 13 година и сам је почео студије на Универзитету у Базелу. У то време универзитети су били налик данашњим гимназијама, пружали су знање из готово свих наука без јасног усмерења. Ипак Леонард Ојлер се постепено све више окретао математици. Ту је велику улогу одиграо његов професор математике Јохан Бернули, брат поменутог Јакоба. Са само 16 година Ојлер је одбранио магистарску тезу из области филозофије и математике, а са 19 година је докторирао. Трагајући за сталним послом, усавршио се у различитим областима науке и технике.

Године 1726. Ојлеру стиже примамљива понуда из Санкт Петербурга да се тамо пресели и ради на Императорској академији наука и уметности, коју је две године раније основао руски цар Петар Велики. Млади доктор наука је у почетку оклевао, јер се надао да ће добити упражњено место професора физике у Базелу. Када место није добио, одлучује да оде у Русију. У Санкт Петербургу одмах постаје члан Академије, добија финансијску потпору и звање медицинског поморског поручника. А три године касније, 1730. постаје професор математике на Академији. Катедру за математику је водио Ојлеров земљак, Данијел Бернули, још један математичар из знамените породице. Када је 1733. године Данијел напустио Русију, Ојлер постаје нови шеф катедре за математику.

У Русији су се створили идеални услови да млади Ојлер покаже сву своју генијалност. Поред финансијске сигурности која му је била загарантована, у Санкт Петербургу се нашао у сјајном математичком окружењу. Поред поменутог Данијела Бернулија, у то време у новој руској престоници радили су и чувени геометар Јакоб Херман, као и математичар и универзални научник Кристијан Голдбах. Десетине Ојлерових радова настали су тада.

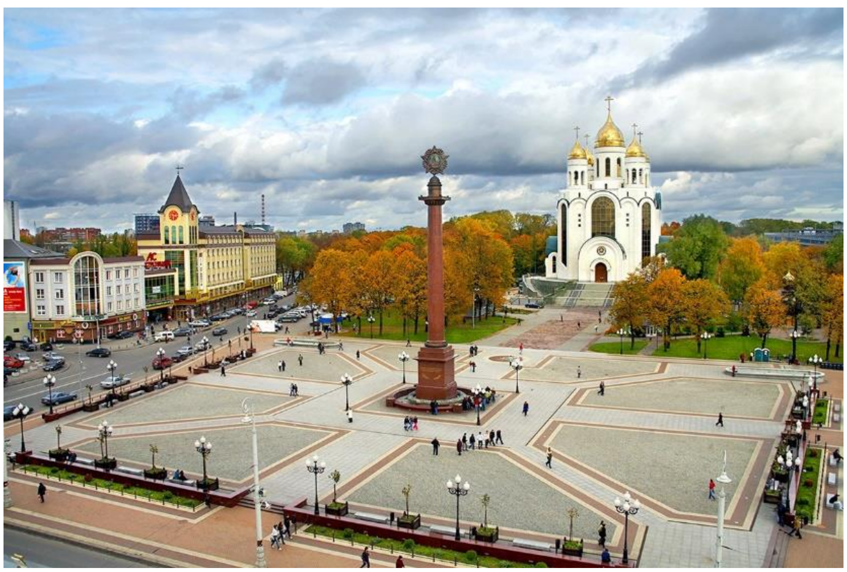
Зграда Академије наука и уметности у Санкт Петербургу, изграђена у првој половини 18. века

Ипак након 15 година проведених у Санкт Петербургу, Ојлер 1741. године напушта Русију услед политичке нестабилности која је захватила ту земљу. Одлази у Берлин где је пруски краљ Фридрих Велики основао Академију наука по угледу на три главне метрополе тог времена, Париз, Лондон и Санкт Петербург. У Пруској академији Ојлер се бавио разлитичитим природним и техничким наукама, као и адиминистративним пословима. Више од трећине Ојлерових радова настају у том периоду. Године 1766. године велики математичар долази у сукоб са пруским двором, и одлучује да се врати у Санкт Петербург, који никада није престао да му пружа финансијску потпору.

Током Ојлеровог другог боравка у Санкт Петербургу, који траје све до његове смрти 1783. године, настаје већина од његових око 1000 радова. Чак и неколико деценија после његове смрти, Академија у Санкт Петербургу је наставила да публикује његове необјављене радове. Скоро да нема области у којој се није остварио. Историчари математике га сматрају једним од последњих „ренесансних математичара“, који су познавали целокупну математику свог доба. Сахрањен је на гробљу у оквиру манастира Александра Невског у Санкт Петерзбургу, где се налази својеврсна „алеја великана“ сачињена од највећих руских композитора, писаца, научника и песника.

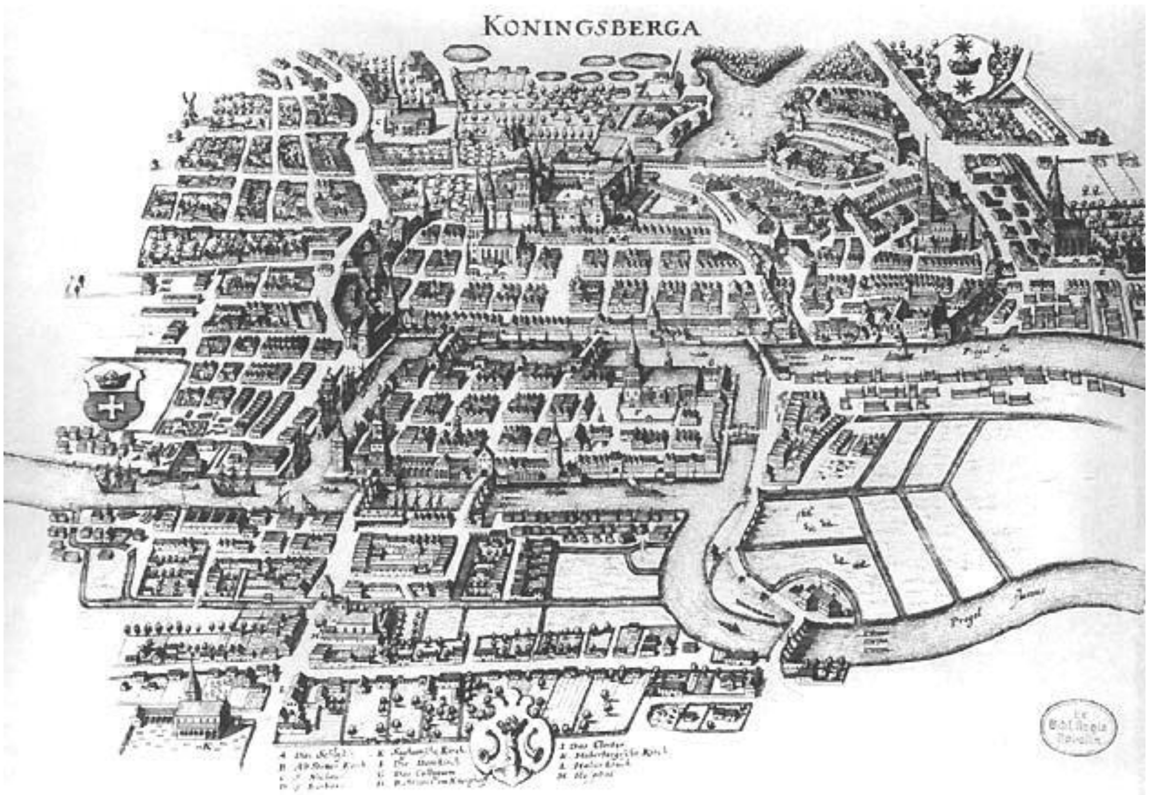
Математичаре 18. века није красила систематичност и строгост у доказивању. Ојлер и његови савременици, усхићено би се задовољили резултатом или формулом коју би добили и проверили кроз примере. Једна од карактеристика математике тог времена је постављање хипотеза, и задавање и решавање конкретних математичких проблема. Један од тих популарних математичких проблема 18. века био је проблем „Седам кенигсбергских мостова“.

Кенингсберг је био највећи град источне Пруске. Средином 18. века за превласт над овим градом бориле су се Пруска Краљевина и Руско Царство, управо две земље у којима је Ојлер провео цео свој радни век. Данас се тај град зове Калињинград, и припада Руској Федерацији. Познат је по својим острвима, каналима и мостовима, слично као и два највећа града на обалама Балтичког мора, Стокхолм и Санкт Петербург. Када је 1736. године Кенингсберг посетио шеф катедре за математику Руске академије наука, Леонард Ојлер, становници овог града су му преставили чувени проблем кенингсбергшких мостова.



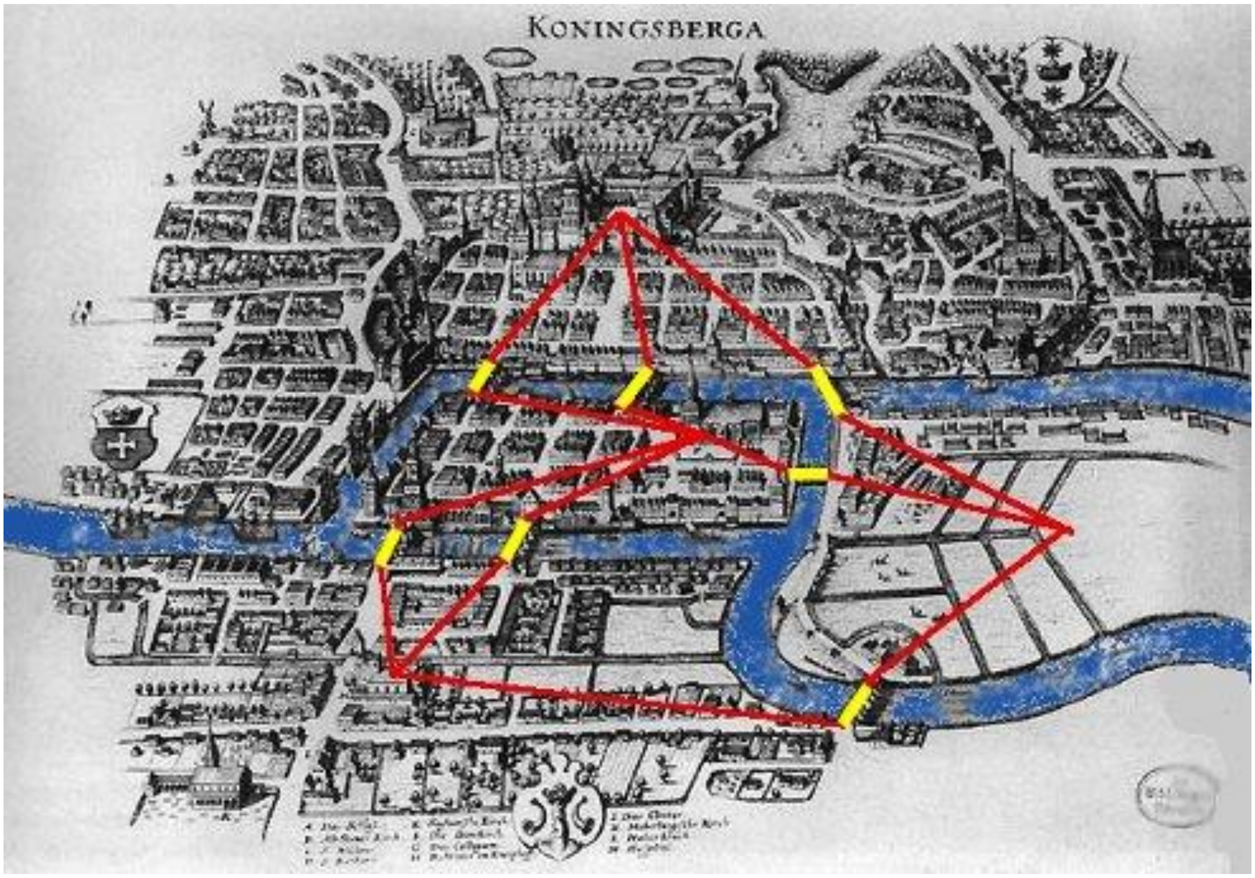
Калињинград (Кенингсберг), и данас се у овом руском граду могу пронаћи 2 од чувених 7 мостова из времена када је Ојлер посетио град

Проблем кенигсбершких мостова гласи: „Преко реке Прегел која протиче кроз Кенигсберг и коју два острва деле на два рукавца, постоји седам мостова који повезују острва и обале реке (као што је приказано на доњој слици). Да ли је могуће прећи све мостове не прелазећи ни преко једног два или више пута?“



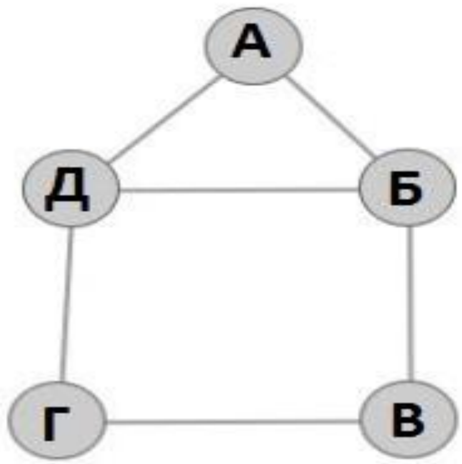
Кенингсберг са својим седам мостова, план града из 1652. године

Ојлер је закључио да то није могуће. До решења је дошао на следећи начин. Делове копна (леву и десну обалу реке, као и острво) можемо означити тачкама, а мостове линијама које повезују те тачке (погледај слику). Тако добијамо граф са теменима и ивицама, темена су нам тачке а ивице линије које повезују тачке. Ако из неког темена графа полази паран број ивица, онда то теме можемо назвати парним. И обрнуто, ако из неког темена полази непаран број ивица, онда то теме можемо назвати непарним. Постављени проблем може се сада преформулисати: „Да ли се добијени граф може нацртати у једном потезу без подизања оловке са папира?“ Да бисмо нацртали тражени граф полазимо из једног његовог темена, а затим пре него што стигнемо до следећег темена цртамо једну линију, а након изласка другу линију, и тако све док не стугнемо до последњег темена. Ако цртање почињемо и завршавамо у истом темену, онда сва темена графа морају бити парна, или ако нису, онда сва морају бити парна осим почетног и крајњег, који би били непарни. А на слици доле видимо да су три темена непарна, а једно парно. Дакле, није могуће прећи мостове Кенингсберга „из једног потеза“.



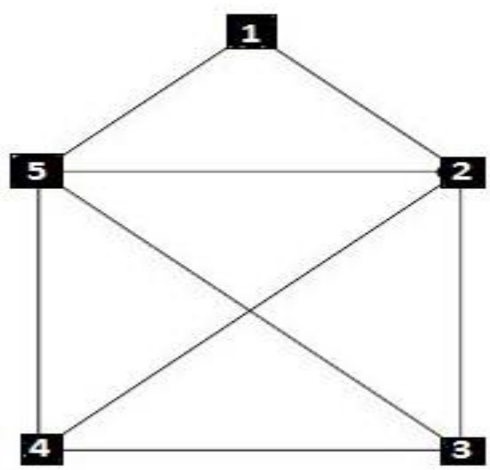
Граф који се може нацртати без подизања оловке са папира зове се *Ојлеров граф*, а одговарајући пут *Ојлеров пут*.

Задатак 8.1. (Четврти разред, Додатна настава- графови) Може ли у једном потезу, без подизања оловке са папира, да се нацрта фигура са слике. Ако је то могуће, наведи путању.



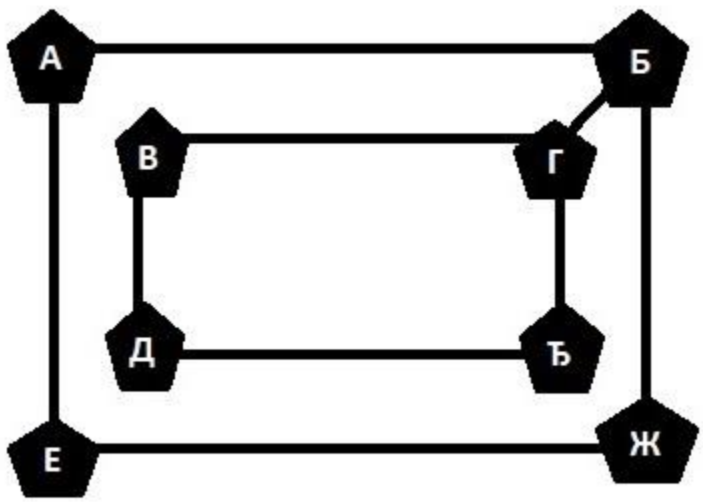
Решење задатка 8.1. Сва темена ове фигуре и линије којима су та темена спојена чине један граф. Из темена **А**, **Г** и **В** полазе по две линије ка другим теменима, дакле та три темена су парна. Док су темена **Д** и **Б** непарна, јер из њих полазе по три линије ка другим теменима. До решења долазимо тако што кренемо из једног од два непарна темена, а другом непарном темену завршимо пут. Једно од решења је **Д-А-Б-В-Г-Д-Б**.

Задатак 8.2. (Четврти разред, Додатна настава- графови) Може ли у једном потезу, без подизања оловке са папира, да се нацрта отворена коверта? Погледај слику. Ако је то могуће, наведи путању



Решење задатка 8.2. Сва темена ове отворене коверте и линије којима су та темена спојена чине један граф. Темена означена бројевима **5** и **2** су парна темена, степена четири (из сваког од њих воде по четири линије). Теме **1** је парно, степена два, односно из њега воде две линије. Док су темена **4** и **3**, неперна темена, степена три. И управо ћемо ова два непарна темена узети за почетак и крај. Једно од могућих решења је **4-5-1-2-3-5-2-4-3**.

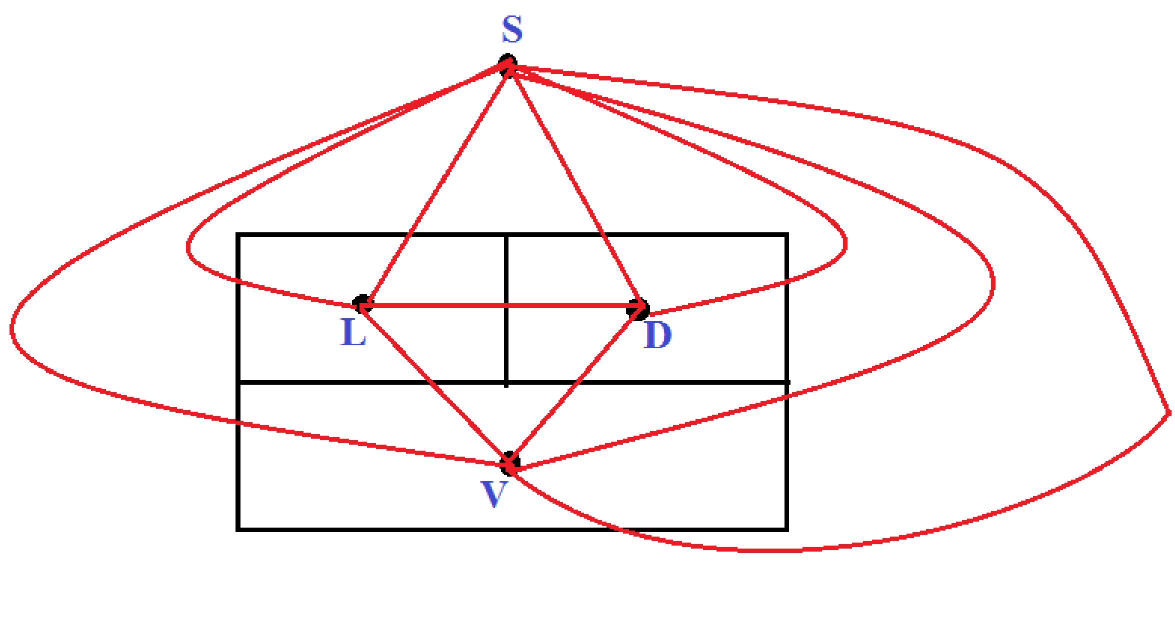
Задатак 8.3. (Пети разред, Додатна настава- графови) На планини Лавиринт налази се осам села окружених густом шумом. Села су обележена са словима **А, Б, В, Г, Д, Ђ, Е, Ж**. Нека од њих су повезана путевима као на слици испод. Да ли се сви путеви могу прећи тачно по једном при чему се кроз неко место може проћи више пута? Ако је то могуће, наведи путању.



Решење задатка 8.3. Ако посматрамо села као темена, а путеве као ивице графа, онда видимо да су два темена непарна, степена три, то су темена **Б** и **Г**. Остала села (темена) су парна, степена два, јер из њих воде по два пута. Да би смо дошли до решења морамо да кренемо из једног непарног темена, а пут да завршимо у другом непарном темену. Једно решење је на пример **Б-А-Е-Ж-Б-Г-Ђ-Д-В-Г**.

Задатак 8.4. (Пети разред, Додатна настава- графови) Да ли је могуће у једном потезу без подизања оловке са папира нацртати такву затворену криву линију, која сваку дуж на слици пресеца тачно једном?

Решење задатка 8.4. Дати правоугаоник се састоји из три дела, два мања правоуганика и једног већег. Унутрашњост тог већег правоуганика смо означили са **V**, левог мањег са **L**, а десног мањег са **D**. Спољну површину смо означили словом **S**. Темана смо спојили линијама тако да свака линија пресеца тачно једну дуж. Теме **S** је непарно реда 7, теме **V** је непарно реда 5. Темена **L** и **D** су парна реда 4. Једно непарно теме ће нам бити почетак, а друго непарно теме ће нам бити на крају пута.



9. Додатак

9.1. Основни појмови из теорије бројева

Теорија бројева је грана математике која се углавном бави проучавањем својстава природних бројева $\mathbf{N} =\{1,2,3,4,\ldots\}$. Једно од основних својстава скупа $\mathbf{N}$ је да су на њему дефинисане операције сабирања и множења које задовољавају законе комутативности, асоцијативности и дистрибутивности. Поред тога, за свака два различита елемента $\mathbf{m,n}$ из скупа $\mathbf{N}$ важи или $\mathbf{m} < \mathbf{n}$ или $\mathbf{n} < \mathbf{m}$. Сваки непразан подскуп скупа $\mathbf{N}$ има најмањи елемент, па важи принцип математичке индукције.

Осим својства скупа $\mathbf{N}$, теорија бројева проучава и својства скупа целих бројева $\mathbf{0}, \pm\mathbf{1}, \pm\mathbf{2}, \pm\mathbf{3},\ldots$ који се означава са $\mathbf{Z}$, те скупа рационалних бројева тј. бројева облика $\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{q}}$ за $\mathbf{p} \in \mathbf{Z}$, $\mathbf{q} \in \mathbf{N}$, који се означава са $\mathbf{Q}$.

Појам дељивости је један од најједноставнијих, али уједно и најважнијих појмова у теорији бројева.

Дефиниција 9.1.1. Нека су $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ цели бројеви, и нека је $\mathbf{a}$ различито од нуле. Ако постоји цео број $\mathbf{m}$ такав да је $\mathbf{b} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{a}$, онда кажемо да је $\mathbf{a}$ делилац или фактор броја $\mathbf{b}$, $\mathbf{b}$ је садржалац или умножак броја броја $\mathbf{a}$, док је $\mathbf{m}$ количник који се добија при дељењу броја $\mathbf{b}$ са бројем $\mathbf{a}$. Ако је $\mathbf{b}$ дељиво са $\mathbf{a}$, онда то означавамо са $\mathbf{a}|\mathbf{b}$ и кажемо једноставно да $\mathbf{a}$ дели $\mathbf{b}$. Ако $\mathbf{a}|\mathbf{b}$ и ако $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ нису међусобно једнаки, кажемо да је $\mathbf{a}$ прави делилац броја $\mathbf{b}$.

Теорема 9.1.1. Ако је цео број $\mathbf{b}$ дељив целим бројем $\mathbf{a}$ различитим од нуле, онда је њихов количник једнозначно одређен.

Доказ теореме 9.1.1. Ако је број $\mathbf{b}$ дељив бројем $\mathbf{a}$, онда постоји цео број $\mathbf{m}$ као њихов количник, тако да је $\mathbf{b} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{a}$. Ако би постојао још неки количник $\mathbf{n}$ који се добија при дељењу броја $\mathbf{b}$ бројем $\mathbf{a}$, онда би важила једнакост $\mathbf{b} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{a}$, па би било $\mathbf{m} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{a}$. Како је $\mathbf{a}$ различито од нуле, из последње једнакости добијамо да је $\mathbf{m} = \mathbf{n}$.

Теорема 9.1.2. (Алгоритам дељења) За сваки пар целих бројева $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ ($\mathbf{b}$ је различито од нуле) једнозначно је одређен пар целих бројева $\mathbf{q}$ и $\mathbf{r}$ за које је

$$\mathbf{a = b \cdot q + r, \quad 0 \leq r < |b|}.$$

Доказ теореме 9.1.2. Докажимо најпре егзистенцију бројева $\mathbf{q}$ и $\mathbf{r}$. Размотримо случај када је $\mathbf{a \geq 0}$. Означимо са $\mathbf{S = \{m \in Z : m|b| > a\}}$. Како је $\mathbf{a + 1 \in S}$, то је $\mathbf{S}$ непразан подскуп скупа природних бројева $\mathbf{N}$, па има најмањи елемент.

Нека је $\mathbf{s = \min S}$ и $\mathbf{q' = s - 1}$. Тада $\mathbf{q'}$ не припада скупу $\mathbf{S}$, па је $\mathbf{q'|b| \leq a}$.

Стога је $\mathbf{r = a - q'|b| \geq 0}$. С друге стране је $\mathbf{s|b| > a}$, јер је $\mathbf{s \in S}$. Добијамо једнакост:

$$\mathbf{|b| = s|b| - q'|b| > a - q'|b| = r},$$

Чиме смо показали да је $\mathbf{0 \leq r < |b|}$. Из дефиниционе једнакости за $\mathbf{r}$ имамо да је $\mathbf{a = q'b + r}$. Како је $\mathbf{|b| = b \cdot sgn(b)}$, то је $\mathbf{a = bq + r}$ за $\mathbf{q = q' \cdot sgn(b)}$.

Нека је сада $\mathbf{a < 0}$. Како је $\mathbf{-a > 0}$, према доказаном случају постоје $\mathbf{s, r' \in Z}$ такви да је $\mathbf{-a = s|b| + r'}$ и $\mathbf{0 \leq r' < |b|}$. Сада је $\mathbf{a = -s|b| - r'}$ и $\mathbf{-|b| < r' \leq 0}$. Ако је $\mathbf{r' = 0}$, онда је за $\mathbf{q = -s \cdot sgn(b)}$ и $\mathbf{r = r' = 0}$ задовољено тврђење. Међутим ако је $\mathbf{r' > 0}$, онда $\mathbf{-r'}$ не задовољава тражене неједнакости. Због тога се ради поправка:

$$\mathbf{a = -s|b| - r' = -s|b| - |b| + |b| - r' = (-s - 1)\,|b| + (\,|b| - r')}.$$

Нека је $\mathbf{q' = -s - 1}$, $\mathbf{r = |b| - r'}$. Сада је $\mathbf{a = |b|\, q' + r}$. Проверимо неједнакост за $\mathbf{r}$.

Како је $\mathbf{0 < r' < |b|}$, множењем са $\mathbf{-1}$ добијамо $\mathbf{-|b| < -r' < 0}$. Додавањем $\mathbf{|b|}$ добијамо $\mathbf{0 < |b| - r' < |b|}$, тј. $\mathbf{0 < r < |b|}$. За $\mathbf{q = q' sgn(b)}$ коначно имамо да је $\mathbf{a = bq + r}$ и $\mathbf{0 < r < |b|}$.

Остаје да докажемо јединственост. Претпоставимо да је $\mathbf{a = bq + r = bq_1 + r_1}$, $\mathbf{0 \leq r, r_1 < |b|}$. Не умањујући општост доказа можемо да претпоставимо да је $\mathbf{r \leq r_1}$. Из полазне једнакости имамо да је $\mathbf{b(q - q_1) = r_1 - r}$. Како је $\mathbf{0 \leq r_1 - r < |b|}$, то је $\mathbf{0 \leq |b(q - q_1)| < |b|}$. Скраћивањем са $\mathbf{|b|}$, добијамо да је $\mathbf{0 \leq |q - q_1| < 1}$. Како је $\mathbf{|q - q_1|}$ ненегативан цео број, то је $\mathbf{|q - q_1| = 0}$. Отуда је $\mathbf{q = q_1}$, па је $\mathbf{r = r_1}$.

Број $\mathbf{q}$ у претходно доказаној теореми је непотпун количник, а $\mathbf{r}$ остатак при дељењу броја $\mathbf{a}$ бројем $\mathbf{b}$, или краће, само остатак. Ако је $\mathbf{r = 0}$, онда је $\mathbf{a = b \cdot q}$, тј. број $\mathbf{a}$ је дељив бројем $\mathbf{b}$. Ако $\mathbf{a}$ није дељиво са $\mathbf{b}$, увек је $\mathbf{r}$ различито од нуле.

Алгоритам дељења се често користи у класификацији бројева. На пример, за $b = 2$, ако је $r = 1$ имамо непарне бројеве облика $a = 2q + 1$, док за $r = 0$ имамо парне бројеве $a=2q$. Сличну ситуацију имамо за $b = 3,4,\ldots$ Тако добијамо разбијање скупа целих бројева на дисјунктне класе по модулу броја b. Два цела броја припадају истој класи онда и само онда ако је њихова разлика дељива са b.

Теорема 9.1.3. Нека је b цео број већи од 1. Тада се сваки позитиван цео број m на јединствен начин може приказати у облику

$$m = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_0,$$

где је $0 < a_n < b$ и $0 \le a_i < b$, за $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Дефиниција 9.1.2. Нека је $D(a) = \{b \in Z^+ : b|a\}$, где је $a \in Z$. Ако је $a > 1$ и $D(a)=\{1,a\}$, онда кажемо да је $\boldsymbol{a}$ прост број.

Дефиниција 9.1.3. Нека је $D(a,b) = D(a) \cap D(b)$, где су $a, b \in Z$, a и b су различити од нуле. Број $(a,b) = \max D(a,b)$ је највећи заједнички делилац бројева a и b. Ако је $(a,b) = 1$, тада кажемо да су бројеви $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ узајамно прости.

Теорема 9.1.4. За сваки сложен природан број $n \in N$ постоји прост број p такав да $p|n$.

Теорема 9.1.5. Нека је $n \in N$ сложен број. Тада постоји прост број $p \le [\sqrt{n}]$.

Доказ теореме 9.1.5. Како је n сложен број, $D(n) \neq \{1, n\}$. Нека је $k \in D(n) \setminus \{1, n\}$. Пошто $k|n$, постоји природан број l такав да је $n = kl$. Како је $1 < k < n$, следи да је и $1 < l < n$. С обзиром да је $k \le l$ или $l \le k$, не умањујући општост доказа, можемо да претпоставимо да је $l \le k$. Према претходном тврђењу постоји прост број p тако да $p \mid l$. Те је $p \le l$, а тиме је $p \le k$. Одатле је

$$p^2 \le k \cdot l = n, \text{ тј. } p \le [\sqrt{n}].$$

Теорема 9.1.6. Простих бројева има бесконачно много.

Теорема 9.1.7. (**Основна теорема аритметике**) За сваки природан број $n \in N^+$ постоје јединствени $k \in N$, прости бројеви $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ и $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in N^+$ тако да је

$$n = {p_1}^{\alpha_1} \cdot {p_2}^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot {p_k}^{\alpha_k}$$

Израз ${p_1}^{\alpha_1} \cdot {p_2}^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot {p_k}^{\alpha_k}$ називамо простом или канонском факторизацијом броја $\boldsymbol{n}$.

Последица 9.1.1. Природан број је квадрат онда и само онда ако у простој факторизацији има све изложиоце парне.

9.2. Основни појмови из геометрије

Геометријска фигура је било који непразан подскуп простора. Занимљиве геометријске фигуре су равни, праве, полуправе, дужи, углови, троуглови...

Дефиниција 9.2.1. Пресликавање $\varphi : E^n \rightarrow E^n$, $n \in \{1, 2, 3\}$, које је бијекција и које сваке две тачке A и B простора E^n пресликава у тачке A' и B' такве да је $(A, B) \cong (A', B')$ назива се изометријском трансформацијом или изометријом простора E^n.

Дефиниција 9.2.2. Две фигуре Φ_1 и Φ_2 су подударне, у ознаци $\Phi_1 \cong \Phi_2$, ако постоји изометрија φ која пресликава Φ_1 у Φ_2, тј. важи $\varphi(\Phi_1) = \Phi_2$.

Појам подударности дужи проистиче из претходне уопштене дефиниције подударности фигура, јер дуж сматрамо фигуром.

Дефиниција 9.2.3. Тачка S је средиште дужи AB ако припада тој дужи и ако је $AS \cong SB$.

Дефиниција 9.2.4. Два конвексна или конкавна угла pOq и $p'O'q'$ су подударна ако и само ако на крацима p, q, p' и q' редом постоје тачке P, Q, P' и Q' такве да је $(P,O,Q) \cong (P',O',Q')$.

Дефиниција 9.2.5. За конвексан угао каже се да је прав, оштар или туп у зависности од тога да ли је он подударан, мањи од, или већи од свог упоредног угла. Два угла су суплементна ако је њихов збир опружен угао, а комплементни ако је њихов збир прав угао.

Теорема 9.2.1. Прави углови су међусобно подударни. Угао подударан неком правом углу је такође прав.

Дефиниција 9.2.6. Ако праве p и q садрже редом краке OP и OQ неког правог угла POQ, тада кажемо да је права p нормална (управна) на праву q у ознаци $p \perp q$.

Теорема 9.2.2. За сваку праву p и сваку тачку A неке равни постоји јединствена права n у тој равни која садржи тачку A и управна на правој p.

Два троугла су подударна ако постоји изометрија која један троугао пресликава у други. Како изометрија чува редослед, јасно је да ако су два троугла подударна, тада су подударне и одговарајуће ивице и одговарајући углови. Постоје укупно четири основна става подударности, који нам говоре који су од услова подударности одговарајућих ивица и углова довољни да би два троугла била подударна. Други став се приписује Талесу из Милета (624.п.н.е.-546.п.н.е.), док се остали приписују Питагори са Самоса (570. п.н.е.- 495.п.н.е.)

Став 1 (СУС: Страница-Угао-Страница) Два троугла су подударна ако су две ивице и њима захваћен угао једног троугла подударни са одговарајућим ивицама и углом другог троугла.

Став 2 (УСУ: Угао-Страница-Угао) Два троугла су подударна ако су једна ивица и њој налегли углови једног троугла подударни са одговарајућом ивицом и на њој налеглим угловима другог троугла.

Став 3 (ССС: Страница-Страница-Страница) Два троугла су подударна ако су им одговарајуће ивице подударне.

Став 4 (ССУ: Страница-Страница-Угао) Два троугла су подударна ако су две странице и угао наспрам једне од њих једног троугла подударни са одговарајућим ивицама и одговарајућим углом другог троугла, а углови наспрам других двеју ивица су или оба оштра или оба права или оба тупа.

Тврђење 9.2.1. Наспрам подударних ивица неког троугла су подударни углови и обратно, наспрам подударних углова троугла су подударне ивице.

Теорема 9.2.3. (Питагорина теорема) Површина квадрата над хипотенузом правоуглог троугла једнака је збиру површина квадрата над катетама тог троугла.

Теорема 9.2.4. (Талесова теорема) Ако две паралелне праве секу краке конвексног угла са теменом у тачки $\mathbf{A}$, и то један крак у тачкама $\mathbf{B}$ и $\mathbf{B_1}$, а други крак у тачкама $\mathbf{C}$ и $\mathbf{C_1}$, онда је $\frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{AB_1}} = \frac{\mathbf{AC}}{\mathbf{AC_1}} = \frac{\mathbf{BC}}{\mathbf{BC_1}}$.

Теорема 9.2.5. Ако два троугла имају једнаке углове, онда су ти троуглови слични, то јест онда су пропорционални парови одговарајућих страница.

Теорема 9.2.6. Ако су две странице једног троугла пропорционалне двема страницама другог троугла и ако је угао који захватају ове странице у првом троуглу једнак углу који захватају одговарајуће странице у другом, тада су троуглови слични.

Теорема 9.2.7. Ако су сва три пара одговарајућих страница два троугла пропорционална, онда су ти троуглови слични.

9.3. Основни појмови из теорије графова

Почеци теорије графова везују се за швајцарског математичара, Леонарда Ојлера и Проблем Кенигсбершких мостова, о чему је већ било речи. Он је 26. августа 1735. године презентовао свој рад на овом проблему Руској академији наука у Санкт Петербургу, доказујући да је такав обилазак мостова немогућ уз напомену да се његов метод може проширити на произвољан распоред острва и мостова. Ојлер је само формулисао потребне и довољне услове да такав обилазак постоји, али није сматрао да је потребно да покаже довољне услове у општем случају. Чланак о Проблему Кенингсбершких мостова Ојлер је написао 1736. године, први пут је објављен 1741. године, али је пробудио мало интереса међу осталим математичарима тог времена. Теорија графова озбиљније почиње да се развија тек од краја 19. века.

Дефиниција 9.3.1. Граф $\mathbf{G}$ је уређени пар $(\mathbf{V}, \mathbf{E})$. Елементи скупа $\mathbf{V}$ се зову чворови (темена или врхови), а елементи скупа $\mathbf{E}$ гране (ивице) графа $\mathbf{G}$. За дати граф $\mathbf{G}$, скуп чворова се означава са $\mathbf{V}(\mathbf{G})$, а скуп грана са $\mathbf{E}(\mathbf{G})$.

Дефиниција 9.3.2. Грана која спаја чвор са самим собом назива се петља.

Дефиниција 9.3.3. Два чвора неоријентисаног графа без петљи, $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, су суседни ако су спојени граном $\mathbf{e} = (\mathbf{u},\mathbf{v})$. За чвор $\mathbf{u}$ и грану $\mathbf{e}$ кажемо да су инцидентни (исто важи и за $\mathbf{v}$ и $\mathbf{e}$). Грана $\mathbf{e} = (\mathbf{u},\mathbf{v})$ се скраћено пише $\mathbf{e} = \mathbf{uv}$.

Дефиниција 9.3.4. Две гране су суседне ако имају заједнички чвор.

Дефиниција 9.3.5. Број суседних чворова $\mathbf{v}$ зове се степен чвора $\mathbf{v}$ и означава са $\mathbf{d}(\mathbf{v})$. Чвор који нема суседа назива се изолован чвор. Два суседна чвора су крајње тачке гране која их спаја. Степен чвора може се дешифровати и као број грана које се спајају у том чвору.

Дефиниција 9.3.6. Код оријентисаних графова су све гране $\mathbf{e} = (\mathbf{u},\mathbf{v})$ оријентисане, тј. битан је редослед чворова. За грану $\mathbf{e} = (\mathbf{u},\mathbf{v})$ кажемо да води из чвора $\mathbf{u}$ у чвор $\mathbf{v}$ (тј. да излази из чвора $\mathbf{u}$, а улази у чвор $\mathbf{v}$). Излазни степен чвора $\mathbf{v}$, у ознаци $\mathbf{d}^+(\mathbf{v})$, је број грана које воде из чвора $\mathbf{v}$. Улазни степен чвора $\mathbf{v}$, у ознаци $\mathbf{d}^-(\mathbf{v})$, је број грана које воде у чвор $\mathbf{v}$. Петља се обично сматра и улазном и излазном граном за одговарајући чвор.

Теорема 9.3.1. У неоријентисаном графу $\mathbf{G}$, који има најмање два чвора, постоје бар два истог степена.

Теорема 9.3.2. У неоријентисаном графу $\mathbf{G}$ важи $\mathbf{d}(\mathbf{v}_1) + \mathbf{d}(\mathbf{v}_2) + \dots + \mathbf{d}(\mathbf{v}_n) = 2\mathbf{m}$, где је $\mathbf{n}$ број чворова, а $\mathbf{m}$ број грана.

Теорема 9.3.2. У неоријентисаном графу $\mathbf{G}$ број чворова непарног степена је паран.

9.4. Основни појмови из теорије вероватноће

Теорија вероватноће је математичка дисциплина која се бави изучавањем случајних појава. Основни модел који се користи у теорији вероватноће је експеримент помоћу кога се у природи и друштву врши проучавање веза између узрока и последице. На исход експеримента обично утиче више услова. Ако се експеримент понавља много пута под истим условима, појављује се одређена законитост у скупу исхода. Ова област математике се бави тим законитостима увођем квантитативне мере у облику броја (тај број се зове вероватноћа, и њиме се процењује могућност наступања исхода).

Као модерна математичка дисциплина теорија вероватноће развија се тек после 1933. године када је руски математичар Андреј Николајевич Колмогоров објавио рад у којем је изложио основне поставке аксиоматске заснованости теорије вероватноће. Пре тога ова област математике се развијала ослоњена на емпиријске и интуитивне моменте, уско повезана са проблемима игара на срећу и практичних проблема, без формално-логичке теорије повезане са другим математичким појмовима. Почетак развоја те „емпиријске“ теорије вероватноће везује се за 17. век и за имена два француска математичара, то су Пјер де Ферма и Блез Паскал. Њихова студија из 1654. године бави се проблемом везаним за једну коцкарску игру, о чему је већ било речи. Сличним проблемима, везаним за игре са коцкицама, бавио се и италијански математичар Ђироламо Кардано (1501-1576), професор математике у Болоњи и Милану.

Приликом проучавања разних проблема уочавају се појаве које се остварују при реализацији неког комплексног услова. Једна реализација посматраног комплексног услова се зове експеримент. Посматрају се експерименти које је могуће поновити неограничен број пута при истим условима.

У теорији вероватноће елементаран догађај или елемантаран исход је основни појам и не дефинише се. Скуп свих елементарних исхода једног експеримента је простор елементарних исхода. У општем случају простор елемнтарних исхода се означава са $\boldsymbol{\Omega}$, а његови елемнти са $\boldsymbol{\omega}$.

Дефиниција 9.4.1. Ако је $\mathbf{A}$ подскуп скупа $\mathbf{\Omega}$, тада је $\mathbf{A}$ случајан догађај.

Дефиниција 9.4.2. (Лапласова дефиниција вероватноће) Претпоставимо да је скуп елементарних догађаја коначан, $\mathbf{\Omega}=\{\boldsymbol{\omega_1}, \boldsymbol{\omega_2}, \dots, \boldsymbol{\omega_n}\}$ и да сваки елементарни догађај има исту вероватноћу реализације. Тада је:

$$\mathbf{p_i = P_{(\omega_i)} = \frac{1}{n}}\,.$$

Нека је $\mathbf{A}$ подскуп од $\mathbf{\Omega}$, тј. $\mathbf{A}=\left\{\boldsymbol{\omega_{i_1}}, \boldsymbol{\omega_{i_2}}, \dots, \boldsymbol{\omega_{i_k}}\right\}$. Тада је $\mathbf{P(A) = \frac{k}{n}}$.

Литература

1. Alexander Bogomolny*: Construction of Pascal's Triangle,* MAA, Washington D.C, 2013.

2. Милан Божић: *Преглед историје и филозофије математике*, Завод за уџбенике, Београд, 2010.

3. Иеромонах Алипий Гаманович: *Грамматика церковно-славянского языка*, Художественная литература, Москва, 1991.

4. Данијела Горановић: *Велика Фермаова теорема*, ПМФ Бања Лука, 2007.

5. Семëн Григорьевич Гиндикин: *Леонард Эйлер (200 лет со дня его смерти)*, Квант, Москва, 1983.

6. Žarko Dadić: *Povijest ideja i metoda u matematici i fizici*, Školska knjiga, Zagreb, 1992.

7. Кристин Дал, Свен Нордквист: *Матиш, баш свуда*, Прополис плус, Београд, 2011.

8. Небојша Икодиновић, Слађана Димитријевић: *Математика за осми разред основне школе*, Klett, Београд, 2013.

9. Svetozar Kurepa: *Matematička analiza 1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1975.

10. Donald R. Latorre, John W. Kenelly, Iris B. Reed, Sherry Biggers: *Calculus Concepts: An Applied Approach to the Mathematics of Change,* Cengage Learning, Boston, 2007.

11. Зоран Лучић: *Огледи из историје античке геометрије*, Службени гласник, Београд, 2009.

12. Павле Младеновић: *Елементаран увод у вероватноћу и статистику*, Друштво математичара Србије, Београд, 1998.

13. Vladimir Muljević: *Petar Damjan Ohmućević – nastavnik matematike u Dubrovniku u 17. stoljeću*, Hrvatski patentni glasnik 5-6, Zagreb,1994.

14. John J O'Connor, Edmund F Robertson: *History of Mathematics*, University of St Andrews, St Andrews, 2016.

15. Sheldon M. Ross: *Introduction to Probability Models*, University of California, Berkeley, 2007.

16. Constantinos Tzanakis, Abraham Arcavi: *Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.