Matematički fakultet
Univerzitet u Beogradu

Izvod funkcije i primena izvoda u fizici

Master rad

Student: Milena Milovanović 1044/2015
Mentor: Prof. dr Miodrag Mateljević

Beograd,
decembar 2016.

Sadržaj

1 Uvod

Pojam izvoda funkcije je jedan od osnovnih pojmova matematičke analize. Poznato je da je pojam izvoda nastao iz potrebe da se korektno uvedu pojmovi kao što su tangenta na krivu liniju, odnosno brzina i ubrzanje. Danas pojam izvoda i pojmovi koji su uopštenje klasičnog pojma izvoda imaju mnogo širu primenu kako u matematici i prirodnim naukama tako na primer i u ekonomiji. U srednjoškolskoj nastavi pojam izvoda je izuzetno pogodan da se napravi veza između dva predmeta - matematike i fizike. Praksa pokazuje da se ta veza ne uspostavlja uopšte (izučavanje izvoda se svede na rad sa tablicom izvoda) ili se ne uspostavlja na adekvatan način (na primer ne razjasni se razlika izmedju pojma brzine kao vektora (eng. *velocity*) i pojma brzine kao intenziteta vektora (eng. *speed*)). Primenu izvoda u fizici možemo videti i pri razmatranju dinamike materijalne tačke (npr. kod slobodnog pada, hica na dole, hica u vis, kosog i horizontalnog hica). Za datu funkciju od posebnog je interesa izučavati i svojstva izvoda te funkcije jer nam to omogućava nalaženje ekstremuma i ispitivanje konveksnosti date funkcije.

U radu je definisan pojam izvoda i opisana su neka njegova svojstva. Definisan je izvod funkcije kao brzina kretanja tačke i kao koeficijent pravca tangente na neku krivu. Brzinu i ubrzanje smo definisali kao vektorske i kao skalarne veličine. Primena izvoda u fizici prikazana je na primeru opisa pravolinijskog i krivolinijskog kretanja materijalne tačke. Dato je više primera različite težine, koji se mogu primenjivati u nastavi u osnovnoj i srednjoj školi. Na kraju je opisana primena izvoda prilikom izučavanja konveksnosti funkcije.

2 Definicija i svojstva izvoda funkcije

Tekst u ovoj sekciji je napisan na osnovu [1].

Neka je funkcija $y = f(x)$ definisana u intervalu (a, b). Uočimo proizvoljnu tačku x tog intervala. Označimo sa Δx priraštaj argumenta funkcije $f(x)$. Priraštaj argumenta funkcije $f(x)$ je realan broj takav da tačka $x + \Delta x$ takođe pripada u intervalu (a, b). Broj $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ nazivamo priraštajem funkcije $f(x)$ u tački x koji odgovara priraštaju argumenta Δx.

Definicija 1. *Izvodom funkcije $y = f(x)$ u tački x intervala (a, b) naziva se konačan limes količnika $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ kad Δx teži nuli, ako taj limes postoji.*

Oznaka za izvod je obično $f'(x)$ ili y'. Izvod funkcije možemo zapisati na sledeći način:

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{1}$$

Priraštaj argumenta Δx se često obeležava sa h, pa se piše:

$$y' = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}. \tag{2}$$

Ako postoji izvod funkcije f, definisane u intervalu (a,b), onda je taj izvod funkcija argumenta x u intervalu (a,b).

Primer 1. 1^o *Za funkciju $y = f(x) = c$, gde je c konstanta, imamo $\Delta y = 0$, pa je $(c)' = 0$.*

2^o *Za stepenu funkciju $y = f(x) = x^n$, za prirodan broj n, imaćemo:*

$$(x^n)' = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \cdots + \binom{n}{n}h^n - x^n\right]$$
$$= \lim_{h\to 0}\left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1}\right) = nx^{n-1}.$$

3^o *Izvod eksponencijalne funkcije e^x je:*

$$(e^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x.$$

4^o *Izvod trigonometrijskih funkcija* sin *i* cos *je:*

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\frac{h}{2}\cos(x+\frac{h}{2})}{h} = \cos x,$$

$$(\cos x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2\sin\frac{h}{2}\sin(x+\frac{h}{2})}{h} = -\sin x.$$

5^o *Razmotrićemo funkciju $f(x) = |x|$. Za $x > 0$ (h biramo tako da $x+h > 0$) imamo:*

$$|x|' = \lim_{h\to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = 1;$$

za $x < 0$ (h biramo tako da $x+h < 0$) je:

$$|x|' = \lim_{h\to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h} = -1.$$

Izvod funkcije $f(x) = |x|$ ne postoji u tački $x = 0$ jer je:

$$\lim_{h\to +0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 1 \quad i \quad \lim_{h\to -0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = -1.$$

Vidimo da funkcija $|x|$ ima svugde izvod osim u tački $x = 0$. Dakle, možemo zaključiti da izvod neprekidne funkcije $f(x) = |x|$ ne postoji u tački $x = 0$.

2.1 Diferencijabilnost

Uočimo proizvoljnu realnu funkciju $y = f(x)$, definisanu u intervalu (a, b) i neka je $x \in (a, b)$ fiksirana tačka. Priraštaj $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ $(x + \Delta x \in (a, b))$ zavisi od priraštaja nezavisno promenljive Δx.

Definicija 2. *Za funkciju $y = f(x)$ se kaže da je diferencijabilna u tački x ako se Δy može napisati u obliku:*

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \tag{3}$$

gde je A realan broj, a funkcija $\alpha(\Delta x)$ je beskonačno mala kada $\Delta x \to 0$.

Primetimo da se (3) može napisati u obliku:

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0). \tag{4}$$

Stav 1. *Funkcija f je diferencijabilna u tački x ako i samo ako ima izvod $f'(x)$ u toj tački.*

Dokaz. Neka je $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x) \ \ (\Delta x \to 0)$, $A \in \mathbb{R}$. Sledi:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x},$$

odnosno

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A.$$

Obratno, ako postoji:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x),$$

onda je

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) = \alpha(\Delta x),$$

gde $\alpha(\Delta x) \to 0$ za $\Delta x \to 0$. Iz poslednje jednakosti imamo:

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x.$$

□

Stav 2. *Ako je funkcija f diferencijabilna u tački x, onda je ona i neprekidna u toj tački.*

Dokaz. Iz diferencijabilnosti funkcije f u tački x sledi:

$$\lim_{\Delta x \to 0} [f(x + \Delta x) - f(x)] = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [f'(x)\Delta x + o(\Delta x)] = 0,$$

odnosno

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) = f(x).$$

□

Neprekidna funkcija u tački x ne mora u toj tački biti diferencijabilna. Imali smo primer, funkciiju $|x|$ koja nije diferencijabilna u tački $x = 0$, iako je u toj tački neprekidna.

Primer 2. *Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, data sa*

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

prekidna je u svakoj tački, osim u tački $x = 0$. Dakle, f nije diferencijabilna ni u jednoj tački $x \neq 0$. Ispitaćemo njenu difernecijabilnost za $x = 0$.
Ako je h racionalno, imamo:

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{h^2 - 0}{h} = h \to 0 \quad za \quad h \to 0.$$

Za h iracionalno je:

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{0 - 0}{h} = 0 \to 0 \quad za \quad h \to 0.$$

Dakle,

$$\lim_{h \to +0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 0,$$

pa je f diferencijabilna u tački $x = 0$ i $f'(0) = 0$.

2.2 Osnovne teoreme primene izvoda

U ovoj sekcji navešćemo teoreme i dokaze teorema koje omogućavaju široku primenu izvoda.

Definicija 3. *Realna funkcija f, definisana u nekoj okolini tačke $c \in \mathbb{R}$, ima u toj tački lokalni maksimum (minimum) ako postoji okolina U tačke c tako da je za svako $x \in U$ ispunjeno:*

$$f(x) \leq f(c) \quad (f(x) \geq f(c)).$$

U tački c je strogi lokalni maksimum (minimum) ako je:

$$f(x) < f(c) \quad (f(x) > f(c))$$

za $x \in U \setminus \{c\}$.
Maksimum i minimum zajedno se nazivaju ekstremumima. Strogi maksimum i strogi minimum zajedno se nazivaju strogim ekstremumima.

Teorema 1 (Fermaov stav)**.** *Ako je funkcija f diferencijabila u tački c i u toj tački ima lokalni ekstremum, onda je $f'(c) = 0$.*

Dokaz. U tački c je lokalni ekstremum funkcije f. Postoji okolina U tačke c, takva da je $f(c+h) - f(c)$ ili nenegativno ili nepozitivno za sve $c + h \in U$.
Iz diferencijabilnosti funkcije f u tački c sledi:

$$f(c+h) - f(c) = f'(c)h + \alpha(h)h,$$

gde $\alpha(h) \to 0$ $(h \to 0)$. Pretpostavimo da je $f'(c) \neq 0$. Ako poslednju jednakost napišemo u obliku

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} = f'(c) + \alpha(h), \quad h \neq 0,$$

vidi se da za dovoljno malo $|h|$ desna strana ima stalan znak, dok leva može biti i nenegativna i nepozitivna. Dobijamo kontradikciju. □

Teorema 2 (Rolova teorema)**.** *Neka je funkcija* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *neprekidna na segmentu* $[a,b]$*, diferencijabilna u intervalu* (a,b) *i* $f(a) = f(b)$*. Tada u intervalu* (a,b) *postoji tačka* c*, takva da je* $f'(c) = 0$*.*

Dokaz. Prvi slučaj je ako je funkcija f konstantna na $[a,b]$. Tada je $f'(x) = 0$ za neko $x \in (a,b)$. Teorema je dokazana.
Drugi slučaj je kada funkcija f nije konstantna. Pretpostavićemo da postoji $x \in (a,b)$, tako da je $f(x) > f(a) = f(b)$. Funkicja f je neprekidna na segmentu, pa prema Vajerštrasovoj teoremi, dostiže svoj maksimum u nekoj tački c koja u našem slučaju pripada intervalu (a,b). Prema Teoremi 1 (Fermaovom stavu) je $f'(c) = 0$. Dokazali smo teoremu i u slučaju kada funckija f nije konstantna. □

Kako je tema rada primena izvoda u fizici, možemo navesti i mehaničku interpretaciju Teoreme 2 (Rolove teoreme).

Neka se tačka kreće po pravoj i neka se u trenutku t nalazi u tački sa koordinatom $x = x(t)$. Neka je funkcija $x(t)$ neprekidna za $t \in [\alpha, \beta]$ i diferencijabilna za $t \in (\alpha, \beta)$. Ako se položaji tačke u trenucima $t = \alpha$ i $t = \beta$ poklapaju, znači da je $x(\alpha) = x(\beta)$, onda mora postojati trenutak $t_0 \in (\alpha, \beta)$ u kojem je brzina tačke jednaka nuli.

Teorema 3 (Lagranžova teorema)**.** *Ako je funkcija* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *neprekidna na segmentu* $[a,b]$ *i diferencijabilna u intervalu* (a,b)*, onda postoji* $c \in (a,b)$*, tako da je:*

$$\frac{f(a) - f(b)}{b - a} = f'(c). \tag{5}$$

Dokaz. Posmatrajmo funkciju $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$, datu sa $\varphi(x) = f(x) + \lambda x$ i odredimo $\lambda \in \mathbb{R}$ tako da φ zadovoljava uslove Teoreme 2 (Rolove teoreme). Jasno je da je φ neprekidna na $[a,b]$ i diferencijabilna u (a,b). Da bi bilo $\varphi(a) = \varphi(b)$ mora biti $\lambda = -\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Tada postoji tačka $c \in (a,b)$, takva da je:

$$0 = \varphi'(c) = f'(c) + \lambda,$$

odnosno

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Navešćemo mehaničku interpretaciju Teoreme 3 (Lagranžove teoreme). Neka se tačka kreće po pravoj po zakonu $x = x(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$. Ako je $x(t)$ neprekidna na $[\alpha, \beta]$ i diferenicjabilna u (α, β), onda je srednja brzina za vremenski interval $[\alpha, \beta]$ jednaka $\dfrac{x(\beta) - x(\alpha)}{\beta - \alpha}$. Za neko $t_0 \in (\alpha, \beta)$ trenutna brzina u tački t_0 jednaka je srednjoj brzini u pomenutom vremenskom intervalu, jer je $\dfrac{x(\beta) - x(\alpha)}{\beta - \alpha} = x'(t_0)$.

Koristeći Teoremu 3 (Lagražovu teoremu) i njenu mehaničku interpretaciju možemo rešiti sledeći primer.

Primer 3. *Telo se tokom vremenskog intervala $[0, T]$ pravolinijski i jednosmerno kretalo od mesta A do mesta B. Dokazati da postoji bar jedan trenutak $t_0 \in (0, T)$ takav da je $v_{sr}(0, T) = v(t_0)$. (Napomena: Srednju brzinu kretanja tela na vremenskom intervalu obeležavamo sa v_{sr}, a trenutnu brzina kretanja tela u nekom trenutku sa v).*

Rešenje. Dakle, traži nam se da dokažemo da je srednja brzina na intrevalu $[0, T]$ jednaka trenutnoj brzini u trenutku t_0, gde $t_0 \in (0, T)$. Funkcija $s(t)$ je funkcija pređenog puta do trenutka t, gde $t \in [0, T]$. Kako se telo kreće pravolinijski u jednom smeru, funkcija $s(t)$ je neprekidna na $[0, T]$ i diferencijabilna u $(0, T)$. Srednja brzina na intrevalu $[0, T]$ biće prema definiciji srednje brzine jednaka:

$$v_{sr}(0, T) = \frac{s(T) - s(0)}{T - 0}.$$

Prema Teoremi 3 (Lagranžovoj teoremi) postoji trenutak $t_0 \in (0, T)$ tako da je:

$$\frac{s(T) - s(0)}{T - 0} = s'(t_0) = v(t_0).$$

Zaključili smo da postoji bar jedan trenutak t_0 tako da je $v_{sr}(0, T) = v(t_0)$.

△

Navešćemo i dokazati jednu posledicu Teoreme 3 (Lagranžove teoreme) koja nam je značajna za dalji rad.

Stav 3. *Ako je funkcija $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ diferencijabilna u (a, b) i $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) za $x \in (a, b)$, onda ona raste (opada) na (a, b). Ako je $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) za $x \in (a, b)$, onda funkcija f strogo raste (opada) na (a, b).*

Dokaz. Neka su $x_1, x_2 \in (a, b)$ i $x_1 < x_2$. Iz jednakosti (5) sledi:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), \ c \in (x_1, x_2).$$

Kako je $f'(c) \geq 0$ ($f'(c) \leq 0$), to je $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$). Slično važi i u drugom slučaju. □

Stav 3 daje dovoljne uslove za strogo rastenje (opadanje) koji nisu neophodni.

Primer 4. *Funkcija* $f(x) = x^3$, $-1 < x < 1$, *strogo raste, iako je* $f'(0) = 0$.

Teorema 4 (Darbuova teorema)**.** *Ako je funkcija* $f(x)$ *diferencijabilna na segmentu* $[a, b]$, *onda za proizvoljno* μ *izmedju* $f'(a)$ *i* $f'(b)$ *postoji* $c \in (a, b)$, *tako da je* $f'(c) = \mu$.

Dokaz. Pretpostavićemo da je $f'(a) < \mu < f'(b)$. Definisaćemo funkcije:

$$\varphi(x) = f(x) - \mu x \quad \text{i} \tag{6}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a}, & x \neq a \\ \varphi'(a), & x = a \end{cases} \tag{7}$$

Funkcija $\varphi(x)$ je diferencijabilna na $[a, b]$, pa je $\psi(x)$ neprekidna na $[a, b]$. Kako je $\psi(a) = \varphi'(a) = f'(a) - \mu < 0$, to postoji $\delta > 0$, takvo da je $\psi(x) < 0$ za svako x takvo da je $a < x < a + \delta$. Odavde sledi $\varphi(x) < \varphi(a)$ za $a < x < a + \delta$. Zaključujemo da u tački $a \in [a, b]$ funkcija $\varphi(x)$ ne dostiže minimum.

Slično bismo dokazali da funkcija $\varphi(x)$ ne dostiže minimum ni u tački b.

Rekli smo da je funkcija $\varphi(x)$ neprekidna na $[a, b]$, tako da ona dostiže minimum u nekoj tački $c \in (a, b)$. Prema Teoremi 1 (Fermaovom stavu) je $\varphi'(c) = 0$. Kada diferenciramo formulu (6) i ako iskoristimo to što je $\varphi'(c) = 0$, slediće da je $f'(c) = \mu$. □

Teorema 5 (Košijeva teorema)**.** *Ako su funkcije* $f,\ g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *neprekidne na* $[a, b]$, *diferencijabilne u* (a, b) *i* $g'(x) \neq 0$ *za svako* $x \in (a, b)$, *onda postoji tačka* $c \in (a, b)$, *tako da je:*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{8}$$

Dokaz. Najpre možemo primetiti da je $g(a) \neq g(b)$, jer bi u suprotnom iz Teoreme 2 (Rolove teoreme) sledilo da je $g'(x) = 0$ za neko $x \in (a, b)$ što je suprotno sa pretpostavkom. Definisaćemo funkciju $\varphi(x) = f(x) + \lambda g(x)$ koja je neprekidna na $[a, b]$ i diferencijabilna u (a, b), i želimo da odredimo λ tako da bude $\varphi(a) = \varphi(b)$. Lako vidimo da je:

$$\lambda = -\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Funkcija φ zadovoljava uslove Teoreme 2 (Rolove teoreme), onda postoji $c \in (a, b)$ takvo da je $\varphi'(c) = f'(c) + \lambda g'(c) = 0$. Odavde sledi:

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0.$$

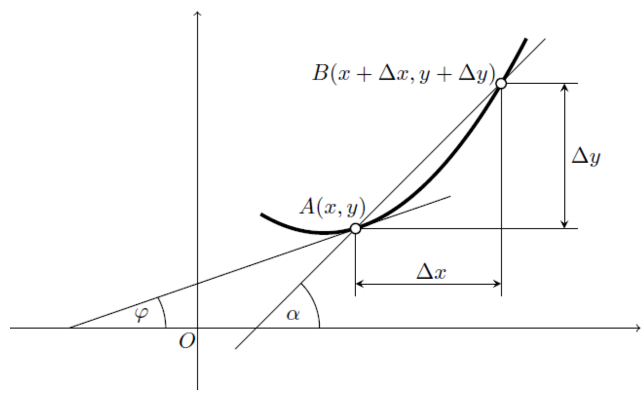
□

Ako u Teoremu 5 (Košijevu teoremu) stavimo $g(x) = x$, dobija se Teorema 3 (Lagranžova teorema). Dakle, Lagranžova teorema je specijalan slučaj Košijeve teoreme.

3 Tangenta krive i brzina tačke

U nastavku ćemo opisati kako je razmatranjem problema tangente krive linije i brzine kretanja tela nastao pojam izvoda funkcije.

3.1 Tangenta krive



Slika 1: Tangenta krive

Posmatramo grafik neprekidne funkcije $y = f(x)$ u intervalu (a, b). Sečicom krive nazivamo pravu AB, gde su A i B tačke grafika. Tačka B se kreće po krivoj i teži da se poklopi sa tačkom A. Sečica AB pri tome menja položaj. Ako postoji odredjen granični položaj te sečice kad tačka B teži tački A, prava koja zauzima taj granični položaj naziva se tangentnom krive $y = f(x)$ u tački A.

Tangenta u tački A je odredjena uglom φ (pretpostavimo da je $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$) koji zaklapa sa pozitivnim smerom x-ose. Koordinate tačke A ćemo označiti sa (x, y), a koordinate tačke B sa $(x+\Delta x, y+\Delta y)$. Pri tome je $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$. Koeficijent pravca, $\operatorname{tg}\alpha$, sečice AB je:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{9}$$

Koeficijent pravca tangente krive u tački A dat je izrazom:

$$\operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x). \tag{10}$$

Primer 5. *Odrediti jednačinu tangente na krivu $y = x^3$ u tački $A(1, 1)$.*

Rešenje. Za krivu $y = x^3$ u tački A koeficijent pravca tangente je $y'(1) = 3$, jer je $y' = 3x^2$. Kako imamo koeficijent pravca tangnete na krivu i tačku u kojoj tangenta dodiruje krivu, možemo napisati jednačinu tangente kao:

$$y - 1 = 3(x - 1).$$

△

Primer 6. *U kojoj tački krive $y = x^2 + 3x + 3$ je tangenta nagnuta prema x-osi pod uglom $\alpha = 45°$?*

Rešenje. Iz jednačine (10), možemo odrediti x koordinatu tražene tačke:

$$\operatorname{tg} 45^o = f'(x) = 2x + 3,$$

$$1 = 2x + 3,$$

$$x = -1.$$

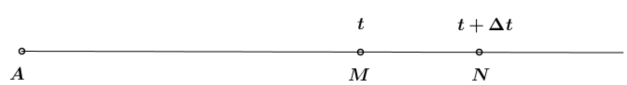
Sada koordinatu x zamenimo u jednačinu krive i dobijamo y koordinatu tačke:

$$y(-1) = (-1)^2 + 3(-1) + 3 = 1.$$

Dakle tražena tačka je $A(-1, 1)$.

△

3.2 Brzina tačke



Slika 2: Brzina tačke

Neka se tačka kreće po pravoj tako da je jednačinom $s = f(t)$ data zavisnost pređenog puta od vremena. Neka se u trenutku t tačka nalazi u položaju M, a u trenutku $t + \Delta t$ u položaju N. Pređeni put do trenutka t je $f(t)$, a do trenutka $t + \Delta t$ je $f(t + \Delta t)$. Srednja brzina v_{sr} na putu MN je jednaka:

$$v_{sr} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}. \tag{11}$$

Trenutnu brzinu tačke u trenutku t definišemo kao graničnu vrednost srednje brzine kad Δt teži 0.

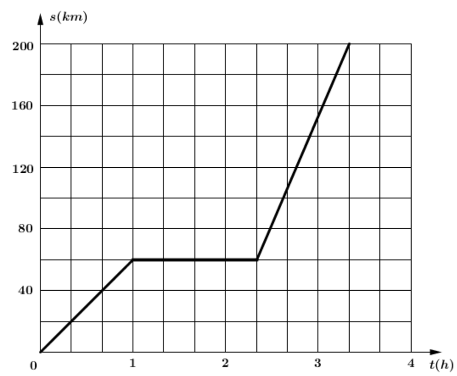
$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = f'(t). \tag{12}$$

Dakle, vidimo da kada vremenski interval teži nuli, onda srednja brzina na putu koji je pređen u tom vremenskom intervalu teži trenutnoj brzini.

Primeri koji slede govore o brzini kretanja tela i mogu se koristiti u srednjoškolskoj nastavi matematike i fizike. Takođe, objašnjavaju vezu između ova dva predmeta. Na ovim primerima možemo videti grafički prikaz pređenog puta i brzine kretanja u zavisnosti od vremena.

Primer 7, Primer 8, Primer 9 i Primer 10 su preuzeti iz [6].

Primer 7. *Automobil je išao iz mesta A u mesto B, koje je od mesta A udaljeno 200km. Posle nekog vremena automobil se zaustavio zbog kvara. Nakon što je kvar otklonjen putovanje je nastavljno. Grafik zavisnosti pređenog puta od vremena je prikazan na slici 3. Kojom brzinom se automobil kretao pre kvara, a kojom nakon što je kvar otklonjen?*



Slika 3: Grafik zavisnosti pređenog puta od vremena

Rešenje. Prvo ćemo odrediti kojom brzinom se automobil kretao pre kvara. Posmatramo grafik na slici 3 i koristeći jednačinu (11) dobijamo brzinu pre kvara v_1:

$$v_1 = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{60-0}{1-0} = 60\frac{km}{h}.$$

Zatim ćemo odrediti brzinu kojom se automobil kretao posle kvara. Na osnovu grafika sa slike 3 i jednačine (11) brzine posle kvara, v_2, je:

$$v_2 = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{200-6}{1} = 140\frac{km}{h}.$$

$\triangle$

Primer 8. *Automobil je išao iz mesta A u mesto B, koje je od mesta A udaljeno 200km. Posle nekog vremena automobil se zaustavio zbog kvara. Nakon što je kvar otklonjen putovanje je nastavljno. Grafik zavisnosti pređenog puta od vremena je prikazan na slici 3. Da se automobil nije pokvario i da je nastavio da se kreće brzinom kojom se kretao pre kvara, da li bi na odredište stigao ranije ili kasnije?*

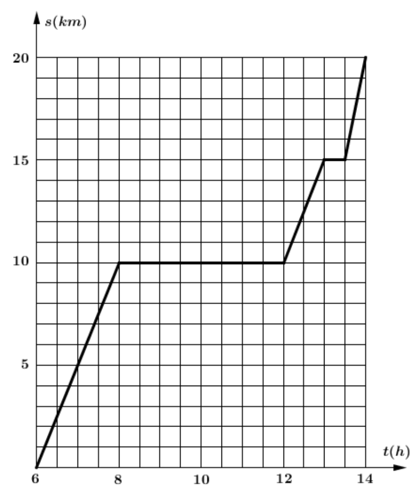
Rešenje. Hoćemo da odredimo za koliko bi automobila stigao na odredište da se kretao brzinom pre kvara. U Primeru 7 imamo brzinu kojom se automobil kretao pre kvara i ona je jednaka $v_1 = 60\frac{km}{h}$. Automobil treba da predje $200km$ brzinom $v_1 = 60\frac{km}{h}$. Do odredišta će stići za vreme t_1:

$$t_1 = \frac{200}{60} = 3h\ 20min$$

Na grafiku vidimo da je automobil sa kvarom stigao za vreme $t_2 = 3h\ 20min$. Dakle, da se automobil nije pokvario, stigao bi za isto vreme do odredišta kao sa kvarom. △

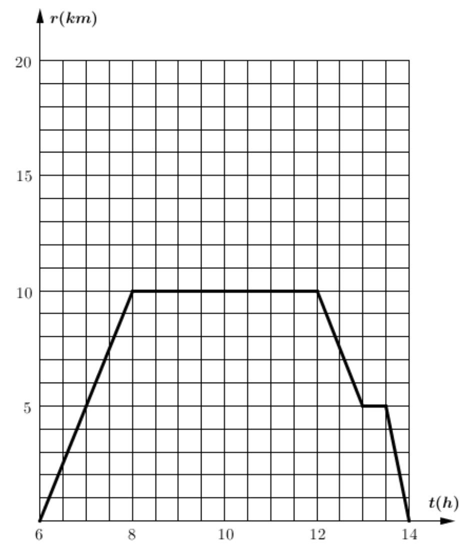
Primer 9. *Milorad je od kuće krenuo u šest časova ujutru ka vinogradu. Za dva časa je prešao deset kilometara i stigao u vinograd u kome se zaržao četiri časa. Nakon jednog časa hoda ka kući, kada je bio na pola puta, zaspao je ispod bagrema i odspavao trideset minuta. Odmoran do kuće je stigao za trideset minuta. Grafički predstaviti zavisnost Miloradovog rastojanja od kuće i vremena. (Napomena: Dok hoda Milorad za jednako vreme prelazi jednako rastojanje.)*

Rešenje. Prvo ćemo predstaviti grafik zavisnosti pređenog puta od vremena na slici 4.



Slika 4: Grafik zavisnosti pređenog puta od vremena

Sada ćemo prikazati na slici 5 grafik zavisnosti Miloradovog rastojanja od kuće i vremena,što nam je i traženo u primeru. Miloradovo rastojanje od kuće obeležavamo sa r.

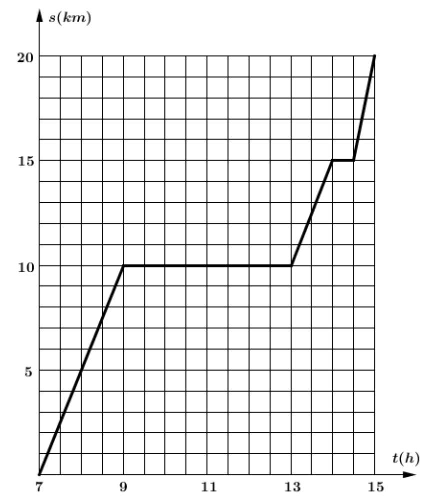


Slika 5: Grafik zavisnosti rastojanja od kuće i vremena

$\triangle$

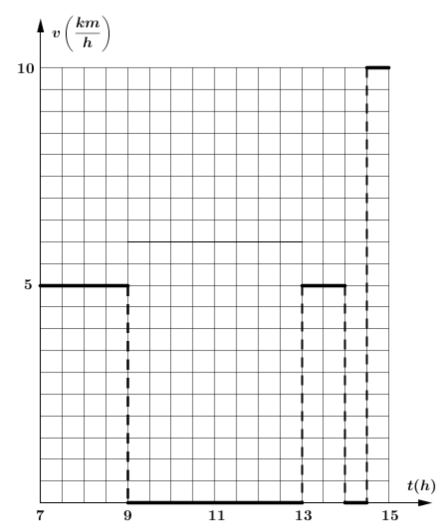
Primer 10. *Milorad je i juče obilazio svoj vinograd. Ovog puta Milorad je u sedam časova ujutru krenuo ka vinogradu koji je deset kilometara udaljen od njegove kuće. Za dva časa je stigao u vinograd u kom se zadržao četiri časa. Nakon jednog časa hoda ka kući, kada je bio na pola puta, zastao je ispod bagrema i odspavao trideset minuta. Odmoran do kuće je stigao za trideset minuta. Grafički predstaviti zavisnost brzine Miloradovog kretanja i vremena. (Napomena: Dok hoda Milorad za jednako vreme prelazi jednako rastojanje.)*

Rešenje. Prvo ćemo predstaviti grafik zavisnosti pređenog puta od vremena na slici 6.



Slika 6: Grafik zavisnosti pređenog puta od vremena

Sada ćemo prikazati grafik zavisnosti brzine Miloradovog kretanja i vremena na slici 7, što nam je i traženo u primeru.



Slika 7: Grafik zavisnosti brzine od vremena

△

3.2.1 Brzina i ubrzanje kao vektorske i skalarne veličine

Tekst u ovoj sekciji je većinom autorov prevod teksta [3].

Definisali smo brzinu kao izvod funkcije pređenog puta. Funkcija pređenog puta je funkcija koja zavisi od vremena. Sada hoćemo da definišemo brzinu kao izvod funkcije položaja objekta. Videćemo da se brzina može posmatrati kao vektorska veličina i kao intenzitet vektora tj. kao skalarna veličina.

Kretanje nekog objekta je promena položaja tog objekta u odnosu na drugi (referentni) objekat. Posmatraćemo kretanje u toku vremenskog intervala $[0, T]$, duž prave linije. Pozicija objekta na pravoj liniji može biti jednoznačno određena (do na znak tj. smer) njegovom udaljenošću od početnog položaja - dakle jednom koordinatom, pa imamo jednodimenzioni problem. Za početni položaj biramo proizvoljnu tačku. Mi ćemo birati poziciju objekta u trenutku $t = 0$. Pozicija objekta će biti funkcija koja zavisi od vremena, $x : [0, T] \to \mathbb{R}$ koju ćemo nazvati funkcija pozicije ili funkcija položaja.

Sa matematičke tačke gledišta prirodno je pretpostaviti da je funkcija položaja x neprekidna i ograničene varijacije na intervalu $[0, T]$. Ukupna varijacija funkcije položaja na intervalu $[0, t]$ je dužina puta $s(t)$ koju je objekat prešao od momenta 0 do momenta t. Funkciju $s : [0, T] \to \mathbb{R}$ zovemo funkcija putanje ili funkcija pređenog puta.

Sa fizičke tačke gledišta prirodno je pretpostaviti da je funkcija položaja x neprekidna i da postoji konačno mnogo momenata $0 = t_0 < t_1 < t_2 < .... < t_n = T$ takvih da je restrikcija funkcije x na svakom intervalu $[t_{j-1}, t_j]$ za $j \in \{1, ..., n\}$ monotona funkcija. Ako je $j_0 \in \{0, 1, ..., n\}$ najveći indeks j takav da $t_j \leq t$ onda definišemo funkciju pređenog puta kao:

$$s(t) = \sum_{j=1}^{j_0} |x(t_j) - x(t_{j-1})| + |x(t) - x(t_{j_0})|.$$

Sada ćemo definisati srednju brzinu kao vektorsku veličinu (eng. *average velocity*) i intenzitet srednje brzine tj. srednju brzinu kao skalarnu veličinu (eng. *average speed*).

Vektor srednje brzine objekta u intervalu $[t_1, t_2]$ definišemo kao:

$$v_{sr} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Intenzitet srednje brzine objekta u intervalu $[t_1, t_2]$ definišemo kao:

$$u_{sr} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Pretpostavimo sada je da je funkcija x diferencijabilna na intervalu $(0, T)$ i da postoje $x'_+(0)$ i $x'_-(T)$. Sledi da je funkcija s takodje diferencijabilna na intervalu $(0, T)$ i $s'_+(0)$ i $s'_-(T)$ postoje.

Sada ćemo da definisati trenutnu brzinu kao vektorsku veličinu (eng. *instantaneous velocity*) i trenutnu brzinu kao skalarnu veličinu (intenzitet vektora

trenutne brzine, eng. *instantaneous speed*).
Vektor trenutne brzine u trenutku t_2 je definisan kao granična vrednost vektora srednje brzina na intervalu $[t_1, t_2]$, kada t_1 teži t_2. To možemo zapisati na sledeći način:

$$v(t_2) = \lim_{t_1 \to t_2} \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = x'(t_2). \tag{13}$$

Intenzitet vektora trenutne brzine u trenutku t_2 je definisana kao granična vrednost intenziteta srednje brzine na intervalu $[t_1, t_2]$, kada t_1 teži t_2, što zapisujemo kao:

$$u(t_2) = \lim_{t_1 \to t_2} \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = s'(t_2). \tag{14}$$

Vektor trenutne brzine i intenzitet vektora trenutne brzine su takodje funkcije koje preslikavaju interval $[0, T]$ u skup realnih brojeva tj. $v : [0, T] \to \mathbb{R}$ i $u : [0, T] \to \mathbb{R}$.

Lema 1. *Za svako $t \in [0, T]$ važi $u(t) = |v(t)|$.*

Ako se objekat kreće u pozitivnom smeru, funkcija položaja ne opada i $v \geq 0$; ako objekat menja smer kretanja u trenutku t_0, onda $v(t_0) = 0$; i ako se objekat kreće u negativnom smeru, onda funkcija položaja ne raste i $v \leq 0$.

Vektor brzine opisuje promenu pozicije objekta tokom vremena. Vektorska veličina koja se koristi za opisivanje promene vektora brzine objekta tokom vremena je vektor ubrzanja.

Želimo da definišemo ubrzanje kao vektorsku veličinu i ubrzanje kao skalarnu veličinu. Srednja vrednost vektora ubrzanja u toku vremenskog intervala $[t_1, t_2]$ je definisana kao:

$$a_{v-sr} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Srednja vrednost ubrzanja kao skalara u toku vremenskog intervala $[t_1, t_2]$ je definisana kao:

$$a_{u-sr} = \frac{u(t_2) - u(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Ako pretpostavimo da je funkcija v diferencijabilna na intervalu $(0, T)$ i da postoje $v'_+(0)$ i $v'_-(T)$, onda će važiti sledeće:

Lema 2. *Funkcija u je diferencijabilna na $(0, T)$, osim možda u tačkama u kojima funkcija x ima ekstremne vrednosti. U ovim tačkama u'_+ i u'_- postoje. Takodje, postoje $u'_+(0)$ i $u'_-(T)$.*

Ako odgovarajući izvodi postoje onda se $a_v(t) = v'(t)$ i $a_u(t) = u'(t)$ redom nazivaju trenutni vektor ubrzanja i trenutno skalarno ubrzanje.

Primetimo da pod navedenim pretpostavkama $a_v(t)$ postoji za sve $t \in [0, T]$, što se tiče $a_u(t)$ nije neophodno da postoji za momente t u kojima funkcija položaja x ima ekstremene vrednosti. Takođe, $a_v(t)$ i $a_u(t)$ mogu biti pozitivne kao i negativne.

Pozitivan vektor ubrzanja se uglavnom tumači kao povećanje intenziteta vektora brzine. Medjutim, ovo nije tačno. Ovo je očigledno tačno ako je vektor brzine pozitivan, a povećava se sa vremenom. To je takođe tačno za negativan vektor brzine ako vektor brzine opada tokom vremena.

Primer 11. *Ako je funkcija položaja definisana kao*

$$x(t) = \sin t,\ \ t \in [0, \pi],$$

onda funkcija putanje izgleda ovako:

$$s(t) = \begin{cases} \sin t, & t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \\ 2 - \sin t, & t \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}.$$

Trenutna brzina kao vektor u momentu $t \in [0, \pi]$ *je:*

$$v(t) = x'(t) = \cos t,$$

a trenutna brzina kao intenzitet vektora u momentu $t \in [0, \pi]$ *je:*

$$u(t) = s'(t) = |\cos t|.$$

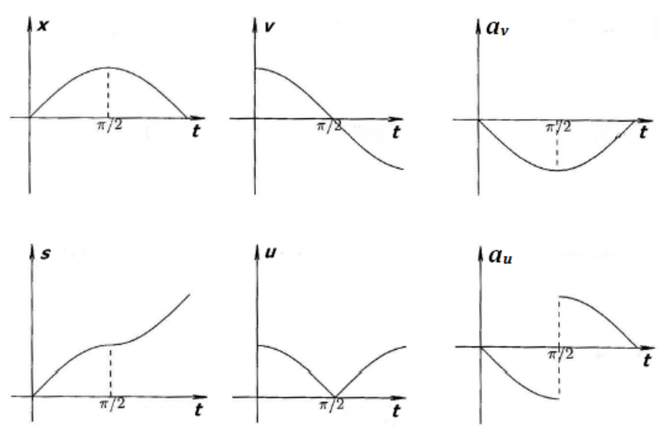
Najzad, za trenutni vektor ubrzanja u momentu $t \in [0, \pi]$ *mi imamo:*

$$a_v(t) = -\sin t,$$

a za trenutni intenzitet ubrzanja u momentu $t \in [0, \pi]$ *imamo:*

$$a_u(t) = \begin{cases} -\sin t, & t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right) \\ \sin t, & t \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases},$$

gde $a_u\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ *ne postoji. Možemo pogledati sliku 8.*



Slika 7

3.2.2 Brzina i ubrzanje kao vektorske veličine u prostoru

Tekst u ovoj sekciji je napisan na osnovu [2].

Do sada smo imali jednodimenzioni slučaj, a sada ćemo posmatrati kretanje objekata u prostoru, tj. vektore brzine i ubrzanja sa svoje tri komponente.

Imamo Dekartov koordinatni sistem koji je određen koordinatnim osama x, y, z i koordinatnim početkom, tačkom O. Iz koordinatnog početka mogu se postaviti tri orijentisana pravca određena odgovarajućim jediničnim vektorima - $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$. Ova tri pravca nazivamo koordinatnim osama. Položaj neke tačke A u prostoru, u ovom sistemu, određen je skupom njenih koordinata (x, y, z), odnosno vektorom položaja:

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}. \tag{15}$$

Već smo opisali kretanje kao neprekidnu promenu položaja. Opisivanje kretanja znači određivanje položaja materijalne tačke (objekta) u proizvoljnom trenutku vremena u odnosu na dati koordinatni sistem. Dakle, položaj tačke A pri kretanju određen je tekućim vektorom položaja $\vec{r}$:

$$\vec{r} = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k} = \vec{r}(t). \tag{16}$$

Ranije smo opisali pojmove vektor srednje brzine, kao i vektor trenutne brzine. U ovoj notaciji vektor trenutne brzine u trenutku t možemo napisati kao:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \tag{17}$$

Matematički gledano, trenutna brzina je jednaka prvom izvodu vektora položaja tačke po vremenu. U pravouglom koordinatnom sistemu vektor $\vec{v}$ ima tri komponente duž x, y i z ose. Diferenciranjem vektora položaja po vremenu sledi:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}.$$

Kako je kao i za svaki drugi vektor $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$, sledi da su komponente brzine date sa:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Definisali smo vektor brzine, sada hoćemo da u ovakvoj notaciji definišemo vekor ubrzanja.

Vektor ubrzanja materijalne tačke, u tački A, u trenutku vremena t možemo napisati kao:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \tag{18}$$

Pošto je, kako smo već videli u (17),

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt},$$

sledi:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \tag{19}$$

Dakle, vektor ubrazanja jednak je drugom izvodu vektora položaja pokretne tačke po vremenu. U pravouglom koordinantnom sistemu i ubrzanje će imati tri komponente, duž O_x, O_y i O_z osa. Dvostrukim diferenciranjem vektora položaja po vremenu sledi:

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k},$$

jer su $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$ nepromenjivi po pravcu i po intenzitetu. Sa druge strane i vektor $\vec{a}$ se može izraziti preko komponenata a_x, a_y i a_z, odakle sledi da je:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

4 Kretanje materijalne tačke

Tekst u ovoj sekciji je napisan na osnovu [2].

U ovoj sekciji videćemo kako primenjujemo izvode u fizici na primeru opisa kretanja materijalne tačke.

4.1 Pravolinijsko kretanje materijalne tačke

Pre nego što opišemo pravolinijsko kretanje materijalne tačke navešćemo matematičku formulaciju II Njutnovog zakona.

Sila je proporcionalna ubrzanju, ali i masi i to tako da je:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}. \tag{20}$$

Ovo je vektorska jednačina, kojoj uzimajući u obzir definicije brzine i ubrzanja koje smo naveli u prethodnoj sekciji odgovaraju sledeće tri skalarne jednačine:

$$ma_x = m\frac{dv_x}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x,$$

$$ma_y = m\frac{dv_y}{dt} = m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y,$$

$$ma_z = m\frac{dv_z}{dt} = m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z.$$

U slučaju pravolinijskog kretanja materijalne tačke kretanje se vrši duž jedne prave linije i uvek se može odabrati da to bude jedna od koordinatnih osa, recimo u našem slučaju neka je to x-osa. Pri tom $\vec{F}$, $\vec{i}$ i $\vec{v}_0$ imaju isti pravac, te je potrebno rešiti samo jednu diferencijalnu jednačinu. Potrebno je rešiti samo jednu difernecijalnu jednačinu jer se kretanje vrši samo duž x ose, znači da je

$F_y = 0$ i $F_z = 0$ jer $\dfrac{d^2y}{dt^2} = 0$ i $\dfrac{d^2z}{dt^2} = 0$. Diferencijalna jednačina koju rešavamo je oblika:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right).$$

U daljem tekstu navešćemo nekoliko primera pravolinijskog kretanja pod dejstvom konstantne sile ($F = const.$). Kretanje pod dejstvom konstantne sile je najjednostavniji primer kretanja i javlja se recimo pod dejstvom sile Zemljine teže, za mala rastojanja od površine Zemlje. Koordinatni sistem biramo tako da je x-osa usmerena vertikalno na dole. Koordinatni početak biramo proizvoljno. Obično biramo da je koordinatni početak početni položaj tačke, i ovom slučaju pravac x-ose se poklapa sa pravcem vektora sile Zemljine teže (tj. pravac se poklapa sa pravcem Zemljinog poluprečnika na mestu gde se telo nalazi), a smer je ka centru zemlje (zato kažemo da je x-osa usmerena vertikalno na dole). Pišemo:

$$F_x = mg = const, \quad F_y = F_z = 0.$$

Diferencijalna jednačina kretanja je oblika:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg, \text{ odnosno } \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = g. \tag{21}$$

Množenjem izraza (21) sa dt i integracijom dobijamo brzinu duž x-ose u zavisnosti od vremena:

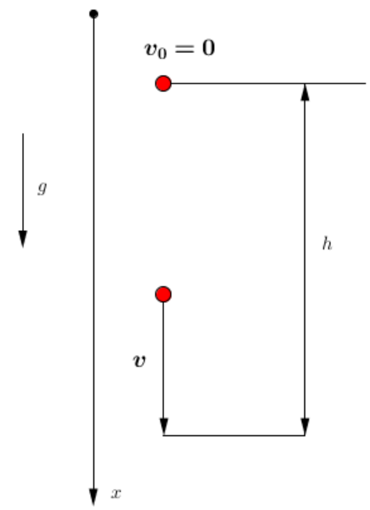
$$\frac{dx}{dt} = gt + C_1 = v.$$

Još jednom integracijom izraza dobijamo:

$$x = \frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2. \tag{22}$$

Formula (22) je opšte rešenje diferencijalne jednačine kretanja i daje zavisnost položaja (u ovom slučaju opisanog x koordinatom) materijalne tačke od vremena. U zavisnosti od početnih uslova dobijaju se različite vrednosti za C_1 i C_2, pa se prema tome mogu razlikovati tri slučaja: slobodan pad, hitac u vis i hitac na dole.

4.1.1 Slobodan pad



Slika 9: Slobodan pad

Slobodan pad je slučaj kada telo u početnom trenutku miruje (tj. njegova početna brzina je jednaka nuli). Za početni položaj možemo izabrati tačku x_0, pa dakle imamo :

$$t = 0 : \quad v_x(0) = 0, \quad x(0) = x_0, \text{ sledi } C_1 = 0 \text{ i } C_2 = x_0,$$

odnosno zavisnost brzine i položaja od vremena:

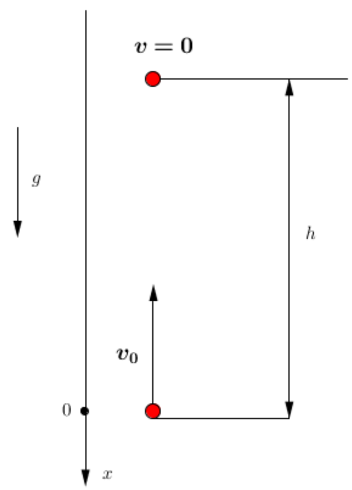
$$v_x = \frac{dx}{dt} = gt, \tag{23}$$

$$x = \frac{1}{2}gt^2 + x_0, \quad y = z = 0. \tag{24}$$

Iz (23) i (24) eliminisanjem vremena može se dobiti vrednost brzine koju telo stekne kada padne iz položaja x_0 u položaj x. Dakle, za rastojanje $h = x - x_0$:

$$v = \sqrt{2g(x - x_0)} = \sqrt{2gh}. \tag{25}$$

4.1.2 Hitac u vis



Slika 10: Hitac u vis

Hitac u vis je slučaj kada telo ima početnu brzinu usmerenu vertikalno nagore (sa negativnim predznakom, jer je usmerena suprotno izabranom smeru x-ose), dok za početni položaj možemo izabrati $x(0) = 0$:

$$t = 0: \quad v_x(0) = -v_0, \quad x(0) = 0, \text{ sledi } C_1 = -v_0 \text{ i } C_2 = 0,$$

odnosno

$$v_x = \frac{dx}{dt} = gt - v_0, \tag{26}$$

$$x = \frac{1}{2}gt^2 - v_0 t, \quad y = z = 0. \tag{27}$$

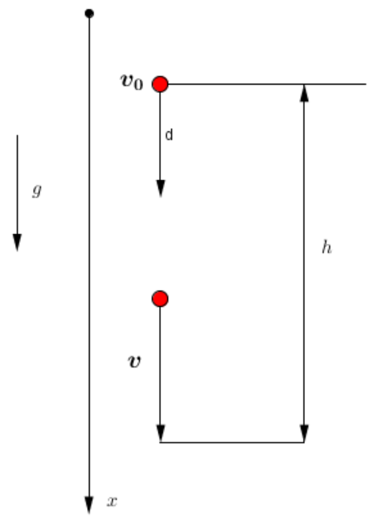
Iz (26) se može dobiti vreme potrebno da telo dostigne maksimalnu visinu, kao i maksimalna visina. Telo se prvo kreće usporeno, zaustavi se i zatim slobodno pada. Vreme penjanja se dobija izjednačavanjem brzine (odnosno prvog izvoda puta po vremenu) sa nulom, a visina se dobija zamenom tog vremena u izraz (27):

$$v_x = \frac{dx}{dt} = gt - v_0 = 0, \text{ sledi } t_{max} = \frac{v_0}{g}, \tag{28}$$

$$x_{max} = \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 - v_0\left(\frac{v_0}{g}\right) = -\frac{v_0^2}{2g}. \tag{29}$$

Znak minus označava kretanje na gore, odnosno nasuprot smera x-ose.

4.1.3 Hitac na dole



Slika 11: Hitac na dole

Hitac na dole je slučaj kada je početna brzina usmerena na dole, odnosno u smeru x-ose. Početni uslovi su sledeći:

$$t = 0: \quad v_x(0) = v_0, \quad x(0) = x_0, \text{ sledi } C_1 = v_0 \text{ i } C_2 = x_0,$$

odnosno

$$v_x = gt + v_0, \tag{30}$$

$$x = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + x_0. \tag{31}$$

U nastavku ćemo navesti primere vezane za slobodan pad, hitac u vis kao i hitac na dole. Primeri koje ćemo navesti mogu se objašnjavati u srednjoškolskoj nastavi.

Primer 12, Primer 13 i Primer 14 su preuzeti iz [5].

Primer 12. *Vreme slobodnog padanja jednog tela je duplo veće od vremena slobodnog padanja drugog tela.*

a) *Odrediti odnos brzina kojim ta dva tela padnu na zemlju?*

b) *Odrediti odnos predjenih puteva?*

Rešenje. U postavci primera vidimo da je vreme slobodnog padanja prvog tela, t_1, dva puta veće od vremena slobodnog padanja drugog tela, t_2, stoga možemo pisati: $t_1 = 2t_2$.

a) Kako nam se traži odnos brzina, izrazićemo brzinu slobodnog padanja prvog i drugog tela, pomoću jednačine (23). Za prvo telo imamo:

$$v_1 = g \cdot t_1 = g \cdot 2t_2.$$

Za brzinu slobodnog padanja drugog tela možemo pisati:

$$v_2 = g \cdot t_2.$$

Stoga sledi:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{g \cdot 2t_2}{g \cdot t_2} = \frac{2}{1}.$$

Zaključujemo $v_1 : v_2 = 2 : 1$.

b) Kako nam se traži odnos pređenih puteva ova dva tela, iz (24) možemo izračunati rastojanje od početnog položaja tela, x_0, do položaja kada telo padne x. To rastojanje je $h = x - x_0$ i ono predstavlja pređeni put tela. Za prvo telo je:

$$h_1 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot (2 \cdot t_2)^2 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot 4 \cdot t_2^2.$$

Pređeni put drugog tela je:

$$h_2 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_2^2.$$

Možemo zaključiti da je odnost pređenih puteva $h_1 : h_2 = 4 : 1$.

△

Primer 13. *Dva tela koja istovremeno počinju da padaju sa visina* $18m$ *i* $14m$, *istovremeno stižu na zemlju. Odrediti kolika je bila početna brzina prvog tela ako drugo telo slobodno pada.*

Rešenje. Znamo da drugo telo slobodno pada i imamo visinu sa koje telo pada na osnovu čega možemo izračunati vreme slobodnog pada. Kako znamo da tela padaju istovremeno, vreme slobodnog pada drugog tela i vreme pada prvog tela su jednaka.
Drugo telo pada sa visine $14m$, pa na osnovu jednačine (24), uz $h = x - x_0$, imamo:

$$h = \frac{1}{2}gt^2,$$

odakle je $t = 1,67s$.
Iz jednačine (31) (uz $h = x - x_0$), možemo da dobijemo:

$$h = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t. \tag{32}$$

Kako prvo telo pada sa visine od $18m$, a znamo da je vreme pada $t = 1,67s$, lako dobijamo početnu brzinu prvog tela (kada poznate vrednosti zamenimo u (32) i izrazimo v_0), $v_0 = 2,4\frac{m}{s}$.

△

Primer 14. *Telo je bačeno vertikalno u vis početnom brzinom* $20\frac{m}{s}$*. Kada je ono dostiglo najvišu tačku, sa istog mesta sa zemlje bačeno je drugo telo takođe brzinom* $20\frac{m}{s}$*. Odrediti visinu na kojoj će se tela sudariti.*

Rešenje. Prvo telo koje je bačeno vertikalno u vis, i kada je dostiglo svoju maksimalnu visinu ono je počelo slobodno da pada. U trenutku kada je prvo telo dostiglo makismalnu visinu, drugo telo je bačeno vertikalno u vis. U primeru se traži da odredimo visinu na kojoj će se dva tela sresti. U trenutku kada se sretnu njihovi položaji na x koordinati su jednaki. Prvo ćemo naći maksimalnu visinu koju dostiže prvo telo. Prema jednačini (29) maksimalna visina je:

$$x_{1\ max} = -\frac{v_0^2}{2g}.$$

Kada telo počne slobodno da pada, početni položaj je maksimalna visina, i ono pada u položaj x_1. Prema jednačini (24) možemo odrediti položaj x_1:

$$x_1 = \frac{1}{2}gt^2 - \frac{v_0^2}{2g}. \tag{33}$$

Drugo telo je bačeno vertikalno u vis sa poznatom početnom brzinom, možemo odrediti njegov položaj x_2 prema jednačini (27):

$$x_2 = \frac{1}{2}gt^2 - v_0 t. \tag{34}$$

Tela su se sudarila kada su njihovi položaji x_1 i x_2 jednaki. Izjednačimo položaj prvog tela i položaj drugog tela i izrazimo vreme t kada su se tela sudarila. Dobijamo:

$$t = \frac{v_0}{2g}.$$

Zatim vreme t ubacimo u jednu od jednačina (33) ili (34). Koristeći npr. jednačinu (34) dobijamo visinu na kojoj su se tela sudarila:

$$x_2 = \frac{1}{2}g(\frac{v_0}{2g})^2 - v_0\frac{v_0}{2g}.$$

Sledi:

$$x_2 = -\frac{3v_0^2}{8g}.$$

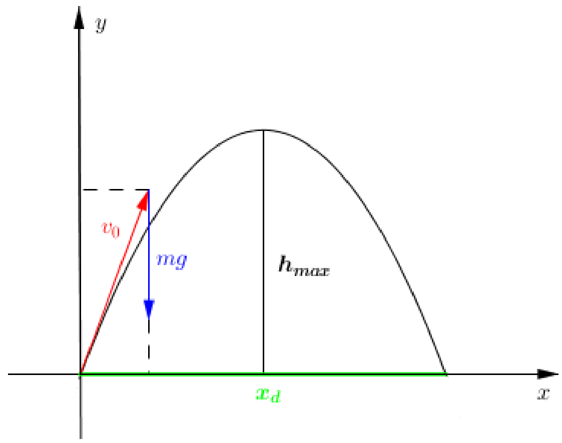
Ako visinu obeležimo sa h ($x_2 = h$) i uvrstimo početnu brzinu, konačno dobijamo da će se tela sudariti na visini $h = 15m$.

△

4.2 Krivolinijsko kretanje materijalne tačke

Do sada smo razmatrali dinamiku pravolinijskog kretanja. Kretanje po krivoj liniji, odnosno krivolinijsko kretanje je u opštem slučaju složenije jer se odvija u prostoru, odnosno u specijalnom slučaju ravni. Veličine kojima se kretanje opisuje mogu se u tom slučaju razložiti na svoje komponente duž koordinatnih osa. Razmotrićemo neke jednostavnije slučajeve krivolinijskog kretanja.

4.2.1 Kosi hitac



Slika 12: Kosi hitac

Kosi hitac predstavlja kretanje materijalne tačke pod dejstvom sile Zemljine teže, $F = mg = const$, sa datom početnom brzinom koja zaklapa neki ugao sa horizontalnom ravni. Izaberimo koordinatni sistem tako da se kretanje vrši u xOy ravni.

Diferencijalne jednačine kretanja duž pojedinih koordinatnih osa imaće sledeći oblik:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = 0. \tag{35}$$

Jednostavnom integracijom jednačina (35) dobijamo:

$$\frac{dx}{dt} = v_x = C_1, \quad \frac{dy}{dt} = v_y = -gt + C_2, \quad \frac{dz}{dt} = v_z = C_3. \tag{36}$$

Integracijom jednačina (36) dobija se:

$$x = C_1t + C_4, \quad y = -\frac{gt^2}{2} + C_2t + C_5, \quad z = C_3t + C_6,$$

gde su C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 i C_6 integracione konstante koje se određuju iz početnih uslova kretanja:

$$t = 0: \quad x(0) = y(0) = z(0) = 0 \quad \text{i} \quad v = v_0.$$

Sledi:

$$C_1 = v_0 \cos\alpha, \quad C_2 = v_0 \sin\alpha, \quad C_3 = 0, \quad C_4 = C_5 = C_6 = 0.$$

Konačno, parametarske jednačine zavisnosti brzine od vremena će biti:

$$v_x = v_0 \cos\alpha, \quad v_y = v_0 \sin\alpha - gt, \quad v_z = 0. \tag{37}$$

Parametarske jednačine zavisnosti koordinata od vremena će biti:

$$x = v_0 t \cos\alpha, \quad y = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}, \quad z = 0. \tag{38}$$

Eliminisanjem vremena t iz jednačina (38) možemo dobiti jednačinu putanje (trajektorije) materijalne tačke kod kosog hica u eksplicitnom obliku (ako t izrazimo iz x i zamenimo u y):

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha}. \tag{39}$$

Želimo da odredimo domet kosog hica koji ćemo obeležiti sa x_d. Domet x_d se dobija kada jednačinu (39) izjednačimo sa 0 tj. kada je $y = 0$:

$$0 = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha}, \text{ odakle je:}$$

$$x_1 = 0 \quad \text{i} \quad x_2 = x_d = \frac{2v_0^2 \cos^2\alpha \operatorname{tg}\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Dakle, domet zavisi od v_0 i od ugla α. Za dato v_0 domet je najveći za $\sin 2\alpha = 1$, tj. za $\alpha = 45°$.
Vreme potrebno da telo dostigne maksimalnu visinu sledi iz uslova:

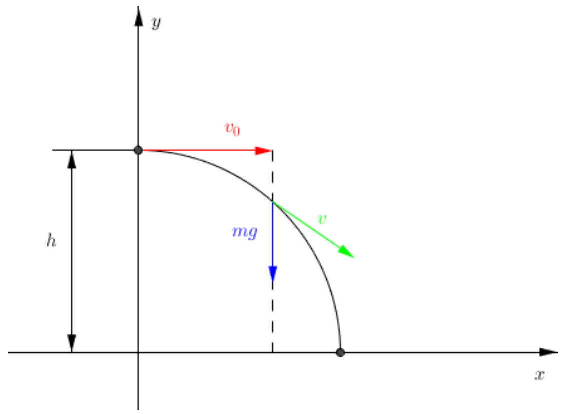
$$\frac{dy}{dt} = v_0 \sin\alpha - gt = 0, \text{ odakle je } t_1 = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}.$$

Ukupno vreme leta do njegovog pada na horizont sledi iz uslova da je $x = x_d$, odnosno:

$$v_0 t_2 \cos\alpha = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha, \text{ te je } t_2 = \frac{2v_0}{g} \sin\alpha = 2t_1.$$

Ako je v_0 dato, kako je $0 < \alpha < 180°$, tada jednačina kosog hica (39) daje za različito α porodicu parabola, pa čak i pravih u specijalnim slučajevima. Tako za $\alpha = 90°$ i $\alpha = -90°$ možemo dobiti iz jednačina (37) i (38) izraze koji opisuju hitac u vis i hitac na dole o kojima smo govorili u sekciji pravolinijsko kretanje materijalne tačke.

4.2.2 Horizontalni hitac



Slika 13: Horizontalni hitac

Horizontalan hitac je poseban slučaj kosog hica kada je ugao $\alpha = 0$. Za taj slučaj parametarske jednačine kretanja se dobijaju direktno iz jednačina (38) zamenom ugla α, odnosno njegovog sinusa i kosinusa, pa je:

$$x = v_0 t, \quad y = -\frac{gt^2}{2}, \quad z = 0. \tag{40}$$

Eliminisanjem vremena iz (40) dobijamo jednačinu putanje horizontalnog hica:

$$y = -\frac{x^2 g}{2v_0^2}. \tag{41}$$

Navešćemo primere vezane za horizontlni i kosi hitac, koji se takođe mogu rešavati u srednjoškolskoj nastavi.

Primer 15 i Primer 16 su preuzeti iz [7].

Primer 15. *Kamen je bačen horizontalno (tj. $\alpha = 0$) sa prozora zgrade brzinom $v_0 = 10\frac{m}{s}$. Ako je kamen pao na zemlju nakon 5 sekundi, izračunati:*

a) visinu sa koje je kamen bačen.

b) x i y komponentu brzine kamena prilikom udara u zemlju.

Rešenje. Diferencijalna jednačina kretanja duž x ose će biti:

$$m \cdot \frac{dv_x}{dt} = 0. \tag{42}$$

Integracijom jednačine (42) dobijamo:

$$v_x = C_1.$$

U trenutku $t = 0$, početna brzina duž x ose će biti $v_{0x} = v_0$. Dakle, slediće da je $C_1 = v_0$. Odatle možemo videti da je $v_x = v_0$. Dakle,

$$\frac{dx}{dt} = v_0. \tag{43}$$

Integracijom jednačine (43) dobijamo parametarsku jednačinu kretanja duž x ose:

$$x = v_0 t.$$

Diferencijalna jednačina kretanja duž y ose će biti:

$$m \cdot \frac{dv_y}{dt} = -m \cdot g. \tag{44}$$

Jednačina (44) se može podeliti sa m, a zatim integraliti odakle sledi:

$$v_y = -gt + C_2.$$

U trenutku $t = 0$, početna brzina duž y ose će biti $v_{0y} = 0$. Dakle, slediće da je $C_2 = 0$. Vidimo da je sada $v_y = -gt$. Dakle,

$$\frac{dy}{dt} = -gt. \tag{45}$$

Integracijom jednačine (45) dobijamo:

$$y = -\frac{gt^2}{2} + C_3.$$

U trenutku $t = 0$, dobićemo visinu sa koje je telo (u našem slučaju kamen) bačeno, tako da sledi da je ta visina $h = C_3$. Dobijamo parametarsku jednačinu kretanja duž y ose:

$$y = -\frac{gt^2}{2} + h. \tag{46}$$

a) Hoćemo da odredimo visinu sa koje je kamen bačen. Znamo da je kamen pao nakon $5s$. Kada je kamen pao na zemlju tada je $y = 0$. Dobijamo:

$$0 = -\frac{10 \cdot 5^2}{2} + h.$$

Sledi da je $h = 125m$. Za ubrzanje sile zemljine teže koje oznaăvamo sa g često uzimamo vrednost $10\frac{m}{s^2}$. Dakle, kamen je bačen sa visine $h = 125m$.

b) Sada nam se traži da izračunama x i y komponentu brzine kamena prilikom udara u zemlju. Dakle, potrebno je da izračunamo v_x i v_y. U postavci zadatka imamo da je kamen bačen sa početnom brzinom $v_0 = 10\frac{m}{s}$ i da je pao na zemlju nakon $5s$. Iz prethodnog imamo:

$$v_x = v_0, \text{ sledi: } v_x = 10\frac{m}{s}.$$

I znamo da je:

$$v_y = -gt, \text{ sledi: } v_y = 50\frac{m}{s}.$$

△

Primer 16. *Fudbaler je sa visine $h = 0$ šutnuo loptu pod uglom od $53°$ sa početnom brzinom $v_0 = 30\frac{m}{s}$. Izračunati maksimalnu visinu koju će lopta dostići, domet lopte (tj. koliko daleko će lopta odleteti) kao i vreme leta lopte.*

Rešenje. Diferencijalna jednačina kretanja duž x ose će biti:

$$m \cdot \frac{dv_x}{dt} = 0. \tag{47}$$

Integracijom jednačine (47) dobijamo:

$$v_x = C_1.$$

U trenutku $t = 0$, početna brzina duž x ose će biti $v_{0x} = v_0 \cos\varphi$. Dakle, slediće da je $C_1 = v_0 \cos\varphi$. Odatle možemo videti da je $v_x = v_0 \cos\varphi$. Dakle,

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos\varphi. \tag{48}$$

Integracijom jednačine (48) dobijamo parametarsku jednačinu kretanja duž x ose:

$$x = v_0 \cos\varphi t. \tag{49}$$

Diferencijalna jednačina kretanja duž y ose će biti:

$$m \cdot \frac{dv_y}{dt} = -m \cdot g. \tag{50}$$

Jednačina (50) se može podeliti sa m, a zatim integraliti odakle sledi:

$$v_y = -gt + C_2.$$

U trenutku $t = 0$, početna brzina duž y ose će biti $v_{0y} = v_0 \sin\varphi$. Dakle, slediće da je $C_2 = v_0 \sin\varphi$. Vidimo da je sada $v_y = -gt + v_0 \sin\varphi$. Dakle,

$$\frac{dy}{dt} = -gt + v_0 \sin\varphi. \tag{51}$$

Integracijom jednačine (51) dobijamo parametarsku jednačinu kretanja duž y ose:

$$y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 \sin\varphi t. \tag{52}$$

Prvo je potrebno da izračunamo maksimalnu visinu koju će lopta dostići. Dakle, maksimalna visina je visina u trenutku kada se lopta zaustavi, zatim lopta kreće da pada. Maksimalna visina se dostiže kada je brzina po y osi jednaka 0 tj. $v_y = 0$. Zatim trenutak t u kojem je v_y jednako nuli zamenimo u jednačinu (52). Sledi:

$$0 = -gt + v_0 \sin\varphi,$$

$$t = \frac{v_0 \sin \varphi}{g}.$$

Dalje imamo:

$$y = -\frac{g v_0^2 \sin^2 \varphi}{2g^2} + v_0 \sin \varphi \frac{v_0 \sin \varphi}{g}.$$

Kada sredimo dobijamo:

$$y = -\frac{v_0^2 \sin^2 \varphi}{2g} + \frac{v_0^2 \sin^2 \varphi}{g}, \text{ sledi: } y = \frac{v_0^2 \sin^2 \varphi}{2g}. \tag{53}$$

U postavci imamo da je $\varphi = 53^\circ$ i $v_0 = 30 \frac{m}{s}$, kada uvrstimo to u jednačinu (53) dobijamo maksimalnu visinu koju će lopta dostići i obeležavamo je sa h_{max}.

Sledeće što ćemo računati je vreme leta lopte. Vreme leta lopte ćemo dobiti tako što jednačinu (52) izjednačimo sa nula i izrazimo vreme t. Imaćemo dva slučaja, početni trenutak i vreme kada je lopta pala na zemlju. Nama je potrebno ovo vreme je nama potrebno. Dakle:

$$t = \frac{2 v_0 \sin \varphi}{g}. \tag{54}$$

Podatke iz postavke primera zamenimo u (54) i dobijamo traženo vreme leta lopte, $t = 4,8s$.

Domet lopte ćemo dobiti kada $t = 4,8s$ ubacimo u jednačinu (49) i zamenimo podatke iz postavke primera. Domet lopte je $x_d = 86,7m$.

△

5 Primena izvoda prilikom izučavanja konveksnosti funkcije

Za datu funkciju je od velikog značaja izučavati svojstva izvoda te funkcije. Ranije smo videli da diferencijabilne funkcije sa nenegativnim izvodom u nekom intervalu rastu, a se nepozitivnim izvodom opadaju (Stav 3). Dopunićemo ovo tvrđenje obratnim.

Stav 4. *Ako diferencijabilna funkcija $f(x)$ u intervalu (a, b) raste (opada), onda je $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) za $x \in (a, b)$.*

Dokaz. Pretpostavimo da $f(x)$ raste u intervalu (a, b). Neka je x proizvoljna tačka tog intervala. Tada je:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0 \quad \text{za} \quad x + h \in (a, b).$$

Odavde sledi:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0.$$

Slično se pokazuje $f'(x) \leq 0$ ako $f(x)$ opada. □

Primer 17. *Funkcija* $f(x) = x \ln x$ *strogo raste u intervalu* $(\frac{1}{e}, \infty)$*, a strogo opada u intervalu* $(0, \frac{1}{e})$*, jer je* $f'(x) = \ln x + 1 > 0$ *za* $x > \frac{1}{e}$ *i* $f'(x) < 0$ *za* $0 < x < \frac{1}{e}$*.*

Poznavanje pojma kao i svojstava izvoda funkcije koristimo za opisivanje konveksnosti date funkcije, što je tema ove sekcije. Prvo ćemo definisati pojam konveksne funkcije.

Definicija 4. *Funkcija* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *naziva se konveksnom ako za proizvoljne* $x_1,\ x_2 \in (a, b)$ *važi:*

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2),$$

gde je $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$*,* $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$*.*

Ako za $x_1 \neq x_2$ i $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$ umesto $\leq$ važi znak $<$, za funkciju f se kaže da je strogo konveksna. Ukoliko umesto znaka $\leq$ stoji znak $\geq$ (odnosno $>$) funkcija f je konkavna (odnosno strogo konkavna).

Prvo ćemo navesti i dokazati Lemu 3 koja će nam pomoći da dokažemo Stav 5 koji nam objašnjava ulogu izvoda funkcije u izučavanju konveksnosti.

Lema 3. *Funkcija* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *je konnveksna (strogo konveksna) ako i samo ako za proizvoljne tačke* $x_1,\ x_2,\ x$ *iz* (a, b)*, takve da je* $x_1 < x < x_2$*, važi:*

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \tag{55}$$

(odnosno, $\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$*). Analogno tvrdjenje važi za konkavne(strogo konkavne) funkcije.*

Dokaz. Neka je funkcija f konveksna i neka su $x_1,\ x_2,\ x \in (a, b)$, takvi da je $x_1 < x < x_2$. Napišimo x u obliku $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ sa $\lambda_1,\ \lambda_2 > 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, tj.

$$x = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} x_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} x_2.$$

Iz konveksnoti funkcije f sledi nejednakost:

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2),$$

koju možemo napisati u obliku

$$\left(\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right) f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2),$$

odakle se lako dobija nejednakost (55).

Lako se vidi, iz nejednakosti (55) sledi uslov konveksnosti funkcije f na intervalu (a, b).

Tvrđenje se analogno dokazuje za stroko konveksne, konkavne i strogo konkavne funkcije. $\square$

Stav 5. *Neka je funkcija* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *diferencijabilna. Da bi* f *bila konveksna (strogo konveksna) u* (a,b) *neophodno je i dovoljno da* f' *raste (strogo raste) u* (a,b).

Dokaz. Stav ćemo dokazati za slučaj konveksnosti. Neka je f konveksna funkcija i x_1, x_2, x proizvoljne tačke iz (a,b), takve da je $x_1 < x < x_2$. Prema Lemi 3 sledi da važi nejednakost (55). Stavljajući u ovoj nejednakosti najpre $x \to x_1$, zatim $x \to x_2$ dobija se

$$\lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2) = \lim_{x \to x_2} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Obratno, pretpostavimo da f' raste i da su x_1, x_2, x proizvoljni brojevi iz intervala (a,b), tako da je $x_1 < x < x_2$. Prema Lagranžovoj teoremi o srednjoj vrednosti, primenjenoj na funkciju f na segmentu $[x_1, x]$, osnosno $[x, x_2]$, imaćemo:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1), \quad x_1 < \xi_1 < x,$$

odnosno

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_2), \quad x < \xi_2 < x_2.$$

Kako je $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$, to je:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x},$$

što znači da je funkcija f konveksna. □

Funkcija f je konkavna (strogo konkavna) funkcija u intervalu (a,b) ako i samo ako f' opada (strogo opada) na (a,b).

Stav 6. *Neka funkcija* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *ima u svakoj tački* $x \in (a,b)$ *drugi izvod. Da bi* f *bila konveksna (konkavna) na* (a,b)*, neophodno je i dovoljno da bude* $f''(x) \geq 0$ *(*$f''(x) \leq 0$*) za* $x \in (a,b)$.

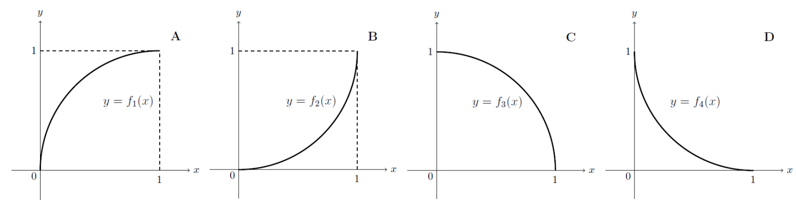
Dokaz. Kako je $f''(x) = (f'(x))'$, to ovaj stav sledi iz prethodnog. □

Stav 7. *Ako su* f *i* f' *definisane i neprekidne, a* f'' *je definisana i pozitivna (negativna) na* (a,b)*, onda je* f *strogo konveksna (konkavna) na* (a,b).

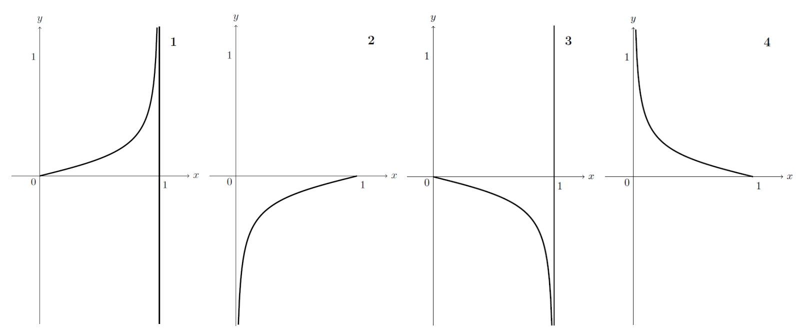
Primer 18. *Data je funkcija* $f(x) = x^2 \ln x$. *Ova funkcija je definisana u intervalu* $(0,\infty)$. *Njen drugi izvod je* $f''(x) = 2\ln x + 3$. *Drugi izvod je veći od nule kada* $x \in (e^{-\frac{3}{2}}, \infty)$*-u tom intervalu funkcija strogo konveksna. U intervalu* $(0, e^{-\frac{3}{2}})$ *drugi izvod funkcije je manji od nule i funkcija je strogo konkavna.*

Primer 19 je preuzet iz [6].

Primer 19. *Na slici 14 su prikazani grafici funkcija* $f_i : [0,1] \to \mathbb{R}$ *(*$i \in \{1,2,3,4\}$*). Na slici 15 su grafici njihovih izvoda. Povežite odgovarajuće grafike tj. grafiku funkcije pridružite grafik njenog izvoda.*



Slika 14: Grafici funkcija

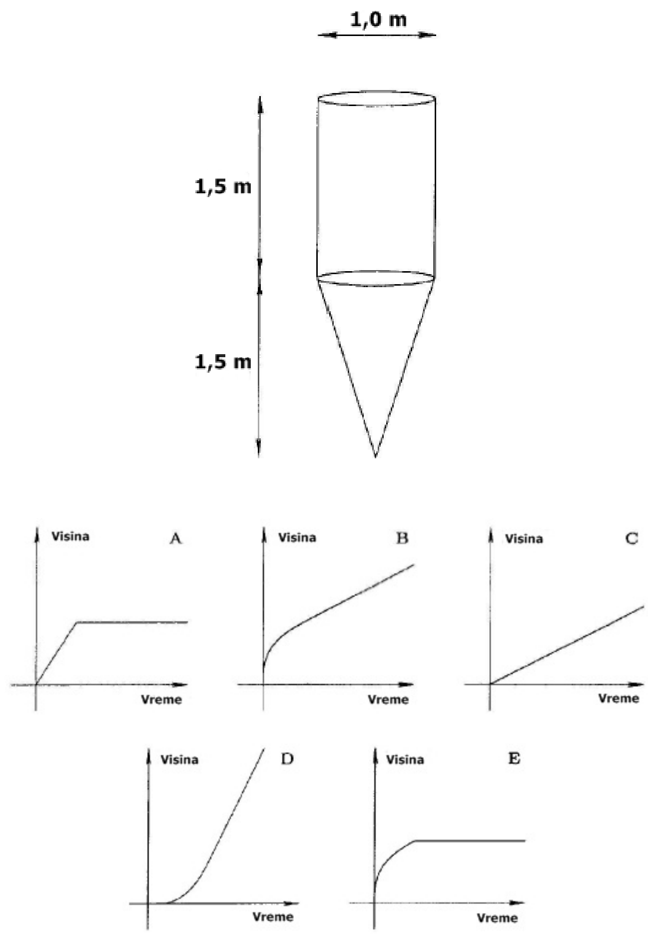


Slika 15: Grafici izvodnih funkcija

Rešenje. Posmatramo grafik A na slici 14. Vidimo sa grafika da funkcija raste. Zaključujemo da je prvi izvod funkcije koja je prikazana na grafiku A veći od nule tj. iznad x ose. Dakle, na slici 15 izbacujemo grafike 2 i 3 jer kao što vidimo tu su prikazani izvodi funkcija koje se opadajuće i izvodi su im ispod x ose. Vidimo da je funkcija prikazana na grafiku A konkavna, iz čega će slediti da je funkcija njenog prvog izvoda opadajuća. Funkicja izvoda na grafiku 4 je opadajuća. Dakle, izvod funkcije koja je prikazana na grafiku A je prikazan na grafiku 4. Na isti način posmatramo grafik B. Vidimo da funkcija raste-prvi izvod je veći od nule. Opet nam ostaju grafici 1 i 4. Istim principom, zaključujemo da je izvod funkcije prikazane na grafiku B prikazan na grafiku 1. Posmatramo grafik C. Funkcija prikazana na grafiku je opadajuća - funkcija prvog izvoda je ispod x ose. Dakle, gledamo grafike 2 i 3. Kako je funkcija prikazana na grafiku C konkavna, slediće da je funkcija njenog prvog izvoda opadajuća. Dakle grafiku C odgovara grafik 3. Na kraju, zaključujemo da grafiku D odgovara grafik 2. $\triangle$

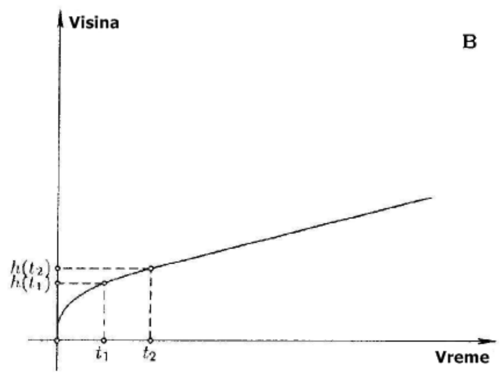
Primer 20 je preuzet iz [4].

Primer 20. *Rezervoar sa vodom obilka i dimenzije kao na slici 16. Na početku rezervoar je prazan. Zatim on je napunjen vodom brzinom jedan litar u sekundi. Koji grafik sa slike 16 prikazuje kako se visina vodene površine menja kroz vreme?*

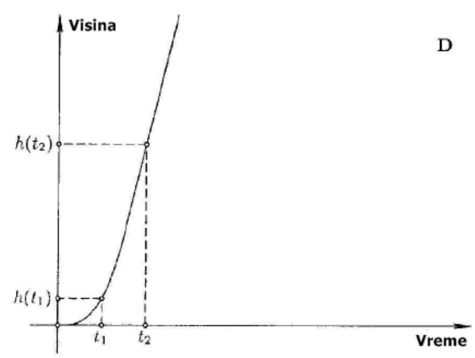


Slika 16

Rešenje. Intuitivno, dok se voda sipa u konusni deo rezervoara, visina vodene površine se povećava ali sve sporije (zato što se voda širi horizontalno). Zbog toga odgovori A i C su svakako netačni. Takođe intuitivno, kada voda počne da zauzima deo rezervoara koji je cilindričnog oblika, visina vode počinje da se menja ravnomerno tokom vremena, u jednakim vremenskim intervalima dolazi do jednakih promena (linearna zavisnost). Zaključujemo da i odgovor E nije tačan. Posmatrajmo dva momenta (t_1 i $t_2 = 2t_1$) i potencijalne vrednosti visine vode u tim momementima ($h(t_1)$ i $h(t_2)$), kao što je prikazano na slikama 17 i 18. Vidimo da u slučaju B imamo $h(t_2)-h(t_1) < h(t_1)-h(t_0)$, a u slučaju D imamo $h(t_2)-h(t_1) > h(t_1)-h(t_0)$. Kao što smo već zaključili - dok se voda sipa u konusni deo rezervoara visina se povećava, ali sve sporije, pa zaključujemo da je tačan odgovor B.



Slika 17



Slika 18

△

Objasnićemo na Primeru 20 vezu izmedju izvoda i konveksnosti funkcije. Grafici u Primeru 20 daju zavisnost visine vode od vremena. Označimo sa $h(t)$ na primer visinu vode koja se nalazi u rezervoaru u momentu $t \in [0, T]$. Mi imamo funkciju $h : [0, T] \to \mathbb{R}$. Fiksirajmo trenutak t_0 i označimo sa Δt

povećanje vremena. Osim toga, količnik:

$$u_{sr} = u_{sr}(t_0, \Delta t) = \frac{h(t_0 + \Delta t) - h(t_0)}{\Delta t}$$

predstavlja srednju brzinu podizanja visine površine vode u rezervoaru tokom vremenskog intervala $(t_0, t_0 + \Delta t)$. Ako Δt teži nuli, onda se količnik u_{sr} približava brzini podizanja visine vode u trenutku t_0. Da bi brzina bila definisana neophodno je da granična vrednost srednje brzine kada Δt teži nuli postoji. Dakle, brzina podizanja visine vode u rezervoaru u momentu t_0 jednaka $u(t_0)$, što je jednako $h'(t_0)$.

Znamo da ako prvi izvod postoji na nekom intervalu i ako na tom intervalu $h' \leq 0$ ($h' \geq 0$), onda funkcija h opada (raste) na tom intevralu. U primeru 20 imamo rastuću funkciju h, visina površine vode raste. Zbog prirode problema h' postoji.

Razmotrimo sada količnik:

$$a_{sr} = a_{sr}(t_0, \Delta t) = \frac{h'(t_0 + \Delta t) - h'(t_0)}{\Delta t}$$

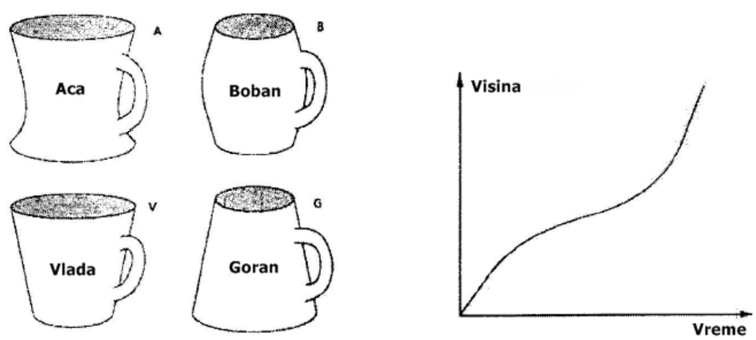
koji predstavlja srednje ubrzanje podizanja visine vode u rezervoaru tokom vremenskog intervala $(t_0, t_0 + \Delta t)$. Ako Δt teži nuli, onda količnik a_{sr} teži ubrzanju povećanja visine vodene površine u trenutku t_0. Da bismo definisali ubrzanje neophodno je da granična vrednost postoji. Sledi da je ubrzanje povećanja visine vode u rezervoaru u momentu t_0 baš $a(t_0)$, što je jendako $h''(t_0)$.

Znamo da ako drugi izvod postoji na nekom intervalu i na tom intervalu $h'' \leq 0$ ($h'' \geq 0$), onda je funkcija h konkavna (konveksna) na tom intervalu.

U Primeru 20 visina površine vode raste. Dakle, naša funkcija h raste, prvi izvod na nekom intervalu je veći od nule tj. $h' > 0$. Takođe znamo da u zavisnosti od oblika rezervora visina vode u rezervoaru raste sporije ili brže. Kako je brzina rasta vode u nekom trenutku prvi izvod funkcije visine u tom trenutku, znači da u zavisnosti od oblika rezervoara prvi izvod funkcije visine na nekom intervalu raste ili opada. Ako prvi izvod raste znači da je drugi izvod funkcije visine na nekom intervalu veći od nule tj. $h'' > 0$ i da je funkcija h konveksna. Ako prvi izvod opada znaći da je drugi izvod funkcije na nekom intervalu manji od nule tj. $h'' < 0$ i funkcija h je konkavna. Ako je drugi izvod veći (manji) od nule na nekom intervalu onda se rast visine vode ubrzava (usporava) na tom intervalu. Tako u našem primeru imamo da se u konusnom delu rast visine vode usporava, dakle drugi izvod funkcije visine je manji od nule i funkcija visine je konkavna.

Primer 21 je preuzet iz [4].

Primer 21. *Četiri solje su prikazane na slici 19 . U jednu od njih sipa se kafa konstantnom brzinom. Grafik prikazuje kako se visina kafe menja tokom vremena. Koja šolja se posmatra?*



Slika 19

Rešenje. Koristeći objašnjenje i rešenje Primera 20 rešićemo Primer 21. Imamo četiri šolje. Treba da nađemo koja šolja se posmatra ako je dat grafik kako se visina kafe menja tokom vremena.

Vidimo da je grafik visine kafe u zavisnosti od vremena prvo konkavan zatim konveksan, dakle možemo izbaciti solje V i G. U slučaju šolje V kako punimo kafu, rast visine kafe je sve sporiji jer se kafa širi horizontalno. Dakle, brzina rasta visine kafe opada tj. prvi izvod funkcije visine opada na nekom intervalu, što znači da je drugi izvod funkcije visine manji od nule i grafik bi do kraja bio konkavan. U slučaju šolje G, na isti način zaključujemo da bi grafik bio konveksan. Ostaje nam da odlučimo da li se posmatra šolja A ili šolja B. Posmatramo prvo šolju A. Kako se puni šolja A do jednog trenutka brzina rasta visine kafe raste tj. visina raste sve brže. Prvi deo grafika bi u ovom slučaju trebalo da bude konveksan, što nije slučaj sa našim grafikom. Zaključujemo da se posmatra šolja B. $\triangle$

6 Zaključak

Istorijiski gledano, pojam izvoda je nastao, sa jedne strane, razmatranjem fizičkog problema određivanje trenutne brzine kretanja tela, a sa druge strane, razmatranjem matematičkog problema određivanja koeficijenta pravca tangentne neke krive. Zato je pojam izvoda pogodan pojam koji možemo iskoristiti za opisivanje povezanosti matematike i fizike, naročito đacima u osnovnoj i srednjoj školi. U tu svrhu, u radu su nakon uvođenja pojma izvoda i prikaza najvažnijih teorema, dati i detaljano razrađeni primeri primene izvoda u opisivanju dinamike materijalne tačke (slobodnog pada, hica na dole, hica u vis, kosog i horizontalnog hica), kao i primena izvoda u opisivanju važne osobine funkcija - konveksnosti.

Literatura

[1] Dušan Adnađević, Zoran Kadelburg, Matematička analiza 1, Matematički fakultet, Beograd, Deveto izdanje 2010.

[2] Prof. dr Dragoljub S. Belić, Fizika I za studente fizičke hemije, Fizički fakultet, Beograd, 1996.

[3] Miodrag Mateljević, Marek Svetlik, A contribution to the development of functional thinking related to convexity and one-dimensional motion, The Teaching of Mathematics, XIV, 2 (2011), 87-96.

[4] Miodrag Mateljević, Aleksandra Rosić, Marek Svetlik, A problem from the Pisa assessment relevant to calculus, The Teaching of Mathematics, XIII, 1 (2011), 15-29.

[5] Nataša Čaluković, Fizika 1-zbirka zadataka i testova za prvi razred gimnazije, Krug, Beograd, Sedmo izdanje 2010.

[6] Marek Svetlik, Testovi iz Prakse nastave matematike i računarstva, 2010-2015.

[7] Srđan Vukmirović, Materijal za spremanje ispita Odabrana poglavlja geometrije B, 2015/2016. http://alas.matf.bg.ac.rs/ vsrdjan/files/OPGB.htm