

МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

МАСТЕР РАД

ПРИРОДНА ДЕДУКЦИЈА У ЛОГИЦИ ПРВОГ РЕДА

Аутор:

Василић Дејан

Ментор:

Икодиновић Небојша

БЕОГРАД 2016.

Садржај

1. Увод	3
1.1 Развој теорије доказа	3
1.2 Праисторија појма доказа	3
1.3 Хилбертова стара аксиоматика теорије доказа	4
1.4 Природна дедукција	6
1.5 Циљеви теорије доказа	8
2. Природна дедукција у логици првог реда	9
2.1 Исказна логика и природна дедукција- кроз примере	9
2.2 Предикатска логика и природна дедукција- кроз пример	18
2.3 Природна дедукција за исказну логику	25
2.4 Природна дедукција за предикатску логику	29
2.5 Неки математички докази и природна дедукција	31
3. Природна дедукција у настави	35
3.1 Програм рада	36
3.2 Педагошки проблеми и процена	39
4. Закључак	41
5. Литература	42

Кратко о раду

Рад се састоји из три дела. Први део говори о развоју идеје доказа, од појаве појма доказа, преко Хилбертове аксиоматике терије доказивања, Генценовог стварања два главна типа логичких система савремене теорије доказа, природне дедукције и секвентног рачуна све до савремене употребе природне дедукције и њених веза са рачунарском науком. Други, централни део рада садржи приказ правила природне дедукције у логици првог реда. У овом делу одлучио сам се да прикажем неколико начина за извођење у природној дедукцији, где сам се највише базирао на приказ код Икодиновића, тзв. Fitch style јер је лак за разумевање. У овом делу је детаљно објашњење правила извођења. У наставку овог дела је начин приказа код Јаничића, где се користи метод дрвета-извођења. У трећем делу раду говори се о експерименту о употреби природне дедукције у настави.

1.Увод

1.1 Развој теорије доказа¹

Развој теорије доказивања може се природно поделити на: праисторија појма доказивања у древној логици и математици; открића Фрегеа² да математички докази, а не само претпоставке, могу (и треба) да учествују у логичком систему; стара Хилбертова³ аксиоматика теорије доказивања; неуспех Хилбертових циљева кроз Геделове⁴ теореме непотпуности; Генценово⁵ стварање два главна типа логичких система савремене теорије доказа, природне дедукције и секвентног рачуна; апликације и проширења природне дедукције и секвентног рачуна, до рачунарских интерпретација природне дедукције и њених веза са рачунарском науком.

1.2 Праисторија појма доказа

Уопштено говорећи, теорија доказа проучава општу структуру математичких доказа. Правила доказивања заузимају централно место у Аристотеловој „*Analytica Posteriora*“: дедукција се састоји из примене основних правила закључивања на неке истине или аксиоме, које су непосредно усвојене. Аристотелов поглед на доказе одлично се уклапа у структуру доказа древне геометрије, аксиоматизоване код Еуклида. Међутим, теорија силогизама коју је Аристотел развио нема готово никакве везе са доказима у еуклидској геометрији, који су остали интуитивни више од две хиљаде година.

Пре Фрегеовог рада из 1879, нико није помишљао да би се могло доћи до потпуног скупа правила доказивања, у смислу који је изразио Фреге када је уводио свој симболички језик: Све што је потребно за исправан закључак може се изразити у потпуности; ништа није препуштено нагађању. Фрегеов корак напред био је пресудан за развој логики. Аристотел је дао образац за комбиновање аргуманата, али идеја о коначном затвореном скупу правила, изледала је неостварива свима пре Фрегеа (осим можда за Лајбница). Као што данас знамо, Фрегеови принципи доказивања су потпуни за класичну предикатску логику.

Око 1890. Ђузепе Пеано⁶ дао је формализацију логичких закључака, са циљем представљања формалних доказа у аритметици. Његов „*Arithmetices principia, nova*

¹The Development of Proof Theory, Stanford Encyclopedia of Philosophy (<http://plato.stanford.edu/entries/proof-theory-development/>)

²Gottlob Frege, (1848-1925), немачки математичар, логичар и филозоф. Радио на универзитету у Јени

³David Hilbert (1862–1943), немачки математичар

⁴Kurt Friedrich Gödel (1906-1978), аустријски математичар, логичар и филозоф

⁵Gerhard Gentzen (1909-1945), немачки математичар и логичар

⁶Giuseppe Peano (1858-1932) италијански математичар и логичар

methodo exposita“, оригинално писан на латинском, приказан је у енглеском преводу у делу „Од Фрегеа до Гедела“ (1967). Нажалост, уредник није успео да препозна оно што је Пеано урадио са формалним закључивањем, па наводи да је Пеано формализовао само језик логике и аритметике, али не и принципе доказивања.

Расел⁷ је узео Фрегеову логику, користећи Пеанову нотацију и формална правила доказивања, у раду из 1906. са насловом „Теорија импликације“⁸. У каснијем раду, Расел је променио аксиоматски систем, и приказао га у свом делу „Principia Mathematica“ (Whitehead and Russell 1910–13), које је постало веома утицајно. Расел је пратио Фрегеа, и његова идеја била је да аксиоми изражавају основне логичке истине, а да су друге логичке истине изведене из њих применом модус поненса и генерализације, два принципа која је Фреге увео.

Фрегеов и Пеано-Раселов приступ логици је постао универзално прихваћен кроз утицај Хилберта и његових сарадника 1920-их.

1.3 Хилбертова стара аксиоматика теорије доказа

Хилбертова књига „Grundlagen der Geometrie“ из 1899. имала је велики утицај на централне проблеме математике у првим деценијама 20-ог века. Неки од проблема су следећи:

1. Формализација математичких теорија. Ово укључује избор основних објеката и односа, као и избор аксиома.
2. Доказ о непротивречности аксиома.
3. Питање међусобне независности и потпуности аксиома.

⁷ Bertrand Russell (1872-1970) британски филозоф и математичар

⁸“The theory of implication.”, Russell 1906.

4. Проблем одлучивости: да ли постоји начин (поступак, алгоритам) за одговор на било које питање формулисано у оквиру теорије?

Од 1920. године, проблеми аксиоматизације и формализације “Хилбертовог типа” постају познати и доминантни на логичкој сцени. У Хилбертовом и Акермановом раду, из 1928., „Широко распрострањена логика“⁹, представљен је формални систем за предикатску логику и формулисан је проблем његове потпуности. Проблем је решио Гедел 1929. године, а решење објавио годину дана касније. Четврти темељни проблем, проблем одлучивости, има негативно решење.

Након што је Гедел објавио теорему о непотпуности аритметике у септембру 1930, Фон Нојман је утврдио да ће конзистентност аритметике бити међу Геделовим недоказивим пропозицијама. Али, Гедел је дошао до истог открића и Фон Нојман¹⁰ никад није објавио свој доказ.

Гедел и Генцен, 1932-33, одвојено су један од другог нашли превод класичне Пеанове аритметике на интуиционистичку Хејтингову аритметику. Конкретно, показано је да ако је контрадикција доказива у првој, доказива је и у другој. Онда непротивречност интуиистичке аритметике гарантује непротивречност класичне аритметике.

⁹Hilbert and Ackermann's „Grundzüge der theoretischen Logik“

¹⁰ John von Neuman (1903-1957) мађарско-амерички математичар и научник

1.4 Природна дедукција

У остваривању свог програма, Генцен је као први задатак поставио анализу чисто логичких закључака, који се касније проширио на друге области математике. У својој тези (1934-1935), Генцен наводи да је као задатак поставио анализу математичких доказа, који се јављају у пракси. Прво запажање је да стварни докази нису засновани на аксиомама израженим у логичком језику, као у Хилбертовој теорији доказа. Код Генцена се претпоставке анализирају по деловима, као и закључак, а затим се ти делови састављају, тј. синтетише се доказ. Анализирање закључка обавља се правилима које је Генцен назвао правилима увођења. На пример, за доказивање конјункције $A \wedge B$, довољно је доказати конјункте A и B одвојено. Закључак се формално изводи правилом

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge_U$$

Насупрот томе, на претпоставке се примењују правила елиминације. На пример, конјункција која се користи као претпоставка може се разградити у своје састојке, као у правилима:

$$\frac{A \wedge B}{A} \wedge_E^L \quad \frac{A \wedge B}{B} \wedge_E^D$$

Генцен је развио и изучавао систем природне дедукције током 1932. године, и стигао у септембру 1942. до рачуна природне дедукције (скраћено ND) који је стандардан данас.

Импликација је можда више типична за ND него конјункција: извести $A \Rightarrow B$ значи привремено претпоставити A , а затим извести B . Ако ово успе, привремена претпоставка је затворена, након доношења закључка $A \Rightarrow B$, као у схематском извођењу:

$$\frac{\begin{array}{c} [A] \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \Rightarrow B} \Rightarrow_U$$

У другом смеру, $A \Rightarrow B$ се може елиминисати ако постоји неко извођење за A , јер се тада може закључити:

$$\frac{A \Rightarrow B \quad A}{B} \Rightarrow_E$$

Гледајући правила конјункције и импликације, уочава се да су премисе (формуле изнад линије закључивања) подформуле закључака у U -правилима, док је обрнуто у E -правилима. Генцен је приметио да је у нормалним извођењима, ово својство појединачних корака наслеђено од целог извођења, у смислу да су све формуле подформуле закључка. Овај резултат је дат као споредни резултат методе одлучивања за исказну логику.

Генцен је због немогућности да докаже тзв. теорему о нормализацији за класични систем природне дедукције, увео још један логички систем који је назвао Секвентни рачун (Sequent calculus-краће SC) и учинио га централном темом своје тезе. Секвентни рачун није тема овог рада.

У време док је Генцен радио на свом систему природне дедукције, Станислав Јасковски¹¹ такође развија логички систем за расуђивање са претпоставкама. Формуле у извођењу су распоређене у линеарном низу, али је Јасковсков документ из 1934. остао без значајних резултата. Линеарна варијанта природне дедукције је праћена у многим педагошким излагањима елементарне логики. Гентцен је открио рад Јасковског 1936. године и

¹¹Stanislaw Jaskowski (1906-1965), пољски логичар

прихватио да је линеарни распоред формула бољи од приказа у облику “стабла”, јер одражава “линеарност размишљања”.

1.5 Циљеви теорије доказа

За Хилберта циљеви теорије доказа су били потпуно заснивање математике на основу коначности доказа. Хилберт у овом програму није био заинтересован за изучавање математичких доказа самих по себи, већ само за рашчишћавање централних проблема заснивања. Недавно откривена Хилбертова белешка даје нам другачију слику: белешка наводи да је Хилберт желео да дода као 24-ти и последњи проблем у његовом чувеном Париском списку отворених математичких проблема из 1900-е развој метода доказивања у математици.

За Генцена циљеви су, поред Хилбертових, да разуме структуру математичких доказа. Овај програм је био потпуно успешан што се тиче чисте логике и аритметике. Секвентни рачун дозвољава анализу доказа и извођење неких фундаменталних резултата.

Неко разумевање појма доказа је потребно за сваког математичара, ако ни за шта друго, онда барем за комуникацију о математичким резултатима. Како год, теорија доказа није постала практично средство за рад, примене у математици су биле више изоловани случајеви. Недавни радови на формализовању математичких доказа са рачунарским системима, могу постепено променити ову слику. Теорија доказа је створила нове циљеве ван традиционалне математике, посебно у вези са рачунарском науком. Теме као што су провера исправности рачунарских програма су резултат теорије доказа.

2. Природна дедукција у логици првог реда

У овом поглављу биће приказана природна дедукција на основу рукописа [1], [2] (одељак 2.1. и 2.2.) и [3] (одељак 2.3. и 2.4.)

2.1 Исказна логика и природна дедукција – кроз примере

Алфавет исказне логики чине следећи симболи:

- Исказна слова, означавамо их малим латиничним словима; скуп свих исказних слова означаваћемо са P .
- Логички везници
- Логичке константе T и $\perp$.
- Помоћни знаци: лева „(“ и десна „)” заграда.

Дефиниција: Скуп исказних формула For јесте најмањи (у смислу инклузије) скуп речи над алфаветом исказне логики такав да важи:

- $P \cup \{T, \perp\} \subseteq For$ (исказна слова и логичке константе су исказне формуле);
- Ако $\alpha \in For$ онда $\neg \alpha \in For$;
- Ако $\alpha, \beta \in For$ онда $(\alpha \wedge \beta), (\alpha \vee \beta), (\alpha \Rightarrow \beta), (\alpha \Leftrightarrow \beta) \in For$.

Скуп исказних формула дефинисан је индуктивно. Најпре су уведене најједноставније исказне формуле: свако исказно слово и свака логичка константа представља једну исказну формулу. Затим формирамо сложеније исказне формуле: полазећи од најједноставнијих исказних формула, помоћу наведених правила градим нове формуле, које даље користимо за изградњу још сложенијих формула. Притом, исказне формуле се могу градити само на овај начин, што је последица захтева да For буде најмањи скуп речи са наведеним особинама.

Основни појам логики јесте појам *последице*, односно извођење закључка из некаквих претпоставки. Уместо

Из претпоставка₁, претпоставка₂, ..., претпоставка_n изводим закључак, краће пишемо

$$\frac{\text{претпоставка}_1, \text{претпоставка}_2, \dots, \text{претпоставка}_n}{\text{закључак}}$$

или

$$\text{претпоставка}_1, \text{претпоставка}_2, \dots, \text{претпоставка}_n \vdash \text{закључак}.$$

Оно што је кључно питање: Када је нека формула закључак (последица) неког скупа претпоставки (премиса)? Извлачење закључка из неког скупа претпоставки је тзв. *дедуктивно закључивање*, коме се посвећује велика пажња још од традиционалне логики

па све до савремене математичке логике. Давно је формулисан општи услов који мора испуњавати свако правило дедуктивног закључивања. Услов је познат под називом *salva veritate* и гласи:

Приликом извођења закључка не сме се наносити штета истинитости, односно ако су претпоставке истините, онда је и закључак истинит.

ОСНОВНА ПРАВИЛА ДЕДУКЦИЈЕ

Конјункција

Прво правило које наводимо односи се на конјункцију

$$\frac{\alpha \quad \beta}{\alpha \wedge \beta} (\wedge_I)$$

Из претпоставки α, β (директно) закључујемо $\alpha \wedge \beta$. Ако су тачни α и β , онда је тачна и конјункција $\alpha \wedge \beta$.

Можемо размишљати и овако: да бисмо доказали $\alpha \wedge \beta$ потребно је да докажемо сваки конјункт појединачно, и α и β , тј. доказ за $\alpha \wedge \beta$ добијамо спајањем доказа за α и β . Наведено правило називамо *правило увођења конјункције*, па га зато и означавамо са $(\wedge_I)$.

Наредна два правила омогућавају нам да у доказима користимо конјункције.

$$\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha} (\wedge_E^L) \quad \frac{\alpha \wedge \beta}{\beta} (\wedge_E^D)$$

Ако је тачна конјункција $\alpha \wedge \beta$, онда је тачан и конјункт α и конјункт β . Ако имамо доказ $\alpha \wedge \beta$, онда даље закључујемо α (одн. β) тако што на $\alpha \wedge \beta$ примењујемо правило $(\wedge_E^L)$ (одн. $(\wedge_E^D)$).

Низ формула који формирамо полазећи од претпоставки $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ применом правила дедукције док не добијемо закључак ψ називамо доказом формуле ψ из претпоставки $\varphi_1, \dots, \varphi_k$, односно доказом секвента $\varphi_1, \dots, \varphi_k \vdash \psi$. На који начин користимо правила, показује следећи пример.

Пример 1: Докажимо секвент $(p \wedge q) \wedge s, r \wedge t \vdash t \wedge q$.

1. $(p \wedge q) \wedge s$ претпоставка
2. $r \wedge t$ претпоставка
3. $p \wedge q$ $\wedge_E^L, 1$
4. q $\wedge_E^D, 3$
5. t $\wedge_E^D, 2$

6. $t \wedge q$ $\wedge_U, 5, 4$

Двострука негација

Прихватамо класично становиште да свака формула α и њена двострука негација $\neg\neg\alpha$ „тврде“ исто.

$$\frac{\neg\neg\alpha}{\alpha}(\neg\neg_E) \quad \frac{\alpha}{\neg\neg\alpha}(\neg\neg_U)$$

Правило $(\neg\neg_E)$ нам дозвољава да обришемо два знака негације. Насупрот томе, правило $(\neg\neg_U)$ дозвољава нам да се испред сваке формуле допишу два знака негације. Овим формулама изражавамо становиште да нема разлике између формуле и њене двоструке негације.

Импликација

Наредно правило које уводимо јесте једно од најпознатијих правила закључивања познато под латинским називом *modus ponens*. Ми ћемо ово правило називати – *елиминација импликације*.

$$\frac{\alpha \Rightarrow \beta \quad \alpha}{\beta}(\Rightarrow_E) \quad \frac{\alpha \Rightarrow \beta \quad \neg\beta}{\neg\alpha}(MT)$$

Правило $(\Rightarrow_E)$ говори о томе како се у доказима могу користити тврдње формулисане у облику импликације.

Правило *modus tolens* (**MT**) веома је корисно при употреби тврдњи у облику импликације.

Пример 2: Миле размишља коју девојку да позове.

1. Ако позовем Ану, нећу звати Бојану.
2. Ако не позовем Бојану, нећу звати ни Весну.
3. Ако не позовем Гоцу, зваћу Весну.
4. Ако позовем Гоцу, зваћу и Драгану.
5. Ако позовем Драгану, нећу звати Ему.

Напослетку, позвао је Ему. Да ли ће, у складу са размишљањем позвати Ану?

Формални доказ

1. $a \Rightarrow \neg b$ претпоставка

Неформални доказ

- | | | |
|--------------------------------|-----------------------|--|
| 2. $\neg b \Rightarrow \neg v$ | претпоставка | Како је Миле позвао Ему, према (5) следи да неће |
| 3. $\neg g \Rightarrow v$ | претпоставка | звати Драгану. Из (4) даље следи да неће звати |
| 4. $g \Rightarrow d$ | претпоставка | Гоцу. Затим, из (3) следи да ће звати Весну, |
| 5. $d \Rightarrow \neg e$ | претпоставка | одакле закључујемо да ће звати Бојану. На крају, |
| 6. e | претпоставка | из (1) следи да неће звати Ану. |
| 7. $\neg \neg e$ | $\neg \neg U, 6$ | |
| 8. $\neg d$ | MT, 5, 7 | |
| 9. $\neg g$ | MT, 4, 8 | |
| 10. v | $\Rightarrow_E, 3, 9$ | |
| 11. $\neg \neg v$ | $\neg \neg U, 10$ | |
| 12. $\neg \neg b$ | MT, 2, 11 | |
| 13. $\neg a$ | MT, 1, 12 | |

Наводимо и правило увођења импликације које говори како се доказују импликације.

$$\frac{\begin{array}{c} \alpha \\ \vdots \\ \beta \end{array}}{\alpha \Rightarrow \beta} (\Rightarrow U)$$

Да бисмо доказали импликацију $\alpha \Rightarrow \beta$ треба увести додатну (привремену претпоставку) α и доказати β , при чему се у том доказу дозвољено користити α , све остале претпоставке и међу закључке које смо већ извели.

Доказ формуле β након увођења додатне претпоставке α истицаћемо вертикалном цртом и називати *поддоказом*. Непосредно испод завршетка вертикалне линије наводимо закључак $\alpha \Rightarrow \beta$, ознаку правила ($\Rightarrow U$) и бројеве којима су нумерисани кораци поддоказа.

Пример 3: (1) Ако научим да доказујем, лако ћу положити логику. (2) Ако не размишљам, нећу положити логику. (3) Ако размишљам, лако ћу завршити математику.

Доказати: ако научим да доказујем, лако ћу завршити математику. Треба заправо доказати секвент

$d \Rightarrow l, \neg r \Rightarrow \neg l, r \Rightarrow m \vdash d \Rightarrow m.$

Формални доказ

1. $d \Rightarrow l$ претпоставка
2. $\neg r \Rightarrow \neg l$ претпоставка
3. $r \Rightarrow m$ претпоставка
4. $\mid d$ додатна претп.
5. $\mid l$ $\Rightarrow_E, 1, 4$
6. $\mid \neg \neg l$ $\neg \neg_U, 5$
7. $\mid \neg \neg r$ МТ, 2, 6
8. $\mid r$ $\neg \neg_E, 7$
9. $\mid m$ $\Rightarrow_E, 3, 8$
10. $d \Rightarrow m$ $\Rightarrow_U, 4, 9$

Еквиваленција

Еквиваленција два изказа $\alpha \Leftrightarrow \beta$ јесте заправо конјукција две обратне импликације $\alpha \Rightarrow \beta \wedge \beta \Rightarrow \alpha$, па се правила увођења и елиминације еквиваленције сама намећу.

$$\frac{\alpha \Rightarrow \beta \quad \beta \Rightarrow \alpha}{\alpha \Leftrightarrow \beta} (\Leftrightarrow_U) \quad \frac{\alpha \Leftrightarrow \beta}{\alpha \Rightarrow \beta} (\Leftrightarrow_E^{LD}) \quad \frac{\alpha \Leftrightarrow \beta}{\beta \Rightarrow \alpha} (\Leftrightarrow_E^{DL})$$

Негација и контрадикција

Под контрадикцијом подразумевамо конјукцију неке формуле и њене негације. Оваква конјукција не може бити тачна, па пошто наша правила чувају истину не смомо дозволити могућност да докажемо контрадикцију. Уведимо знак $\perp$ за контрадикцију (формулу која је сигурно нетачна).

$$\frac{\alpha \quad \neg \alpha}{\perp} (\neg_E) \quad \mid \begin{array}{c} \alpha \\ \vdots \\ \perp \end{array} \quad \frac{}{\neg \alpha} (\neg_U)$$

Из претпоставки α , $\neg\alpha$ изводимо контрадикцију. Поред тога, ако из α докажемо контрадикцију, онда закључујемо да је $\neg\alpha$.

$$\frac{\perp}{\alpha} (\perp_E)$$

Уводимо и правило према коме из контрадикције може да се закључи било шта.

Дисјункција

$$\frac{\alpha}{\alpha \vee \beta} (\vee^L) \qquad \frac{\beta}{\alpha \vee \beta} (\vee^D)$$

Ако знамо да је α (ако смо доказали α), онда мора бити тачно и $\alpha \vee \beta$ (онда изводимо и закључак $\alpha \vee \beta$), за било коју формулу β . На исти начин, из β изводимо закључак $\alpha \vee \beta$, за било коју формулу α .

На који начин у доказима користимо формуле облика $\alpha \vee \beta$? Замислимо да желимо да докажемо формулу γ претпостављајући $\alpha \vee \beta$. Будући да не знамо која је од формула α, β тачна (а једна мора бити), морамо спровести два одвојена доказа:

- Најпре, претпоставимо да је α тачно и доказујемо γ .
- Затим, претпоставимо да је β тачно и доказујемо γ .

На основу ова два доказа и претпоставке $\alpha \vee \beta$ закључујемо γ , јер два поддоказа покривају обе могућности

$$\frac{\alpha \vee \beta \quad \begin{array}{c|c} \alpha & \beta \\ \vdots & \vdots \\ \gamma & \gamma \end{array}}{\gamma} (\vee_E)$$

Неколико изведених правила

Свако правило дедукције формулисано у облику

$$\frac{\alpha_1, \dots, \alpha_k}{\beta}$$

Непосредно тврди да је секвент $\alpha_1, \dots, \alpha_k \vdash \beta$ доказив за било које формуле $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta$.

На пример, према правилу ($\Rightarrow_E$) знамо да је секвент $\alpha \Rightarrow \beta, \alpha \vdash \beta$ доказив за било које формуле α, β . Али, наведимо и један мање очигледан пример: секвент $\alpha \vee \beta, \neg \alpha \vdash \beta$ је доказив за било које формуле α, β .

1. $\alpha \vee \beta$ претпоставка
2. $\neg \alpha$ претпоставка
3. $\left| \begin{array}{l} \alpha \end{array} \right.$ додатна претпоставка
4. $\left| \begin{array}{l} \perp \end{array} \right.$ $\neg_E, 2, 3$
5. $\left| \begin{array}{l} \beta \end{array} \right.$ $\perp_E, 4$
6. $\left| \begin{array}{l} \beta \end{array} \right.$ додатна претпоставка
7. β $\vee_E, 1, 3, 5, 6$

Аналогно се доказује и секвент $\alpha \vee \beta, \neg \beta \vdash \alpha$, за било које формуле α, β . Ова запажања нам омогућавају да у доказима, поред основних правила, користимо и правила која ћемо називати *дисјунктивним силогизмима*.

$$\frac{\alpha \vee \beta, \neg \alpha}{\beta} (DS) \quad \frac{\alpha \vee \beta, \neg \beta}{\alpha} (DS)$$

Оба правила означавамо на исти начин јер ће увек бити очигледно које од ова два превила користимо.

Из сваког доказа у којем се користи (DS) једностано се може елиминисати његова примена, навођењем одговарајућег доказа.

Могуће је пронаћи још много изведених правила, али наводимо само нека која значајно поједностављују доказивање секвената.

Транзитивност импликације

$$\frac{\alpha \Rightarrow \beta \quad \beta \Rightarrow \gamma}{\alpha \Rightarrow \gamma} (T)$$

1. $\alpha \Rightarrow \beta$ претпоставка
2. $\beta \Rightarrow \gamma$ претпоставка
3. α додатна претпоставка
4. $\beta \Rightarrow_E, 1, 3$
5. $\gamma \Rightarrow_E, 2, 4$
6. $\alpha \Rightarrow \gamma \Rightarrow_U, 3-5$

Закони контрапозиције

$$\frac{\alpha \Rightarrow \beta}{\neg \beta \Rightarrow \neg \alpha} (K) \quad \frac{\neg \alpha \Rightarrow \neg \beta}{\beta \Rightarrow \alpha} (K)$$

1. $\alpha \Rightarrow \beta$ претпоставка
2. $\neg \beta$ додатна претпоставка
3. $\neg \alpha$ **MT**, 1, 2
4. $\neg \beta \Rightarrow \neg \alpha \Rightarrow_U, 2-3$

Закон искључења трећег

(tertium non datur, the law of the excluded middle)

$$\frac{}{\alpha \vee \neg \alpha} (TND)$$

Према закону искључења трећег у доказима можемо додати (и користити као претпоставку) $\alpha \vee \neg \alpha$, за било коју формулу α .

Де Морганови закони

$$\frac{\neg \alpha \vee \neg \beta}{\neg (\alpha \vee \beta)} (DM) \quad \frac{\neg \alpha \wedge \neg \beta}{\neg (\alpha \wedge \beta)} (DM) \quad \frac{\neg (\alpha \vee \beta)}{\neg \alpha \vee \neg \beta} (DM) \quad \frac{\neg (\alpha \wedge \beta)}{\neg \alpha \wedge \neg \beta} (DM)$$

Свако од ова четири правила назваћемо Де Моргановим законом, јер приликом примене неће бити забуне.

На крају овог дела наводимо неке примере.

Пример 4: Докажимо $p \Rightarrow q, q \Rightarrow r \vdash p \Rightarrow q \wedge r$.

1. $p \Rightarrow q$ претпоставка
2. $q \Rightarrow r$ претпоставка
3. p додатна претпоставка
4. $q \Rightarrow_E, 1, 3$
5. $r \Rightarrow_E, 2, 4$
6. $q \wedge r \wedge_U, 4, 5$

$$7. \quad p \Rightarrow q \wedge r.$$

Пример 5: Докажимо секвент $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \vdash q \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.

$$\begin{array}{ll}
 1. & p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \quad \text{претпоставка} \\
 2. & \left| \begin{array}{ll} q & \text{додатна претпоставка} \end{array} \right. \\
 3. & \left| \begin{array}{ll} p & \text{додатна претпоставка} \end{array} \right. \\
 4. & \left| \begin{array}{ll} q \Rightarrow r & \Rightarrow_E 1,3 \end{array} \right. \\
 5. & \left| \begin{array}{ll} r & \Rightarrow_E 2,4 \end{array} \right. \\
 6. & \left| \begin{array}{ll} p \Rightarrow r & \Rightarrow_U 3,5 \end{array} \right. \\
 7. & q \Rightarrow (p \Rightarrow r) \quad \Rightarrow_U 2,6
 \end{array}$$

Пример 6: Докажимо секвент $p \vee (q \wedge r) \vdash p \vee q$.

$$\begin{array}{ll}
 1. & p \vee (q \wedge r) \quad \text{претпоставка} \\
 2. & \left| \begin{array}{ll} p & \text{додатна претпоставка} \end{array} \right. \\
 3. & \left| \begin{array}{ll} p \vee q & \vee_U^L 2 \end{array} \right. \\
 4. & \left| \begin{array}{ll} q \wedge r & \text{додатна претпоставка} \end{array} \right. \\
 5. & \left| \begin{array}{ll} q & \wedge_U^L 4 \end{array} \right. \\
 6. & \left| \begin{array}{ll} p \vee q & \vee_U^D 5 \end{array} \right. \\
 7. & p \vee q \quad \vee_E 1,3,6
 \end{array}$$

Пример 7: Докажимо секвент $p \wedge q \Rightarrow r \vdash p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$.

$$\begin{array}{ll}
 1. & p \wedge q \Rightarrow r \quad \text{претпоставка} \\
 2. & \left| \begin{array}{ll} p & \text{додатна претпоставка} \end{array} \right. \\
 3. & \left| \begin{array}{ll} q & \text{додатна претпоставка} \end{array} \right. \\
 4. & \left| \begin{array}{ll} p \wedge q & \wedge_U 2, 3 \end{array} \right. \\
 5. & \left| \begin{array}{ll} r & \Rightarrow_E 1, 4 \end{array} \right. \\
 6. & \left| \begin{array}{ll} q \Rightarrow r & \Rightarrow_U 3,5 \end{array} \right. \\
 7. & p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \quad \Rightarrow_U 2, 6
 \end{array}$$

2.2 Предикатска логика и природна дедукција – кроз примере

Неформално говорећи, исказна логика се бави структуром реченица узимајући у обзир само начин на који су неки једноставни искази повезани логичким везницима, док је значење тих полазних исказа потпуно неважно. Тако исказна логика није довољно изражајна да би се у њој разматрало следеће чувено закључивање:

Сви људи су смртни

Сократ је човек.

Дакле, Сократ је смртан.

Предикатска логика омогућава да размотримо и смисао полазних исказа. Пре него што детаљно опишемо поменути логику, наводимо један пример у коме ћемо да објаснимо неке полазне идеје у развоју предикатске логике.

Уводни пример : Природни језици су погодни за прецизно изражавање смисла исказа. Да ли реченица *Сваки момак воли једну девојку* значи да (1) *Постоји једна девојка коју воли сваки момак* или да (2) *За сваког момка се може пронаћи једна девојка коју он воли*?

Потреба да се елиминишу двосмислености природног језика довела је, између осталог, до увођења тзв. **формалних језика** чије се реченице формирају према унапред утврђеним правилима. Реченице (1) и (2) формално ћемо изразити користећи:

- логичке везнике: $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\Rightarrow$ и $\Leftrightarrow$,
- квантификатори: $\forall$ -сваки и $\exists$ -неки
- променљиве $x, y, z, x_1, y_1, z_1, \dots$ (којима ћемо означавати „произвољно“, „неодређено“ људско биће) и
- помоћне знаке: зарез и заграде.

Поред тога, потребно је да неким симболима означимо и особине *бити момак* и *бити девојка*, као и однос *волети*. Изјаву „ x је момак“ означавамо $M(x)$, „ x је девојка“ означавамо $D(x)$, док $V(x, y)$ значи „ x воли y “.

Реченицама (1) и (2) редом одговарају следеће формуле

$$\exists x \left(D(x) \wedge \forall y \left(M(y) \Rightarrow V(x, y) \right) \right) \text{ и } \forall x \left(M(x) \Rightarrow \exists y \left(D(y) \wedge V(x, y) \right) \right).$$

Наводимо формализације још неколико реченица природног језика.

- Свако воли некога - $\forall x \exists y V(x, y)$
- Неко воли свакога - $\exists x \forall y V(x, y)$
- Неко не воли никога - $\exists x \forall y \neg V(x, y)$

Предикатске формуле Сврха претходног примера је да илуструје са каквим формулама радимо у предикатској логици. Уопштено говорећи, при формализацији у предикатској логици углавном имамо на уму:

- Извесне објекте о којима желимо да говоримо, као и
- Шта желимо о њима да говоримо – која својства (особине) објеката су нам важна, и које везе међу објектима посматрамо; својства и везе називамо *предикатима*.

Универзум (универзум говора) чине сви објекти о којима говоримо. У претходном примеру, универзум чине сви људи. *Променљиве* $x, y, z, x_1, y_1, z_1, \dots$ користимо да означимо неодређене објекте универзума. Поједине одређене објекте универзума називаћемо *константама*. Свака конкретна особа представља неку константу универзума који чине људи.

При формирању предикатских формула користимо и унапред изабране симболе за особине објеката и везе међу њима. Ове симболе називамо *предикатским симболима*. Подразумева се и да је сваком предикатском симболу придружена тзв. *дужина* тј. број објеката на које се односи. У претходном примеру, предикатски симболи су ***M, D, V***, при чему су њихове дужине редом 1, 1, 2. Наравно, број и врста предиката могу бити и другачији у зависности од ситуације коју описујемо. Предикатске симболе дужине 1 називаћемо *унарним*, а предикатске симболе дужине 2 *бинарним*.

Елементарне формуле градимо тако што предикатским симболом повежемо одговарајући број константи и променљивих.

Пример : Користећи предикатске симболе из претходног примера и две константе *Mika* и *Ana*, запишимо неке елементарне формуле:

$$M(x), M(y), M(Mika), D(x); D(Ana), V(x, Ana), V(x, x_1), \dots$$

Полазећи од елементарних формула, употребом везника ($\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\Rightarrow$ и $\Leftrightarrow$) на уобичајени начин, и квантификатора ($\forall$, $\exists$) формирамо предикатске формуле. Квантификаторе користимо на следећи начин: испред већ формиране предикатске формуле, постављамо један од квантификатора заједно са неком променљивом. Када квантификатор са неком променљивом поставимо испред формуле, тада сва појављивања те променљиве у поменутој формули постају *везана* и кажемо да су под *дејством* постављеног квантификатора. Уколико неко појављивање променљиве у формули није под дејством ниједног квантификатора, кажемо да је *слободно*.

Правила дедукције за квантификаторе

Нека је R неки унарни предикатски симбол. Ако замислимо да су низом $c_1, c_2, c_3, \dots$ набројани сви објекти универзума, тада формула $\forall x R(x)$ тврди:

$$(1) R(c_1) \wedge R(c_2) \wedge R(c_3) \wedge \dots,$$

а $\exists x R(x)$ тврди:

$$(2) R(c_1) \vee R(c_2) \vee R(c_3) \vee \dots$$

Ова запажања нас наводе да правила дедукције о квантификаторима повежемо са одговарајућим правилима за конјункцију и дисјункцију.

Правило „ $\wedge_E$ “

$$\frac{R(c_1) \wedge R(c_2) \wedge R(c_3) \wedge \dots}{R(c_i)} (\wedge_E)$$

тесно је повезано са следећим размишљањем: ако је тачно $\forall x \alpha$, тада ће бити тачна и формула добијена када се у α променљива x замени било којим објектом.

$$\frac{\forall x \alpha}{\alpha[v/x]} (\forall_E)$$

Ако је $\forall x \alpha$ тачно, тада мора бити тачна и формула $\alpha[v/x]$ добијена из α заменом свих слободних појављивања поменљиве x са v , при чему је v константа или променљива таква да током замене ниједно њено појављивање не постаје везано.

Приметимо да уколико се променљива x не појављује слободно у формули α , тада је формула $\alpha[v/x]$ идентична формули α .

Пример 1: $\forall x(\text{Covek}(x) \Rightarrow \text{Smrtan}(x)), \text{Covek}(\text{Sokrat}) \vdash \text{Smrtan}(\text{Sokrat})$

1. $\forall x(\text{Covek}(x) \Rightarrow \text{Smrtan}(x))$ претпоставка

2. $\text{Covek}(\text{Sokrat})$ претпоставка

3. $\text{Covek}(\text{Sokrat}) \Rightarrow \text{Smrtan}(\text{Sokrat})$ $\forall x_E, 1$

4. $\text{Smrtan}(\text{Sokrat})$ $\Rightarrow_E, 2, 3$

Правило „ $(\wedge_U)$ “

$$\frac{R(c_i)}{R(c_1) \wedge R(c_2) \wedge R(c_3) \wedge \dots} (\wedge_U)$$

Тесно је повезано са следећим размишљањем: ако је тачно $\alpha[v/x]$ за неки објекат v , онда је тачна и формула $\exists x \alpha$.

$$\frac{\alpha[v/x]}{\exists x \alpha} (\exists_U)$$

Пример 2: $\forall x(\text{Covek}(x) \Rightarrow \text{Smrtan}(x)), \text{Covek}(\text{Sokrat}) \vdash \exists x \text{Smrtan}(x)$

1. $\forall x(\text{Covek}(x) \Rightarrow \text{Smrtan}(x))$ *претпоставка*

2. $\text{Covek}(\text{Sokrat})$ *претпоставка*

3. $\text{Covek}(\text{Sokrat}) \Rightarrow \text{Smrtan}(\text{Sokrat})$ $\forall x_E, 1$

4. $\text{Smrtan}(\text{Sokrat})$ $\Rightarrow_E, 2, 3$

5. $\exists x \text{ Smrtan}(x)$ $\exists x_U, 4$

Увођење универзалног и елиминација егзистенцијалног квантификатора су донекле компликованија правила.

Неформално, када треба да докажемо тврдњу облика $\forall x\alpha$, доказ започињемо речима „нека је x произвољан објекат...“, при чему водимо рачуна да је једино што знамо о x -у то да припада одговарајућем универзуму; уколико се деси да је ознака x већ резервисана, онда узимамо неку другу, свежу променљиву v и кажемо „нека је v произвољан објекат...“. Слично томе, када знамо да је тачно $\exists x\alpha$, онда ћемо одговарајући елемент означити неким „свежим“ словом које није већ резервисано.

У оба правила се појављују поддокази снабдевени тзв. *свежом променљивом* која се у формулама ван поддоказа не појављује слободно.

$$\begin{array}{|l} v \\ \vdots \\ \alpha[v/x] \end{array} \quad \hline \forall x\alpha \quad (\forall x_U)$$

Ако се коришћењем *свеже* променљиве може доказати $\alpha[v/x]$, онда се може закључити $\forall x\alpha$.

Уведимо најзад правило $(\exists x_E)$. Грубо речено: ако знамо да је $\exists x\alpha$ тачно, онда је α тачно бар за једну „вредност“ x , па би требало обавити закључивање по случајевима за све могуће вредности, што постижемо користећи свежу променљиву v као „генеричку“ вредност која репрезентује све могуће вредности.

$$\frac{\begin{array}{c|c} \exists x\alpha v & \begin{array}{c} \alpha[v/x] \\ \vdots \\ \gamma \end{array} \\ \hline \gamma \end{array}}{(\exists x_E)}$$

Ако из $\alpha[v/x]$, докажемо формулу γ у којој се не појављује v , онда γ мора бити тачно без обзира на „вредност“ v . И овога пута, од суштинске важности је да се v не појављује слободно нигде ван одговарајућег поддоказа, па самим тим ни у γ .

Следеће две шеме илуструју коришћење правила $(\forall x_U)$ и $(\exists x_E)$.

$$\begin{array}{c|c} \vdots & v \vdots \\ j. & \end{array} \quad \text{Када у сваком кораку желимо да докажемо } \forall x\alpha:$$

$$\begin{array}{c|c} \vdots & \vdots \\ k & \alpha[v/x] \end{array} \quad \text{уводимо свежу променљиву } v \text{ мислећи на „нека је } v$$

$$k+1. \quad \forall x\alpha \quad (\forall x_U), j-k \quad \text{произвољан објект универзума“}.$$

Из свега осталог настојимо да докажемо $\alpha[v/x]$. Када успемо, изводимо жељени закључак.

$$\begin{array}{c|c} \vdots & \exists x\alpha \\ i & \end{array} \quad \text{Када у сваком кораку желимо да искористимо } \exists x\alpha:$$

$$\begin{array}{c|c} \vdots & \alpha[v/x] \\ j. & v \vdots \end{array} \quad \text{уводимо ознаку } v \text{ за објект који задовољава } \alpha$$

$$\begin{array}{c|c} \vdots & \gamma \\ k. & \end{array} \quad \text{Из } \alpha[v/x] \text{ и свега осталог настојимо да докажемо } \gamma$$

у коме се v не појављује слободно.

$k + 1.$ γ $(\exists x_E), i, j-k$ Када успемо, изводимо жељени закључак.

Пример 3: Докажимо $\forall x(M(x) \Rightarrow \exists y(D(y) \wedge V(x, y)))$, $M(Mile) \vdash \exists zV(Mile, z)$.

1. $\forall x(M(x) \Rightarrow \exists y(D(y) \wedge V(x, y)))$ претпоставка
2. $M(Mile)$ претпоставка
3. $M(Mile) \Rightarrow \exists y(D(y) \wedge V(Mile, y))$ $\forall x_E, 1$
4. $\exists y(D(y) \wedge V(Mile, y))$ $\Rightarrow_E, 2, 3$
5. $\left| \begin{array}{l} v \ D(v) \wedge V(Mile, v) \end{array} \right.$ додатна претпоставка
6. $\left| \begin{array}{l} V(Mile, v) \end{array} \right.$ $\wedge_E^D, 5$
7. $\left| \begin{array}{l} \exists zV(Mile, z) \end{array} \right.$ $\exists z_U, 6$
8. $\exists zV(Mile, z).$ $\exists y_E, 4, 5-7$

Пример 4: Докажимо $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$, $\forall P(x) \vdash \forall Q(x)$.

1. $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$, претпоставка
2. $\forall P(x)$ претпоставка
3. $\left| \begin{array}{l} vP(v) \Rightarrow Q(v) \end{array} \right.$ $\forall x_E, 1$
4. $\left| \begin{array}{l} P(v) \end{array} \right.$ $\forall x_E, 2$
5. $\left| \begin{array}{l} Q(v) \end{array} \right.$ $\Rightarrow_E, 3, 4$
6. $\forall Q(x)$ $\forall x_U, 3, 5$

Пример 5: Доказати $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$, $P(a) \vdash Q(a)$.

1. $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$ претпоставка
2. $P(a)$ претпоставка
3. $P(a) \Rightarrow Q(a)$ $\forall_E 1$
4. $Q(a)$ $\Rightarrow_E 2, 3.$

Пример 6: Доказати $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)), \forall x(Q(x) \Rightarrow R(x)) \vdash \forall x(P(x) \Rightarrow R(x))$.

- | | | |
|----|------------------------------------|-----------------------|
| 1. | $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$ | претпоставка |
| 2. | $\forall x(Q(x) \Rightarrow R(x))$ | претпоставка |
| 3. | $ v P(v)$ | додатна претпоставка |
| 4. | $ P(v) \Rightarrow Q(v)$ | $\forall_E, 1$ |
| 5. | $ Q(v) \Rightarrow R(v)$ | $\forall_E, 2$ |
| 6. | $ Q(v)$ | $\Rightarrow_E 3, 4.$ |
| 7. | $ R(v)$ | $\Rightarrow_E 5, 6.$ |
| 8. | $ P(v) \Rightarrow R(v)$ | $\Rightarrow_U 3, 7$ |
| 9. | $\forall x(P(x) \Rightarrow R(x))$ | $\forall x_U 8.$ |

2.3 Природна дедукција за исказну логику¹²

Правила извођења система природне дедукције (за обе логике) дата су у табели 1. За сваки логички везник постоје правила која га уводе (правила U-типа) и правила која га елиминишу (правила E-типа) правило *efg* (*Ex falso quodlibet*¹³) је једино правило које не уводи нити елиминише неки логички везник.

У систему природне дедукције за класичну логику постоје постоји и једна аксиоматска схема: $A \vee \neg A$ (*tertium non datur*¹⁴). У систему природне дедукције за интуитистичку логику нема аксиома. Оваква разлика између ова два система је природна и добро осликава разлике између класичне и интуитистичке логике.

Током извођења доказа у систему природне дедукције могу се користити (недоказане) претпоставке, али оне морају бити елиминисане („ослобођене“) пре краја извођења. У запису правила, $[F]$ означава да се неколико (можда и нула) појављивања претпоставке F ослобађа, брише (као недоказане, нерасположиве претпоставке) непосредно након примене правила. При томе, може остати и неколико неослобођених појављивања претпоставке F . Претпоставкама су придружене ознаке (обично природни бројеви), које

¹²Јаничић – mlr.pdf str 64

¹³Латински, „из лажи све следи“

¹⁴Латински, „треће не постоји“

се записују и у оквиру записа примењеног правила (како би се знало која претпоставка је ослобођена у ком кораку).

$$\begin{array}{c}
\frac{[A]^u}{\vdots} \frac{\perp}{\neg A} \neg_U, u \\
\frac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge_U \\
\frac{A}{A \vee B} \vee_U^L \quad \frac{B}{A \vee B} \vee_U^D \\
\frac{[A]^u}{\vdots} \frac{B}{A \Rightarrow B} \Rightarrow_U, u \\
\frac{A \quad \neg A}{\perp} \neg_E \\
\frac{A \wedge B}{A} \wedge_E^L \quad \frac{A \wedge B}{B} \wedge_E^D \\
\frac{A \vee B \quad [A]^u \quad [B]^v}{C} \vee_E, u, v \\
\frac{A \quad A \Rightarrow B}{B} \Rightarrow_E \\
\frac{\perp}{D} e f g
\end{array}$$

Табела 1: Правила извођења система природне дедукције

У систему природне дедукције доказ (дедукција, извод) је стабло чијем је сваком чвору придружена формула и које задовољава следеће услове:

- Стабло са једним чвором којем је придружена аксиома је доказ; у том доказу нема неослобођених претпоставки;
- Стабло са једним чвором којем је придружена формула A (која није инстанца аксиомске схема) је доказ; у том доказу неослобођена претпоставка је формула A ;
- Ако су $D_1, \dots, D_n$ докази са коренима којима су придружене редом формуле $A_1, \dots, A_n$ и ако је формула A директна последица формула $A_1, \dots, A_n$ на основу неког од правила извођења $\neg_E, \wedge_U, \Rightarrow_E$ (тада је $n = 2$) или $\wedge_E, \vee_U, efg$ (тада је $n = 1$), онда је доказ и стабло у чијем је корену A , а чији су директни потомци корени стабла $D_1, \dots, D_n$; у том доказу неослобођене претпоставке су све претпоставке неослобођене у доказима $D_1, \dots, D_n$;
- Ако је D доказ са кореном којем је придружена формула $\perp$ и који садржи нула или више неослобођених претпоставки A , онда је доказ и стабло (добито применом правила $\neg I$)

са кореном $\neg A$ чији је директни потомак корен стабла D ; у том доказу неослобођене претпоставке су све неослобођене претпоставке у доказу D , осим неколико (не нужно свих) неослобођених претпоставки A (које овим кораком постају ослобођене);

Формула A је теорема природне дедукције ако постоји доказ у чијем је корену A и који нема неослобођених претпоставки и тада пишемо $\vdash A$ и кажемо да је формула A доказива у систему природне дедукције. Ако постоји доказ, у чијем корену је A и који има неослобођене претпоставке које припадају неком низу Γ , онда кажемо да је формула A *дедуктивна* последица низа Γ и тада пишемо $\Gamma \vdash A$. Елементе низа Γ тада зовемо и *премисама* или *хипотезама* доказа. Ако је низ Γ једнак $B_1, \dots, B_n$ онда пишемо $B_1, \dots, B_n \vdash A$.

За релацију $\vdash$ у систему природне дедукције важе својства:

- a) Ако је $\Gamma \vdash A$ и $\Gamma \subseteq \Delta$, онда је и $\Delta \vdash A$.
- b) Важи $\Gamma \vdash A$ ако и само ако постоји коначан подскуп Δ скупа Γ такав да је $\Delta \vdash A$.
- c) Ако важи $\Gamma \vdash A$ и ако за сваку формулу B из Γ важи $\Delta \vdash B$, онда важи $\Delta \vdash A$.

Доказ у систему природне дедукције се обично приказује у виду стабла чији су листови на врху, а корен на дну. То стабло се приказује поједностављено, стилизовано (слика 1).

$$\begin{array}{c} \vdots \quad \vdots \\ \hline A \quad B \\ \hline C \\ \hline D \\ \vdots \end{array}$$

Слика 1: део доказа и његов поједностављени приказ

Пример 1: Формула $(A \vee B) \Rightarrow (B \vee A)$ је теорема система природне дедукције (и за интуитистичку и за класичну логику) тј. важи $\vdash (A \vee B) \Rightarrow (B \vee A)$:

$$\frac{\frac{[A \vee B]^1 \quad \frac{[A]^2}{B \vee A} \vee_U \quad \frac{[B]^3}{B \vee A} \vee_U}{B \vee A} \vee_E, 2, 3}{(A \vee B) \Rightarrow (B \vee A) \Rightarrow_U, 1}$$

Пример 2: У систему природне дедукције (и за интуитистичку и за класичну логику) важи $A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \vdash A \Rightarrow C$:

$$\frac{\frac{[A]^1 \quad A \Rightarrow B}{B} \Rightarrow_E \quad B \Rightarrow C}{\frac{C}{A \Rightarrow C} \Rightarrow_U, 1} \Rightarrow_E$$

Пример 3: Доказати да је формула $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ теорема система природне дедукције за класичну логику.

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{[\neg B]^1 \quad \frac{[A]^2 \quad [A \Rightarrow B]^3}{B} \Rightarrow_E}{\perp} \neg_E}{\neg A} \neg_U, 2 \\
 \frac{\neg B \Rightarrow \neg A}{(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)} \Rightarrow_U, 1
 \end{array}$$

Пример 4: Доказати да је формула $\neg(A \wedge B) \Rightarrow (\neg A \vee \neg B)$ теорема система природне дедукције за класичну логику.

$$\begin{array}{c}
 \frac{A \vee \neg A \quad \frac{[\neg(A \wedge B)]^4 \quad \frac{[A]^2 \quad [B]^1}{A \wedge B} \wedge_U}{\perp} \neg_E}{\neg B} \neg_U, 1 \\
 \frac{\neg A \vee \neg B}{\neg(A \wedge B) \Rightarrow (\neg A \vee \neg B)} \vee_U, 2, 3
 \end{array}$$

Пример 5: Доказати да је формула $(A \vee (B \wedge C)) \Rightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$ теорема система природне дедукције за класичну логику.

$$\begin{array}{c}
 \frac{[A \vee (B \wedge C)]^1 \quad \frac{[A]^2}{A \vee B} \vee_U \quad \frac{[A]^2}{A \vee C} \vee_U}{(A \vee B) \wedge (A \vee C)} \wedge_U \quad \frac{[B \wedge C]^3}{B} \wedge_E^L \quad \frac{[B \wedge C]^3}{C} \wedge_E^D}{(A \vee B) \wedge (A \vee C)} \wedge_U \\
 \frac{(A \vee B) \wedge (A \vee C)}{(A \vee (B \wedge C)) \Rightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))} \Rightarrow_U, 1
 \end{array}$$

2.4 Природна дедукција за предикатску логику ¹⁵

Систем природне дедукције за логику првог реда аналоган је систему природне дедукције за исказну логику.

Постоји систем природне дедукције за класичну логику (који зовемо систем NK) и систем природне дедукције за интуиционистичку логику (који зовемо систем NJ). Као и у исказном случају, систем природне дедукције за класичну логику има једну аксиомску схему - $A \vee \neg A$ (*tertium non datur*, *искључење трећег*), док систем за интуиционистичку логику нема аксиома. И за класичну и за интуиционистичку логику, систем природне дедукције за логику првог реда има правила извођења аналогна правилима извођења за исказну логику, као и правила за увођење и елиминисање квантификатора приказана у табели 2:

$$\begin{array}{c}
 \frac{A[x \rightarrow y]}{(\forall x)A} \forall x_U \\
 \text{уз додатни услов}
 \end{array}
 \qquad
 \frac{(\forall x)A}{A[x \rightarrow t]} \forall_E$$

$$\frac{A[x \rightarrow t]}{(\exists x)A} \exists_U
 \qquad
 \frac{
 \begin{array}{c}
 (\exists x)A \quad [A[x \rightarrow y]]^u \\
 \vdots \\
 B
 \end{array}
 }{B} \exists x_U, u$$

уз додатни услов

Табела 2: Правила за увођење и елиминисање квантификатора

У правилима извођења приказаним у табели 2 симбол t означава произвољни терм. Симбол y означава тзв. *eigenvariable* (праву променљиву) – симбол променљиве за коју важи тзв. *eigenvariable* услов. Овај услов за правило $\forall x_U$ је да важи да је $x = y$ или да променљива y није слободна у A , као и да важи да y није слободна у B нити у било којој неослобођеној претпоставци у извођењу формуле B осим, евентуално, у формули $A[x \rightarrow y]$.

Појмови доказа и теореме, дефинишу се аналогно исказном случају.

Пример 1: Формула $(\exists x) (\forall y)p(x, y) \Rightarrow (\forall y) (\exists x)p(x, y)$ је теорема система природне дедукције (и за класичну и за интуиционистичку логику). Један неформални доказ ове формуле је:

1. Претпоставимо да важи $(\exists x) (\forall y)p(x, y)$.

¹⁵ Јаничић- mlr.pdf стр. 153

2. Претпоставимо да важи $(\forall y)p(x', y)$ за неко x' .
3. Нека је y' произвољни објекат. Тада важи $p(x', y')$.
4. Из $p(x', y')$ следи да важи $(\exists x) p(x', y')$.
5. Објекат је произвољан, па важи $(\forall y)(\exists x) p(x, y)$.
6. Из $(\exists x)(\forall y)p(x, y)$ и из тога што претпоставка $(\forall y)p(x', y)$ има за последицу $(\forall y)(\exists x) p(x, y)$, следи $(\forall y)(\exists x) p(x, y)$.
7. Из претпоставке $(\exists x)(\forall y)p(x, y)$ следи $(\forall y)(\exists x) p(x, y)$, па важи $(\exists x)(\forall y)p(x, y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)p(x, y)$.

Овај доказ може се прецизно описати у виду доказа у систему природне дедукције (и за класичну и за интуиционистичку логику):

$$\frac{\frac{[(\forall y)p(x', y)]^1}{p(x', y')} \forall_E \quad \frac{p(x', y')}{(\exists x)p(x', y')} \exists_U}{(\forall y)(\exists x)p(x, y)} \forall_U \quad \frac{[(\exists x)(\forall y)p(x, y)]^2 \quad (\forall y)(\exists x)p(x, y)}{(\exists x)(\forall y)p(x, y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)p(x, y)} \exists x_E, 1 \Rightarrow_U, 2$$

Пример 2: Формула $\neg(\exists x)p(x) \Rightarrow (\forall y)\neg p(y)$ је теорема система природне дедукције (и за класичну и за интуиционистичку логику):

$$\frac{\frac{[p(z)]^1}{(\exists x)p(x)} \exists_U \quad [\neg(\exists x)p(x)]^2}{\perp} \neg_E \quad \frac{\perp}{\neg p(z)} \neg_U, 1 \quad \frac{\neg p(z)}{(\forall y)\neg p(y)} \forall x_U \quad \frac{(\forall y)\neg p(y)}{\neg(\exists x)p(x) \Rightarrow (\forall y)\neg p(y)} \Rightarrow_U, 2$$

Пример 3: У систему природне дедукције важи $\forall xA, \forall x(A \Rightarrow B) \vdash \forall xB$:

$$\frac{\frac{\forall xA}{A} \forall_E \quad \frac{\forall x(A \Rightarrow B)}{A \Rightarrow B} \forall_E}{\frac{B}{\forall xB} \forall x_U} \Rightarrow_E$$

2.5 Неки математички докази и природна дедукција

У наставку анализираћемо неколико математичких доказа. Примери које наводимо не само да илуструју значај уведеног списка правила за доказивање секвената, већ имају за циљ и да расветле уобичајене математичке доказе.

Пример 1: Нека је f унарни операцијски симбол и нека је:

- Inj_f формула $\forall x \forall y (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$ (која значи f је 1-1 функција);
- Sur_f формула $\forall y \exists x (f(x) = y)$ (која значи f је на функција);
- Bij_f формула $Inj_f \wedge Sur_f$ (која значи f је бијекција);
- Inv_f формула $\forall x (f(f(x)) = x)$ (која значи f је инволуција).

Докажимо $Inv_f \vdash Bij_f$.

1. $\forall x (f(f(x)) = x)$ претпоставка
2. $f(f(y)) = y$ $(\forall_E) [x / f(y)], 1$
3. $\exists x (f(x) = y)$ $(\exists_U), 2$
4. $\exists \forall y \exists x (f(x) = y)$ $(\forall_U), 3 \quad (\equiv Sur_f)$
5. $f(x) = f(y)$ додатна претпоставка
6. $f(f(x)) = f(f(y))$ $(=_C), 5$
7. $f(f(x)) = x$ $(\forall_E), 1$
8. $f(f(y)) = y$ $(\forall_E), 1$
9. $x = y$ $2 \times (=_E), 6, 7, 8$
10. $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ $(\Rightarrow_U), 5-9$
11. $\forall x \forall y (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$ $2 \times (\forall_U) \quad (\equiv Inj_f)$
12. $Sur_f \wedge Inj_f$ $(\wedge_U), 4, 11$

Дато извођење одговара доказу да инволуција мора бити бијекција.

Пример 2: У овом примеру се користи неколико, интуитивно јасних, изведених правила који се односе на једнакост.

$$\frac{}{t=t} (=R) \quad \frac{t_1=t_2}{t_2=t_1} (=S) \quad \frac{t_1=t_2 \quad t_2=t_3}{t_1=t_3} (=T)$$

$$\frac{t_1=t_2}{t(x/t_1)=t(x/t_2)} (=_{sup}).$$

Претпоставимо да језик садржи један бинарни операцијски знак, који ћемо означавати двома вертикалним цртама $| \quad |$ (између којих долазе аргументи), и два тернарна знака које ћемо означавати са $\angle$ и Δ (и који очекују три елемента са десне стране). Нека је T_{cong} теорија чије су аксиоме универзална затворења следећих формула:

$$\gamma 1 \quad |xy| = |yx|,$$

$$\gamma 2 \quad \angle xyz = \angle zyx,$$

$$\gamma 3 \quad \Delta xyz = \Delta uvw \Rightarrow |xy| = |uv| \wedge |yz| = |vw| \wedge |zx| = |wu|,$$

$$\gamma 4 \quad \Delta xyz = \Delta uvw \Rightarrow \angle xyz = \angle uvw \wedge \angle yzx = \angle vwu \wedge \angle zxy = \angle wuv$$

$$\gamma 5 \quad |xy| = |uv| \wedge \angle xyz = \angle uvw \wedge |yz| = |vw| \Rightarrow \Delta xyz = \Delta uvw.$$

Доказаћемо

$$T_{cong} \vdash |ab| = |ac| \Rightarrow \angle abc = \angle acb.$$

Дакле, скуп претпоставки Γ садржи формуле $\gamma 1, \gamma 2, \gamma 3, \gamma 4, \gamma 5$ и $|ab| = |ac|$ (у наставку подразумевамо да испред сваке формуле стоји $\Gamma \vdash$).

1. $|ab| = |ac|$ претпоставка
2. $|ac| = |ab|$ из 1 према $(=_S)$
3. $|ab| = |ba|$ активирањем $\gamma 1$ правилом $(\forall_E)$ при $[x/a], [y/b]$
4. $|ba| = |ab|$ из 1 према $(=_S)$
5. $|ba| = |ac|$ из 4, 1 према $(=_T)$
6. $|ac| = |ca|$ активирањем $\gamma 1$ правилом $(\forall_E)$ при $[x/a], [y/c]$
7. $|ba| = |ca|$ из 5, 6 према $(=_T)$
8. $\angle bac = \angle cab$ активирањем $\gamma 2$ правилом $(\forall_E)$ при $[x/b], [y/a], [w/c]$,
9. $|ba| = |ca| \wedge \angle bac = \angle cab \wedge |ac| = |ab|$ из 7, 8, 2 применом $(\wedge_U)$ два пута

$$10. |ba| = |ca| \wedge \angle bac = cab \wedge |ac| \angle = |ab| \Rightarrow \Delta bac = \Delta cab$$

активирањем $\gamma 5$ правилом ($\forall_E$) при $[x/b], [y/a], [z/c], [u/c], [v/a], [z/b]$

$$11. \Delta bac = \Delta cab \quad \text{из 4, 1 према } (\Rightarrow_E)$$

$$12. \Delta cab = \Delta bac \quad \text{из 11 према } (=S)$$

$$13. \Delta cab = \Delta bac \Rightarrow \angle cab = \angle bac \wedge \angle abc = \angle acb \wedge \angle bca = \angle cba,$$

активирањем $\gamma 4$ правилом ($\forall_E$) при $[x/c], [y/a], [z/b], [u/b], [v/a], [w/c]$

$$14. \angle cab = \angle bac \wedge \angle abc = \angle acb \wedge \angle bca = \angle cba \quad \text{из 12, 13 према } (\Rightarrow_E)$$

$$15. \angle abc = \angle acb \quad \text{из 14 према } (\wedge_E^L) \text{ и } (\wedge_E^D).$$

Пример 3: Значајну врсту теорија представљају оне којима се уводе важне алгебарске структуре, на пример групе. Реч је о теоријама чије су аксиоме универзална затворења атомичних формула облика $t_1 = t_2$, где су t_1 и t_2 неки изрази одговарајућег језика. Овакве реченице се називају *алгебарским законима*, па се сходно томе теорије које садрже само алгебарске законе називају *алгебарским теоријама*. Алгебарски закони често се наводе без навођења универзалних квантификатора (који се имплицитно подразумевају). Ослањајући се на запажања која се намећу у претходном примеру, наслућујемо да се значајно може поједноставити доказивање да је неки алгебарски закон последица дате алгебарске теорије. Тако, доказ да је неки алгебарски закон последица алгебарске теорије Γ спроводимо користећи правила тзв. једнакосне логике:

$$\frac{}{t=t} (=R) \quad \frac{t_1=t_2}{t_2=t_1} (=S) \quad \frac{t_1=t_2 \quad t_2=t_3}{t_1=t_3} (=T) \quad \frac{t_1=t_2}{t(x/t_1) = t(x/t_2)} (=sup).$$

Кажемо да је алгебарски израз $u = v$ последица алгебарске теорије Γ , у ознаци $\Gamma \vdash_j u = v$, ако постоји коначан низ једнакости $u_1 = v_1, \dots, u_n = v_n, u = v$ (који се завршава једнакошћу $u = v$) такав да свака једнакост у низу или припада Γ или се може добити применом неког од правила једнакосне логике, директно (према правилу $(=R)$) или на једнакости које јој претходе у низу. Може се доказати и следеће изведено правило¹⁶:

$$\frac{u_1=v_1 \quad u_2=v_2 \quad \dots \quad u_n=v_n}{F(u_1, \dots, u_n) = F(v_1, \dots, v_n)} (=DD),$$

¹⁶Индекс DD можемо сматрати као скраћеницу за „добра дефинисаност“

где је F неки n -арни операцијски знак.

Докажимо да је

$$x * (y * z) = (x * y) * z, x * e = x, x * x^{-1} = e \vdash_J (x * y) * y^{-1} = x.$$

1. $x * (y * z) = (x * y) * z$ претпоставка
2. $(x * y) * z = x * (y * z)$ из 1 према $(=_S)$
3. $(x * y) * y^{-1} = x * (y * y^{-1})$ из 1 према $(=_{sup}), [z/y^{-1}]$
4. $x * x^{-1} = e$ претпоставка
5. $y * y^{-1} = e$ из 4 према $(=_{sup}), [x/y]$
6. $x = x$ претпоставка
7. $x * (y * y^{-1}) = x * e$ из 6, 5 према $(=_{DD})$
8. $x * e = x$ претпоставка
9. $x * (y * y^{-1}) = x$ из 7, 8 према $(=_T)$

Све наведене кораке подразумевамо (укључујући и одговарајућа објашњења) и када наводимо исти доказ у најсажетијем облику:

$$(x * y) * y^{-1} = x * (y * y^{-1}) = x * e = x.$$

3. Природна дедукција у настави¹⁷

Укоренењен и најчешћи приступ учењу логике је модел-теоријски: логички везници се виде као Булове функције (задате истинитосним таблицама), које се даље генерализују на квантификаторе. $\forall$ је могуће бесконачна конјункција, $\exists$ је могуће бесконачна дискјункција. Настава логике овим приступом је традиционална. Међутим, Булов приступ није тако јасно у вези са уобичајеним размишљањем (расуђивањем). Случај импликације је посебно под знаком питања. У свакодневном животу, као и у уџбеницима математике, нико не доказује импликацију $A \Rightarrow B$ израчунавањем табеле истине: човек подразумева A а онда доказује B према овој хипотези. Чак се може тврдити да је суштина логике у доказима, пре него што је о истини.

Докази могу бити формализовани коришћењем синтаксних објеката описаних дедуктивним системима. Овакви системи су уведени у прошлом веку. У даљем тексту описан је експеримент о употреби нарочитог система дедукције, Gentzen– Pravitz дедукција (у даљем тексту ГПНД). Основна теза овог рада јесте да упознавање са природном дедукцијом има јак педагошки значај. Прво, пружа много боље објашњење значења (па чак и суштину) логичких везника и квантификатора. Такође пружа добру помоћ код писања ригорозних и тачних доказа.

Ову тезу потврђује искуство стечено предавањем природне дедукције на уводном курсу логике студентима прве године основних студија, у периоду од 2005. до 2009. године.

Овај курс је одржан пред публиком од 150 до 200 студената годишње, са следећим ритмом: једно предавање (1h 30min) и један час вежбања (1h 30min) недељно, током 11 недеља. Око 3 недеље су потребне за обраду стабла-извођења, 3 за прве исказне везнике, затим још 3 недеље за квантификаторе и негацију, следеће 3 су посвећене скуповно-теоријским појмовима и последње 2 недеље за индукцију.

Курс се сасвим добро показао код студената, јер је већина материјала била за њих нова. Међутим, главни циљ курса прве године у увођењу формалних доказа је да се побољша способност студената у резонувању изван формалног оквира ГПНД, а то је откривање погрешне дедукције и убедљивог доказа у природном језику. Студенти су од апроксимативног резонувања у природном језику доведени до формалних доказа, а од њих се очекивало да супротно ураде сами. Након четири године закључак је да се делимично успело. Неки студенти су и даље били хендикепирани када су упитани да докажу изјаве на природном језику, док су били у стању да изграде стабло доказа у ГПНД

¹⁷Четворогодишњи експеримент у настави расуђивања студената основних студија, у распону од слабих до даровитих, користећи Gentzen-Pravitz стил природне дедукције

стилу. Ово запажање довело је до закључка да је потребно више времена да се пренесу стечена знања у ГПНД-у назад у слободно размишљање.

3.1 Програм рада

Курс је конципиран тако да прикаже логичко резонување студентима без претходног познавања логике, а да би их припремили за даље курсеве. Испоставља се да многи студенти нису вешти у доказивању, па чак и схватању значења импликације и квантификатора.

Циљ курса је да се развије интуиција у вези са логичким везницима и квантификаторима ослањајући се на : 1) анализу структуре формуле коју треба доказати, 2) експлицитни третман сваког везника и квантификатора, 3) дрвета извођења.

На почетку, интуитивно и грубо су представљени везници. Нова идеја са којом су студенти били упознати јесте појам стабло-извођења. Почето је са правилима $\wedge_I, \wedge_E^L, \wedge_E^D, \Rightarrow, \vee_U^L, \vee_U^D$. Поред њих, ad-hoc су уведена и правила TRI (транзитивност импликације) и DLI (дисјункција с леве стране импликације)

$$\frac{A \Rightarrow B \quad B \Rightarrow C}{A \Rightarrow C} TRI \quad \frac{A \Rightarrow B \quad B \Rightarrow C}{(A \vee B) \Rightarrow C} DLI$$

Основни циљеви су били да се испредаје нови приступ, где су кључне идеје:

- Појам закључивања по правилу, са премисама, закључком и оправдањем (име се користи као ознака за правило закључивања).
- Провера да је правило закључивања правилно примењено је једноставан механички задатак.
- Правило је заправо схема (исказне променљиве могу се заменити са било којим формулом).
- Стабло-извођења се односи на хипотезе (на врху) до једног закључка (на дну).
- Стабло-извођења је изграђено од правила закључивања.

Даље, курс прати Генценов приступ, где се свако правило бави само једним везником. Почиње се са $\wedge$, који има најједноставнија правила и илуструју их доказ за $B \wedge A$, претпостављајући $A \wedge B$.

Затим се прелази на $\Rightarrow$. Везник ($\Rightarrow$) је најважнији из неколико разлога:

- Свака теорема има најмање једну појаву ($\Rightarrow$) осим TND (принцип искључења трећег); теорема је закључак стабла-извођења где се избацују све хипотезе.

- Овај везник се често погрешно разуме од стране студената, и
- То је основно место за дискусију о управљању хипотеза.

Без обзира на то, $\Rightarrow_E$ је добро познат (друго име за *modus ponens*), $\Rightarrow_U$ је врло природан, јер се држи уобичајене праксе за доказивање $A \Rightarrow B$: претпоставимо A , онда доказујемо B .

Занимљива вежбања, од лаког до тешког, могу се предложити користећи само $\wedge$ и $\Rightarrow$, или чак само $\Rightarrow$. Ево неких примера, треба имати у виду да се $\Rightarrow$ односи на десно:

- $A \wedge B \Rightarrow B \wedge A$ (веома лако);
- $[(A \wedge B) \Rightarrow C] \Rightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow C))$, и обратно: интуитивно, постоје два једнака начина да се изрази еквивалент идеје “и ако”;
- $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$;
- $(A \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$.

У последњем, $P \Leftrightarrow Q$ је скраћеница за $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$. То је у основи суштина дијагоналних аргумената: замена B са апсурдним $\perp$ и дефиниција $\neg$ (касније дефиниција), значи да A не може бити еквивалентан $\neg$. Овде је аргумент развијен конструктивно, без анализе случаја $A \vee \neg A$.

Овај део завршава се дисјункцијом. Два уводна правила су очигледна. Правила елиминације одговарају анализи случаја и захтевају управљање хипотезом-отуда још једна прилика да се разговара о оквиру. Треба имати на уму да су студенти у искушењу да измисле $\vee_E$ правило са два закључка, нешто као

$$\frac{A \vee B}{A \quad B} \text{погрешно } \vee_E.$$

Овде се мора објаснити да је стабло-изођења са 2 (а уопште, много) закључка прилично компликовано. У извесном смислу са тим закључцима треба поступити одвојено. Међутим, одвојене дедукције почев од A и B морају на крају крајева да буду синхронизоване, када је постигнут исти закључак.

Пре објашњавања правила за квантификаторе, велики број појмова је потребан за оно што се обично назива језик првог реда. Међутим, савршено формално и ригорозно представљање би било контрапродуктивно на овом нивоу. Студенти имају оперативно знање о условима направљеним од функција симбола, константи и променљивих. Овде се инсистира само на осетљивим концептима: слободне и везане променљиве, њихов оквир (на нивоу синтаксе формуле), супституција слободних променљивих. Формуле које се разликују само по имену слободних варијабли се сматрају идентичним. Правило за $\forall$

елиминацију је очигледно. Бирамо да обезбедимо замену у називу: $\forall x_E$ значи да ће (слободна појава) променљива x бити замењена са t . Овај ниво прецизности је користан (чак и потребан) за студенте.

Правило $\forall_U$ отвара осетљиво питање свежих променљивих. У премиси $P(x_0)$, x_0 стоји за произвољне променљиве. Шта то значи? Да ли је лако објаснити да “произвољно” значи “не подлеже хипотези” или, тачније, “не подлеже доступној хипотези”, дакле “није слободно у било којој од расположивих хипотеза”. Могло би се рећи и да премиса $P(x_0)$ не сме бити у оквиру (на нивоу доказа) једне хипотезе на x_0 . Савладавање решавања хипотезе је онда кључно у овој фази. Захтева се да студенти пишу експлицитно ову страну услова као $x_0 \notin FV(h_1, \dots, h_n)$ и да га провере током процеса доказа.

Објашњења о $\exists x_E$ су на исти начин. Напомињемо да се $\exists$ понаша као бесконачна верзија $\forall$. Стога не чуди да је структура $\exists x_E$ слична $\forall_E$. Али слично такође и студенти имају тенденцију да формализују “ми знамо да $\exists x P(x)$; где је x_0 очигледан тако да је $P(x_0)$ ” од

$$\frac{\exists x P(x)}{P(x_0)} \text{погрешно-} \exists_E$$

Такво правило доводи брзо до нежељених последица, као што је

$$\frac{\frac{\exists x P(x)}{P(x_0)}}{\forall x P(x)} \text{погрешно} - \exists x_E$$

Стога је $(\exists x P(x)) \Rightarrow (\forall x P(x))$. У овој фази студенти су у стању да пронађу стабло-доказа за формуле, као што је $(\exists x \forall y R(x, y)) \Rightarrow (\forall y \exists x R(x, y))$ и да постану свесни да обрнуто није теорема.

На крају, уводи се апсурдна претпоставка ($\perp$). Треба напоменути да се $\perp$ не може доказати из празног скупа претпоставки. Негација је дефинисана са $\neg A \stackrel{\text{def}}{=} A \Rightarrow \perp$.

Занимљиво је напоменути да $\perp$ и $\neg$ могу бити уведене веома касно, после првог реда појмова. Многа интересантна вежбања могу да се ураде без $\neg$. Велики део логичког материјала може да се развија без позивања на нетачно.

Ипак се у овој фази разговара о $\neg$ у циљу увођења класичног расуђивања, користећи било принцип искључења средине (РЕМ) или $\neg\neg_E$.

Међу вежбањима која могу бити предложена у овој фази су неке загонетке као

- $\neg\neg A \wedge \neg\neg B \Leftrightarrow \neg\neg(A \wedge B)$
- $\neg\neg(\neg\neg A \vee \neg\neg B \Leftrightarrow \neg\neg(A \vee B))$.

Ови примери могу да се докажу са $\neg\neg_E$, али проналажење решења без овог правила и без (РЕМ) захтева добро разумевање импликација.

Веома корисно средство за омогућавање доказа изводљивим је да се користи дефиниција. На пример под-формула као што је $\forall x P(x) \Rightarrow Q(x, y)$ може се скратити као $R(y)$ под условом да дефинишемо $R(y) \stackrel{\text{def}}{=} \forall x P(x) \Rightarrow Q(x, y)$. Слободне варијабле морају да се узму у обзир. Технички говорећи, у теорији доказа, такви кораци се не сматрају дедукцијом, већ следе из правила конверзије, што значи да је стабло-извођења које има A као свој закључак је стабло-извођења које има B у свом закључку када је $A \stackrel{\text{def}}{=} B$ или када $B \stackrel{\text{def}}{=} A$.

3.2 Педагошки проблеми и процена

– Техничке предности природне дедукције у подучавању логике

Већ је поменуто да се стаблом-извођења природне дедукције боље изражава уобичајено размишљање него истинитосним таблицама. Ово је посебно јасно на импликацијама. Чињеница да су правила за $\Rightarrow$ и $\wedge$ потпуно другачија је случајна, јер помаже почетницима да се не збуне између ова два везника. Веома интересантна ствар, из педагошке перспективе, јесте да стабло-извођења омогућава да се истакну неке уобичајене грешке. Прилично често се дешава да студенти имају нејасне идеје и даље верујући да је њихов аргумент добар. Много је теже да им се укаже на грешку на неформалним или полу-формалним писањима него на стаблу-извођења. Ако је погрешно примењено правило, може се рећи “ово није у складу са законом, на који смо се позвали” а може се додати “ако је ваше правило у праву, добили би нежељену последицу”. Ово делује прилично убедљиво код студената. Ево неких типичних грешака које могу бити истакнуте у ГПНД стилу доказа:

- Неправилна употреба правила дедукције (посебно $\forall_E$)
- Нарушавање „домета“ једне хипотезе
- Занемаривање додатних услова у правилима $\exists x_E$ или $\forall x_U$ (заобилази се погодним избором квантификоване променљиве $\exists x$, односно $\forall x$, уместо избором свеже променљиве).
- коришћење импликације, или правила, без доказивања њених премиса.

Такве грешке одговарају типичном погрешном резонувању записаном неформално.

– Педагошка питања и замке

Један број педагошких питања треба размотрити како би се ГПНД учинио ефикасним алатом за наставу.

Већ је поменуто да стабло-извођења омогућава да се истакну грешке са прецизношћу. У том смислу, инсистира се да су оправдања (ознаке које се користе у корацима дедукције) обавезна: често студенти пате од недостатка прецизних идеја о томе шта они заправо раде, или од барем слабе способности да изразе своје аргументе. У том духу тежи се да се захтева више од онога што се обично даје у уџбеницима.

4.Закључак

На крају осврт: за шта се користи природна дедукција а за шта не? Природна дедукција користи да се докаже да је неко расуђивање исправно. Ако кажемо: “Лети је топло, и сада је лето; дакле сада је топло” и рачунањем дођемо до закључка да је размишљање тачно, то је пример употребе природне дедукције. Природна дедукција са друге стране није погодна за доказивање неважења неке претпоставке, нити служи да се обезбеди добар одговор на питање “Шта би било кад би...”. Када доказујемо исправност $A \vdash B$, мислимо о стварима које ће се десити ако се A већ догодило, и ако откријемо да је једна од тих ствари B , тада смо завршили. Природна дедукција је погодна за употребу јер су поступци који се у њој користе блиски онима који се користе у процесу размишљања. Можда би могло да се покуша са увођењем природне дедукције у програм логике за средње школе, јер пружа боље објашњење значења логичких везника и квантификатора а и да би ученици добили прилику да науче да доводе у везу размишљање и формално доказивање. Ако би изразили секвенте речима, свако би био устању да објасни употребу правила извођења, без знања њихових имена или постајања.

5. Литература

1. **Небојша Икодиновић**: Увод у математичку логику: Булове алгебре, исказна логика, логика првог реда - скрипта, Београд, 2014.
<http://www.matf.bg.ac.rs/p/files/1419459076-43-Logika.pdf>
2. **Небојша Икодиновић**: Увод у математичку логику –скрипта, Београд, 2015.
http://www.matf.bg.ac.rs/p/files/1452696914-43-uml_new2.pdf
3. **Предраг Јаничић**: Математичка логика у рачунарству, четврто електронско издање, Београд 2008.
<http://poincare.matf.bg.ac.rs/~janicic//books/mlr.pdf>
4. **Daniel Clemente Laboreo**: Introduction to natural deduction, 2004.
<http://www.danielclemente.com/logica/dn.en.pdf>
5. **Edward N. Zalta**: The Development of Proof Theory, The Stanford Encyclopedia of Philosophy, 2014.
<http://plato.stanford.edu/archives/spr2014/entries/proof-theory-development/>
6. **Jean-François Monin, Cristian Ene, and Michaël Périn**: Gentzen-Prawitz Natural Deduction as a Teaching Tool, Université de Grenoble 1
http://www-verimag.imag.fr/~monin/Publis/Docs/gpnd_teach09.pdf