Математички факултет
Универзитет у Београду

Мастер рад

Антички геометријски проблеми очима алгебре

Студент: Лазар Станојковић 1034/2015
Ментор: проф. др Зоран Лучић

Београд,
2016.

Чланови комисије:
1. проф. др Милан Божић
2. проф. др Владимир Јанковић

Ствари су око мене дубоко садржајне.
Цвеће има значења и речи на рубу пута.
Воде шапћу у ноћи неисказане тајне,
И ветар на махове чудне маштања шапуће.

(*Продужени свет*, Тин Ујевић)

Садржај

Глава 1

Увод

Тема *„Антички геометријски проблеми очима алгебре”* односи се на древне проблеме који су задати Хеленима, а који су првенствено геометријске природе, доминантне гране тадашње математике.

Иако су представљали велики изазов за тадашње математичаре и све жељне знања, они ипак нису решени у потпуности. О каквој потпуности говоримо? Срж античких геометријских проблема јесу конструкције[1], што умногоме ограничава и скраћује дијапазон „инструмената” који би се користили. Тачније, једино су шестар и лењир била дозвољена средства, што почиње од Платонове *Академије*, и исто задржава до данас.

На самом почетку рада, као што се из тренутка садашњости враћамо у дубоку прошлост људске цивилизације и златног доба успона културе и математике Старих Грка, нисам могао а да се не зауставим на ренесансни период у коме Рафаело Санти, преко своје слике „Атинска школа” призива велике духове времена, са којима ћемо и провести ово поглавље. Њихове генијалне идеје нису прошле незапажено и сами заслужују велике почасти. Међутим, иако виспрене и ингениозне, оне нису подразумевале геометријску конструкцију, и због тога је питање решења остало отворено.

Следеће поглавље подразумева минимални апарат теорије полинома који би се тицао дате теме, и у складу са тиме дати су докази „важнијих” теорема[2], што би талентованом средњошколцу олакшало читање овог рада. На овом месту морам нагласити да је и читав рад један покушај да се најпре радозналости средњошколаца удовољи и пружи једно виђење споја геометрије и алгебре чиме се и тежи из једног у друго поглавље. Трудио сам се да кохезија алгебарских и геометријских тема буде што већа.

[1] геометријске конструкције!

[2] док су недоказана тврђења или предвиђена као део редовне наставе, или остављена читаоцу као изазов

У бити „бављења математиком” не треба да постоји недостатак културних[3] елемената, и због тога сам у већој мери истицао овај аспект.

Поглавље о раширењу поља носи исте назнаке опширности као и поглавље о полиномима. У њему је дата поступност у излагању, с обзиром да ова материја ипак припада *вишој математици.* Урађени примери су прилично једноставни, али напомињем опет, они су намењени додатној настави средњошколаца.

Поглавље о конструкцијама даје преглед основних геометријских конструкција, и полако уводи читаоца у свет (поље) конструктибилних бројева, који су заједно са теоремама рационалних бројева, алгебарских бројева и полинома, спона за коначни доказ проблема којима се бавимо.

Тачније, решење проблема настаје тек у XIX веку, када алгебра ступа на сцену, и доказује да геометријска конструкција античких геометријских проблема није могућа!

Међутим, многи[4] савременици нашег доба[5] покушавали су да докажу супротно, те постоји проглас француске Академије наука од 1775. године:

„Стално се говори о томе да је француска влада одредила велику награду ономе који реши једно од питања квадратуре круга, трисекције угла и удвајања коцке. Верујући у те лажне вести, маса људи лишена сваког математичког знања, одаје се таквим беспредметним пословима, запуштајући своје праве послове и своје породичне бриге. Њихова упорност прелази у лудило, које је утолико теже за лечење што су проналазачи, који немају појма о правом смислу проблема, и који су неспособни да разумеју ни о чему се ради, убеђени да их је Провиђење нарочито одредило да траже и нађу решење проблема и да они за своје успехе у томе имају да захвале једној врсти инспирације, која не наилази на праве научнике.” [1, стр. 368]

Истакао бих да је вероватно и питање конструкције најмањег угла чија је мера природан број јако привлачно ученицима.

Поглавље о правилним полигонима јесте други део овог рада. У њему се бавимо правилним полигонима који се могу конструисати и по-

[3]„Култура је спој филозофије, религије и уметности”, академик Владета Јеротић, 1924.-

[4]нематематичари или они којима је промакао овај доказ

[5]иако се у даљој будућности и личности из временског размака од пре 200 година од данас могу сматрати нашим савременицима

везујући и доводећи у везу претходно изведене чињенице доказујемо њихову (не)конструктибилност.

Што се тиче литературе, посебну помоћ су ми причинила дела професора са Математичког факултета у Београду, што је наведено на крају рада.

Слике су рађене у програмском пакету GCLC[6], проф. др Предрага Јаничића са Математичког факултета у Београду, који поред изведене конструкције, даје и једну врсту провере тачности геометријског решења.

Велику захвалност дугујем свом ментору за идеје и одговоре које је имао на моја питања, како у току курсева геометрије на основним студијама, тако и сада при изради самог рада.

[6]Geometry Constructions $\rightarrow$ LaTeX Converter

Глава 2

Опис античких проблема

Слика 2.1: „Атинска школа”, Рафаело Санти

Слика, „Атинска школа”, Рафаела Сантија, као део ренесансног[1] блага, завређује нашу пажњу. Она садржи кључне личности које ће дати одговоре на питања којима се бавимо. У централном делу се може уочити Платон[2], а могу се видети и Еуклид[3], Птолемај[4], Питагора[5], Архита[6],...

Платон је између осталог, познат и по *Академији* коју је основао у

[1]период од XIV до XVI века
[2]Платон, 427-347. г.п.н.е.
[3]Еуклид, 330-275. г.п.н.е.
[4]Клаудије Птолемај, 100-178. г.н.е.
[5]Питагора, 570-495. г.п.н.е.
[6]Архита, 428-347. г.п.н.е.

Атини. Као „храм мудрости” његова је жеља била да образује младе нараштаје. Платон сматра да је фундаментално проучавати математику, реторику, дијалектику, граматику и музику[7], и због тога се ове дисциплине намећу као основне, а то су и циљеви којима треба да тежи и сама *Академија*. Било је осетно и присуство Питагориног учења.

На самом улазу, према предању, натпис је упозоравао: „Нека не улази онај ко не зна геометрију”.

Овим Платон опомиње на круцијалност геометрије (а и саме математике) за живот човека.

Платон је као истински филозоф, човек који љуби мудрост, доста своје енергије усмеравао на математику, тако да ни проблеми којима се бавимо у овом раду нису могли да заобиђу његово присуство. Поред Платона, и претходно набројани математичари дају свој несвакидашњи допринос, у шта ћемо се уверити после излагања самих античких проблема.

У току историје математике, антички проблема су заузели централно место.

За већину постоји историјска прича која је иницирала њихово формулисање. Наравно, не може се са сигурношћу знати колико су дате приче истините, међутим, сама формулација је врло јасна и она гласи за сваки од наредних проблема:

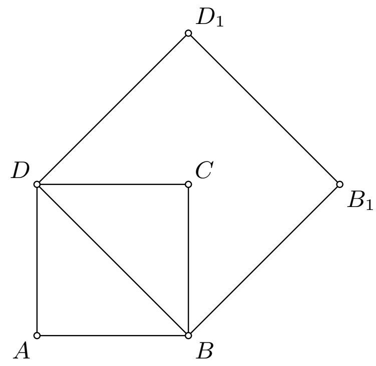
- **Трисекција угла:** Конструисати угао који ће бити једнак трећини датог угла.
- **Квадратура круга:** Конструисати квадрат чија ће површина бити једнака површини датог круга.
- **Удвостручење коцке:** Конструисати коцку дупло веће запремине од запремине дате коцке.

Покушаћемо да у што краћим цртама објаснимо шта су подразумевали дати проблеми и који су понуђени начини њихових решавања.

Удвостручење квадрата претходи проблему удвостручења коцке. Наиме, квадрат двоструко веће површине од датог квадрата је онај који има ивицу дужине дијагонале датог квадрата. Најстарији доказ налази се у Платоновом *Менону* у коме роб долази до решења уз Сократову[8] помоћ.

[7]Што је у држави боља музика, држава ће бити боља!

[8]Сократ, 470-399. г.п.н.е.



Слика 2.2: Удвостручење квадрата

У VI веку Еутокије из Аскалона износи садржај писма[9] које је Ератостен[10] упутио краљу Птолемају III Еуергету.

Кажу да је један од древних трагичких песника на сцену поставио Миноја који је дао да се за Глаука изгради гроб. Када је чуо да је гроб дуг сто стопа у сваком правцу, рекао је: „Начинили сте премало краљевско пребивалиште, оно мора бити двапут веће. Брзо удвостручите сваку страну гроба, не кварећи његов диван облик.“ Чини се да је он начинио грешку. Када се удвостручи ивица, површина се увећа четири, а запремина осам пута. Геометри су стали да изучавају како да удвоструче дато тело не мењајући му облик, а овај проблем назван је удвостручење коцке, будући да су почели са коцком у намери да је удвоструче.

Псеудо Ератостеново писмо које преноси Еутокије каже да су исти овакав проблем имали и становници острва Дела у Егејском мору, а који се тицао удвостручења олтара. Због тога овај проблем носи назив **Делски проблем**.

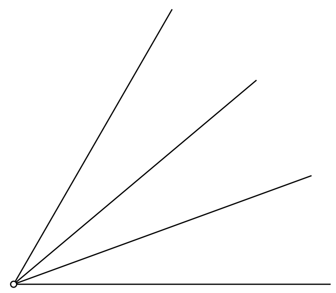
Што се тиче самог решавања овог проблема, Хипократ[11] са Хиоса користи две средње пропорционале како би решио проблем. Свакако незаобилазно, јесте Архитино ингениозно решење. Архита конструише пресек конуса, цилиндра и торуса, и помоћу њега удвостручава коцку. Иначе, овај геније, као најобдаренији међу Питагорејцима, био је при-

[9]верује се да писмо није било аутентично
[10]Ератостен из Кирене, 275-194. г.п.н.е.
[11]Хипократ, 470-410. г.п.н.е.

лично свестран у различитим областима, близак Платону и сам извршио снажан утицај на њега.

Менехмо[12] користи конусне пресеке како би удвостручио коцку, док Платон конструише специјални инструмент са жлебовима.

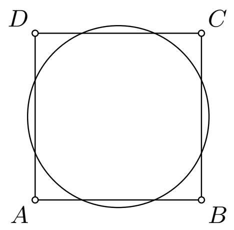
Хипија[13] је квадратрисама поред тога што је могао да изведе трисекцију угла, могао и да подели угао на n једнаких делова.



Слика 2.3: Проблем трисекције угла

Проблемом квадратуре круга бавио се Антифонт[14] уписујући правилне полигоне у круг (иако се појавила грешка, ово је корен будућег развоја метода ексхаустије који ће користити и Архимед[15]).

[12]Менехмо, 380-320. г.п.н.е.
[13]Хипија из Елиде, 5.век старе ере
[14]Антифонт, 5.век старе ере
[15]Архимед, 287-212. г.п.н.е



Слика 2.4: Проблем квадратуре круга

Академија је доста утицала да се претходни проблеми посматрају са другог становишта. То је подразумевало одређена ограничавања у коришћењу средстава за конструкцију. У претходним примерима смо видели да су искоришћена различита произвољна, чак и лично направљена средства за конструкцију.

Шестар и лењир постали су једина дозвољена средства у геометријским конструкцијама. [3, стр. 248]

Другим речима, изазов је постао: конструисањем кругова и правих решити античке проблеме.

Овај услов је задавао највише мука и труд многих у току историје чинио узалудним.

Напомена 1.

Под конструкцијом ћемо убудуће подразумевати геометријску конструкцију.

Да није могуће решити дате проблеме елементарним средствима (лењиром и шестаром) доказаћемо користећи се алгебарским апаратом, и то, помоћу теорије алгебарских поља, проучавајући и полиноме, као и конструктибилне бројеве, како бисмо сакупили материјала за коначни доказ, што ће наравно бити артиљерија наследства математичара XIX века.

Глава 3

Теорија полинома

У овом поглављу набројаћемо тврђења која важе за полиноме и која су неизоставна за будућу теорију теме којом се бавимо.

3.1 Растављивост полинома

Безуова теорема

Теорема 1. Остатак при дељењу полинома $P(x)$ полиномом $x - c$ износи $P(c)$.

Последица 1. Ако је c нула полинома $P(x)$, тј. $P(c) = 0$, тада

$$(x - c) \mid P(x)$$

Дефиниција 1. Нула (корен) полинома $P(x)$ је било које решење једначине $P(x) = 0$.

Број α је нула полинома $P(x)$ ако и само ако $(x - \alpha) \mid P(x)$, тј. $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$ за неки полином $Q(x)$.

Следећа теорема позната је као ***Теорема о рационалним нулама***

Лема 1. $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,\ \ a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{Z}$. Ако је рационалан број $\frac{p}{q}$, $(p, q) = 1$ корен полинома $P(x)$, тада $p|a_0$ и $q|a_n$.

Доказ 1.

$$a_n(\frac{p}{q})^n + a_{n-1}(\frac{p}{q})^{n-1} + ... + a_1\frac{p}{q} + a_0 = 0$$

множењем са q^{n-1} следи

$$a_n\frac{p^n}{q} + a_{n-1}p^{n-1} + ... + a_1pq^{n-2} + a_0q^{n-1} = 0$$

па из разлога што је $(p,q) = 1$ следи

$$q|a_n$$

множењем претходне једначине са q следи

$$a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + ... + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = 0$$

па из $p(a_np^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2} + ... + a_1q^{n-1}) + a_0q^n = 0$ следи

$$p|a_0$$

Лема 2. Нека је дат полином $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$, $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{Z}$. Ако је α нула полинома $P(x)$, тада је α делилац слободног члана a_0.

Доказ 2. Ако је α нула полинома $P(x)$ тада је

$$P(\alpha) = 0$$

Како је

$$a_0 = -\alpha(a_n\alpha^{n-1} + ... + a_1)$$

Следи

$$\alpha \mid a_0$$

Дефиниција 2. Полином $P(x)$ је нераставьив (иредуцибилан) над $\mathbb{Z}[x]$ ако се не може представити у облику производа два неконстантна полинома са коефицијентима из $\mathbb{Z}$.

Следећа лема носи назив ***Гаусова лема***[1].

Лема 3. Ако је полином $P(x)$ раставьив над $\mathbb{Q}[x]$, онда је раставьив и над $\mathbb{Z}[X]$.

[1]Карл Фридрих Гаус, 1777-1855. год

Доказ 3. Нека је[2].

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = Q(x)R(x)$$

где су $Q(x)$ и $R(x)$ неконстантни полиноми са рационалним коефицијентима. Нека су q и r најмањи бројеви тако да полиноми

$$qQ(x) = q_k x^k + ... + q_0$$

и

$$rR(x) = r_m x^m + ... + r_0$$

имају целе коефицијенте.

Тада је :

$$qrP(x) = qQ(x) \cdot rR(x)$$

разлагање полинома на производ два полинома из $\mathbb{Z}[x]$

Конструисаћемо такво разлагање за $P(x)$.

Нека је p произвољан прост делилац броја q.

Сви коефицијенти полинома $P(x)$ су дељиви p.

Нека је i такво да је $p|q_0, q_1, ..., q_{i-1}$ и $p \nmid q_i$.

Како је $p|a_i = q_0 r_i + ... + q_i r_0 \equiv q_i r_0 \ (mod \ p)$, важи $p|r_0$.

Даље је $p|a_{i+1} = q_0 r_{i+1} + ... + q_i r_1 + q_{i+1} r_0 \equiv q_i r_1 \ (mod \ p)$, па важи $p|r_1$.

Понављајући исти поступак следи $p|r_j$ за све j.

Према томе $\frac{rR(x)}{p}$ има целе коефицијенте.

Тако смо добили разлагање $\frac{rq}{p}P(x)$ на производ полинома из $\mathbb{Z}[x]$.

Бирајући друге вредности за p и настављајући овај поступак добија се жељено разлагање самог полинома $P(x)$.

Следећа лема позната као ***Ајзенштајнов критеријум***[3] даје одговор о нерастављивости полинома са рационалним коефицијентима.

Лема 4. Полином $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ са целим коефицијентима је нерастављив над $\mathbb{Q}[x]$ ако постоји прост број p такав да важи:

$$p|a_0, \ p|a_1, ..., p|a_{n-1}, \ p \nmid a_n, \ p^2 \nmid a_0$$

Доказ 4. Претпоставимо супротно, да је полином $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ растављив, тј. да се по дефиницији растављивости полинома, може написати као производ два полинома:

$$f(x) = (x^r + b_{r-1}x^{r-1} + ... + b_0) \cdot (x^s + c_{s-1}x^{s-1} + ... + c_0)$$

[2] Доказ преузет из материјала за додатну наставу Математичке гимназије *Полиноми по једној променљивој*, Душан Ђукић

[3] Готхолд Ајзенштајн, 1823-1852. год.

где је $0 < r, s < n$.

Изаберимо најмање i тако да је $p \nmid b_i$, где је дозвољен случај $i = r$ и $b_r = 1$, і најмање j тако да је $p \nmid c_j$, где је дозвољен случај $j = s$ и $c_s = 1$. Сада је $(i+j)$-ти коефицијент члана a_{i+j}:

$$a_{i+j} = b_i c_j + (b_{i-1} c_{j+1} + ...) + (b_{i+1} c_{j-1+...})$$

што је сума $b_i c_j$ и задовољава услове дељивости са p.

Тако $p \nmid b_i c_j$ и $p \nmid a_{i+j}$, али $p^2 \nmid a_0 = b_0 c_0$ па p не може да дели истовремено и b_0 и c_0, па је $i = 0$ и $j = 0$, тј. $i + j < n$. Зато је контрадикција $p \mid a_{i+j}$.

Из претходнод смо закључили да је растављивост над $\mathbb{Q}[x]$ еквивалентна са растављивошћу над $\mathbb{Z}[x]$.

Растављивост над $\mathbb{R}[x]$ или $\mathbb{C}[x]$ се дефинише аналогно, са разликом што се над $\mathbb{R}[x]$ полиноми могу раставити до степена 1 или 2[4], а над $\mathbb{C}[x]$ растављање је могуће до степена 1, тј. линеарних фактора. Ово тврди *Основна теорема алгебре* чију формулацију дајемо:

Теорема 2. Сваки полином са комплексним коефицијентима има комплексни корен.

Доказ 5. Пошто се ради о коренима, можемо сматрати да је најстарији коефицијент датог полинома једнак 1.

Уочимо дакле полином

$$f = z^n + ... + a_1 z + a_0$$

као пресликавање $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, и претпоставимо да он нема корена тј. да је $f(z) \neq 0$ за све $z \in \mathbb{C}$. Приметимо да тада мора бити $a_0 \neq 0$, јер би у супротном било $f(0) = 0$.

Када промењлива z обиђе једном око 0 по кругу радијуса R, комплексни број $f(z)$ обиђе око 0, можда више пута.

Нека је $n(R)$ број тих обилазака.

Ово је целобројна и непрекидна функција од R, па због тога мора бити константа тј. независна од R.

Нека се R „удаљава” од нуле. Запишимо $f(z) = z^n + b(z)$, $b(z) = a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_0$. Пошто је $b(z)$ мало у односу на z^n, број обилазака $f(z)$ око нуле биће једнак броју обилазака z^n око нуле, а то је n на основу Моавровог[5] обрасца[6], тј. $n(R) = n$.

[4] Растављање до квадратних чланова (степена 2) је уколико је дискриминанта мања од нуле

[5] Абрахам Моавр, 1667-1754. год

[6] степеновање комплексног броја

Ако пак $R \to 0$, биће $f(z) = a(z) + a_0$, $a(z) = z^n + ... + a_1 z$, $f(z)$ ће обилазити по путањи малог пречника око тачке $a_0 \neq 0$, па ће његов број обилазака око 0 бити $n(R) = 0$.

Заједно са претходним, ово даје контрадикцију која доказује теорему.

Претходни доказ је преузет из [10], и носи симпатичан назив *Дама са псетанцетом*[7].

„Дама” је у овом доказу главни део функције $f(z)$ (z^n кад се R „удаљава” од 0, а a_0 кад se R приближава 0) а „псетанце” остатак. Како год трчало псетанце на кратком повоцу око даме, његово ће укупно кретање бити одређено кретањем даме.

Слика 3.1: „Дама са псетанцетом” и Чехов, Јалта

[7] по истоименој причи руског писца Антона Павловича Чехова (1860-1904. год.)

3.2 Алгебарски и трансцендентни бројеви

Дефиниција 3. Реалан број који је корен полинома са целим (рационалним) коефицијентима назива се **алгебарски број**.

Пример 1. Следећи бројеви су алгебарски:

- Природни бројеви су алгебарски. Полиноми чији су ови бројеви нуле су облика $x - n,\ n \in \mathbb{N}$.
- Цели бројеви су алгебарски. Полиноми чији су ови бројеви нуле су облика $x \pm n,\ n \in \mathbb{N}$.
- Рационални бројеви су алгебарски. Полиноми чији су ови бројеви нуле су облика $x - \frac{p}{q}$, тј. $qx - p,\ p, q \in \mathbb{N}$.
- n-ти корени природних бројева су алгебарски. Полиноми чији су ови бројеви нуле су облика $x^n - m,\ m \in \mathbb{N}$.

Дефиниција 4. Реалан број који није алгебарски зове се **трансцендентан број**.

Пример 2. Неки од примера трансцендентних бројева су π, e, ...

Позабавићемо се бројем π.
Овај број носи назив по Лудолфу[8] који је одредио првих 35 децимала.

$$\pi = 3.14159265358979323846264338327950288...$$

Међу првима који су се бавили бројем π спада Архимед који је направио процену

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$$

Вијет[9] је добио израз у виду бесконачног производа

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}...$$

Ламберт[10] је 1761. год. доказао да број π није рационалан.

[8] Лудолф Цојлен, 1540-1610. год.
[9] Франсоа Вијет, 1540-1603. год.
[10] Јохан Ламберт, 1728-1777. год.

Већ 1882. год. Линдеман[11] је доказао да је π трансцендентан, тј. да није нула ниједног полинома са целим (рационалним) коефицијентима.

Занимљива је Валисова[12] формула

$$\frac{\pi}{4} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot ...}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot ...}$$

Али и Лајбницова[13] формула

$$\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...$$

Позната Ојлерова[14] формула сматра се најлепшом формулом математике јер комбинује константе $0, 1, e, i$ као и број π.

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Вредност Гама[15] функције у тачки $\frac{1}{2}$ износи $\sqrt{\pi}$.

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

Познати Базелски[16] проблем

$$\sum_{n=1\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Као и многе друге формуле које укључују овај ирационално - трансцендентан број.

[11] Фердинанд Линдеман, 1852-1939. год.
[12] Џон Валис, 1616-1703. год.
[13] Готфрид Лајбниц, 1646-1716. год.
[14] Леонард Ојлер, 1707-1783. год.
[15] $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt,\ z \in \mathbb{C},\ Re(z) > 0$
[16] Базел, Швајцарска, место рођења Ојлера који је решио поменути проблем.

Глава 4

Раширење поља

4.1 Поље као алгебарска структура

Дефиниција 5. Алгебарска структура $\mathbb{F} = (F, +, \cdot, 0, 1)$ је поље уколико су $(F, +, 0)$ и $(F \backslash \{0\}, \cdot, 1)$ Абелове групе [1], и $\mathbb{F}$ задовољава закон дистрибутивности.

Поље задовољава следећа својства:

$(F, +, 0)$ **је Абелова група:**
$(x + y) + z = x + (y + z)$
$y + x = x + y$
$x + 0 = x$
$\forall x \; \exists y \; (x + y = 0)$

$(F \backslash \{0\}, \cdot, 1)$ **је Абелова група:**
$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
$y \cdot x = x \cdot y$
$x \cdot 1 = x$
$\forall x \; (x \neq 0 \;\Rightarrow \exists y \; (x \cdot y = 1)$

дистрибутивност
$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

својство $0 \neq 1$[2]

[1] Нилс Абел, 1802-1829. год.

[2] Ово својство нам обезбеђује да тривијални *прстен* $\{0\}$ не зовемо прстен са јединицом. О алгебарској структури *прстена* прочитати више у [9].

4.2 Раширење поља

У настави математике, скуп природних бројева $\mathbb{N}$ је полазни скуп, који се убрзо проширује нулом и настаје $\mathbb{N}_0$. У овом скупу сабирање његових елемената је увек могуће, међутим, то није случај са одузимањем и зато се овај скуп проширује на скуп природних бројеви који садрже и предзнак минус, и тако настаје скуп целих бројева $\mathbb{Z}$. Скуп целих бројева настао је као резултат потраге за затвореношћу у односу на операцију $x \to -x$. Како би било могуће делити бројеве, тј. како би постојала затвореност у односу на операцију $x \to x^{-1}$ настаје скуп рационалних бројева $\mathbb{Q}$. Скуп реалних бројева $\mathbb{R}$ обједињује све оне бројеве које је могуће представити разломком, али и оне за које то није могуће и који не припадају ниједном од претходно набројаних скупова - то је скуп ирационалних бројева $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Скуп у који је садржан скуп реалних бројева јесте скуп комплексних бројева $\mathbb{C}$, и овај „излет у комплексно” даје могућност да се решавају једначине облика $x^n + 1 = 0$.

Од свих набројаних скупова бројева, скупови $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ су примери поља јер задовољавају сва претходна својства.

Дефиниција 6. Раширење поља F је свако поље E које садржи поље F као потпоље.

Поље $\mathbb{Q}$ је потпоље поља $\mathbb{R}$.
Поље $\mathbb{R}$ је потпоље поља $\mathbb{C}$.

Полином $P(x) = x^2 - 3$ може се факторизовати као $(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$. Међутим, нуле овог полинома $\sqrt{3}$ и $-\sqrt{3}$ не припадају пољу $\mathbb{Q}$, и природно је проширити поље $\mathbb{Q}$ овим елементима. Тако настаје поље:

$$\mathbb{Q}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} \mid a,\ b \in \ \mathbb{Q}\}$$

Поље $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ је најмање потпоље које садржи поље $\mathbb{Q}$ и елементе $\pm\sqrt{3}$.

Полином $P(x)$ припада $\mathbb{Q}[x]$, али није растављив над $\mathbb{Q}$.

Поље E може се сматрати векторским простором над пољем F. Ако је димензија векторског простора E једнака n, тада говоримо о коначном раширењу поља F, што записујемо у облику:

$$[E : F] = n \tag{4.1}$$

Уколико је E раширење поља F, а K раширење поља E у смислу дефинисаном пређашње, тада важи:

$$F \subset E \subset K \tag{4.2}$$

Теорема 3. Ако је E коначно раширење поља F, и K коначно раширење поља E, тада је и K коначно раширење поља F, и важи

$$[K:F] = [K:E][E:F] \tag{4.3}$$

Нека су $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ и $\{\beta_1, ..., \beta_n\}$ базе векторских простора E и F над K и E редом.

Теорема тврди да је $\{\alpha_i\beta_j\}$ база векторског простора K над F.

Нека је $u \in K$. Тада је $u = \sum_{j=1}^{m} b_j\beta_j$ и $b_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\alpha_i$, где је $b_j \in E$ и $a_{ij} \in F$.

Тада важи

$$u = \sum_{j=1}^{m}(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\alpha_i)\beta_j = \sum_{i,j} a_{ij}(\alpha_i\beta_j)$$

тако да вектори mn базе $\alpha_i\beta_j$ разапињу векторски простор K над F.

Показаћемо да су $\alpha_i\beta_j$ линеарно независни.
Ако су вектори $v_1, ..., v_n$ линеарно независни, тада

$$c_1v_1 + ... + c_nv_n = 0$$

важи за

$$c_1 = ... = c_n = 0$$

Нека је зато $u = \sum_{i,j} c_{ij}(\alpha_i\beta_j)$ за $c_{ij} \in F$.
Показујемо да су сви c_{ij} једнаки нули.
Тада важи

$$\sum_{j=1}^{m}(\sum_{i=1}^{n} c_{ij}\alpha_i)\beta_j = 0$$

где је $\sum_i c_{ij}\alpha_i \in E$.

Како су β_j линеарно независни над E, тада мора бити $\sum_{i=1}^{n} c_{ij}\alpha_i = 0$ за свако j. Такође и α_j су линеарно независно над F. Дакле, $c_{ij} = 0$ за свако i и j, и одавде следи доказ.

Дефиниција 7. Нерастављиви полином $\mu(x)$ над $\mathbb{Q}$ који је моничан (има коефицијент 1 уз члан са највећим степеном), и притом је $\mu(\alpha) = 0$, зове се **минимални полином** елемента α над $\mathbb{Q}$.

Пример 3.

Одредити минимални полином следећег елемента:

$$\alpha = \sqrt{5 + \sqrt[3]{2}}$$

$$\begin{gathered} \alpha = \sqrt{5 + \sqrt[3]{2}} \quad /^2 \\ \alpha^2 = 5 + \sqrt[3]{2} \\ \sqrt[3]{2} = \alpha^2 - 5 \quad /^3 \\ \alpha^6 - 15x^4 + 75x^2 - 27 = 0 \end{gathered}$$

Овај полином је моничан, важи $\mu(\alpha) = 0$, и још само остаје да се покаже да је нерастављив над $\mathbb{Q}$. Искористићемо на пример Ајзенштајнов критеријум. С обзиром да је једини прост делилац броја 27 број 3 који не омогућава коришћење датог критеријума, читав полином посматраћемо у тачки $\alpha - 1$, што никако неће нарушити његову растављивост.

$$(\alpha - 1)^6 - 15(\alpha - 1)^4 + 75(\alpha - 1)^2 - 27 = 0$$

Одавде је

$$\alpha^6 - 6\alpha^5 + 40\alpha^3 - 96\alpha + 34 = 0$$

И за $p = 2$ на основу Ајзенштајновог критеријума дати полином је нерастављив.

Самим тим, претходни полином је минимални полином елемента $\alpha = \sqrt{5 + \sqrt[3]{2}}$ над $\mathbb{Q}$.

Између коначних раширења и минималног полинома постоји веза и она гласи:

$$[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = n$$

где је n највиши степен минималног полинома $\mu(\alpha)$.

Глава 5

Конструктибилни бројеви

У овој глави даћемо историјски сегмент који се тиче конструкције квадратних корена, а затим изложити основне конструкције, и дати одређена својства конструктибилних бројева.

5.1 Теетет и конструкција

Посебно је занимљив разговор Сократа и Теетета у Платоновом *Теетету*, и пролога који даје Теетет:

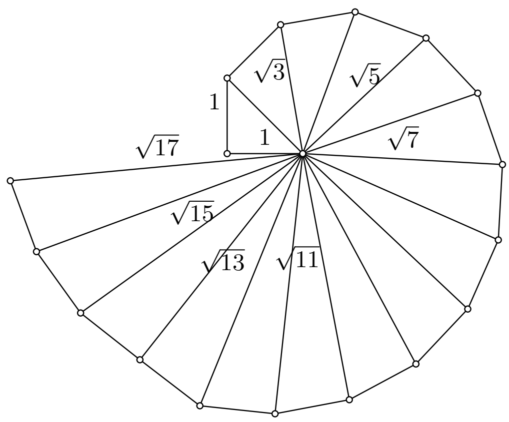
Овај нам је Теодор цртао нешто о квадратима показујући да квадрат површине од три стопе и квадрат површине од пет стопа нису по дужини страница самерљиви са страницом квадрата површине једне стопе. И тако је узимао сваки поједини квадрат до онога од седамнаест стопа. Код тога је стао. Будући да су се квадрати по броју показали бесконачним пало нам је, дакле, на ум да их покушамо захватити у једно којим ћемо назвати све те четвороуглове...

Све бројеве поделисмо у две врсте. Они бројеви који могу да настану од множења двају једнаких фактора, а приказали смо их ликом квадрата, назвали смо квадратним или једнакостраним...

А оне бројеве између тих, у које припадају и три и пет и сваки број који не може постати од множења двају једнаких фактора, него настаје или од већег броја помноженог са мањим или од мањег помноженог са већим и ти бројеви одређени су (као ликови) једном већом и једном мањом страном, а приказали смо их опет дугуљастим четвороуглом, тј. правоугаоником, назвали смо дугуљастим (правоугаоним) бројевима...

Све праве које приказују једнакостран број као квадрат дефинисали смо као дужине, а оне које приказују дугуљаст број као правоугаоник дефинисали смо као правоугаоне бројеве (корене) јер се по дужини не могу мерити са оним величинама, а могу се мерити са оним величинама с *обзиром на површину коју сачињавају. И о кубним бројевима направили смо нешто слично* [Теетет, 147d-148b].

На основу овог излагања, закључујемо да је Теодор из Кирене, учитељ Теетета, умео да докаже да су $\sqrt{3}, \sqrt{5}, ..., \sqrt{17}$ ирационални бројеви.

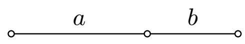


Слика 5.1: Конструкција бројева $\sqrt{3}, \sqrt{5}, ..., \sqrt{17}$

5.2 Основне конструкције

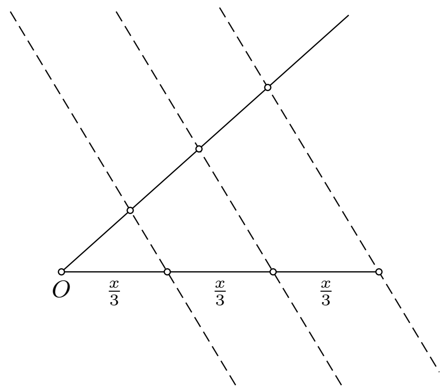
Нека су дате дужи a и b. Истим ознакама обележаваћемо и њихове дужине.

Основне конструкције које је могуће извести помоћу шестара и лењира су сабирање, одузимање, множење, дељење и кореновање дужи. Сабирање и одузимање дужи a и b заснива се на надовезивању једне дужи другој. Слично се конструишу и дужине облика $a + a + a + ...$ тј. $k \cdot a,\ k \in \mathbb{N}$. Дужина $a - b$ се добија истим поступком са разликом што се дуж b конструише у супротном смеру.



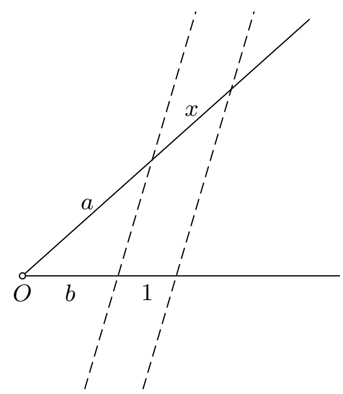
Слика 5.2: Конструкција броја $a + b$

Подела дужи на n једнаких делова почива на сличности троуглова.



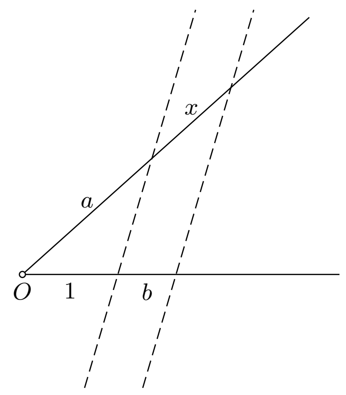
Слика 5.3: Конструкција броја $\frac{x}{3}$

Количник и производ дужи почива на Талесовој теореми.
Нека је количник дужи a и b, $x = \frac{a}{b}$. Исто се може представити као $\frac{a}{x} = \frac{b}{1}$, где је 1 јединична дуж.



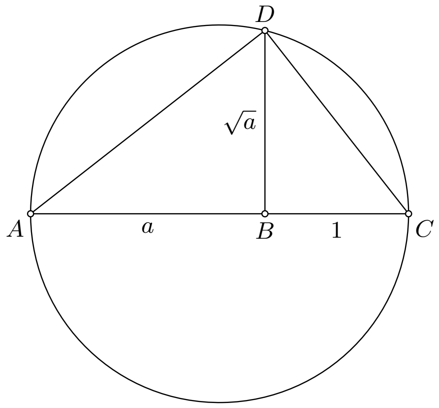
Слика 5.4: Конструкција броја $x = \frac{a}{b}$

Производ $x = a \cdot b$ представићемо као $\frac{a}{x} = \frac{1}{b}$.



Слика 5.5: Конструкција броја $x = a \cdot b$

Квадратни корен дужи a јесте геометријска средина дужи a и јединичне дужи. Нека је дуж AC таква да је $AB = a$ и $BC = 1$. Конструишимо кружницу тако да је AC њен пречник, а затим нормалу на AC у тачки B тако да сече кружницу у тачки D. Дуж BD је $\sqrt{a}$, што следи из разлога да су троуглови ABD и BCD слични.



Слика 5.6: Конструкција броја $\sqrt{a}$

5.3 Конструктибилни бројеви

Дефиниција 8. Реалан број r је конструктибилан ако и само ако је могуће у коначно много корака користећи основне конструкције (и кореновање) конструисати одсечак те дужине.

Дакле, дуж дужине r се може конструисати ако и само ако се број $r \in \mathbb{R}$ добија вишеструком применом операција сабирања, одузимања, множења, дељења и налажења квадратног корена природних бројева.

Овакви бројеви се називају **квадратни радикални изрази** или **бројеви квадратне ирационалности**.

Пример 4.

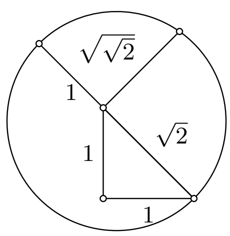
Конструисати број $r = \sqrt{\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}$.

Конструисаћемо дужине $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ и $1+\sqrt{3}$ редом као дијагоналу квадрата ивице 1, хипотенузу правоуглог троугла ивица 1 и $\sqrt{2}$, и збир дужина 1 и $\sqrt{3}$. Потом конструисати количник $\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ и најзад квадратни корен добијеног броја[1].

Пример 5.

Конструисати број $r = \sqrt{\sqrt{2}}$.

Наравно, конструисаћемо број $\sqrt{2}$, а онда квадратни корен овог броја.



Слика 5.7: Конструкција броја $\sqrt{\sqrt{2}}$

На исти начин може се конструисати и број $\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} = \sqrt[8]{2}$, као и $\sqrt[16]{2}, ..., \sqrt[n]{2}$, где је $n = 2^k$ и $k \in \mathbb{N}$.

[1] Други начин је да се прво рационалише израз испод корена

Пример 6.

Како би изгледала конструкција броја $r = \sqrt{\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}}$. Да ли је уопште могуће извршити ову конструкцију?

Симболично, скуп свих конструктибилних бројева можемо представити као $(\mathbb{Q}, +, -, \cdot, :, \sqrt{\cdot})$. Прецизније, овај скуп је поље.

Означимо поље конструктибилних бројева са K.

Теорема 4. Скуп свих конструктибилних бројева K је потпоље скупа реалних бројева $\mathbb{R}$.

Доказ 6. Нека су a и b конструктибилни бројеви. Потребно је доказати да ће конструктибилни бити и $a+b$, $a-b$, $a \cdot b$ и $\frac{a}{b}$, што смо и урадили на почетку поглавља у делу о основним конструкцијама.

Лема 5. Нека је K потпоље поља $\mathbb{R}$.

1. Ако права садржи две тачке из K, тада је њена једначина $ax+by+c=0,\ a,b,c \in K$.
2. Ако круг има за центар тачку из K, и дужину полупречника који је из K, тада је његова једначина $x^2+y^2+dx+ey+f=0,\ d,e,f \in K$.

Доказ првог дела тврђења:

Нека су (x_1, y_1) и (x_2, y_2) координате тачака из K које одређују праву. Ако је $x_1 = x_2$ тада је $x - x_1 = 0$ што јесте облика $ax + by + c = 0$. Ако је $x_1 \neq x_2$, онда је једначина праве кроз две тачке

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

што такође одговара датом облику.

Доказ другог дела тврђења:

Нека је (x_1, y_1) центар круга полупречника r. Једначина круга гласи

$$(x - x_1)^2 - (y - y_1)^2 - r^2 = 0$$

Полазећи од потпоља K постоји три могућности за конструкцију тачака које припадају пољу $\mathbb{R}$.

2.1 Пресек двеју правих чије су координате из K.

2.2 Пресек праве чије су координате из K и круга чији је центар тачка из K, и дужина полупречника припада K.

2.3 Пресек двају кругова чији центри и дужине полупречника припадају K.

Што се тиче случаја [2.1] обе једначине су облика $ax + by + c = 0$ и имају коефицијенте из K, па ће и решења бити у K.

Случај [2.3] може се свести на случај [2.2]. Наиме, нека су једначине кругова:

$$x^2 + y^2 + d_1x + e_1y + f_1 = 0$$
$$x^2 + y^2 + d_2x + e_2y + f_2 = 0$$

где су $d_1, d_2, e_1, e_2, f_1, f_2 \ \in K$

Поменути кругови имају исти пресек као и круг

$$x^2 + y^2 + d_1x + e_1y + f_1 = 0$$

и права

$$(d_1 - d_2)x + (e_2 - e_1)y + (f_2 - f_1) = 0$$

Ова права је права која настаје у пресеку двају кругова.

Случај пресека праве и круга јесте питање решења система једначина

$$ax + by + c = 0$$
$$x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$$

Решавањем по y из прве једначине и заменом у другу добија се облик једначине

$$Ax^2 + Bx + C = 0, \quad A, B, C \ \in K$$

Решење ове квадратне једначине су управо координате пресечних тачака праве и круга:

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

тако да $x \in K[\alpha]$, и $\alpha = B^2 - 4AC > 0$.

Овом лемом смо доказали да све тачке које се могу конструисати у пресеку правих и кругова који су из скупа конструктибилних бројева K, морају припадати његовом раширењу $K[\alpha], \ \ \alpha > 0$.

Директна последица претходне леме подразумева

$$\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset ... \subset F_k$$

па се може извести закључак да ће свако следеће проширење у односу на претходно бити степена 2, и на основу доказане *Теореме о коначном раширењу поља* следи

$$[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 2^s, \ \ s \in \mathbb{N}$$

Глава 6

Рационални, конструктибилни и алгебарски бројеви

6.1 Теореме

Лема 6. Свако коначно раширење поља $\mathbb{Q}$ је алгебарско поље.

Нека је K коначно раширење поља $\mathbb{Q}$ степена n и нека је $x \in \mathbb{K}$. Како би димензија проширења била коначна, елементи $1, x, x^2, ..., x^n$ морају бити линеарно зависни. Дакле, постоје елементи $c_i \in \mathbb{Q}$ тако да нису сви једнаки 0, и за њих је

$$c_n x^n + ... + c_1 x + c_0 = 0$$

Одавде следи да постоји полином степена n коме је x корен. Дакле x је алгебарски над $\mathbb{Q}$.

Теорема 5. Сваки конструктибилан број је алгебарски.

Нека је x произвољан конструктибилан број. То значи да он припада неком раширењу $K = \mathbb{Q}(\sqrt{l_1}, ..., \sqrt{l_s})$ тако да је степен раширења $[K : \mathbb{Q}]$ неки број облика 2^s, $s \in \mathbb{N}$. На основу претходне теореме, K је алгебарско раширење, па је x алгебарски број.

Напомена 2. Обрат претходне теореме не важи. Није сваки алгебарски број конструктибилан.

Пример 7.

Узећемо број $x = \sqrt[5]{3}$.

Полином чији је број x корен јесте $x^5 - 3$.

Међутим, степен раширења $[K : \mathbb{Q}] = 5$ јер је минималан полином $P(x) = x^5 - 3$, и није степен броја 2, па ни његов корен не може бити конструктибилан.

Теорема 6. Ако кубна једначина са рационалним коефицијентима нема рационалних нула, онда ниједан њен корен није конструктибилан.

Нека је $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ кубна једначина са коефицијентима $a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{Q}$.

Теорема тврди да уколико ова једначина нема рационалних нула, онда њени корени нису конструктибилни.

Претпоставићемо управо супротно, тј. претпоставимо да дата једначина има конструктибилан корен r. Овај број припада пољу $F_s = (\sqrt{l_1}, ..., \sqrt{l_s})$, тако да је s најмањи број проширења поља Q који је потребан за конструкцију r.

Нека $r = a + b\sqrt{l_s},\ a, b, l_s \in F_{s-1},\ \sqrt{l_s} \neq F_{s-1}$ задовољава полазну кубну једначину. Другим речима, за $P(r) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ важи $P(r) = 0$. Ако је $r = a + b\sqrt{l_s}$ решење дате кубне једначине, онда је и $r_1 = a - b\sqrt{l_s}$ такође решење кубне једначине. С обзиром да је $P(r) = 0$ и $r = a + b\sqrt{l_s}$, следи:

$$a_3(a + b\sqrt{l_s})^3 + a_2(a + b\sqrt{l_s})^2 + a_1(a + b\sqrt{l_s}) + a_0 = 0$$

Претходна једначина се може написати у облику

$$A + B\sqrt{l_s} = 0$$

где су $A, B, \sqrt{l_s} \in F_{s-1}$, па важи

$$P(r) = A + B\sqrt{l_s}$$

односно

$$P(a + b\sqrt{l_s}) = A + B\sqrt{l_s} = 0$$

Претходно важи ако и само ако је $A = B = 0$.

Ако би било $B \neq 0$ тада би $\sqrt{l_s} = -\frac{A}{B}$, а то је контрадикција са претпоставком $\sqrt{l_s} \neq F_{s-1}$. На исти начин је и $P(a - b\sqrt{l_s}) = A - B\sqrt{l_s} = 0$ јер је $A = B = 0$.

Дакле, ако је $a + b\sqrt{l_s}$ корен једначине $P(r) = 0$, онда је и $a - b\sqrt{l_s}$ корен те једначине.

Из Вијетових формула за једначину трећег степена

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_2}{a_3}$$

важи: $x_1 = a + b\sqrt{l_s}$ и $x_2 = a - b\sqrt{l_s}$.

Заменом у $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_2}{a_3}$ биће

$$a + b\sqrt{l_s} + a - b\sqrt{l_s} + x_3 = -\frac{a_2}{a_3}$$

одакле је $x_3 = -\frac{a_2}{a_3} - 2a \ \in F_{s-1}$, а то је контрадикција са претпоставком да је s најмањи број за који F_s садржи корен једначине $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$.

6.2 Систематизација

На овом месту поновићемо да су алгебарски бројеви хијерархијски на самом врху. Испод њих су конструктибилни бројеви. Сваки конструктибилан је алгебарски али супротно не важи, у шта смо се уверили налажењем контрапримера. Сви рационални бројеви су конструктибилни, али није сваки конструктибилан број рационалан број[1].

[1]Број $\sqrt{2}$ је конструктибилан али није рационалан!

6.3 Једначина $z^n = 1$ у комплексној равни

Како бисмо решили једначину $z^n = w$ уколико су z и w комплексни бројеви, и $n \in \mathbb{N}$?

Нека су

$$z = |z| \cdot e^{i\varphi}, w = |w| \cdot e^{i\theta}$$

Тригонометријски, односно експоненцијални запис бројева z^n и w гласи:

$$z^n = |z|^n \cdot (cos\ n\varphi + isin\ n\varphi) = |z|^n \cdot e^{in\varphi}$$

$$w = |w| \cdot (cos\ \theta + isin\ \theta) = |w| \cdot e^{i\theta}$$

Формирајмо једначину:

$$|z|^n e^{in\varphi} = |w| e^{i\theta}$$

одакле је

$$|z| = \sqrt[n]{|w|},\ e^{in\varphi} = e^{i\theta}$$

Кључна ствар јесте у чињеници да је $n\varphi = \theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Односно $\varphi = \frac{\theta+2k\pi}{n},\ k \in \mathbb{Z}$.

Дакле, решења једначине $z^n = w$ јесу:

$$z_k = \sqrt[n]{|w|}(cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + isin\frac{\theta + 2k\pi}{n}) = \sqrt[n]{|w|}e^{i\cdot\frac{\theta+2k\pi}{n}},\ k = 0, 1, 2, ..., n-1$$

Ове тачке образују правилан n-тоугао уписан у кружницу полупречника $\sqrt[n]{|w|}$.

Може се приметити и симетричност одређених (конјугованих) парова.

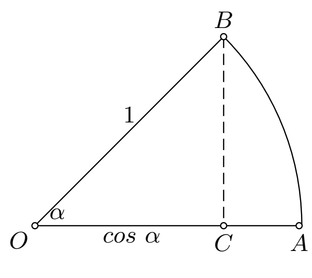
Такође, положај сваке следеће тачке може се одредити ротацијом претходне тачке за угао од $\varphi = \frac{2\pi}{n}$.

Специјални случај јесу n-ти корени јединице, тј. једначине облика $z^n = 1$ којима ћемо се бавити у наставку.

Глава 7

Докази античких проблема

Уверимо се да је могућност конструкције неког угла, иста као и могућност конструкције дужине његовог косинуса. У ту сврху уочимо угао α (Слика 7.1). Дати угао је централни угао јединичне кружнице. Конструкција угла α или његовог косинуса, своди се на конструкцију правоуглог троугла BOC са правим углом код темена C и хипотенузом BO дужине 1. Ако је дат угао $\alpha = \measuredangle BOC$, конструише се хипотенуза $BO = 1$ на једном његовом краку, а онда нормала из тачке B на праву одређену тачкама O и A. У пресеку нормале и праве одређене тачкама O и A настаје тачка C. Дужина OC је $cos\ \alpha$.



Слика 7.1: Конструкција угла α и косинуса угла α

Ако је дата дужина OC која је косинус датог угла α, конструисаћемо прав угао $\measuredangle OCB$, а онда и BO чиме ће бити конструисан и сам угао α.

Дакле, угао α је могуће конструисати ако и само ако је могуће конструисати $cos\ \alpha$.

У делу који следи покушаћемо да дођемо до закључка да ли је могуће конструисати трећину произвољног угла α. Напомињемо да је ово један начин да се покаже да ли је могућа конструкција трећине задатог угла.

Подсетимо се тригонометријског идентитета:

$$cos(\alpha + \beta) = cos\ \alpha \cdot cos\ \beta - sin\ \alpha \cdot sin\ \beta$$

Представимо произвољни угао као 3α, тј.

$$cos(3\alpha) = cos(2\alpha + \alpha) = cos(2\alpha) cos\ \alpha - sin\ (2\alpha) sin\ \alpha =$$
$$(cos^2\ \alpha - sin^2\ \alpha) cos\ \alpha - 2sin^2\ \alpha cos\ \alpha =$$
$$(2cos^2\ \alpha - 1) cos\ \alpha - 2(1 - cos^2\ \alpha) cos\ \alpha =$$
$$2cos^3\ \alpha - cos\ \alpha - 2cos\ \alpha + 2cos^3\ \alpha =$$
$$4cos^3\ \alpha - 3cos\ \alpha$$

Узмимо за 3α баш 60 степени.
Узмимо у обзир да је $cos\ 60° = \frac{1}{2}$
Тако је:

$$4cos^3\ \alpha - 3cos\ \alpha = \frac{1}{2} \quad / \cdot 2$$

$$8cos^3\ \alpha - 6cos\ \alpha - 1 = 0$$

Ради једноставнијег записа, представимо $x = \cos\ \alpha$.
Претходна једначина постаје:

$$8x^3 - 6x - 1 = 0$$

Уведимо смену $x = \frac{t}{2} - 1$.
Сређивањем добија се:

$$t^3 - 6t + 9t - 3 = 0$$

Према теореми о рационалним нулама, овај полином нема рационалних нула, а онда према доказаној теореми о једначини трећег степена која нема рационалне корене, следи да дата једначина нема ни конструктибилне корене.

Дакле, корени дате једначине нису конструктибилни, односно, број $cos\ 20°$ није конструктибилан, а самим тим ни угао од $20°$.

7.1 Трисекција угла

Лема 7. Конструкција трећине произвољног угла није могућа.

На овом месту представићемо други поглед на могућност конструкције угла који је једнак трећини задатог угла.

Нека α трећина произвољног угла. Желимо показати да његова конструкција није могућа. Применом адиционе формуле важи:

$$\cos 3\alpha = 4cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

Нека је $\cos\alpha = x$ и $\cos 3\alpha = r$. То је даље: $4x^3 - 3x - r = 0$. Посматрајмо следећи полином:

$$p(x) = 4x^3 - 3x - r$$

Дати полином нема решења над Q, али има над неким његовим раширењем E и то раширење је степена 3, тј. важи да је

$$[E : Q] = 3$$

Међутим, с обзиром да 3 није степен броја 2, следи да број $x = \cos\alpha$ није могуће конструисати.

7.2 Квадратура круга

Лема 8. Конструкција квадрата исте површине као површина датог круга није могућа.

Ако са r обележимо полупречник круга, а са x ивицу квадрата, да би њихове површине биле једнаке морало би да важи

$$x^2 = r^2\pi$$

Решење дате једначине је $x = r\sqrt{\pi}$, а како број π није алгебарски (већ трансцендентан), није ни конструктибилан, па дату конструкцију није могуће извести.

7.3 Удвостручење коцке

Лема 9. Конструкција коцке чије ја запремина два пута већа од запремине произвољне коцке није могућа.

Претпоставимо да желимо да конструишемо коцку чија је запремина два пута већа од запремине коцке ивице 1. Проблем ћемо решити на два начина.

Први начин:

Запремина нове коцке била би $x^3 = 2$.

Полином

$$p(x) = x^3 - 2$$

је нерастављив над Q, и његово проширење је $Q[\sqrt[3]{2}]$.

Како је полином $x^3 - 2$ моничан, нерастављив, и $p(\sqrt[3]{2}) = 0$, степен раширења је $[Q(\sqrt[3]{2}) : Q] = 3$, и како то није број који је степен броја 2, следи да такав број није конструктибилан.

Други начин:

Полином $p(x) = x^3 - 2$ нема рационалних нула, па као полином трећег степена нема ни конструктибилних нула.

7.4 Конструкција углова

Показали смо да косинус угла од 20 степени није конструктибилан, а самим тим ни угао од 20 степени.

Из овога може се закључити да није могуће конструисати угао од оног броја степени који одговара делиоцима броја 20. Иначе би у супротном и сам угао од 20 степени могао да се конструише.

Тако није могуће конструисати ни углове од $1^\circ, 2^\circ, 4^\circ, 5^\circ, 10^\circ$.

Можемо поставити питање: **"Колики је најмањи природан број n за који је могуће конструисати угао од n степени?"**

И одговор нам даје следећа теорема:

Теорема 7. За природан број n, могуће је конструисати угао од n степени ако и само ако $3 \mid n$.

Претпоставимо да 3 дели број n. Тада је број n облика $n = 3a + b$ где су $a, b \in \mathbb{Z}$ и $0 \leq b \leq 2$. Ако је 3 степени конструктибилан, то је и $3 \cdot a$ степени конструктибилан. Дакле n степени је конструктибилан ако и само ако је b степени конструктибилан. Угао за $b = 0$ степени је конструктибилан, док за 1 степен и 2 степена нису, што смо већ закључили.

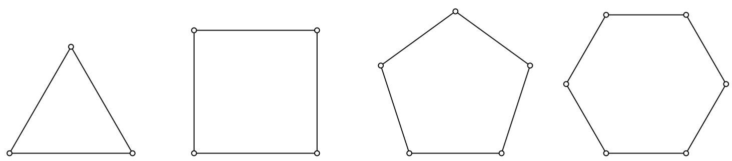
Дакле, можемо закључити да је најмањи конструктибилан угао, чији је број степени природан број, угао од 3 степени.

Глава 8

Правилни полигони

Правилни полигони су одувек сматрани доказом хармоније природе. Од постанка првих цивилизација, правилни полигони заокупљују пажњу. Решавање проблема њихове конструкције трајало је миленијумима, и до коначног решења се дошло у XIX веку.

Конструкција правилног троугла, четвороугла и шестоугла је прилично једноставна. У Еуклидовим Елементима њихово место је у ставовима I.1, IV.6 и IV.15.



Слика 8.1: Правилни полигони

Међутим, конструкција других правилних полигона није најједноставнија, јер се поред питања како извести дату конструкцију, поставља још веће питање: Да ли је уопште могуће извести дату конструкцију, што би значило понављамо опет, коришћење једино шестара и лењира, и то је предмет проучавања овог поглавља. У њему ћемо одговорити које је полигоне могуће конструисати и приказати конструкцију појединих карактеристичних. Јако корисна литература са конструкцијама великог броја полигона јесте [4].

8.1 Конструктибилност полигона

Ферма[1] је сматрао да су сви бројеви облика $2^{2^k}+1$ прости бројеви, и то је закључио из разлога што су бројеви $2^{2^0}+1=3$, $2^{2^1}+1=5$, $2^{2^2}+1=17$, $2^{2^3}+1=257$, $2^{2^4}+1=65537$ прости, па је претпоставио да ће исто важити за свако $n \in \mathbb{N}_0$

Међутим, 1732. године, Ојлер је доказао да следећи члан који Ферма није проверио, број $2^{2^5}+1$ није прост већ да је, с обзиром да се може факторисати на производ простих

$$2^{2^5}+1=4294967297=641\cdot 6700417$$

заправо сложен.

Слика 8.2: Ферма, Ојлер и Гаус

Са друге стране, Фермаова заслуга никако није била узалудна, и бројеви овог облика нашли су своје посебно место захваљујући Гаусу. Познати су као „Фермаови бројеви".

Велики Гаус је у XIX веку утврдио да се правилни n-тоугао може конструисати ако су непарни делитељи броја n међусобно различити прости Фермаови бројеви.

Дакле, на овај начин закључује се да је могуће конструисати правилне полигоне који имају 3, 5, 17, 257, 65537... ивица. [3, стр. 172]

Уводећи златни пресек, Питагорејци су успели да реше проблем конструкције правилног петоугла. Проблем конструкције правилног седмоугла и правилног деветоугла нису успели да реше, међутим, много касније, после резултата Гауса који смо навели у вези Фермаових бројева,

[1]Пјер де Ферма, 1601-1665. год

Ванцел[2] је успео да докаже да Гаусов услов за конструкцију правилног n-тоугла није само **довољан** већ и **потребан**, те да правилни седмоугао и правилни деветоугао није могуће конструисати шестаром и лењиром, управо из разлога што 7 и 9 нису Фермаови бројеви. [3, стр. 136]

8.2 Правилни полигони и конструкција угла

Централни угао правилног полигона јесте

$$\varphi = \frac{360^\circ}{n}$$

где је n број ивица правилног полигона.

Конструкцијом n централних углова један за другим, на јединичној кружници, добија се правилни полигон.

У наставку, даћемо и алгебарски доказ немогућности конструкције правилног седмоугла, а у читаву причу увешћемо и комплексне бројеве.

[2] Пјер Лаурент Ванцел, 1814-1848. год.

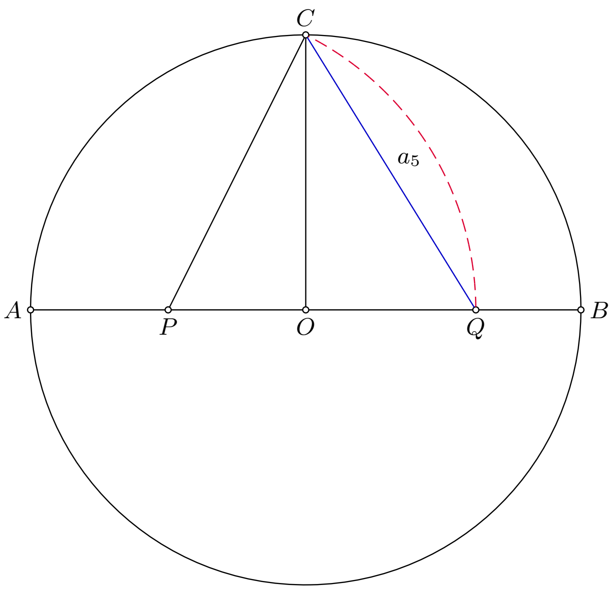
8.3 Конструкција правилног петоугла

Птолемај у свом Алмагесту[3] у дати круг уписује правилни петоугао и десетоугао.

Начин на који Птолемај то чини описаћемо по ставкама.

Конструишимо:

- пречник AB задатог круга чији је центар тачка O
- полупречник OC управан на пречник AB
- тачку P која је средиште дужи AO
- дуж PC
- тачку Q тако да је $PC = PQ$
- дуж QC



Слика 8.3: Птолемајева конструкција правилног петоугла

Управо је CQ дужина странице правилног петоугла. У зависности од јединичне дужи коју изаберемо за конструкцију, добићемо дужину странице правилног петоугла.

[3] Велики математички зборник астрономије написан у 13 књига око 150. године

Означимо страницу петоугла са a_5. С обзиром да је у питању јединични круг, и тачка P средиште полупречника AO важи $OP = \frac{1}{2}$.

Троугао POC је правоугли са правим углом код темена O, па применом Питагорине теореме следи:

$$OP^2 + OC^2 = PC^2$$

$$(\frac{1}{2})^2 + 1^2 = PC^2$$

$$PC = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$PQ = PC = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$OQ = PQ - OP$$

$$OQ = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}$$

$$OQ = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Најзад применом Питагорине теореме на троугао QOC добијамо дужину странице правилног петоугла:

$$QC^2 = a_5^2 = OC^2 + OQ^2$$

$$a_5^2 = 1^2 + (\frac{\sqrt{5}-1}{2})^2$$

$$a_5^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$$

Међутим, како знати да ово заиста јесте дужина о којој говоримо?

Оно што је познато јесте да централни угао правилног петоугла износи $72°$. Показаћемо да косинус угла једнакокраког троугла чије су дужине крака 1 одговара претходно израчунатој дужини a_5.

Применом косинусне теореме на троугао добијамо:

$$a_5^2 = 2 - 2\ cos\ 72°$$

Дакле, проблем се свео на израчунавање косинуса угла од $72°$.

Послужићемо се једним триком.

$$cos\ 72° = sin\ 18°$$

Нека је $x = 18°$. Тада је $sin\ 5x = sin 90° = 1$

$$sin\ 2x = sin\ (90° - 3x)$$

$$2sin\ xcos\ x = cos\ 3x$$

После сређивања добијамо:

$$4sin^4\ x + 2sinx - 1 = 0$$

И како се тражи синус угла од 18° резултат је:

$$sin\ x = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

Сада је применом косинусне теореме:

$$a_5^2 = 2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

Тј.

$$a_5^2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$$

8.4 Правилни петоугао и полиноми

Као што смо закључили у претходној секцији, уколико је могуће конструисати угао α, могуће је конструисати и $cos\ \alpha$. У овом случају, с обзиром да се ради о правилном петоуглу, уколико је могуће конструисати угао од $\frac{2\pi}{5}$ радијана, могуће је конструисати и $cos\ \frac{2\pi}{5}$.

Напомена 3. у комплексној равни нуле полинома $x^5 = 1$ су темена правилног петоугла!

Шта су решења једначине $x^5 = 1$?

$$x^5 - 1 = 0$$

$$x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

Факторисаћемо симетрични полином $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = x^2(x + \frac{1}{x} + 1 + x^2 + \frac{1}{x^2})$$

Увешћемо смену: $x + \frac{1}{x} = t$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$$

Односно,

$$x^4+x^3+x^2+x+1=t^2+t-1=(t-\frac{\sqrt{5}-1}{2})(t+\frac{\sqrt{5}-1}{2})$$

$$x^5-1=(x-1)(x^2-\frac{\sqrt{5}-1}{2}x+1)(x^2+\frac{\sqrt{5}+1}{2}x+1)$$

Сада када је полином у факторисаном облику, одредимо и комплексне нуле једначине $x^5=1$.

Нуле полинома су $x_0=1,\ x_1=cos(\frac{2\pi}{5})+isin(\frac{2\pi}{5}),\ x_2=cos(\frac{4\pi}{5})+isin(\frac{4\pi}{5}),\ x_3=cos(\frac{4\pi}{5})-isin(\frac{4\pi}{5})=\overline{x_2},\ x_4=cos(\frac{2\pi}{5})-isin(\frac{2\pi}{5})=\overline{x_1}$.

Сређивањем произилази:

$$x^5-1=(x-1)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$$

$$x^5-1=(x-1)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-\overline{x_2})(x-\overline{x_1})$$

$$x^5-1=(x-1)(x^2-2cos(\frac{2\pi}{5})x+1)(x^2-2cos(\frac{4\pi}{5})x+1)$$

Упоређивањем факторизација и искоришћавајући једнозначност између $\frac{2\pi}{5}$ и $\frac{4\pi}{5}$ (а који се разликују до на знак) долази се до закључка да је $cos(\frac{2\pi}{5})=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Овакав број се може конструисати, па је коначан закључак да је могуће конструисати правилан петоугао.

8.5 Конструкција правилног десетоугла

Вратимо се натраг поменутој Птолемејевој конструкцији. Да би се конструисао правилан десетоугао потребно је конструисати угао од $36°$. Када је позната конструкција угла од $72°$, онда је лако извести и конструкцију угла од $36°$.

Наиме, квадрат дужине странице правилног десетоугла биће:

$$a_{10}^2=a_5^2-1$$

$$a_{10}^2=\frac{5-\sqrt{5}}{2}-1$$

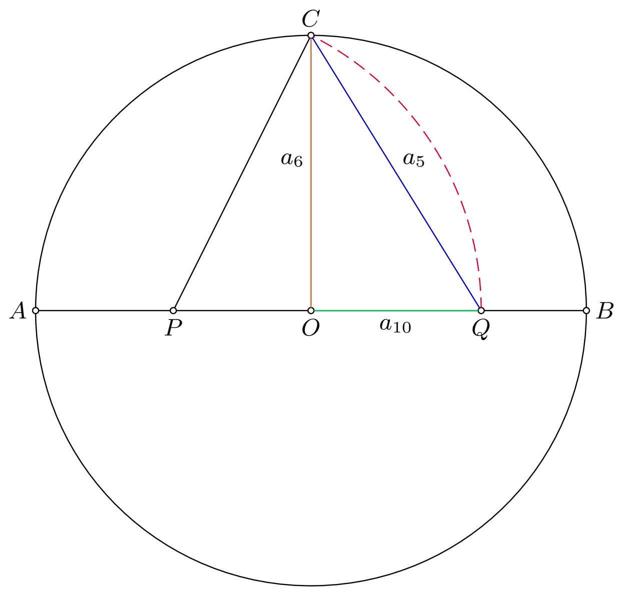
$$a_{10}^2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

што је конструктибилан број.

Такође, конструктибилан је и *cos* 36°. [4]

На овом месту, већ потпуно јасно, следи веза између дужина страница правилног петоугла, шестоугла и десетоугла[5].

$$a_5^2 = a_6^2 + a_{10}^2$$



Слика 8.4: Ивица правилног петоугла, шестоугла и десетоугла

8.6 Златни пресек

Златни пресек или по Еуклиду **подела у средњој и крајњој размери** или **божанствена пропорција** како је писао Лука Печоли[6], представља поделу дужи на два неједнака дела, при којој се мањи део дужи односи према већем делу дужи исто онако као што се већи део дужи односи према целој дужи.

Ако је дата дуж AB тако да C припада датој дужи, и $AC = a$, $CB = b$ и $a > b$, тада важи:

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = \tau$$

[4]Искористити већ израчунату вредност синуса од 18°

[5]Еуклид доказује у тринаестој књизи Елемената ову тврдњу

[6]фра Лука Пачоли 1445-1517. год.

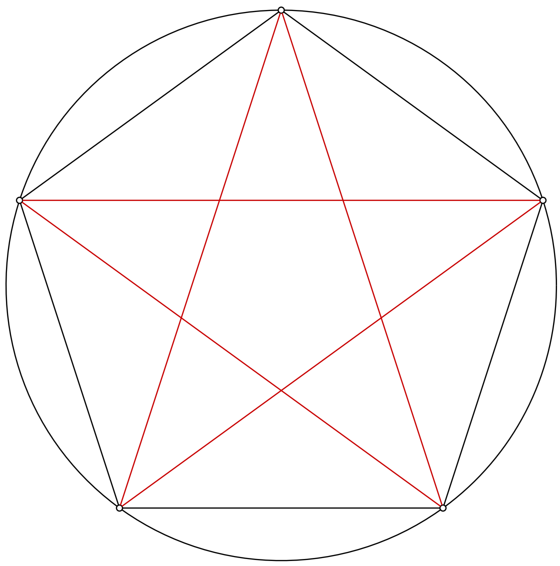
Сређивањем се добија $a^2 = b(a+b)$, тј. $a^2 = ab + b^2$. Решавањем квадратне једначине $a^2 - ab - b^2 = 0$ следи:

$$a = \frac{b(1+\sqrt{5})}{2}$$

Избором позитивног решења (a и b су дужи!) коначно се добија:

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{b(1+\sqrt{5})}{2}}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \tau$$

Сматрало се да лепота и хармонија почивају на златном пресеку. Питагорејци су овоме поклањали доста пажње, а најбољи пример је звездолики петоугао који је Питагорејцима симболизовао Здравље.

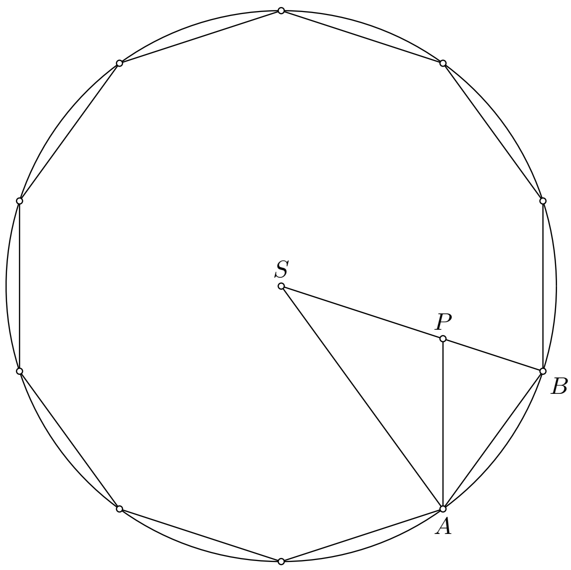


Слика 8.5: Симбол „Здравља"

Познато је да је Еуклид увео златни пресек у четвртој књизи Елемената ради конструкције правилног петоугла.

Лука Пачоли показује да број τ полупречник описаног круга правилног десетоугла ивице 1.

Посматрајмо једнакокраки троугао ABS, где је AB ивица, а S средиште правилног десетоугла. Угао код темена S је $\frac{\pi}{5}$, а код темена A и B је $\frac{2\pi}{5}$. Симетрала угла A сече дуж SB у тачки P. Угао $\angle BAP$ једнак је углу код темена S и износи $\frac{\pi}{5}$. Лако је установити да је угао



Слика 8.6: Једнакокраки троугао са угловима $\frac{\pi}{5}$ и $\frac{2\pi}{5}$

$\measuredangle BPA = \frac{2\pi}{5}$, па је троугао ABP једнакокраки. Троуглови SAB и ABP имају исте углове па су међусобно слични. Тада важи:

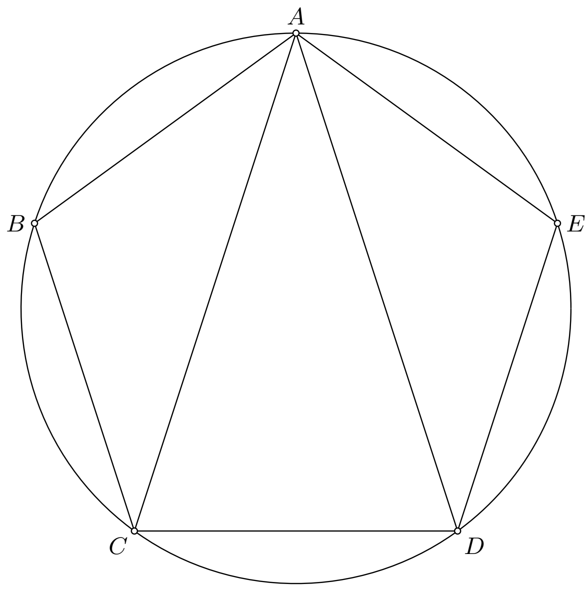
$$SB : SP = SA : AB = AB : BP = SP : BP$$

Тачка P је златни пресек дужи SB јер „цела дуж стоји према већем делу као већи део према мањем".

Из претходног се да закључити да је за конструкцију правилног десетоугла довољно конструисати троугао којем је угао код једног темена двоструко мањи од сваког од преосталих двају углова.

О овоме пише и Еуклид у десетом ставу четврте књиге Елемената.

Троугао ABS сличан је троуглу ACD са следеће слике, па је јасна и конструкција правилног петоугла.



Слика 8.7: Једнакокраки троугао са угловима $\frac{\pi}{5}$ и $\frac{2\pi}{5}$

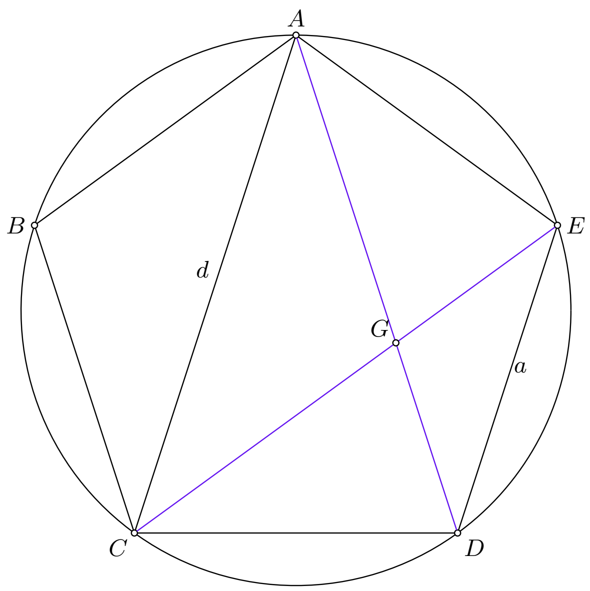
У свом раду „Божанствена пропорција” Лука Пачоли показује и да је разлагање дијагонале правилног петоугла тачком у којој је сече друга дијагонала златни пресек.

Обележимо $AC = d,\ ED = a$

$$AG : GD = AC : DE = d : a = AD : BC = AD : AG$$

Троуглови AGC и DGE су слични, $ABCG$ је паралелограм и важи:

$$d : a = a : (d - a) = \tau$$



Слика 8.8: Златни пресек дијагонала правилног петоугла

8.7 Конструкција правилног седмоугла

Нуле полинома $x^7 = 1$ леже на јединичној кружници и тачке којима су одређене представљају темена правилног седмоугла. Питање да ли је могуће конструисати правилни седмоугао еквивалентно је питању да ли је могуће конструисати угао од $\frac{2\pi}{7}$ радијана.

Факторишимо полином $x^7 - 1$ примењујући исти поступак као и код петоугла.

$$x^7 - 1 = (x-1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

$$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = x^3(x^3 + \frac{1}{x^3} + x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} + 1)$$

Уведимо смену $x + \frac{1}{x} = t$.

Тада ће бити из $(x + \frac{1}{x})^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$ и $(x + \frac{1}{x})^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3(x + \frac{1}{x})$ бити:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2,\ x^3 + \frac{1}{x^3} = t^3 - 3t$$

тј.

$$x^3 + \frac{1}{x^3} + x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} + 1 = t^3 + t^2 - 2t - 1$$

Полином t^3+t^2-2t-1 нема рационалних корена јер ниједан делилац слободног члана није корен полинома. Према томе, полином нема рационалних корена, па следи да нема ни конструктибилних корена, односно страница правилног седмоугла не може се конструисати.

8.8 Правилан седамнаестоугао

Деветнаестогодишњи амбициозни студент математике, Гаус, решавањем проблема конструкције правилног седамнаестоугла доспева на пиједестал вредан сваке пажње и уважавања математичког генија.

Према анегдоти, млади Гаус је одмах пошто је конструисао дати седамнаестоугао, у новинама објавио вест која је гласила: „Гаус, студент математике, конструисао правилан седамнаестоугао”.

Као што смо у досадашњем излагању видели, правилни полигон са 17 ивица јесте конструктибилан, јер је 17 Фермаов број. У истом, централни угао износи $\frac{2\pi}{17}$.

Гаус налази да је овај угао могуће конструисати и долази до његовог косинуса који је једнак броју:

$$-\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\sqrt{17}+\frac{1}{16}\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\frac{1}{8}\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}$$

Јасно је, после свега изложеног, да је и овај ирационалан број конструктибилан.

Позната је Гаусова жељи да правилни седамнаестоугао буде уклесан на његовом надгробном споменику. Ипак, ова конструкција уклесана је само на споменику подигнутом му у родном Брауншвајгу.

Глава 9

Закључак

Циљ овог мастер рада био је представити везу алгебре и геометрије која је историјски праћена проблематиком којом сам се бавио.

Надам се да је начин излагања прикладан талентованом средњошколцу, и да ће Он имати највише користи, јер после свега, Он је Тај коме су сва знања универзума подређена и коме је заветовано да обогати свој ум, и постане и формално део ***Размишљајућег Космоса***.

Срдачно,
Лазар Станојковић

Глава 10

Литература

[1] Петровић, М., Трисекција угла и квадратура круга пред француском академијом наука, књига 24, бр. 5, Српски књижевни гласник, 1928.

[2] Божић, Милан, Преглед историје и филозофије математике, Завод за уџбенике, Београд, 2010.

[3] Лучић, Зоран, Огледи из историје античке геометрије, Службени гласник, Београд, 2009.

[4] Пауновић, Ђура, Правилни полигони, Друштво математичара Србије, Београд, 2006.

[5] Платон, Теетет, Плато, Београд, 2008.

[6] T. L. Heath, A History of Greek Mathematics, vol. I-II, Dover, New York, 1981.

[7] Judson, Thomas, Abstract Algebra - Theory and Applications, Stephen F. Austin State University, Texas, August 2012.

[8] Милинковић, Дарко, Математичка анализа 1 Скрипта, Математички факултет, Београд, 2016.

[9] Мијајловић, Жарко, Предавања из алгебре 2, Математички факултет, Београд, 2001.

[10] Липковски, Александар, Елементарна алгебра, Математички факултет, Београд, 2009.

[11] Klein, Felix, Famous Problems of Elementary Geometry, The Athenaeum Press, 1897.

[12] Курепа, Ђуро, Виша алгебра 1 и 2, Школска књига, Загреб, 1965.

[13] Ујевић, Тин, Песме, Српска књижевна задруга, Београд, 1937.