Универзитет у Београду

Математички факултет

Мастер рад

Вишеструко животно осигурање

Аутор: Љиљана Лазарић

Ментор: др Павле Младеновић

Београд, 2016.

Рад посвећујем својим родитељима, Слободану и Јасмини;
свом брату, Марку;
и свом професору из Гимназије, Сави Сарићу.

Захваљујем се ментору, проф. др Павлу Младеновићу, на предложеној теми и стручној помићи током израде мастер рада.

Садржај

1 Увод

Људи свакодневно праве планове за будућност. Међутим, искуство показује да планови често неће бити остварени.
Некада је разлог нереализовања плана грађење тог плана на врло нереалним претпоставкама, а некада су разлози ометања плана случајне околности.
Осигураље је осмишљено да заштити од озбиљних финансијских преокрета чији су узрок случајни догађаји везани за план.
Наравно, осигурање има своја ограничења. Основно ограничење је то што осигурање може да смањи последице случајних догађаја само новцем. На пример, патња може бити последица случајних догађаја, али њено смањење није подложно осигурању. Осигурање може само да обезбеди финансијску подршку у случају да дође до патње. Затим, важно ограничење осигурања је то што некада не може директно да смањи појединачни губитак. На пример, рат или природне непогоде, када се догоде, истовремено унесреће велики број људи, те се таква осигурања ретко креирају.
Какогод, добро осмишљен систем осигурања често омогућава финансијске подстицаје за превентивно деловање на губитак. Зато је важан задатак актуара да развију што више типова осигурања да би понуда осигурања била што различитија и садржајнија.
Основни модел животног осигурања односи се на једну особу, при чему је за осигуравајуће друштво од значаја само да ли је смрт наступила за време трајања уговора о осигурању. Природно уопштење таквог модела су модели *вишеструког осигурања* које делимо на *модел вишеструког декремента* и *модел осигурања више особа.* Модел вишеструког декремента се користи при моделирању уговора о осигурању који зависе од више различитих случајних догађаја, а модел осигурања више особа се користи за заједничко осигуравање више особа.
Циљ овог рада је обрадити математичке моделе вишеструког животног осигурања, а за то је најважније познавање математике животног осигурања.
Управо *математика животног осигурања* омогућава израду модела и израчунавање премија (износа новца) потребних за осигурање, те је њено познавање основа за пословање осигуравајућих компанија.

[2], [6], [3], [9]

`Овај одељак је написан захваљујући литератури чији је редни број из списка литературе наведен у загради. Надаље ће, у сваком одељку, на исти начин бити наведена литература.`

2 Основни појмови у осигурању

Систем осигурања (insurance system) је механизам за смањење негативног финансијског утицаја случајних догађаја који се очекују.

Основна идеја је удруживање људи, који су изложени нежељеним последицама случајних догађаја за које се унапред зна, према теорији вероватноће, да ће задесити само неке од њих, ради заједничког подношења штете. Наиме, ако се велики број особа укључи у повезивање ризика у један фонд, према закону великих бројева појединачни ризик ће бити занемарљиво мали.

Полиса осигурања (isurance policy) је основна писмена исправа која прати посао осигурања, одређујући дужности и обавезе учесника. Некада представља саму форму уговора о осигурању. Свакако, полиса осигурања садржи најважније елементе закљученог уговора, увек прати уговор о осигурању и представља најважније доказно средство за обе уговорене стране.

Лица у осигурању су *осигуравач (insurer)* и *осигураник (insured).* Осигуравач је осигуравајуће друштво, а осигураник је физичко или правно лице које закључује уговор о осигурању у своје име и за свој рачун.

Осигурана сума (sum insured) је највећи могући износ накнаде осигураног случаја. То је износ који осигуравач плаћа осигуранику ако дође до осигураног случаја.

Премија осигурања (insurance premium) представаља цену ризика тј. износ који осигураник треба да плати за осигурање.

[2], [3], [9], [6]

3 Каматне стопе и токови новца

Уговори о осигурању се често склапају на много година. Тако да је за израчунавање премија у осигурању веома важна *временска вредност новца* (*the time value of money*). Знамо да је један динар данас вреднији него један динар примљен за 10 година јер ако један динар данас уложимо у банку, за 10 година ћемо имати динар плус интерес на тај динар. *Временска вредност новца* квантификује динар кроз време. И за *каматну стопу* се често каже да је временска вредност новца.
Новац који осигуравајућа компанија прима од осигураника може да инвестира док фонд за исплату не буде потребан. Током фазе акумулације осигуравајућа компанија се ослања на интерес који ће јој омогућити неопходан фонд за исплату добити за коју се обавезала уговором. Ако паушално поравнање уплата и исплата није рачунато на смрти (тренутак окончања уговора), каматна стопа ће имати утицај на износ фонда за исплату добити.
Јасно је да је основа за успешно функционисање осигуравајуће компаније процена праве *каматне стопе* (*interest rate*).
[11], [12]

3.1 Каматне стопе (The Interest Rate)

Постоје два основна начина обрачунавања камате:

1) *Просто* (*Simple*) *камаћење.* Код простог камаћења новац уложен на одређен период накупи камату пропорционалну времену трајања инвестиције. На пример, ако је главница G, онда је скупљен новац после две године једнак $G(1+2i)$, где је са i означена каматна стопа.

2) *Сложено* (*Compounding*) *камаћење.* Размотримо камаћење код кога се камата обрачунава годишње. Код сложеног камаћења се после једне године добијена камата додаје главници, чиме се добије увећана главница. Камата за другу годину се добија на основу те увећане главнице.
Камаћење се у пракси обично прерачунава чешће: тромесечно, месечно, дневно, непрекидно (број периода бесконачно велик)... . На пример, ако се камата обрачунава тромесечно, скупљен новац после једне године је $G(1+\frac{i}{4})^4$.

Сложено камаћење подиже камату. То можемо показати применом *Њутнове биномне формуле.*
Дакле, за $i > 0$ важи

$$(1+\frac{i}{4})^4 = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} (\frac{i}{4})^k \cdot 1^{4-k} = 1 + i + ... > 1 + i\,. \quad (1)$$

Ефективна каматна стопа (*effective interest rate*) је она каматна стопа која би при простом камаћењу произвела исти резултат као полазна каматна стопа при сложеном камаћењу. Та полазна каматна стопа се назива *номинална каматна стопа* (*nominal interest rate*).

Дакле, важи

$$i_{ef} = \frac{\text{сума добијена на крају године} - G}{G} \tag{2}$$

Стога, ако се камата обрачунава непрекидно, веза између *номиналне* и *ефективне* каматне стопе је:

$$\begin{aligned} i_{ef} &= \frac{G(1+\frac{i}{m})^m - G}{G} = (1+\frac{i}{m})^m - 1 \\ 1 + i_{ef} &= (1+\frac{i}{m})^m \quad / \lim_{m\to\infty} \\ 1 + i_{ef} &= \lim_{m\to\infty}(1+\frac{i}{m})^m = e^i \\ i_{ef} &= e^i - 1\,, \end{aligned} \tag{3}$$

где је $e = 2.7818...$ основа природног логаритма.
[12]

3.2 Садашња вредност и дисконти фактор (Present Value and Discount Factor)

Интересује нас која је вредност данас новца који ћемо добити у неком тренутку у будућности. Због тога уводимо појам *садашње вредности* новца.

Садашња вредност (*present value*) износа A кроз годину дана је износ данас једнак $\frac{A}{1+i}$, где је i важећа каматна стопа.

Фактор за који се будућа сума умањује (дисконтује) да би се добила садашња вредност назива се *дисконтни фактор* или *дисконтна стопа* (*discounting factor*).
Дисконтни фактор за једну годину износи $v = \frac{1}{1+i}$, где је i годишња каматна стопа.
[12]

3.3 Перпетуитети и Ануитети (Perpetuities and Annuities)

Перпетитет представља бесконачни низ плаћања једнаких износа у једнаким временским интервалима, обично на годину дана.

Ако је прво плаћање код перпетуитета у тренутку 0, онда се тај перпетуитет назива *трајни перпетуитет* (*perpetuity-due*).
Његова садашња вредност, ако је износ плаћања 1, је

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|} = 1 + v + v^2 + ... = \frac{1}{1-v} = \frac{1}{d}\,. \tag{4}$$

Ако је прво плаћање код перпетуитета на крају прве године након склапања, онда се тај перпетуитет назива *тренутни перпетуитет* (*immediate perpetuity*).
Његова садашња вредност, ако је износ плаћања 1, је

$$a_{\overline{\infty}|} = v + v^2 + ... = \frac{v}{1-v} = \frac{1}{i}\,. \tag{5}$$

Ануитет је дефинисан као низ плаћања ограниченог трајања, које ми означавамо са n.
Садашња вредност ануитета који почиње у тренутку 0 са износом плаћања од 1 је

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = v + v^2 + ... + v^{n-1}\,. \tag{6}$$

Ануитет се може представити као разлика два перпетуитета

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{\infty}|} - v^n \ddot{a}_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{d} - v^n \frac{1}{d} = \frac{1-v^n}{d}\,. \tag{7}$$

[1], [11]

4 Основни модел животног осигурања

С обзиром да је вишеструко осигурање уопштење основног модела најпре ћемо се бавити основним моделом, односно елементарним (класичним) типовима животног осигурања.

4.1 Модел (The Model)

Математички модели се користе за предвиђање релативне учесталости осигураног догађаја и израчунавање премије потребне да се осигура тај догађај. Стога је важно, због разумевања и рачунања премије животног осигурања, знати како су ови модели (и таблице смртности) развијени. На пример, ако је осигурани догађај смрт, износ премије је функција стопе смртности; а ако је осигурани догађај болест, онда премија осигурања зависи од стопе јављања болести. Све то треба прецизно моделирати и тачно математички израчунати.

Животни век (The Future Lifetime)

Да бисмо се бавили животним осигурањем неке особе треба да математички моделирамо њен животни век.

Најпре ћемо посматрати особе старости 0, новорођенчад. Дакле, тренутак 0 је време рођења особе, и претпостављаћемо да је та особа у тренутку 0 жива. Оно што нас највише занима је колико ће особа живети, односно *старост на смрти* (*age at death*) особе.
С обзиром да не знамо унапред колико ће особа живети, логично је да *старост на смрти* моделирамо непрекидном и ненегативном случајном променљивом, X.
Функција расподеле за X дата је са

$$F(x) = P(X \leq x) = P(X < x)\,. \tag{8}$$

Онда $F(x)$ представља вероватноћу да до смрти дође пре тренутка x.
Како је X позитивна $F(x) = 0$, за $x < 0$. Наравно, $F(\infty) = 1$.

Некада је у проблемима животног осигурања интересантнија вероватноћа преживљавања него вероватноћа смрти, те ћемо дефинисати и *функцију преживљавања* (*survival function*), $s(x)$.
Функција $s(x)$ је дата са

$$s(x) = 1 - F(x) = P(X > x), \quad x \geq 0\,. \tag{9}$$

Дакле, $s(x)$ представља вероватноћу да новорођенче преживи до тренутка x.

Међународна актуарска заједница користи специфичну нотацију код животног осигурања коју ћемо наводити и користити.
Функција преживљавања има актуарску нотацију

$$ {}_xp_0 = s(x) = P(X > x) = 1 - {}_xq_0\,, \tag{10} $$

где је ${}_xq_0 = F(x)$.

Густина рсподеле вероватноћа случајне променљиве X мери релативну вероватноћу да се смрт јави за дату старост. Математички,

$$ f(x) = \frac{d}{dx}F(x) = -\frac{d}{dx}s(x), \quad x \geq 0 \tag{11} $$

где год извод постоји. Како је F нерастућа за $x \geq 0$, $f(x) \geq 0$ за $x \geq 0$.

Посматрајмо сада особу старости x година, краће *животна старост* (*life aged*) x, са ознаком (x). Означимо *преостали животни век* (*the future lifetime*) те особе са T или, прецизније, са $T(x)$. Онда ће $X = x + T(x)$ бити *старост на смрти* те особе.
С обзиром да не знамо унапред колико ће још особа живети, логично је претпоставити да је $T(x)$ непрекидна и ненегативна случајна променљива. Њена функција расподеле вероватноће је

$$ G(t) = F_{T(x)}(t) = P(T \leq t),\ t \geq 0\,. \tag{12} $$

Функција $G(t)$ изражава вероватноћу да ће особа (x) умрети у току t година, за неко фиксирано t.
Претпоставимо да је G позната непрекидна функција расподеле која има густину расподеле $g(t) = G'(t)$. Онда можемо записати

$$ g(t)dt = G(t+dt) - G(t) = P(t < T < t + dt)\,. \tag{13} $$

Ово је вероватноћа да до смрти дође у бесконачно малом интервалу времена између t и $t + dt$ (то јест да особа старости x умре између тренутака $x + t$ и $x + t + dt$).

Вероватноћа да ће особа старости x умрети у оквиру t година означена је актуарком нотацијом ${}_tq_x$ и одговара јој релација

$$ {}_tq_x = G(t) = P(T < t),\ \ t \geq 0\,. \tag{14} $$

Слично,

$$ {}_tp_x = 1 - G(t) = P(T > t),\ \ t \geq 0 \tag{15} $$

означава вероватноћу да особа старости x преживи наредних t година. Такође, важи:

$$\begin{aligned} {}_tp_x &= P(T > t) = P(X > x + t|X > x) \\ &= \frac{P[(X < x + t) \cap (X > x)]}{P(X > x)} \\ &= \frac{P(X > x + t)}{P(X > x)} \\ &= \frac{s(x + t)}{s(x)}, \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} {}_tq_x &= P(T \leq t) \\ &= 1 - {}_tp_x \\ &= 1 - \frac{s(x + t)}{s(x)}, \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} g(t) &= f_{T(x)}(t) \\ &= \frac{d}{dt}[{}_tq_x] \\ &= -\frac{d}{dt}(\frac{s(x + t)}{s(x)}) \\ &= \frac{f(x + t)}{s(x)}. \end{aligned} \tag{18}$$

Постоје специјални актуарски символи и за неке уопштеније вероватноће, као што је

$${}_{s|t}q_x = P(s < T < s + t) = G(s + t) - G(s) = {}_{s+t}q_x - {}_sq_x \tag{19}$$

који означава вероватноћу да особа старости x преживи s година и затим умре у оквиру t година.
Затим, са ${}_tp_{x+s}$ означавамо условну вероватноћу да особа преживи t година, након напуњених $x + s$ година.

$${}_tp_{x+s} = P(T > s + t|T > s) = \frac{1 - G(s + t)}{1 - G(s)} \tag{20}$$

Слично, дефинишемо

$${}_tq_{x+s} = P(T \leq s + t|T > s) = \frac{G(s + t) - G(s)}{1 - G(s)} \tag{21}$$

условну вероватноћу умирања у току t година имајући већ $x+s$ година. Следеће једнакости се лако добијају из претходних, а често се користе.

$$_{s+t}p_x = 1 - G(s+t) = [1-G(s)]\frac{1-G(s+t)}{1-G(s)} = \ _sp_x\ _tp_{x+s}\,, \tag{22}$$

$$_{s|t}q_x = P(s<T<s+t) = G(s+t)-G(s) = [1-G(s)]\frac{G(s+t)-G(s)}{1-G(s)} = \ _sp_x\ _tq_{x+s}\,. \tag{23}$$

Са $_{s+t}p_x$ је означена вероватноћа да особа старости x преживи наредних $s+t$ година, а са $_{s|t}q_x$ вероватноћа да особа старости x преживи s и затим умре у току $s+t$ година. Ова вероватноћа се назива *вероватноћа одложене смрти* (*deffered mortality probability*).

Очекивани будући животни век особе старости x (*The expected remaining lifetime of a life aged x*) је $E(T)$ и означавамо га са e_x^0. По дефиницији је

$$e_x^0 = \int_0^\infty tg(t)dt\,, \tag{24}$$

или, у терминима функције расподеле

$$e_x^0 = \int_0^\infty [1-G(t)]dt = \int_0^\infty {}_tp_x\,dt\,. \tag{25}$$

Напомена: Ако је $t=1$, индекс t је обично изостављен у ознакама $_tq_x$, $_tp_x$ и $_{s|t}q_x$. Тада је q_x вероватноћа да ће особа старости x умрети у току 1 године, p_x вероватноћа да ће преживети 1 годину и $_{s|}q_x$ је вероватноћа да особа старости x преживи s година и потом умре у току следеће године.
[1], [2], [3], [4], [10]

Целобројни животни век (The Curtate Future Lifetime)

У овом одељку дефинишемо нове случајне величине $K=K(x)$, $S=S(x)$ и $S^{(m)}=S^{(m)}(x)$, све блиско повезане са случајном промењљивом T.

Дефинишемо $K=[T]$, број преосталих целих (потпуних) година живота особе старости x, целобројни животни век (*curtate future lifetime*) за (x).
Вероватноћа расподеле целобројне вредности случајне промењљиве K дата је са

$$P(K=k) = P(k \le T < k+1) =_k p_x\, q_{x+k}, \quad k=0,1,2,... \tag{26}$$

Очекивану вредност за K називамо целобројни животни век за (x), и означавамо са e_x. Тада

$$e_x = \sum_{k=1}^{\infty} kP(K=k) = \sum_{k=1}^{\infty} k\ _kp_x\, q_{x+k} \tag{27}$$

или

$$e_x = \sum_{k=1}^{\infty} P(K \geq k) = \sum_{k=1}^{\infty} {}_k p_x \tag{28}$$

Предност очекиваног целобројног животног века је лакше ирачунавање (26) и (27) од (12) и (25). Такође, за налажење e_x потребна је само расподела за K. То је друга предност.

Нека је S део године током ког је особа старости x жива у години смрти тј.

$$T = K + S \tag{29}$$

Случајна промењива S има непрекидну расподелу између 0 и 1. Апроксимирањем њене очекиване вредности са $\frac{1}{2}$ можемо, из (29), извести апроксимацију

$$e_x^0 \approx e_x + \frac{1}{2} \tag{30}$$

која можемо користити у пракси за очекивани животни век за (x).

Претпоставимо да су K и S независне случајне промењиве тако да је условна расподела за S, за дато K, независна од K. Дакле,

$$P(S \leq u | K = k) = \frac{{}_u q_{x+k}}{q_{x+k}} \tag{31}$$

Ова вероватноћа неће зависити од аргумента k, тако да може бити записана

$${}_u q_{x+k} = H(u) q_{x+k}, \ \text{ за } k = 0, 1, 2, ... \text{ и } \ 0 \leq u \leq 1 \tag{32}$$

за неку функцију $H(u)$.

Ако претпоставимо да је $H(u) = u$ (равномерна расподела између 0 и 1), онда је апроксимација (30) тачна. И више, користећи (29) и претпоставку независности, дисперзија за T постаје

$$D(T) = D(K) + \frac{1}{12} \tag{33}$$

За позитивне целе m_k дефинишемо случајну промењиву

$$S^{(m)} = \frac{1}{m}[mS + 1] \tag{34}$$

Дакле, $S^{(m)}$ је изражена преко S заокруживањем на следећи већи $m-$ти део. Расподела за $S^{(m)}$ узима вредности у тачкама $\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, ..., 1$.
Независност између K и S имплицира неависност између K и $S^{(m)}$. Штавише, ако S има равномерну расподелу између 0 и 1, онда $S^{(m)}$ има дискретну равномерну расподелу.
[1], [2]

Стопа смртности (The Force of Mortality)

Стопа смртности (*the force of mortality*) је веома важан појам за моделирање животног века.

Желимо да оценимо вероватноћу да новорођенче умре у интервалу $(x, x+dx)$ за мало dx, под условом да је већ доживело x година.
Приметимо да важи

$$P(x < X < x + dx | X > x) = \frac{F(x + dx) - F(x)}{1 - F(x)} = \frac{f(x)dx}{1 - F(x)}, \text{ за мало } dx\,. \tag{35}$$

Стопу смртности у години x за новорођенче, μ_x дефинишемо са

$$\mu_x = \frac{f(x)}{1 - F(x)} = \frac{f(x)}{s(x)}\,. \tag{36}$$

Слично, *за особу старости x стопа смртности у години $x+t$* дефинисана је са

$$\mu_{x+t} = \frac{g(t)}{1 - G(t)} = -\frac{d}{dt} \ln[1 - G(t)] = -\frac{d}{dt} \ln {}_tp_x\,. \tag{37}$$

Сада можемо извести још један израз за вероватноћу умирања у интервалу између t и $t + dt$.

$$P(t < T < t + dt) = g(t)dt = (1 - G(t))\mu_{x+t}dt = {}_tp_x\mu_{x+t}dt\,. \tag{38}$$

Такође, очекивани животни век особе старости x сада може бити записан као

$$e^0_x = \int_0^\infty {}_tp_x\, \mu_{x+t}dt \tag{39}$$

Ако у релацији (23) заменимо улоге променљивама s и t добијамо:

$${}_{t|s}q_x = P(t < T < s + t) = {}_tp_x\, {}_sq_{x+t}$$

Упоредимо сада овај резултат са релацијом (38):

$$P(t < T < t + dt) = {}_tp_x\, \mu_{x+t}dt$$

Видимо да за $s = dt$ важи

$${}_sq_{x+t} \approx \mu_{x+t}s \tag{40}$$

Дакле, за мале вредности s важи апроксимација (40). То значи да $\mu_{x+t}dt$ можемо да интерпретирамо као вероватноћу да особа старости t напуни $t+dt$ година. На пример, ако имамо особу старости 60 година и стопу смртности од $0,00555$ годишње за старост од 60 година. Мала вредност за dt може бити један дан, то јест 0.00274 година. Онда је апроксимација вероватноће да (60) умре на дан свог рођендана једнака $0.00555 \cdot 0.00274 = 1.5207 \cdot 10^{-5}$.

Дакле, стопа смртности је

$$\mu_{x+t} = -\frac{d}{dt} \ln {}_tp_x \tag{41}$$

Интеграцијом претходне једнакости добијамо

$$\begin{aligned} \int_0^t \mu_{x+s} ds &= -\ln {}_tp_x \\ \ln {}_tp_x &= -\int_0^t \mu_{x+s} ds \\ {}_tp_x &= e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds} \end{aligned} \tag{42}$$

То значи да ако знамо μ_x за свако $x \geq 0$, онда можемо израчунати ${}_tp_x$ за свако x и t. Другим речима, функција стопе смртности потпуно описује функцију расподеле за животни век.
[1], [2], [4]

Аналитичка функција расподеле за T (Analytical Distribution of T)

Функцију G називамо аналитичком функцијом вероватноће расподеле ако се може изразити једноставном формулом.
Постоје различити разлози за проналажењем аналитичке расподеле за Т. Аналитичка формула има предност јер се онда $G(t)$ може израчунати помоћу малог броја нумеричких параметара. То може бити важан фактор када су доступни подаци оскудни. Такође, аналитичке формуле имају неке атрактивне теоријске особине.

У наставку следе неки примери аналитичких формула. Свака носи име свог проналазача.

Де Муавр (1724) постулирао је постојање максималне старости за људска бића ω и претпоставио да је T равномерно распоређена имеђу узраста 0 и $\omega - x$, што је довело до следеће формуле за $g(t)$:

$$g(t) = \frac{1}{\omega - x}, \quad 0 < t < \omega - x \tag{43}$$

Тада стопа смртности постаје

$$\mu_{x+t} = \frac{1}{\omega - x - t}, \quad 0 < t < \omega - x \tag{44}$$

што је растућа функција по t.

Гомпертз (1824) постулирао је да стопа смртности расте експоненцијално

$$\mu_{x+t} = Bc^{x+t}, \quad t > 0 \tag{45}$$

Овај постулат боље одражава процес старења од Де Муавровог закона и отклања претпоставку о максималној старости ω. На први поглед изгледа логично. Али, ако погледамо таблице преживљавања, стопа смртности за већину популација није растућа функција кроз све године старости. Тачније, Гомпертзов модел не омогућава добру процену за базу смртности у неким годинама старости, посебно од средњих до раних година старости.

Можемо сада извести вероватноћу преживљавања у Гомпертзовом моделу. Напишимо најпре c^r као $e^{r\ln c}$.

$$\begin{aligned}\int_0^t \mu_{x+s}ds &= \int_x^{x+t} \mu_r dr \\ &= B\int_x^{x+t} \exp\{r\ln c\}dr \\ &= \frac{B}{\ln c}\exp\{r\ln c\}|_x^{x+t} \\ &= \frac{B}{\ln c}(c^{x+t} - c^x)\,,\end{aligned} \tag{46}$$

одакле добијамо

$${}_tp_x = \exp\left(-\frac{B}{\ln c}c^x(c^t - 1)\right). \tag{47}$$

Закон (45) је генерализовао Мејхам (1860), који је постулирао закон

$$\mu_{x+t} = A + Bc^{x+t}, \quad t > 0 \tag{48}$$

Мејхамов закон смртности додаје константу, независну компоненту старости $A > 0$ на експоненцијални раст стопе смртности.
Вероватноћа преживљавања у Мејхамовом моделу је

$${}_tp_x = \exp(-At - \frac{B}{\ln c}c^x(c^t - 1)). \tag{49}$$

Вејбул (1939) је сугерисао да стопа смртности расте са порастом t уместо експоненцијално и дао закон:

$$\mu_{x+t} = k(x+t)^n\,, \tag{50}$$

за фиксирано $k > 0$ и $n > 0$. Онда је вероватноћа преживљавања код овог модела

$${}_tp_x = \exp(-\frac{k}{n+1}[(x+t)^{n+1} - x^{n+1}]). \tag{51}$$

[1], [4], [7]

Табеле преживљавања (Life Tables)

Расподела вероватноће преосталог животног века особе може бити конструисана помоћу погодних табела преживљавања. Заправо, табеле преживљавања су постојале пре модела преживљавања, а вероватноће и очекивања су се изводили из њих.

Да би се направила табела смртности, почиње се са посматрајњем групе l_0 новорођенчади. Та група има актуарски назив *кохорт* (*cohort*). Индексирајмо животе новорођенчади из групе са $j = 0, 1, ..., l_0$. За свако од њих расподела вероватноће за *старост на смрти* је одређена са $s(x)$.
Означимо са $\mathfrak{L}(x)$ број чланова те групе који су доживели старост x. Дакле,

$$\mathfrak{L}(x) = \sum_{j=1}^{l_0} I_j \,, \tag{52}$$

где је

$$I_j = \begin{cases} 1 & \text{ако је особа } j \text{ жива у тренутку } x \\ 0 & \text{иначе}. \end{cases} \tag{53}$$

Како је $E[I_j] = s(x)$, онда је

$$E[\mathfrak{L}(x)] = \sum_{j=1}^{l_0} E[I_j] = l_0 s(x) \,. \tag{54}$$

Означимо $E[\mathfrak{L}(x)]$ са l_x. Онда l_x представља број преживелих до тренутка x од l_0 новорођених.
Слична ознака, ${}_n\mathfrak{D}(x)$, означава број умрлих између старости x и $x+n$, за број новорођених l_0. Слично, $E[{}_n\mathfrak{D}(x)]$ се означава са ${}_nd_x$ и представља очекивани број умрлих у интервалу $(x, x+n)$. С обзиром да новорођенче умире између x и $x+n$ са вероватноћом $s(x) - s(x+n)$, добијамо

$$\begin{aligned} {}_nd_x = E[{}_n\mathfrak{D}(x)] &= l_0[s(x) - s(x+n)] \\ &= l_x - l_{x+n} \,. \end{aligned} \tag{55}$$

Део типичне табеле преживљавања изгледа:

Старост	l_x	d_x
0	100,000	501
1	99,499	504
2	98,995	506
3	98,489	509
4	97,980	512
5	97,468	514

Користећи формулу $l_x = l_0 s(x)$ ову табелу преживљавања можемо конвертовати у таблу са вредностима функције преживљавања.

Старост	$s(x)$
0	1.00000
1	0.99499
2	0.98995
3	0.98489
4	0.97980
5	0.97468

Можемо конвертовати и остале вероватноће по следећим формулама:

$$ {}_nq_x = \frac{s(x) - s(x+n)}{s(x)} = \frac{l_0(s(x) - s(x+n))}{l_0 s(x)} = \frac{{}_nd_x}{l_x}\,, \tag{56}$$

специјално,

$$q_x = \frac{d_x}{l_x}\,. \tag{57}$$

$$ {}_np_x = 1 - {}_nq_x = 1 - \frac{l_x - {}_nd_x}{l_x} = \frac{l_{x+n}}{l_x}\,, \tag{58}$$

и специјално

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}\,. \tag{59}$$

Изведимо и формулу за стопу смртности.

$$\mu_x = -\frac{s'(x)}{s(x)} = -\frac{l_0 s'(x)}{l_0 s(x)} = -\frac{\frac{dl_x}{dx}}{l_x}\,. \tag{60}$$

Интеграцијом даље добијамо:

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{\frac{dl_t}{dt}}{l_t}dt &= -\int_0^x \mu_t dt \\
\ln l_t|_0^x &= -\int_0^x \mu_t dt \\
\ln\left(\frac{l_x}{l_0}\right) &= -\int_0^x \mu_t dt \\
l_x &= l_0 e^{-\int_0^x \mu_t dt}\,.
\end{aligned} \tag{61}$$

Даље, користећи ${}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$ добијамо

$$l_{x+n} = l_x e^{-\int_0^n \mu_{x+t} dt}\,. \tag{62}$$

У суштини, табеле преживљавања садрже једногодишње вероватноће смрти, q_x, и самим тим комплетно дефинишу расподелу за случајну променљиву K. Расподела за T се добија апроксимирањем и интерполацијом табела преживљавања, под претпоставкама у вези са вероватноћама смрти, ${}_uq_x$, или у вези са стопом смртности, μ_{x+u}, за тренутну старост $x+u$ (x цео број и $0 < u < 1$). Погледајмо две такве претпоставке:

а) Линеарност ${}_uq_x$
Ако претпоставимо да је ${}_uq_x$ линеарна функција по u, интерполација између $u = 0$ и $u = 1$ даје

$$ {}_uq_x = uq_x \,. \tag{63} $$

Онда су променљиве K и S независне и S је униформно расподељена између 0 и 1 (присетимо се одељка о целобројном животном веку). Важи:

$$ {}_up_x = 1 - uq_x \,. \tag{64} $$

и

$$ \mu_{x+u} = \frac{q_x}{1 - uq_x} \,. \tag{65} $$

б) μ_{x+u} константа
Претпоставимо да је стопа смртности константа на сваком јединичном интервалу. Означимо вредност те константне вредности са $\mu_{x+\frac{1}{2}}$.
Користећи (41) налазимо

$$ \mu_{x+\frac{1}{2}} = -\ln p_x \,. \tag{66} $$

Такође, следи да је

$$ {}_up_x = e^{-u\mu_{x+\frac{1}{2}}} = (p_x)^u \,. \tag{67} $$

Из (31) добијамо

$$ P(S \le u | K = k) = \frac{1 - p_{x+k}^u}{1 - p_{x+k}} \,. \tag{68} $$

Условна расподела за S, за дато $K = k$, је онда окрњена експоненцијална расподела, и зависи од k. Случајне променљиве K и S овде нису независне.

Битно је, такође, рећи да се табеле преживљавања конструишу за извесне популационе групе различито по факторима као што је пол, раса, узраст и тип осигурања. Старост може имати значајан утицај на такве табеле. На пример, нека је са x означена старост особе када је осигурање купљено. Осигурање се нуди само за особе доброг здравља (понекад једино после медицинске провере). Логично је очекивати да је особа која је управо купила осигурање бољег здравља од особе која је купила осигурање неколико година раније, а други фактори (и сама старост) су исти. Ова појава узима се у обзир код *селективних табела преживљавања* (*select life tables*). У селекционим табелама преживљавања вероватноће смрти су оцењене у складу са годинама на почетку уговора. Нека је $q_{[x]+t}$ је вероватноћа једногодишње смрти за особу старости $x+t$, а старости x на почетку. Селекција доводи до неједнакости

$$q_{[x]} < q_{[x-1]+1} < q_{[x-2]+2} < \dots . \tag{69}$$

Селекциони ефекат обично нестаје после неколико година, рецимо r година након почетка. Претпоставимо да

$$q_{[x-r]+r} = q_{[x-r-1]+r+1} = q_{[x-r-2]+r+2} = \dots = q_x . \tag{70}$$

Период r је назван *селекциони период* (*select period*), и табела које се користе након истека селекционог периода названа је *коначна табела преживљавања* (*ultimate life table*).
Ако табела преживљавања варира само са навршених x година старости, назива се *агрегатна табела преживаљавања* (*agregate life table*).
[4], [1], [5]

4.2 Очекивана садашња вредност исплате (Net Single Premium)

Елементарно животно осигурање подразумева да се корист осигураника, на основу уговора о осигурању, састоји из једне исплате (осигуране суме). Време и количина ове исплате могу бити функције случајне променљиве T која представља животни век особе, то јест изражава колико времена ће особа живети.

Садашњу вредност исплате означићемо са Z. Она се израчунава на основу фиксне каматне стопе i. Очекивана садашња вредност исплате, $E(Z)$, назива се *нето једнократна премија* (*Net Single Premium*) уговора или *актуарска садашња вредност* (*Actuarial Present Value*) уговора.
[1], [3]

4.3 Елементарни типови осигурања (Elementary Insurance Types)

Доживотно осигурање (Whole Life)

Доживотно осигурање предвиђа исплату 1 јединице на крају године смрти. У овом случају износ исплате је фиксиран, док је време исплате, $(K+1)$, случајно. Садашња вредност те исплате је

$$Z = v^{K+1}, \tag{71}$$

где је са $v = \frac{1}{1+i}$ је дефинисан дисконтни фактор, а i је одговарајућа ефективна каматна стопа.
Случајна промењлива Z узима вредности $v, v^2, v^3, ...,$ а њена расподела је одређена са (71) и расподелом за K:

$$P(Z = v^{K+1}) = P(K = k) = {}_kp_x\, q_{x+k}, \quad k = 0, 1, 2, ... \tag{72}$$

Нето једнократна премија (*Net Single Premium*)је означена са A_x и дата са

$$A_x = E(v^{K+1}) = \sum_{k=1}^{\infty} v^{k+1}\, {}_kp_x\, q_{x+k} \tag{73}$$

Дисперзија за Z може бити израчуната из једнакости

$$D(Z) = E(Z^2) - {A_x}^2 \tag{74}$$

Заменом v са $e^{-\delta}$ добијамо да

$$E(Z^2) = E(e^{-2\delta(K+1)}) \tag{75}$$

што је нето једнократна премија израчуната дуплирањем оригиналне стопе интереса.
[1]

Орочено осигурање (Term Insurance)

Орочено осигурање трајања n подразумева да осигуравајуће друштво предвиђа исплату само ако се смрт догоди у току n година. На пример, 1 јединица се плаћа само ако смрт наступи током првих n година, а право време плаћања је и даље крај године смрти. Тада

$$Z = \begin{cases} v^{K+1} & \text{за} \quad k = 0, 1, ..., n-1 \\ 0 & \text{за} \quad k = n, n+1, n+2, ... \end{cases} \tag{76}$$

Нето једнократна премија (*Net Single Premium*)је означена са $A^1_{x:\overline{n}|}$ и једнака је

$$A^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n-1} v^{k+1}\, {}_kp_x\, q_{x+k} \tag{77}$$

Опет, други моменат је нето једнократна премија израчуната дуплирањем оригиналне стопе интереса, односно

$$E(Z^2) = \begin{cases} E(e^{-2\delta(K+1)}) & \text{за} \quad k = 1, 2, ..., n-1 \\ 0 & \text{за} \quad k = n, n+1, n+2, ... \end{cases} \tag{78}$$

[1]

Осигурање доживљења (Pure Endowment)

Осигурање доживљења трајања n, односно осигурање доживљења наредних n година, предвиђа исплату осигуране суме само ако је осигураник жив на крају $n-$те године. Дакле,

$$Z = \begin{cases} 0 & \text{за} \quad k = 0, 1, ..., n-1 \\ v^n & \text{за} \quad k = n, n+1, n+2, ... \end{cases} \tag{79}$$

Нето једнократна премија (*Net Single Premium*)је означена са $A_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1}$ и једнака је

$$A_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1} = v^n \, {}_np_x \tag{80}$$

Формула за дисперзију Бернулијеве случајне променљиве даје

$$D(Z) = v^{2n} \, {}_np_x \, {}_nq_x \tag{81}$$

[1]

Мешовито осигурање (Endowments)

Мешовито осигурање подразумева да се осигурана сума исплаћује на крају године смрти ако се смрт догоди у току првих n година, а у супротном на крају $n-$те године. Дакле,

$$Z = \begin{cases} v^{K+1} & \text{за} \quad k = 0, 1, ..., n-1 \\ v^n & \text{за} \quad k = n, n+1, n+2, ... \end{cases} \tag{82}$$

Нето једнократна премија (*Net Single Premium*)је означена са $A_{x:\overline{n|}}$.
Означивши садашњу вредност за (76) са Z_1, а садашњу вредност за (79) са Z_2, очигледно је

$$Z = Z_1 + Z_2 \tag{83}$$

Одатле добијамо да је

$$A_{x:\overline{n|}} = A^1_{x:\overline{n|}} + A_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1} \tag{84}$$

и

$$D(Z) = D(Z_1) + 2Cov(Z_1, Z_2) + D(Z_2) \tag{85}$$

Производ $Z_1 Z_2$ је увек 0 (следи директно из њихових дефиниција). Стога,

$$Cov(Z_1 Z_2) = E(Z_1 Z_2) - E(Z_1)E(Z_2) = -A^1_{x:\overline{n|}} A_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1} \tag{86}$$

Дисперзија за Z је онда дата са

$$D(Z) = D(Z_1) + D(Z_2) - 2A^1_{x:\overline{n}|}A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} \tag{87}$$

Из претходне једнакости види се да је ризик, мерен дисперзијом, продаје мешовитог осигурања мањи него појединачна продаја ороченог осигурања једној особи и полисе осигурања доживљења другој.
[1]

Одложено доживотно осигурање
(Deferred Whole Life Insurance)

Размотримо и доживотно осигурање које је *одложено* m *година.* Његова садашња вредност је

$$Z = \begin{cases} 0 & \text{за} \quad k = 0, 1, ..., m-1 \\ v^{K+1} & \text{за} \quad k = m, m+1, m+2, ... \end{cases} \tag{88}$$

Нето једнократна премија (*Net Single Premium*) је означена са ${}_{m|}A_x$.
Алтернативне формуле за нето једнократну премију су

$${}_{m|}A_x = {}_m p_x v^m A_{x+m} \tag{89}$$

и

$${}_{m|}A_x = A_x - A^1_{x:\overline{m}|} \quad . \tag{90}$$

До сада смо, због једноставности, претпостављали да је осигурана сума 1. Ако је осигурана сума C, онда се *нето једнократна премија* добија множењем са C, а *дисперзија* множењем са C^2.
[1]

Општи типови животног осигурања
(General Types of Life Insurance)

Почнимо са разматрањем животног осигурања са премијама које варирају из године у годину и претпоставимо да се осигурана сума исплаћује на крају године смрти.
Ако са c_j означимо *осигурану суму током* $j-$*те године* након издавања полисе, добијамо

$$Z = c_{K+1}v^{K+1} \tag{91}$$

Расподелу за Z, а посебно *нето једнократну премију* и више моменте, није тешко рачунати.

$$E(Z^h) = \sum_{k=0}^{\infty} c^h_{k+1} v^{h(k+1)} {}_k p_x q_{x+k} \tag{92}$$

Ово осигурање може бити представљено као комбинација одложених животних осигурања, од којих свако има константну осигурану суму. Тако да се *нето премија* може израчунати на следећи начин

$$E(Z) = c_1 A_x + (c_2 - c_1)_{1|}A_x + (c_3 - c_2)_{2|}A_x + (c_4 - c_3)_{3|}A_x + ... \tag{93}$$

У случају да осигурање покрива само период од n година, односно када је $c_{n+1} = c_{n+2} = ... = 0$, осигурање може бити представљено као комбинација орочених осигурања

$$E(Z) = c_n A^1_{x:\overline{n}|} + (c_{n-1} - c_n)A^1_{x:\overline{n-1}|} + (c_{n-2} - c_{n-1})A^1_{x:\overline{n-2}|} + ... \tag{94}$$

Алтернативна представљања (93) и (94) су корисна за рачунање нето једнократне премије, али нису за рачунање виших момената од Z.

Ако се осигурање плаћа одмах по смрти, осигурана сума може генерално да буде функција $c(t)$, $t \geq 0$, тако да је

$$Z = c(T)v^T \,. \tag{95}$$

Нето једнократна премија је

$$E(Z) = \int_0^\infty c(t)v^t \,{}_tp_x \mu_{x+t} dt \,. \tag{96}$$

Обрачун нето једнократне премије може бити сведен на обрачун у дискретном моделу. Из

$$\begin{aligned} E(Z) &= \sum_{k=0}^\infty E[Z|K=k]P(K=k) \\ &= \sum_{k=0}^\infty E[c(k+S)v^{k+S}|K=k]P(K=k) \\ &= \sum_{k=0}^\infty E[c(k+S)(1+i)^{1-S}|K=k]v^{k+1}P(K=k) \,, \end{aligned} \tag{97}$$

добијамо

$$E(Z) = \sum_{k=0}^\infty c_{k+1} v^{k+1} \,{}_kp_x q_{x+k} \,, \tag{98}$$

где је c_{k+1} дефинисано са

$$c_{k+1} = E[c(k+S)(1+i)^{1-S}|K=k] \,. \tag{99}$$

Условна расподела за S, за дато $K = k$, потребна је у циљу процене израза

(99). Навели смо раније две погодне претпоставке за ту процену. Претпоставка о линеарности ${}_uq_x$ даје

$$c_{k+1} = \int_0^1 c(k+u)(1+i)^{1-u} du\,, \tag{100}$$

док претпоставка да је μ_{x+u} константа даје

$$c_{k+1} = \int_0^1 c(k+u)(1+i)^{1-u} \frac{\mu_{x+k+\frac{1}{2}p^u_{x+k}}}{1-p_{x+k}} du\,, \tag{101}$$

За илустрацију, посматрајмо експоненцијални раст осигуране суме $c(t) = e^{\tau t}$. Формула (100) постаје

$$c_{k+1} = e^{\tau k} \frac{e^{\delta} - e^{\tau}}{\delta - \tau}\,, \tag{102}$$

а формула (101) постаје

$$c_{k+1} = e^{\tau k} \frac{\mu_{x+k+\frac{1}{2}}\ e^{\delta} - p_{x+k} e^{\tau}}{1 - p_{x+k}\delta + \mu_{x+k+\frac{1}{2}} - \tau}\,. \tag{103}$$

[1]

4.4 Елементарни животни ануитети (Elementary Life Annuities)

Животни ануитет подразумева серију уплата које се извршавају док је корисник, који на почетку уговора има x година, жив. Онда животни ануитет зависи од преосталог животног века T. Његова садашња вредност је случајна променљива коју ћемо означити са Y.
Нето једнократна премија животног ануитета је његова очекивана садашња вредност, $E(Y)$.
Животни ануитет може, у једне стране, бити добит од полисе осигурања као комбинација осигурања доживљења; а с друге стране, периодична плаћања премија могу бити одређена као животни ануитет.

Посматрајмо *доживотни ануитет* (*whole life annuity-due*) који омогућава годишње уплате 1 јединице док корисник живи. Уплате се извршавају у временским тренуцима $0, 1, ..., K$. Садашња вредност тока ових уплата је

$$Y = 1 + v + v^2 + ... + v^K = \ddot{a}_{\overline{K+1}|} \,. \tag{104}$$

Расподела вероватноћа ове случајне променљиве дата је са

$$P(Y = \ddot{a}_{\overline{k+1}|}) = P(K = k) = {}_k p_x q_{x+k} \,,\ k = 0, 1, 2, ... \,. \tag{105}$$

Нето једнократна премија, означена са $\ddot{a}_x$, је очекивана вредност за Y:

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1}|}\, {}_k p_x q_{x+k} \,. \tag{106}$$

Садашња вредност, Y, може бити изражена и на други начин:

$$Y = \sum_{k=0}^{\infty} v^k I_{\{K \geq k\}} \,, \tag{107}$$

где је I_A индикатор догађаја A. Очекивање за (107) је

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k\, {}_k p_x \,. \tag{108}$$

Дакле, нашли смо два израза за нето једнократну премију доживотног ануитета. У изразу (106) посматрамо ануитет као целину, а у изразу (108) посматрамо ануитет као серију осигурања доживљења.
Нето једнократна премија такође може бити изражена преко нето једнократне премије за доживотно животно осигурање.

$$Y = 1 + v + v^2 + ... + v^{K+1} = \ddot{a}_{\overline{K+1}|} = \ddot{a}_{\infty} - v^{K+1}\ddot{a}_{\infty} = \frac{1}{d} - v^{K+1}\frac{1}{d} = \frac{1 - v^{K+1}}{d} = \frac{1 - Z}{d} \,, \tag{109}$$

где је $\ddot{a}_\infty = 1 + v + v^2 + ... = \frac{1}{1-v} = \frac{1}{d}$ садашња вредност перпетуитета, (4). Прошавши очекивањем добијамо

$$\ddot{a}_x = \frac{1 - A_x}{d} \,. \tag{110}$$

Трансформацијом добијамо

$$1 = d\,\ddot{a}_x + A_x \,, \tag{111}$$

што можемо интерпретирати преко дуга од 1 јединице са годишњим интересом унапред и финалним плаћањем 1 јединице на крају године смрти. И виши моменти за Y могу бити изведени, на пример,

$$D(Y) = \frac{D(Z)}{d^2} \,. \tag{112}$$

Посматрајмо сада животни *ануитет са истеком за n година* (*n−year temporary life annuity-due*).Садашња вредност овог ануитета је

$$Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{K+1}|} & \text{за} \quad K = 0, 1, ..., n-1 \\ \ddot{a}_{\overline{n}|} & \text{за} \quad K = n, n+1, n+2, \dots \,. \end{cases} \tag{113}$$

Слично као код доживотног ануитета добијамо изразе за нето једнократну премију

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{k+1}|}\, {}_kp_x q_{x+k} + \ddot{a}_{\overline{n}|}\, {}_np_x \,. \tag{114}$$

и

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k\, {}_kp_x \,. \tag{115}$$

Сада имамо

$$Y = \frac{1 - Z}{d} \,, \tag{116}$$

с тим што је ово Z дефинисано са (88). Онда је

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1 - A_{x:\overline{n}|}}{d} \,. \tag{117}$$

или

$$1 = d\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|} \,. \tag{118}$$

[1], [4]

4.5 Нето премије (Net Premiums)

Полиса осигурања прецизира с једне стране добити које се исплаћују од осигуравача осигуранику, и с друге стране премије које плаћа осигураник. У овом одељку се бавимо премијама које осигурник треба да плати осигуравачу да би купио осигурање. Постоје три начина исплате тих премија.
Ако осигураник исплаћује премију једним плаћањем у тренутку склапања уговора, у питању је *једнократна премија* (*One Single Premium*). Та једнократна премија је, онда, једнака актуарској садашњој вредности полисе у тренутку њеног склапања, односно једнака је *нето једнократној премији* (*Neto Single Premium*) о којој смо говорили.
Међутим, у пракси обично осигураник жели премију да надокнади периодичним годишњим уплатама, односно да купи осигурање животним ануитетом са премијама чије трајање и износ треба да буду дефинисане уговором. Те премије могу бити са *непромењљивим износом* (*level premiums*) или са *промењљивим износом* (*periodic premiums of varying amounts*).
У пракси се највише користе *годишње премије са непромењљивим износом*, те ћемо се у овом одељку претежно бавити њиховим израчунавањем.
Нето премије се израчунавају по *принципу еквивалентности*, односно принципу који подразумева да је садашња вредност исплата од стране осигуравача једнака садашњој вредности уплата од стране осигураника. У том циљу, у односу на полису осигурања, дефинишемо *укупни губитак* (*total loss*), L, осигуравача као разлику између садашње вредности добити које исплаћује и садашње вредности премијских уплата. У алгебарском смислу, прихватљив избор премија је онај за које L узима било позитивне, било негативне вредности, при чему је у средњем на нули.

$$E[L] = 0 \tag{119}$$

тј. очекивана вредност губитка је нула.

Премија се назива *нето* (*Net*) јер трошкови пружања услуга о осигурању нису укључени (износи за порезе, оперативне трошкове, итд.). Ова премија, такође, ни на који начин не одражава ризик да неће моћи да се исплати од осигуравача. За процену ризика потребне су и додатне карактеристике расподеле случајне промењљиве, нпр. варијација. Дакле, ово није премија коју ће осигураник платити осигуравачу.
Израчунавање нето једнократне је први корак у разумевању математике животног осигурања. Затим се изучавају резервне вредности уговора (штедне и ризико премије) и бруто премије које ће, заправо, осигураник плаћати.
[1], [8], [2]

Нето годишње премије за доживотно осигурање

Посматрајмо доживотно осигурање чија осигурана сума је 1 јединица која се исплаћује на крају године смрти, а које се финансира нето годишњим премијама означеним са P_x.
Губитак осигуравача је

$$L = v^{K+1} - P_x\, \ddot{a}_{\overline{K+1|}}\,. \tag{120}$$

Применом принципа еквиваленције добијамо

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}\,. \tag{121}$$

Даље, користећи релације (71) и (104) добијамо

$$\begin{aligned} L &= v^{K+1} - P_x\, \ddot{a}_{\overline{K+1|}} \\ &= Z - P_x Y \\ &= Z - P_x(\frac{1-Z}{d}) \\ &= (1+\frac{P_x}{d})Z - \frac{P_x}{d}\,. \end{aligned} \tag{122}$$

Очекивање од L је

$$E(L) = (1+\frac{P_x}{d})A_x - \frac{P_x}{d}\,. \tag{123}$$

Принципом еквиваленције добијамо

$$P_x = \frac{dA_x}{1-A_x}\,, \tag{124}$$

или еквивалентно

$$P_x = d\,A_x + P_x\,A_x\,. \tag{125}$$

Дисперзија за L је онда

$$\begin{aligned} D(L) &= D((1+\frac{P_x}{d})v^{K+1} - \frac{P_x}{d}) \\ &= D((1+\frac{P_x}{d})Z - \frac{P_x}{d}) \qquad (126) \\ &= (1+\frac{P_x}{d})^2 D(Z) \\ &= \frac{D(Z)}{(d\,\ddot{a}_x)^2} \\ &= \frac{D(Z)}{(1-A_x)^2}\,. \end{aligned} \tag{127}$$

[4], [1]

Нето годишње премије за орочено осигурање

Посматрајмо орочено осигурање трајања n (осигурана сума од 1 јединице која се исплаћује на крају године смрти), а које се финансира нето годишњим премијама означеним са $P^1_{x:\overline{n}|}$. Губитак осигуравача је

$$L = \begin{cases} v^{K+1} - P^1_{x:\overline{n}|}\,\ddot{a}_{\overline{K+1}|} & \text{за} \quad K = 0, 1, ..., n-1 \\ -P^1_{x:\overline{n}|}\,\ddot{a}_{\overline{n}|} & \text{за} \quad K \geq n \end{cases} \tag{128}$$

Онда је актуарска садашња вредност за L

$$E(L) = A^1_{x:\overline{n}|} - P^1_{x:\overline{n}|}\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|}\,. \tag{129}$$

Применом принципа еквивалентности добијамо нето годишњу премију

$$P^1_{x:\overline{n}|} = \frac{A^1_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\,. \tag{130}$$

Производи као што је орочено осигурање су посебно интересантни јер је њихово трајање кратко, и зато се често користе за покриће неког специфичног ризика.
Орочено осигурање на једну годину често се назива *природно осигурање* (*natural insurance*), а одговарајућа премија се назива природна премија (natural premium). Осигурање живота са природном премијом је осигурање орочено на једну годину које се закључује сваке годне са другом премијом која се израчунава на основу година старости осигураника. То значи да осигураник увек плаћа премију која зависи од његових година старости, па је ризик смрти осигуран на једну годину. Из тог разлога се каже да је природна премија заправо ризико премија за једну годину. Дакле, природна премија расте са годинама старости, па је значајна разлика у висини ове премије између почетка и завршетка периода плаћања.
Ако се једногодишње осигурање примењује у бесконачно малим временским периоднима, онда каматна стопа нема утицаја на премију јер је време између премијумске уплате и исплате бесконачно мало.
Иако је примена природне премије математички оправдана, она је непрактична, и зато се у пракси ирачунава просечна премија која је иста за све време трајања осигурања. Пошто се због просечне премије увек у првим годинама осигурња наплаћује виша премија, следи да се премија састоји из ризико премије и штедне премије.
[4], [1], [8]

Нето годишње премије за осигурање доживљења

Посматрајмо осигурање доживљења трајања n (осигурана сума од 1 јединице која се исплаћује на крају године смрти), а које се финансира нето годишњим премијама означеним са $P_{x:\overline{n}|}^{\;1}$. Губитак осигуравача је

$$L = \begin{cases} -P_{x:\overline{n}|}^{\;1}\,\ddot{a}_{\overline{K+1}|} & \text{за} \quad K = 0, 1, ..., n-1 \\ v^n - P_{x:\overline{n}|}^{\;1}\,\ddot{a}_{\overline{n}|} & \text{за} \quad K \geq n \end{cases} \tag{131}$$

Садашња вредност за L је Онда је актуарска садашња вредност за L

$$E(L) = A_{x:\overline{n}|}^{\;1} - P_{x:\overline{n}|}^{\;1}\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|}\,. \tag{132}$$

Онда је нето годишња премија једнака

$$P_{x:\overline{n}|}^{\;1} = \frac{A_{x:\overline{n}|}^{\;1}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\,. \tag{133}$$

[1], [4]

Нето годишње премије за мешовито осигурање

Посматрајмо мешовито осигурање трајања n (осигурана сума од 1 јединице која се исплаћује на крају године смрти), а које се финансира нето годишњим премијама означеним са $P_{x:\overline{n}|}$. Губитак осигуравача је

$$L = \begin{cases} v^{K+1} - P_{x:\overline{n}|}\,\ddot{a}_{\overline{K+1}|} & \text{за} \quad K = 0, 1, ..., n-1 \\ v^n - P_{x:\overline{n}|}\,\ddot{a}_{\overline{n}|} & \text{за} \quad K \geq n \end{cases} \tag{134}$$

Садашња вредност за L је Онда је актуарска садашња вредност за L

$$E(L) = A_{x:\overline{n}|} - P_{x:\overline{n}|}\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|}\,. \tag{135}$$

Онда је нето годишња премија једнака

$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\,. \tag{136}$$

[4]

Нето годишње премије за општи тип осигурања

Нека је c_j сума осигурана у $j-$тој години након склапања полисе. Претпоставимо да се осигурње финансира нето годишњим премијама $\Pi_0, \Pi_1, \Pi_2, ...$; где је Π_k премија за $k-$ту годину.
Губитак осигуравача је

$$L = C_{K+1} v^{K+1} - \sum_{k=1}^{K} \Pi_k v^k \ . \tag{137}$$

Због принципа еквивалентности, добијамо да нето премија задовољава следећу једначину:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{k+1} v^{k+1}\,{}_k p_{x+k}\, q_{x+k} = \sum_{k=1}^{\infty} \Pi_k v^k\,{}_k p_x \ . \tag{138}$$

[1]

4.6 Резерве нето премије (Net Premium Reserves)

Посматрајмо полису осигурања која је финансирана годишњим нето премијама непроменљивог износа.
У тренутку склапања полисе очекивана садашња вредност будићих премија једнака је очекиваној садашњој вредности будућих исплата добити, чинећи да је очекивани губитак осигуравача, L, нула.
За дугорочне полисе осигурања, јасно је да ће ризик од смрти расти веома брзо са годинама старости осигураника. Онда, ова еквиваленција између предвиђених исплата добити и премијумских уплата неће, генерално, важити у оквиру сваке године полисе. Зато осигуравач треба у почетним тренуцима да узме већу премију него што је у тим тренуцима потребно, да би се обезбедио за касније тренутке када износ премије није довољан да се исплати уговорени износ добити осигуранику.
Стога, дефинише се случајна променљива ${}_tL$, као разлика између садашње вредности будућих исплата добити и садашње вредности будућих премијумских уплата, у тренутку t. Претпоставља се да ${}_tL$ није идентички једнака нули и да је $T > t$.
Резерва нето премије (*Net Premium Reserve*) у тренутку t означена је са ${}_tV$ и дефинише се као *условно* очекивање од ${}_tL$ за дато $T > t$ (условни догађај је преживљавање осигураника до тренутка t).
Практично, то је износ који је потребан у тренутку t да би се покрио будући мањак. Некада се овај износ назива *вредност полисе* (*policy value*) или *кеш вредност* (*cash value*) уместо резерва нето премије.

Полисе животног осигурања су углавном прављене тако да износ премије буде такав да је резерва нето премије позитивна, или ненегативна, да би осигураник у сваком тренутку имао корист да настави са осигурањем. Онда, очекивана вредност предвиђених добити би требало да прекорачи предвиђену вредност премијумских уплата. Наравно, да би обезбедила ову одговорност осигуравајућа компанија треба веома прецизно да израчуна износ новца који ће бити довољан да покрије ову разлику имеђу очекиваних вредности.
[1], [8], [5]

Резерве нето премије за доживотно осигурање

Посматрајмо доживотно осигурање чија осигурана сума је 1 јединица која се исплаћује на крају године смрти, а које се финансира нето годишњим премијама означеним са P_x.
Губитак осигуравача у тренутку k је случајна променљива која зависи од (x), дата са

$$ {}_kL = v^{K-k+1} - P_x\, \ddot{a}_{\overline{K-k+1}|}\,. \tag{139} $$

Условно очекивање функције ${}_kL$, условљено преживљавањем осигураника k година, је резерва нето премије у тренутку K

$$ {}_kV = E[{}_kL|K \geq k] = E[v^{K-k+1} - P_x\, \ddot{a}_{\overline{K-k+1|}}|K \geq k] = A_{x+k} - P_x\, \ddot{a}_{x+k}\,. \qquad (140)$$

Покажимо да важи друга једнакост у претходној релацији.

$$E[v^{K-k+1}|K \geq k] = \sum_{t=k}^{\infty} v^{t-k+1} P(K = t|K \geq k)\,. \qquad (141)$$

Имамо

$$P(K = t|K \geq k) = \frac{P(K = t)}{P(K \geq k)} = \frac{{}_tp_x\, q_{x+t}}{{}_kp_x}\,, \qquad (142)$$

одакле добијамо

$$\begin{aligned} E[v^{K-k+1}|K \geq k] &= \sum_{t=k}^{\infty} v^{t-k+1} \frac{{}_tp_x\, q_{x+t}}{{}_kp_x} \\ &= \sum_{t=k}^{\infty} v^{t-k+1}\, {}_{t-k}p_{x+k}\, q_{x+t} \\ &= \sum_{u=o}^{\infty} v^{u+1}\, {}_up_{x+k}\, q_{x+k+u} \\ &= E[v^{K(x+k)+1}] = A_{x+k}\,. \qquad (143) \end{aligned}$$

Формула за ${}_kV$ је, дакле, разлика између актуарске садашње вредности будућих добити за старост $x + k$ у тренутку k и актуарске садашње вредности преосталих премија.
Сада можемо израчунати дисперзију случајне променљиве ${}_kL$.

$$\begin{aligned} D({}_kL|K \geq k) &= D(v^{K-k+1} - P_x\, \ddot{a}_{\overline{K-k+1|}}|K \geq k) \\ &= D(v^{K-k+1}(1 + \frac{P_x}{d}) - \frac{P_x}{d}|K \geq k) \\ &= D(v^{K-k+1}(1 + \frac{P_x}{d})|K \geq k) \\ &= (1 + \frac{P_x}{d})^2 D(v^{K-k+1}|K \geq k)\,. \qquad (144) \end{aligned}$$

[4], [1], [3], [8]

Резерве нето премије за орочено осигурање

Посматрајмо сада орочено осигурање трајања n (осигурана сума од 1 јединице која се исплаћује на крају године смрти), а које се финансира нето годишњим премијама означеним са $P^1_{x:\overline{n|}}$. Губитак осигуравача у тренутку k је

$${}_kL = v^{K-k+1} - P^1_{x:\overline{n|}}\, \ddot{a}_{\overline{K-k+1|}} \quad \text{за} \quad K = 0, 1, ..., n-1 \qquad (145)$$

Слично као код доживотног осигурања, добијамо резерву нето премије у тренутку k:

$$_kV = \begin{cases} A^1_{x+k:\overline{n-k}|} - P^1_{x:\overline{n}|}\,\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|} & \text{за} \quad K = 0, 1, ..., n-1 \\ 0 & \text{за} \quad K = n \end{cases} \tag{146}$$

[4]

Резерве нето премије за мешовито осигурање

Посматрајмо мешовито осигурање трајања n (осигурана сума од 1 јединице која се исплаћује на крају године смрти), а које се финансира нето годишњим премијама означеним са $P_{x:\overline{n}|}$. Губитак осигуравача у тренутку k је

$$_kL = v^{K-k+1} - P_{x:\overline{n}|}\,\ddot{a}_{\overline{K-k+1}|}\text{за} \quad K = 0, 1, ..., n-1 \tag{147}$$

Слично као код доживотног осигурања, добијамо резерву нето премије у тренутку k:

$$_kV = \begin{cases} A_{x+k:\overline{n-k}|} - P_{x:\overline{n}|}\,\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|} & \text{за} \quad K = 0, 1, ..., n-1 \\ 1 & \text{за} \quad K = n \end{cases} \tag{148}$$

Резерва у тренутку $k = n$ је 1 зато што је то време доспећа уговора.
[4]

Резерве нето премије за општи тип осигурања

Резерва нето премије уопштеног осигурања на крају $k-$те године је

$$_kV = \sum_{k=1}^{\infty} c_{k+j+1} v^{j+1}\ {}_jp_{x+k}\, q_{x+k+j} - \sum_{k=1}^{\infty} \Pi_{k+j} v^j\ {}_jp_{x+k} \tag{149}$$

Да бисмо извели везу између $_kV$ и $_{k+h}V$, замењујемо

$$_jp_{x+k} = {}_hp_{x+k}\ {}_{j-h}p_{x+k+h} \tag{150}$$

и користимо $j' = j - h$ као индекс сумирања. Као резултат добијамо следећу везу

$$_kV + \sum_{k=1}^{h-1} \Pi_{k+j} v^j\ {}_jp_{x+k} = \sum_{k=1}^{h-1} c_{j+k+1} v^{j+1}\ {}_jp_{x+k} q_{x+k+j} +_h p_{x+k} v^h_{k+h} V \tag{151}$$

Ова релација нам говори да ако је осигураник жив на крају $k-$те године, онда је резерва нето премије, заједно са очекиваном садашњом вредности премије, која ће бити исплаћења у току следећих h година, тачно довољна за исплату животног осигурања током ових година, плус чиста добит од $_{k+h}V$ на крају $(k+h)-$те године. Оваква интерпретација је и очекивана.
[1]

Рекурзивне формуле

Рекурзивну једначину за резерву нето премије добијамо заменом $h = 1$ у релацију (151):

$$ {}_kV + \Pi_k = v[c_{k+1}q_{x+k} + {}_{k+1}Vp_{x+k}] \tag{152} $$

Дакле, резерве нето премије могу бити рачунате рекурзивно, и то у два правца:
1) Може се почети са ${}_0V = 0$, и сукцесивно рачунати ${}_1V$, ${}_2V$,...
2) Ако је осигурање коначог трајања n, онда се може израчунати прво ${}_nV$ и наставити редом ${}_{n-1}V$, ${}_{n-2}V$,...
Једначина (152) показује да је збир резерве нето премије и премије у тренутку k једнак очекиваној садашњој вредности средстава потребних на крају године (она су једнака c_{k+1} у случају смрти, иначе ${}_{k+1}V$). Другу интерпретацију добијамо ако запишемо:

$$ {}_kV + \Pi_k = v[{}_{k+1}V + (c_{k+1} - {}_{k+1}V)q_{x+k}] \tag{153} $$

Износ ${}_{k+1}V$ је неопходан у сваком случају. Додатни износ, $c_{k+1} - {}_{k+1}V$, потребан ако осигураник умре, је *нето износ ризика* (*net amount at risk*).
Једначина (153) показује да премија може бити разложена на две компоненте, $\Pi_k = \Pi_k^s + \Pi_k^r$, где је

$$ \Pi_k^s = {}_{k+1}Vv - {}_kV \tag{154} $$

премија штедње (*savings premium*)која се користи да повећа резерву нето премије, и

$$ \Pi_k^r = (c_{k+1} - {}_{k+1}V)vq_{x+k} \tag{155} $$

ризико премија (*risk premium*), односно премија једногодишњег ороченог осигурња која покрива износ ризика. Дакле, операција у $(k+1)-$ој години може бити интерпретирана као комбинација операција осигурања доживљења и једногодишњег осигурања, уз претпоставку да је осигураник жив у $k-$тој години.

Множењем (154) са $(1+i)^{j-k}$ и сумирањем по $k = 0, 1, ..., j-1$, добијамо

$$ {}_jV = \sum_{k=1}^{j-1}(1+i)^{j-k}\Pi_k^s \tag{156} $$

што показује да је резерва нето премије нагомилана вредност премија штедње од тренутка склапања полисе.
[1]

Уопштен укупан губитак према годинама старости полисе

Дефинишемо настали губитак за осигуравача током $(k+1)-$ве године, Λ_k, а почетак године користи се као референцна тачка на временској скали. Уочавамо три истакнута случаја :
1) Осигураник умире пре тренутка k,
2) Осигураник умире током $k+1$ године,
3) Осигураник преживљава $k+1$ годину.
Случајна променљива Λ_k је онда дефинисана са

$$\Lambda_k = \begin{cases} 0 & \text{за} \quad K \leq k-1 \\ c_{k+1}v - ({}_kV + \Pi_k) & \text{за} \quad K = k \\ {}_{k+1}Vv - ({}_kV + \Pi_k) & \text{за} \quad K \geq k+1 \end{cases} \tag{157}$$

Заменом Π_k са $\Pi_k^s + \Pi_k^r$ и користећи (154), налазимо

$$\Lambda_k = \begin{cases} 0 & \text{за} \quad K \leq k-1 \\ -\Pi_k^r + (c_{k+1} - {}_{k+1}V)v & \text{за} \quad K = k \\ -\Pi_k^r & \text{за} \quad K \geq k+1 \end{cases} \tag{158}$$

Тада, ако је осигураник жив у тренутку k, Λ_k је губитак од једногодишњег ороченог осигурања за покривање *нето износа ризика* (*net amount at risk*). Уопштен губитак осигуравача је дат са једначином (137). Очигледан резултат

$$L = \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k v^k \tag{159}$$

може се проверити директно из (157). Наравно, сума је коначна почевши од 0 до K.

Користећи (158) и (155) добијамо

$$E[\Lambda_k | K \geq k] = 0 \tag{160}$$

из чега следи и

$$E[\Lambda_k] = E[\Lambda_k | K \geq k] P(K \geq k) = 0 \tag{161}$$

`Теорема:` [*Хатендорфова*] Нека су Λ_k и L дефинисани релацијама (157) и (159).

Важи:

$$Cov[\Lambda_k, \Lambda_j] = 0, \text{ за } k \neq j, \tag{162}$$

$$D(L) = \sum_{k=0}^{\infty} v^{2k+2} (c_{k+1} - {}_{k+1}V)^2 \, {}_{k+1}p_x q_{x+k} \, . \tag{163}$$

Доказ: Докажимо прво релацију (162).
Претпоставимо, без смањења општости, да је $k < j$. Користећи (160) добијамо:

$$\begin{aligned} Cov[\Lambda_k, \Lambda_j] &= E[\Lambda_k \cdot \Lambda_j] \\ &= E[\Lambda_k \cdot \Lambda_j | K \geq j] P(K \geq j) \\ &= \Pi_k^r E[\Lambda_j | K \geq j] P(K \geq j) \\ &= 0\,. \end{aligned} \tag{164}$$

Да бисмо доказали релацију (163) израчунајмо, најпре, дисперзију за Λ_k:

$$\begin{aligned} D(\Lambda_k) &= E[{\Lambda_k}^2] \\ &= E[{\Lambda_k}^2 | K \geq k] P(K \geq k) \\ &= D[\Lambda_k | K \geq k] P(K \geq k) \\ &= (c_{k+1} - {}_{k+1}V)^2 v^2 p_{x+k} q_{x+k} P(K \geq k) \\ &= (c_{k+1} - {}_{k+1}V)^2 v^2 \, {}_{k+1}p_x q_{x+k}\,. \end{aligned} \tag{165}$$

Најзад, добијамо

$$\begin{aligned} D(L) &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{2k} D(\Lambda_k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{2k+2} (c_{k+1} - {}_{k+1}V)^2 \, {}_{k+1}p_x q_{x+k}\,, \end{aligned} \tag{166}$$

чиме смо доказали и други део теореме.

■

[1], [4]

Техничка добит

Посматрајмо опште осигурање, и претпоставимо да је осигураник жив у тренутку k. Надаље, претпоставимо да је тренутна каматна стопа зараде током $k+1$-ве године једнака i'. Техничка добит (technical gain) на крају године је

$$G_{k+1} = \begin{cases} ({}_kV + \Pi_k)(1+i') - c_{k+1} & \text{за} \quad K = k \\ ({}_kV + \Pi_k)(1+i') - {}_{k+1}V & \text{за} \quad K \geq k+1\,. \end{cases} \tag{167}$$

Техничку добит можемо разложити на компоненте:

Техничка добит у $(k+1)-$ој години може бити посматрана као збир добити од штедње и осигурања. У складу са тим имамо

$$G_{k+1} = G^s_{k+1} + G^r_{k+1}\,, \tag{168}$$

где је

$$G^s_{k+1} = ({}_kV + \Pi^s_k)(i' - i) \tag{169}$$

и

$$G^r_{k+1} = \begin{cases} \Pi^r_k(1+i') - (c_{k+1} - {}_{k+1}V) & \text{за} \quad K = k \\ \Pi^r_k(1+i') & \text{за} \quad K \geq k+1\,. \end{cases} \tag{170}$$

Последња формула се може се написати и као

$$G^r_{k+1} = \Pi^r_k(i' - i) - \Lambda_k(1+i)\,. \tag{171}$$

[1]

5 Вишеструки декремент

Модел вишеструког декремента је уопштење стандардног модела смртности. Наиме, осигурање се и даље односи на једну особу, али до истека уговора о осигурању долази утицајем више различитих случајних догађаја, не нужно смрти осигураника. Истек за дати статус је назван *декремент* (*decrement*).
Дакле, овде проширујемо основни модел увођењем друге случајне променљиве, *узрока декремента*, означене са J.
Претпостављамо да је J дискретна случајна променљива.
На пример, за примену у класичном животном осигурању J би могла узети вредности 1 или 2, у зависности од тога да ли осигураник умре или одлучи да престане да плаћа премију.
У применама у осигурању за накнаду запосленима J би могла узети вредности 1, 2, 3 или 4, у зависности од тога да ли је престанак рада због одустајања, инвалидности, смрти или пензионисања.
Такође, за примене у јавном здравственом осигурњу постоји много могућности за узрок декремента. На пример, J би могла узети вредности 1, 2, 3 или 4, у зависности од тога да ли је смрт узрокована кардиоваскуларном болешћу, канцером, несрећом или нечим другим.
[2], [1]

5.1 Модел (The Model)

Животни век (The Future Lifetime)

Код основног модела животног осигурања бавили смо се методама за одређивање и примену расподеле непрекидне случајне величине T, преосталог времена до смрти особе старости x.
Исти поступци могу се користити за изучавање времена до завршетка статуса, само са малим изменама у речнику.
Заправо, користимо исту ознаку, T, и, као што смо већ навели, уводимо још једну случајну променљиву J која представља узрок декремента.
Особа напушта статус у тренутку T због једног од m међусобно искључивих узрока декремента.
Сада ћемо T називати *преостало време до истека* (*time-until-termination*).
Наш циљ је да опишемо заједничку расподелу за T и J, као и одговарајуће маргиналне и условне расподеле.

Заједничка расподела вероватноћа за T и J може бити написана преко функција густина вероватноће g_1, g_2,...,g_m, тако да

$$g_j(t)dt = P(t < T < t + dt, J = j) \tag{172}$$

представља вероватноћу да је дошло до декремента због узрока j у бесконачно малом интервалу $(t, t + dt)$. Наравно, важи

$$g(t) = g_1(t) + g_2(t) + ... + g_m(t) \tag{173}$$

и

$$\int_0^\infty g(t)dt = 1\,. \tag{174}$$

Ако се декремент јавља у тренутку t, условна вероватноћа за узрок декремента j је

$$P(J = j|T = t) = \frac{g_j(t)}{g(t)}\,. \tag{175}$$

Вероватноћа да до декремента дође због урока j и до тренутка t, у ознаци ${}_tq_{j,x}$, је

$${}_tq_{j,x} = P(T < t, J = j) = \int_0^t g_j(z)dz\,. \tag{176}$$

Затим, вероватноћа да до декремента дође због узрока j и до тренутка $t + s$, под условом да до декремента није дошло до тренутка s, у ознаци ${}_tq_{j,x+s}$, је

$${}_tq_{j,x+s} = P(T < t + s, J = j|T > s) = \frac{\int_s^{s+t} g_j(z)dz}{[1 - G(s)]}\,. \tag{177}$$

Вероватноћа да до декремента дође због узрока j у било ком тренутку у будућности је

$${}_\infty q_{j,x} = \int_0^\infty g_j(z)dz\,. \tag{178}$$

Ова ознака је нова и нема је код основног модела, супротно маргиналној густини расподеле за T, $g(t)$.

Ознаке ${}_tq_x$ и ${}_tp_x$, уведене код основног модела, могу бити проширене да обухвате времена до декремента у вишеструком моделу декремента. Користећи натпис (τ) да укаже да се функција односи на све случајеве узрока декремента, добијамо

$${}_tq_x^{(\tau)} = P(T < t) = G(t) = \int_0^t g(z)dz \tag{179}$$

$${}_tp_x^{(\tau)} = P(T \geq t) = G(t) = 1 - {}_tq_x{}^{(\tau)} \tag{180}$$

Због једноставности се често изоставља (τ), односно пише се само ${}_tq_x$ или ${}_tp_x$. Математички, ове функције за случајну величину T су идентичне оним из основног модела. Разлика је само у њиховој интерпретацији у применама (због тога се некада пише и τ у индексу).

Слично, очекивано време до декремента, узимајући у обзир све случајеве, је

$$E(T) = \int_0^\infty {}_tp_x^{(\tau)}dt\,. \tag{181}$$

[1], [2]

Целобројни животни век (The Curtate Lifetime)

У неким случајевима, примена изнад наведеног модела може захтевати модификацију. Непрекидна расподела за време до истека, T, је неадекватна у применама у којима не постоји позитивна вероватноћа декремента. Један пример је пензиони план са обавезном старосном границом, годинама у којима се сви запоселени морају пензионисати. После уплате премије, ниједан од преосталих осигураника се неће пензионисати до следећег рока. Овде покушавамо да продужимо нотацију да покрије такве ситуације.

Код основног модела смо дефинисали случајну променљиву $K = [T]$ као број целих година особе старости x.
Ако су познате једногодишње вероватноће декремента

$$q_{j,x+k} = P(T < k+1, J = j | T > k) \tag{182}$$

за $k = 0, 1, 2, ...$ и $j = 1, 2, ..., m$, заједничка расподела вероватноћа целобројног века K и узрока декремента J може бити изведена.
Уочимо најпре

$$q_{x+k} = q_{1,x+k} + q_{2,x+k} + ... + q_{m,x+k}\,, \tag{183}$$

одакле можемо израчунати ${}_kp_x$, а онда

$$P(K = k, J = j) = {}_kp_x q_{x+k} \quad \text{за} \quad k = 0, 1, 2, ... \quad \text{и} \quad j = 1, 2, ..., m\,. \tag{184}$$

[2], [1]

Стопе декремента (Forces of Decrement)

За особу старости x стопа декремента у години $x+t$ због узрока декремента j дефинисана је са

$$\mu_{j,x+t} = \frac{g_j(t)}{1 - G(t)} = \frac{g_j(t)}{{}_tp_x}\,. \tag{185}$$

Збир стопа декремента је

$$\mu_{x+t} = \mu_{1,x+t} + \mu_{2,x+t} + ... + \mu_{m,x+t}\,. \tag{186}$$

Другачије, у складу са основним моделом, стопа декремента за особу старости x у години $x+t$, укључујући све узроке декремента је

$$\mu_{x+t} = \mu_{x+t}^{(\tau)} = \frac{g(t)}{1 - G(t)} = -\frac{d}{dt}\ln[1 - G(t)] = -\frac{d}{dt}\ln {}_tp_x^{(\tau)} = -\frac{d}{dt}\ln {}_tp_x \tag{187}$$

и

$${}_tp_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds} \tag{188}$$

Ако су све стопе декремента познате, заједничка густина расподеле за T и J може бити одређена тако што прво искористимо формуле (186) и (188) да

одредимо ${}_tp_x$, а онда одредимо $g_j(t)$ из једначине (185).
Заправо, једначина (172) сада може бити дата са

$$g_j(t)dt = P(t < T \leq t + dt, J = j) = {}_tp_x \, \mu_{j,x+t} dt \,. \tag{189}$$

Такође, важи

$$P(J = j|T = t) = \frac{\mu_{j,x+t}}{\mu_{x+t}} \,. \tag{190}$$

[1], [2]

`Пример:` Посматрајмо модел вишеструког декремента са два узрока декремента. Нека су стопе декремента дате са

$$\mu_{1,x+t} = \frac{t}{100}, \; t \geq 0$$

$$\mu_{2,x+t} = \frac{1}{100}, \; t \geq 0$$

Израчунајмо заједничку густину расподеле за овај модел, а затим $E(T)$ и $E[T|J = 2]$.

Из

$$\mu^{(\tau)}_{x+s} = \mu_{1,x+s} + \mu_{2,x+s} = \frac{s+1}{100}$$

добијамо да је вероватноћа преживљавања

$$\begin{aligned} {}_tp^{(\tau)}_x &= \exp\,(-\int_0^t \frac{s+1}{100} ds) \\ &= \exp\,(\frac{-(t^2+2t)}{200}), \; t \geq 0 \end{aligned} \tag{191}$$

Онда је заједничка густина расподеле за T и J једнака

$$g_j(t) = \begin{cases} \frac{t}{100} \exp\,(\frac{-(t^2+2t)}{200}) & \text{за} \quad t \geq 0, J = 1 \\ \\ \frac{1}{100} \exp\,(\frac{-(t^2+2t)}{200}) & \text{за} \quad t \geq 0, J = 2 \,. \end{cases} \tag{192}$$

$$E(T) \;=\; \int_0^\infty t(\frac{t+1}{100} \exp\,[\frac{-(t^2+2t)}{200}])dt \tag{193}$$

Парцијалном интеграцијом добијамо

$$\begin{aligned}
E(T) &= t \exp[\frac{-(t^2+2t)}{200}]|_0^\infty + \int_0^\infty \exp[\frac{-(t^2+2t)}{200}])dt \\
&= 0 + \int_0^\infty \exp[\frac{-(t+1)^2+1}{200}])dt \\
&= \int_0^\infty e^{\frac{1}{200}} \exp[\frac{-(t+1)^2}{200}])dt \\
&= e^{0.005}\sqrt{2\pi}\cdot 10 \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 10} \exp[\frac{-(t+1)^2}{200}])dt = /\text{смена } z = \frac{t+1}{10}/ \\
&= e^{0.005}\sqrt{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[\frac{-z^2}{2}])dz \\
&= e^{0.005}\cdot\sqrt{2\pi}[1-\Phi(0.1)],\ \Phi \text{ је функција расподеле за Нормалну расподелу } \mathcal{N}(0,1) \\
&= 11.59 \qquad (194)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[T|J=2] &= E[(T+1)-1|J=2] \\
&= (0.1159)^{-1} \int_0^\infty \frac{t+1}{100} \exp[\frac{-(t^2+2t)}{200}]dt \\
&= (0.1159)^{-1} \exp[\frac{-(t^2+2t)}{200}]|_0^\infty - 1 \\
&= 7.63\,. \qquad (195)
\end{aligned}$$

■

[2]

Табеле преживљавања вишеструког декремента (Multiple Decrement Life Table)

Веома значајан практични проблем је конструкција табеле преживљавања вишеструког декремента.
Посматрајмо групу од $l_a^{(\tau)}$ особа, свака старости a, које су обухваћене са m могућих узрока декремента.
Нека је $\mathfrak{L}^{(\tau)}(x)$ случајна променљива која представља број преосталих преживелих у старости $x \geq a$. Тада је очекивани број особа старости x у групи дефинисан са

$$\begin{aligned} l_x^{(\tau)} &= E[\mathfrak{L}^{(\tau)}(x)] \\ &= l_a^{(\tau)}\ {}_{x-a}p_a^{(\tau)}\,, \end{aligned} \tag{196}$$

где је ${}_{x-a}p_a^{(\tau)}$ вероватноћа да је особа почетне старости a у старости x још у групи.
Претпоставимо да ће група од $l_x^{(\tau)}$ доживелих старост x у будућности бити потпуно испражњена са m узрока декремента. Онда група $l_x^{(\tau)}$ преживелих може бити представљена као састав различитих подгрупа $l_x^{(j)}$, $j = 1, 2, ..., m$, где се $l_x^{(j)}$ односи на особе из групе код којих је дошло до декремента због узрока j. Очигледно,

$$l_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{m} l_x^{(j)}\,. \tag{197}$$

Даље, нека ${}_n\mathfrak{D}_x^j$ означава број особа које егзистирају у групи од старости x до $x + n$, узевши у обзир узрок декремента j, од $l_x^{(\tau)}$ живота на почетку.
Очекивани број особа које егзистирају у групи од старости x до $x+n$, узевши у обзир случај j, дефинисан је са

$$\begin{aligned} {}_nd_x^{(j)} &= E[{}_n\mathfrak{D}^{(\tau)}(x)] \\ &= l_a^{(\tau)} \int_{x-a}^{x-a+n} {}_tp_a^{(\tau)} \mu_{t+a}^{(j)} dt\,. \end{aligned} \tag{198}$$

Затим,

$${}_n\mathfrak{D}_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{m} {}_n\mathfrak{D}_x^{(j)}\,, \tag{199}$$

$$\begin{aligned} {}_nd_x^{(\tau)} &= E[{}_n\mathfrak{D}^{(\tau)}(x)] = \sum_{j=1}^{m} {}_nd_x^{(j)} \\ &= l_a^{(\tau)} \int_{x-a}^{x-a+n} {}_tp_a^{(\tau)} \mu_{t+a}^{(j)} dt\,. \end{aligned} \tag{200}$$

Ознака $d_x^{(j)}$ представља очекивани број особа популације које егзистирају између старости x и $x+1$, узимајући у обзир узрок j. Дакле,

$$d_x^{(j)} = l_x^{(j)} - l_{x+1}^{(j)} \,. \tag{201}$$

Дељењем претходне формуле са $l_x^{(j)}$ добијамо

$$q_x^{(j)} = \frac{d_x^{(j)}}{l_x^{(j)}} \,, \tag{202}$$

што је вероватноћа да ће особа старости x напустити групу у току једне године због узрока декремента j.
Означимо са $d_x^{(\tau)}$ укупан очекивани број особа које егзистирају између старости x и $x+1$, узимајући у обзир све узроке декремента.

$$d_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{m} d_x^{(j)} \,. \tag{203}$$

Из

$$d_x^{(\tau)} = l_x^{(\tau)} - l_{x+1}^{(\tau)} = l_x^{(\tau)} q_x^{(\tau)} \tag{204}$$

добијамо вероватноћу да ће старост x напустити групу у току једне године, односно

$$q_x^{(\tau)} = \frac{d_x^{(\tau)}}{l_x^{(\tau)}} = \sum_{j=1}^{m} \frac{d_x^{(j)}}{l_x^{(\tau)}} = \sum_{j=1}^{m} q_x^{(j)} \,. \tag{205}$$

Вероватноћа да ће старост x опстати у групи бар годину дана је

$$p_x^{(\tau)} = 1 - q_x^{(\tau)} = \frac{l_{x+1}^{(\tau)}}{l_x^{(\tau)}} = \frac{l_x^{(\tau)} - d_x^{(\tau)}}{l_x^{(\tau)}} \,. \tag{206}$$

Слично, вероватноћа да старост x остане у групи након n година је

$${}_np_x^{(\tau)} = \frac{l_{x+n}^{(\tau)}}{l_x^{(\tau)}} = p_x^{(\tau)} p_{x+1}^{(\tau)} ... p_{x+n-1}^{(\tau)} \,. \tag{207}$$

Вероватноћа да старост x напусти групу у току n година је

$${}_nq_x^{(\tau)} = 1 -_n p_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{m} {}_nq_x^{(j)} \,, \tag{208}$$

где је

$${}_nq_x^{(j)} = \frac{{}_nd_x^{(\tau)}}{l_x^{(\tau)}} \tag{209}$$

вероватноћа пропадања због узрока декремента j у интервалу $(x, x+n]$.
[4], [2]

`Пример.` Приказујемо део табеле преживљавања вишеструког декремента.

x	$d_x^{(1)}$	$d_x^{(2)}$	d_x^3	$d_x^{(\tau)}$	$l_x^{(\tau)}$
50	$5,168$	$1,157$	$4,293$	$10,618$	$4,832,555$
51	$5,363$	$1,206$	$5,162$	$11,732$	$4,821,937$
52	$5,618$	$1,443$	$5,960$	$13,021$	$4,810,200$

Применом формуле

$$q_x^{(j)} = \frac{d_x^{(j)}}{l_x^{(\tau)}} \tag{210}$$

можемо израчунати и вероватноће $q_x^{(1)}, q_x^{(2)}, q_x^{(3)}, q_x^{(\tau)}, p_x^{(\tau)}$.

x	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$	q_x^3	$q_x^{(\tau)}$	$p_x^{(\tau)}$
50	0.00107	0.00024	0.00089	0.00220	0.99780
51	0.0011	0.00025	0.00107	0.00243	0.99757
52	0.00117	0.00030	0.00124	0.00271	0.99729

■

[4]

Заједничка расподела за T и J може бити израчуанта под одговарајућим претпоставкама за вероватноће декремента у деловима године. Популарна претпоставка је да је ${}_uq_{j,x+k}$ линеарна функција по u, за $0 < u < 1$ и k цео број, тј.

$$_uq_{x+k} = uq_{j,x+k}\,. \tag{211}$$

Ова претпоставка имплицира претпоставку о линеарности ${}_uq_x$ из основног модела која може бити проверена сумирањем по свим j. Из (211) следи

$$g_j(k+u) = {}_kp_x\, q_{j,x+k}\,; \tag{212}$$

што заједно са једнакошћу ${}_{k+u}p_x = {}_kp_x(1 - uq_{x+k})$ даје

$$\mu_{j,x+k+u} = \frac{q_{j,x+k}}{1 - uq_{x+k}}\,. \tag{213}$$

Претпоставка (211) има очигледну предност јер, као што је речено код основног модела, K и S постају независне случајне променљиве, и S ће имати униформну расподелу између 0 и 1.
Важи и

$$P(J = j|K = k, S = u) = \frac{q_{j,x+k}}{q_{x+k}}\,. \tag{214}$$

[1]

5.2 Општи тип осигурања (General Type of Insurance)

Нека је $c_{j,k+1}$ осигурана сума на крају $(k+1)-$ве године, ако је до декремента дошло због узрока j током те године.
Садашња вредност осигуране добити је

$$Z = C_{J,K+1} v^{K+1} , \tag{215}$$

а нето једнократна премија

$$E(Z) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{\infty} c_{j,k+1} v^{k+1} \, {}_k p_x q_{j,x+k} \, . \tag{216}$$

Ако осигурање омогућава плаћање одмах по смрти, садашња вредност осигуране добити је

$$Z = C_J(T) v^T , \tag{217}$$

а нето једнократна премија

$$E(Z) = \sum_{j=1}^{m} \int_0^{\infty} c_j(t) v^t g_j(t) dt \, . \tag{218}$$

Овај израз може бити ирачунат нумерички цепањем интеграла:

$$E(Z) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 c_j(k+u) v^{k+u} g_j(k+u) du \, . \tag{219}$$

Сада (219) постаје (216) ако напишемо

$$c_{j,k+1} = \int_0^1 c_j(k+u)(1+i)^{1-u} du \, . \tag{220}$$

У практичном рачунању апроксимација

$$c_{j,k+1} = c_j(k+\frac{1}{2})(1+i)^{\frac{1}{2}} \tag{221}$$

ће често бити довољно прецизна. Извођење изнад показује да процена нето једнократне премије у непрекидном моделу може бити сведена на рачунање за дискретни модел.
[1]

5.3 Резерве нето премије (The Net Premium Reserve)

Резерве код дискретног модела

Нека је опште осигурање финансирано годишњим премијама Π_0, Π_1, $\Pi_2, \ldots$.
Резерва нето премије на крају k-те године је

$${}_kV = \sum_{j=1}^{m} \sum_{h=0}^{\infty} c_{j,k+h+1} v^{h+1} \, {}_h p_{x+k} \, q_{j,x+k+h} - \sum_{h=0}^{\infty} \Pi_{k+h} v^h \, {}_h p_{x+k} \tag{222}$$

Рекурзивна једначина је

$$ {}_kV + \Pi_k = {}_{k+1}V v p_{x+k} + \sum_{j=1}^{m} c_{j,k+1} v q_{j,x+k}\,. \tag{223}$$

Може бити изражена и као

$$ {}_kV + \Pi_k = {}_{k+1}V v + \sum_{j=1}^{m} (c_{j,k+1} - {}_{k+1}V) v q_{j,x+k}\,. \tag{224}$$

Опет, премија може бити разложена на две компоненте:

$$ \Pi_k^s = {}_{k+1}V v - {}_kV \tag{225}$$

је *премија штедње* (*savings premium*) која се користи да повећа резерву нето премије, и

$$ \Pi_k^r = (c_{j,k+1} - {}_{k+1}V) v q_{j,x+k} \tag{226}$$

ризико премија (*risk premium*) која покрива износ ризика за једну годину.
Губитак осигуравача је

$$ L = C_{J,K+1} v^{K+1} - \sum_{k=1}^{K} \Pi_k v^k\,. \tag{227}$$

Или, другачије

$$ L = \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k v^k\,, \tag{228}$$

где је

$$ \Lambda_k = \begin{cases} 0 & \text{за} \quad K \le k-1 \\ -\Pi_k^r + (c_{J,k+1} - {}_{k+1}V) v & \text{за} \quad K = k \\ -\Pi_k^r & \text{за} \quad K \ge k+1 \end{cases} \tag{229}$$

губитак осигураника у $(k+1)-$ој години, процењен у тренутку k.
Теорема Хатендорфа важи и овде. Најпогоднија формула за рачунање дисперзије за L

$$ D(L) = \sum_{k=1}^{\infty} D(\Lambda_k | K \ge k) v^{2k}\, {}_kp_x\,, \tag{230}$$

где је сада

$$ D(\Lambda_k | K \ge k) = \sum_{k=1}^{m} (c_{j,k+1} - {}_{k+1}V) v^2 q_{j,x+k} - (\Pi_k^r)^2\,. \tag{231}$$

Активности у $(k+1)-$ој години онда могу бити сматране као комбинација осигурања доживљења и једногодишњег осигурања. Потом могу бити раложене на m елементарних покрића, по једно за сваки узрок декремента. Можемо тумачити премијумску компоненету

$$\Pi^r_{j,k} = (c_{j,k+1} - {}_{k+1}V)vq_{j,x+k} \tag{232}$$

као плаћање за једногодишње осигурање износа $c_{j,k+1} - {}_{k+1}V$, које покрива ризик за узрок декремента j. Према томе, губитак осигураника током $(k+1)$-ве године може бити приказан као

$$\Lambda_k = \Lambda_{1,k} + \Lambda_{2,k} + ... + \Lambda_{m,k}\,, \tag{233}$$

ако дефинишемо

$$\Lambda_{j,k} = \begin{cases} 0 & \text{за} \quad K \leq k-1 \\ -\Pi^r_{j,k} + (c_{j,k+1} - {}_{k+1}V)v & \text{за} \quad K = k \text{ и } J = j \\ -\Pi^r_{j,k} & \text{за} \quad K = k \text{ и } J \neq j, \text{ или } K \geq k+1 \end{cases} \tag{234}$$

Техничка добит на крају године

$$G_{k+1} = \begin{cases} ({}_kV + \Pi_k)(1+i') - c_{J,k+1} & \text{за} \quad K = k \\ ({}_kV + \Pi_k)(1+i') - {}_{k+1}V) & \text{за} \quad K \geq k+1\,. \end{cases} \tag{235}$$

слично може бити разложена на $(m+1)$ компоненту. На пример, први метод разлагања доводи до

$$G_{k+1} = ({}_kV + \Pi_k)(i' - i) - \sum_{k=1}^{m} \Lambda_{j,k}(1+i)\,. \tag{236}$$

[1]

Резерве код непрекидног модела

Претпоставимо да је добит осигураника $Z = C_J(T)v^T$ и да се премије уплаћују непрекидно, при чему је са $\Pi(t)$ означен износ премије у тренутку t. Губитак осигураника је онда

$$L = c_J(T)v^T - \int_0^T \Pi(t)v^t dt\,. \tag{237}$$

Резерва нето премије у тренутку t је дата са

$$V(t) = \sum_{j=1}^{m} \int_0^{\infty} c_j(t+h)v^h\, {}_hp_{x+t}\mu_{j,x+t+h}dh - \int_0^{\infty} \Pi_{t+h}v^h\, {}_hp_{x+t}dh \tag{238}$$

Износ премије може бити разложен на *штедну компоненту* $\Pi^s(t)$, и *ризико компоненту*

$$\Pi^r(t) = \sum_{j=1}^{m} (c_j(t) - V(t))\mu_{j,x+t}\,. \tag{239}$$

[1]

6 Модел осигурања више особа

Дакле, проширујемо модел осигурања једне особе на осигурање две или више особа.
Опстајање, посматрајући два или више живота истовремено, називаћемо *статус интереса* (*status of interest*) или једноставно *статус* (*status*).
[4]

6.1 Статус заједничког живота (The Joint-Life Status)

Статус заједничког доживљења је статус који опстаје онолико дуго колико су свих m живота из групе живи. Означавамо га са

$$u = x_1 : x_2 : ... : x_m \,. \tag{240}$$

Преостало време до окончања статуса заједничког живота је

$$T(u) = \min(T_1, T_2, ..., T_n)\,. \tag{241}$$

Статус заједничког живота је један пример с*татуса доживљења* (*survival status*), односно статуса за који постоји случајна променљива која представља преостало време до смрти/пропадања, преостали животни век, и за који онда може бити дефинисана функција доживљења.
За преостали животни век статуса доживљења важе све релације као за преостали животни век код основног модела, само примењене са расподелом за статус доживљења. Тако да ћемо све те релације користити без доказа.
Сада ћемо да размотримо расподелу за преостало време до окончања статуса заједничког живота.
Претпоставићемо да су случајне променљиве $T_1, T_2, ..., T_m$ независне.
Функција расподеле вероватноћа за време до окончања статуса дата је са

$$\begin{aligned} {}_tp_{x_1:x_2:...:x_m} &= P(T(u) > t) \\ &= P(T_1 > t, T_2 > t, ..., T_m > t) \\ &= \prod_{k=1}^{m} P(T_k > t) = \prod_{k=1}^{m} {}_tp_{x_k}\,. \end{aligned} \tag{242}$$

и

$$ {}_tq_{x_1:x_2:...:x_m} = 1 - {}_tp_{x_1:x_2:...:x_m}\,. \tag{243}$$

Вероватноћу да се тренутак окончања статуса заједничког живота догоди у интервалу $(n, n+1]$ можемо означити са ${}_{n|}q_{x_1:x_2:...:x_m}$. Онда је ${}_{n|}q_{x_1:x_2:...:x_m}$ вероватноћа да се прва смрт догоди у интервалу $(n, n+1]$ и једнака је

$$\begin{aligned} {}_{n|}q_{x_1:x_2:...:x_m} &= P(n < T(u) \le n+1) \\ &= {}_np_{x_1:x_2:...:x_m} - {}_{n+1}p_{x_1:x_2:...:x_m} \\ &= {}_np_{x_1:x_2:...:x_m} - {}_np_{x_1:x_2:...:x_m} p_{x_1+n:x_2+n:...:x_m+n} \\ &= {}_np_{x_1:x_2:...:x_m}(1 - p_{x_1+n:x_2+n:...:x_m+n}) \\ &= {}_np_{x_1:x_2:...:x_m} q_{x_1+n:x_2+n:...:x_m+n}\,. \end{aligned} \tag{244}$$

Тренутна *стопа окончања статуса* заједничког живота, у складу са основним моделом, је

$$\mu_{u+t} = -\frac{d}{dt}\ln {}_tp_u = -\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{m}\ln {}_tp_{x_k} = \sum_{k=1}^{m}\mu_{x_k+t}\,, \tag{245}$$

при чему се овде претпоставља да су променљиве $T_1, T_2, ..., T_m$ независне, за разлику од модела вишеструког декремента.
Очекивани будући животни век статуса заједничког доживљења је

$$e^0_{x_1:x_2:...:x_m} = E[T(u)] = \int_0^\infty {}_tp_{x_1:x_2:...:x_m}dt\,. \tag{246}$$

Ако са $K(u)$ означимо целобројни животни век статуса заједничког живота, онда је

$$_{n|}q_{x_1:x_2:...:x_m} = P(K(x_1:x_2:...:x_m) = n)\,. \tag{247}$$

Затим, очекивани целобројни животни век статуса заједничког доживљења:

$$e_{x_1:x_2:...:x_m} = \sum_{k=1}^{\infty} {}_kp_{x_1:x_2:...:x_m}\,. \tag{248}$$

У складу са основним моделом, *нето једнократна премија* за доживотно осигурање је

$$A_{x_1:x_2:...:x_m} = \sum_{k=1}^{\infty} v^{k+1}\, {}_kp_{x_1:x_2:...:x_m}\, q_{x_1+k:x_2+k:...:x_m+k}\,. \tag{249}$$

Нето једнократна премија за ануитетни дуг је

$$\ddot{a}_{x_1:x_2:...:x_m} = \sum_{k=1}^{\infty} v^k\, {}_kp_{x_1:x_2:...:x_m} \tag{250}$$

и важе остале релације као код основног модела, само са заменом симбола (x) са (u).

Означимо са $\overline{n|}$ статус који пропада у тренутку n, то јест

$$T(\overline{n|}) = n\,. \tag{251}$$

Тада је $T(x:\overline{n|},) = \min(T(x), n)$; а сада је јасно да је $\overline{A}_{x:\overline{n|}}$ симбол за осигурање доживљења статуса заједничког живота.
[1], [4], [2]

`Пример:` Нека су:
(1)$T(50)$ и $T(75)$ независне случајне променљиве
(2)Аналитичке функције расподеле за животни век обе особе прате Де Муавров закон са $\omega = 100$.

Израчунајмо ${}_tp_{50:75}$, ${}_tq_{50:75}$, $\mu_{50:75}$.

Знамо да је

$$
\begin{aligned}
{}_tp_{50} &= 1 - \frac{t}{50},\ 0 \le t \le 50 \\
{}_tp_{75} &= 1 - \frac{t}{25},\ 0 \le t \le 25
\end{aligned}
$$

Онда,

$$
\begin{aligned}
{}_tp_{50:75} &= {}_tp_{50}\, {}_tp_{75} \\
&= \frac{(50-t)(25-t)}{1250} \\
&= 1 - (\frac{75t - t^2}{1250}),\ 0 \le t \le 25\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_tq_{50:75} &= 1 - [1 - (\frac{75t - t^2}{1250})] \\
&= \frac{75t - t^2}{1250},\ 0 \le t \le 25\,.
\end{aligned}
$$

Знамо да је

$$
\begin{aligned}
\mu_{x+50} &= \frac{1}{50 - t} \\
\mu_{y+75} &= \frac{t}{25 - t}
\end{aligned}
$$

Те је

$$
\begin{aligned}
\mu_{50:75+t} &= \frac{1}{50-t} + \frac{1}{25-t} \\
&= \frac{75 - 2t}{(50-t)(25-t)},\ 0 \le t \le 25\,.
\end{aligned}
$$

■

[4]

`Пример:` У некој популацији, непушачи имају стопу смртности која је једнака половини стопе смртности за пушаче. За непушаче важи:

$$l_x = 500(110 - x),\ 0 \le t \le 25\,.$$

Израчунајмо очекивани животни век, $e^0_{20:25}$, за пушача (20) и непушача (25) са независним животним вековима.

Имамо

$$\mu_{x+t}^{\text{непушач}} = \frac{1}{\omega - t} = \frac{1}{110 - t}, \qquad \mu_{y+t}^{\text{пушач}} = \frac{2}{\omega - t} = \frac{2}{110 - t}$$

$$ {}_tp_x^{\text{непушач}} = e^{-\int_0^t \frac{1}{110-s}ds} = (1-\frac{t}{110}), \qquad {}_tp_y^{\text{пушач}} = e^{-\int_0^t \frac{2}{110-s}ds} = (1-\frac{t}{110})^2 $$

$$ {}_tp_{25}^{\text{непушач}} = \frac{l_{25+t}^{\text{непушач}}}{l_{25}^{\text{непушач}}} = (1-\frac{t}{85}) $$
$$ {}_tp_{20}^{\text{пушач}} = \frac{l_{20+t}^{\text{пушач}}}{l_{20}^{\text{пушач}}} = (1-\frac{t}{90})^2 $$

$$ \begin{aligned} e_{20:25}^0 &= \int_0^{85} {}_tp_{20:25}dt = \int_0^{85} {}_tp_{20}^{\text{пушач}} \, {}_tp_{25}^{\text{непушач}}dt \\ &= \int_0^{85} (1-\frac{t}{90})^2(1-\frac{t}{85})dt \\ &= \frac{1}{688.5}\int_0^{85}(90-t)^2(85-t)dt \\ &= \frac{1}{688.5}\int_0^{85}u(u+5)^2du = \frac{1}{688.5}[\frac{1}{4}u^4+\frac{10}{3}u^3+\frac{25}{2}u^2]|_0^{85} = 22.059 \end{aligned} $$

■

[4]

6.2 Статус последњег преживелог (The Last-Survivor Status)

Код *статуса последњег преживелог* долази до окончања са умирањем последњег живог. Дакле, статус траје док сви не умру. Означавамо га са

$$ u = \overline{x_1 : x_2 : ... : x_m} \,. \tag{252} $$

Преостало време до окончања статуса је

$$ T(u) = \max(T_1, T_2, ..., T_n) \,. \tag{253} $$

Случај када су случајне променљиве $T_1, T_2, ..., T_m$ независне

Функција расподеле вероватноћа за време до окончања статуса у овом случају је

$$ {}_tp_{\overline{x_1:x_2:...:x_m}} = 1 - {}_tq_{\overline{x_1:x_2:...:x_m}} \,, \tag{254} $$

где је

$$ \begin{aligned} {}_tq_{\overline{x_1:x_2:...:x_m}} &= P(T(u)\le t) = P(T_1\le t, T_2\le t, ..., T_m\le t) \\ &= P(T_1\le t)P(T_2\le t)...P(T_m\le t) \\ &= \prod_{k=1}^m P(T_k\le t) = \prod_{k=1}^m {}_tq_{x_k} \,. \end{aligned} \tag{255} $$

Очекивани животи век за овај статус је

$$e^{0}_{\overline{x_1:x_2:\ldots:x_m}} = E[T(u)] = \int_0^\infty {}_tp_{\overline{x_1:x_2:\ldots:x_m}}dt = \int_0^\infty (1 - {}_tq_{x_1})\, {}_tq_{x_2} \cdots {}_tq_{x_m} dt\,. \tag{256}$$

[4]
`Пример:` Нека су:
(1)$T(50)$ и $T(75)$ независне случајне променљиве
(2)Аналитичке функције расподеле за животни век обе особе прате Де Муавров закон са $\omega = 100$.
Израчунајмо ${}_tq_{\overline{50:75}}$, ${}_tp_{\overline{50:75}}$ и $e^0_{\overline{20:25}}$.

Имамо да је

$${}_tq_{50} = \frac{t}{50},\ 0 \le t \le 50$$

$${}_tq_{75} = \begin{cases} \frac{t}{25} & \text{за} \quad 0 \le t \le 25 \\ 1 & \text{за} \quad 25 \le t \le 50 \end{cases} \tag{257}$$

$${}_tp_{50} = 1 - \frac{t}{50},\ 0 \le t \le 50$$

$${}_tp_{75} = 1 - \frac{t}{25},\ 0 \le t \le 25$$

Онда,

$${}_tq_{\overline{50:75}} = \begin{cases} \frac{t^2}{1250} & \text{за} \quad 0 \le t \le 25 \\ \frac{t}{25} & \text{за} \quad 25 \le t \le 50 \end{cases} \tag{258}$$

и

$${}_tp_{\overline{50:75}} = \begin{cases} 1 - \frac{t^2}{1250} & \text{за} \quad 0 \le t \le 25 \\ 1 - \frac{t}{25} & \text{за} \quad 25 \le t \le 50\,. \end{cases} \tag{259}$$

$$\begin{aligned} e^0_{\overline{20:25}} &= \int_0^{25} {}_tp_{\overline{20:25}}dt \\ &= \int_0^{25} {}_tp_{50}\, {}_tp_{75}dt = \int_0^{25} (\frac{50-t}{50})(\frac{25-t}{25})dt \\ &= \int_0^{25} \frac{1250 - 75t + t^2}{1250}dt = \frac{1}{1250}[1250t - \frac{75}{2}t^2 + \frac{t^3}{3}]|_0^{25} = 10.42\,. \end{aligned}$$

■

[4]

Случај када су случајне променљиве $T_1, T_2, ..., T_m$ зависне

За разлику од статуса заједничког живота, код овог статуса често случајне променљиве $T_1, T_2, ..., T_m$ нису независне. Тако да ће нам сада од користи при извођењу расподеле за $T(u)$ бити *формула укључивања и искључивања*[1]. Вероватноће и нето једнократне премије код *статуса последњег преживелог* могу бити израчунате преко *статуса заједничког живота.*
Означимо са B_k догађај да је $k-$та особа жива у тренутку t. Користећи формулу укључивања и искључивања добијамо

$$ {}_tp_{\overline{x_1:x_2:...:x_m}} = S_1^t - S_2^t + S_3^t - ... + (-1)^{m-1} S_m^t \,, \tag{262}$$

где је

$$ S_k^t = \sum {}_tp_{\overline{x_{j1}:x_{j2}:...:x_{jk}}} \,. \tag{263}$$

Множењем (262) са v^t и сумирањем по свим t, добијамо аналогну формулу за нето једнократну премију ануитет дуга статуса последњег преживелог

$$ \ddot{a}_{\overline{x_1:x_2:...:x_m}} = S_1^{\ddot{a}} - S_2^{\ddot{a}} + S_3^{\ddot{a}} - ... + (-1)^{m-1} S_m^{\ddot{a}} \,, \tag{264}$$

где је по дефиницији

$$ S_k^{\ddot{a}} = \sum \ddot{a}_{\overline{x_1:x_2:...:x_m}} \,. \tag{265}$$

Размотримо сада осигурану суму од 1 јединице која се исплаћује по окончању статуса, односно након смрти последњег живог. *Нето једнократна премија* може бити израчуната на следећи начин:

$$ \begin{aligned} A_{\overline{x_1:x_2:...:x_m}} &= 1 - d\,\ddot{a}_{\overline{x_1:x_2:...:x_m}} \\ &= 1 - d(S_1^{\ddot{a}} - S_2^{\ddot{a}} + S_3^{\ddot{a}} - ...) \,. \end{aligned} \tag{266}$$

Дефинишимо симетричну суму

$$ S_k^A = \sum A_{x_1:x_2:...:x_m} \,. \tag{267}$$

Замењујући

$$ S_k^{\ddot{a}} = \frac{\binom{m}{k} - S_k^A}{d} \tag{268}$$

[1]Нека су $B_1, B_2, ..., B_m$ случајни догађаји. Вероватноћа њихове уније је

$$ P(B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_m) = S_1 - S_2 + S_3 - ... + (-1)^{m-1} S_m \,; \tag{260}$$

где је са S_k означена симетрична сума

$$ S_k = \sum P(B_{j1} \cap B_{j2} \cap ... \cap B_{jk}) \,, \tag{261}$$

где сумација иде преко свих $\binom{m}{k}$ подскупова k догађаја.

у (266) добијамо формулу

$$A_{\overline{x_1:x_2:...:x_m}} = S_1^A - S_2^A + S_3^A - ... + (-1)^{m-1} S_m^A \,. \tag{269}$$

Слично се могу извести формуле за премије целобројних или непрекидних ануитета, или осигурања исплативих одмах на смрти последњег живог.
[1]

6.3 Општи симетрични статус (The General Symmetric Status)

Општи симетрични статус

$$u = \overline{\overset{k}{x_1:x_2:...:x_m}} \tag{270}$$

дефинишемо тако да опстаје док је живих k од почетних m особа, то јест окончава се након $(m-k+1)$-ве смрти.
Приметимо да су статус заједничког живота и статус последњег преживелог специјални случајеви ових статуса ако заменимо редом $k = m$ и $k = 1$.
Можемо дефинисати и статус

$$u = \overline{\overset{[k]}{x_1:x_2:...:x_m}} \tag{271}$$

који је активан када су тачно k од m особа живе, односно почиње да постоји када наступи $(m-k)-$та смрт и пропада по $(m-k+1)-$ој смрти. Овај статус може бити интересантан у контексту ануитета, док за животна осигурања није.
Навешћемо сада формулу уз помоћ које ћемо извести важне резултате везане за ово осигурање.

`Теорема:` [*Шут-Незбитова формула*] Нека су са $B_1, B_2, ..., B_m$ означени произвољни догађаји. Нека је N број догађаја који се дешавају; N је случајна променљива која узима вредности из скупа $\{0, 1, ..., m\}$. За произвољно изабране коефицијенте $c_0, c_1, ..., c_m$, важи формула

$$\sum_{n=0}^{m} c_n P(N = n) = \sum_{n=0}^{m} \Delta^k c_0 S_k \,, \tag{272}$$

где је S_k дефинисано у формули искључења и укључења са

$$S_k = \sum P(B_{j1} \cap B_{j2} \cap ... \cap B_{jk}) \,, \tag{273}$$

где сумација иде преко свих $\binom{m}{k}$ подскупова k догађаја; $S_0 = 0$.
E и Δ су, редом, оператори *шифтовања* (*shift operator*) и *симетричне разлике* (*difference operator*).

`Доказ:` Најпре приметимо да између оператора шифтовања и симетричне разлике постоји следећа веза:

$$E = 1 + \Delta\,. \tag{274}$$

Затим $1 - I_{B_j}$ је индикатор догађаја комплементарног догађају B_j.
Онда добијамо да је

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{m} I_{\{N=n\}} E^n &= \prod_{j=1}^{m}(1 - I_{B_j} + I_{B_j} E) \\ &= \prod_{j=1}^{m}(1 - I_{B_j}\Delta) \\ &= \sum_{n=0}^{m}(\sum I_{B_{j1}\cap B_{j1}\cap \ldots \cap B_{jk}})\Delta^k\,. \end{aligned} \tag{275}$$

Користећи очекивање добијамо

$$\sum_{n=0}^{m} P(N=n)E^n = \sum_{n=0}^{m} S_k \Delta^k\,. \tag{276}$$

Применимо сада овај оператор на низ коефицијената c_k, почевши од $k = 0$. Добијамо тачно формулу (272).

$\blacksquare$

Ако применимо ову формулу на догађаје такве да је $B_j = \{T_j \geq t\}$, добијамо

$$\sum_{n=0}^{m} c_k\, {}_t p_{\overline{x_1:x_2:\ldots:x_m}}^{[k]} = \sum_{j=0}^{m} \Delta^j c_0 S_j^t \tag{277}$$

и, слично

$$\sum_{n=0}^{m} c_k\, {}_t \ddot{a}_{\overline{x_1:x_2:\ldots:x_m}}^{[k]} = \sum_{j=0}^{m} \Delta^j c_0 S_j^{\ddot{a}}\,. \tag{278}$$

Овде су ознаке S_j^t и $S_j^{\ddot{a}}$, $j = 1, 2, ..., m$ дефинисане релацијама (263) и (265) из претходног одељка. Дефинишемо и $S_0^t = 1$ и $S_0^{\ddot{a}} = \ddot{a}_{\overline{\infty}|}$.

Нека су сада произвољно изабрани коефицијенти $d_1, d_2, ..., d_m$.
Ако у претходне две релације заменимо да је $c_0 = 0,\ c_k = d_1 + ... + d_k$, добијамо релације

$$\sum_{n=0}^{m} d_k\, {}_t p_{\overline{x_1:x_2:\ldots:x_m}}^{k} = \sum_{j=0}^{m} \Delta^{j-1} d_1 S_j^t\,, \tag{279}$$

$$\sum_{n=0}^{m} d_k\, {}_t \ddot{a}_{\overline{x_1:x_2:\ldots:x_m}}^{k} = \sum_{j=0}^{m} \Delta^{j-1} d_1 S_j^{\ddot{a}}\,. \tag{280}$$

Последње две релације могу бити уопштене за животна осигурања:

$$\sum_{n=0}^{m} d_k \, {}_tA_{\overline{x_1:x_2:\ldots:x_m}}{}^{k} = \sum_{j=0}^{m} \Delta^{j-1} d_1 S_j^A \,, \tag{281}$$

Ова једначина је добијена из једначине (280) на исти начин као што је једначина (269) из (264).
[1]

`Пример:` Посматрајмо непрекидни ануитет за 4 живота иницијалних година ω, x, y, z. Плаћање рата почиње са коефицијентом 8 и редукује се за 50% са сваком смрти. Нето једнократна премија овог ануитета је очигледно

$$8\overline{a}_{\overline{\omega:x:y:z}}^{[4]} + 4\overline{a}_{\overline{\omega:x:y:z}}^{[3]} + 2\overline{a}_{\overline{\omega:x:y:z}}^{[2]} + \overline{a}_{\overline{\omega:x:y:z}}^{[1]}, \tag{282}$$

дакле, имамо коефицијенте $c_0 = 0, c_1 = 1, c_2 = 2, c_3 = 4, c_4 = 8$.
Табела симетричних разлика је:

k	c_k	Δc_k	$\Delta^2 c_k$	$\Delta^3 c_k$	$\Delta^4 c_k$
0	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	
2	2	2	2		
3	4	4			
4	8				

Нето једнократна премија онда $S_1^{\overline{a}} + S_2^{\overline{a}}$, где је

$$\begin{aligned} S_1^{\overline{a}} &= \overline{a}_\omega + \overline{a}_x + \overline{a}_y + \overline{a}_z \\ S_2^{\overline{a}} &= \overline{a}_{\omega:x:y} + \overline{a}_{\omega:x:z} + \overline{a}_{\omega:y:z} + \overline{a}_{x:y:z} \,. \end{aligned} \tag{283}$$

■

[1]

Литература

[1] Hans U. Gerber: **"Life Insurance Mathematics"**, Springer, Third Edition 1997

[2] Newton L. Bowers, Hans U. Gerber, James C. Hickman, Donald A. Jones, Cecil J. Nesbitt: **"Actuarial Mathematics"**, Published by The Society of Actuaries, 1997

[3] D. Dickson, M. Hardy, H. Waters: **"Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks"**, Cambridge University Press, 2009

[4] Marcel B. Finan: **"A Reading of the Theory of Life Contingency Models: A Preparation for Exam MLC/3L"**, Arkansas Tech University, Preliminary Draft

[5] Eric V. Slud: **"Actuarial Mathematics and Life-Table Statistics"**, Mathematics Department University of Maryland, College Park 2001

[6] Judy Feldman Anderson and Robert L. Brown: **"Risk and Insurance"**, Copyright by The Society of Actuaries, 2005

[7] Ragnar Norberg: **"Basic Life Insurance Mathematics"**, Version: September 2002

[8] Teppo A. Rakkolainen: **"Insurance Mathematics"**, Turku, April 2010

[9] Pavle Mladenović: **"Elementi aktuarske matematike"**, Matematički fakultet, Beograd, 2014

[10] Pavle Mladenović: **"Verovatnoća i statistika"**, Matematički fakultet, Beograd, 2008

[11] Marcel B. Finan: **"A Basic Course in the Theory of Interest and Derivatives Markets: A Preparation for the Actuarial Exam FM/2"**, Arkansas Tech University, Preliminary Draft, 2016

[12] Slobodanka Janković: **"Elementi finansijske matematike"**, Matematički fakultet, Beograd, beleške sa predavanja, 2015

Биографија аутора

Љиљана Лазарић рођена је 14. јула 1991. године у Ваљеву. 2006. године завршава основну школу "Душан Даниловић" у Радљеву као носилац Вукове дипломе. 2010. године завршава Гимназију "Бранислав Петронијевић" у Убу, општег типа, са одличним успехом.
По завршетку Гимназије, 2010. године, уписује основне академске студије на Математичком факултету Универзитета у Београду; модул Статистика, актуарска и финансијска математика. Основне академске студије завршава 2014. године са звањем "дипломирани математичар". Исте године уписује мастер академске студије на Математичком факултету Универзитета у Београду; модул Статистика, актуарска и финансијска математика.